

# Fluid Properties

## سیال: (fluid)

سیال ماده ای است که اگر تحت تاثیر تنش برشی مماسی قرار گیرد بطور پیوسته تغییر شکل می دهد ، هر چند تنش برشی اندک باشد.

مکانیک سیالات رفتار سیالات ساکن (static) یا متحرک (dynamic) را بررسی می کند.

سیال حالات مایع (liquid) و گاز (gas) یا بخار را شامل می گردد.



## محیط پیوسته: (Continuum)

به جای تلفیق پیچیده اثرات واقعی ملکولهای مجزا از توزیع پیوسته فرضی ماده (محیط پیوسته) استفاده می شود. روش محیط پیوسته هنگامی که مسیر متوسط آزاد ملکولها (mean free path) با کوچکترین طول با معنی مسئله هم مرتبه باشد بکار نمی آید (مثلا در حالتی که مقدار گاز کمی در محفظه بزرگی وجود دارد).

مسیر متوسط آزاد ملکولها متوسط فاصله ای است که ملکولهای سیال بین دو برخورد متوالی طی می کنند.

## بعد (Dimension)

اختصاراتی است که برای بیان نموده‌های جسم استفاده می‌شود. ابعاد مستقل را ابعاد اصلی (primary units) و بقیه ابعاد را ابعاد فرعی یا ثانویه (secondary units) می‌نامند.

### ابعاد اصلی (PRIMARY UNITS)

Quantity	Dimension	International System of Units (SI)	U.S. Customary System (USCS)	cgs (سانتی متر-گرم-ثانیه)
طول (Length)	L	meter, m	foot, ft	Cm
جرم (Mass)	M	kilogram, kg	slug, slug / pound mass, lbm	gram, g
زمان (Time)	T	second, s	second, s	second, s
حرارت درجه (Temperature)	$\theta$	Kelvin, K	Rankin, R	Kelvin, K

اسلاگ مقدار جرمی است که تحت اثر 1 lbf ۱ شتابی برابر  $1 \text{ ft/s}^2$  می‌گیرد ( $1 \text{ slug} = 32.2 \text{ lbm}$ ).  
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$   
 lbm مقدار ماده ای است که سطح زمین آنرا با نیروی 1 lbf به طرف خود می‌کشد (وزن آن 1 lbf است).

نیرو از ابعاد فرعی بوده و به ترتیب در سیستم SI، USCS و cgs از واحد نیوتن (N)، پوند نیرو (lbf) و دین (dyne, dyn) استفاده می‌شود. البته می‌توان به جای جرم از نیرو به عنوان واحد اصلی استفاده کرد.

### ابعاد فرعی (SECONDARY UNITS)

واحدهای فرعی زیادی وجود دارند که از ترکیب واحدهای اصلی تولید می‌شوند. مهمترین واحدهای فرعی در مکانیک سیالات عبارتند از:

Quantity	SI Unit	Dimension
سرعت (velocity)	m/s	$LT^{-1}$
شتاب (acceleration)	$m/s^2$	$LT^{-2}$
نیرو (force)	N $kg \text{ m/s}^2$	$MLT^{-2}$
انرژی/کار (energy/work)	Joule J N m, $kg \text{ m}^2/s^2$	$ML^2T^{-2}$
توان (power)	Watt W N m/s $kg \text{ m}^2/s^3$	$ML^2T^{-3}$
فشار/تنش (pressure/stress)	Pascal P, $N/m^2$ , $kg/(m.s^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$
جرم مخصوص یا چگالی (density)	$kg/m^3$	$ML^{-3}$
وزن مخصوص (specific weight)	$N/m^3$ $kg/(m^2.s^2)$	$ML^{-2}T^{-2}$
چگالی نسبی (relative density)	بدون واحد	1 بی بعد

## قانون همگنی ابعادی:

معادلات اساسی فیزیک از نظر ابعادی همگن هستند. معادله همگن معادله ای است که از عملیات تحلیلی بدست آمده و مبین یک پدیده فیزیکی باشد و در تمام سیستمهای آحاد معتبر است.

دانستن بعد کمیتها جهت تبدیل واحدها از یک سیستم به سیستم دیگر ضروری است:

$$\rho \left( \frac{t}{m^3} \right) = \frac{1000kg}{(100)^3 cm^3} = 10^{-3} \frac{kg}{cm^3}$$

$$p \left( \frac{lbf}{ft^2} \right) = \frac{4.448N}{(0.3048)^2 m^2} = 47.88 pa$$

واحدهای طرفین یک معادله را می توان به سهولت کنترل کرد. چنانچه واحدها یکسان نباشند حتما اشتباهی روی داده است. مثلا امکان ندارد:

$$30 \text{ kg/m s} = 30 \text{ m} !$$

## خواص مربوط به جرم

### جرم مخصوص (MASS DENSITY)

جرم مخصوص ( $\rho$  - "rho") با واحد  $\text{Kg/m}^3$  جرم در واحد حجم را نشان می دهد.

بعد:  $\text{ML}^{-3}$

مقادیر نمونه: (در دمای  $288.15 \text{ K}$  ( $4^\circ \text{C}$ ) و فشار  $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ )

آب =  $1000 \text{ Kg/m}^3$  ( $62.4 \text{ lbf/ft}^3$ ) جیوه =  $13546 \text{ Kg/m}^3$

هوا =  $1.23 \text{ Kg/m}^3$  روغن پارافین =  $800 \text{ Kg/m}^3$

### تغییرات چگالی

هوا: تراکم پذیری بالا / تغییرات شدید چگالی

آب: تراکم پذیری پایین

چگالی مایعات تقریباً ثابت بوده اما با تغییر درجه حرارت و فشار مایع تغییر کمی می کند:

$$\rho = \rho (\text{liquid}, T, p)$$

$$\begin{array}{ll} T \uparrow & \rho \downarrow \\ p \uparrow & \rho \uparrow \end{array}$$

## وزن مخصوص (SPECIFIC WEIGHT)

وزن مخصوص ("gamma") با واحد  $N/m^3$  وزن در واحد حجم را نشان می دهد:

$$\gamma = \rho g$$

که در آن  $g$  شتاب ثقل ( $9.81 \text{ m/s}^2$ ) است.

بعد:  $ML^{-2}T^{-2}$

مقادیر نمونه: (در دمای  $288.15 \text{ K}$  ( $4 \text{ }^\circ\text{C}$ ) و فشار  $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ )

جیوه = $132.9 \text{ KN/m}^3$	آب = $9.79 \text{ KN/m}^3$
روغن پارافین = $7.85 \text{ KN/m}^3$	هوا = $11.8 \text{ KN/m}^3$

## چگالی نسبی (RELATIVE DENSITY)

نسبت وزن مخصوص سیال به وزن مخصوص آب:

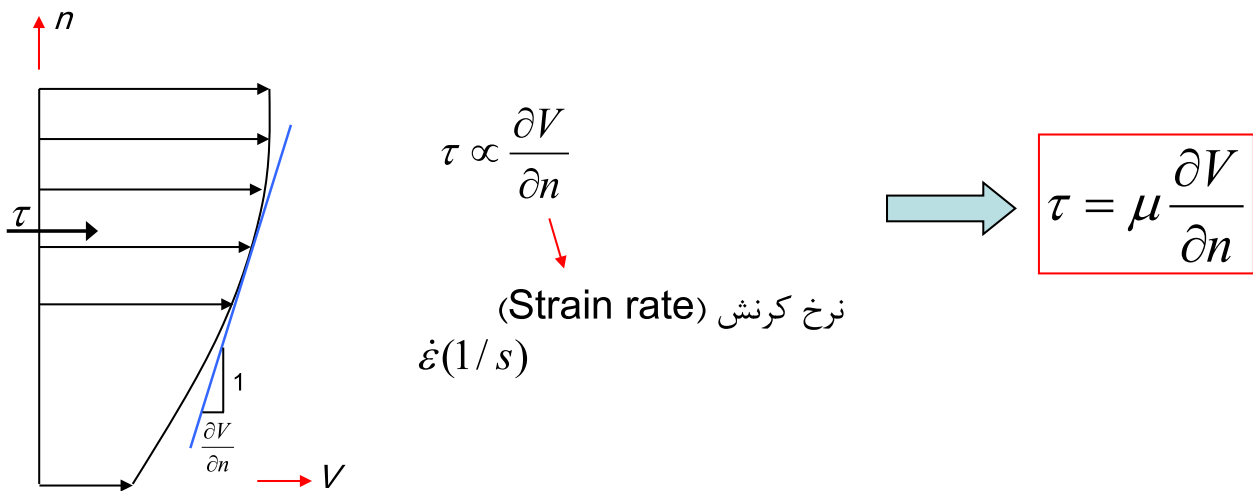
$$S = \frac{\gamma_{fluid}}{\gamma_{water}} = \frac{\rho_{fluid}}{\rho_{water}}$$

چگالی نسبی بی بعد است. مثلا چگالی نسبی جیوه در دمای  $20$  درجه سانتیگراد برابر است با:

$$S_{Hg} = \frac{\gamma_{hg}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{133 \text{ kN/m}^3}{9.81 \text{ kN/m}^3} = 13.6$$

## قانون لزجت نیوتن: (Newton's Viscosity Law)

در یک جریان آرام (Laminar flow) که ذرات سیال در خطوط مستقیم و موازی حرکت می کنند، در سیالات نیوتنی (Newtonian Fluids) تنش برشی بر روی سطحی مماس بر امتداد جریان متناسب است با میزان تغییر سرعت در امتداد عمود بر آن سطح:



$\mu$ : ضریب لزجت (Coefficient of viscosity) یا ضریب لزجت دینامیکی با بعد  $(ML^{-1}T^{-1})$ :

$$\mu = \frac{\tau}{dV/dy} = \frac{N/m^2}{(m/s)/m} = N \times s / m^2 = kg / m.s$$

در سیستم SI واحد آن  $kg/m.s$  یا  $N.s/m^2$  می باشد که نام بخصوصی ندارد.

در سیستم cgs واحد لزجت  $g/cm.s$  می باشد که پواز (poise) نامیده می شود.

$$1 \frac{kg}{m.s} = \frac{1000gr}{100cm.s} = 10 \text{ poise} \quad 1 \text{ centipoise} = 0.01 \text{ poise}$$

### Typical values:

Water dynamic viscosity = 1 centipoises ( $10^{-2}$  poise) =  $1.005 \times 10^{-3} kg/m.s$   
(at temperature  $T = 20^\circ C$  and pressure of 1 atm)

اگر لزجت دینامیک را بر جرم مخصوص تقسیم کنیم، لزجت سینماتیک (Kinematic Viscosity) بدست می آید:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{ML^{-1}/T^{-1}}{M/L^{-3}} = L^2T^{-1} = m^2/s$$

در سیستم SI واحد آن  $m^2/s$  و در cgs استوک (stoke) می باشد. در USCS نیز با  $ft^2/s$  نمایش داده می شود.

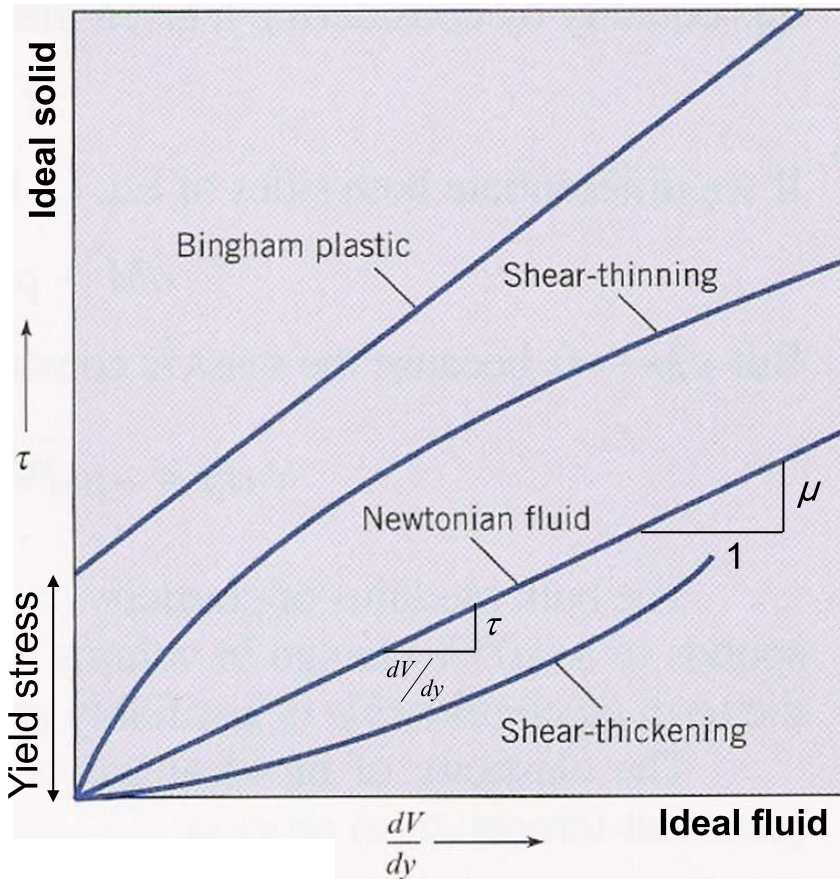
$$1 \frac{m^2}{s} = 10^4 \text{ stoke}$$

### Typical values:

Water =  $1.14 \times 10^{-6} m^2 s^{-1}$ , Air =  $1.46 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$ , Mercury =  $1.145 \times 10^{-4} m^2 s^{-1}$ ,  
Paraffin Oil =  $2.375 \times 10^{-3} m^2 s^{-1}$ .

## سیالات نیوتنی (NEWTONIAN) و غیر نیوتنی (NON-NEWTONIAN)

سیالات نیوتنی بر خلاف سیالات غیر نیوتنی سیالاتی هستند که در آنها نسبت تنش برشی و نرخ کرنش برشی خطی است.



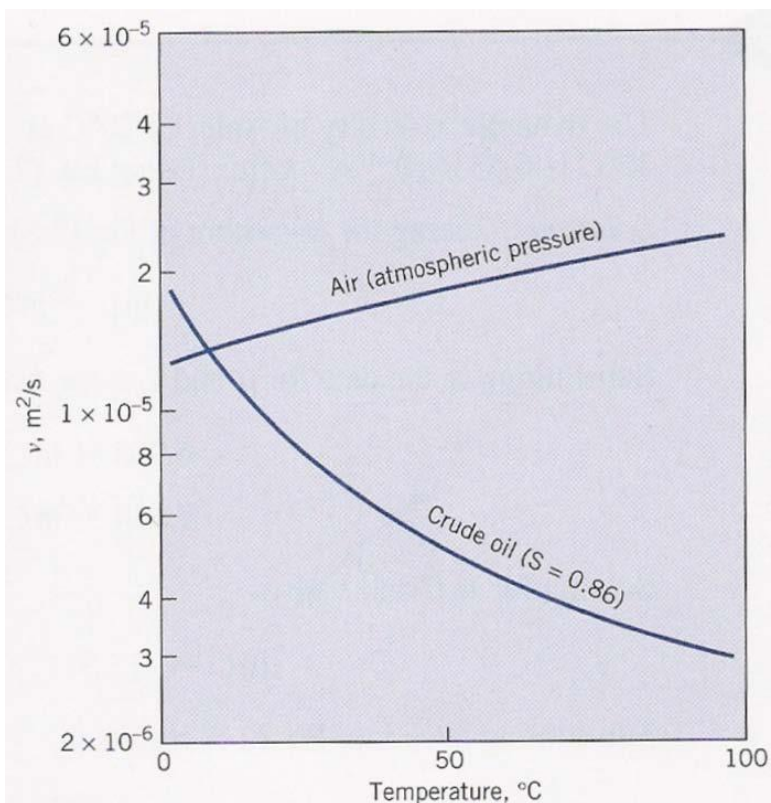
در کنار سیالات نیوتنی که اکثر مایعات ساده و گازها را شامل می شوند، سیالاتی وجود دارند (خمیر paste، دوغاب slurry، گریس grease، پلیمرهای بلند high polymer...) که رابطه تنش و نرخ کرنش در آنها خطی نیست.

سیال ایده آل سیال غیر قابل تراکم و غیر لزج است ( $\mu=0$ ) که در آن تنش برشی تحت هیچ نوع حرکتی ایجاد نمی شود.

## تغییرات لزجت نسبت به تغییر فشار و درجه حرارت:

gas and liquid  $\mu \uparrow p \uparrow$ , but small  $\Delta\mu$

gas:  $\mu \uparrow T \uparrow$   
 liquid:  $\mu \downarrow T \uparrow$  } Due to structural differences, more molecular activity, decreased cohesive forces



لزجت مایعات و گازها با افزایش فشار کمی افزایش می یابد.

لزجت مایعات با افزایش دما کاهش می یابد در صورتی که گازها رفتاری دقیقاً متضاد دارند.

در مایعات لزجت ناشی از جاذبه بین ملکولی قوی است که با افزایش دما کاهش می یابد:

$$\mu = Ce^{b/T}$$

$\mu$  - the dynamic viscosity of fluid ("miu")

$C, b$  - empirical constants

$T$  - temperature

در گازها ملکولها از یکدیگر دور بوده و تحرک زیادی دارند لذا جاذبه ملکولی کم است. حرکات و برخورد ملکولها که عامل لزجت است با افزایش دما بیشتر می شود.

## گاز کامل: (Perfect gas)

گاز کامل سیالی است که اثرات متقابل ملکولهای سیال صرفاً ناشی از برخوردهای کاملاً الاستیک باشد.

حجم مخصوص (Specific volume)

$$pv_s = RT \quad (\text{Equation of State}) \quad \text{معادله حالت}$$

$$p = \rho RT$$

$R$  (ثابت گاز) فقط به وزن ملکولی سیال بستگی دارد:

$$R = \frac{p}{\rho T} = \frac{N/m^2}{kg/m^3(^{\circ}K)} = \frac{N.m}{kg(^{\circ}K)} = \frac{J}{kg(^{\circ}K)}$$

رفتار گاز کامل بر مبنای فقدان کامل جاذبه ملکولی است لذا رفتار گازها در نزدیک شرایط تقطیر تا حد زیادی از رفتار گاز کامل دور می شود.

$$\frac{PV_1}{T_1} = \frac{PV_2}{T_2} = mR \quad \text{و یا} \quad \frac{V_1}{\rho_1 T_1} = \frac{V_2}{\rho_2 T_2} = R \quad \text{در جرم مشخص از } m \text{ گاز:}$$

## قانون آووگادرو: (Avogadro's law)

یک مول از کلیه گازها در شرایط متعارف ( $P=1 \text{ atm}$ ,  $T=273 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ) ۲۲/۴ لیتر حجم را اشغال می کند.

وزن  $10^{23} \times 6/0.2$  ملکول گاز برابر با جرم ملکولی آن (مثلاً ۳۲ kg اکسیژن  $O_2$ )

## ثابت جهانی گازها:

دو محفظه گاز را در شرایط یکسان دما، فشار و حجم در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \frac{P_1 V_1}{T_1} = m_1 R_1 \\ \frac{P_2 V_2}{T_2} = m_2 R_2 \end{cases} \quad \xrightarrow{V_1 = V_2 \quad T_1 = T_2 \quad P_1 = P_2} \quad m_1 R_1 = m_2 R_2$$

اما تعداد ملکولهای دو ظرف برابر است (بر مبنای قانون آووگادرو حجمهای مساوی از گازها در شرایط یکسان دما و فشار مطلق تعداد ملکول یکسانی دارند):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

جرم  $10^{23} \times 6/0.2$  ملکول از گاز اول  $\rightarrow$  جرم  $n$  ملکول از گاز اول  $\leftarrow$   
جرم  $10^{23} \times 6/0.2$  ملکول از گاز دوم  $\rightarrow$  جرم  $n$  ملکول از گاز دوم  $\leftarrow$

$$\longrightarrow M_1 R_1 = M_2 R_2$$

و یا

$$MR = cte$$

$MR$  ثابت جهانی گازها نامیده می شود و در سیستم آحاد بین المللی برابر است با:

$$MR = 8312 \frac{J}{^\circ K} \longrightarrow R = \frac{8312}{M} \frac{J}{kg^\circ K}$$

### مدول حجمی: (bulk modulus)

در تغییرات سریع و یا فشار بسیار زیاد قابلیت تراکم مایعات اهمیت پیدا می کند.

$$\beta = \frac{-1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

ضریب تراکم پذیری (Coefficient of compressibility)

دمای ثابت (Isothermal) با واحد  $1/pa$

$$E[k] = -v \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = - \left( \frac{\partial p}{\partial v / v} \right)_T$$

مدول حجمی (بالک)

با واحد  $pa$

مقدار  $k$  برای آب در دمای اطاق و فشار اتمسفر  $2068 \text{ Mpa}$  می باشد. مقدار  $k$  با افزایش فشار افزایش می یابد مثلا در فشار  $3000 \text{ atm}$  مدول حجمی آب دو برابر می شود.



## فشار بخار: (Vapor pressure)

وقتی تبخیر مایعات در یک محیط محصور صورت گیرد، ملکولهای بخار فشاری جزئی در فضا وارد می کنند که د حالت تعادل به عنوان فشار بخار شناخته می شود. حالت تعادل وضعیتی است که تعداد ملکولهای برخورد کننده به سطح مایع که وارد مایع می شوند برابر با تعداد ملکولهای جدا شونده از سطح مایع باشند.

از آنجایی که فعالیت ملکولی تابعی از دما است، فشار بخار سیال نیز بستگی به دما داشته و با افزایش دما زیاد می شود.

زمانی که فشار روی مایع برابر فشار بخار مایع باشد، مایع می جوشد. مثلا اگر فشار به حد کافی کاهش یابد آب در دمای اطاق می جوشد در حالی که در فشار طبیعی (۱ اتمسفر) آب در دمای ۱۰۰ درجه می جوشد (در نقاط مرتفع نقطه جوش کمتر از ۱۰۰ درجه اما در زودپز بیشتر از ۱۰۰ درجه است).

## خلا زایی: (Cavitation)

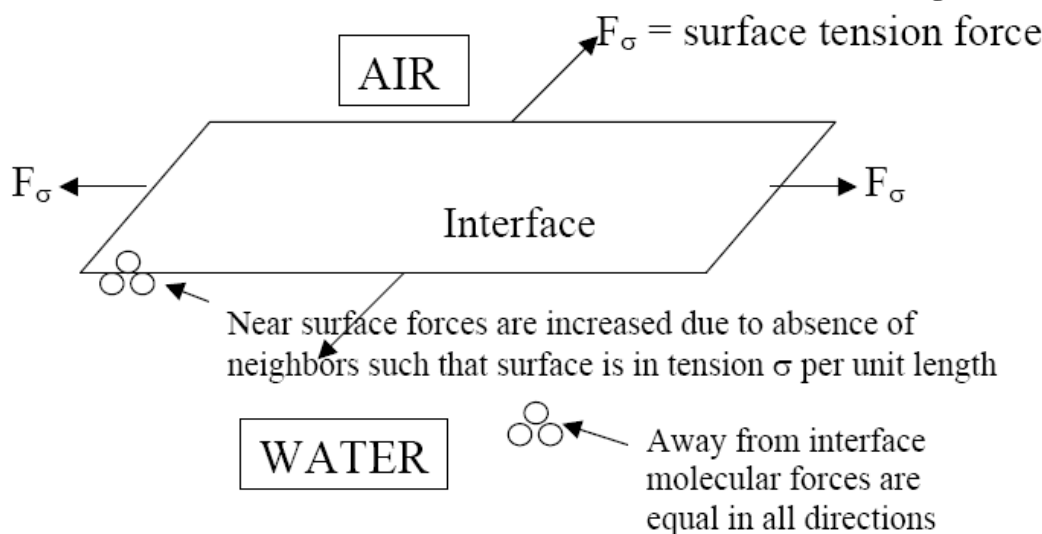
اگر تبدیل مایع به گاز صرفا ناشی از افزایش دما باشد آن را تبخیر (Evaporation) می نامند و چنانچه در اثر کاهش فشار روی دهد (فشار سیال از فشار بخار کمتر گردد) خلا زایی (Cavitation) نامیده می شود.

خطر کابیتاسیون در ورودی پمپها و خروجی توربین ها وجود دارد. نقاط خلا ایجاد شده توسط جریان به مناطق با فشار بالاتر منتقل شده و به سرعت پر می شوند که به کاهش راندمان و خوردگی فلزات منجر می شود.

## کشش سطحی: (Surface tension)

پدیده کشش سطحی ناشی از اختلاف جاذبه بین ملکولهای یکسان (پیوستگی-Cohesion) و جاذبه بین ملکولهای غیر یکسان (چسبندگی-Adhesion) است.

در داخل مایع، نیروهای پیوستگی یکدیگر را خنثی می کنند ولی در سطح آزاد مایع نیروهای پیوستگی که از پایین اثر می کنند از نیروهای چسبندگی محل تماس مایع و گاز بیشتر می شود. بدلیل تفاوت این نیروها مرز دو سیال شبیه یک پوسته تحت کشش عمل می کند.

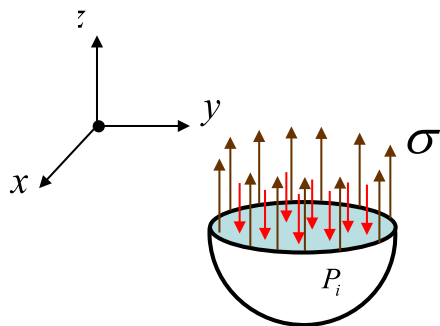


$$\sigma_{\text{air/water}} = 0.073 \text{ N/m}$$

$$F_{\sigma} = \sigma \times L = \text{Force normal to cut, } L = \text{length of cut}$$

ضریب کشش سطحی (شدت بارگذاری خطی مماس بر سطح)

اگر قطره ای به شعاع  $R$  و فشار نسبی داخلی (فشار داخل منهای فشار اتمسفر) را  $P_i$  در حال تعادل در نظر بگیند



$$\sum F_z = 0$$

$$\implies -P_i(\pi R^2) + \sigma(2\pi R) = 0$$

$$P_i = \frac{2\sigma}{R}$$

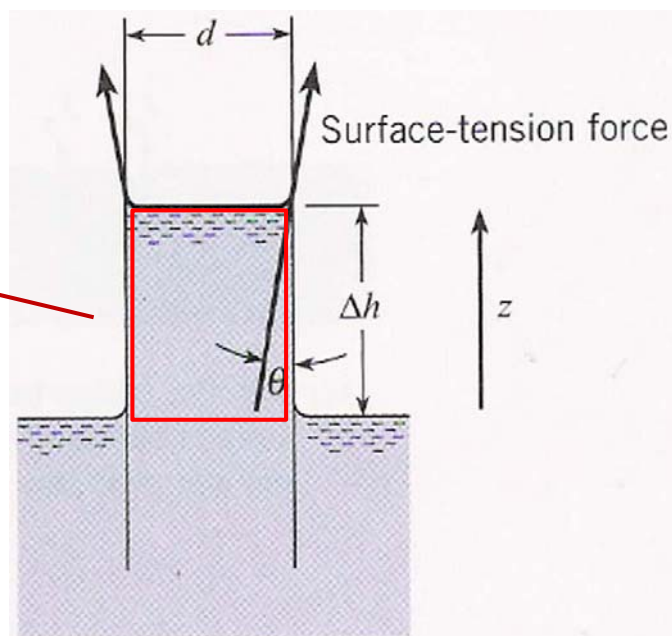
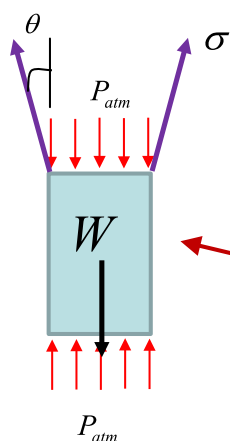
مثلا با در نظر گرفتن این امر که ضریب کشش سطحی در دمای اطاق برای آب مجاور هوا برابر با  $\sigma = 0.073 \text{ N/m}$  است، در قطره ای به شعاع  $0.5 \text{ mm}$ :

$$P_i = \frac{2 \times 0.073}{0.5 \times 10^{-3}} = 292 \text{ Pa} = 0.00288 \text{ atm} \quad (1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa})$$

در حباب کشش سطحی در هر دو وجه داخلی و خارجی (محلهای تماس با هوا) وجود دارد. بنابراین:\*\*

$$-P_i(\pi R^2) + 2\sigma(2\pi R) = 0 \implies P_i = \frac{4\sigma}{R}$$

### موئینگی: (Capillary)



$$\sum F_z = 0$$

$$\implies (\pi d)\sigma \cos \theta - W = 0$$

$$(\pi d)\sigma \cos \theta - \frac{\pi d^2}{4} \times \Delta h \times \gamma = 0$$

$$\Delta h = \frac{4\sigma \cos \theta}{d\gamma}$$

# Hydrostatics (1)

## تنش: (Stress)

اسکالر (scalar) تنها با مقدار کمیت مشخص می شود. نظیر درجه حرارت، زمان، جرم،...

بردار (vector) علاوه بر مقدار راستای کمیت نیز باید مشخص گردد. سه کمیت اسکالر (مولفه های بردار در سه راستای متعامد) برای تعریف بردار لازم است. نظیر سرعت، شتاب، نیرو،...

تانسور (tensor) توصیف این کمیتها به ۹ مولفه اسکالر یا بیشتر نیاز دارد. نظیر تنش، کرنش، ممان اینرسی،...

کمیت (quantity)

کمیات اسکالر و برداری را می توان به ترتیب تانسور مرتبه صفر ( $3^0=1$ ) و مرتبه یک ( $3^1=3$ ) دانست.

میدان (field) توزیع پیوسته ای (continuous distribution) از یک کمیت اسکالر، برداری یا تانسوری است که با توابع پیوسته ای از مختصات فضا و زمان ( $x, y, z, t$ ) بیان شود. مثلا:

$$\text{دما } T(x, y, z, t)$$

$$\text{سرعت } \vec{v}(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\vec{i} + g(x, y, z, t)\vec{j} + h(x, y, z, t)\vec{k}$$

تنش  $\longrightarrow$  ۹ مولفه اسکالر

سطحی (surface force): از تماس جسم با محیط اطراف ناشی شده و بر مبنای واحد سطح ماده ای که به آن اثر می کند بیان می شود.

$$\vec{T}(x, y, z, t)$$

حجمی (body force): بر مبنای واحد جرم ماده ای که نیرو بر آن اثر می کند بیان می شود و برای تاثیر بر روی ماده تماس مستقیم نیاز نیست (نظیر ثقل و مغناطیس).

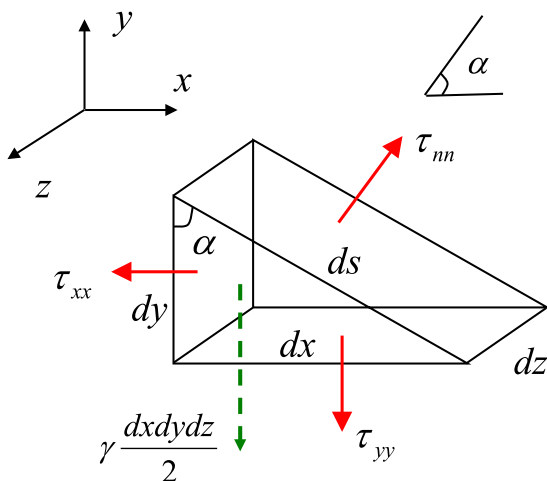
$$\vec{B}(x, y, z, t)$$

توزیع نیرو

(force distribution)

## تنش در سیال ساکن (Stationary fluid) و جریان غیر لزج (Nonviscous flow):

در سیال ساکن و سیال دارای جریان یکنواخت (تمام المانها سرعت یکسان دارند) طبق قانون لزجت نیوتن تنش برشی صفر است:



$$\sum F_x = 0$$

$$-\tau_{xx} dydz + \tau_{nn} ds dz \cos \alpha = 0$$

$$-\tau_{xx} dydz + \tau_{nn} dydz = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{xx} = \tau_{nn}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-\tau_{yy} dx dz - \frac{\gamma dx dy dz}{2} + \tau_{nn} ds dz \sin \alpha = 0$$

$$-\tau_{yy} + \tau_{nn} - \frac{\gamma dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{yy} = \tau_{nn}$$

( $dy$  کوچک است)

بنابراین در سیال ساکن و دارای حرکت یکنواخت تنش مستقل از جهت بوده ( $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz}$ ) و لذا کمیتی  $\gamma$  است (قانون پاسکال). این تنش همان فشار ترمودینامیکی با جهت مخالف می باشد که تنش هیدرواستاتیک نیز نامی شود. در سیال غیر لزج در حال حرکت:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-\tau_{xx} dydz + \tau_{nn} dsdz \cos \alpha = \rho \frac{dx dy dz}{2} a_x$$

$$-\tau_{xx} + \tau_{nn} = \rho \frac{dx}{2} a_x \quad (dx \text{ کوچک است}) \quad \longrightarrow \quad \tau_{xx} = \tau_{nn}$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$-\tau_{yy} dx dz - \frac{\gamma dx dy dz}{2} + \tau_{nn} ds dz \sin \alpha = \rho \frac{dx dy dz}{2} a_y$$

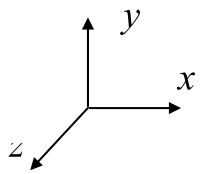
$$-\tau_{yy} + \tau_{nn} = \frac{dy}{2} (\gamma + \rho a_y)$$

$$\longrightarrow \quad \tau_{yy} = \tau_{nn} \quad (dy \text{ کوچک است})$$

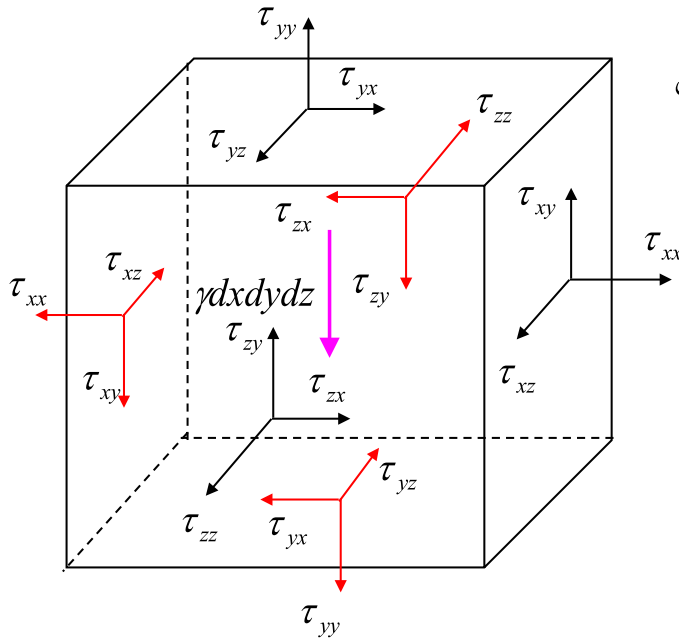
بنابراین در سیال غیر لزج نیز تنش کمیتی اسکالر است.

از آنجایی که در بخشهای عمده ای از سیال تاثیرات لزجت قابل صرف نظر کردن است (بدلیل تنش برشی بسیار کوچک)، می توان از این فرض ساده کننده در اغلب حالات استفاده کرد.

## خواص تانسور تنش (Properties of stress) :

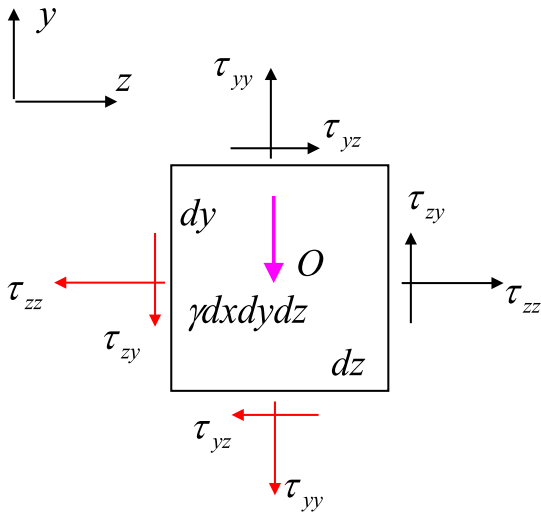


$i$  راستای عمود بر سطحی (یا صفحه ای) که تنش اعمال می شود.  $j$  راستای تنش  $\tau_{ij}$



تنشهای وجوه پشت مکعب (قرمز رنگ) برابر با تنشهای سطوح روبروی مکعب و در خلاف جهت آنها هستند (ابعاد المان کوچک است).

دید در جهت  $x$ :



$$+\sum M_O = 0$$

$$(\tau_{yz} dz dx) dy - (\tau_{zy} dy dx) dz = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

به همین ترتیب با لنگر گیری در جهات دیگر:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

اگر حالت تعادل وجود نداشته باشد، جمله اینرسی نیز در رابطه وارد می شود اما نظیر نیروی حجمی بدلیل بالاتر بودن مرتبه دیفرانسیل حذف می گردد. بنابراین در سیالات (نیوتنی، غیر نیوتنی) نیز نظیر جامدات همواره تانسور تنش ۶ مولفه مستقل دارد.

