

موازنه اندازه حرکت لایه ای
و
توزیع سرعت در جریان آرام

موازنه اندازه حرکت برای یک لایه نازک سیال:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{شدت ورود} \\ \text{اندازه حرکت جابجایی} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{شدت خروج اندازه} \\ \text{حرکت جابجایی} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{شدت ورود اندازه} \\ \text{حرکت مولکولی} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{شدت خروج اندازه} \\ \text{حرکت مولکولی} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{نیروی وزن} \\ \text{وارد بر سیستم} \end{array} \right\} = 0$$

این حالت ساده شده قانون بقای اندازه حرکت نام دارد.

- در این بخش ما به حرکت سیال در جهت جریان توجه می‌کنیم و روش به این ترتیب است:
- مولفه سرعتی را که از بین نمی‌رود را شناسایی کنید و ببینید تابع کدام متغیر مکانی است.
- موازنه اندازه حرکت را برای یک لایه نازک که عمود بر جهت مکانی مشخص شده است، بنویسید.
- ضخامت لایه نازک را به سمت صفر میل دهید و با توجه به تعریف مشتق معادله دیفرانسیلی برای شار اندازه حرکت به دست آورید.

- این معادله دیفرانسیل را حل کنید تا توزیع شار اندازه حرکت بدست آید.
- با توجه به قانون ویسکوزیته نیوتن و اعمال آن در معادله بدست آمده، یک معادله دیفرانسیل بر حسب سرعت بدست آورید.
- از این معادله انتگرال‌گیری کنید تا توزیع سرعت بدست آید.
- با استفاده از این توزیع سرعت کمیت‌های دیگری را نظیر سرعت حداکثر، سرعت متوسط و نیروی وارد بر سطح محاسبه کنید.

شرایط مرزی که برای محاسبه ثابت ها استفاده می شود:

الف) در سطح تماس سیال – جامد سرعت سیال برابر سرعت سطح جامد است (هم سرعت عمودی و هم سرعت مماسی). در مورد سرعت مماسی به آن شرط عدم لغزش گویند.

ب) در سطح تماس مایع – مایع مولفه های مماسی سرعت در دو طرف سطح پیوسته هستند (شرط عدم لغزش) یعنی سرعت های سیالها در دو طرف مساوی هستند. مولفه های تانسور تنش مولکولی هم همین حالت را دارند (برابری).

پ) در سطح تماس مایع – گاز مولفه های تانسور تنش برشی صفر فرض می شوند. یعنی گرادیان سرعت در بخش گازی بزرگ نیست. این واقعیت یا فرض به دلیل کمتر بودن ویسکوزیته گازها نسبت به مایعات است.

- در تمامی شرط های بالا فرض بر این است که مولکول های سیال از سطح تماس عبور نمی کنند، یعنی جذب فیزیکی و شیمیایی، حل شدن، تبخیر، ذوب یا واکنش شیمیایی در سطح تماس صورت نمی گیرد.

- جریان لایه سرریز Falling film

طول و عرض لایه بسیار بزرگتر از ضخامت آن است و بنابراین می توان از اثرات انتهایی صرف نظر کرد.

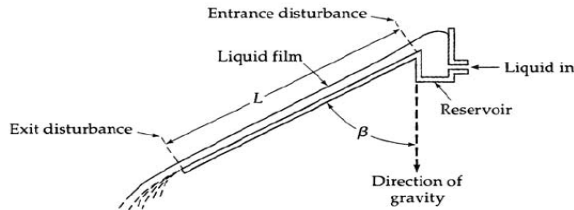
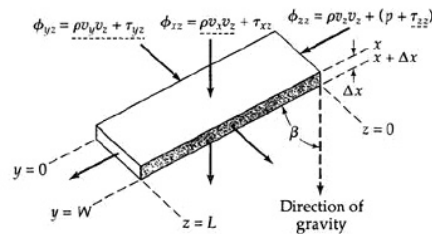
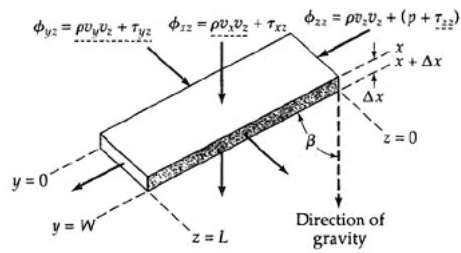


Fig. 2.2-1 Schematic diagram of the falling film experiment, showing end effects.



