عمليات برداري و تانسوري

كميت هاي فيزيكي:

- **اسكالر** مانند فشار ، دما ، حجم ، زمان
- **بردار** مانند سرعت ، اندازه حركت ، نيرو
- **تانسوري** مانند تنش ، شار اندازه حركت ، گراديان سرعت

(s) $\qquad$ $(v.w)$ $\qquad$ $(\tau:\nabla v)$

اسكالر $[v]$ $\qquad$ $[\nabla\times v]$ $\qquad$ $[\tau.v]$

بردار $\{\tau\}$ $\qquad$ $\{v.\nabla\tau\}$ $\qquad$ $\{\delta.\tau\}$

تانسوري

علامت ضرب	حاصل از مرتبه
بدون علامت	Σ
X	$\Sigma-1$
.	$\Sigma-2$
:	$\Sigma-4$

$s\tau \;:\; 0+2=2$

$vw \;:\; 1+1=2$

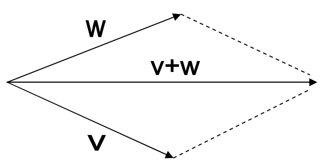
$v\times w \;:\; 1+1-1=1$

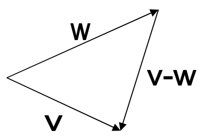
$\sigma:\tau \;:\; 2+2-4=0$

$\sigma.\tau \;:\; 2+2-2=2$

عمليات برداري از ديد هندسي:

- **جمع و تفريق**





- **ضرب بردار در اسكالر**

جابجايي	$sv = vs$
شركت پذيري	$r(sv) = (rs)v$
پخش پذيري	$(r+s)v = rv+sv$

- ضرب اسكالر (يا نقطه اي) دو بردار

$$(v.w) = v.w \,.\, \cos\theta$$

$$(v.v) = |v|^2 = v^2$$

$$(u.v) = (v.u)$$ جابجايي

$$(u.v)\, w \neq (w.v)\, u$$ شركت پذيرنسيت

$$(u.[v+w]) = (u.v) + (u.w)$$ پخش پذير

- ضرب برداري (cross) دو بردار

$$[v \times w] = (vw \;\sin\theta)n$$

$$[v \times v] = 0$$

$$[v \times w] = -[w \times v]$$ جابجايي ندارد

$$[u \times [v \times w]] \neq [[u \times v] \times w]$$ شركت پذير نيست

$$[u + v] \times w = [u \times w] + [v \times w]$$ پخش پذيري

- عمليات برداري بر حسب مولفه هاي آنها

جهت ها را با شماره هاي 1،2،3 نشان مي دهيم (x,y,z)

دلتاي كرونكر

$$\begin{cases} \delta_{ij} = +1 & i = j \\ \delta_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = +1 & ijk = 123\ ,\ 231\ ,\ 312 \\ \varepsilon_{ijk} = -1 & ijk = 321\ ,\ 132\ ,\ 213 \\ \varepsilon_{ijk} = 0 & \text{اگر دو تا از زيرنويسها يكسان باشند} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

- روابط مفيد:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hjk} = 2\delta_{ih}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

- بردارهاي يكه:

$\delta_1 , \delta_2 , \delta_3$ بجاي i , j , k

$$\begin{cases} (\delta_1.\delta_1) = (\delta_2.\delta_2) = (\delta_3.\delta_3) = 1 \\ (\delta_1.\delta_2) = (\delta_2.\delta_3) = (\delta_3.\delta_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\delta_1 \times \delta_1] = [\delta_2 \times \delta_2] = [\delta_3 \times \delta_3] = 0 \\ [\delta_1 \times \delta_2] = \delta_3 \qquad [\delta_2 \times \delta_3] = \delta_1 \qquad [\delta_3 \times \delta_1] = \delta_2 \\ [\delta_2 \times \delta_1] = -\delta_3 \qquad [\delta_3 \times \delta_2] = -\delta_1 \qquad [\delta_1 \times \delta_3] = -\delta_2 \end{cases}$$

بطور کلي:

$$(\delta_i . \delta_j) = \delta_{ij}$$

$$[\delta_i \times \delta_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \delta_k$$