در سیال لزج متحرک در صورت وجود حرکت نسبی لایه ها در سیال تنش برشی ایجاد شده و در نتیجه تنشهای قائم در جهات مختلف معمولاً یکسان نخواهد بود. در صورت استفاده از میانگین حسابی تنشهای قائم: (تنش حجمی - Bulk stress)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})$$

تنش حجمی بستگی به جهت نداشته و کمیتی اسکالر است\*. در سیال غیر لزج:

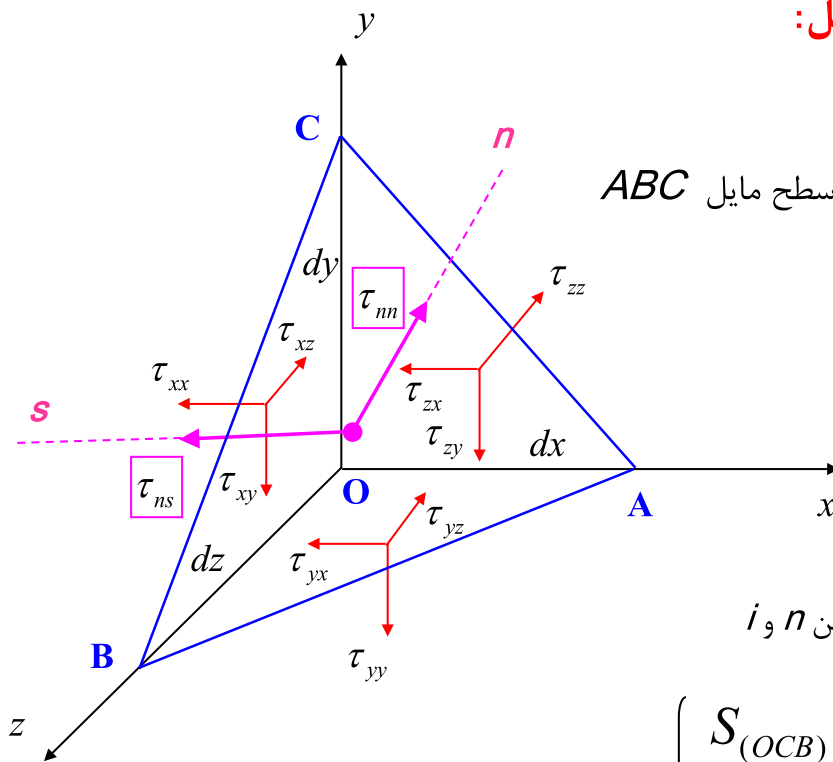
$$\bar{\sigma} = \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz}$$

در صورت استفاده از فشار ترمودینامیکی (کمیت مربوط به حالت تعادل) به جای تنش (کمیت حالت تعادل و عدم تعادل):

$$-\bar{\sigma} = p$$

با توجه به منفی بودن تنش قائم سیالات در اکثر حالات

### تنش های عمومی وارد بر یک وجه مایل:



$n$ : راستای عمود بر سطح مایل

$S$ : یکی از دو راستای متعامد تنش برشی وارده بر سطح مایل  $ABC$

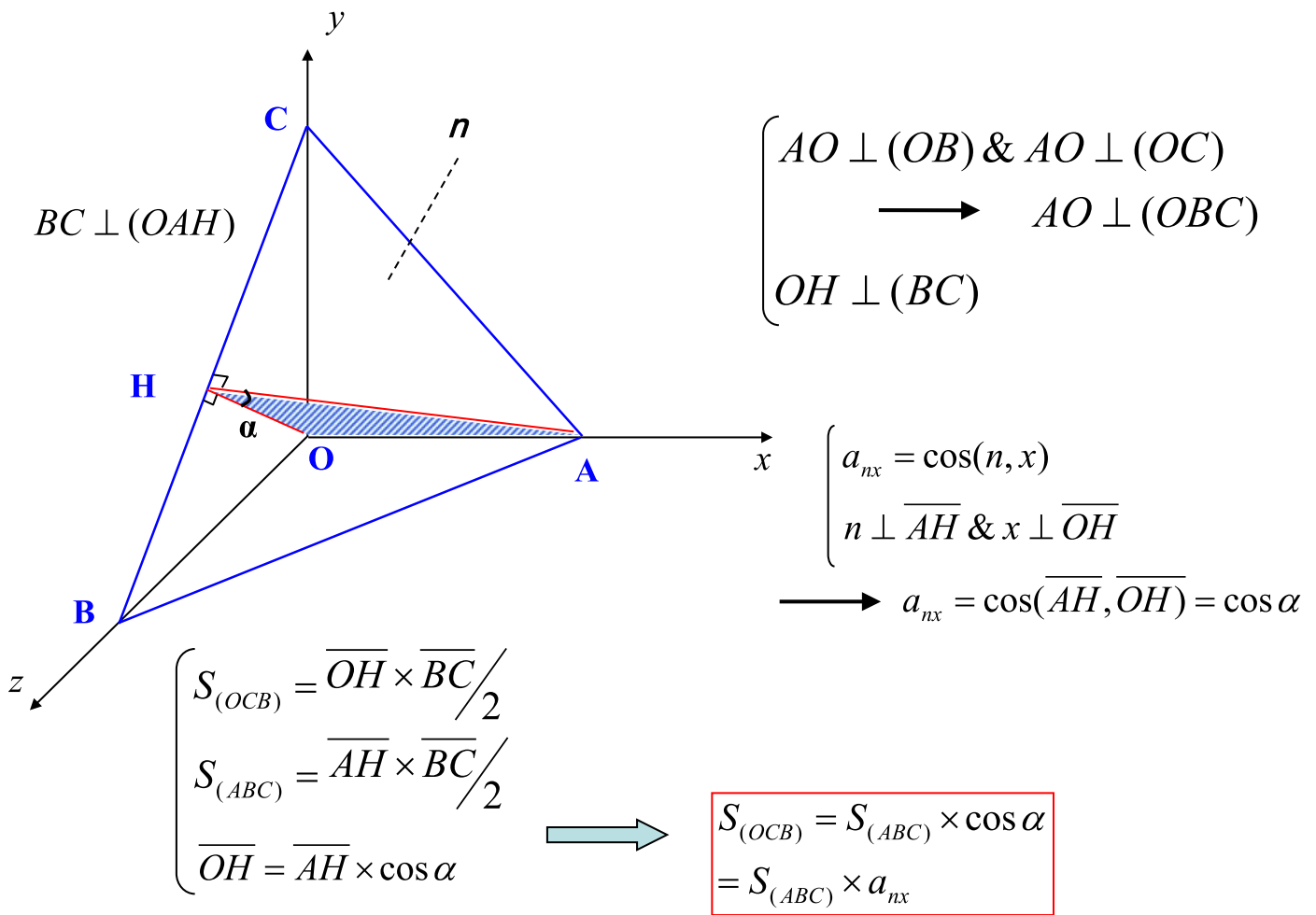
$a_{nx}$ : کسینوس هادی راستای  $n$  نسبت به  $i$

$a_{ny}$ : کسینوس هادی راستای  $n$  نسبت به  $j$

$a_{nz}$ : کسینوس هادی راستای  $n$  نسبت به  $k$

$a_{nx} = \cos(n, x)$  یا کسینوس زاویه بین  $n$  و  $i$

$$\begin{cases} S_{(OCB)} = S_{(ABC)} \times a_{nx} \\ S_{(OAC)} = S_{(ABC)} \times a_{nz} \\ S_{(OAB)} = S_{(ABC)} \times a_{ny} \end{cases} \quad (I)$$



قانون تعادل در راستای  $n$  (حذف جملات اینرسی و نیروی ثقل):

$$\begin{aligned}
 & \tau_{nn} S_{(ABC)} - \tau_{xx} S_{(OCB)} a_{nx} - \tau_{xy} S_{(OCB)} a_{ny} - \tau_{xz} S_{(OCB)} a_{nz} \\
 & - \tau_{yx} S_{(OAB)} a_{nx} - \tau_{yy} S_{(OAB)} a_{ny} - \tau_{yz} S_{(OAB)} a_{nz} \\
 & - \tau_{zx} S_{(OAC)} a_{nx} - \tau_{zy} S_{(OAC)} a_{ny} - \tau_{zz} S_{(OAC)} a_{nz} = 0
 \end{aligned}$$

با جایگذاری از معادلات (I):

$$\begin{aligned}
 \tau_{nn} &= \tau_{xx} a_{nx}^2 + \tau_{xy} a_{nx} a_{ny} + \tau_{xz} a_{nx} a_{nz} \\
 &+ \tau_{yx} a_{ny} a_{nx} + \tau_{yy} a_{ny}^2 + \tau_{yz} a_{ny} a_{nz} \\
 &+ \tau_{zx} a_{nz} a_{nx} + \tau_{zy} a_{nz} a_{ny} + \tau_{zz} a_{nz}^2 \\
 &= \tau_{xx} a_{nx}^2 + \tau_{yy} a_{ny}^2 + \tau_{zz} a_{nz}^2 + 2(\tau_{xy} a_{nx} a_{ny} + \tau_{xz} a_{nx} a_{nz} + \tau_{yz} a_{ny} a_{nz})
 \end{aligned}$$

با جایگذاری  $x', y', z'$  به جای  $n$  می توان تنش را در سیستم متعامد  $x'y'z'$  بدست آورد:

$$\begin{cases}
 \tau_{x'x'} = \tau_{xx} a_{x'x}^2 + \tau_{yy} a_{x'y}^2 + \tau_{zz} a_{x'z}^2 + 2(\tau_{xy} a_{x'x} a_{x'y} + \tau_{xz} a_{x'x} a_{x'z} + \tau_{yz} a_{x'y} a_{x'z}) \\
 \tau_{y'y'} = \tau_{xx} a_{y'x}^2 + \tau_{yy} a_{y'y}^2 + \tau_{zz} a_{y'z}^2 + 2(\tau_{xy} a_{y'x} a_{y'y} + \tau_{xz} a_{y'x} a_{y'z} + \tau_{yz} a_{y'y} a_{y'z}) \\
 \tau_{z'z'} = \tau_{xx} a_{z'x}^2 + \tau_{yy} a_{z'y}^2 + \tau_{zz} a_{z'z}^2 + 2(\tau_{xy} a_{z'x} a_{z'y} + \tau_{xz} a_{z'x} a_{z'z} + \tau_{yz} a_{z'y} a_{z'z})
 \end{cases}$$



به طریق مشابه می توان در راستای دلخواه  $s$  را بر روی سطح عمود بر بدست آورد:

$$\begin{aligned} \tau_{ns} S_{(ABC)} - \tau_{xx} S_{(OCB)} a_{sx} - \tau_{xy} S_{(OCB)} a_{sy} - \tau_{xz} S_{(OCB)} a_{sz} \\ - \tau_{yx} S_{(OAB)} a_{sx} - \tau_{yy} S_{(OAB)} a_{sy} - \tau_{yz} S_{(OAB)} a_{sz} \\ - \tau_{zx} S_{(OAC)} a_{sx} - \tau_{zy} S_{(OAC)} a_{sy} - \tau_{zz} S_{(OAC)} a_{sz} = 0 \end{aligned}$$

با جایگذاری از معادلات (I):

$$\begin{aligned} \tau_{ns} &= \tau_{xx} a_{nx} a_{sx} + \tau_{xy} a_{nx} a_{sy} + \tau_{xz} a_{nx} a_{sz} \\ &+ \tau_{yx} a_{ny} a_{sx} + \tau_{yy} a_{ny} a_{sy} + \tau_{yz} a_{ny} a_{sz} \\ &+ \tau_{zx} a_{nz} a_{sx} + \tau_{zy} a_{nz} a_{sy} + \tau_{zz} a_{nz} a_{sz} \\ &= \tau_{xx} a_{nx} a_{sx} + \tau_{yy} a_{ny} a_{sy} + \tau_{zz} a_{nz} a_{sz} \\ &+ \tau_{xy} (a_{nx} a_{sy} + a_{ny} a_{sx}) + \tau_{xz} (a_{nx} a_{sz} + a_{nz} a_{sx}) + \tau_{yz} (a_{ny} a_{sz} + a_{nz} a_{sy}) \end{aligned}$$

با جایگذاری  $X'$  به جای  $n$  و  $Z'$  به جای  $s$  میتوان تنش  $T_{X'Z'}$  را در سیستم متعامد  $X'Y'Z'$  بدست آورد:

$$\begin{aligned} \tau_{x'z'} &= \tau_{xx} a_{x'x} a_{z'x} + \tau_{yy} a_{x'y} a_{z'y} + \tau_{zz} a_{x'z} a_{z'z} \\ &+ \tau_{xy} (a_{x'x} a_{z'y} + a_{x'y} a_{z'x}) + \tau_{xz} (a_{x'x} a_{z'z} + a_{x'z} a_{z'x}) + \tau_{yz} (a_{x'y} a_{z'z} + a_{x'z} a_{z'y}) \end{aligned}$$

میتوان برای تنشهای  $T_{X'Y'}$  و  $T_{Y'Z'}$  نیز روابط مشابهی بدست آورد:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= \tau_{xx} a_{x'x} a_{y'x} + \tau_{yy} a_{x'y} a_{y'y} + \tau_{zz} a_{x'z} a_{y'z} \\ &+ \tau_{xy} (a_{x'x} a_{y'y} + a_{x'y} a_{y'x}) + \tau_{xz} (a_{x'x} a_{y'z} + a_{x'z} a_{y'x}) + \tau_{yz} (a_{x'y} a_{y'z} + a_{x'z} a_{y'y}) \\ \tau_{y'z'} &= \tau_{xx} a_{y'x} a_{z'x} + \tau_{yy} a_{y'y} a_{z'y} + \tau_{zz} a_{y'z} a_{z'z} \\ &+ \tau_{xy} (a_{y'x} a_{z'y} + a_{y'y} a_{z'x}) + \tau_{xz} (a_{y'x} a_{z'z} + a_{y'z} a_{z'x}) + \tau_{yz} (a_{y'y} a_{z'z} + a_{y'z} a_{z'y}) \end{aligned}$$

بنابراین با معلوم بودن ۹ مولفه تانسور مرتبه دوم تنش در مختصات  $XYZ$  میتوان تانسور تنش را در سیستم دوران یافته  $X'Y'Z'$  بدست آورد.

۳ ثابت زیر مستقل از دوران سیستم مختصات بوده و مابین مولفه های تانسور تنش وجود دارند ( $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  ضرایب معادله  $\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$  جهت تعیین تنشهای اصلی  $\sigma_p$  هستند):

$$I_1 = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}$$

$$I_2 = \tau_{xx}\tau_{yy} + \tau_{xx}\tau_{zz} + \tau_{yy}\tau_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

به عنوان نمونه:

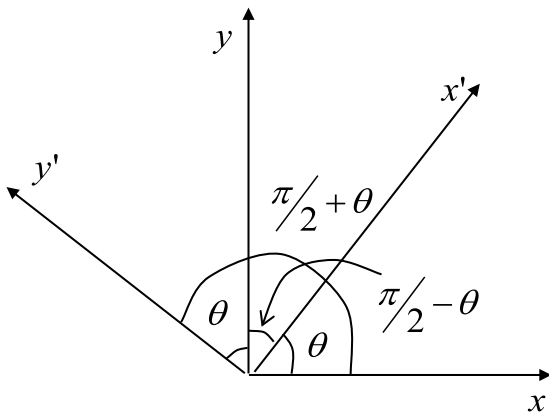
$$\begin{aligned} I_1 &= \tau_{x'x'} + \tau_{y'y'} + \tau_{z'z'} \\ &= \tau_{xx}(a_{x'x}^2 + a_{y'x}^2 + a_{z'x}^2) + \tau_{yy}(a_{x'y}^2 + a_{y'y}^2 + a_{z'y}^2) + \tau_{zz}(a_{x'z}^2 + a_{y'z}^2 + a_{z'z}^2) \\ &\quad + 2\tau_{xy}(a_{x'x}a_{x'y} + a_{y'x}a_{y'y} + a_{z'x}a_{z'y}) \\ &\quad + 2\tau_{xz}(a_{x'x}a_{x'z} + a_{y'x}a_{y'z} + a_{z'x}a_{z'z}) \\ &\quad + 2\tau_{yz}(a_{x'y}a_{x'z} + a_{y'y}a_{y'z} + a_{z'y}a_{z'z}) \end{aligned}$$

اما با توجه به خواص ماتریس کسینوس هادی ( $R = \begin{bmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{bmatrix}$ ):

$$\begin{cases} a_{x'x}^2 + a_{y'x}^2 + a_{z'x}^2 = 1 \\ a_{x'y}^2 + a_{y'y}^2 + a_{z'y}^2 = 1 \\ a_{x'z}^2 + a_{y'z}^2 + a_{z'z}^2 = 1 \\ a_{x'x}a_{x'y} + a_{y'x}a_{y'y} + a_{z'x}a_{z'y} = 0 \\ a_{x'x}a_{x'z} + a_{y'x}a_{y'z} + a_{z'x}a_{z'z} = 0 \\ a_{x'y}a_{x'z} + a_{y'y}a_{y'z} + a_{z'y}a_{z'z} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} I_1 &= \tau_{x'x'} + \tau_{y'y'} + \tau_{z'z'} \\ &= \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = cte \end{aligned}$$



$$R = \begin{bmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} \\ a_{y'x} & a_{y'y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\pi/2 - \theta) \\ \cos(\pi/2 + \theta) & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

که همان ماتریس دوران به اندازه  $\theta$  می باشد. با جایگذاری در روابط اسلایدهای ۱۱ و ۱۳:

$$\tau_{x'x'} = \tau_{xx} a_{x'x}^2 + \tau_{yy} a_{x'y}^2 + 2\tau_{xy} a_{x'x} a_{x'y} = \tau_{xx} \cos^2 \theta + \tau_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

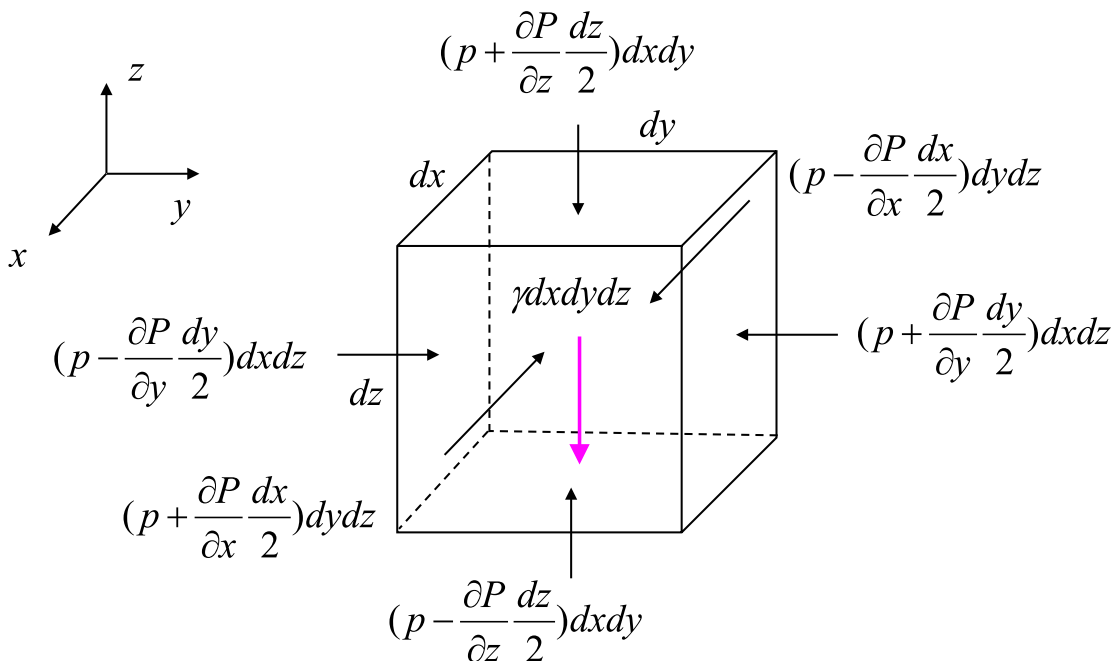
$$\tau_{y'y'} = \tau_{xx} a_{y'x}^2 + \tau_{yy} a_{y'y}^2 + 2\tau_{xy} a_{y'x} a_{y'y} = \tau_{xx} \sin^2 \theta + \tau_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= \tau_{xx} a_{x'x} a_{y'x} + \tau_{yy} a_{x'y} a_{y'y} + \tau_{xy} (a_{x'x} a_{y'y} + a_{x'y} a_{y'x}) \\ &= (\tau_{yy} - \tau_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

## استاتیک سیالات: (Fluid statics)

اگر تمام ذرات سیال ساکن بوده و یا دارای سرعت ثابت یکسانی باشند، سیال تعادل استاتیکی دارد. در این حالت تنش برشی وجود نداشته و تنها کمیت اسکالر فشار در سیال وجود دارد.

نیروهای سطحی و حجمی (در اینجا صرفاً نیروی ثقل) بر المان اعمال می شوند. با در نظر گرفتن فشار  $p$  در مرکز المان و با استفاده از بسط تیلور  $f(x+dx, y, z) = f(x, y, z) + (\partial f(x, y, z)/\partial x)dx$ :



از معادلات تعادل در راستاهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  :

$$\begin{cases} dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \\ dF_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \\ dF_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz \end{cases}$$

بنابراین بردار جزء نیروی وارد بر جزء حجم برابر است با:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k} \\ &= \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} - \gamma \vec{k} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

اگر نیروی وارد بر واحد حجم در نظر گرفته شود ( $dv = dx dy dz$ ) :

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= \frac{d\vec{F}}{dv} = \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} - \gamma \vec{k} \right) \\ &= -\vec{\nabla} P - \gamma \vec{k} \end{aligned}$$

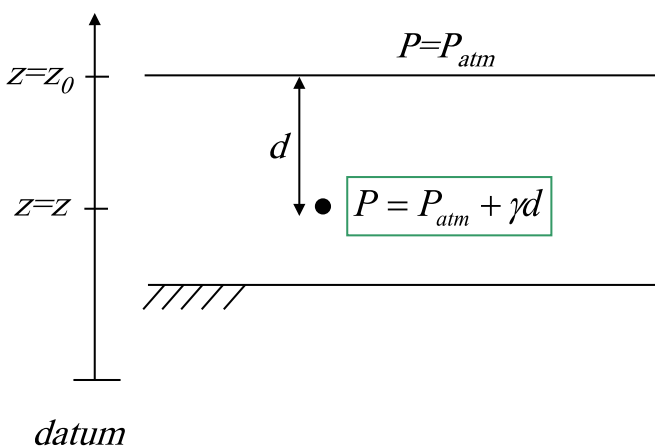
که عملگر (Operator)  $\vec{\nabla}$  (del) به شکل زیر تعریف می شود:

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

برآیند نیروی فشار وارد بر یک نقطه می باشد که در سیال بدون شتاب باید صفر باشد:

$$d\vec{f} = -\vec{\nabla} P - \gamma \vec{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \end{cases}$$

بنابراین فشار تنها در راستای  $Z$  (که جهت مثبت آن خلاف جاذبه فرض شده است) تغییر می کند.  $P$  تابعی از  $X$  و  $Y$  نیست، لذا:



$$\frac{dP}{dz} = -\gamma$$

$$\int_z^{z_0} -\gamma dz = \int_P^{P_{atm}} dP$$

$$-\gamma z \Big|_z^{z_0} = P \Big|_P^{P_{atm}} \quad (\text{با فرض سیال تراکم ناپذیر } \gamma \text{ ثابت})$$

$$-\gamma(z_0 - z) = P_{atm} - P$$

$$P = P_{atm} + \gamma(z_0 - z)$$

$$= P_{atm} + \gamma d$$

اگر  $P - P_{atm}$  را فشار نسبی (Gage pressure) بنامیم:

$$P_g = P - P_{atm} = \gamma d$$

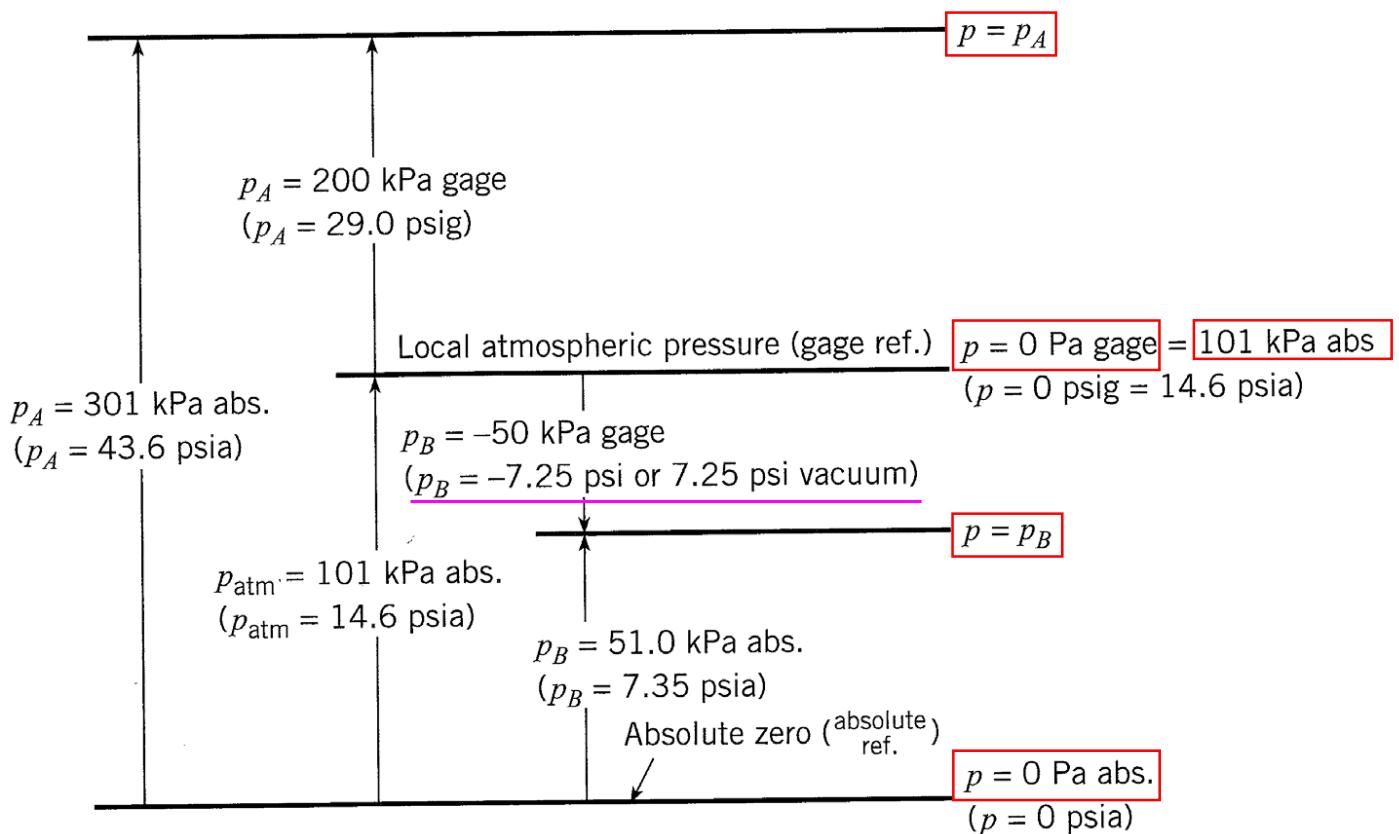
بسیاری از تجهیزات مهندسی فشار نسبی را اندازه گیری می کنند.

فشار در فضای بیرون از زمین (extra terrestrial) صفر است (Absolute Zero). تمام فشارهای اندازه گیری شده نسبت به این فشار که فشار مطلق نامیده می شود (absolute pressure) سنجیده می شوند.

$P_g$  در فشارهای کمتر از فشار اتمسفر منفی است (حداکثر  $-P_{atm}$  در خلا کامل یا صفر مطلق). در چنین وضعیتهایی که فشار نسبی منفی می شود فشار خلا (Vacuum pressure) تعریف می شود:

$$P_{vac} = -P_g = P_{atm} - P$$

## Absolute Pressure, Gage Pressure and Vacuum (example)



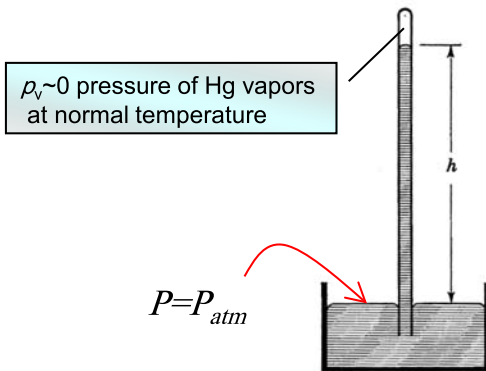
# اندازه گیری فشار-مانومتري: (Pressure measurement-Manometry)

## مانومترها: (Manometers)

مانومترها وسایلی هستند که با توجه به ستونهای مایعات اختلاف فشار را نشان می دهد.

## بارومتر: (Barometer)

بارومتر جیوه ای برای تعیین فشار مطلق هوا استفاده می شود. در بارومتر انتهای لوله بسته بوده، از هوا تخلیه شده و آب بندی میشود.

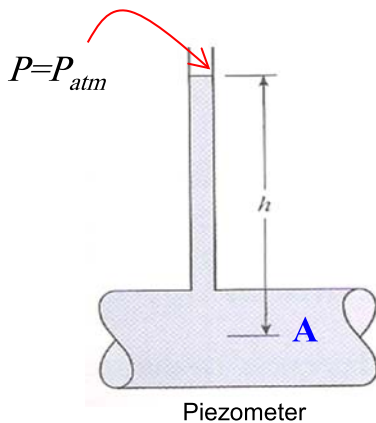


$$P_u = 0$$

$$P_A = P_{atm} = \gamma_{Hg} h$$

## پیزومتر: (Piezometer)

پیزومترها مانومترهای ساده ای هستند که برای اندازه گیری فشار سیالات هنگامی که فشار نسبی مثبت است، استفاده می شوند. بر خلاف بارومتر، در پیزومترها انتهای لوله باز می باشد. بدیهی است که در صورت منفی بودن فشار نسبی، هوا از راه لوله وارد آب شده و نمی توان فشار را اندازه گیری کرد.

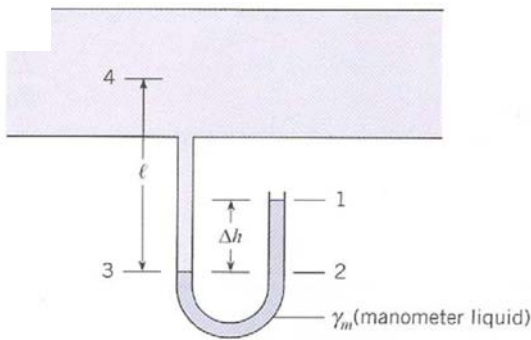


$$P_A = P_{atm} + \gamma h$$

$$P_A(g) = \gamma h$$

بدیهی است که در صورت منفی بودن فشار نسبی، هوا از راه لوله وارد آب شده و نمی توان فشار را اندازه گیری کرد. برای اندازه گیری فشارهای نسبی منفی یا مثبت کوچک می توان از لوله U شکل استفاده کرد. در این حالت امکان قرارگیری مایع لوله در تراز کمی کمتر از تراز متوسط ظرف نیز وجود دارد.

در فشارهای نسبی منفی یا مثبت بزرگتر، از مایع دارای چگالی بیشتری استفاده می شود. این مایع باید با سیال ا غیر قابل اختلاط باشد



$$p_2 = p_3 \text{ (same elevation)}$$

$$p_2 = p_1 + \gamma_m \Delta h = \gamma_m \Delta h$$

$$p_3 = p_4 + \gamma l$$

$$\longrightarrow p_4 + \gamma l = \gamma_m \Delta h$$

$$p_4 = \gamma_m \Delta h - \gamma l$$

در حالت کلی می توان از رابطه زیر نیز استفاده کرده فشار هر نقطه دلخواه را بدست آورد (از نقطه  $n$  شروع کرده و به سمت نقطه  $m$  حرکت می کنیم، حرکت به سمت پایین به افزایش فشار و حرکت به بالا به کاهش فشار منتهی می شود):

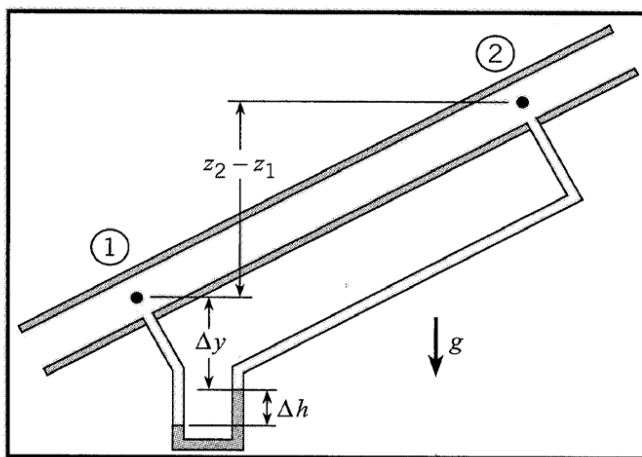
$$p_m = p_n + \sum_{\text{down}} \gamma_i h_i - \sum_{\text{up}} \gamma_i h_i$$

$$p_4 = p_1 + \gamma_m \Delta h - \gamma l$$

در مثال فوق با حرکت از نقطه ۱ به سمت ۴:

$$= \gamma_m \Delta h - \gamma l$$

### مانومترهای تفاضلی (Differential manometer)



مانومترهای تفاضلی (Differential manometer) اختلاف فشار بین نقاط را نشان می دهند در حالی که فشار واقعی در هیچ نقطه از سیستم را نمی توان بدست آورد:

$$p_2 = p_1 + \gamma_w (\Delta y + \Delta h) - \gamma_m \Delta h - \gamma_w (\Delta y + z_2 - z_1)$$

## تغییرات فشار در سیال قابل تراکم: (Pressure variation for a static compressible fluid)

در سیال تراکم پذیر، وزن مخصوص ثابت نیست. اگر بحث را به گازهای کامل محدود کنیم:

### الف- گاز کامل ایزوترمال: (Isothermal perfect gas)

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = R \quad \xrightarrow{T = cte} \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho_1} = c \quad \text{یا} \quad \frac{pg}{\gamma} = \frac{p_1 g_1}{\gamma_1} = c$$

با فرض اینکه محدوده تغییرات ارتفاع به گونه ای نباشد که شتاب ثقل تغییر کند،

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma_1} = c' \\ \frac{dp}{dz} = -\gamma \quad (\text{معادله اصلی تغییر فشار در سیال تراکم پذیر و تراکم ناپذیر}) \end{array} \right.$$

$$\implies \frac{dp}{dz} = -\frac{p\gamma_1}{P_1}$$

$$\frac{dp}{P} = -\frac{\gamma_1}{P_1} dz \quad \int_{P_1}^P \frac{dp}{P} = -\frac{\gamma_1}{P_1} \int_{z_1}^z dz \quad \ln P \Big|_{P_1}^P = \left. -\frac{\gamma_1}{P_1} z \right|_{z_1}^z \quad \ln \frac{P}{P_1} = -\frac{\gamma_1}{P_1} (z - z_1)$$

با استفاده از این رابطه معلوم بودن فشار  $P_1$  و وزن مخصوص  $\gamma_1$  در ارتفاع  $z_1$ ، فشار در ارتفاع  $Z$  بدست می آید.

$$P = P_1 \exp\left[-\frac{\gamma_1}{P_1} (z - z_1)\right]$$

### ب- رابطه دما و ارتفاع خطی است:

$$T = T_1 + kz \quad (z=0 \text{ در دمای مبنا در } T_1)$$

نرخ تنزل (Lapse rate)

$$\text{و یا} \quad dz = \frac{dT}{k} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{p}{\rho T} = R$$

$$\frac{pg}{\gamma T} = R \implies \gamma = \frac{pg}{RT} \quad \text{(II)}$$

با قرار دادن معادلات (I) و (II) در معادله اصلی فشار سیال:  $\left(\frac{dp}{dz} = -\gamma\right)$

$$dp = -\gamma dz$$

$$= -\frac{pg}{RT} \times \frac{dT}{k} \quad \text{و یا} \quad \frac{dp}{P} = -\frac{g}{kR} \times \frac{dT}{T}$$

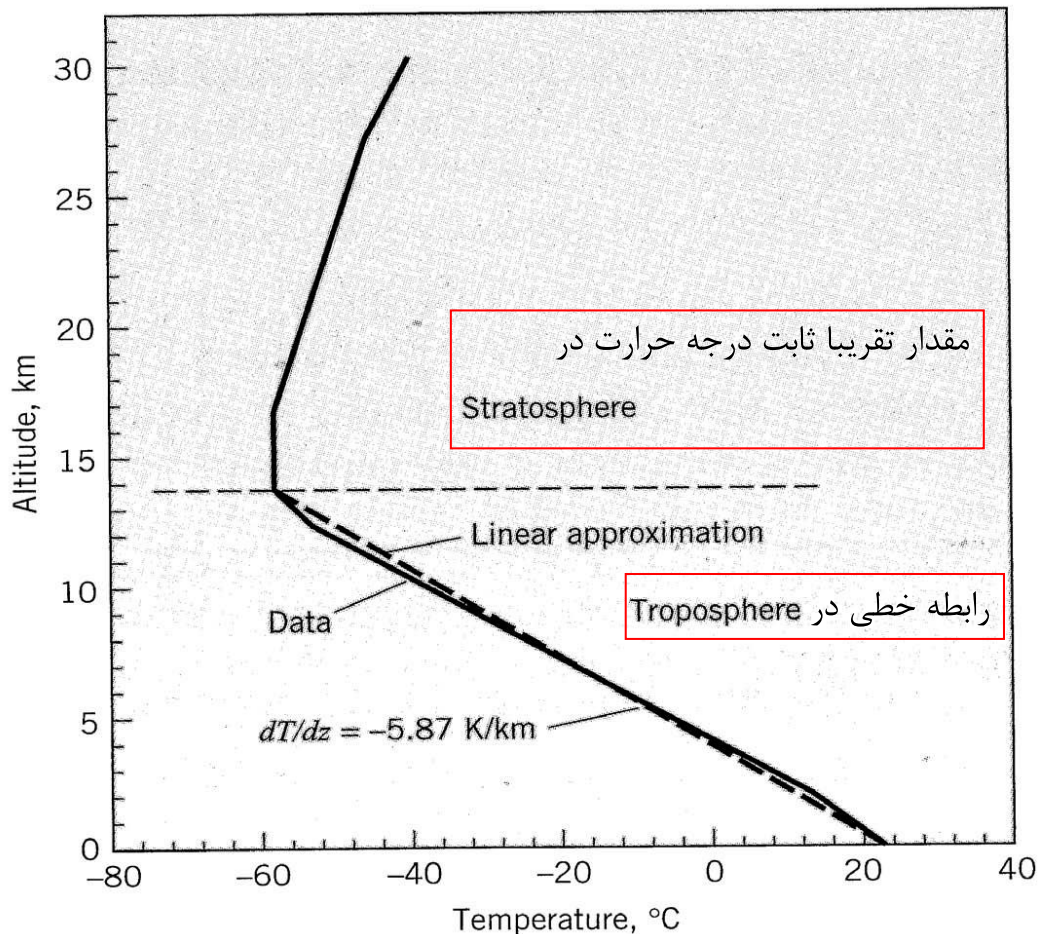
$$\int_{P_1}^P \frac{dp}{P} = -\frac{g}{kR} \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} \quad z=0 \text{ به ترتیب دما و فشار در تراز مبنا } T_1$$

$$\ln P \Big|_{P_1}^P = -\frac{g}{kR} \ln T \Big|_{T_1}^T \quad \ln \frac{P}{P_1} = -\frac{g}{kR} \ln \frac{T}{T_1} = \frac{g}{kR} \ln \frac{T_1}{T}$$



$$P = p_1 \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\frac{g}{kR}} = p_1 \left(\frac{T_1}{T_1 + kz}\right)^{\frac{g}{kR}}$$

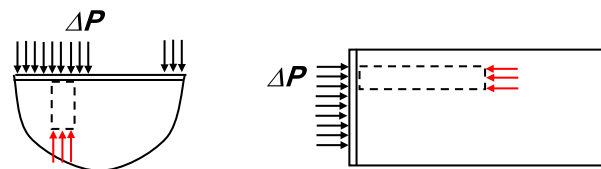
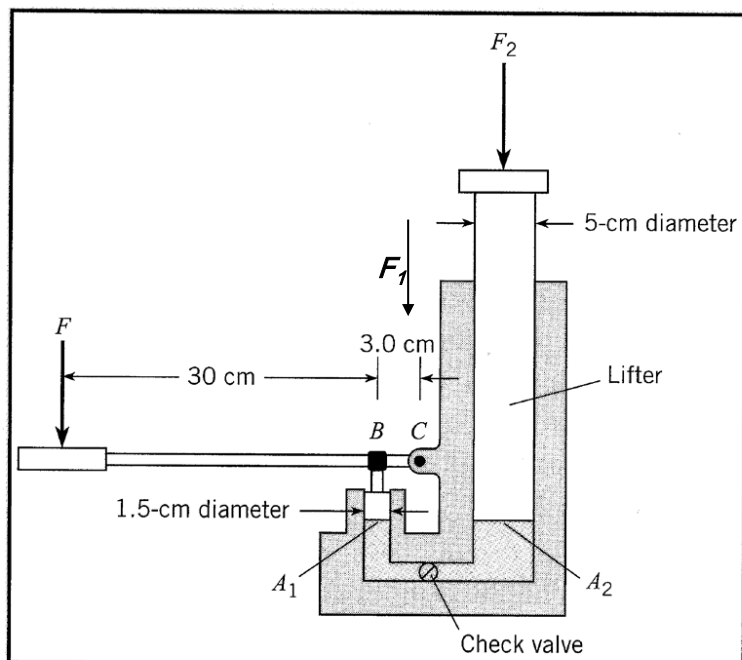




U.S.National Weather Service: 45°N latitude in July

### انتقال فشار: (Pressure transmission)

اگر به قسمتی از مرز سیالی (قابل تراکم یا غیر قابل تراکم) محبوس (confined) و ساکن فشار خارجی اعمال شود، پس از فروکش کردن حرکات این فشار به تمام نقاط سیال منتقل می شود (قانون پاسکال). برای اثبات، با توجه به عدم تحمل تنش برشی در سیال ساکن می توان المانهایی افقی و قائم در سیال در نظر گرفت که فشار وارده بر یک وجه آنها مستقیماً به انتهای المان منتقل می شود. از آنجایی که اغلب فشار اعمال شده به مراتب بیشتر از تغییر فشار قائم ناشی از وزن سیال می باشد، می توان مقدار فشار داخلی سیال را در تمام نقاط تقریباً یکسان در نظر گرفت.



این اصل اساس کار ترمز و جک هیدرولیکی است:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\Delta P \times A_2}{\Delta P \times A_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

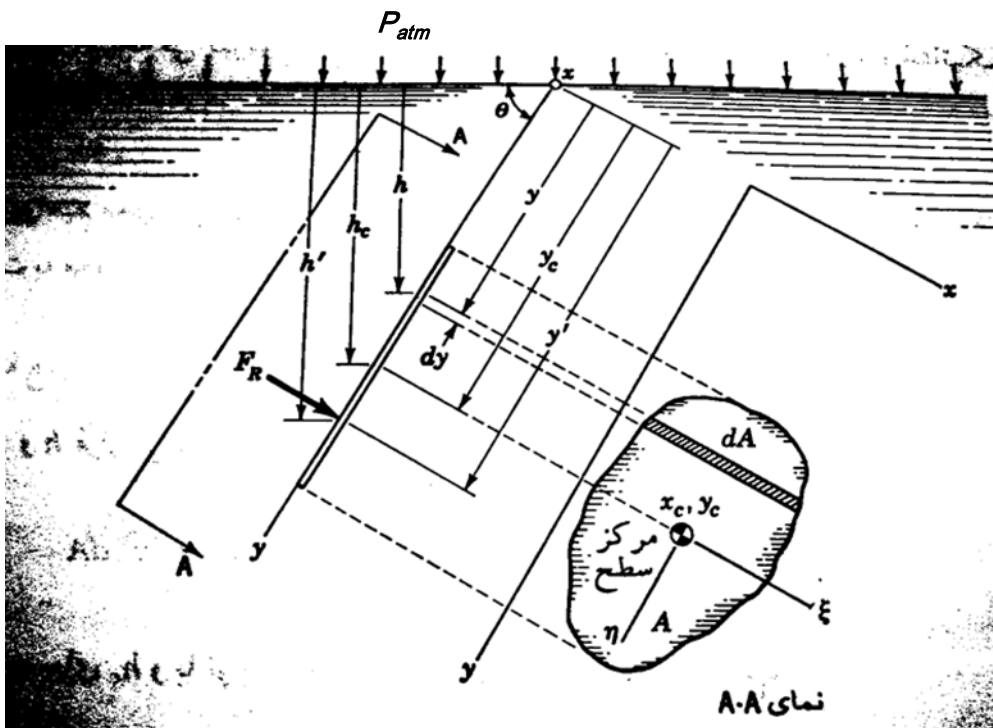
( $\Delta P$  افزایش فشار اعمال شده به سیال است)

$$A_2 \gg A_1 \Rightarrow F_2 \gg F_1$$

مشاهده می شود که مزیت مکانیکی بالایی ایجاد می شود.