- موازنه اندازه حرکت را برای جهت z می نویسیم:

- شدت اندازه حرکت جهت z که از سطح z=0 وارد می شود:

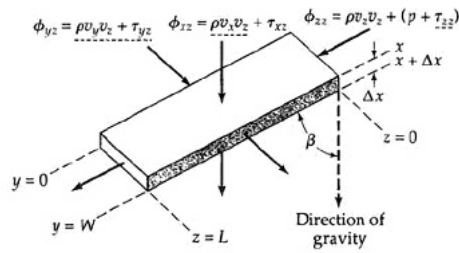
$$(W\Delta x)\phi_{zz}|_{z=0}$$

- شدت اندازه حرکت جهت z که از سطح z=L خارج می

شود:

$$(W\Delta x)\phi_{zz}|_{z=L}$$

- شدت اندازه حرکت جهت z که از سطح x وارد می شود (شود):



- شدت اندازه حرکت جهت z که از سطح $x+\Delta x$ خارج می شود:

$$(LW)\phi_{xz}|_{x+\Delta x}$$

نیروی جاذبه وارد بر سیال در جهت z $(LW\Delta x)(\rho g \cos \beta)$:

یعنی هم انتقال اندازه حرکت جابجایی در نظر گرفته شده و هم مولکول

$$LW(\phi_{xz}|_x - \phi_{xz}|_{x+\Delta x}) + W\Delta x(\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}) + (LW\Delta x)(\rho g \cos \beta) = 0$$

تقسیم بر $LW\Delta x$ و بعد $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim \left(\frac{\phi_{xz}|_{x+\Delta x} - \phi_{xz}|_x}{\Delta x} \right) - \frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} = \rho g \cos \beta$$

$$\frac{\partial \phi_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{L}(\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}) = \rho g \cos \beta$$

$$\phi_{xz} = \tau_{xz} + \rho V_x V_z = -\mu \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\phi_{zz} = p + \tau_{zz} + \rho V_z V_z = p - 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} + \rho V_z V_z$$

بنابراین وقتی ϕ ها از هم کم می شوند این جملات همدیگر را خنثی می کنند.