- بسط یک بردار بر حسب مولفه هایش

$$v = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \delta_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i$$

$$|v| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\sum_i v_i^2}$$

- جمع و تفريق بردارها

$$v \pm w = \sum_i \delta_i v_i \pm \sum_i \delta_i w_i = \sum_i \delta_i (v_i \pm w_i)$$

- ضرب يک بردار در يک اسکالر

$$sv = s\left\{\sum_i \delta_i v_i\right\} = \sum_i \delta_i \left(s v_i\right)$$

- ضرب اسکالر دو بردار

$$(v.w) = \left(\left\{\sum_i \delta_i v_i\right\} . \left\{\sum_j \delta_j w_j\right\}\right)$$

$$= \sum_i \sum_j \left(\delta_i . \delta_j\right) v_i w_j$$

$$= \sum_i \sum_j \delta_{ij} v_i w_j = \sum_i v_i w_i$$

$$v.w = \left[v_1 v_2 v_3\right] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

- ضرب برداري دو بردار

$$\left[v \times w\right] = \left[\left\{\sum_j \delta_j v_j\right\} . \left\{\sum_k \delta_k w_k\right\}\right]$$

$$= \sum_j \sum_k \left[\delta_j \times \delta_k\right] v_j w_k$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \; \delta_i v_j w_k$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- ضرب چند بردار : به طريق مشابه انجام مي شود.

مثلا:

$$(u.[v\times w]) = \left\{\sum_i \delta_i u_i\right\}.\left[\left\{\sum_j \delta_j v_j\right\}\times\left\{\sum_k \delta_k w_k\right\}\right]$$

$$= \left\{\sum_i \delta_i u_i\right\}.\sum_j \sum_k \left[\delta_j \times \delta_k\right] v_j w_k$$

$$= \left\{\sum_i \delta_i u_i\right\}.\sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}\ \delta_i v_j w_k$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}\ (\delta_i.\delta_i)\ u_i v_j w_k$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}\ u_i v_j w_k$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- بردار مكان:

$$r = \sum_i \delta_i\ x_i$$

مثال: ثابت كنيد

$$[u\times[v\times w]] = v(u.w) - w(u.v)$$

$$(\delta_i\ u_i)\times\left[\delta_j\ v_j \times \delta_k\ w_k\right]$$

$$= (\delta_i\ u_i)\times\left[(\delta_j \times \delta_k) v_j w_k\right]$$

$$= (\delta_i\ u_i)\times\left(\varepsilon_{ljk}\delta_l v_j w_k\right)$$

$$= (\delta_i\ \times \delta_l)\left(\varepsilon_{ljk} u_i v_j w_k\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\varepsilon_{ilm}\ \varepsilon_{ljk} u_i v_j w_k\right)\delta_m \\
&= \left(\varepsilon_{jkl}\ \varepsilon_{mil} u_i v_j w_k\right)\delta_m \\
&= \left(\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ji}\delta_{km}\right)\delta_m u_i v_j w_k \\
&= v_m\left(\delta_{ki}\delta_m u_i w_k\right) - w_m\left(\delta_{ji}\delta_m u_i v_j\right) \\
&= v_m\delta_m\left(u_i w_i\right) - w_m\delta_m\left(u_i v_i\right) \\
&= v_m\delta_m\left(u.w\right) - w_m\delta_m\left(u.v\right) \\
&= v\left(u.w\right) - w\left(u.v\right)
\end{aligned}
$$

- عمليات تانسوري بر حسب مولفه هايشان

$$
\tau = \sum_i \sum_j \delta_i\delta_j\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}
$$

$\delta_\iota\delta_\iota$= unit dyad　　　　　تانسور مرتبه دوم

ترتيب i,j مهم است. مثلا شار مومنتوم در جهت x كه از واحد سطح عمود بر جهت y رد مي شود. بنابراين هم x داريم و هم y و ترتيب گفتن اينها هم مهم است.