# Hydrostatics (2)

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح مسطح غوطه ور در سیال غیر قابل تراکم ساکن:  
(Static incompressible submerged fluid)



بدلیل عدم وجود تنش برشی، نیروی وارد بر سطوح غوطه ور عمود بر آن می باشد. برآیند نیروی فشار ناشی از فشار یکنواخت ( $P_{atm}$ ) برابر است با:

$$\int_A P_{atm} dA = P_{atm} \int_A dA = P_{atm} A$$

جزء سطحی اختیاری واقع بر سطح جسم

برای بدست آوردن فشار هیدرواستاتیک سیال، نوار  $dA$  را به شکلی انتخاب می کنیم که تمام نقاط آن عمق یکسانی داشته باشند.

در این حالت فشار وارد بر تمام نقاط یکنواخت و برابر  $\gamma h$  می باشد. جزء نیروی وارد بر  $dA$ :

$$dF = \gamma h dA$$

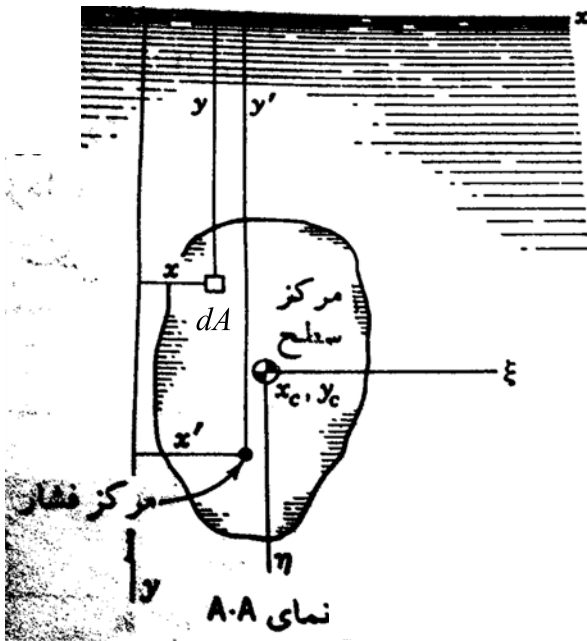
بنابر این کل نیروی وارد بر سطح  $A$ :

$$F_R = \int_A dF = \int_A (\gamma h) dA = \gamma \sin \theta \int_A y dA$$

ممان استاتیکی سطح حول محور  $X$  ها  $Ay_c$



$$F_R = \gamma \sin \theta y_c A = \gamma h_c A = \underline{P_c A}$$



بنابراین می توانیم فرض کنیم فشار یکنواختی برابر  $P_c$  (فشار در مرکز سطح) به تمام صفحه اثر می کند.

برای بدست آوردن محل اثر نیروی برآیند  $F_R$  ( $y'$ )، لنگر توزیع فشار نسبت به محور  $X$  ها را در نظر می گیریم:

$$F_R y' = \int_A \frac{dF}{dM_x} (\gamma h) dA \times y$$

$$\gamma h_c A y' = \int_A \gamma y \sin \theta y dA$$

$$\gamma \sin \theta y_c A y' = \gamma \sin \theta \int_A y^2 dA$$

$$\gamma \sin \theta y_c A y' = \gamma \sin \theta I_{xx}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{I_{xx}}{A y_c}$$

که در آن  $I_{xx}$  ممان دوم سطح حول محور  $X$  ها است.

اگر به جای  $I_{xx}$  عبارت  $I_{\xi\xi} + A y_c^2$  را قرار دهیم که  $I_{\xi\xi}$  ممان دوم سطح حول محور  $\xi$  عبوری از مرکز سطح به موازات محور  $X$  ها می باشد:

$$y' = \frac{A y_c^2 + I_{\xi\xi}}{A y_c} = y_c + \frac{I_{\xi\xi}}{A y_c}$$

نقطه اثر نیروی برآیند وارد بر سطح غوطه ور مرکز فشار (Center of pressure) نامیده می شود. مرکز فشار همواره زیر مرکز سطح قرار می گیرد:

$$\frac{I_{\xi\xi}}{A y_c} > 0 \Rightarrow y' > y_c$$

برای محاسبه  $x'$ ، فاصله مرکز فشار از محور  $y$  ها، لنگر نیروی برآیند  $F_R$  و لنگر توزیع فشار نسبت به محور  $y$  در نظر می گیریم:

$$x' = \int_A \frac{dF}{dM_x} (x, y)$$

جزء سطح متناظر با نقطه  $(x, y)$

$$(\gamma \sin \theta_c A) x' = \gamma \sin \theta \int_A xy dA$$

$$y_c A x' = I_{xy} \Rightarrow x' = \frac{I_{xy}}{A y_c}$$

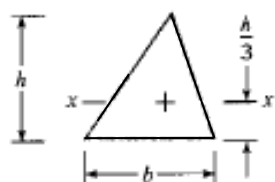
که در آن  $I_{xy}$  حاصل ضرب اینرسی (Product of inertia) دستگاه نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  است.

اگر به جای  $I_{xy}$ ،  $I_{\xi\eta}$  ممان دوم عبوری از مرکز سطح را قرار دهیم:

$$x' = \frac{A x_c y_c + I_{\xi\eta}}{A y_c} = x_c + \frac{I_{\xi\eta}}{A y_c}$$

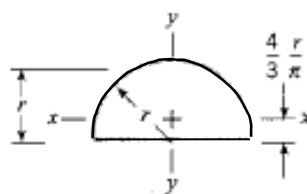
$\xi$  و  $\eta$  به ترتیب موازی و عمود بر خط اثر صفحه و سطح آزاد می باشند. از آنجایی که  $I_{\xi\eta}$  می تواند مثبت یا منفی باشد، مرکز فشار در هر دو طرف خط  $x = x_c$  ممکن است قرار بگیرد. چنانچه یکی از محورهای  $\xi$  و  $\eta$  بمخور تقارن سطح باشد،  $I_{\xi\eta}$  صفر شده و مرکز فشار بر روی خط  $x = x_c$  قرار می گیرد.

## Centroids and moments of inertia of plane surfaces



$$A = \frac{bh}{2}$$

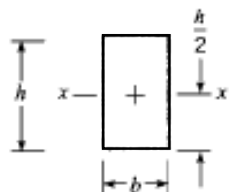
$$\bar{I}_{xx} = \frac{bh^3}{36}$$



$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

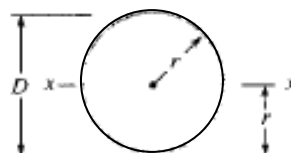
$$\bar{I}_{xx} = 0.110 r^4$$

$$\bar{I}_{yy} = \frac{\pi r^4}{8}$$



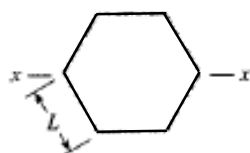
$$A = bh$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$



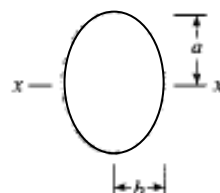
$$A = \pi r^2$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi r^4}{4}$$



$$A = 2.5981 L^2$$

$$\bar{I}_{xx} = 0.5127 L^4$$

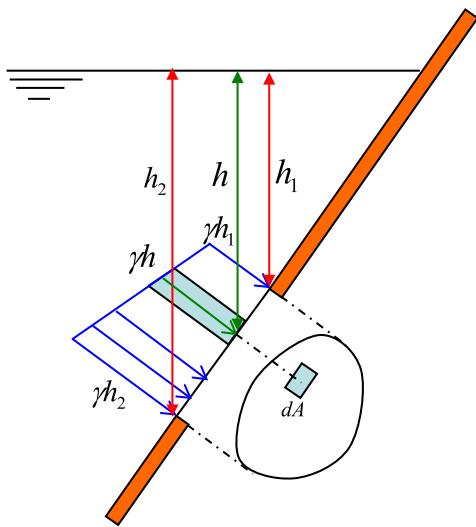


$$A = \pi ab$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

## منشور فشار: (Pressure prism)

روش دیگر حل مسئله نیروی وارد بر سطوح مسطح غوطه ور تعیین نیروی برآیند و محل اثر آن استفاده از منشور فشار می باشد. این منشور حجم منشوری شکلی است که قاعده اش سطح صاف اعمال فشار بوده و ارتفاعش با رابطه  $P = \gamma h$  بدست می آید ( $h$  فاصله عمودی تا سطح آزاد واقعی یا فرضی مایع می باشد).



جزء نیروی وارد بر  $dA$  :

$$dF = \gamma h dA = dV$$

که یک عنصر حجم از منشور فشار می باشد. بنابراین کل نیروی وارده (برآیند فشار اعمال شده به سطح) برابر است با حجم منشور فشار:

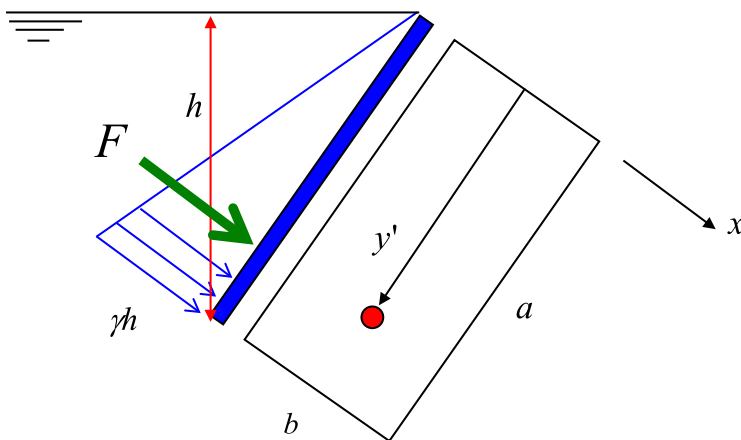
$$F = \int_V dV = V$$

نیروی  $F$  از مرکز حجم منشور فشار می گذرد:

$$\begin{cases} x_P = \frac{1}{V} \int_V x dV \\ y_P = \frac{1}{V} \int_V y dV \end{cases}$$

در بعضی شکلهای ساده روش منشور فشار بسیار مناسبتر از روش انتگرال گیری می باشد. مثلا در سطح مستطیل شکلی که ضلع فوقانی آن منطبق بر سطح آزاد مایع است، منشور فشار سه گوش (گوه ای شکل) است:

با استفاده از روابط قبل:



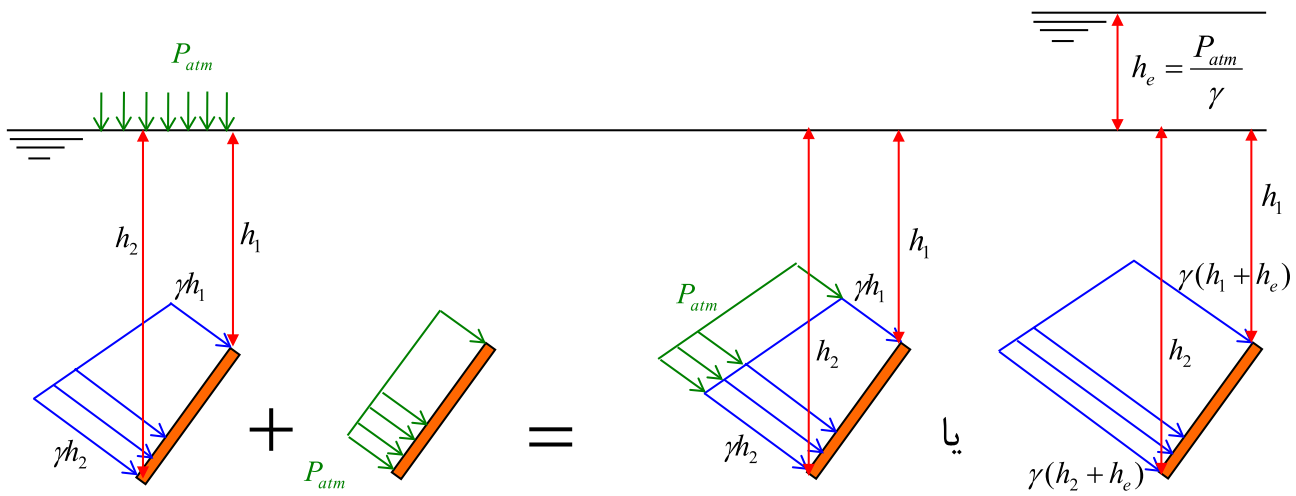
$$\begin{cases} F = P_c A = \frac{\gamma h}{2} (ab) = \frac{\gamma hab}{2} \\ y' = y_c + \frac{I_{\zeta\zeta}}{A y_c} \\ = \frac{a}{2} + \frac{1/12 ba^3}{ab(a/2)} = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{2a}{3} \end{cases}$$

با استفاده از روش منشور فشار:

$$\begin{cases} F = V = \frac{1}{2} (\gamma h \times a \times b) = \frac{\gamma hab}{2} \\ y' = \frac{2a}{3} \quad (\text{مرکز حجم در } 1/3 \text{ قاعده قرار دارد}) \end{cases}$$

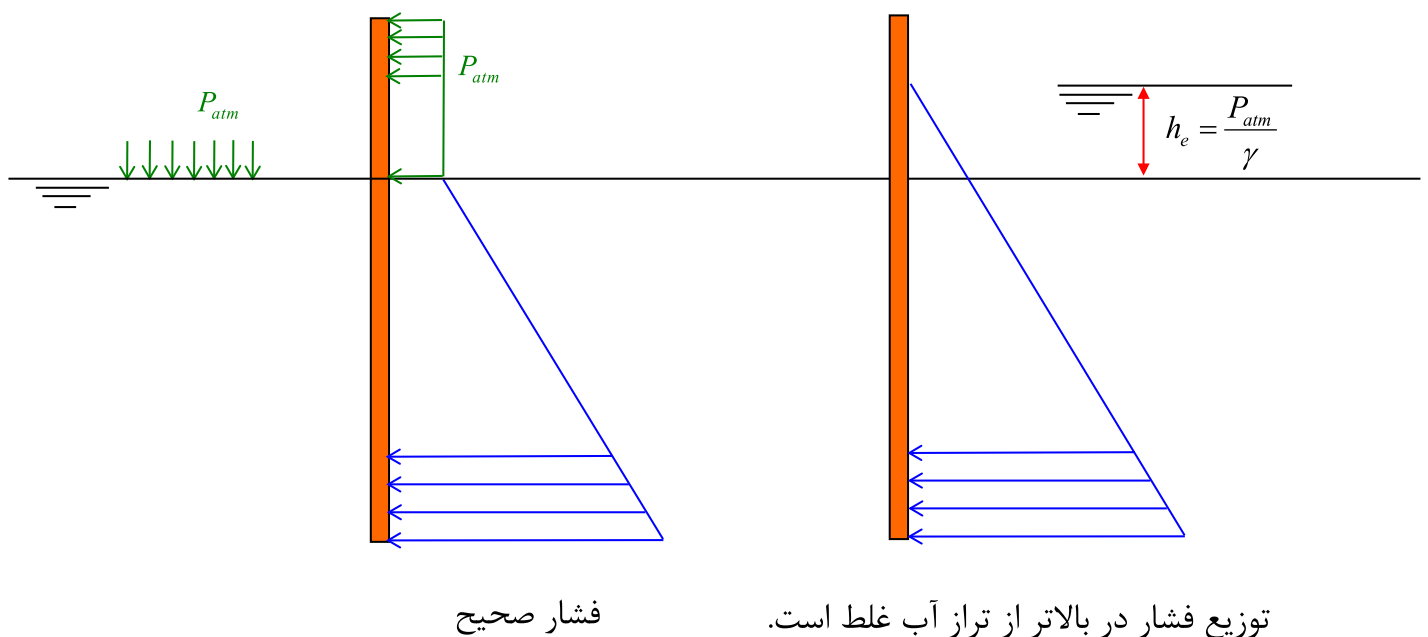
## ارتفاع معادل سیال: (Equivalent height)

تاثیر فشار یکنواخت وارد بر سطح سیال را می توان با افزایش فرضی ارتفاع سیال جایگزین نمود. بدین منظور کفیسست ارتفاع معادل به گونه ای انتخاب شود که فشار یکسانی در سطح سیال اعمال گردد:



استفاده از روش ارتفاع معادل گاهی راه حل ساده تری در تعیین مقدار و محل اثر نیروی وارده از طرف سیال ارائه می دهد.

واضح است که توزیع فشار صرفاً در پایین تر از تراز سیال می تواند بدین روش تعیین شود و استفاده از این روش در بالاتر از تراز سیال اشتباه می باشد:



(Hydrostatic force on curved submerged surfaces)

نیروی وارد بر المان عمود بر سطح آن المان بوده و برابر است با:

$$d\vec{F} = -pd\vec{A}$$

که در آن  $d\vec{A}$  همراستا با  $\vec{n}$  (طبق قرارداد به طرف خارج پوسته - صرفنظر از تقعر یا تحدب آن) است:

$$d\vec{A} = dA\vec{n}$$

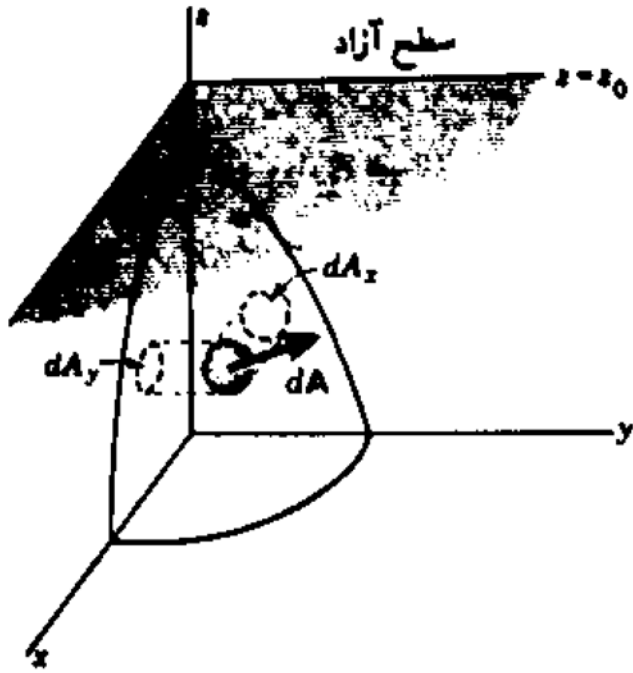
با ضرب داخلی طرفین در بردار  $\vec{i}$ :

$$d\vec{F} \cdot \vec{i} = -pd\vec{A} \cdot \vec{i}$$

$$dF_x = -pdA_x$$

که در آن  $dA_x$  تصویر المان  $dA$  بر روی سطح  $YZ$  می باشد با انتگرال گیری بر روی صفحه  $YZ$  (یا هر صفحه دیگر عمود بر محور  $X$  ها):

$$F_x = \int_{A_x} -pdA_x$$



بنابراین مسئله نیروی وارد بر سطح منحنی به تعیین نیروی وارده به صفحه مسطح غوطه وری که بر سطح آزاد عمود است منجر می شود. به شکل مشابه:

$$F_y = \int_{A_y} -pdA_y$$

بدین ترتیب دو مولفه نیروی برآیند را می توان با روشهای مربوط به سطوح مسطح غوطه ور بدست آورد. این مولفه ها با سطح آزاد موازی هستند (مقدار و محل اثر نیروهای افقی وارده بر سطح مورب با مقدار و محل اثر نیروهای وارد بر تصاویر سطح مورب در دو راستا - سطوح مسطح - یکسانست).

نیروهای افقی و قائم ناشی از فشار جو وارد بر سطوح منحنی شکل نیز بسادگی به همین روش تعیین می گردند ( $P=P_{atm}$ ) و تنها کافیست تصویر سطح منحنی شکل بر روی صفحات  $YZ$ ،  $XZ$  یا  $XY$  در نظر گرفته شود:

$$\begin{cases} F_x = \int_{A_x} -p_{atm} dA_x = -p_{atm} A_x \\ F_y = \int_{A_y} -p_{atm} dA_y = -p_{atm} A_y \\ F_z = \int_{A_z} -p_{atm} dA_z = -p_{atm} A_z \end{cases}$$

برای تعیین مولفه عمود بر سطح آزاد:

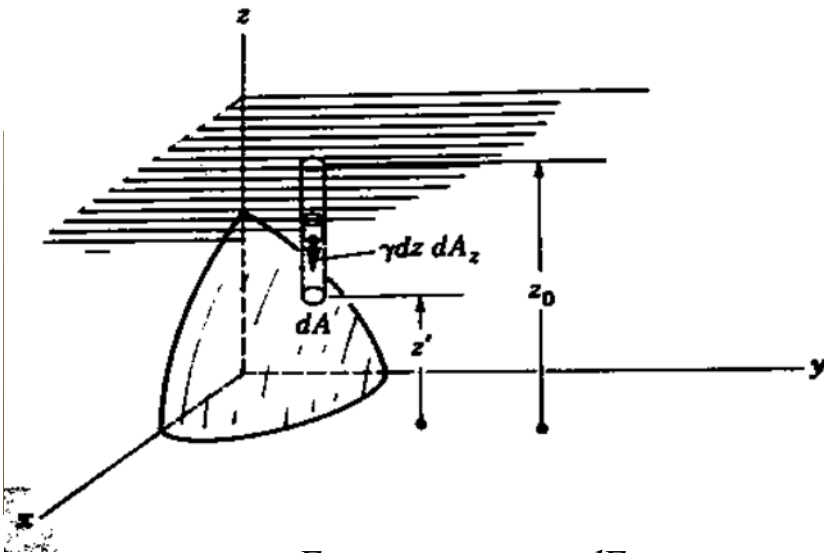
$$d\vec{F} = -pd\vec{A}$$

$$d\vec{F} \cdot \vec{k} = -pdA \cdot \vec{k}$$

$$dF_z = -pdA_z$$

$$= -\left(\int_{z'}^{z_0} \gamma dz\right) dA_z = -\int_{z'}^{z_0} \gamma dz dA_z$$

که در آن  $\gamma dz dA_z$  وزن المان کوچکی از سیال است که داخل ستون سیال از روی المان تا سطح آزاد ادامه دارد.



رابطه فوق در سیال تراکم پذیر نیز صادق است. از انتگرال گیری  $dF_z$  بر روی تمام سطح،  $F_z$  برابر وزن کل سیال روی سطح منحنی بدست می آید.

علامت منفی نشان می دهد که به یک سطح منحنی که تصویر  $dA_z$  آن مثبت است (بخش فوقانی یک جسم) نیرویی در جهت خلاف محور  $Z$  (به طرف پایین) وارد می شود.

با فرض  $\gamma$  ثابت:

$$F_z = \int_{A_z} -pdA_y$$

منشوری با قاعده  $dA_z$  و ارتفاع  $z_0 - z'$

$$= -\int_{A_z} \gamma(z_0 - z')dA_z = -\gamma \int_{A_z} (z_0 - z')dA_z = -\gamma \int_V dV = -\gamma V$$

حجم مایع بالای سطح منحنی غوطه ور

خط اثر مولفه قائم، با مساوی قرار دادن گشتاور مولفه های قائم جزئی (متناظر با  $dA_z$ ) حول محورهای  $X$  و  $Z$  بدست می آید:

$$\begin{cases} F_z \bar{x} = -\int_V x \gamma dV & (\text{لنگرگیری حول محور } y) \\ F_z \bar{y} = -\int_V y \gamma dV & (\text{لنگرگیری حول محور } z) \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x} = -\frac{\gamma \int_V x dV}{F_z} = \frac{\gamma \int_V x dV}{-\gamma V} = \frac{\int_V x dV}{V} \\ \bar{y} = -\frac{\gamma \int_V y dV}{F_z} = \frac{\gamma \int_V y dV}{-\gamma V} = \frac{\int_V y dV}{V} \end{cases}$$

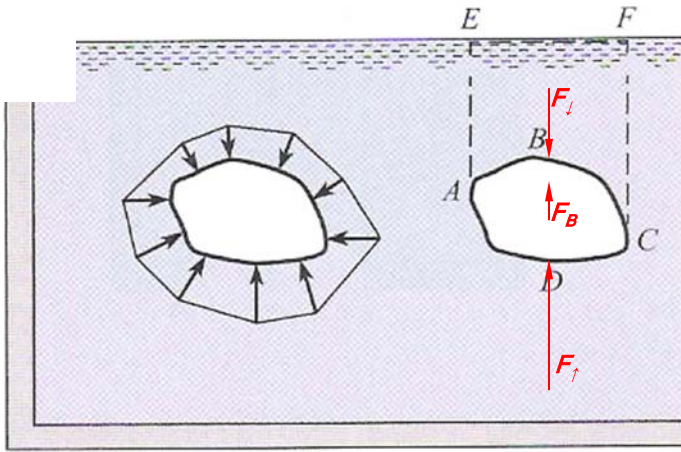
بنابراین خط اثر نیروی قائم از مرکز حجم سیال روی سطح منحنی تا سطح آزاد فرضی یا واقعی عبور می کند. در ساختن یک سطح آزاد ذهنی، مایع فرضی باید از همان وزن مخصوص مایع در تماس با سطح منحنی برخوردار باشد تا توزیع فشار روی سطح صحیح باشد.

خط اثر سه مولفه نیروهای افقی و نیروی قائم لزوما در یک نقطه تلاقی نمی کنند. به عبارت دیگر برآیند نیروهای وارده لزوما نیروی منفردی نیست. در مسائل عملی می توان از مولفه های قائم و موازی با سطح آزاد استفاده کرد.

نتایج این بخش محدود به سیالات غیر قابل تراکم نبوده و در هر سیالی معتبر است. در سیال تراکم پذیر، خط اثر نیروی قائم از مرکز ثقل (یا مرکز جرم با فرض شتاب ثقل ثابت) سیال بالای سطح منحنی می گذرد.



## نیروی شناوری: (Buoyant force)



نیروی بر آیند اعمال شده بر یک جسم توسط سیال ایستا که جسم در آن غوطه ور یا روی آن شناور می باشد، نیروی شناوری نامیده می شود.

از آنجایی که تصویر قائم جسم غوطه ور یا ناحیه غوطه ور جسم شناور در مایع همواره صفر است، نیروی شناوری همواره به سمت بالا بوده و مولفه افقی ندارد.

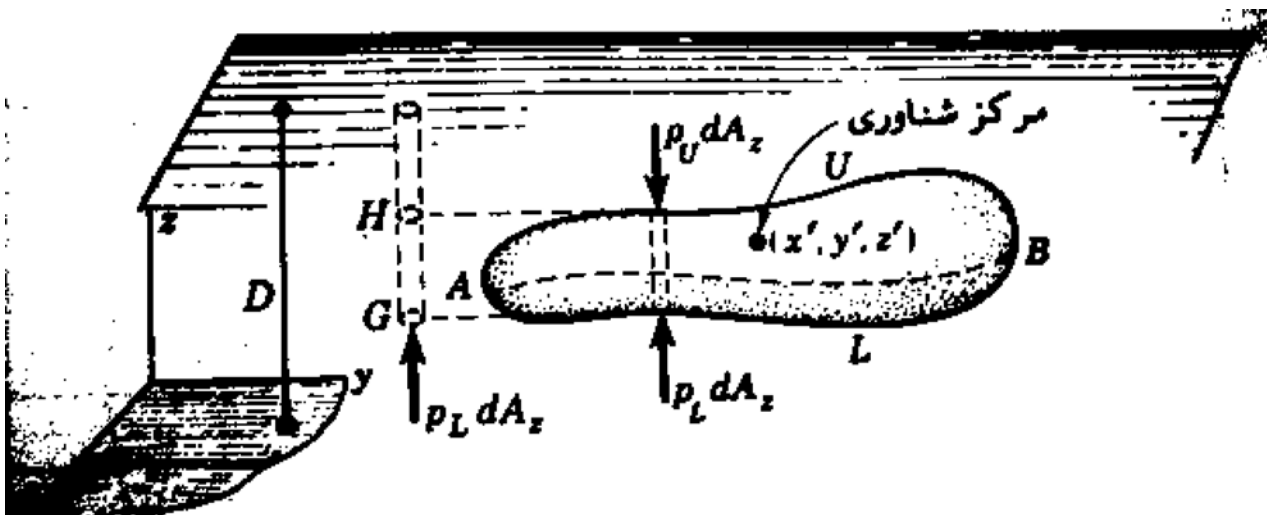
در مسائل شناوری روابط مربوط به نیروهای وارد بر سطوح مستقیم یا منحنی قابل استفاده می باشند، اما با توجه به شرایط جسم کاملاً غوطه ور یا شناور می توان روابط ساده تری ارائه نمود.

دو حالت زیر در نظر گرفته می شوند:

۱- جسم به طور کامل در سیال غوطه ور است.

۲- جسم در سطح مشترک دو سیال غیر محلول قرار دارد.

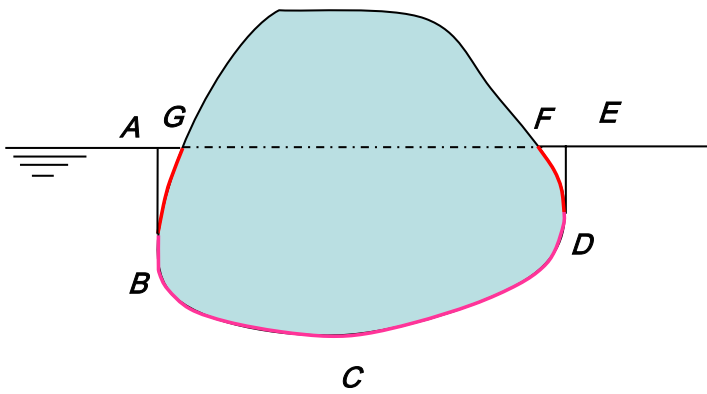
جسم کاملاً غوطه ور در آب را به دو بخش فوقانی  $AUB$  و تحتانی  $ALB$  تقسیم می کنیم:



اگر ستون قائمی با سطح مقطع  $dA_z$  را در نظر بگیریم، نیروی قائم وارد بر بالای آن  $P_U dA_z$  (وزن ستونی از سیال به سطح مقطع  $dA_z$  و ارتفاع روی المان تا سطح آزاد) می باشد.

فشار  $P_L$  پایین ستون با فشار ستونی فرضی از سیال که از کف المان تا سطح آزاد ادامه می یابد برابر است. بنابراین اختلاف بین نیروی فوقانی  $P_U dA_z$  و نیروی تحتانی  $P_L dA_z$  برابر است با وزن ستون سیال  $GH$  که مقطع و ارتفاع آن با ستون داخل جسم برابر است. با در نظر گرفتن تمام ستونهای داخل جسم غوطه ور، نیروی خالص بالابرنده جسم برابر است با وزن سیال جابجا شده (اصل ارشمیدس، Archimedes principle). در اصل ارشمیدس محدودیتی برای تراکم پذیری وجود ندارد.

به طریق مشابه در اجسام شناور نیز نیروی بالابرنده برابر با وزن سیال جابجا شده می باشد:



نیروی شناوری

$$F_z = W(ABCDE) - [W(ABG) + W(DEF)]$$

$$= W(GBCDF)$$

نیروی وارد بر FD

### مرکز شناوری: (Center of buoyancy)

مرکز شناوری نقطه ای از فضا است که نیروی شناوری در آن اثر می کند. در شکل اسلاید قبل:

$$dF_B = (P_L - P_U)dA_z$$

که در سیال تراکم پذیر و تراکم ناپذیر صحیح است. اگر سیال تراکم ناپذیر را در نظر بگیریم:

$$dF_B = [(D\gamma - (D-h)\gamma)dA_z = \gamma h dA_z$$

$$F_B = \gamma \int h dA_z = \gamma V$$

با انتگرال گیری بر روی کل جسم:

که  $V$  حجم جسم غوطه ور است (این رابطه اثبات اصل ارشمیدس در سیال تراکم ناپذیر است). با لنگرگیری حول محور  $y$  ها:

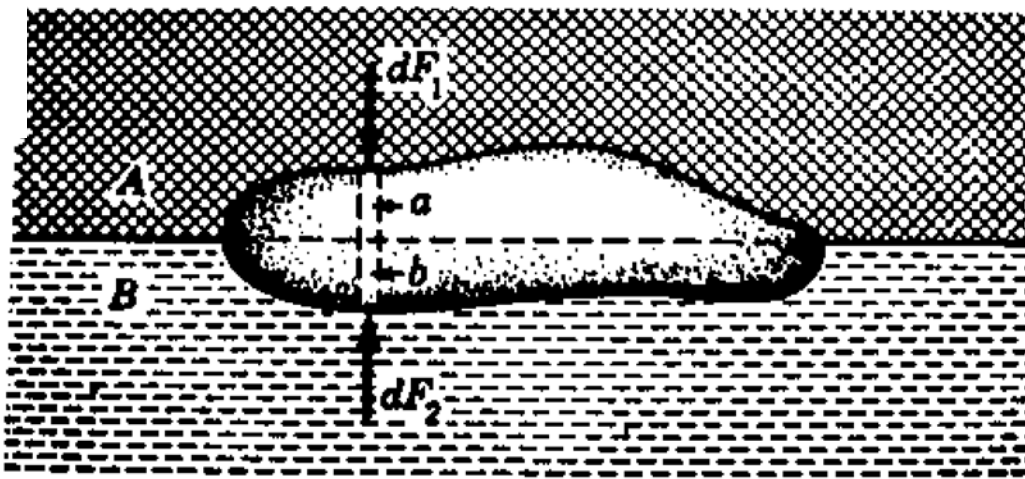
$$x' F_B = \gamma \int x h dA_z = \gamma \int_V x dV$$

$$x' \gamma V = \gamma \int_V x dV \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{\int_V x dV}{V}$$

$$y' = \frac{\int_V y dV}{V}$$

به طریق مشابه با لنگرگیری حول محور  $x$  ها:

بنابراین نیروی شناوری وارده بر جسم واقع در سیال غیر قابل تراکم از مرکز حجم جابجا شده توسط جسم می گذرد. در سیالات تراکم پذیر باید مرکز ثقل سیال جابجا شده (یا مرکز جرم با ثابت فرض کردن شتاب ثقل در محدوده ارتفاع جسم غوطه ور) در نظر گرفته شود.



در حالتی که جسم در مرز بین دو سیال محلول قرار داشته باشد (مثلا جسم شناور در آب با در نظر گرفتن هوای روی آب):

$$dF_2 - dF_1 = W_a(A) + W_b(B)$$

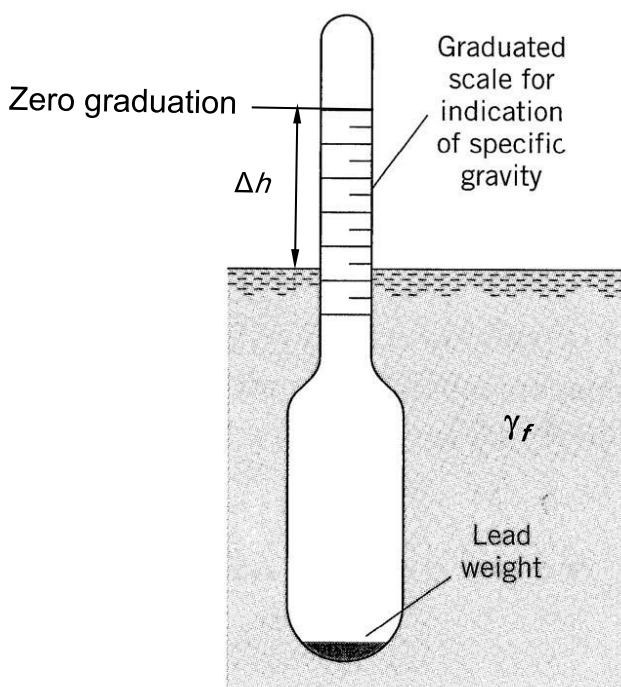
وزن ستون  $a$  از سیال  $A$       وزن ستون  $b$  از سیال  $B$

با انتگرال گیری بر روی کل جسم نیروی شناوری برابر وزن دو سیال جابجا شده خواهد بود. در صورتی که وزن مخصوص دو سیال متفاوت باشد مرکز شناوری لزوماً از مرکز حجم جابجا شده عبور نمی کند.\*

با توجه به وزن مخصوص ناچیز هوا، در مباحث کشتیرانی می توان از تاثیر هوا صرف نظر کرده و مرکز شناوری را منطبق بر مرکز حجم سیال جابجا شده در نظر گرفت.

### هیدرومتر: (Hydrometer)

ابزاری است که با استفاده از قانون شناوری برای تعیین وزن مخصوص سیالات بکار می رود. از آنجایی که نیروی شناوری تابعی از وزن مخصوص سیال است و با توجه به ثابت بودن وزن هیدرومتر، میزان فروروی هیدرومتر در سیال تابعی از وزن مخصوص سیال می باشد. بنابراین با مدرج کردن راستای قائم می توان وزن مخصوص سیال را بدست آورد.\*

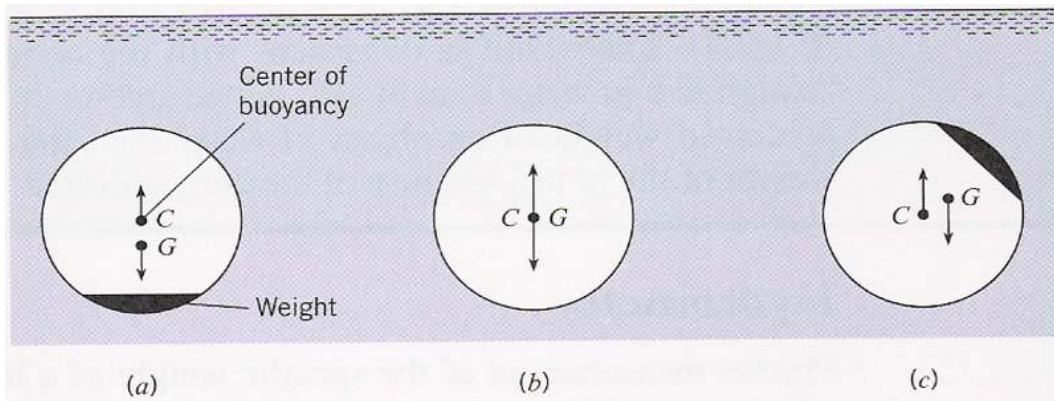


$$\Delta h = f(\gamma_f)$$

## پایداری اجسام شناور و غوطه ور: (Hydrometer)

جسمی دارای پایداری خطی است که هر گاه تغییر مکان کوچک خطی به آن اعمال شود، نیروی بازگرداننده ای د آن ایجاد شود که تمایل به بازگرداندن جسم به موقعیت اولیه اش داشته باشد. مثلا یک جسم شناور در مایع ایسند پایداری قائم دارد.

یک جسم ممکن است بطور پایدار، ناپایدار و یا خنثی در سیال شناور باشد:



پایدار (Stable)

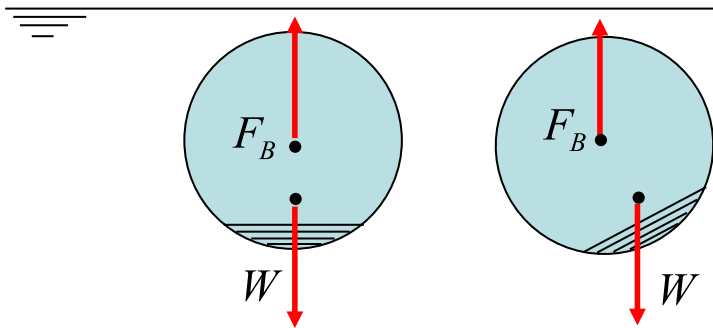
خنثی (Neutral)

ناپایدار (Unstable)

مرکز ثقل پایینتر از مرکز شناوری قرار دارد.

مرکز ثقل و مرکز شناوری بر هم منطبق هستند.

مرکز ثقل بالاتر از مرکز شناوری قرار دارد.