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos \beta$$

$$\Rightarrow \tau_{xz} = (\rho g \cos \beta)x + C_1$$

B.C.1: $x = 0$, $\tau_{xz} = 0$

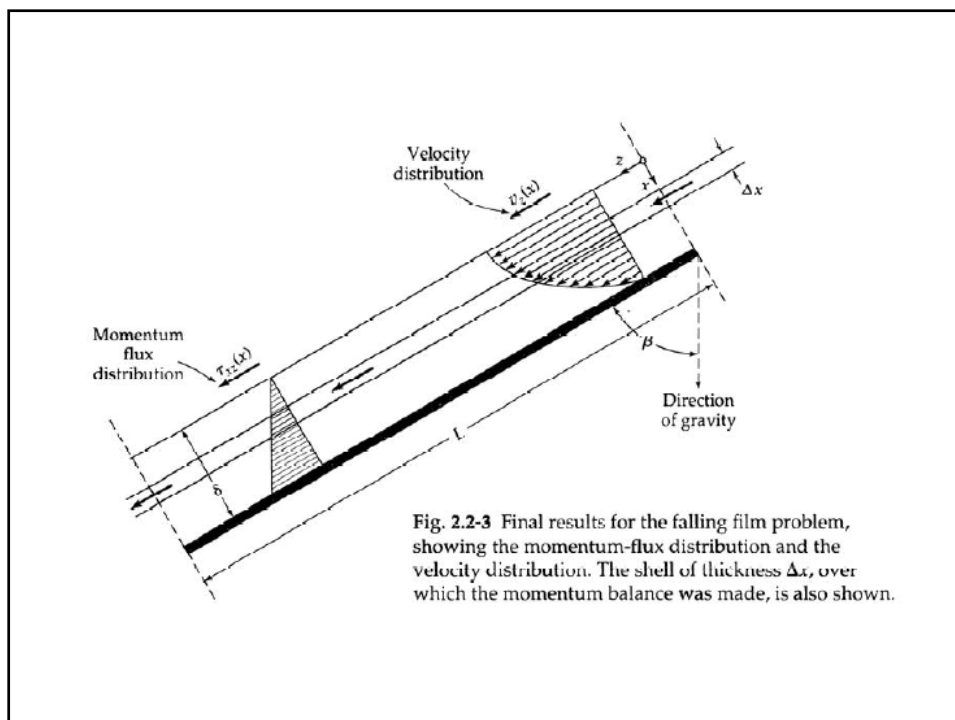
$$\Rightarrow \tau_{xz} = (\rho g \cos \beta)x = -\mu \frac{dV_z}{dx} \Rightarrow V_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

$$\frac{dV_z}{dx} = -\left(\frac{\rho g \cos \beta}{\mu} \right)x$$

$$V_z = -\left(\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} \right)x^2 + C_2$$

B.C.2: $x = \delta$, $V_z = 0$

$$C_2 = \left(\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} \right)\delta^2$$



(الف) سرعت حداکثر

$$V_{z,\max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu}$$

(ب) سرعت متوسط

$$\begin{aligned} \langle V_z \rangle &= \frac{\int_0^w \int_0^\delta V_z dx dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx dy} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta V_z dx \\ &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] d\left(\frac{x}{\delta} \right) \\ &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu} = \frac{2}{3} V_{z,\max} \end{aligned}$$

(پ) شدت جریان جرمی

$$w = \int_0^w \int_0^\delta \rho V_z dx dy = \rho W \delta \langle V_z \rangle = \frac{\rho^2 g W \delta^3 \cos \beta}{3\mu}$$

(ت) ضخامت لایه

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu \langle V_z \rangle}{\rho g \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu w}{\rho^2 g W \cos \beta}}$$

ث) نیرویی که در جهت z بر صفحه ($x=\delta$) وارد می شود.

$$F_z = \int_0^L \int_0^W \tau_{xz}|_{x=\delta} dy dz = \int_0^L \int_0^W \left(-\mu \frac{dV_z}{dx} \Big|_{x=\delta} \right) dy dz$$

$$= (LW)(-\mu) \left(-\frac{\rho g \delta \cos \beta}{\mu} \right) = \rho g \delta LW \cos \beta$$

این در حقیقت مولفه وزن لایه سیال در جهت z است.

سه نوع رژیم جریان در این لایه قابل تشخیص است:

$$Re = \frac{4\delta \langle V_z \rangle \rho}{\mu}$$

Re < 20 : جریان آرام

20 < Re < 1500 : جریان آرام با تلاطم مشخص

1500 < Re : جریان آشفته

این آنالیز فقط برای Re < 20 یعنی جریان آرام اعتبار دارد.

جریان در لوله مدور:
 ویسکوزیته μ ثابت
 چگالی ρ ثابت
 طول لوله L
 شعاع لوله R
 از اثر انتهایی صرف نظر می گردد
 چون $L \gg R$