$$\left(\delta_i\delta_j:\delta_k\delta_l\right)=\left(\delta_j.\delta_k\right)\left(\delta_i.\delta_l\right)=\delta_{jk}\delta_{il}$$

$$\left[\delta_i\delta_j.\delta_k\right]=\delta_i\left(\delta_j.\delta_k\right)=\delta_i\delta_{jk}$$

$$\left[\delta_i.\delta_j\delta_k\right]=\left(\delta_i.\delta_j\right)\delta_k=\delta_{ij}\delta_k$$

$$\left\{\delta_i\delta_j.\delta_k\delta_l\right\}=\delta_i\left(\delta_j.\delta_k\right)\delta_l=\delta_{jk}\delta_i\delta_l$$

$$\left\{\delta_i\delta_j\times\delta_k\right\}=\delta_i\left[\delta_j\times\delta_k\right]=\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{jkl}\delta_i\delta_l$$

$$\left\{\delta_i\times\delta_j\delta_k\right\}=\left[\delta_i\times\delta_j\right]\delta_k=\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{ijl}\delta_l\delta_k$$

تانسور متقارن $\tau_{ij}=\tau_{ji}$

تانسور پادمتقارن $\tau_{ij}=-\tau_{ji}$

$$\tau'=\sum_i\sum_j\delta_i\delta_j\tau_{ji}$$

- ضرب دوتايي دو بردار

$$vw=\sum_i\sum_j\delta_i\delta_j v_i w_j$$

- تانسور يكه

$$\delta=\sum_i\sum_j\delta_i\delta_j\delta_{ij}$$

- اندازه تانسور

$$|\tau|=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\tau:\tau'\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\tau_{ij}^2}$$

- جمع تانسوري

$$\sigma + \tau = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \sigma_{ij} + \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \tau_{ij}$$
$$= \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \left(\sigma_{ij} + \tau_{ij}\right)$$

يا

$$\sigma + \tau = \delta_i \delta_j \sigma_{ij} + \delta_i \delta_j \tau_{ij} = \delta_i \delta_j \left(\sigma_{ij} + \tau_{ij}\right)$$

- ضرب يک اسکالر در تانسور

$$s\tau = s\left(\delta_i \delta_j \tau_{ij}\right) = \delta_i \delta_j \left(s\tau_{ij}\right)$$

- ضرب اسکالر (يا دو نقطه اي) دو تانسور

$$(\sigma : \tau) = \delta_i \delta_j \sigma_{ij} : \delta_k \delta_l \tau_{kl}$$
$$= \left(\delta_i \delta_j : \delta_k \delta_l\right) \sigma_{ij} \tau_{kl}$$
$$= \delta_{il} \delta_{jk} \sigma_{ij} \tau_{kl} = \sigma_{ij} \tau_{ji}$$

به طريق مشابه مي توان نشان داد:

$$(\tau : vw) = \tau_{ij} v_j w_i$$

$$(uv : wz) = u_i v_j w_j z_i$$

– ضرب تانسوري (يا نقطه اي)دو تانسور

$$\{\sigma.\tau\} = \delta_i \delta_j \sigma_{ij} . \delta_k \delta_l \tau_{kl} = \{\delta_i \delta_j . \delta_k \delta_l\} \sigma_{ij} \tau_{kl}$$
$$= \delta_{jk} \delta_i \delta_l \sigma_{ij} \tau_{kl} = \delta_i \delta_l (\sigma_{ij} \tau_{jl})$$

يعني مولفه il ام تانسور $\{\delta.\tau\}$ عبارت است از:

$$\sum_j \sigma_{ij} \tau_{jl}$$

$$\{\sigma.\sigma\} = \sigma^2 \quad \text{يا} \quad \{\sigma.\sigma^2\} = \sigma^3$$

- ضرب برداري (نقطه اي) تانسور و بردار

$$\tau.v = \begin{bmatrix} \tau_{11} \tau_{12} \tau_{13} \\ \tau_{21} \tau_{22} \tau_{23} \\ \tau_{31} \tau_{32} \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$[\tau.v] = \delta_i \delta_j \tau_{ij} . \delta_k v_k$$
$$= [\delta_i \delta_j . \delta_k] \tau_{ij} v_k$$
$$= \delta_i \delta_{jk} \tau_{ij} v_k = \delta_i \tau_{ij} v_j$$