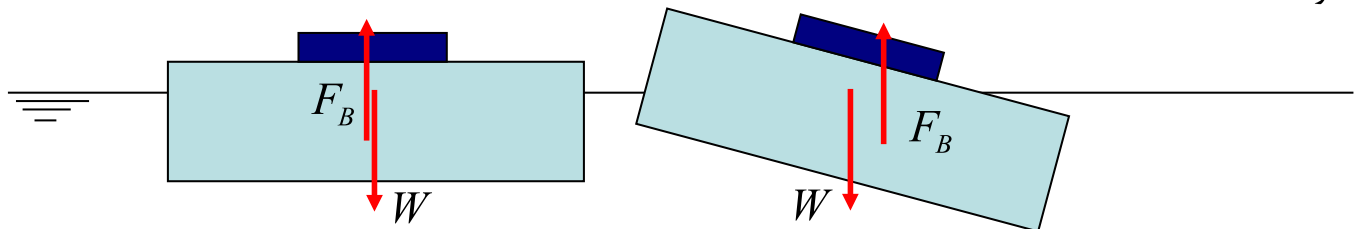


حرکت در جهت خلاف عقربه های ساعت گشتاور برگرداننده ای در جهت عقربه های ساعت ایجاد می کند.

شرط پایین بودن مرکز ثقل جسم نسبت به مرکز شناوری برای پایدار بودن اجسام غوطه ور کافیست (مثلا بالون ها) اما برای پایداری اجسام شناور در مرز مشترک سیالات ضروری نیست.\*

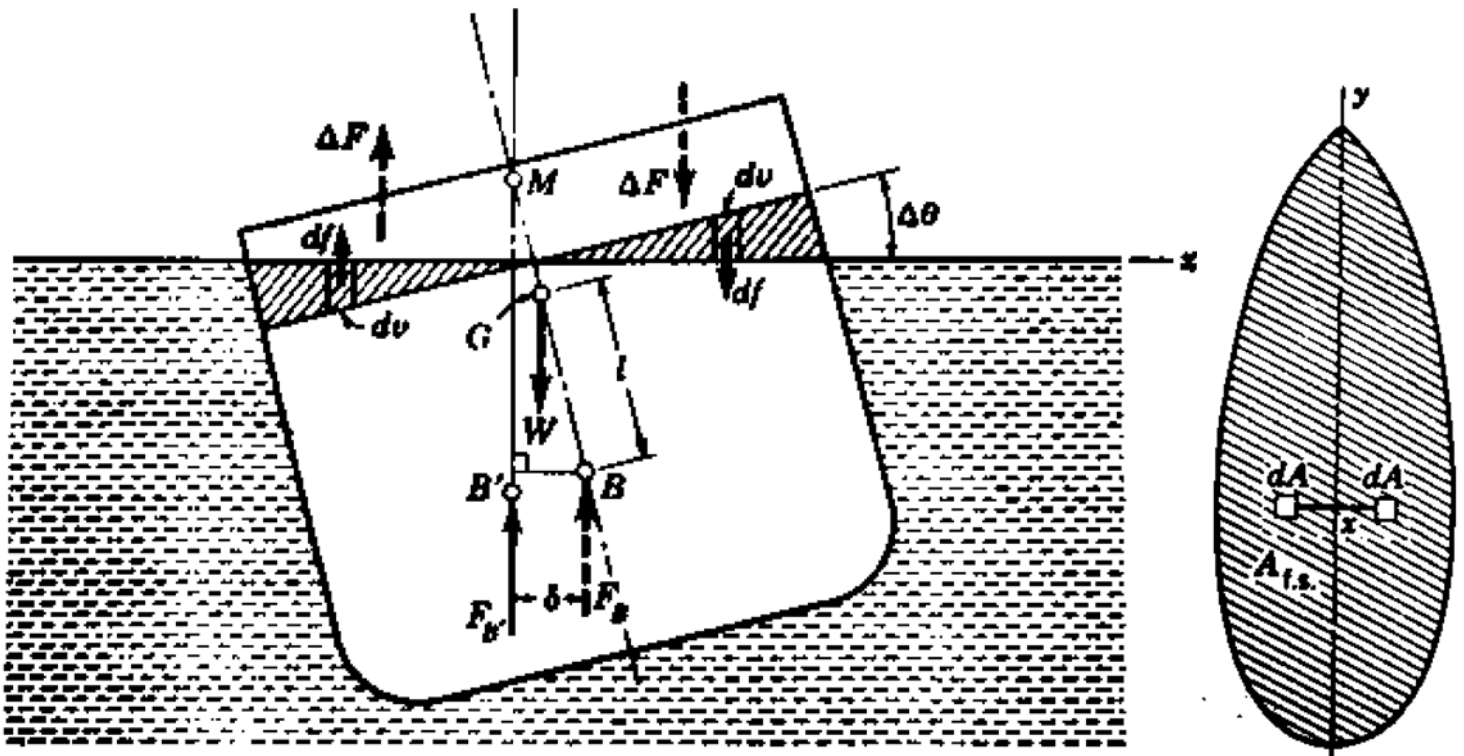
همانگونه که در شکل زیر ملاحظه می شود با وجود بالاتر بودن مرکز ثقل نسبت به مرکز شناوری بدلیل اینکه در اثر چرخش جسم مرکز شناوری تغییر مکان می دهد، گشتاور ایجاد شده باز دارنده بوده و جسم را به وضعیت اولیه بر می گرداند.

مقاطع مستطیلی عریض اشکال بسیار پایداری هستند زیرا در اثر غلطیدن مقدار زیادی سیال جابجا شده و باعث می شود که مرکز شناوری تغییر مکان زیادی به سمت کج شده بدهد و گشتاور برگرداننده نسبتا بزرگی ایجاد شود.

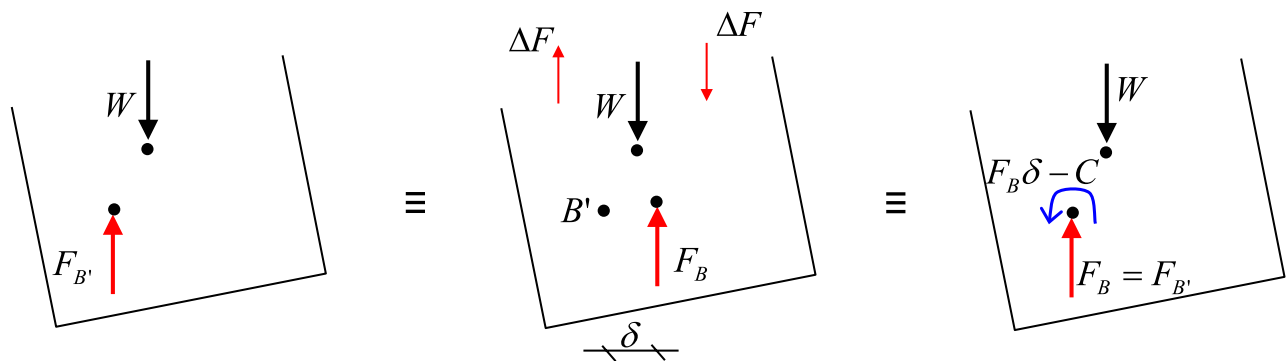


مطابق شکل دوران کوچک  $\Delta\theta$  را حول محور تفارن  $y$  ها در نظر می گیریم. مرکز شناوری از  $B$  به  $B'$  منتقل می شود.

دوران کشتی در اثر افزایش حجم جابجا شده سمت چپ نیروی بالابرنده  $\Delta F$  و بدلیل کاهش حجم آب جابجا شده در سمت راست نیروی رو به پایین  $\Delta F$  ایجاد می شود. لنگر حاصل از این زوج نیرو  $C$  می باشد.



نیروی  $F_{B'}$  (وارد بر مرکز شناوری جدید) حاصل جمع تاثیر  $F_B$  و  $C$  می باشد:



$$F_B \delta - C = 0 \implies \delta = \frac{C}{F_B} = \frac{C}{W} \quad (\text{I}) \quad (F_B = F_{B'} = W)$$

$$\text{اما } \sin \Delta\theta = \frac{\delta}{MB} \quad \text{و یا} \quad MB = \frac{\delta}{\sin \Delta\theta} \quad (\text{II})$$

اگر نقطه  $M$  که به شکل فوق تعیین می شود در بالای نقطه  $G$  قرار گیرد ( $MB > GB$ )، نیروی شناوری و نیروی وزن گشتاور بازدارنده ای ایجاد می کنند و به عبارت دیگر کشتی پایدار است. ضمناً هر چه  $MG$  بزرگتر باشد، گشتاور ایجاد شده بزرگتر بوده و کشتی پایدارتر است.

$MG$  معیاری برای پایداری بوده و ارتفاع متاسنتریک (Metacentric) نامیده می شود. اگر  $M$  روی  $G$  واقع شود تعادل خنثی و اگر زیر آن باشد وضعیت ناپایدار خواهد بود.

برای تعیین لنگر  $MG$  باید  $C$  محاسبه شود:

$$dV = (x\Delta\theta)dA \quad \text{جزء } > \implies df = \gamma dV = \gamma x\Delta\theta dA$$

$$C = \int_{A_{f.s.}} xdf = \int_{A_{f.s.}} \gamma x^2 \Delta\theta dA = \gamma \Delta\theta \int_{A_{f.s.}} x^2 dA = \gamma \Delta\theta I_{yy}$$

ممان دوم سطح حول محور  $y$  ها

مقطع بدنه کشتی در امتداد سطح آزاد (free surface)

$$\begin{cases} C = \gamma \Delta\theta I_{yy} \\ \delta = \frac{C}{W} \end{cases} \implies \delta = \frac{\gamma \Delta\theta I_{yy}}{W}$$

با توجه به معادله (I):

با در نظر گرفتن معادله (II):

$$\overline{MB} = \frac{\gamma I_{yy}}{W} \quad \text{و یا (در } \Delta\theta \text{ کوچک):} \quad \overline{MB} = \frac{\delta}{\sin \Delta\theta} = \frac{\gamma \Delta\theta I_{yy}}{W \sin \Delta\theta}$$

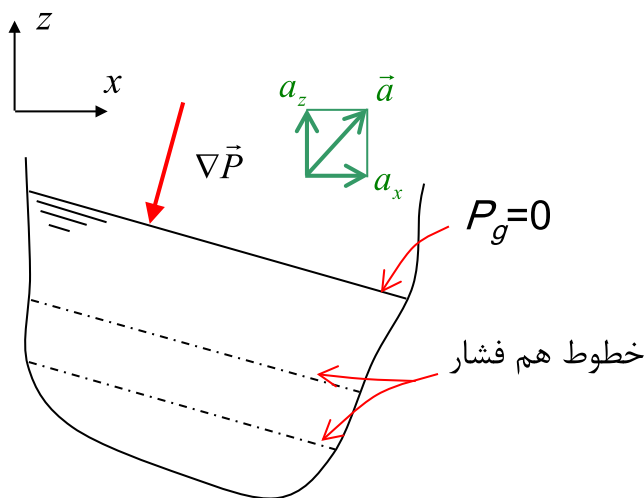
اگر فاصله  $BG$  را با  $l$  نمایش دهیم، ارتفاع متاسنتریک برابر است با: \*\*

$$\overline{MG} = \overline{MB} - l = \frac{\gamma I_{yy}}{W} - l$$

$$\begin{cases} \overline{MG} > 0 & \text{تعادل پایدار} \\ \overline{MG} = 0 & \text{تعادل خنثی} \\ \overline{MG} < 0 & \text{تعادل ناپایدار} \end{cases}$$

## انتقال و دوران سیالات: (Translation and Rotation of fluids)

در سیالات ایستا بدلیل نبودن تنش برشی، محاسبه تغییرات فشار ساده است. سیال هنگام انتقال با سرعت یکنواخت نیز تحت قوانین تغییرات فشار استاتیک قرار دارد. همچنین زمانی که سیال شتاب ثابتی دارد، ذرات نسبت به یکدیگر حرکت نسبی نداشته (حرکت صلب گونه سیال) و تنش برشی ایجاد نمی گردد.



### شتاب خطی یکنواخت

فرض می کنیم به مایعی که درون ظرفی باز قرار دارد شتاب یکنواخت  $a$  (در صفحه  $xz$ ) اعمال شود:

با استفاده از معادله اصلی حرکت یا قانون دوم نیوتن:

$$\vec{df} = -\vec{\nabla}P - \gamma \vec{k} = \rho \vec{a}$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}\right) - \gamma \vec{k} = \frac{\gamma}{g} (a_x \vec{i} + a_z \vec{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\gamma}{g} a_x \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \left(1 + \frac{a_z}{g}\right) \end{cases} \quad \begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \\ &= -\frac{\gamma}{g} a_x dx - \gamma \left(1 + \frac{a_z}{g}\right) dz \end{aligned}$$

با انتگرال گیری برای سیالات غیر قابل تراکم ( $P_0$  فشار در مبدا):

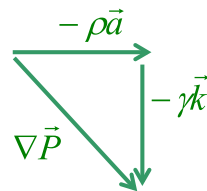
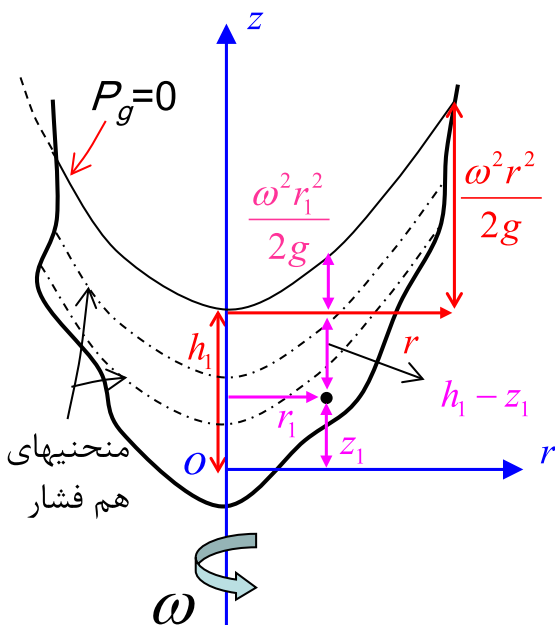
$$P(x, z) = -\frac{\gamma}{g} a_x x - \gamma \left(1 + \frac{a_z}{g}\right) z + P_0$$

برای بدست آوردن معادله تراز آزاد آب کافیتست فشار برابر صفر قرار داده شود:

$$\underline{-\frac{\gamma}{g} a_x x - \gamma \left(1 + \frac{a_z}{g}\right) z + P_0 = 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-\frac{\gamma}{g} a_x}{\gamma \left(1 + \frac{a_z}{g}\right)} = \frac{-a_x}{g + a_z}$$

با توجه به اینکه رابطه شیب سطح آزاد مستقل از شکل ظرف است ساده تر است حل مسائل با استفاده از آن شروع شود.

### دوران حول یک محور قائم



در دوران سیال با سرعت زاویه ای ثابت حول یک محور قائم نیز سیال حرکت صلب گونه داشته و تنش برشی در هیچ نقطه ای از سیال ایجاد نمی گردد و در این وضعیت شتاب جانب مرکز (به سمت محور دوران) و شتاب ثقل وجود دارند.

با فرض سرعت زاویه ای  $\omega$ ، هر جزء از سیال دارای شتابی شعاعی به سمت محور دوران و متناسب با شعاع دوران می باشد:

$$\vec{a} = -r\omega^2 \vec{i}$$

با استفاده از معادله اصلی حرکت (قانون دوم نیوتن):

$$d\vec{f} = -\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k} = \rho\vec{a}$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k}\right) - \gamma\vec{k} = -r\omega^2 \rho \vec{i}$$

که در آن  $\vec{j}$  بردار واحد در جهت محور  $y$  ها (جهت مماس) می باشد.

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \end{cases} \quad dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$= \frac{\gamma}{g} \omega^2 r dr - \gamma dz$$

$$P(r, z) = \frac{\gamma \omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + P_0$$

با انتگرال گیری برای سیالات غیر قابل تراکم ( $P_0$  فشار در مبدا  $O$ ):

اگر تراز آب در محور دوران با نشان  $h_1$  داده شود:

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = h_1 \end{cases} \quad P = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\gamma h_1 + P_0$$

و یا  $P_0 = \gamma h_1 \Rightarrow P(r, z) = \frac{\gamma \omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + \gamma h_1$

$$= \gamma \left( \frac{\omega^2 r^2}{2g} - z + h_1 \right)$$

ارتفاع سیال واقعی یا موهومی بالای نقطه  $(r, z)$ \*

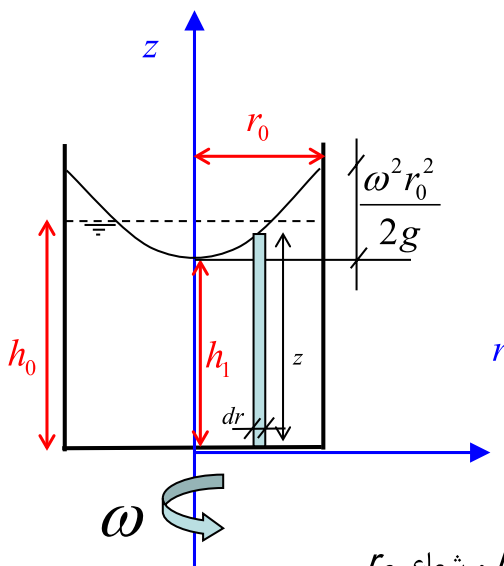
بنابراین در این حالت بجای استفاده از رابطه فشار می توان از ضرب تراز آب واقعی یا موهومی در وزن مخصوص سیال نیز استفاده کرد.\*

برای بدست آوردن معادله تراز آزاد آب:

$$\frac{\gamma \omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + P_0 = 0 \quad \text{و یا} \quad z = \frac{\gamma \omega^2 r^2}{2g\gamma} + \frac{P_0}{\gamma}$$

$$P_0 = \gamma h_1 \quad \text{و} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_1$$

بنابراین معادله سطح آزاد یک سهموی است که راس آن بر روی محور دوران در  $z=h_1$  قرار دارد. در یک استوانه دوار می توان روابط صریحی با توجه به بقای جرم داخل استوانه ارائه نمود. اگر ارتفاع اولیه مایع قبل از دوران را  $h_0$  فرض کنیم:



$$\pi r_0^2 h_0 = \int_0^{r_0} (2\pi r) z dr$$

$$= \int_0^{r_0} (2\pi r) \left( h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) dr$$

$$= 2\pi \left[ h_1 \frac{r^2}{2} + \frac{\omega^2 r^4}{8g} \right]_0^{r_0}$$

$$= \pi h_1 r_0^2 + \frac{\pi \omega^2 r_0^4}{4g}$$

حجم زیر سطح سهموی و بالای  $h_1$  \*:

$$\frac{1}{2} \times \pi r_0^2 \times \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

حجم استوانه ای به ارتفاع  $h_1$  و شعاع  $r_0$



$$\pi r_0^2 h_0 = \pi h_1 r_0^2 + \frac{\pi \omega^2 r_0^4}{4g}$$

و یا

$$h_0 = h_1 + \frac{\omega^2 r_0^2}{4g} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

یعنی  $h_0$  از وسط سهمی می گذرد.\*

$$\begin{aligned} z &= h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \\ &= h_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \\ &= h_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \left[ 0.5 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

این رابطه معادله سطح آزاد استوانه‌ای به شعاع  $r_0$  و ارتفاع اولیه  $h_0$  را در حرکت دوار نشان می دهد. توجه شود که این معادله در صورت سرریزی مایع یا سر بسته بودن ظرف صادق نیست.

# Fundamentals of fluid flow

استاتیک سیالات که در بخشهای قبل بحث شد تقریباً علم دقیقی است و تنها کمیتی که نیاز به آزمایش دارد **وزر** **مخصوص** است. از طرف دیگر طبیعت جریان یک سیال حقیقی بسیار پیچیده است و به آسانی نمی توان قوانین اساسی توصیف کننده حرکت کامل یک سیال را به روابط ریاضی تبدیل کرده و مورد استفاده قرار داد. در این بخش استفاده از آزمایشات تجربی ضروری است.

## میدان سرعت: (Velocity field)

در دینامیک ذره (particles) یا جسم صلب (solid) می توان حرکت ذره یا جسم را مستقلاً بررسی کرد. سرعت هر ذره را می توان با سه معادله زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} (v_x)_n = f_n(t) \\ (v_y)_n = g_n(t) \\ (v_z)_n = h_n(t) \end{cases} \quad \text{مولفه سرعت ذره } n \text{ ام:}^*$$

از آنجایی که در سیال، تعداد نامحدودی ذره وجود دارد، امکان بررسی حرکت آنها بطریق عملی نیست. برای مشخص کردن جریان می توان از مختصات فضایی استفاده کرد (روش میدان - field approach):\*\*

$$\begin{cases} v_x = f(x, y, z, t) \\ v_y = g(x, y, z, t) \\ v_z = h(x, y, z, t) \end{cases}$$

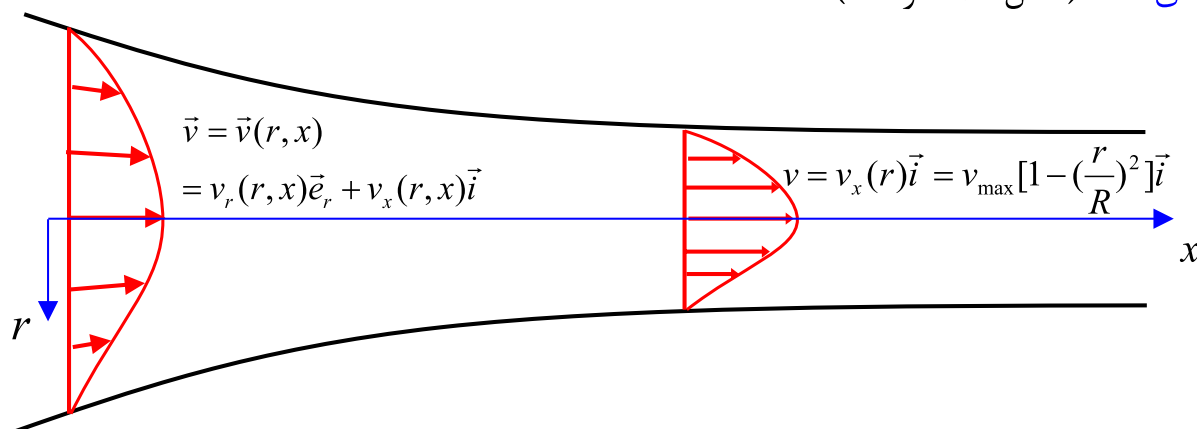
این میدان سرعت که تابعی از سه مختصات فضایی  $(x, y, z)$  و زمان  $(t)$  است **جریان سه بعدی** نامیده می شود.\*

اگر خواص سیال و مشخصه های جریان در هر نقطه از فضا در طی زمان تغییر نکند جریان را **جریان دائمی** یا **پایا (steady flow)** می نامیم.\*\* از طرف دیگر جریان وابسته به زمان **جریان غیر دائمی** یا **ناپایا (unsteady flow)**

نامیده می شود. در جریان سه بعدی غیر دائمی:

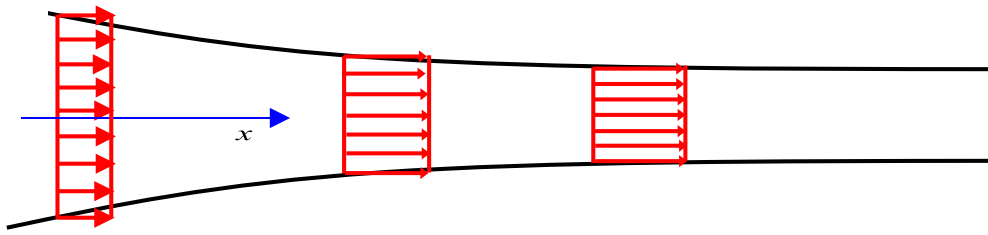
$$\begin{cases} v_x = f(x, y, z) \\ v_y = g(x, y, z) \\ v_z = h(x, y, z) \end{cases}$$

اگر چه اغلب میدانهای جریان سه بعدی اند اما تحلیلها بر مبنای ابعاد کمتر انجام می شوند. مثلاً با استفاده از مختصات استوانه ای  $(x, r, \theta)$ ، در جریان دائمی در لوله همگرا مستقیم **جریان دو بعدی** (شکل سمت چپ) و در لوله با قطر ثابت **یک بعدی** است (شکل سمت راست):

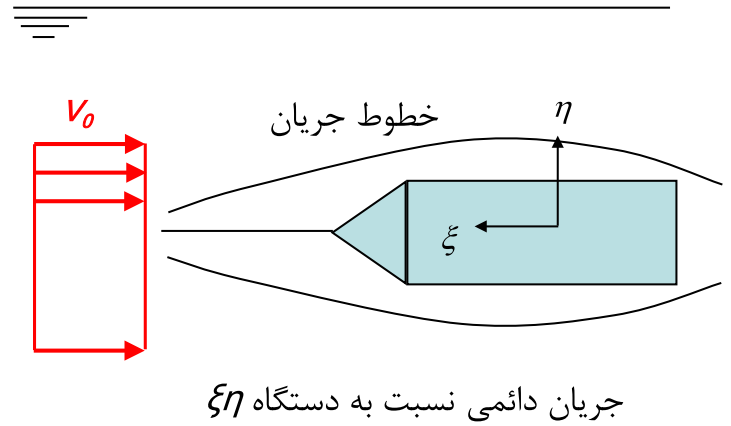
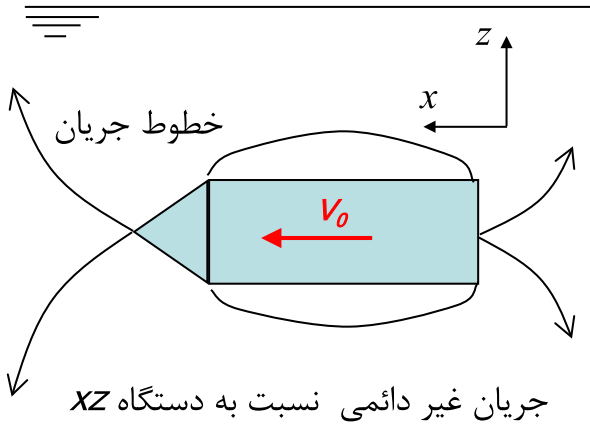


اگر مقدار و جهت سرعت جریان در تمام نقاط سیال یکسان باشد **جریان یکنواخت (uniform)** نامیده می شود\*\*\*.

برای جریان یکنواخت در یک مقطع عرضی سرعت در تمام مقاطع عمود بر جریان دارای مقدار یکسانست.\* با این فرض جریان دو بعدی شکل اسلاید قبل را می توان با شکل زیر نشان داد:

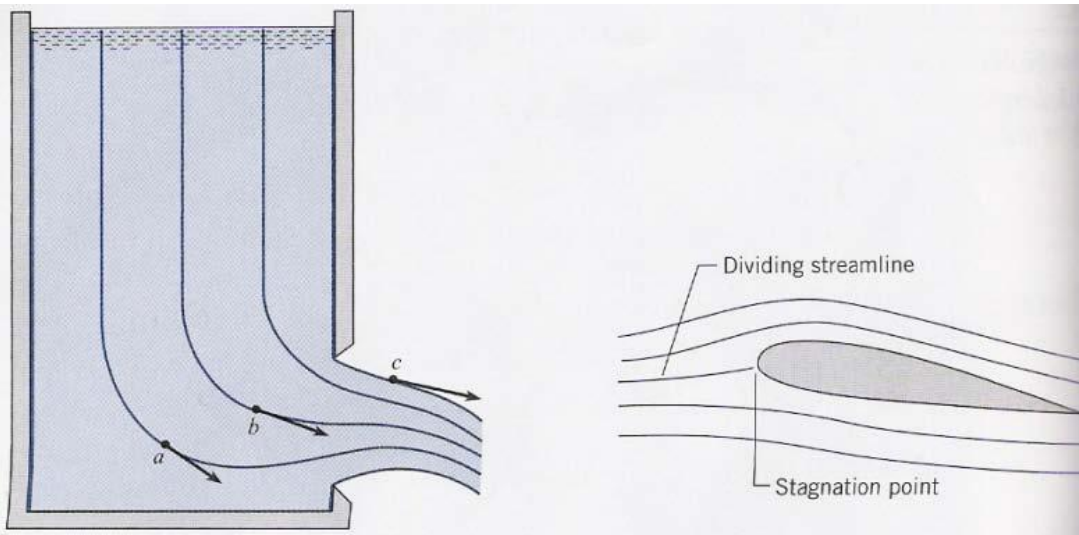


گاهی با تغییر دستگاه مختصات می توان جریات غیر دائمی را به دائمی تبدیل کرد\*\*:



جریانها را می توان با خطوط جریان (streamlines) که همواره بر بردارهای سرعت ذرات سیال مماس می باشند بطور ترسیمی نمایش داد:

در جریان دائمی خطوط جریان ثابت می ماند و مسیرهای حرکت سیال (مسیر جریان pathlines) بر خطوط جریان منطبق هستند. اما در جریان غیر دائمی خطوط جریان تنها بطور لحظه ای معرف جریان بوده و در این حال تطابق ساده ای بین مسیر حرکت ذرات و خطوط جریان وجود ندارد.

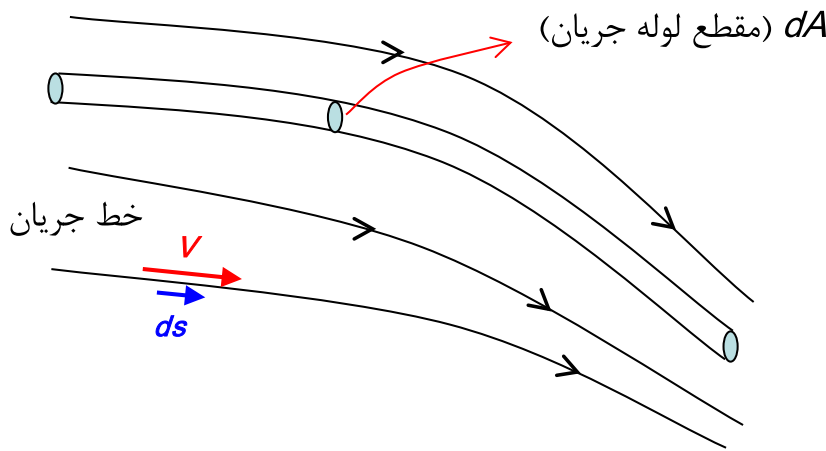


می توان معادله مسیر جریان را با استفاده از دینامیک ذرات تعیین کرد:

$$\begin{cases} v_{xp} = \frac{dx}{dt} \\ v_{yp} = \frac{dy}{dt} \\ v_{zp} = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

دسته خطوط جریانی که از پیرامون المان سطح کوچک  $dA$  در لحظه  $t$  رسم می شوند، لوله جریان (amtube) را تشکیل می دهند.

مرز لوله جریان از خط جریان تشکیل می شود. لذا جریانی از سطوح جانبی لوله جریان نمی گذرد. به تعداد نامحدودی لوله جریان که با یکدیگر سطح مقطع محدودی را ایجاد می کنند، دسته لوله جریان گفته می شود.



$$\begin{cases} \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{cases}$$

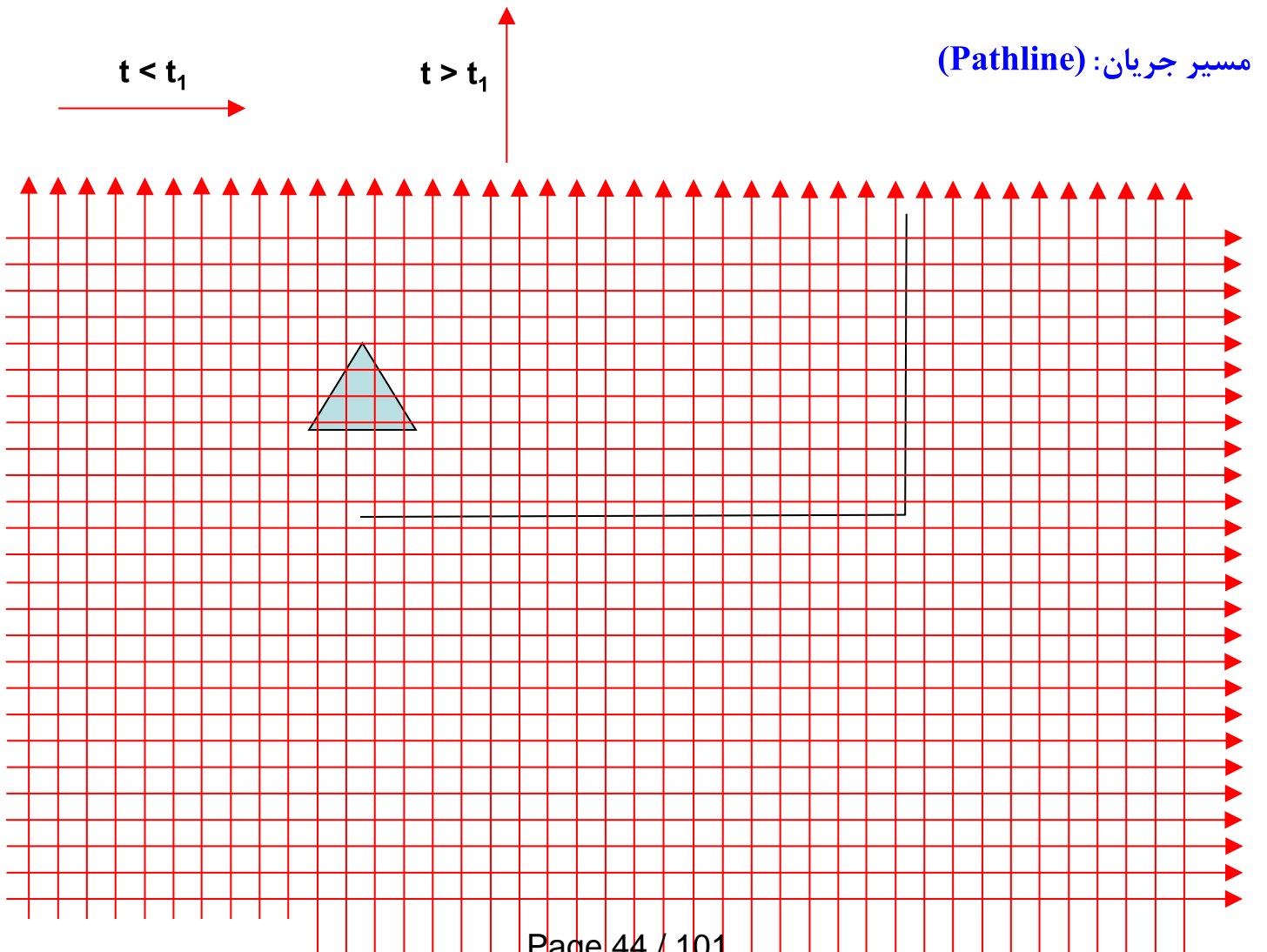
$\vec{v}$  و  $d\vec{s}$  موازی هستند:

$$\vec{v} \times d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

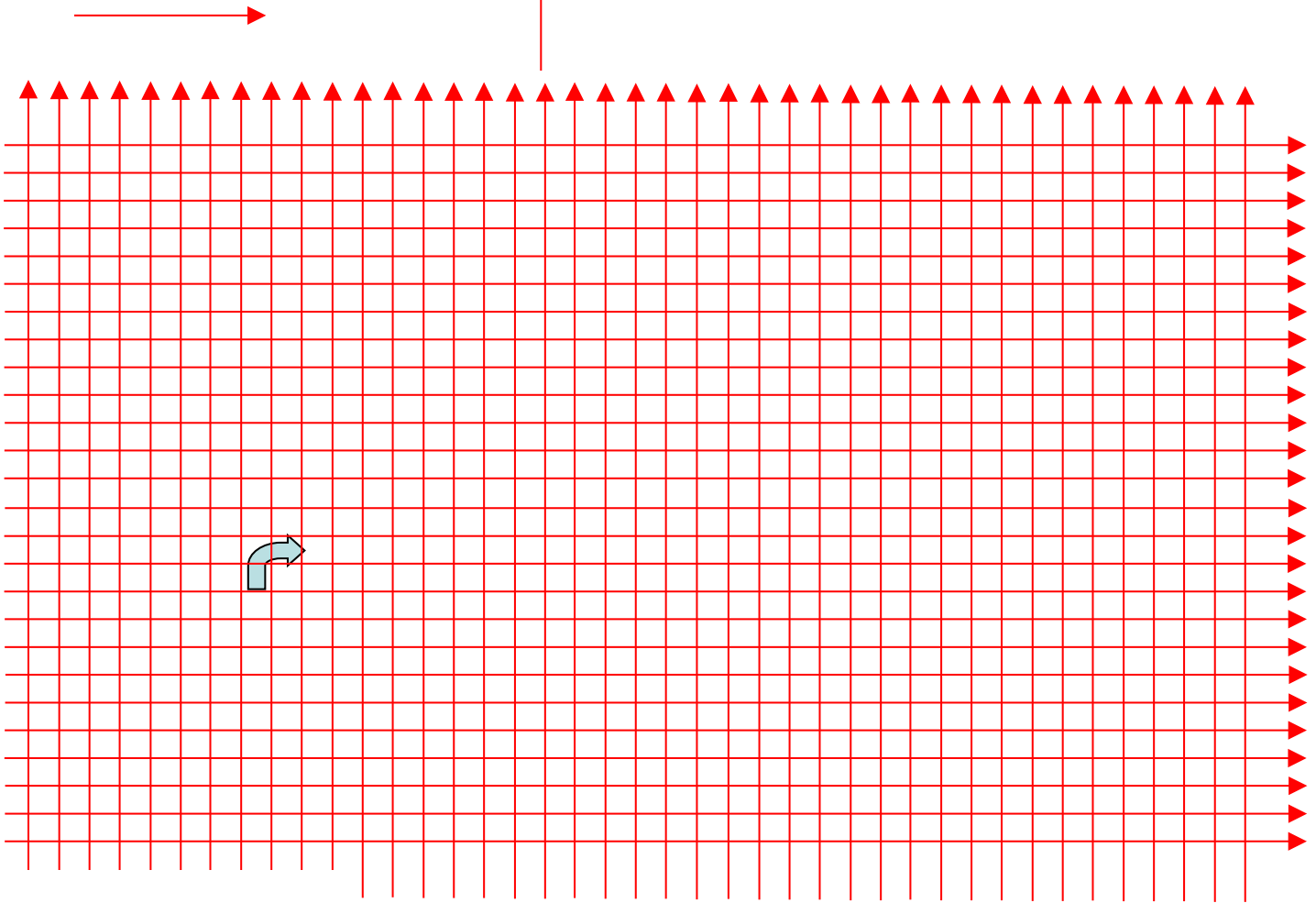
(در طول یک خط جریان)

روش دیگر برای به تصویر کشیدن الگوهای جریان تزریق رنگ یا دود (یا ذرات معلق) در نقطه ای از جریان و مشاهده مسیر حرکت آن در سیال می باشد. این خط اثر خط تمایل (streakline) نامیده می شود.