بنابراین

$$V_z = V_z(r) , V_r = V_\theta = 0 , p = p(z)$$

- شدت ورود اندازه حرکت جهت z در سطح $z=0$

$$(2\pi r \Delta r) \phi_{zz} \Big|_{z=0}$$

- شدت خروج اندازه حرکت جهت z در سطح $z=L$

$$(2\pi r \Delta r) \phi_{zz} \Big|_{z=L}$$

- شدت ورود اندازه حرکت جهت z در سطح r

$$(2\pi r L) \phi_{rz} \Big|_r$$

$\phi_{rz}|_{z=0}$ = flux of z-momentum in at $z=0$
 $\phi_{rz}|_{z=L}$ = flux of z-momentum out at $z=L$
 $\phi_{rz}|_{r+\Delta r}$ = flux of z-momentum out at $r+\Delta r$
 $\phi_{rz}|_r$ = flux of z-momentum in at r
 Tube wall
 Shell of thickness Δr over which momentum balance is made
 L
 R
 r
 z
 $\phi_{rz}|_{z=L}$ = flux of z-momentum out at $z=L$

- شدت خروج اندازه حرکت جهت z در سطح $r+\Delta r$

$$(2\pi(r + \Delta r)L)\phi_{rz}|_{r+\Delta r}$$

- نیروی جاذبه وارد شونده به لایه در جهت z

$$(2\pi r \Delta r L)\rho g$$

موازنه اندازه حرکت :

$$(2\pi r L \phi_{rz})|_r - (2\pi r L \phi_{rz})|_{r+\Delta r} + (2\pi r \Delta r)\phi_{zz}|_{z=0} - (2\pi r \Delta r)\phi_{zz}|_{z=L} + (2\pi r \Delta r L)\rho g = 0$$

$$\div (2\pi L \Delta r) \Rightarrow$$

$$\frac{(r\phi_{rz})|_{r+\Delta r} - (r\phi_{rz})|_r}{\Delta r} = \left(\frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} + \rho g \right) r$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r\phi_{rz}) = \left(\frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} + \rho g \right) r$$

$$\phi_{rz} = \tau_{rz} + \rho V_r V_z = -\mu \frac{\partial V_z}{\partial r} + \rho V_r V_z$$

$$\phi_{zz} = p + \tau_{zz} + \rho V_z V_z = p - 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} + \rho V_z V_z$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) &= \left[\frac{(p_0 - \rho g \times 0) - (p_L - \rho g L)}{L} \right] r \\ &= \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \end{aligned}$$

$$P = p - \rho g z \quad \text{فشار پیزو متریک}$$

$$\Rightarrow \tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r}$$

انتگرال

$$B.C.1: r = 0, \tau_{rz} = \text{finite} \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r$$

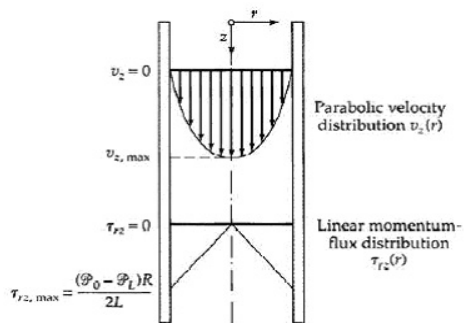
$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dV_z}{dr} \Rightarrow \frac{dV_z}{dr} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} \right) r$$

$$\Rightarrow V_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} \right) r^2 + C_2$$

انتگرال

$$B.C.2: r = R, V_z = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L}$$

$$\Rightarrow V_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$



الف) بیشترین سرعت

$$r = 0 \Rightarrow V_{z,max} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L}$$

ب) سرعت متوسط

$$\langle V_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R V_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{8\mu L} = \frac{1}{2} V_{z,max}$$

پ) شدت جریان جرمی

معادله Hagen & Poiseuille

$$W = \rho \cdot \pi R^2 \cdot \langle V_z \rangle = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4 \rho}{8\mu L}$$

بر اساس رابطه هیگن - پوازویی می توان ویسکوزیته را با یک لوله موئینه اندازه گرفت.