يعني مولفه i ام $[\tau.v]$ عبارت است از:

$$\sum_j \tau_{ij} v_j$$

$$[v.\tau] = \delta_i v_j \tau_{ji}$$

- ضرب تانسوري (*cross*) تانسور و بردار

$$
\begin{aligned}
\{\tau \times v\} &= \delta_i \delta_j \tau_{ij} \times \delta_k v_k \\
&= [\delta_i \delta_j \times \delta_k] \tau_{ij} v_k \\
&= \varepsilon_{jkl} \delta_i \delta_l \tau_{ij} v_k \\
&= \delta_i \delta_l (\varepsilon_{jkl} \tau_{ij} v_k)
\end{aligned}
$$

عمليات ديگر:

$$[\delta.v] = [v.\delta] = v$$

$$[uv.w] = u(v.w)$$

$$[w.uv] = (w.u)v$$

$$(uv : wz) = (uw : vz) = (u.z)(v.w)$$

$$(\tau : uv) = ([\tau.u].v)$$

$$(uv : \tau) = (u.[v.\tau])$$

- مشتق گيري از بردار و تانسور

$$\nabla = \delta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

- گراديان يک ميدان اسکالر

$$\nabla s = \delta_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + \delta_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} = \sum_i \delta_i \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

جابجايي ندارد $\nabla s \neq s\nabla$

شرکت پذير نيست $(\nabla r)s \neq \nabla(rs)$

پخش پذير است $\nabla(r+s) = \nabla r + \nabla s$

- ديورژانس يک ميدان برداري

$$(\nabla . v) = \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \delta_j v_j$$

$$= (\delta_i . \delta_j) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j$$

$$= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

جابجايي ندارد $(\nabla . v) \neq (v . \nabla)$

شرکت پذير نيست $(\nabla . s v) \neq (\nabla s . v)$

پخش پذير است $(\nabla . [v + w]) = (\nabla . v) + (\nabla . w)$

- پيچش يک ميدان برداري

$$[\nabla \times v] = \delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \times \delta_k v_k$$

$$= [\delta_j \times \delta_k] \frac{\partial}{\partial x_j} v_k = \varepsilon_{ijk} \delta_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_k$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

-گراديان يک ميدان برداري

$$\{\nabla v\} = \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_j v_j$$

$$= \delta_i \delta_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

- ديورژانس يک ميدان تانسوري

$$[\nabla.\tau] = \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \delta_j \delta_k \tau_{jk}$$

$$= \delta_i . \delta_j \delta_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk}$$

$$= \delta_{ij} \delta_k \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} = \delta_k \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i} = \delta_k \sum_i \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i}$$

- لاپلاسين يک ميدان اسکالر

$$(\nabla.\nabla s) = \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \delta_j \frac{\partial s}{\partial x_j}$$

$$= (\delta_i . \delta_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_j}$$

$$= \delta_{ij} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2}$$

$$(\nabla.\nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

- لاپلاسين يک ميدان برداري

$$[\nabla.\nabla v] = \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i}.\delta_j \delta_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$= [\delta_i.\delta_j \delta_k] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$= \delta_{ij} \delta_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \delta_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2}$$

- روابط ديفرانسيلي ديگر

$$(\nabla.sv) = (\nabla s.v) + s(\nabla.v)$$

$$(\nabla.[v \times w]) = (w.[\nabla \times v]) - (v.[\nabla \times w])$$

$$[\nabla \times sv] = [\nabla s \times v] + s[\nabla \times v]$$

$$[\nabla.\nabla v] = \nabla(\nabla.v) - [\nabla \times [\nabla \times v]]$$

$$[v.\nabla v] = \frac{1}{2}\nabla(v.v) - [v \times [\nabla \times v]]$$

$$[\nabla.vw] = [v.\nabla w] + w(\nabla.v)$$

$$(s\delta : \nabla v) = s(\nabla.v)$$

$$[\nabla.s\tau] = [\nabla s.\tau] + s[\nabla.\tau]$$

$$\nabla(v.w) = [(\nabla v).w] + [(\nabla w).v]$$