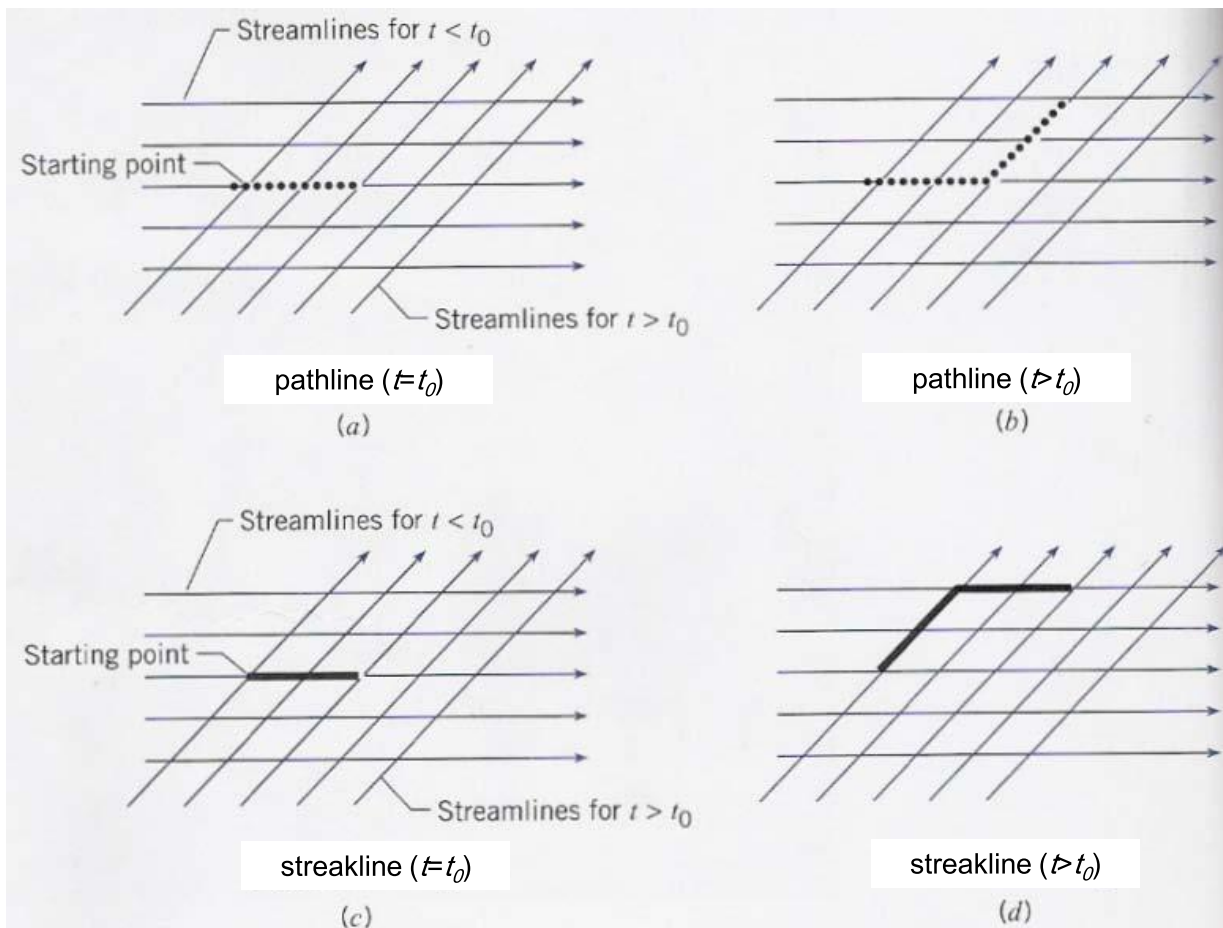


$t < t_1$

$t > t_1$

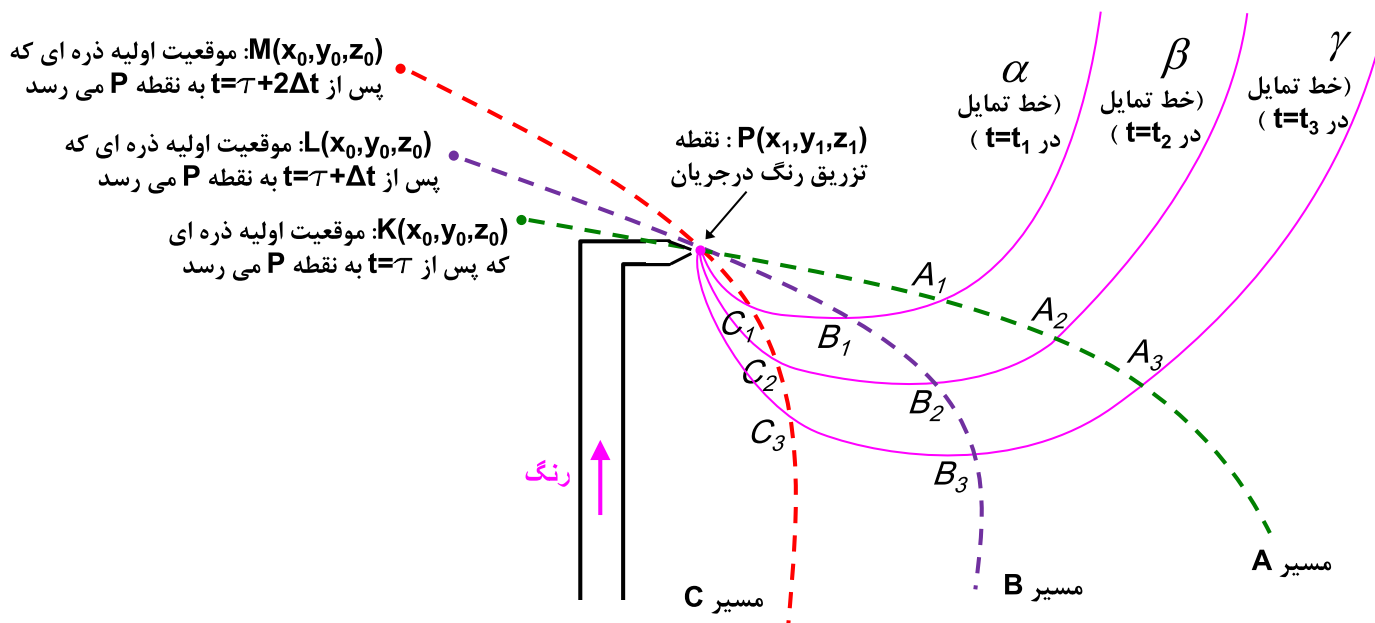


در جریان دائمی هر سه خط (خط جریان، مسیر جریان و خط تمایل) بر هم منطبق می شوند. در حالیکه خط جریان الگوی فعلی جریان را نشان می دهد، مسیر جریان و خط تمایل تاریخچه جریان را ارائه می دهند.



## تعیین معادله خط تمایل:

برای تعیین معادله خط تمایل فرض می کنیم در جریان غیر دائمی در نقطه  $P$  رنگ (یا دود) تزریق شود. در این صورت ذره دود با جریان حرکت می کند. ذره  $A$  را در جریان در نظر می گیریم که در  $t=0$  در نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  بوده و در  $t=T$  به  $P(x_1, y_1, z_1)$  برسد. این ذره در زمانهای بعدی مسیر  $A$  را طی می کند. در زمان  $t=T+\Delta t$  ذره دیگری ( $B$ ) پس از رسیدن به نقطه  $P$  رنگی شده و مسیر  $B$  را طی می کند. به همین ترتیب ذره  $C$  که در زمان  $t=T+2\Delta t$  از  $P$  عبور می کند در مسیر  $C$  حرکت می کند. بنابر این در زمانی مثل  $t_1$  ذره  $A_1$  در  $A$ ، ذره  $B$  در  $B_1$  و ذره  $C_1$  قرار دارد که این سه بر روی منحنی  $\alpha$  قرار دارند. پس اگر در این لحظه از جریان عکس گرفته شود منحنی  $\alpha$  نشان دهنده موقعیت ذرات مختلف عبوری از  $P$  است (خط تمایل در لحظه  $t=t_1$ ).



به همین ترتیب عکس منحنی رنگ در لحظات  $t=t_2$  و  $t=t_3$  نشان دهنده خطوط تمایل  $\beta$  و  $\gamma$  در این لحظات می باشند. لازم به ذکر است که در جریان دائمی مسیرهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  بر هم منطبق بوده و خط تمایل و مسیر جریان (و همچنین خط جریان) بر هم منطبق می شوند.

معادله خط تمایل را می توان به روش لاگرانژ بدست آورد. بدین منظور کافیست ذراتی که در زمانهای مختلف از نقطه  $P(x_1, y_1, z_1)$  می گذرند تعقیب شده و موقعیت آنها در زمان یکسان تعیین گردد. معادله مسیر حرکت ذرات جریان که در  $t=0$  در نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  قرار دارند عبارت است از:

$$\begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = g(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = h(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (I)$$

اگر از مجموعه ذرات جریان تنها ذراتی در نظر گرفته شوند که از  $P(x_1, y_1, z_1)$  می گذرند (مثلا مسیر ذراتی که در  $t=0$  از نقاط  $L$ ،  $K$  و  $M$  شروع به حرکت کرده و از  $P$  عبور می کنند):

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0, y_0, z_0, \tau) \\ y_1 = g(x_0, y_0, z_0, \tau) \\ z_1 = h(x_0, y_0, z_0, \tau) \end{cases} \quad (II)$$

این معادلات با تغییر  $\tau$  مسیر حرکت ذرات مختلفی را که در حین حرکت از  $P$  عبور می کنند نشان می دهد. با حذف  $x_0, y_0, z_0$  از معادلات (I) و (II) دسته منحنیهایی بر حسب  $t$  و  $\tau$  بدست می آید که حرکات ذرات مختلف عبوری ( $\tau$  متغیر) از  $P$  را در لحظات مختلف ( $t$  متغیر) نشان می دهد. بنابراین این معادلات با ثابت نگه داشتن  $\tau$  و تغییر  $t$  مسیر حرکت یک ذره عبوری از  $P$  را نشان می دهد (مثلا مسیرهای  $A$ ،  $B$  یا  $C$ ). به همین ترتیب با ثابت نگه داشتن  $t$  و تغییر  $\tau$  ( $t > T$ ) معادله موقعیت ذرات مختلفی بدست می آید که از  $P$  عبور کرده و در لحظه  $t$  در موقعیت جدید قرار گرفته اند (معادله خطوط تمایل  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  در لحظات معلوم  $t=t_1$ ،  $t=t_2$  و  $t=t_3$ ).

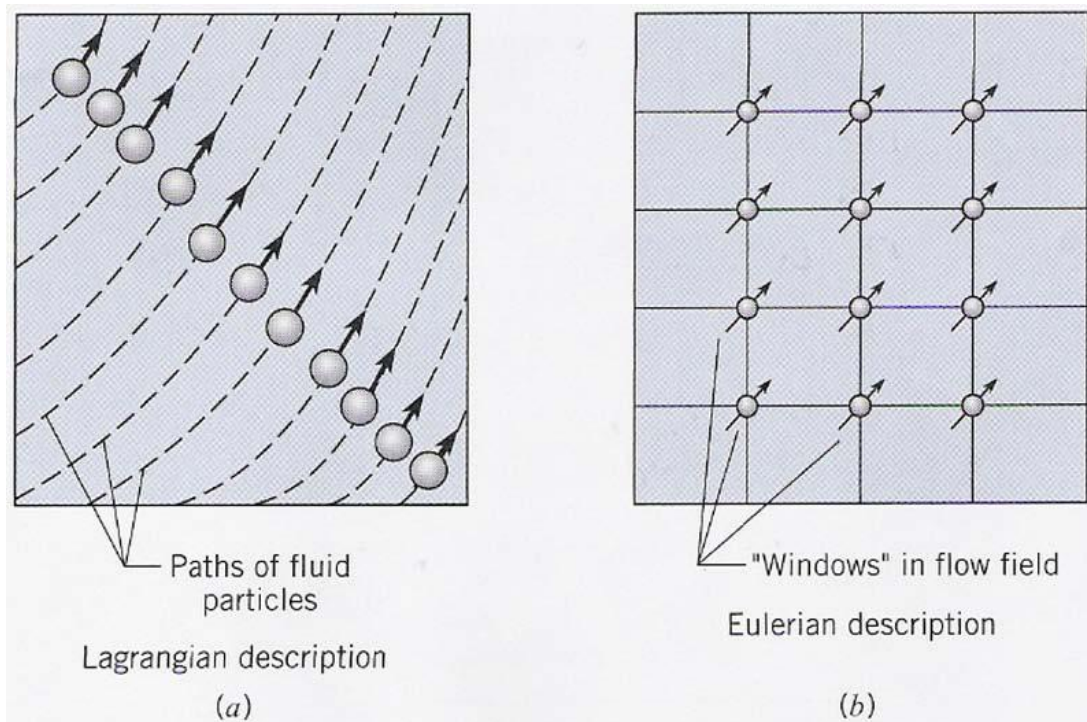
اگر نقطه ثابتی را در فضا به مختصات  $x_1, y_1, z_1$  در نظر بگیریم، سرعت ذرات گذرنده از این نقاط در هر لحظه را می‌توان با استفاده از میدان سرعت  $v(x, y, z, t)$  بدست آورد. به این روش که در یک نقطه ثابت از فضا سرعت‌های رشته پیوسته ای از ذرات سیال که از آن نقطه می‌گذرند اندازه گرفته می‌شود، دیدگاه اولری گفته می‌شود.

$$\begin{cases} v_x = f(x, y, z, t) \\ v_y = g(x, y, z, t) \\ v_z = h(x, y, z, t) \end{cases}$$

در دیدگاه لاگرانژی، حرکت هر یک از ذرات سیال را با دنبال کردن آن ذره تعقیب می‌کنیم. در این حالت برای هر یک از ذرات سیال سه تابع زمانی  $x(t), y(t), z(t)$  را خواهیم داشت که در حالت کلی با توابع زمانی سایر ذرات متفاوت است.  $x(0), y(0), z(0)$  موقعیت اولیه ذره را در لحظه  $t=0$  نشان می‌دهد. با تمرکز بر روی هر یک از ذرات:

$$\begin{cases} v_x = f(t) \\ v_y = g(t) \\ v_z = h(t) \end{cases}$$

که برای هر ذره تنها تابعی از  $t$  است.

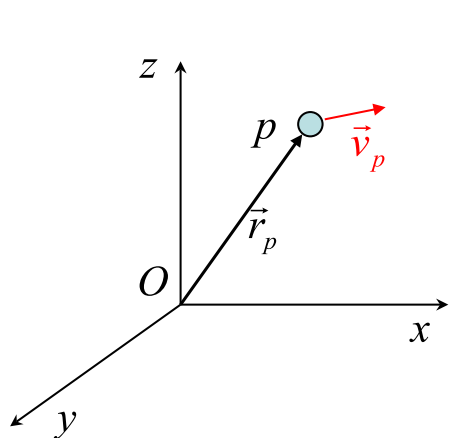


در توصیف لاگرانژی برای توصیف عمومی و کامل حرکت سیال مسیر تعداد بسیار زیاد از ذرات سیال باید مشخص گردد (شکل a). به همین دلیل اگر چه هر دو دیدگاه در دینامیک سیالات بکار می‌روند، در اکثر مسائل جریانهای سیال توصیف اولری استفاده می‌شود\*.

دو دیدگاه اولری و لاگرانژی به دائمی یا غیر دائمی بودن جریان بستگی ندارد.

## شتاب یک ذره جریان: (Acceleration of a flow particle)

شتاب یک ذره سیال برابر است با نرخ تغییر سرعت ذره. در صورت استفاده از دیدگاه لاگرانژی، مسیر حرکت ذره تعقیب می شود. شتاب ذره از دو بار مشتق گیری بردار تغییر مکان بدست می آید و تنها تابعی از زمان است:



$$\vec{r}_p = x_p(t)\vec{i} + y_p(t)\vec{j} + z_p(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt} = u_p(t)\vec{i} + v_p(t)\vec{j} + w_p(t)\vec{k}$$

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = a_{xp}(t)\vec{i} + a_{yp}(t)\vec{j} + a_{zp}(t)\vec{k}$$

بنابراین در دیدگاه لاگرانژی جهت تعیین سرعت در نقطه ای از میدان جریان باید مسیر حرکت ذره ای که از نقطه مورد نظر می گذرد مشخص شده (بردار  $r_p$ ) و سرعت از مشتق تغییر مکان بدست آید. واضح است که کاربرد این روش برای تعیین سرعت یک نقطه دلخواه میدان جریان بسیار پر زحمت است\*.

در دیدگاه اولری، شتاب تابعی از زمان و مکان است (یعنی شتاب رشته ذراتی که در لحظه  $t$  از موقعیت مکانی  $x, y, z$  عبور می کنند):

$$\vec{v}(x, y, z, t) \implies d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \left( \frac{D\vec{v}}{dt} \right)$  (total derivative) مشتق کلی  
 ← نرخ تغییرات سرعت در هر نقطه که با دنبال کردن یک ذره مشخص بدست می آید.

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

اما  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  مولفه های اسکالر سرعت هر ذره بوده و می توان آنها را با  $v_x, v_y, v_z$  نشان داد. بنابراین:

$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

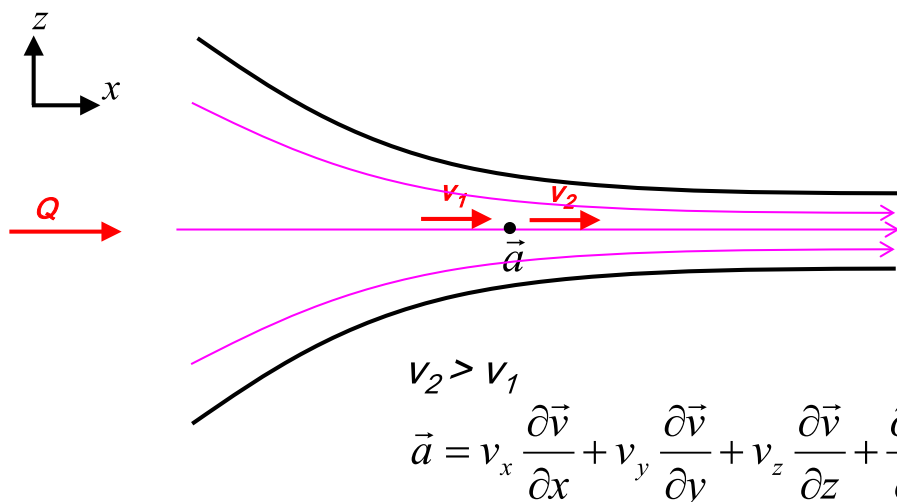
شتاب محلی (local acceleration)

شتاب انتقالی (acceleration of transport)  
یا شتاب جابجایی (convective acceleration)



$$\begin{cases} a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases}$$

شتاب انتقالی ناشی از جابجایی ذره در میدان سرعت است در حالی که شتاب محلی در اثر تغییر میدان سرعت در محلی که در لحظه توسط ذره اشغال شده است بوجود می آید. در جریان دائمی شتاب محلی صفر بوده و کافیت تنها شتاب جابجایی در نظر گرفته شود.



مثلا در محور زانویی روبرو در صورت دائمی بودن جریان  $(Q=cte)$ ، بدلیل افزایش سرعت ناشی از کوچک شدن مقطع صرفا شتاب انتقالی ناشی از جابجایی ذره در راستای  $X$  وجود دارد.

$$v_2 > v_1$$

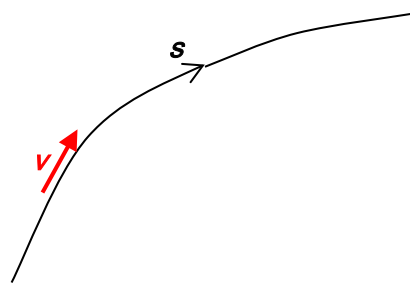
$$\vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} > 0$$

مختصات واقع بر خط جریان آسانترین سیستم مختصات قابل کاربرد می باشد (محل ذره بر روی خط جریان با  $S$  نشان داده می شود):

$$\vec{v} = \vec{v}(s, t) = v(s, t) \vec{e}_t$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= v \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \end{aligned}$$

شتاب انتقالی                      شتاب محلی



شتاب انتقالی را می توان با استفاده از مختصات مماسی و قائم (normal and tangential coordinates) به دو مولفه مماس بر مسیر و عمود بر آن تجزیه کرد:

$$\vec{v} = v \vec{e}_t$$

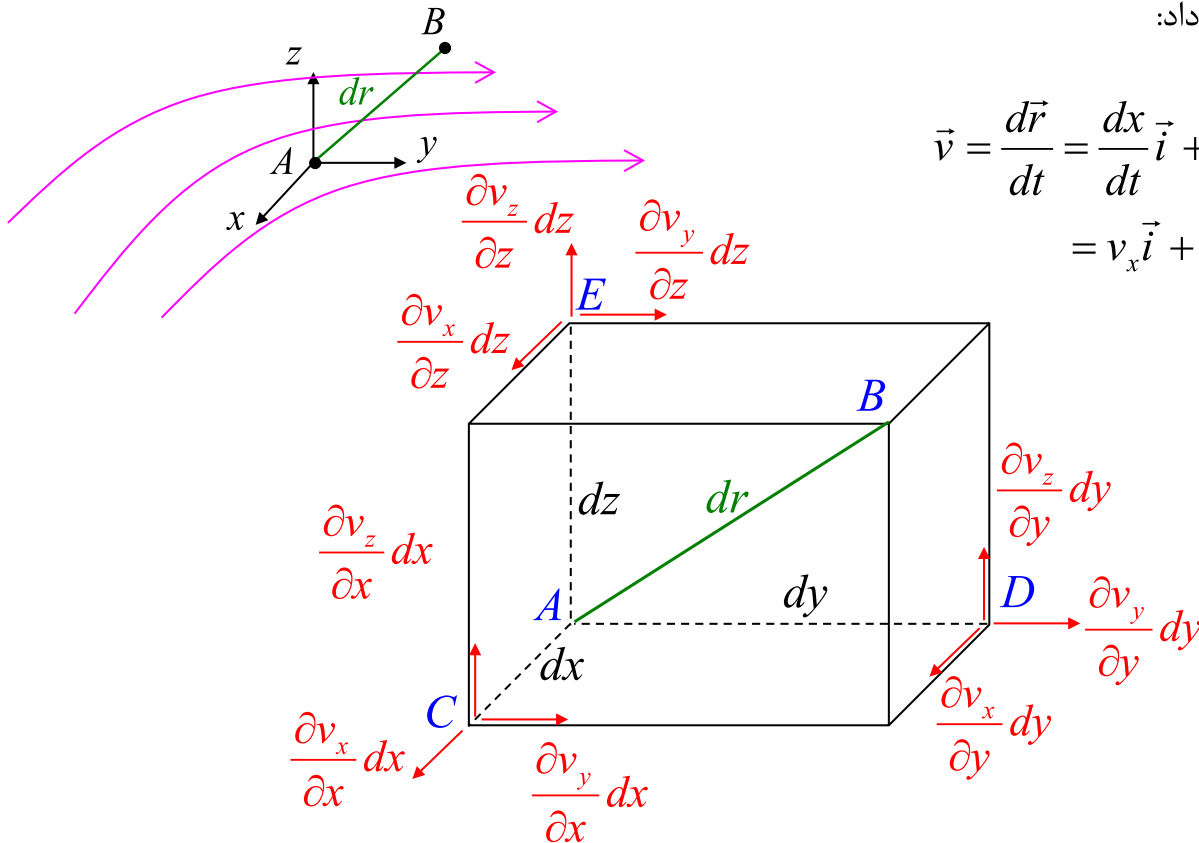
$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

$$\begin{cases} a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

مولفه عمود بر مسیر که در صفحه بوسان (osculari) قرار دارد.

## جریان غیر چرخشی: (Irrotational flow)

برای بررسی حرکت نسبی ذرات مجاور (adjacent flow particle) که به فاصله بسیار کمی از هم قرار دارند، ذره  $A$  و  $B$  را که در لحظه  $t$  به فاصله  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  از یکدیگر قرار در نظر می گیریم. نرخ تغییر شکل (deformation rate) و نرخ دوران (rotation rate) این مکعب مستطیل را می توان به کمک حرکات نسبی  $A$  و  $B$  نشان داد:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$$

$$\vec{v}_C - \vec{v}_A = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx\vec{k}$$

حرکت نسبی بین  $A$  و  $C$

می توان حرکت بین ذرات  $D$  و  $E$  را نیز نسبت به  $A$  بیان کرد (شکل اسلاید قبل). اگر کرنش عمودی (normal strain) را به  $\epsilon_{xx}$  نمایش دهیم:

نرخ تغییر طول رشته  $AC$  →

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

طول اولیه

که در آن “(dot) نشان دهنده نرخ تغییرات (تغییر در واحد زمان) است. به شکل مشابه:

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{و} \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$\dot{\epsilon}_{ii}$  نرخ کرنش عمودی (normal strain rate) در سیال با بعد  $1/s$  است. می توان نرخ کرنش برشی را نیز به شکل نرخ تغییر زاویه قائم رئوس مکعب نشان داد. سرعت زاویه ای دوران ضلع  $AC$  حول محور  $Z$  ها در نقطه  $C$  برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

به همین ترتیب سرعت زاویه ای ضلع  $AD$  برابر است با:

بنابراین نرخ تغییر زاویه برشی در واحد زمان  $\dot{\gamma}_{xy}$  (time rate of change of the shear angle) که همان نرخ تغییر زاویه  $CAD$  (که در لحظه  $t$  قائمه است) حول محور  $Z$  ها را نشان می دهد برابر است با:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

به همین ترتیب نرخ تغییر زاویه  $CAE$  و  $DAE$  برابر است با:

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad \text{و} \quad \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zy} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

می توان نرخ تغییر شکل را با تانسور نرخ کرنش (strain rate tensor) نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\epsilon}_{yy} & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

برای تعیین نرخ تغییر زاویه اضلاع مکعب مستطیل (rate of angular change of the sides)، سرعت زاویه ای اضلاع مکعب مستطیل حول محورهای دوران را در نظر می گیریم. سرعت زاویه ای  $AC$  حول محور  $Z$  ها در نقطه  $C$  برابر است با:

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

به همین ترتیب سرعت زاویه ای  $AD$  حول محور  $Z$  ها (با توجه به جهت مثبت محور  $Z$  ها) در نقطه  $D$  برابر است با:

$$-\frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} dy}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

بنابراین نرخ تغییر زاویه  $CAD$  حول محور  $Z$  ها (در واقع نرخ دوران نیمساز زاویه قائمه بین اضلاع  $AC$  و  $AD$ ) که در لحظه  $t$  قائمه است، برابر است با:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \left( -\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right]$$

نرخ متوسط دوران اضلاع متعامد  $AC$  و  $AD$  همان سرعت زاویه ای مکعب مستطیل حول محور  $Z$  ها ( $\omega_z$ ) است:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

به همین ترتیب، سرعت زاویه ای دوران مکعب مستطیل حول محور محور X ها و حول محور Y ها برابر است با:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad \text{و} \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

و یا:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

اگر بردار چرخش (vorticity vector) را با  $\vec{\omega} = \text{curl} \vec{v} = \text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$  نمایش دهیم\*:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{curl} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

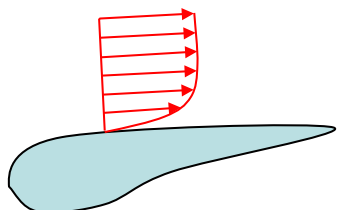
مفهوم فیزیکی دوران یک المان را می توان با  $\text{curl}$  میدان سرعت نمایش داد. اگر در هر نقطه از جریان  $\vec{\omega} = 0$  باشد، جریان را غیر چرخشی (irrotational flow) می نامند. اگر در تعدادی از نقاط  $\vec{\omega} \neq 0$  باشد، جریان چرخشی (rotational flow) است.\*\*

در جریان غیر چرخشی:

$$\vec{\omega} = \text{curl} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

برای دوران ذره ای از سیال در جریانی که از ابتدا غیر چرخشی بوده است باید بر سطح المان تنش برشی ایجاد شود. از آنجایی که تنش برشی به لزجت سیال و نرخ تغییرات سرعت بستگی دارد، در اغلب سیالات در بخش بزرگی از جریان که گرادیان سرعت کوچک است، جریان غیر چرخشی باقی می ماند.

در ناحیه باریکی در مجاورت مرزهای جریان گرادیان سرعت بزرگ بوده و لذا علی رغم کوچک بودن لزجت جریان چرخشی خواهد بود. این ناحیه مجاور مرز لایه مرزی (boundary layer) نامیده می شود.



# System and Control Volume (1)

## قوانین اصلی و فرعی: (Basic and subsidiary laws)

- در حیطه کارهای مهندسی برای هر محیط پیوسته چهار قانون اساسی (basic law) زیر وجود دارد:
- ۱- اصل بقای ماده (معادله پیوستگی) Conservation of matter (continuity equation)
  - ۲- قانون دوم نیوتن (معادله اندازه حرکت) Newton's second law (momentum equation)
  - ۳- اصل بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)
  - ۴- قانون دوم ترمودینامیک Conservation of energy (1<sup>st</sup> law of thermodynamics)  
2<sup>nd</sup> law of thermodynamics

علاوه بر قوانین عمومی فوق تعدادی قوانین فرعی نیز وجود دارد که گاهی روابط ساختاری (constitutive equations) نامیده می شود و در مورد انواع ویژه ماده بکار می رود. قانون هوک در جامدات الاستیک، معادله حالت در گازهای کامل و قانون لزجت نیوتن در سیالات لزج نیوتنی نمونه هایی از قوانین فرعی هستند.

## سیستم و حجم کنترل: (System and control volume)

- دو حالت زیر در استفاده از قوانین اصلی و فرعی بکار می رود:
- ۱- قوانین فرعی و اصلی برای مقدار معینی جرم برقرار می گردد. این مقدار معین ماده مجموعه یا سیستم (system) نامیده می شود.
- سیستم جرم معینی از ماده است که آن جرم را از سایر مواد دیگر که محیط (surroundings) نامیده می شود متمایز می سازد.
- سیستم ممکن است تغییر شکل، تغییر مکان یا تغییر دما بدهد ولی همواره حاوی ماده معینی است.

قانون بقای جرم ثابت بودن جرم درون یک سیستم را نسبت به زمان (بدون توجه به اثرات نسبیت) نشان می دهد

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

$m$  جرم کلی  $\rightarrow$

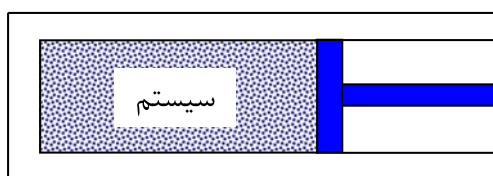
قانون دوم نیوتن نیز برای یک سیستم بصورت زیر بیان می گردد:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\int_m \vec{v} dm\right)$$

جرم ثابت سیستم

سرعت مرکز جرم سیستم

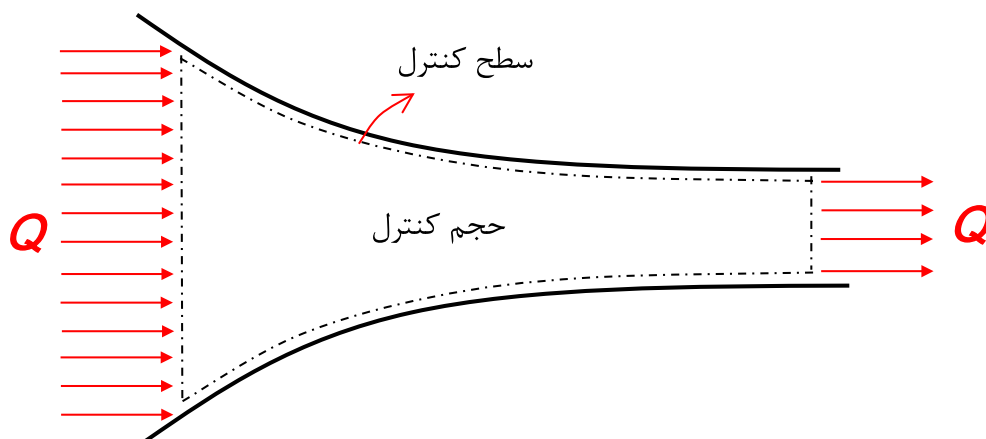
برآیند تمامی نیروهای خارجی اعمال شده بر سیستم (شامل نیروهای حجمی نظیر وزن)



بخار داخل سیلندر یک سیستم است که با حرکت پیستون حجم آن تغییر می کند ولی ماهیت و کمیت جرم داخل آن ثابت است.

در **حجم کنترل (control volume)** قوانین اصلی و فرعی برای حجم معینی از فضا برقرار می گردد. حجم کنترل، حجم محدودی از فضا می باشد که در تحلیل وضعیتهایی که جریان جرم، اندازه حرکت و انرژی به داخل و خرج یک فضا روی می دهد استفاده می شود. به حجم کنترل **سیستم باز (open system)** نیز گفته می شود. مرز حجم کنترل، **سطح کنترل (control surface)** نامیده می شود.

در مکانیک جامدات، می توان جسم صلب یا بخشهایی از آن را مشخص کرد لذا همواره از روش سیستم (که به آن **دیاگرام آزاد – free-body diagram** گفته می شود) استفاده می شود. اما در مکانیک سیالات که با تعداد نامحدودی ذره که حرکات نسبی پیچیده ای نسبت به یکدیگر دارند سروکار دارد معمولاً استفاده از حجم کنترل ارجح است.



حجم کنترل حجم محدودی از فضا است که اندازه و شکل آن اختیاری است.

## معادله انتقال رینولدز: (Reynolds transport equation)

ترمودینامیک دانش مطالعه گرما و انتقال انرژی است. در ترمودینامیک می توان دو دسته خواص زیر را مشخص ن

۱- خواص گسترده یا مقداری (Extensive properties):

خواصی از ماده است که اندازه آنها به مقدار ماده موجود بستگی دارد. نظیر وزن، اندازه حرکت، حجم و انرژی.

۲- خواص متمرکز یا شدتی (Intensive properties):

خواصی که اندازه آنها مستقل از مقدار ماده موجود است. نظیر دما و فشار که مستقل از جرم هستند.

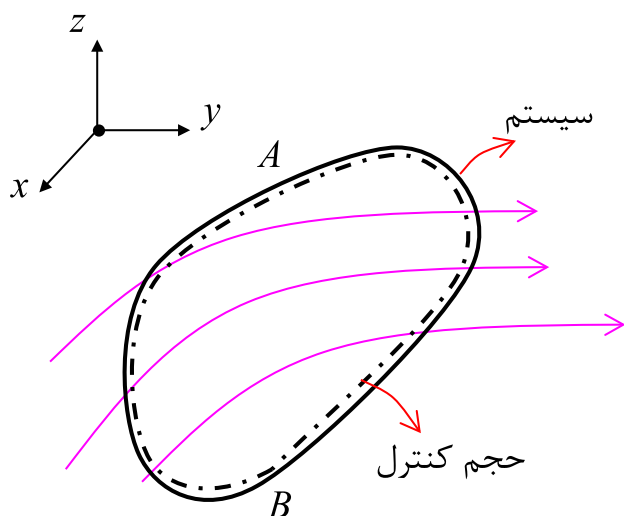
می توان متغیرهای گسترده را در واحد جرم بیان کرده به خواص متمرکز تبدیل نمود. به عنوان نمونه حجم واحد جرم ( $V$ )، انرژی بر واحد جرم ( $e$ ) به مقدار ماده موجود بستگی نداشته کمیات متمرکزی محسوب می شوند. به این کمیتها واژه مخصوص (specific) اطلاق میشود:

$$e = \frac{dE}{dm} \quad \text{یا} \quad E = \iiint_m edm = \iiint_V e\rho dV$$

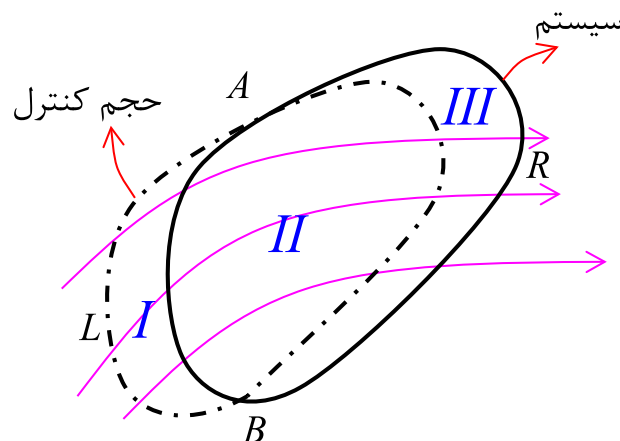
$$v = \frac{dV}{dm} \quad \text{یا} \quad V = \iiint_m vdm = \iiint_V v\rho dV$$

برای مرتبط کردن خاصیتی از سیال در سیستم و خاصیت نظیر آن در حجم کنترل، خاصیت گسترده دلخواه  $N$  از سیال را در نظر می گیریم. در اگر توزیع  $N$  در واحد جرم را با  $\eta$  نشان دهیم:

$$\eta = \frac{dN}{dm} \quad \text{یا} \quad N = \iiint_V \eta\rho dV$$



سیستم و حجم کنترل در لحظه  $t$



سیستم و حجم کنترل در لحظه  $t + \Delta t$

محل حجم کنترل در فضا ثابت است اما سیستم دارای حجم  $I+II$  در لحظه  $t$  و  $II+III$  در لحظه  $t + \Delta t$  می باشد.

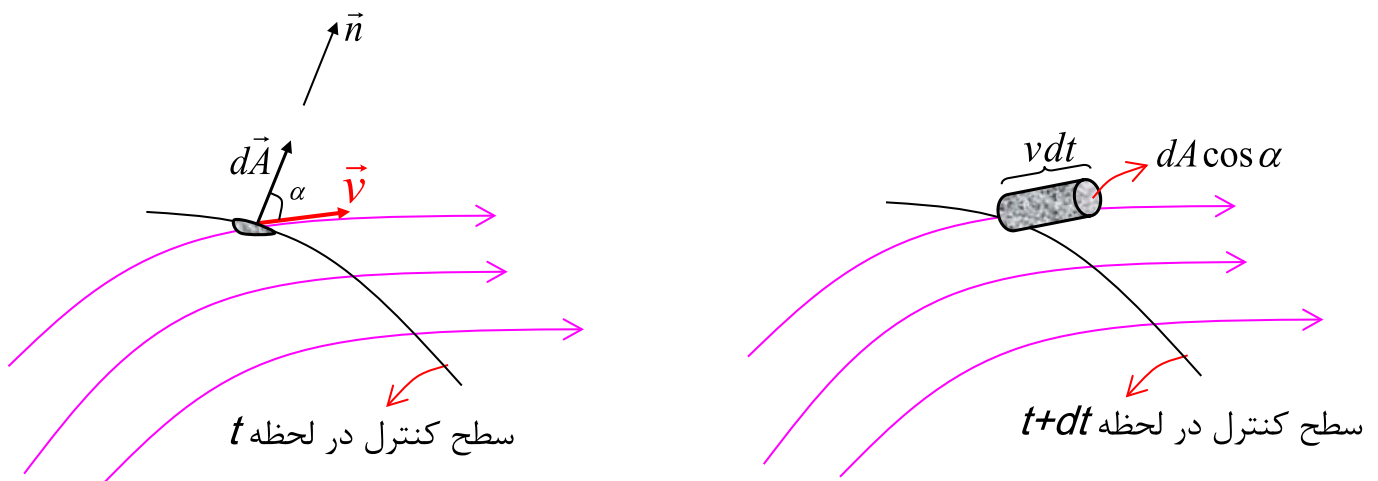
میزان تغییر  $N$  در فاصله زمانی  $\Delta t$  برابر است با:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN}{dt}\right)_{system} &= \frac{DN}{Dt} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\iint_{II} \eta \rho dV + \iint_{III} \eta \rho dV)_{t+\Delta t} - (\iint_{I} \eta \rho dV + \iint_{II} \eta \rho dV)_t}{\Delta t} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\iint_{II} \eta \rho dV)_{t+\Delta t} - (\iint_{II} \eta \rho dV)_t}{\Delta t} \right] + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\iint_{III} \eta \rho dV)_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right] - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\iint_{I} \eta \rho dV)_t}{\Delta t} \right] \quad (I) \end{aligned}$$

اولین حد مشتق جزئی حجم کنترل می باشد:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\iint_{II} \eta \rho dV)_{t+\Delta t} - (\iint_{II} \eta \rho dV)_t}{\Delta t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \eta \rho dV$$

حد دوم مقدار متوسط خروج  $N$  از بخش  $ARB$  سطح کنترل و حد سوم نرخ ورود  $N$  از بخش  $ALB$  سطح کنترل را نشان می دهد. بنابراین جملات دوم و سوم مجموعاً نرخ خروجی خالص  $N$  از حجم کنترل را ارائه می کنند.



$$\begin{aligned} dV &= (vdt)dA \cos \alpha \\ &= \vec{v} \cdot d\vec{A} dt \end{aligned}$$

حجم سیالی که در زمان  $dt$  از  $dA$  گذر کرده است:



با جایگذاری نرخ خروج  $N$  از بخش  $ARB$  سطح کنترل برابر است با  $(\alpha < \pi/2)$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\iiint_{III} \eta \rho dV)_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right] = \iint_{ARB} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_{ARB} \eta \rho v \cos \alpha dA > 0$$

$\cos \alpha > 0$

و نرخ ورود  $N$  از بخش  $ALB$  سطح کنترل  $(\alpha > \pi/2)$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(\iiint_{I} \eta \rho dV)_t}{\Delta t} \right] = - \iint_{ALB} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \iint_{ALB} \eta \rho v \cos \alpha dA > 0$$

$\cos \alpha < 0$

بنابراین نرخ خروجی خالص  $N$ :

$$\iint_{ARB} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} - (- \iint_{ALB} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) = \iint_{ARB} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \iint_{ALB} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oiint_{CS} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

با توجه به این که اثرات غیر دائمی دارای مرتبه دوم اهمیت هستند، معادله فوق که در جریان دائمی بدست آمد در جریان غیر دائمی نیز برقرار است. با جایگذاری در معادله (I) اسلاید ۷:

\*\*

$$\frac{DN}{Dt} = \oiint_{CS} \eta \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \eta \rho dV$$

معادله انتقال رینولدز

که در آن  $N(\vec{x}, t)$  اسکالر، بردار یا تانسوری از هر مرتبه است.

این معادله که امکان ارتباط روش سیستم به حجم کنترل را نشان می دهد، معادله انتقال رینولدز (**Reynolds transport equation**) نامیده می شود. \* این معادله را می توان مستقیماً با استفاده از تئوری لایب نیتز (**Leibnitz**) که مشتق انتگرال حجمی را به انتگرال سطحی تبدیل می کند نیز بدست آورد.

در معادله انتقال رینولدز  $\vec{v}$  نسبت به دستگاه  $XYZ$  (در واقع نسبت به حجم کنترل که در این دستگاه ثابت است سنجیده می شود). بنابراین نرخ تغییرات زمانی  $N$  (و  $\eta$ ) نیز که می توانند یک کمیت برداری باشند (مثلاً اندازه حرکت) نسبت به حجم کنترل بیان می شوند.