ت) نیروی در جهت Z که از سیال بر سطح داخلی لوله وارد می شود:

$$\begin{aligned} F_z &= (2\pi RL) \tau_{rz}|_{r=R} = (2\pi RL) \left(-\mu \frac{dV_z}{dr} \Big|_{r=R} \right) \\ &= \pi R^2 (P_0 - P_L) \\ &= \pi R^2 (p_0 - p_L) + \pi R^2 L \rho g \end{aligned}$$

فرض هایی که برای حل این مسئله کردیم عبارتند از:

- جریان آرام است یعنی $Re < 2100$
 - چگالی ثابت است (سیال تراکم ناپذیر)
 - ویسکوزیته ثابت است (سیال نیوتنی)
 - جریان پایا است (Steady)
 - اثرات انتهایی قابل صرف نظر کردن هستند.
- طول ورود $Le/D = 0.035 Re$

نکته: فرض دیگر این است که سیال یک فاز پیوسته است. این فرض فقط برای گازهای بسیار رقیق ممکن است درست نباشد که در آن پویش آزاد میانگین قابل مقایسه با قطر لوله باشد.

- از این فرض برای $V_z|_{r=R} = 0$ استفاده شده است.

- جریان در لوله دو جداره
 با همان فرضیات قبل:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right)r$$

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right)r + \frac{C_1}{r}$$

$$-\mu \frac{dV_z}{dr} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right)r + \frac{C_1}{r}$$

$$\frac{dV_z}{dr} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right)r - \frac{C_1}{\mu r} \Rightarrow V_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)r^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2$$

$$\Rightarrow V_z = -\left(\frac{P_0 - P_L}{4\mu L}\right)r^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2$$

B.C.1: $r = kR, V_z = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{(P_0 - P_L)k^2 R^2}{4\mu L} - \frac{C_1}{\mu} \ln kR + C_2$

B.C.2: $r = R, V_z = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} - \frac{C_1}{\mu} \ln R + C_2$

$$\Rightarrow V_z = -\frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right]$$

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1 - k^2}{2 \ln(1/k)} \left(\frac{R}{r}\right) \right]$$

الف) حداکثر سرعت در $r=\lambda R$ یعنی جایی که $\tau_{rz}=0$ است.

$$0 = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[\lambda - \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)}$$

- حداکثر سرعت

$$V_{z,\max} = V_z \Big|_{r=\lambda R} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} [1 - \lambda^2(1 - \ln \lambda^2)]$$

ب) سرعت متوسط

$$\langle V_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R V_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R r dr d\theta} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{8\mu L} \left[\frac{1-k^4}{1-k^2} - \frac{1-k^2}{\ln(1/k)} \right]$$

پ) شدت جریان جرمی

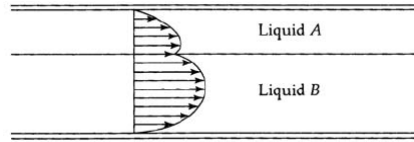
$$w = \pi R^2 (1-k^2) \rho \langle V_z \rangle = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4 \rho}{8\mu L} \left[1 - k^4 - \frac{(1-k^2)^2}{\ln(1/k)} \right]$$

ت) نیروی وارده از طرف سیال بر جداره جامد

$$\begin{aligned} F_z &= (2\pi kRL)(-\tau_{rz}|_{r=kR}) + (2\pi RL)(+\tau_{rz}|_{r=R}) \\ &= \pi R^2 (1-k^2) (P_0 - P_L) \end{aligned}$$

$$\text{Re} = 2R(1-k) \langle V_z \rangle \frac{\rho}{\mu} < 2000 \quad \text{فقط برای}$$

- جریان دو سیال غیر قابل امتزاج همجوار



$$\rho W \Delta x V_z^2 \Big|_{z=0} - \rho W \Delta x V_z^2 \Big|_{z=L}$$

$$+ (W \Delta x) p_0 - (W \Delta x) p_L$$

$$+ (LW) \tau_{xz} \Big|_x - (LW) \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} = 0$$

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{P_0 - P_L}{L} \qquad \frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{dP}{dz}$$