از آنجا که می توان دستگاه مختصات متحرک استفاده کرد، پس حجم کنترل نیز می تواند هرگونه حرکتی داشته باشد. در این حالت کفایت کمیتهای وابسته به زمانی که مشتق آنها محاسبه می شود (نظیر سرعت، اندازه حرکت...) و سرعتها نسبت به حجم کنترل متحرک بیان شوند.

**(Basic laws for finite systems and finite control volumes)**

در این بخش تعدادی از معادلات اساسی که مبنای اکثر تحلیلهای سیالات را تشکیل می‌دهد بررسی می‌شوند.

**(Conservation of mass-Continuity equation): پیوستگی**

در یک سیستم بدلیل ثابت بودن جرم اصل بقای جرم مستقیما برقرار است. در حجم کنترل با استفاده از معادله انتقال رینولدز داریم:

$$N = m \implies \eta = \frac{dN}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$$

$$\frac{Dm}{Dt} = \iint_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV$$

اما جرم سیستم (طرف چپ معادله ثابت است)، بنابراین:

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \implies \boxed{\iint_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV = 0} \quad \text{و یا} \quad \boxed{\iint_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV}$$

این رابطه در هر لحظه  $t$  برای هر حجم کنترل معتبر است. در صورت متحرک بودن حجم کنترل  $\vec{v}$  و مشتق زمانی

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

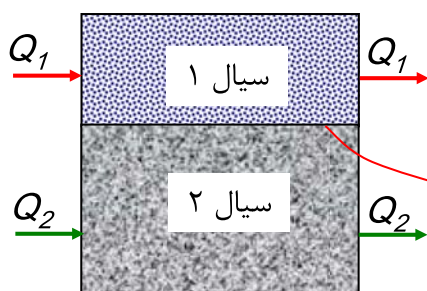
باید نسبت به حجم کنترل متحرک محاسبه شوند.

اگر جریان نسبت به دستگاه مختصاتی که به حجم کنترل متصل شده است **دائمی** باشد، با توجه با ثابت بودن تمام خواص سیال نسبت به زمان و نیز شکل حجم کنترل **برای یک یا چند نوع سیال** داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV = \iiint_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \implies \boxed{\iint_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0}$$

جرم کل داخل حجم کنترل که ثابت است

در صورت وجود تنها یک نوع سیال می‌توان  $\rho$  را از رابطه فوق حذف کرد.



موقعیت مرز مشترک دو سیال در جریان دائمی ثابت است.

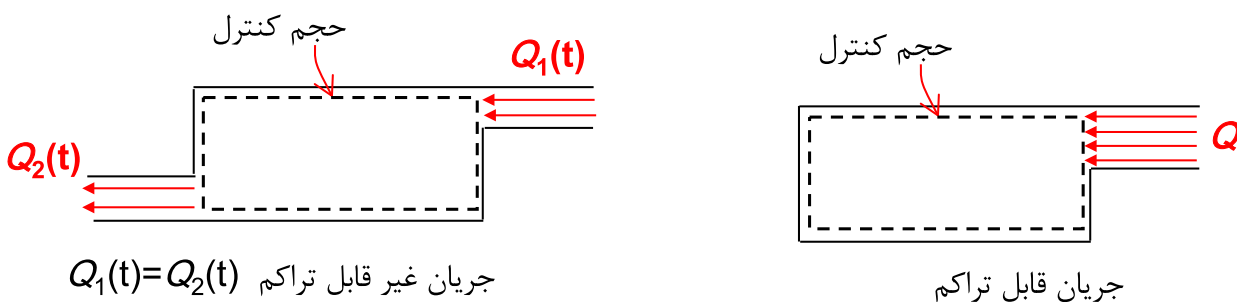
اگر در داخل حجم کنترل، جریان غیر قابل تراکمی از فقط یک نوع سیال وجود داشته باشد، جرم مخصوص سیال حتی در میدان سرعت غیر دائمی همواره و در تمام نقاط حجم کنترل ثابت است. بنابراین:

$$\oiint_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho \iiint_{CV} dV) = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho V) = -\rho \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

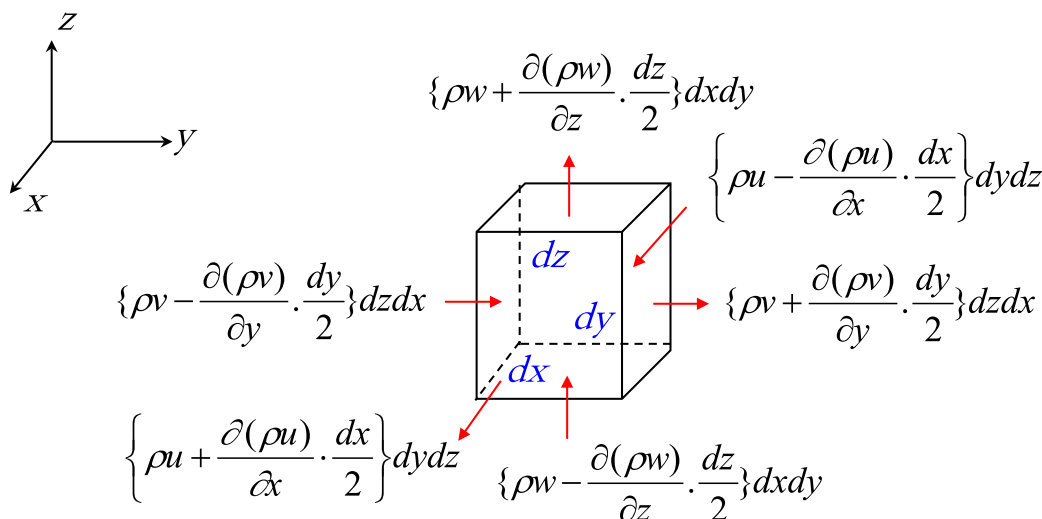
حجم کنترل  
(ثابت است)

$$\implies \oiint_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{و یا} \quad \boxed{\oiint_{CS} \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0}$$

بنابراین در هر جریان تراکم ناپذیر از یک نوع سیال، اصل بقای جرم به اصل بقای حجم (conservation of mass) تبدیل می گردد. واضح است که این مطلب در جریان تراکم پذیر غیر دائمی صحیح نیست زیرا جمله مربوط به نرخ تغییر جرم داخل حجم کنترل حذف نمی شود. مثلاً ورود هوا به یک محفظه که به افزایش جرم داخل آن منجر می شود:



### فرم دیفرانسیلی قانون بقای جرم: (Differential form of mass conservation)



با فرض بردار سرعت  $\vec{v} = (u, v, w)$  در مرکز المان:

دبی جرمی ورودی - دبی جرمی خروجی = نرخ کاهش جرم داخل جزء حجم

$$-\frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy$$

قانون بقای جرم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{در جریان دائمی}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{معادله پیوستگی}$$

در جریان تراکم ناپذیر (دائمی و غیر دائمی)

معادلات مشابهی را در سیستم مختصات استوانه ای و کروی می توان بدست آورد. برای رهایی از سیستم مختصات می توان از عملگر دیورجانس استفاده کرد:

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{قانون بقای جرم}$$

و در جریان تراکم ناپذیر (معادله پیوستگی):

$$\text{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

### قانون اندازه حرکت خطی: (Linear momentum)

در تحلیل سیستم می توان مستقیماً قانون دوم نیوتن را بکار برد:

$$\vec{F}_R = \frac{d}{dt}_{\text{system}} \left( \iiint_m \vec{v} dm \right) = \frac{d\vec{P}}{dt}_{\text{system}}$$

یا

$$\vec{F}_R = \frac{D}{Dt}_{\text{system}} \left( \iiint_m \vec{v} dm \right) = \frac{D\vec{P}}{Dt}_{\text{system}} \quad \text{(I)}$$

که در آن  $\vec{P}$  اندازه حرکت خطی و  $\vec{F}_R$  برآیند کلیه نیروهای خارجی وارد بر سیستم بوده و  $\vec{v}$  و مشتق زمانی نسبت به یک دستگاه مختصات اینرسیال (inertial reference) بیان می شوند. با توجه به اینکه نیروهای وارده به سیستم از دو بخش نیروی سطحی (surface force)  $T(x, y, z, t)$  و نیروی حجمی (body force)  $\vec{B}(x, y, z, t)$  تشکیل می شوند:

$$\vec{F}_R = \iint_S \vec{T} dA + \iiint_V \vec{B} \rho dV$$

سطح سیستم

حجم سیستم

(I) و  $\Rightarrow$

$$\iint_S \vec{T} dA + \iiint_V \vec{B} \rho dV = \frac{D\vec{P}}{Dt} \quad \text{(II) قانون نیوتن در یک سیستم محدود}$$

در تحلیل حجم کنترل ثابت در فضای اینرسیال (control volume fixed in inertial space)، اندازه حرکت  $\vec{P}$  بعنوان خاصیت گسترده در معادله انتقال رینولدز در نظر گرفته می شود:

$$N = \vec{P} \implies \eta = \frac{d\vec{P}}{dm} = \frac{\vec{v}dm}{dm} = \vec{v}$$

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \oiint_{CS} \vec{v}(\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \vec{v}(\rho dV)$$

اگر حجم کنترل در فضای اینرسیال ثابت در نظر گرفته شود،  $\frac{D\vec{P}}{Dt}$  نیز نسبت به دستگاه اینرسیال بوده و با استفاده از معادله (II) اسلاید قبل\*:

$$\boxed{\oiint_{CS} \vec{T}dA + \iiint_{CV} \vec{B}\rho dV = \oiint_{CS} \vec{v}(\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \vec{v}(\rho dV)}$$

شار اندازه حرکت (اندازه حرکت در واحد زمان) ورودی و خروجی از حجم کنترل

تغییر اندازه حرکت در داخل حجم کنترل

این رابطه بدین معنی است که برآیند نیروهای سطحی و حجمی اعمال شده بر یک حجم کنترل برابر با مجموع نرخ زمانی افزایش اندازه حرکت خطی درون حجم کنترل و خالص شار اندازه حرکت خروجی از سطح کنترل می باشد.

با در نظر گرفتن مولفه های کمیتهای برداری اندازه حرکت، سرعت، نیروی سطحی و نیروی حجمی در سه راستای متعامد  $X$ ،  $Y$  و  $Z$ :

$$\begin{cases} \oiint_{CS} T_x dA + \iiint_{CV} B_x \rho dV = \oiint_{CS} v_x (\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} v_x (\rho dV) \\ \oiint_{CS} T_y dA + \iiint_{CV} B_y \rho dV = \oiint_{CS} v_y (\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} v_y (\rho dV) \\ \oiint_{CS} T_z dA + \iiint_{CV} B_z \rho dV = \oiint_{CS} v_z (\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} v_z (\rho dV) \end{cases}$$

## فرم دیفرانسیلی قانون نیوتن، معادله اولر: (Euler's equation)

در المانی به جرم  $dm$ ، اندازه حرکت با کمیت برداری  $dm\vec{v}$  تعریف می شود. قانون نیوتن در یک سیستم مخته اینرسیال:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{D}{Dt}(dm\vec{v}) \\ &= dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = dm\vec{a} \\ &= dm \left( v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

اگر تنش برشی وجود نداشته و تنها نیروی حجمی نیروی ثقل باشد:

$$d\vec{F} = d\vec{f}dV = (-\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k})dV$$

$$\text{و یا } (-\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k})dV = dm \left( v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)$$

$$\text{و } dm = \rho dV \implies \left( -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - g\vec{k} \right) = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

و یا:

$$\left( -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - g\vec{\nabla}z \right) = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

معادله اولر

(Euler's equation)

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{Dv_x}{Dt}\vec{i} + \frac{Dv_y}{Dt}\vec{j} + \frac{Dv_z}{Dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

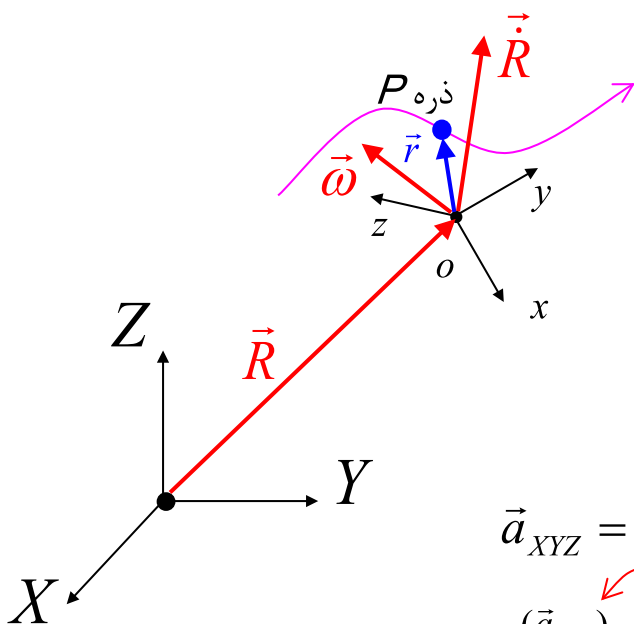
که در آن:

با توجه به  $v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  می توان معادله اولر را به فرم زیر نیز نمایش داد:

$$\left( -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - g\vec{\nabla}z \right) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

## حجم کنترل غیر اینرسیال: (Non-inertial control volume)

معادله اصلی اندازه حرکت خطی که از قانون نیوتن بدست می آید در حالتی صحیح است که شتاب نسبت به یک دستگاه مرجع اینرسیال سنجیده شود.\* با توجه به اینکه حرکت سیال نسبت به حجم کنترل سنجیده می شود، معادله اندازه حرکت خطی صرفاً برای حجم کنترلهایی معتبر است که نسبت به یک دستگاه اینرسیال ثابت بوده و یا با سرعت ثابت حرکت کنند.



دستگاه اینرسیال XYZ و دستگاه xyz را که نسبت به آن حرکت اختیاری دارد در نظر می گیریم:

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{R} + \overbrace{2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz}}^{** \text{ شتاب Coriolis}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$(\vec{a}_{P/o})_{xyz}$                        $\vec{a}_o$                        $(\vec{v}_{P/o})_{xyz}$

$\vec{\omega}, \dot{\vec{\omega}}$ : به ترتیب سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای سیستم دوار xyz در سیستم مختصات ثابت XYZ

قانون نیوتن برای ذره ای بسیار کوچک بر حسب حرکت نسبی آن در دستگاه XYZ:

$$d\vec{F} = dm \vec{a}_{XYZ} = dm [\vec{a}_{xyz} + \vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{F} - dm [\vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] &= dm \vec{a}_{xyz} \\ &= \frac{D}{Dt}_{xyz} (dm \vec{v}_{xyz}) \end{aligned}$$

معرف مشتق زمانی است که از دیدگاه دستگاه XYZ انجام می شود. این معادله قانون نیوتن را در حالتی که

جملات سمت چپ به شکل نیروهای فرضی در نظر گرفته شده اند نشان می دهد. با انتگرالگیری بر روی تمام المانهای داخل سیستم، برای سیستم محدود:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{T} dA + \iiint_V \vec{B} \rho dV - \iiint_V [\vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \rho dV \\ = \frac{D}{Dt}_{xyz} (\iiint_V \vec{v}_{xyz} \rho dV) = \frac{D}{Dt}_{xyz} (\vec{P}_{xyz}) \end{aligned} \quad (I)$$

$$\dot{P} = \dot{\vec{P}}_{xyz} \implies \eta = \frac{d\vec{P}_{xyz}}{dm} = \frac{\vec{v}_{xyz} dm}{dm} = \vec{v}_{xyz}$$

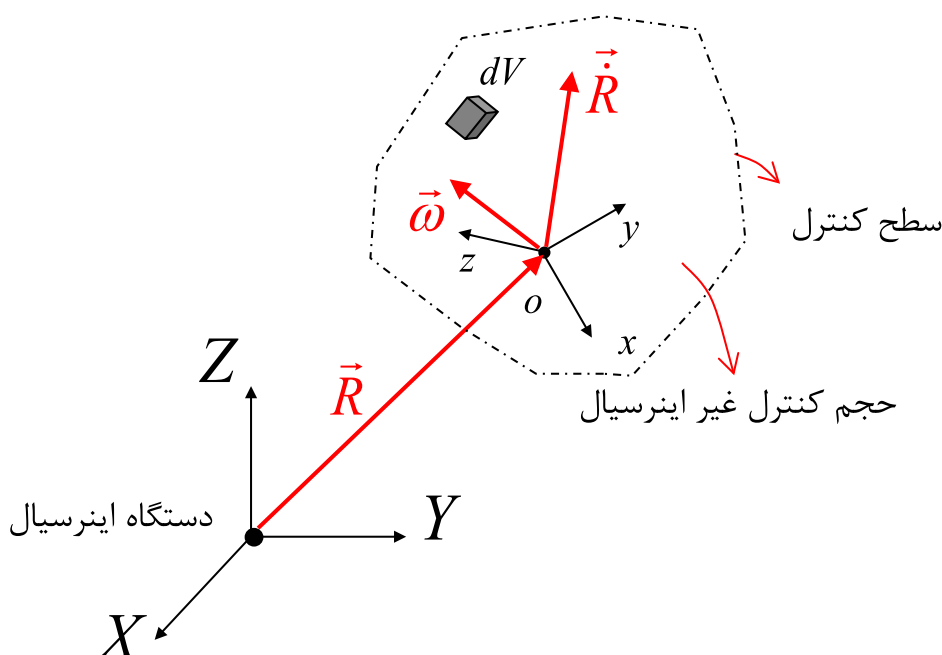
$$\frac{D\vec{P}_{xyz}}{Dt_{xyz}} = \oint\oint_{CS} \vec{v}_{xyz} (\rho \vec{v}_{xyz} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t_{xyz}} \iiint_{CV} \vec{v}_{xyz} (\rho dV) \quad (II)$$

با ترکیب دو معادله (I) و (II):

$$\begin{aligned} & \oint\oint_{CS} \vec{T} dA + \iiint_{CV} \vec{B} \rho dV - \iiint_{CV} [\ddot{\vec{R}} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \rho dV \\ & = \oint\oint_{CS} \vec{v}_{xyz} (\rho \vec{v}_{xyz} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t_{xyz}} \iiint_{CV} \vec{v}_{xyz} (\rho dV) \end{aligned}$$

از آنجایی که حجم کنترل در دستگاه XYZ ثابت است، معمولاً مناسبتر است که از حجم کنترل بعنوان محل سنجش سرعتها و مشتقات زمانی استفاده شود.

بنابر این قانون اندازه حرکت به این معنی است که کل نیروهای سطحی و حجمی وارده به سیال داخل سطح کنترل منهای کل توزیع نیروهای حجمی فرضی که ناشی از غیر اینرسیال بودن حجم کنترل اند برابر است با مجموع گذر اندازه حرکت از سطح کنترل و نرخ تغییر اندازه حرکت داخل حجم کنترل از دید ناظری واقع بر حجم کنترل.





## لنگر اندازه حرکت: (Moment of momentum)

سیستم محدودی از سیال را مطابق شکل در نظر می گیریم. بر مبنای قانون نیوتن:

$$d\vec{F} = \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

با ضرب خارجی طرفین رابطه در بردار مکان  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

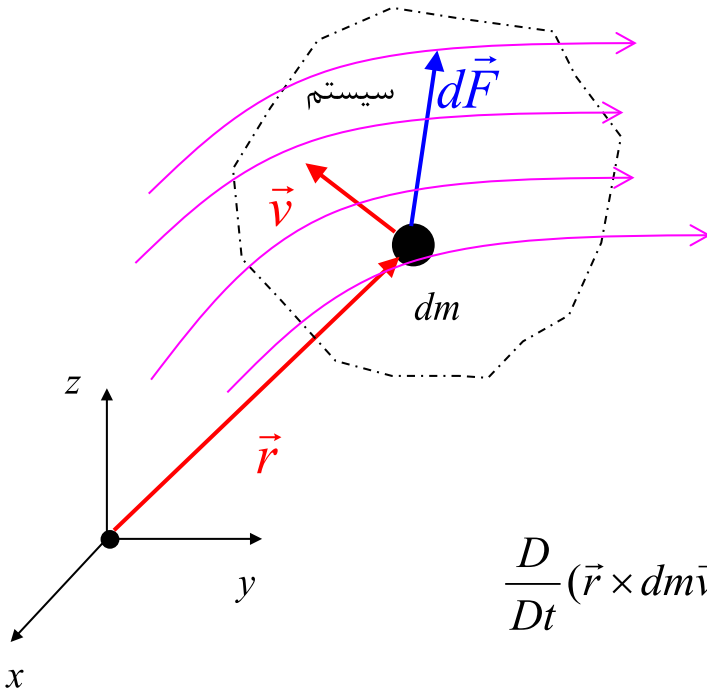
اما

$$\frac{D}{Dt}(\vec{r} \times dm\vec{v}) = \frac{D\vec{r}}{Dt} \times dm\vec{v} + \vec{r} \times \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

$$= \vec{v} \times dm\vec{v} + \vec{r} \times \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

$$= \vec{r} \times \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{D}{Dt}(\vec{r} \times dm\vec{v})$$



یعنی لنگر کل نیروهای وارد بر المان  $dm$  نسبت به مبدا مختصات اینرسیال با میزان تغییر زمانی لنگر اندازه حرکت که از دستگاه مختصات اینرسیال سنجیده می شود برابر است.\* با انتگرال گیری روی سیستم:

$$\int \vec{r} \times d\vec{F} = \iiint_M \frac{D}{Dt}(\vec{r} \times \vec{v}) dm$$

$$= \frac{D}{Dt} \iiint_M (\vec{r} \times \vec{v}) dm \quad \text{با توجه به ثابت بودن جرم سیستم (حدود انتگرال گیری)}$$

$$= \frac{D\vec{H}}{Dt}$$

که در آن  $\vec{H}$  (اندازه حرکت زاویه ای - angular momentum) لنگر اندازه حرکت سیستم در فضای اینرسیال را نشان می دهد. لنگر سمت چپ معرف کل لنگر نیروهای خارجی وارده به سیستم نسبت به یک نقطه ثابت است که میتواند بر حسب نیروهای سطحی و حجمی نوشته شود:

$$\int \vec{r} \times d\vec{F} = \oiint_S \vec{r} \times \vec{T} dA + \iiint_V \vec{r} \times \vec{B} \rho dV$$

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{r} \times \vec{T} dA + \iiint_V \vec{r} \times \vec{B} \rho dV = \frac{D\vec{H}}{Dt}$$

که معادله اندازه حرکت برای یک سیستم را نشان می دهد.

(Control volume approach for the moment of momentum equation)

حجم کنترل اینرسیال: (Inertial control volume)

اندازه حرکت زاویه ای  $\vec{H}$  بعنوان خاصیت گسترده در معادله انتقال رینولدز در نظر گرفته می شود:

$$N = \vec{H} \implies \eta = \frac{d\vec{H}}{dm} = \frac{(\vec{r} \times \vec{v})dm}{dm} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\frac{D\vec{H}}{Dt} = \oiint_{CS} (\vec{r} \times \vec{v})(\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} (\vec{r} \times \vec{v})(\rho dV)$$

با توجه به انطباق حجم کنترل و سیستم در لحظه  $t$ :

$$\boxed{\oiint_{CS} \vec{r} \times \vec{T} dA + \iiint_{CV} \vec{r} \times \vec{B} \rho dV = \underbrace{\oiint_{CS} (\vec{r} \times \vec{v})(\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})}_{\text{شار لنگر اندازه حرکت}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} (\vec{r} \times \vec{v})(\rho dV)}_{\text{تغییر لنگر اندازه حرکت}}}$$

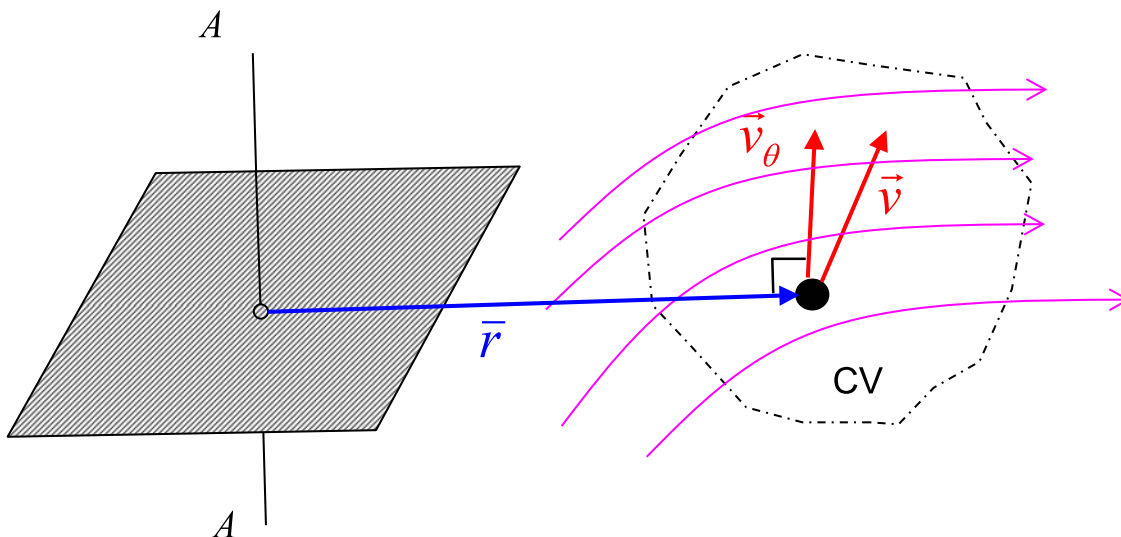
شار لنگر اندازه حرکت (اندازه حرکت در واحد زمان) ورودی و خروجی از حجم کنترل

تغییر لنگر اندازه حرکت در داخل حجم کنترل

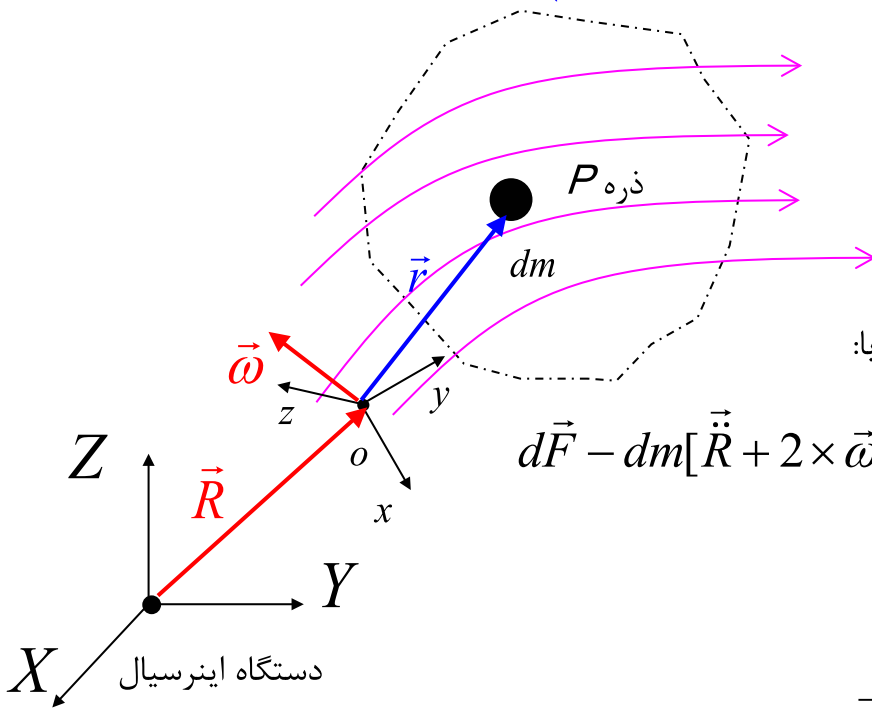
در بسیاری از مسائل عملی با نوشتن لنگر نیروها و اندازه حرکت نسبت به یک محور فقط یک مولفه اسکالر بکار می رود:

$$\oiint_{CS} \vec{r} T_{\theta} dA + \iiint_{CV} \vec{r} B_{\theta} \rho dV = \oiint_{CS} (\vec{r} v_{\theta})(\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} (\vec{r} v_{\theta})(\rho dV)$$

که در آن  $\vec{r}$  فاصله شعاعی هر ذره تا محور  $A-A$  بوده و  $v_{\theta}$  سرعت ذره در راستای عمود بر شعاع است.



حجم کنترل غیر اینرسیال: (Non-inertial control volume)



قانون نیوتن برای جزء جرم  $dm$  برابر است با:

$$d\vec{F} - dm[\vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] = \frac{D}{Dt_{xyz}}(dm\vec{v}_{xyz})$$

با ضرب خارجی طرفین رابطه در بردار مکان  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} \times d\vec{F} - dm \left\{ \vec{r} \times [\vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \right\} = \vec{r} \times \frac{D}{Dt_{xyz}}(dm\vec{v}_{xyz})$$

اما  $\vec{r} \times \frac{D}{Dt_{xyz}}(dm\vec{v}_{xyz}) = \frac{D}{Dt_{xyz}}(\vec{r} \times dm\vec{v}_{xyz})$  بنابراین:

$$\vec{r} \times d\vec{F} - dm \left\{ \vec{r} \times [\vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \right\} = \frac{D}{Dt_{xyz}}(\vec{r} \times \vec{v}_{xyz}) dm$$

با انتگرال گیری بر روی سیستم:

$$\vec{M}_S + \vec{M}_B - \iiint_V \left[ \vec{r} \times [\vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \right] \rho dV = \frac{D\vec{H}_{xyz}}{Dt_{xyz}}$$

لنگر نیروهای حجمی نسبت به مرکز سیستم اینرسیال

لنگر کل اندازه حرکت سیستم نسبت به مرکز سیستم غیر اینرسیال

لنگر نیروهای سطحی نسبت به مرکز سیستم اینرسیال

و با در نظر گرفتن خاصیت گسترده  $\vec{H}_{xyz}$  در معادله انتقال رینولدز:

$$N = \vec{H}_{xyz} \implies \eta = \frac{d\vec{H}_{xyz}}{dm} = \frac{(\vec{r} \times \vec{v}_{xyz}) dm}{dm} = \vec{r} \times \vec{v}_{xyz}$$

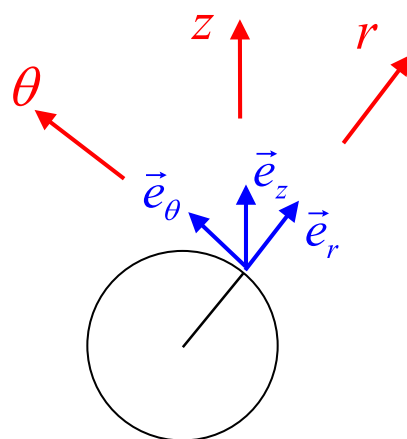
$$\frac{D\vec{H}_{xyz}}{Dt} = \iint_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}_{xyz})(\rho \vec{v}_{xyz} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t_{xyz}} \iiint_{CV} (\vec{r} \times \vec{v}_{xyz})(\rho dV)$$

$$I \mathbf{M}_S + \vec{M}_B - \iiint_{CV} \left[ \vec{r} \times [\vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \right] \rho dV$$

$$= \iint_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}_{xyz}) (\rho \vec{v}_{xyz} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} (\vec{r} \times \vec{v}_{xyz}) (\rho dV)$$

در این معادله بجز  $\vec{\omega}$ ،  $\vec{\dot{\omega}}$  و  $\vec{R}$  سایر کمیتها و مشتق های زمانی نسبت به حجم کنترل متحرک سنجیده می شوند. در حالتی که  $\vec{\omega}$  و  $\vec{\dot{\omega}}$  دارای امتداد ثابتی در فضای اینرسیال هستند، می توان رابطه را با استفاده از مختصات استوانه ای ساده کرد:

$$\begin{cases} \vec{r} = \bar{r} \vec{e}_{\bar{r}} + z \vec{e}_z \\ \vec{v}_{xyz} = (v_{\bar{r}})_{xyz} \vec{e}_{\bar{r}} + (v_{\theta})_{xyz} \vec{e}_{\theta} + (v_z)_{xyz} \vec{e}_z \\ \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \\ \vec{\dot{\omega}} = \dot{\omega} \vec{e}_z \end{cases}$$



$$- \iiint_{CV} (\vec{r} \times \vec{R}) \rho dV = \iiint_{CV} (\vec{R} \times \vec{r}) \rho dV = \vec{R} \times \underbrace{\iiint_{CV} \vec{r} dm}_M = \vec{R} \times M \vec{r}_c = \vec{R} \times \vec{M}_r$$

ممان اول جرم حول نقطه  $O$

که در آن  $\vec{r}_c$  بردار نظیر مرکز جرم است. در صورت تقارن محوری  $\vec{r}_c = \mathbf{0}$  است یعنی توزیع جرم در حجم کنترل نسبت به مرکز سیستم متحرک (نقطه  $O$  اسلاید ۲۸) صفر است:

$$\vec{r}_c = \bar{r}_c \vec{e}_{\bar{r}} + z_c \vec{e}_z \quad \begin{cases} \bar{r}_c = \frac{\int r dm}{M} \\ z_c = \frac{\int z dm}{M} \end{cases}$$

با جایگزین کردن معادلات فوق در معادله اصلی حجم کنترل غیر اینرسیال (اسلاید قبل):

$$\begin{aligned} \vec{M}_S + \vec{M}_B + \vec{R} \times M\vec{r}_c - \iiint_{CV} (\vec{r}\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \times \{ (2\omega\vec{e}_z) \times \\ [(v_r)_{xyz} \vec{e}_r + (v_\theta)_{xyz} \vec{e}_\theta + (v_z)_{xyz} \vec{e}_z] + \dot{\omega}\vec{e}_z \times (\vec{r}\vec{e}_r + z\vec{e}_z) + \\ \omega\vec{e}_z \times [\omega\vec{e}_z \times (\vec{r}\vec{e}_r + z\vec{e}_z)] \} \rho dV = \\ \oiint_{CS} (\vec{r}\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \times [(v_r)_{xyz} \vec{e}_r + (v_\theta)_{xyz} \vec{e}_\theta + (v_z)_{xyz} \vec{e}_z] \rho \vec{v} \cdot \vec{dA} \\ + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} [(\vec{r}\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \times [(v_r)_{xyz} \vec{e}_r + (v_\theta)_{xyz} \vec{e}_\theta + (v_z)_{xyz} \vec{e}_z]] \rho dV \end{aligned}$$

با توجه به اینکه:

$$\begin{cases} \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta \times \vec{e}_z = \vec{e}_r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_S + \vec{M}_B + \vec{R} \times M\vec{r}_c - \iiint_{CV} [(2\omega z v_r + \dot{\omega} r z) \vec{e}_r + \\ (2\omega z v_\theta + \omega^2 r z) \vec{e}_\theta + (2\omega r v_r + \dot{\omega} r^2) \vec{e}_z] \rho dV = \\ \oiint_{CS} (z v_\theta \vec{e}_r + (z v_r - r v_z) \vec{e}_\theta + r v_\theta \vec{e}_z) (\rho \vec{v} \cdot \vec{dA}) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} [(-z v_\theta) \vec{e}_r + (z v_r - r v_z) \vec{e}_\theta + r v_\theta \vec{e}_z] \rho dV \end{aligned}$$

این معادله را می توان در سه راستای  $r, z, \theta$  تفکیک نمود.

# System and Control

## Volume (2)

### قانون اول ترمودینامیک: (1st law of thermodynamics)

قانون اول ترمودینامیک بیان می کند که انرژی همواره ثابت و بدون تغییر باقی می ماند. بنابراین قانون اول ورود، خروج و تجمع انرژی در یک سیستم یا حجم کنترل را در نظر می گیرد.

اساساً مربوط به جرم مشخصی است و میتوان آن را کمیتی گسترده در نظر گرفت.

انرژی ذخیره  
(stored energy)

انرژی از یک سیستم به سیستم دیگر در حال انتقال است.

انرژی انتقالی  
(energy in transition)

انرژی

انواع انرژی ذخیره یک المان جرم:

۱- انرژی جنبشی  $E_K$  مربوط به حرکت جرم (kinetic energy)

۲- انرژی پتانسیل  $E_P$  مربوط به محل جرم در یک میدان پایستار (conservative) خارجی  
(potential energy)

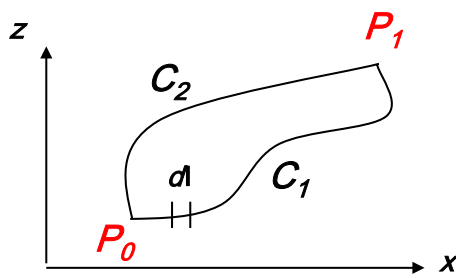
۳- انرژی داخلی  $U$  مربوط به انرژی ملکولی و اتمی میدانهای داخلی جرم (Inertial energy)\*

انرژی انتقالی } **کار:** انرژی منتقله از یک سیستم و یا به یک سیستم است هنگامی که نیروهای خارجی وارده به سیستم مسافتی را طی کنند. در ترمودینامیک مفهوم کار کلی تر بوده و بصورت انرژی منتقله از سیستم به سیستم دیگر تعریف می شود.

انرژی انتقالی } **حرارت:** نوعی انرژی است که در اثر اختلاف دما از یک سیستم به سیستم دیگر منتقل می شود.

انرژی ذخیره تابع **نقطه ای** (point function) بوده و تمام تغییرات آن را می توان بر حسب مقادیر آن در نقطه انتهایی بیان کرد (نیروی پایستار conservative).

انرژی انتقالی تابع **مسیری** (path function) بوده و تغییرات آن علاوه بر نقاط انتهایی به مسیر واقعی بین آن نقاط نیز وابسته است (نیروی غیر پایستار nonconservative).



اگر بردار  $\vec{a}(x, z)$  را در صفحه در نظر بگیریم، انتگرال  $F$  در حالت کلی بستگی به مسیر انتخابی  $C_1$  یا  $C_2$  دارد:

$$F = \int_{P_0}^{P_1} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

(مثلا کار:  $U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F \cos \alpha) ds = \int F_t ds$ )

اگر بتوان انتگرال فوق را به صورت  $F = \int_{P_0}^{P_1} dF$  نمایش داد که در آن  $dF$  مشتق کامل (exact differential) تابع  $F$  است، داریم:

$$F = \int_{P_0}^{P_1} dF = F(P_1) - F(P_0)$$

با توجه به این که:

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_z \vec{k} \\ d\vec{l} = dx \vec{i} + dz \vec{k} \end{cases} \Rightarrow dF = \vec{a} \cdot d\vec{l} = a_x dx + a_z dz$$

اما  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \nabla F \cdot d\vec{l}$ ، بنابراین شرط مستقل از مسیر بودن انتگرال عبارت است از:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial F}{\partial x} \\ a_z = \frac{\partial F}{\partial z} \end{cases}$$

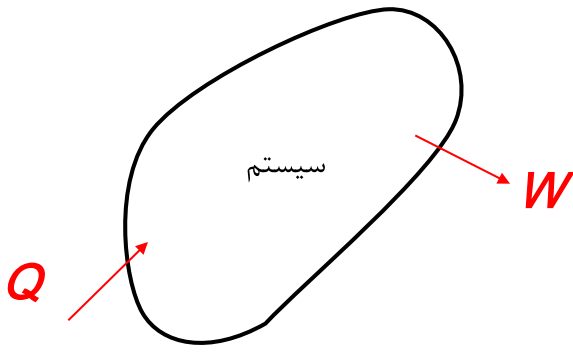
و یا

$$\boxed{\vec{a} = \nabla F}$$

پس نیرو وقتی پایستار است که بتوان مولفه های آن را از یک تابع پتانسیل استخراج کرد. در این حالت کار در یک مسیر مسدود صفر است:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

## تحلیل سیستم (system analysis)



گرمای خالص افزوده به سیستم و کار خالصی که سیستم روی محیط در فاصله زمانی  $\Delta t$  انجام می دهد با  $Q$  و  $W$  نشان داده می شوند.

اگر کل انرژی ذخیره شده در سیستم را در لحظه  $t$  با  $E$  نشان دهیم:

$$Q - W = \Delta E$$

$$= E_2(t + \Delta t) - E_1(t) = (E_K + E_P + U)_2 - (E_K + E_P + U)_1$$

در فاصله زمانی  $dt$ :

$$dE = dQ - dW$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{Dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (I)$$

$E$  تابعی نقطه ای بوده و بر حسب متغیرهای فضا و زمان قابل بیان است. لذا برای دنبال کردن آن مشتق کلی (substantial derivative) بکار می رود.

چون  $Q$  و  $W$  تابعی نقطه ای نیستند می توان آنها را به صورت توابعی صریح (explicit function) نسبت به زمان نشان داد.

## تحلیل حجم کنترل (Control volume analysis)

با استفاده از معادله انتقال رینولدز ( $E$  متغیر گسترده انرژی و  $e$  انرژی در واحد جرم):

$$N = E \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{dE}{dm} = e$$

با ثابت فرض نمودن  $g$

$$e = e_k + e_p + u = \frac{dm \frac{v^2}{2} + dm g z + dm u}{dm} = \frac{v^2}{2} + g z + u$$

$$\frac{DE}{Dt} = \oiint_{CS} e(\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} e(\rho dV) \quad (II)$$

با ترکیب دو معادله (I) و (II):

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \oiint_{CS} e(\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} e(\rho dV)$$

رابطه فوق بیان می کند که نرخ انتقال انرژی منتقله به حجم کنترل از طریق کار و حرارت برابر است با نرخ گذر انرژی ذخیره از پیرامون حجم کنترل بعلاوه نرخ افزایش انرژی ذخیره داخل حجم کنترل.

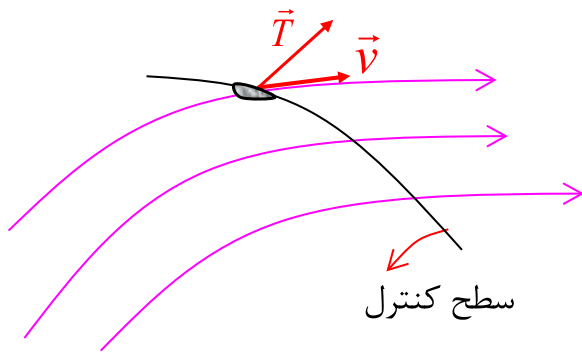


برای تعیین  $\frac{dW}{dt}$  مناسب است  $W$  را به سه دسته طبقه بندی کرد:

۱- کار جریان (Flow work): ناشی از نیروهای سطحی موجود در قسمتهایی از سطح کنترل که از آنها جریان می کند بر روی محیط (Surrounding)

۲- کار محوری (Shaft work):  $W_s$  کار ناشی از تماس مستقیم اجزا داخلی و خارجی حجم کنترل به غیر از سیال بین سایر قسمتهای سطح کنترل و محیط اطراف. مثلا کاری که توسط محورها (shafts) یا جریان الکتریکی از سطح کنترل خارج یا به آن وارد می شود.

۳- کار داخل سطح کنترل در اثرعکس العمل نیروهای حجمی بر روی محیط. این کار می تواند توزیع نیروهای مغناطیسی و الکتریکی را شامل گردد نیروی حجمی  $B$  نباید شامل جاذبه باشد زیرا تاثیر جاذبه به صورت انرژی پتانسیل در نظر گرفته شده است.



کار جریان:  $\vec{T}$  نیروی سطحی وارده از محیط به سطح کنترل است. بنابر این  $\vec{T} \cdot \vec{v}$  نرخ کار انجام شده در واحد زمان (توان\*) توسط محیط بر روی سطح کنترل بر واحد سطح آن است. لذا نرخ کار خروجی\*\* از حجم کنترل در واحد زمان (کل کار جریان) برابر است با:

$$- \iint_{CS} \vec{T} \cdot \vec{v} dA$$

به طریق مشابه اگر نیروی حجمی  $\vec{B}$  معرف توزیع نیروی روی ماده داخل حجم کنترل وارده از محیط باشد،  $\vec{B} \cdot \vec{v}$  توان خروجی از حجم کنترل در واحد جرم ماده داخل حجم کنترل بوده و کل نرخ کار نیروی حجمی خروجی از حجم کنترل برابر است با:

$$- \iiint_{CV} \vec{B} \cdot \vec{v} \rho dV$$

با جایگذاری:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_s}{dt} + \iint_{CS} \vec{T} \cdot \vec{v} dA + \iiint_{CV} \vec{B} \cdot \vec{v} \rho dV = \iint_{CS} \left( \frac{v^2}{2} + gz + u \right) (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \left( \frac{v^2}{2} + gz + u \right) \rho dV \quad (I)$$

در جریان بدون اصطکاک (frictionless flow) و همچنین جریان لزجی که سرعت سیال گذرنده از سطح  $\kappa$  در تمام نقاط بر آن عمود باشد می توان کل نرخ کار جریان را ساده کرد:

۱- در جریان بدون اصطکاک بردار  $\vec{T}$  عمود بر سطح کنترل است ( $\vec{T}$  و  $d\vec{A}$  همراستا هستند)، بنابراین:

$$\vec{T} = \tau_{nn} \vec{n} = \tau_{nn} \frac{d\vec{A}}{dA} = -p \frac{d\vec{A}}{dA}$$

$$\Rightarrow -\iint_{CS} \vec{T} \cdot \vec{v} dA = -\iint_{CS} \left( p \frac{d\vec{A}}{dA} \cdot \vec{v} \right) dA = \iint_{CS} p \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_{CS} p v (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad v\rho = 1$$

۲- جریان لزجی که سرعت سیال گذرنده از سطح کنترل در تمام نقاط بر آن عمود است بردارهای  $\vec{v}$  و  $d\vec{A}$  همراستا هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} \vec{v} = v\vec{n} \\ \vec{T} \cdot \vec{n} = \tau_{nn} \\ \tau_{nn} = -p \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\iint_{CS} \vec{T} \cdot \vec{v} dA = -\iint_{CS} (\vec{T} \cdot \vec{n} v) dA = -\iint_{CS} \tau_{nn} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_{CS} p \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_{CS} p v (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A})$$

(بردارهای  $\vec{v}$  و  $d\vec{A}$  همراستا هستند)

بنابراین معادله (I) اسلاید ۷ (قانون اول ترمودینامیک) برای جریان غیرلزج با ورودی و خروجیهای یک بعدی و جریان لزجی که در آن سرعت سیال گذرنده از سطح کنترل در تمام نقاط بر آن عمود باشد (نظیر جریان عبوری از یک لوله) به شکل زیر ساده می شود:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_s}{dt} - \iint_{CS} p v (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \iiint_{CV} \vec{B} \cdot \vec{v} \rho dV$$

$$= \iint_{CS} \left( \frac{v^2}{2} + gz + u \right) (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \left( \frac{v^2}{2} + gz + u \right) \rho dV$$

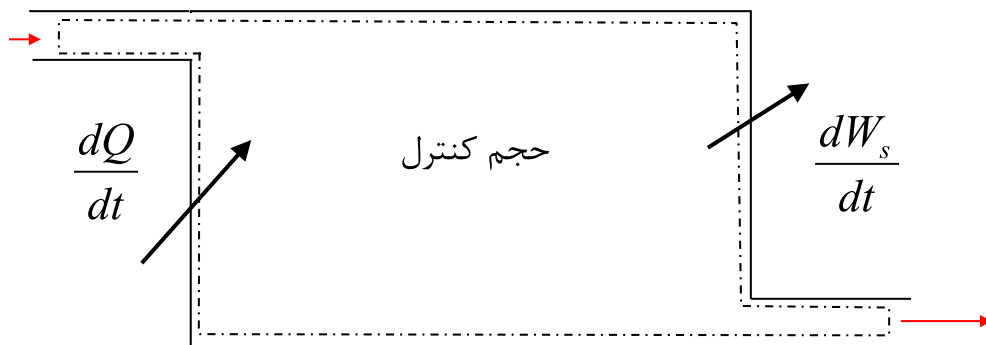
و یا

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_s}{dt} + \iiint_{CV} \vec{B} \cdot \vec{v} \rho dV = \iint_{CS} \left( \frac{v^2}{2} + gz + u + pv \right) (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \left( \frac{v^2}{2} + gz + u \right) \rho dV$$

غالباً انرژی داخلی  $u$  و کار جریان  $pv$  را ترکیب کرده،  $h = u + pv$  را **آنتالپی مخصوص** (specific enthalpy) می نامند. \* با جایگذاری:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_s}{dt} + \iiint_{CV} \vec{B} \cdot \vec{v} \rho dV = \iint_{CS} \left( \frac{v^2}{2} + gz + h \right) (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \left( \frac{v^2}{2} + gz + u \right) \rho dV$$

در جریان دائمی با ورودی و خروجی یک بعدی می توان معادله فوق را ساده کرد:



$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = -\left[\frac{v_1^2}{2} + g(z_c)_1 + h_1\right](\rho v_1 A_1) + \left[\frac{v_2^2}{2} + g(z_c)_2 + h_2\right](\rho v_2 A_2)$$

که در آن  $(z_c)_1$  مربوط به مرکز سطح ورودی روی محور Z ها و  $(z_c)_2$  مربوط به مرکز سطح خروجی روی محور Z ها می باشد. با در نظر گرفتن شرط پیوستگی:

$$\frac{dm}{dt} = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{v_1^2}{2} + g(z_c)_1 + h_1\right] + \frac{dQ/dt}{dm/dt} = \left[\frac{v_2^2}{2} + g(z_c)_2 + h_2\right] + \frac{dW_s/dt}{dm/dt}$$

و یا

$$\boxed{\left[\frac{v_1^2}{2} + g(z_c)_1 + h_1\right] + \frac{dQ}{dm} = \left[\frac{v_2^2}{2} + g(z_c)_2 + h_2\right] + \frac{dW_s}{dm}}$$

که در آن  $\frac{dQ}{dm}$  حرارت خالص داده شده به واحد دبی جرمی و  $\frac{dW_s}{dm}$  کار محوری خالص بر روی واحد دبی جرمی می باشد.

در صورت وجود دو ورودی و یک خروجی با جریانهای یک بعدی با در نظر گرفتن معادله پیوستگی:

$$\frac{dm_3}{dt} = \frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt}$$

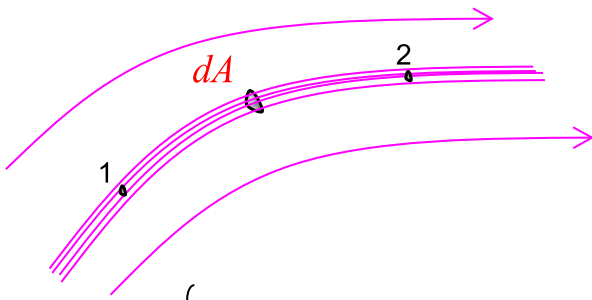
$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_s}{dt} = -\left[\frac{v_1^2}{2} + g(z_c)_1 + h_1\right]\frac{dm_1}{dt} - \left[\frac{v_2^2}{2} + g(z_c)_2 + h_2\right]\frac{dm_2}{dt} + \left[\frac{v_3^2}{2} + g(z_c)_3 + h_3\right]\frac{dm_3}{dt}$$

و یا

$$\boxed{\left[\frac{v_1^2}{2} + g(z_c)_1 + h_1\right]\frac{dm_1}{dt} + \left[\frac{v_2^2}{2} + g(z_c)_2 + h_2\right]\frac{dm_2}{dt} + \frac{dQ}{dt} = \left[\frac{v_3^2}{2} + g(z_c)_3 + h_3\right]\left(\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt}\right) + \frac{dW_s}{dt}}$$

## معادله برنولی (Bernouli's equation)

اگر در جریان دائمی، غیر قابل تراکم و غیر لزج حجم کنترل را منطبق بر بخشی از یک لوله جریان در نظر بگیریم با اعمال قانون اول ترمودینامیک و با توجه به کوچک بودن سطح مقطع حجم کنترل:



$$\begin{cases} (z_c)_2 \rightarrow z_2 \\ (z_c)_1 \rightarrow z_1 \end{cases} \Rightarrow \left( \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + h_1 \right) + \frac{dQ}{dm} = \left( \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + h_2 \right) + \frac{dW_s}{dm}$$

$$\left( \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + p_1 v \right) = \left( \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + p_2 v \right) + [(u_2 - u_1) - \frac{dQ}{dm}]$$

اگر تنها جریان غیر لزجی در نظر گرفته شود که انتقال درجه حرارت و تغییر انرژی داخلی ندارد:

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad \text{معادله برنولی (Bernouli's equation)}$$

این معادله بدین معنی است که بر روی خط جریان انرژی مکانیکی در واحد جرم ثابت است (اجزای معادله دارای

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = cte$$

$$\text{واحد } \frac{N.m}{kg} = \frac{kg \cdot m / s^2 \cdot m}{kg} = \left( \frac{m}{s} \right)^2 \text{ هستند:}$$

با تقسیم بر  $g$  شکل دیگر دیگر معادله برنولی که انرژی در واحد وزن را (با بعد طول) نشان می دهد بدست می آید. استفاده از این معادله در مسائل مایعات با سطح آزاد مناسبتر است.

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = cte$$

با ضرب کردن معادله فوق در  $\gamma$  شکل دیگری حاصل می شود که برای گازها مناسب می باشد (در گازها جمله  $\gamma z$  کم اهمیت بوده و می تواند حذف شود).

$$\frac{\rho v^2}{2} + \gamma z + p = cte$$

## معادله برنولی بوسیله انتگرال گیری از معادله اولر

معادله اولر در جریان دائمی را می توان با شتاب انتقالی در مختصات جریان نمایش داد:\*

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - g\vec{\nabla}z\right) &= \overbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}^{\vec{a}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} + \cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}^0 \\ &= \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \end{aligned}$$

که  $s$  در امتداد خط جریان است. اگر جملات فوق را در  $\vec{ds}$  ضرب کنیم:

$$\left(-\frac{\vec{\nabla}P \cdot \vec{ds}}{\rho} - g\vec{\nabla}z \cdot \vec{ds}\right) = v \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \vec{ds}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}P \cdot \vec{ds} = dp & \text{جزء تغییر فشار در طول خط جریان} \\ \vec{\nabla}z \cdot \vec{ds} = dz & \text{جزء تغییر ارتفاع در طول خط جریان} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \vec{ds} = dv & \text{تغییر سرعت در طول خط جریان} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies -\frac{dP}{\rho} - gdz &= vdv \\ &= d\left(\frac{v^2}{2}\right) \end{aligned}$$

ویا:

$$\frac{dP}{\rho} + gdz + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$$

با انتگرال گیری روی خط جریان ( $g$  ثابت):

$$\int^P \frac{dP}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = cte$$

معادله تراکم پذیر برنولی  
(Compressible form of Bernouli's equation)

اگر جرم مخصوص را بتوان به فرم  $\rho = \rho(P)$  (جریان باروتروپیک - Barotropic flow) تعریف کرد، جمله اول قابل انتگرال گیری است.

در جریان غیر قابل تراکم (Incompressible):

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = cte$$

که همان معادله برنولی است.

همانگونه که مشاهده می شود در جریان ایزوترمال (Isothermal) بدون اصطکاک قانون اول ترمودینامیک و قانون نیوتن هم ارزش هستند. در صورت وجود اصطکاک (تغییر دما) و همچنین در جریان تراکم پذیر قانون اول ترمودینامیک و قانون نیوتن معادلاتی مستقل بوده و بطور جداگانه باید ارضا شوند.\*

# Dimensional Analysis and similitude

## گروههای بی بعد (Dimensionless groups)

اگر ساده ترین نمایش حاصل ضرب (یا تقسیم) گروهی از ابعاد برابر واحد باشد به آن گروه **گروه بی بعد** گفته می شود.

بسیاری از پارامترهای بی بعد را می توان به صورت نسبت دو نیرو در نظر گرفت که اندازه نسبی پارامتر فوق نشان دهنده اهمیت نسبی یکی از نیروها نسبت به دیگری می باشد. مثلا عدد بی بعد **رینولدز (Reynolds number)** نسبت **نیروی اینرسی** به **نیروی لزجت** را نشان می دهد:

$$\frac{Ma}{\tau A} = \frac{Ma}{\mu \left(\frac{dv}{dy}\right) A} = \frac{(\rho L^3) L / T^2}{\mu (v/L) L^2} = \frac{\rho L^2 (L^2 / T^2)}{\mu v L} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L} = \frac{\rho v L}{\mu}$$
$$\left( \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{(M/L^3)(L/T)L}{M/LT} = 1 \right)$$

اگر در جریان خاصی تاثیر بعضی نیروها از سایر نیروها خیلی بیشتر باشد اغلب می توان از اثر نیروهای کوچکتر صرف نظر کرده و تنها اثر نیروهای اصلی را در تجزیه و تحلیل پدیده در نظر گرفت. به این ترتیب می توان روشهای آزمایشگاهی و ریاضی ساده تری برای حل مسئله بکار برد. با این همه در حالاتی که چندین نیرو از اهمیت زیادی برخوردار می باشند (مثلا نیروهای اینرسی، اصطکاکی، ثقل، ...) تحلیل پیچیده بوده و روشهای خاصی مورد نیاز می باشد.

## تحلیل ابعادی (Dimensional analysis)

- تحلیل ابعادی روشی در تجزیه و تحلیل مسائل مکانیک سیالات با استفاده از پارامترها و متغیرهای بی بعد است. ا
- آنالیز ابعادی در حالات زیر می توان استفاده کرد:
- ۱- انتقال از یک سیستم آحاد به سیستم دیگر
  - ۲- کاهش تعداد متغیرهای لازم در یک برنامه آزمایشگاهی
  - ۳- تعیین اصول طراحی مدلهای با استفاده از مفهوم **تشابه** و تعیین مقیاس لازم برای خواص سیال و ابعاد مختلف فیزیکی
  - ۴- کمک به فهم فیزیک مسئله و استخراج معادلات حاکم

**قانون همگنی ابعادی (Dimensional homogeneity):** تمامی معادلات فیزیکی باید از نظر ابعادی جملات یکسانی داشته و در تمام سیستمهای آحاد صادق باشند. در حالت کلی تمام این روابط فیزیکی را می توان بر مبنای مقادیر اصلی نیرو ( $F$ )، طول ( $L$ ) و زمان ( $T$ ) و یا جرم ( $M$ )، طول ( $L$ ) و زمان ( $T$ ) نمایش داد.

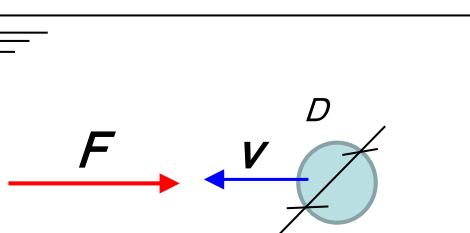
جدول اسلاید بعد ابعاد کمیات مورد استفاده در مکانیک سیالات را نشان می دهد.

کمیت (Quantity)	علامت	SI Unit	Dimension (M-L-T)	Dimension (F-L-T)
مساحت (area)	$A$	$m^2$	$L^2$	$L^2$
حجم (volume)	$V$	$m^3$	$L^3$	$L^3$
سرعت (velocity)	$v$	$m/s$	$LT^{-1}$	$LT^{-1}$
دبی (discharge)	$Q$	$m^3/s$	$L^3T^{-1}$	$L^3T^{-1}$
شتاب (acceleration)	$a$	$m/s^2$	$LT^{-2}$	$LT^{-2}$
سرعت زاویه ای (velocity)	$\omega$	$rad/s$	$T^{-1}$	$T^{-1}$
نیرو یا وزن (force or weight)	$F, W$	$N$	$MLT^{-2}$	$F$
جرم (mass)	$M$	$kg$	$M$	$FT^2L^{-1}$
وزن مخصوص (specific weight)	$\gamma$	$N/m^3, kg/(m^2.s^2)$	$ML^{-2}T^{-2}$	$FL^{-3}$
جرم مخصوص (density)	$\rho$	$kg/m^3$	$ML^{-3}$	$FT^2L^{-4}$
انرژی، کار یا پیچش (energy, work or torsion)	$E, W, T$	$Joule (J), N.m, kg. m^2/s^2$	$ML^2T^{-2}$	$FL$
توان (power)	$P$	$Watt (W), N.m/s, kg.m^2/s^3$	$ML^2T^{-3}$	$FLT^{-1}$
فشار، تنش، مدول ارتجاعی یا مدول حجمی (pressure, stress, elastic modulus or Bulk modulus)	$P, \sigma(\tau), k(E)$	$Pascal (Pa), N/m^2, kg/(m.s^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$	$FL^{-2}$
لزجت دینامیک (dynamic viscosity)	$\mu$	$Pa.s$	$ML^{-1}T^{-1}$	$FTL^{-2}$
لزجت سینماتیک (kinematic viscosity)	$\nu$	$m^2/s$	$L^2T^{-1}$	$L^2T^{-1}$
کشش سطحی	$\sigma$	$N/m$	$MT^{-2}$	$FL^{-1}$

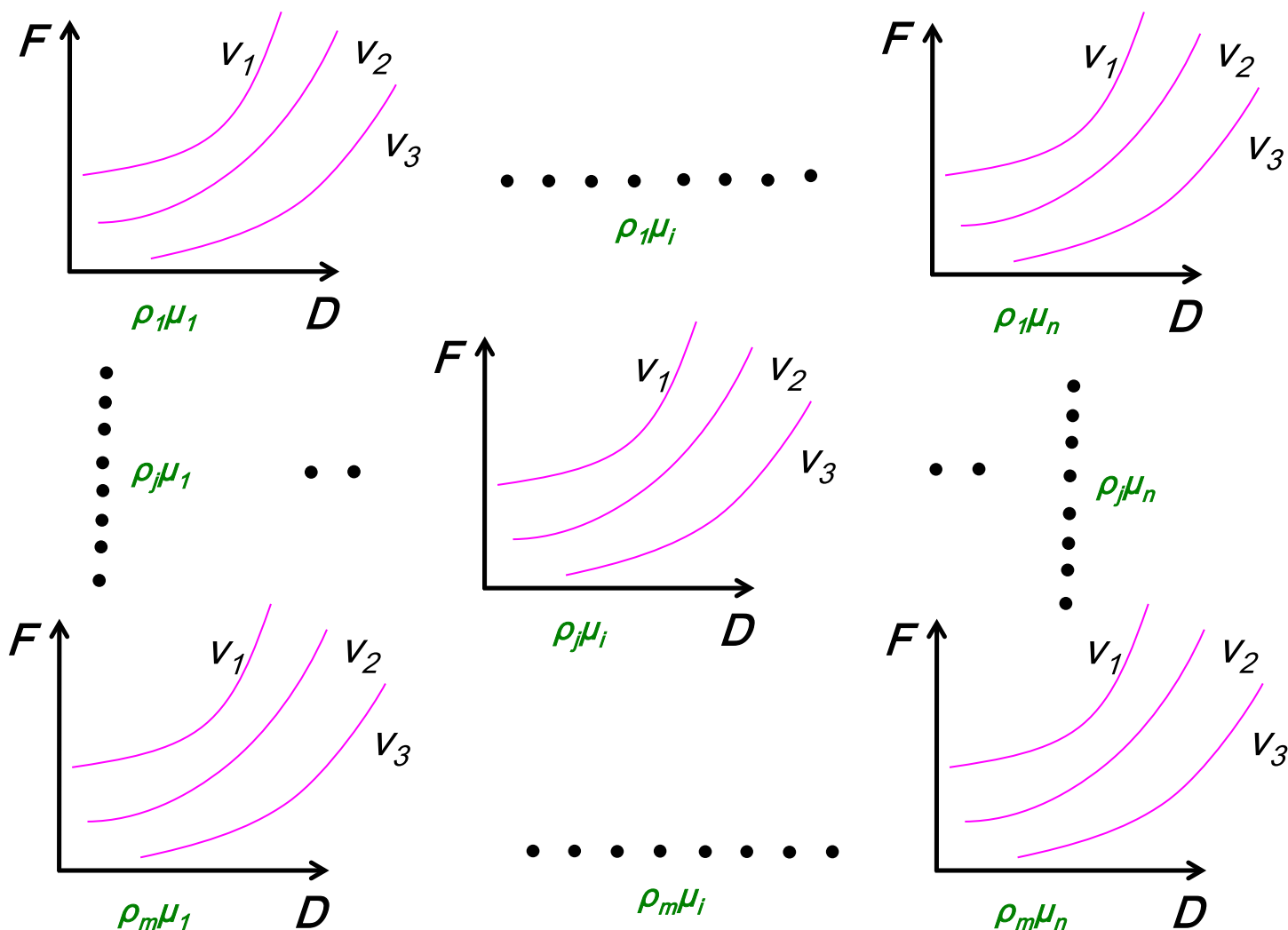
در صورتی که **متغیرهای موثر** در یک پدیده فیزیکی شناخته شده بوده اما ارتباط بین آنها معلوم نباشد، با استفاده از آنالیز ابعادی می توان پدیده را به صورت رابطه ای بین چند **گروه بی بعد** که تعدادشان کمتر از تعداد متغیرها است فرموله کرد. به این ترتیب تعداد آزمایشات لازم برای به منظور تعیین رابطه بین متغیرها کمتر شده و غالباً نوع آزمایشات نیز ساده تر می شوند.

فرض می کنیم تعیین نیروی درآگ (Drag) وارد بر کره ای صیقلی به قطر  $D$  که با سرعت پایین  $V$  در سیال لزجی حرکت می کند مورد نظر باشد. با در نظر گرفتن سایر متغیرهای موثر (جرم مخصوص  $\rho$  و لزجت  $\mu$ ):

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$



تعیین این تابع مستلزم حجم آزمایشات زیادی است زیرا در هر آزمایش تنها یکی از کمیت‌های داخل پرانتز را می توان تغییر داد. مثلاً  $m \times n$  دسته نمودار اسلاید بعد تغییرات  $F$  را در مقابل  $D$  برای مقادیر مختلف  $V$  نمایش می دهد.

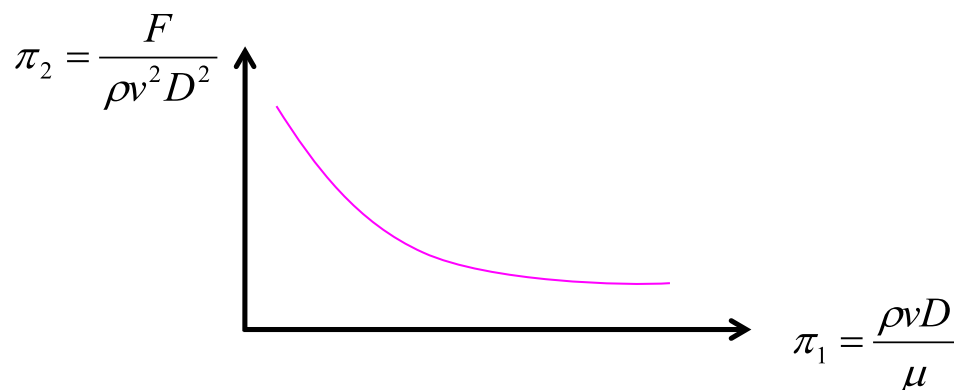




مشاهده می شود که نمودارهای زیادی برای توصیف پدیده مورد نیاز است. ضمناً این روش مستلزم استفاده از تعداد زیادی کره با قطرهای مختلف و سیالات گوناگونی با لزجت و جرم مخصوصهای متفاوت است. با استفاده از آنالیز ابعادی می توان **تعداد آزمایشات** را کاهش داد. مثلاً خواهیم دید تعیین نیروی دراگ بر کره در مثال قبل که پدیده ای ۴ متغیره است را می توان با ۲ گروه بی بعد  $\pi_1$  و  $\pi_2$  فرموله کرد:

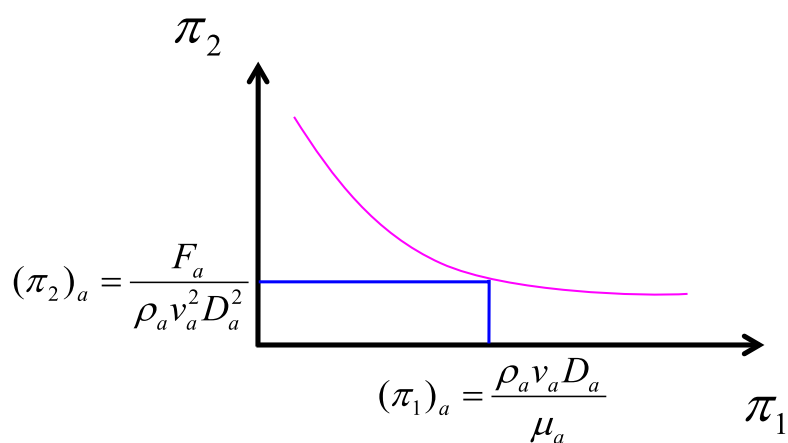
$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\rho v D}{\mu} \\ \pi_2 = \frac{F}{\rho v^2 D^2} \end{cases} \implies \frac{F}{\rho v^2 D^2} = g\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

در اینجا نیز تابع  $g$  نامعلوم است اما صرفاً با یک سری آزمایش و ارائه یک منحنی بین  $\pi$ ها می توان آن را تعیین کرد:



منحنی فوق که برای هر سیال و هر قطری در محدوده  $\pi$ های آزمایش شده معتبر است با وقت و هزینه ای به مراتب کمتر از دسته منحنی های قبل بدست می آید.

پس از رسم منحنی و تعیین تابع  $g$ ، با معلوم بودن  $\mu_a, \rho_a, D_a, v_a$  جهت تعیین نیروی  $F$  کافیهست گروه بی بعد  $(\pi_1)_a$  را تعیین کرده و گروه بی بعد  $(\pi_2)_a$  را از نمودار بدست آوریم:



$$F_a = \rho_a v_a^2 D_a^2 (\pi_2)_a$$

هرگاه مسئله ای فیزیکی شامل  $n$  کمیت موثر بوده و  $r$  بعد اصلی برای نمایش آن وجود داشته باشد، کمیتها را می توان با  $n-r$  گروه بی بعد مستقل نمایش داد. \*

در مثال حرکت کره ۵ کمیت  $F, D, v, \rho, \mu$  وجود داشته و با توجه به ۳ بعد اصلی  $T, L, M$  (و یا  $T, L, F$ )،  $n-r=2$  عدد بی بعد وجود دارد. روشن است که دو گروه بی بعد مستقل اند زیرا با عملیات جبری به هم مربوط نمی شوند ( $F$  و  $\mu$  تنها در یکی از آنها ظاهر شده اند). هر گروه بی بعد دیگر را می توان از ترکیب بر روی دو گروه

$$\pi_1 = \frac{\rho v D}{\mu} \quad \text{و} \quad \pi_2 = \frac{F}{\rho v^2 D^2}$$

بدست آورد. مثلاً  $\frac{F}{\mu v D}$  گروه بی بعدی است که از حاصل ضرب

گروههای فوق بدست می آید.

تعریف  $r$  به صورت ابعاد اصلی لازم همواره صحیح نیست. در تعریف دقیقتر  $r$  رتبه (rank) ماتریس ابعادی (Dimensional matrix) است که برابر با اولین (بزرگترین) زیر گروه مربعی دارای دترمینان مخالف صفر می باشد.

فرض کنیم متغیرهای  $\alpha, \beta, \gamma$  و  $\delta$  بر حسب ابعاد اصلی  $T, L, M$  تعریف شده باشند:

$$\alpha = ML^{-1}T^2, \beta = L^{-2}T, \gamma = M^3L^1T^1, \delta = L^2T^1$$

اگر روابط قبلی را به شکل جدول زیر مرتب کنیم:

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$M$	1	0	3	0
$L$	-1	-2	1	2
$T$	2	1	1	1

ماتریس ابعادی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس فوق ۳ است زیرا می توان ماتریس مربعی با سه سطر و ستون جدا کرد که دترمینان آن غیر صفر باشد. مثلاً:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

بنابراین در این مسئله  $4-3=1$  عدد بی بعد وجود دارد.

استفاده از تئوری باکینگهام هنگامی که تعداد کمیتها ۴ و یا بیشتر است بدلیل کاهش تعداد متغیرها بسیار مفید است:

$$\begin{aligned} & \longrightarrow \\ & \text{تئوری باکینگهام } (n \text{ بعد اصلی}) \quad F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0 \\ & \quad \quad \quad f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r}) = 0 \end{aligned}$$

هر یک از گروههای  $\pi$  به بیش از  $r+1$  پارامتر  $A$  بستگی ندارند. نکات زیر در اعداد بی بعد صادق است:

- ۱- کمیات بی بعد خود یک گروه بی بعد  $\pi$  محسوب می شوند.
- ۲- اگر دو کمیت بعد یکسانی داشته باشند، نسبت آنها خود یک گروه بی بعد  $\pi$  است.
- ۳- هر گروه بی بعد را می توان با توانی از آن جایگزین کرد (مثلا  $\pi^2, \pi^1, \pi^{0.5}, \dots$ )
- ۴- هر گروه بی بعد را می توان در ضرب کرد (مثلا  $3\pi, \dots$ ).
- ۵- هر گروه بی بعد را می توان به صورت تابعی از دیگر گروههای بی بعد نمایش داد. مثلا اگر دو گروه بی بعد وجود داشته باشد  $\pi_2 = \phi(\pi_1)$ .

### روش Hunsaker & Rightmire در تعیین اعداد بی بعد :

در این روش کمیتهای تکراری به عنوان متغیرهای اصلی در نظر گرفته شده و سه بعد اصلی  $L, T$  و  $M$  (و یا  $L, T$  و  $F$ ) بر حسب آنها نوشته می شوند. به این ترتیب با تعیین سایر کمیتها بر حسب کمیتهای تکراری اعداد بی بعد بدست می آیند و دیگر نیازی به حل دستگاه معادلات چند مجهولی وجود ندارد.

### گروههای بی بعد مهم:

بدون در نظر گرفتن انتقال حرارت، معمولترین پارامترهای با اهمیت در جریانات عبارتند از:

1	2	3	4	5	6	7	8
$V_s$	$\rho_s$	$g_s$	$\mu_s$	$\sigma_s$	$K_s$	$\Delta p_s$	$L_s$

velocity density gravity viscosity surface compressibility pressure length  
tension change

که به  $(8-3=5)$  عدد بی بعد اصلی منجر می شوند.

### ۱- عدد رینولدز (Reynolds number)

عدد رینولدز نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت (یا اصطکاک) است:

$$\frac{Ma}{\tau A} = \frac{Ma}{\mu \left(\frac{dv}{dy}\right) A} = \frac{(\rho L^3) L / T^2}{\mu (v/L) L^2} = \frac{\rho L^2 (L^2 / T^2)}{\mu v L} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L} = \frac{\rho v L}{\mu} \implies R_{ey} = \frac{\rho v L}{\mu} \left(\frac{v L}{v}\right)$$

عدد رینولدز بحرانی در رژیمهای مختلف جریان نظیر جریان آشفته و لایه ای در لوله ها، لایه مرزی و یا اطراف اجسام شناور تمایز می گذارد.

## ۲- عدد اولر (Euler number)

عدد اولر نسبت نیروی فشار به نیروی اینرسی را نشان می دهد:

$$\frac{\Delta P.A}{Ma} = \frac{\Delta P(L^2)}{(\rho L^3)L/T^2} = \frac{\Delta PL^2}{(\rho L^2)L^2/T^2} = \frac{\Delta PL^2}{\rho L^2 v^2} = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$$

فشار دینامیکی  $\Rightarrow$   $Eu = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$

که در آن  $\Delta P$  فشار محلی منهای فشار جریان آزاد است. در آزمایشات محلی معمولا از ضریب فشار  $\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho v^2}$  استفاده می شود که دو برابر عدد اولر است.

## ۳- عدد ماخ (Mach number)

عدد ماخ نسبت جزر نیروی اینرسی به جزر نیروی ناشی از تراکم پذیری سیال را نشان می دهد:

$$M^2 = \frac{Ma}{K.A} = \frac{\rho L^2 v^2}{KL^2} = \frac{v^2}{K/\rho} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{M = \frac{v}{c}}$$

مدول بالک

که در آن  $c$  سرعت صوت در سیال است. این عدد در جریانهای با سرعت بالا که تغییرات جرم مخصوص در اثر فشار قابل توجه است، اهمیت زیادی پیدا می کند

## ۴- عدد فرود (Froude number)

عدد فرود جزر نسبت نیروی اینرسی به جزر نیروی جاذبه را نشان می دهد:

$$Fr^2 = \frac{Ma}{Mg} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho L^3 g} = \frac{v^2}{Lg} \Rightarrow \boxed{Fr = \frac{v}{\sqrt{Lg}}}$$

عدد فرود در جریانهای با تاثیر سطح آزاد (نظیر جریان در یک کانال و یا حرکت امواج) مهم است. تعیین رژیم جریان در یک کانال (فوق بحرانی یا زیر بحرانی) بستگی به بزرگتر بودن یا کوچکتر بودن عدد فرود از یک دارد. عدد فرود در محاسبات پرش هیدرولیکی، طرح سازه های دریایی و طراحی کشتی نیز بکار می رود.

## ۵- عدد وبر (Weber number)

عدد وبر عبارتست از نسبت نیروی اینرسی به نیروی کشش سطحی:

$$We = \frac{Ma}{\sigma L} = \frac{\rho v^2 L^2}{\sigma L} = \frac{\rho L v^2}{\sigma}$$

در این حالت نیز باید سطح آزاد وجود داشته باشد ولی در حالتی که ابعاد جسم بزرگ است (مثلا قایقی که در آب شناور است) این اثر کوچک است.

در کل معمولا تاثیر نیروی غالب در نظر گرفته می شود. در اکثر مسائل جریان سیال، ثقل، لزجت و یا نیروی الاستیک غالب هستند. مسائلی که در این بخش تحلیل می شوند عمدتا مربوط به حالاتی هستند که الگوی جریان تحت تاثیر یک نیروی غالب قرار دارد. اگر چند نیرو توانمند شرایط جریان را تحت تاثیر قرار دهند تحلیل مسائل متفاوت خواهد بود.

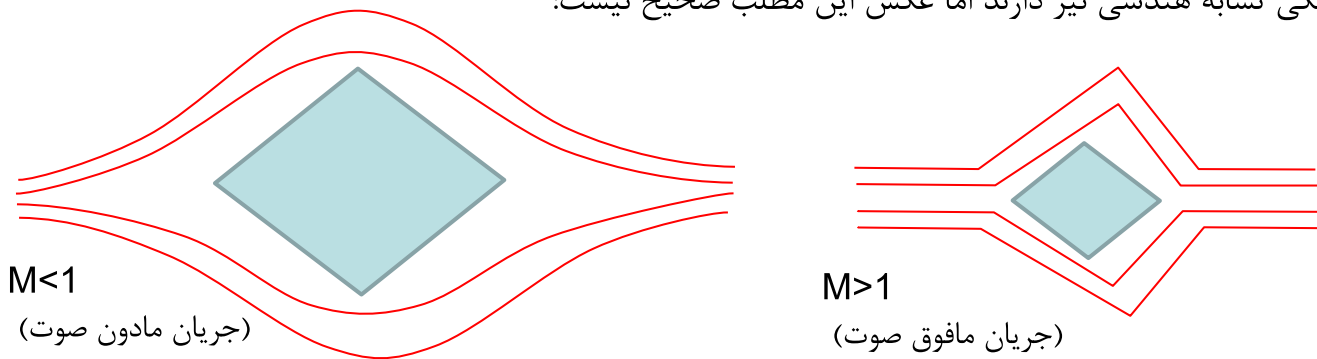
## تشابه (similitude)

تشابه در مکانیک سیالات بیانگر ارتباط بین یک جریان با اندازه واقعی و جریانی با مرزهای کوچکتر ولی از نظر هندسی مشابه با آن است. البته در حالتی که مرزها غیر مشابه می باشند نیز قوانینی وجود دارد که در اینجا مورد بحث قرار نمی گیرند. مثلا در هیدرولوژی از مدلی در رودخانه استفاده می شود که از نمای پلان با رودخانه مشابه است ولی غالبا از نظر عمق با آن مشابه نیست (Distorted model).

در اینجا فقط جریانه‌های مشابه هندسی (Geometrically similar flows) که نسبت کلیه ابعاد در مدل (model) و نمونه اصلی (prototype) یکسانست بررسی می شود:

$$\frac{L_m}{L_p} = L_r \implies \left( \frac{A_m}{A_p} = L_r^2, \frac{V_m}{V_p} = L_r^3 \dots \right)$$

وقتی خطوط جریان مربوط به دو جریان با هم مشابه باشند، آن دو جریان تشابه سینماتیکی (Kinematic similarity) دارند. با توجه به اینکه مرزهای جریان خود خطوط جریان هستند، جریانه‌های مشابه سینماتیکی تشابه هندسی نیز دارند اما عکس این مطلب صحیح نیست:



شرط یکی بودن مسیر ذرات متناظر و یکی بودن نسبت سرعت ها در مدل و نمونه اصلی را نیز میتوان برای تشابه سینماتیکی بیان کرد. به تعبیر دیگر دو جریان تشابه سینماتیکی دارند اگر ذرات متناظر (که موقعیتهای نسبی یکسانی دارند) در زمانهای مشابه در محلهای مشابه قرار گیرند (طول و زمان مشابه باشند):

$$\begin{cases} \frac{L_m}{L_p} = L_r \\ \frac{T_m}{T_p} = T_r \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{v_m}{v_p} = \frac{L_m/T_m}{L_p/T_p} = \frac{L_m/L_p}{T_m/T_p} = \frac{L_r}{T_r} & \text{سرعت} \\ \frac{a_m}{a_p} = \frac{L_m/T_m^2}{L_p/T_p^2} = \frac{L_m/L_p}{T_m^2/T_p^2} = \frac{L_r}{T_r^2} & \text{شتاب} \\ \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3/T_m}{L_p^3/T_p} = \frac{L_m^3/L_p^3}{T_m/T_p} = \frac{L_r^3}{T_r} & \text{دبی} \end{cases}$$

هر گاه توزیع نیرو در دو جریان چنان باشد که در نقاط متناظر آن دو جریان، نیروهای هم نوع (نیروی برشی، فشاری، ...) نظیر به نظیر با هم موازی بوده و متناسب باشند، دو جریان **تشابه دینامیکی (Dynamic similarity)** دارند. همین نسبت در نقاط متناظر واقع بر مرزها نیز برقرار است.\*

برای برقراری تشابه دینامیکی باید جریانها تشابه سینماتیکی داشته و **تشابه جرمی** نیز داشته باشند یعنی توزیع جرم به گونه ای باشد که نسبت جرم مخصوص برای تمام جفت نقاط متناظر یکسان باشد.

با توجه به اینکه در تشابه سینماتیکی شتابها در نقاط متناظر موازی و دارای نسبت یکسانی هستند، برآیند نیروهای وارد بر ذرات متناظر موازی بوده و بدلیل تشابه جرمی نسبت یکسانی در تمام نقاط جریان دارند.

اهمیت وجود تشابه دینامیکی اینست که اگر در سرتاسر جریان نسبت بین نیروهای متناظر دو جریان یکسان باشد انتگرال توزیع این نیروها (که می تواند مثلا نیروی دراگ، شناوری، ... را بدست دهد) نیز برای جریان مدل و نمونه اصلی دارای همان نسبت بوده و می توان از نتایج حاصل از آزمایش استفاده کرد.

تشابه هندسی	←	طول متناسب
تشابه سینماتیکی	←	طول و زمان متناسب
تشابه دینامیکی	←	طول، زمان و جرم (یا نیرو) متناسب

شرایط جریان در مدل و نمونه اصلی کاملا مشابه است اگر تمام پارامترهای بی بعد مربوط در مدل و نمونه اصلی برابر باشند:\*

$$\pi_{i,m} = \pi_{i,p} \quad i = 1, \dots, n-r$$

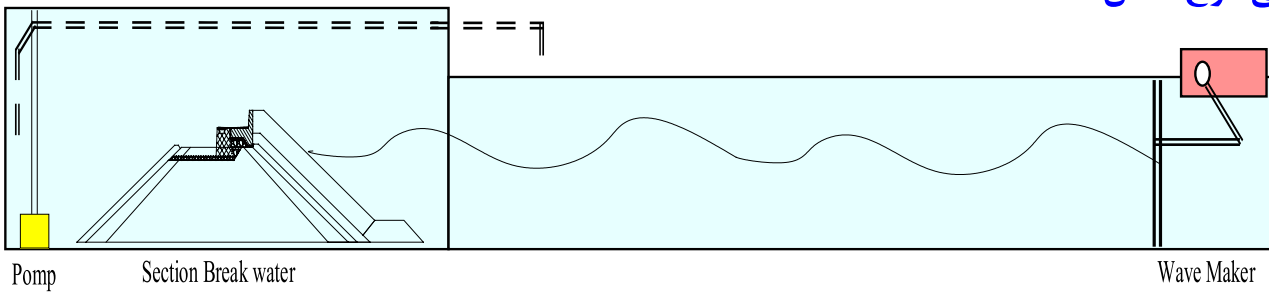
در عمل حصول شرایط فوق (**تشابه کامل**) اغلب ممکن نیست و لذا اغلب باید مهمترین عدد بی بعد (اولر، فرود، رینولدز، ...) را انتخاب کرده و بقیه را در بهترین حالت بکار برد. مثلا حالتی را فرض کنید که مدلی با سطح آزاد در آب قرار داشته و برقراری تشابه با تساوی اعداد رینولدز و فرود مد نظر باشد (مثلا تعیین نیروی دراگ وارد بر کشتی - نیروی ثقل و اصطکاک مهم هستند):

$$\left\{ \begin{array}{l} (Fr)_m = (Fr)_p \quad \frac{v_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{gL_P}} \quad \frac{v_m}{v_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_P}} = \sqrt{L_r} \\ (Re)_m = (Re)_p \quad \frac{v_m L_m}{\nu_m} = \frac{v_p L_P}{\nu_P} \quad \frac{v_m}{v_p} = \frac{\nu_m}{\nu_P} \times \frac{L_m}{L_P} = \sqrt{L_r} \times L_r = L_r^{3/2} \end{array} \right.$$

با در نظر گرفتن لزجت آب در دمای ۲۰ درجه (  $\nu_P = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ) و نسبت هندسی  $L_r = 1/10$ :

$$v_m = 1 \times 10^{-6} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{1.5} = 3.16 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

اما سیالی با لزجت فوق وجود ندارد (  $\nu_{Hg} = 1.2 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  ) و نمی توان تساوی هر دو عدد را بکار برد و بناچار باید تنها یک عدد بکار رود.



Longitudinal Section of WRI Flume

Length	42.0 m
Width	1.0 m
Depth	1.0 m



**Incompressible viscous  
flow through pipes**

## لایه مرزی (Boundary layer)

در جریان حول یک جسم، حتی اگر لزجت کم باشد، ناحیه باریکی پیرامون جسم بوجود می آید که در آن ناحیه بواسطه گرادیان سرعت بزرگی که ناشی از "چسبیدن" سیال به مرز جسم است تنش برشی حائز اهمیت می باشد. این ناحیه **لایه مرزی** نامیده می شود.

در **ورودی یک کانال یا لوله** عمدتاً لایه مرزی بسیار نازک است بطوری که در این ناحیه می توان جریان را بجز در نزدیکی جداره لوله غیر لزج در نظر گرفت.

اما این لایه در طول لوله مرتباً ضخیم تر می شود و در بسیاری از جریانها لایه مرزی سریعاً کل مقطع جریان را احاطه می کند. در چنین حالتی می توان جریان را در سراسر لوله **لزج** در نظر گرفت.

مثلاً معمولاً در لوله موئین جز در حالتی که دبی بسیار ناچیز باشد حتی اگر طول لوله کوتاه بوده و یا لزجت سیال کم باشد جریان کاملاً لزج در نظر گرفته می شود. همچنین جریان در لوله های نسبتاً طویل انتقال نفت و آب را می توان لزج به حساب آورد. اما جریان هوا در مجاری نسبتاً کوتاه مثل کانالهای تهویه و تونلهای باد را غیر از ناحیه مرزی عموماً می توان بدون اصطکاک در نظر گرفت.

در این بخش فرض می شود که تاثیر لزجت در سراسر جریان وجود دارد و لذا تنها جریانهایی در لوله که لزج هستند بررسی می شوند.

## جریان آرام (Laminar flow)

جیرانی است که در آن لایه های سیال با الگویی منظم بر روی یکدیگر می لغزند. در این حالت اگر چه حرکات ملکولی نا منظم است جریان بطور ماکروسکوپیک منظم می باشد.

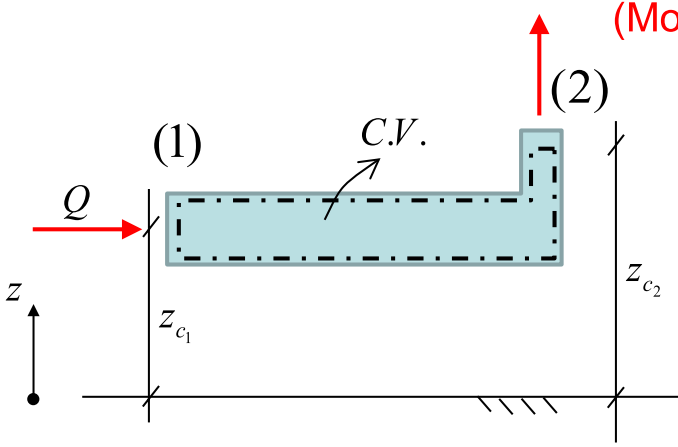
## جریان آشفته (Turbulent flow)

در این جریان نوسانات نامنظم در جریان توسعه می یابند و یک سرعت نوسانی کوچک اما ماکروسکوپیک  $v'$  به جریان منظم  $\bar{v}$  اضافه می شود.



در اعداد رینولدز کمتر از ۲۳۰۰ فقط جریان آرام می تواند برقرار شود اما این جریان می تواند تا اعداد رینولدز ۴۰۰۰۰ نیز حفظ شود.





با در نظر گرفتن قانون اول ترمودینامیک ما بین مقاطع (1) و (2):

$$\left[ \frac{v_1^2}{2} + g(z_c)_1 + \left(u_1 + \frac{P_1}{\rho}\right) \right] + \frac{dQ}{dm} = \left[ \frac{v_2^2}{2} + g(z_c)_2 + \left(u_2 + \frac{P_2}{\rho}\right) \right] + \frac{dW_s}{dm}$$

با متوسط گیری در جریان یک بعدی:

$$\left( \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) = \left( \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) + \underbrace{\frac{1}{g} \left[ (u_2 - u_1) - \frac{dQ}{dm} \right]}_{(h_f)_T}$$

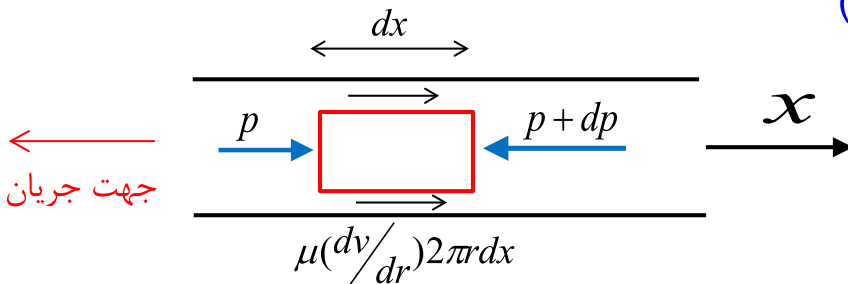
$(h_f)_T$  افت بار آبی کل (Total head loss) می باشد که افزایش انرژی داخلی سیال (تغییر  $u$ ) و انتقال حرارت از سیال داخل حجم کنترل به محیط خارج  $(\frac{dQ}{dm})$  را نشان می دهد.

$$\left( \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) = \left( \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) + (h_f)_T \implies (h_f)_T = (h_f)_P + (h_f)_M$$

$(h_f)_P$ : افت بار آبی در لوله های افقی و مایل

$(h_f)_M$ : افت بار آبی در زانویی که افت موضعی (Minor loss) نامیده می شود.

### معادله هیگن-پویسلی (Hagen-Poiseuille)



هیگن در سال ۱۸۳۹ و پویسلی در سال ۱۸۴۰ مستقلاً جریان تراکم ناپذیر آرام در لوله را بررسی کردند. المان کوچک استوانه ای شکلی به طول  $dx$  و قطر  $r$  در وسط لوله در نظر می گیریم. با صفر قرار دادن شتاب در جریان دائمی:

$$(p - p - dp)\pi r^2 + \mu \left( \frac{dv}{dr} \right) (2\pi r) dx = 0$$

$$-\pi r^2 dp + \mu \left( \frac{dv}{dr} \right) (2\pi r) dx = 0$$

پروفیل سرعت در جهت جریان ثابت می ماند. \* بنابراین:

$$\int_r^0 \frac{dp}{2\mu dx} r dr = \int^v dv \quad \frac{dp}{2\mu dx} \left( \frac{r^2}{2} \right) + C_1 = v$$

با توجه به اینکه در  $r = \frac{D}{2}$  سرعت  $v=0$  است:

$$C_1 = \frac{-dp}{\mu dx} \left( \frac{D^2}{16} \right) \implies v = \frac{-dp}{4\mu dx} \left( \frac{D^2}{4} - r^2 \right)$$

پس معادله سرعت سهمیگون است.

$$Q = \iint v dA = \int_0^{D/2} \frac{-dp}{4\mu dx} \left( \frac{D^2}{4} - r^2 \right) (2\pi r dr)$$

$$= \frac{-\pi dp}{4\mu dx} \left[ \frac{D^2}{4} \times \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4} \right]_0^{D/2} = \frac{-\pi dp D^4}{128\mu dx} \implies \frac{-dp}{dx} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4}$$

$$\frac{-(p_2 - p_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \Delta p = p_1 - p_2 \\ L = x_2 - x_1 \end{cases} \implies \Delta p = \frac{128\mu QL}{\pi D^4}$$

بنابراین افت بار آبی لوله ای با قطر ثابت  $D$  در جریان آرام برابر است با (معادله هیگن-پویسلی):\*

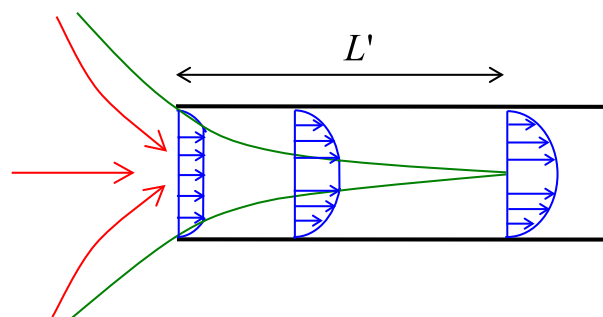
$$(h_f)_P = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{128\mu QL}{\pi D^4 \gamma} = \frac{32\mu \nu L}{D^2 \gamma}$$

مشاهده می شود که با صرفنظر کردن از زبری لوله، تلفات انرژی با لزجت، طول لوله و دبی بطور مستقیم و با توان چهارم قطر به طور معکوس متناسب است.

### شرایط ورودی لوله

وضعیتی که خطوط جریان مستقیم و موازی بوده پروفیل سرعت در تمام لوله یکسان باشد، **جریان آرام کاملا توسعه یافته** (Fully developed laminar flow) نامیده می شود. در این حالت اثر لزجت در تمام مقطع منتشر شده است.

در ابتدای لوله چنین وضعیتی برقرار نمی شود یعنی در ابتدا جریان تقریبا یکنواخت است و با جلو رفتن در لوله اثرات لزجت بیشتر در جریان توسعه می یابد. فاصله  $L'$  از دهانه لوله تا محلی که جریان آرام کاملا توسعه یافته برقرار می شود با رابطه تجربی زیر می تواند تعیین شود (رابطه لنهار - Langhaar):



$$L' = 0.058 R_{ey} \cdot D$$

### جریان آشفته (Turbulent flow)

در اغلب حالات عملی (مثلا جریان آب در شبکه های آبرسانی)، عدد رینولدز معمولا بالا بوده و جریان آشفته است. در جریان آشفته بدلیل اثر آشفتگی تنشهای دیگری نیز علاوه بر تنشهای لزج معمولی وجود دارند که **تنشهای ظاهری** (Apparent stress) نامیده می شوند.

در جریان آشفته تغییرات فشار  $\Delta P$  در طول لوله به کمیت‌های زیر وابسته است (لوله افقی فرض می‌شود):

۱-  $D$ ، قطر لوله

۲-  $L$ ، طول لوله

۳-  $\mu$ ، لزجت

۴-  $v$ ، متوسط سرعت‌های متوسط زمانی در یک مقطع ( $q/A$ )

۵-  $\rho$ ، جرم مخصوص

۶-  $e$ ، متوسط تغییرات شعاعی لوله (مقیاسی از زبری لوله)

بنابراین:

$$\Delta P = f(D, L, \mu, v, \rho, e)$$

با استفاده از آنالیز ابعادی می‌توان چهار گروه بی بعد زیر را بدست آورد:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} = G\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

از آنجایی که تغییر فشار با طول لوله تناسب مستقیم دارد:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} = \frac{L}{D} H\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{e}{D}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_f &= \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{L v^2}{g D} H\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{e}{D}\right) \\ &= \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{L}{D} \cdot \underbrace{2H\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{e}{D}\right)}_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \end{aligned}$$

که در آن  $f$  (تابع نامعلوم  $K$ )، ضریب اصطکاک ( $f = K \left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{e}{D}\right)$ ) (friction factor) نامیده می‌شود.

$$h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

فرمول داریسی-ویسباخ (Darcy-Weisbach)

ارتباط  $f$  و  $R_{ey}$  بر مبنای آزمایشات تجربی بدست آمده است که هر دو جریان آرام و آشفته را شامل می‌شود. در جریان آرام با استفاده از رابطه هیگن-پویسلی:

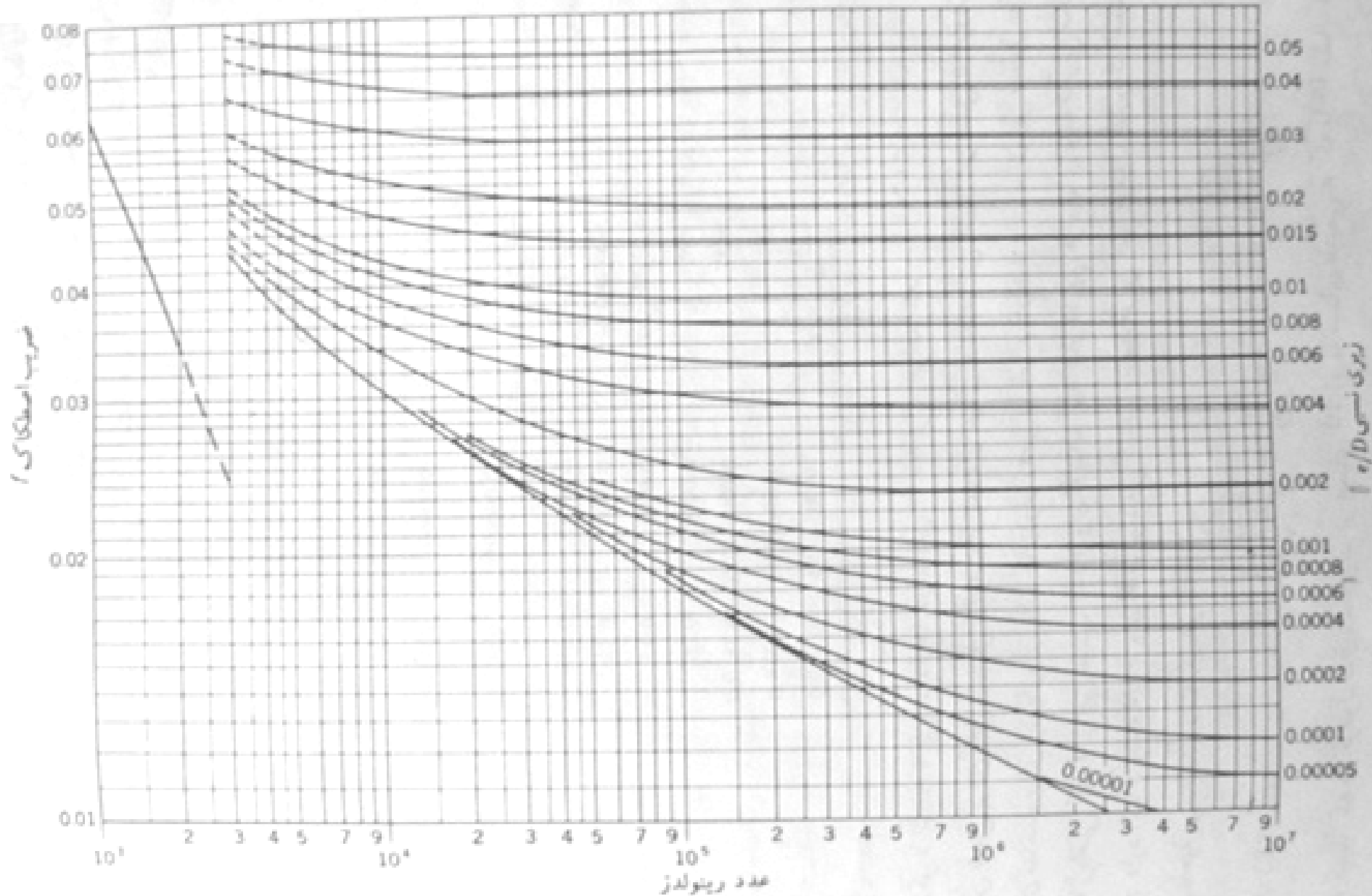
$$\begin{cases} h_f = \frac{32 \mu v L}{D^2 \gamma} \\ h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{64}{\rho v D / \mu} = \frac{64}{R_{ey}}$$

بنابراین رابطه  $f$  و  $R_{ey}$  در جریان آرام هذلولی قائم الزاویه ای است که در کاغذ لگاریتمی به خط راست تبدیل می‌شود (smooth pipe zone). در جریان آشفته و وضعیت بینابین ضریب  $f$  بر مبنای زبری نسبی ( $e/D$ ) و عدد رینولدز ( $R_{ey}$ ) از **دیاگرام مودی** (moody diagram) بدست می‌آید.

این منحنی بر اساس آزمایش و اعمال زبریهای مختلف با چسباندن دانه های شن با اندازه های گوناگون و به فواصل متفاوت بر روی دیواره لوله بدست آمده است (داده های نیکورادزه - Nikuradse's data). قسمت خطی نمودار تطابق بسیار خوبی با رابطه تئوری  $f = \frac{64}{R_{ey}}$  دارد.

در اعداد بالای رینولدز ضریب اصطکاک مستقل از عدد رینولدز بوده و منحنی به خطی افقی تبدیل می‌شود.

# ضریب اصطکاک برای جریان در لوله (دیاگرام مودی)



زبری  $e$  در لوله های مختلف بر مبنای مطالعات مودی:

جنس (نو)	زبری (mm)	زبری (ft)
شیشه	0.0003	0.000001
لوله (ساخته شده به روش کششی)	0.0015	0.000005
آهن، فولاد	0.046	0.00015
چدن قیر اندود	0.12	0.0004
آهن گالوانیزه	0.15	0.0005
چدن	0.26	0.00085
چوب	0.18-0.9	0.0006-0.003
بتن	0.3-3.0	0.001-0.01
فولاد پرچ شده	0.9-9.0	0.003-0.03

فرمولهایی نیمه تجربی برای ارتباط  $f$ ،  $e/D$  و  $Re_y$  وجود دارند که مشهورترین آنها **فرمول کلبروک** (Colebrook) است:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log_{10} \left[ \frac{e}{D} + \frac{9.35}{Re_y \sqrt{f}} \right]$$

در ناحیه کاملاً زبر ( $\frac{e}{D} \gg \frac{9.35}{Re_y \sqrt{f}}$ ) با حذف جمله  $\frac{9.35}{Re_y \sqrt{f}}$  داریم:

$$f = \frac{1}{[1.14 - 2 \log_{10} (\frac{e}{D})]^2}$$

که نیاز به آزمون و خطا ندارد.

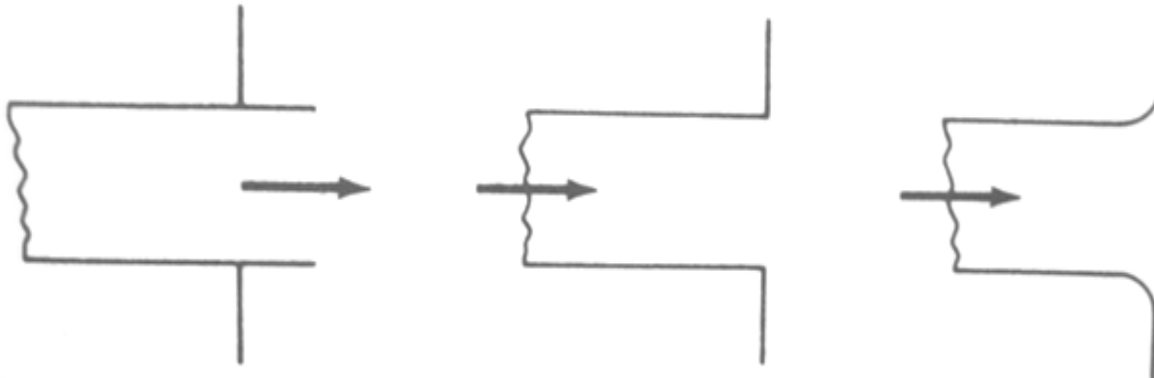
علاوه بر افت لوله ها، زانویی ها، شیرآلات و سایر اتصالات نیز انرژی جریان را کاهش می دهند. برای تعیین افت های موضعی می توان فرمول تجربی زیر را در جریان آرام و آشفته بکار برد:

$$h_f = K \frac{v^2}{2g}$$

$K$ : ضریب افت موضعی  
 $v$ : سرعت متوسط

ضریب افت موضعی در حالات مختلف را می توان از اشکال و جداول مربوطه بدست آورد.

خروجی از لوله

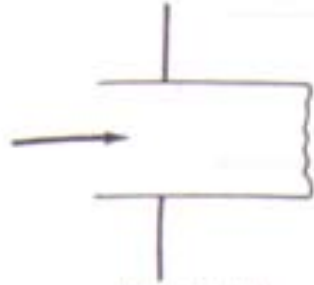


بداخل توسعه یافته  
 $K = 1.0$

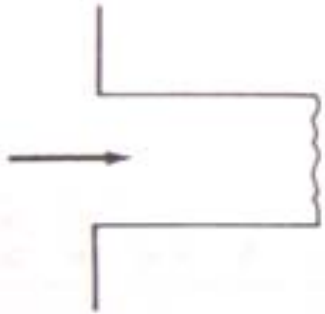
لبه تیز  
 $K = 1$

لبه گرد  
 $K = 1$

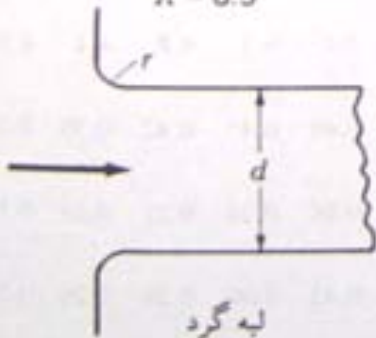
ورودی به لوله



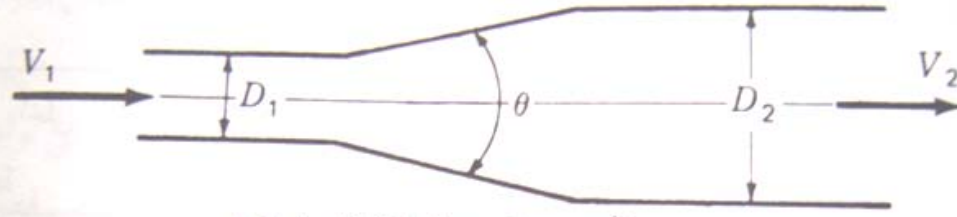
بداخل توسعه یافته  
 $K = 0.78$



لبه تیز  
 $K = 0.5$



لبه گرد

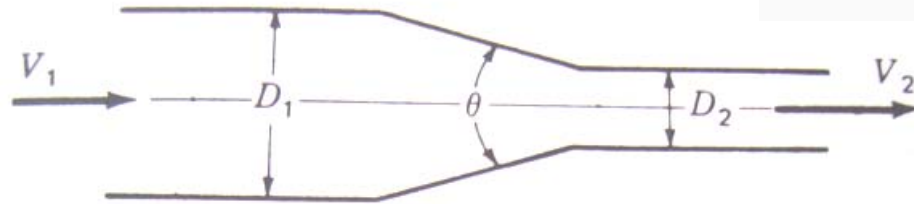


$$\theta \leq 45^\circ, K = \frac{2.6 \sin(\theta/2) [1 - (D_1/D_2)^2]}{(D_1/D_2)^4}$$

$$45^\circ < \theta \leq 180^\circ, K = \frac{[1 - (D_1/D_2)^2]}{(D_1/D_2)^4}$$

$$h_l = K \frac{V_2^2}{2}$$

ضریب افت ارتفاع برای بازشدگی تدریجی



$$\theta \leq 45^\circ, K = \frac{0.8 \sin(\theta/2) [1 - (D_2/D_1)^2]}{(D_2/D_1)^4}$$

$$45^\circ < \theta \leq 180^\circ, K = \frac{0.5 [1 - (D_2/D_1)^2] \sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}}{(D_2/D_1)^4}$$

$$h_l = K \frac{V_1^2}{2}$$

ضریب افت برای انقباض تدریجی

قطر اسمی لوله in	قطر داخلی in	سطح مقطع داخلی in <sup>2</sup>
1/2	0.364	0.1041
3/4	0.824	0.533
1	1.049	0.864
1 1/2	1.610	2.036
2	2.067	3.356
3	3.068	7.393
4	4.026	12.73
5	5.047	20.01
6	6.065	28.89
8	7.981	50.03
10	10.020	78.85
12	12.000	113.10
14	13.000	132.73
16	15.25	182.65
18	17.250	233.71
20	19.250	291.04
22	21.250	354.66
24	23.250	424.56



## خط انرژی - خط تراز هیدرولیک (Energy line- Hydraulic grade line)

خط انرژی توصیف ترسیمی از انرژی در هر مقطع ارائه می دهد:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$$

که در آن  $H$  بار آبی کل (انرژی در واحد وزن با بعد طول) و  $Z$  ارتفاع محور لوله نسبت به تراز مبنا (datum) است. خط متصل کننده بار آبی کل ابزار مناسبی در بسیاری از مسائل جریان ارائه می دهد. در طول مسیر جریان خط انرژی شیب منفی داشته یا ناگهان سقوط می کند (به استثنای مقاطعی که پمپ وجود داشته و به سیال انرژی داده می شود).

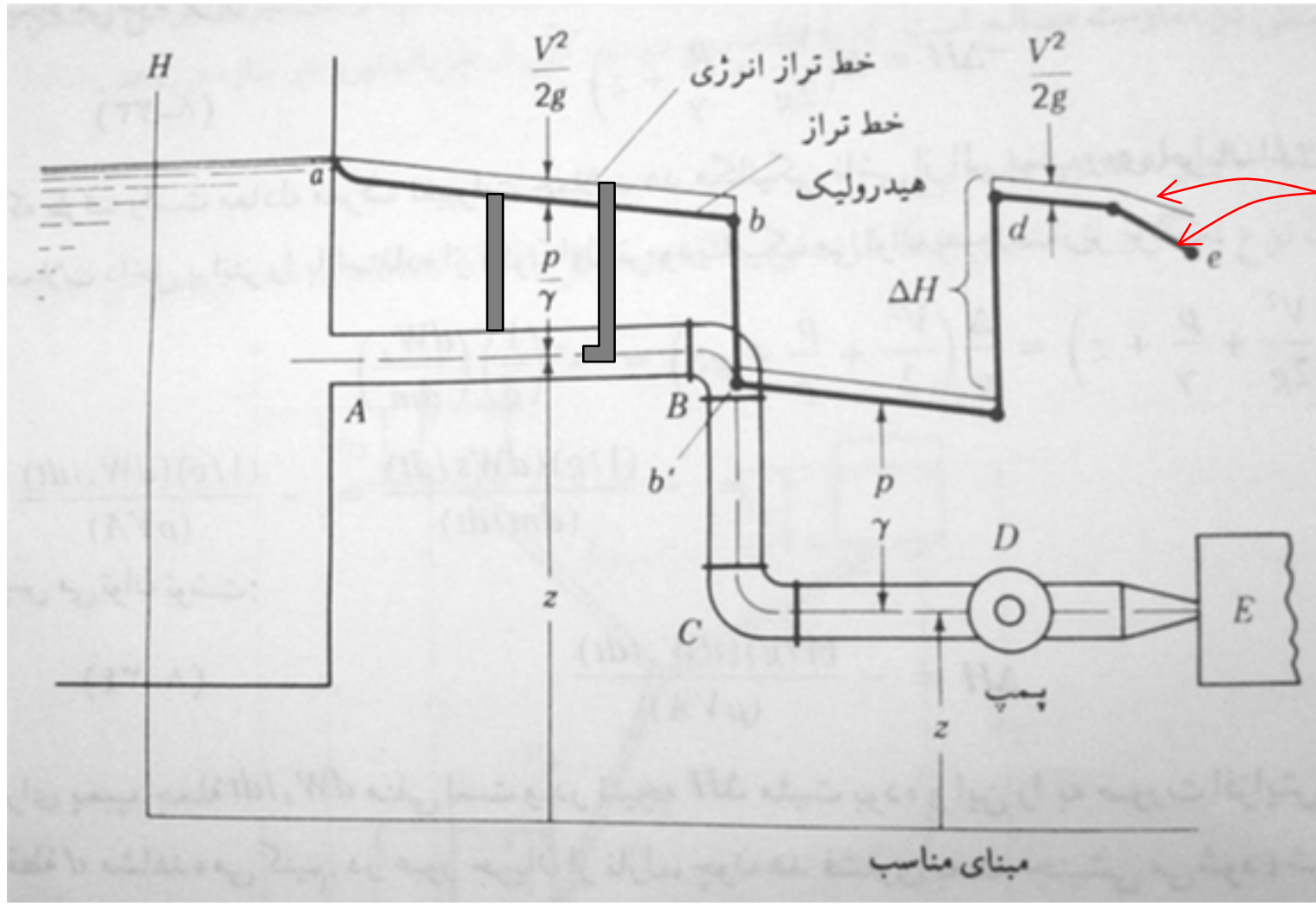
خط تراز هیدرولیکی پایین تر از خط انرژی قرار داشته و مکان هندسی نقاطی را نشان می دهد که به اندازه بار آبی فشار ( $\frac{P}{\gamma}$ ) بالاتر از محور هندسی لوله قرار دارند:

$$H_{hyd} = \frac{p}{\gamma} + z$$

در صورت ثابت بودن مقطع لوله،  $\frac{v^2}{2g}$  در طول لوله تغییر نکرده و لذا خط انرژی و خط تراز هیدرولیکی موازی خواهند بود.

شیب خط انرژی برابر است با:

$$s = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = f \frac{2Q^2}{\pi g D^3}$$



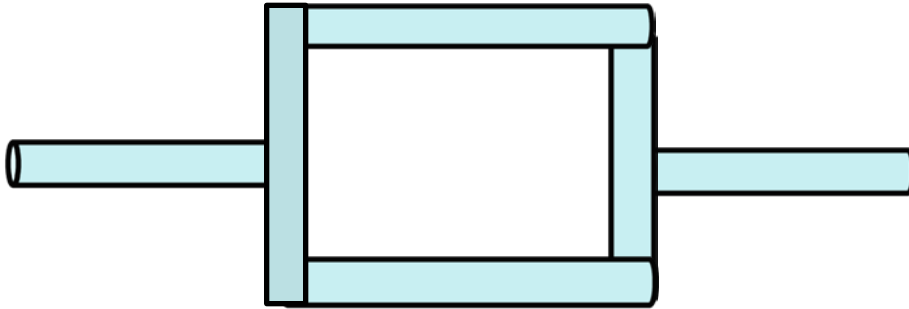
میزان افت با کاهش قطر بیشتر شده و شیب خطوط انرژی و تراز هیدرولیکی تندتر می شود.\*

## لوله های ترکیبی، چند مسیره و انشعابی (Compound, multiple path and branching pipes)

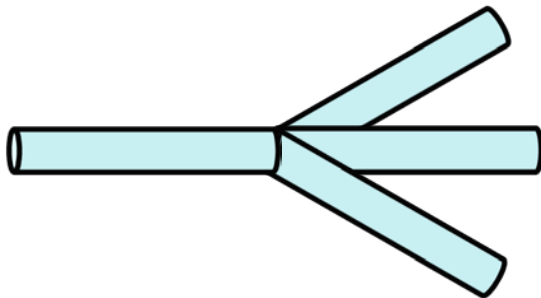
لوله های ترکیبی (compound): از یک سری لوله در سایزهای مختلف تشکیل شده است.



لوله های چند مسیره یا حلقوی (multiple path or looping): از دو یا چند لوله تشکیل می شود که شاخه ای یا بصورت موازی در پایین دست به هم متصل می شوند.



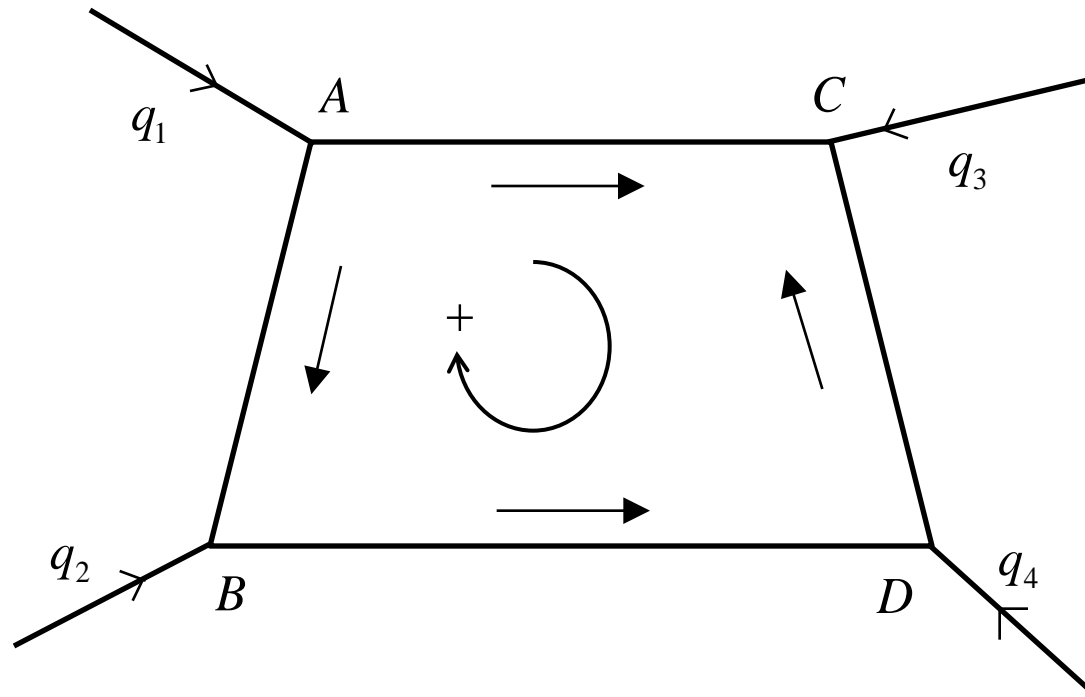
لوله های انشعابی (branching pipes): از دو یا چند لوله تشکیل می شود که در پایین دست به هم متصل نمی شوند.



در حل مسائل لوله ها معادلات حاکم باید توامان حل شوند. تحلیل سیستم شبکه های آبرسانی که آب را در یک توزیع می کنند پیچیده است. در اغلب موارد عملی نسبت طول لوله به قطر آن بزرگ بوده و می توان از موضعی صرفنظر کرد. جهت حذف افتهای موضعی رابطه تجربی  $\frac{L}{D} > 2000$  پیشنهاد شده است.

## روش هاردی کراس (Hardy Cross)

در این روش که برای تحلیل شبکه لوله ها ابداع شده است جریانها داخل لوله ها فرض شده و با استفاده از تعادل افت بار آبی، دبی فرض شده تصحیح می گردد. این روش در واقع حل عددی دستگاه معادلات چند معادله چند مجهولی دبی و بار آبی است.



$$\begin{cases} \sum_i Q_i = 0 & \text{در هر گره} \\ \sum_i (h_f)_i = 0 & \text{در هر حلقه (با در نظر گرفتن جهت)} \end{cases}$$

مثلا در نقطه C می توان نوشت:

$$h_C = h_A - (h_f)_{AC}$$

و

$$h_C = h_A - (h_f)_{AB} - (h_f)_{BD} - (h_f)_{CD}$$

$$\Rightarrow (h_f)_{AC} - (h_f)_{CD} - (h_f)_{BD} - (h_f)_{AB} = 0$$

که در حلقه شکل با توجه به فرض دبی مثبت در جهت عقربه های ساعت صحیح است.

$$h_f = KQ^n$$

مثلا با فرض استفاده از رابطه دارسی - ویسباخ  $n=2$  است (اسلاید ۱۴).

اگر  $Q'$  دبی فرضی و  $Q$  دبی واقعی در یک لوله باشد:

$$\Delta Q = Q_i - Q'_i$$

$$\Rightarrow h_f = KQ_i^n = K(Q'_i + \Delta Q)^n = K(Q_i^n + nQ_i^{(n-1)} \Delta Q + \frac{n(n-1)}{2!} Q_i^{(n-2)} \Delta Q^2 + \dots)$$

$$h_f \approx K(Q_i^n + nQ_i^{(n-1)} \Delta Q)$$

$$\Rightarrow \sum_i^{loop} (h_f)_i = \sum_i^{loop} K(Q_i^n + nQ_i^{(n-1)} \Delta Q)$$

در یک حلقه

$$0 = \sum_i^{loop} KQ_i^n + \Delta Q \sum_i^{loop} KnQ_i^{(n-1)}$$

$$\Delta Q = \frac{-\sum_i^{loop} KQ_i^n}{\sum_i^{loop} KnQ_i^{(n-1)}} = \frac{-\sum_i^{loop} (h'_f)_i}{n \sum_i^{loop} \frac{KQ_i^n}{Q'_i}} = \frac{-\sum_i^{loop} (h'_f)_i}{n \sum_i^{loop} \frac{(h'_f)_i}{Q'_i}}$$

و یا

جریان و افت بار آبی در جهت عقربه های ساعت مثبت و در خلاف جهت عقربه های ساعت منفی فرض می شوند.