این معادله برای هر دو لایه سیال صدق می کند:

$$\tau_{xz}^I = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) x + C_1 \qquad \tau_{xz}^{II} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) x + C_1^{II}$$

$$B.C.1: \text{ at } x=0, \quad \tau_{xz}^I = \tau_{xz}^{II} \Rightarrow C^I = C^{II} = C_1$$

$$\Rightarrow -\mu^I \frac{dV_z^I}{dx} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) x + C_1 \Rightarrow V_z^I = - \left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu^I L} \right) x^2 - \frac{C_1}{\mu^I} x + C_2^I$$

$$-\mu^{II} \frac{dV_z^{II}}{dx} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) x + C_1 \quad V_z^{II} = - \left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu^{II} L} \right) x^2 - \frac{C_1}{\mu^{II}} x + C_2^{II}$$

$$B.C.2: x=0, V_z^I = V_z^{II} \Rightarrow C_2^I = C_2^{II} = C_2$$

$$B.C.3: x=-b, V_z^I = 0 \Rightarrow -\left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^I L}\right)b^2 + \frac{C_1}{\mu^I}b + C_2$$

$$B.C.4: x=+b, V_z^{II} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{p_0 - p_L}{2\mu^{II} L}\right)b^2 - \frac{C_1}{\mu^{II}}b + C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{(p_0 - p_L)b}{2L} \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right)$$

$$C_2 = +\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} \left(\frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}}\right)$$

به همین ترتیب برای شکل زیر داریم:

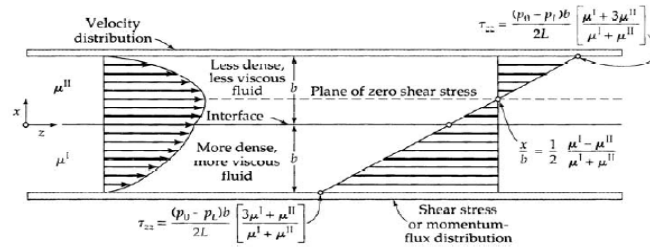


Fig. 2.5-1 Flow of two immiscible fluids between a pair of horizontal plates under the influence of a pressure gradient.

$$\tau_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)}{L} b \left[\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) \right]$$

$$V_z^I = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} \left[\left(\frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}}\right) + \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) \left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right]$$

$$V_z^{II} = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{II} L} \left[\left(\frac{2\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) + \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) \left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right]$$

$$\langle V_z^I \rangle = \frac{1}{b} \int_{-b}^0 V_z^I dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^I L} \left(\frac{7\mu^I + \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right)$$

$$\langle V_z^{II} \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b V_z^{II} dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^{II} L} \left(\frac{\mu^I + 7\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right)$$

- جریان خزنده اطراف کره

جریان بسیار آرام است که به آن جریان استوکس هم می گویند.

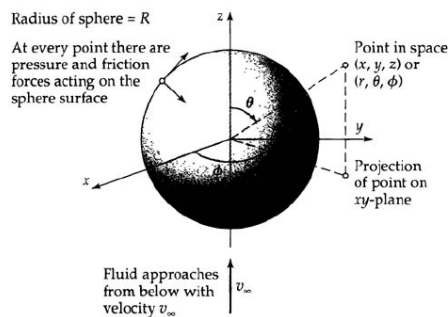


Fig. 2.6-1 Sphere of radius R around which a fluid is flowing. The coordinates r , θ , and ϕ are shown. For more information on spherical coordinates, see Fig. A.8-2.

$$Re = \rho V_\infty \frac{D}{\mu} < 0.1$$

حل معادله نویه - استوکس برای این جریان در فصول بعدی ارائه می شود.

$$V_r = V_\infty \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta$$

$$V_\theta = V_\infty \left[-1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta$$

$$V_\phi = 0$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3}{2} \frac{\mu V_\infty}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\tau_{rr} = -2\tau_{\theta\theta} = -2\tau_{\phi\phi} = \frac{3\mu V_\infty}{R} \left[-\left(\frac{R}{r} \right)^2 + \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] \cos \theta$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \frac{3}{2} \frac{\mu V_\infty}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \sin \theta$$

$$-(p + \tau_{rr})|_{r=R} \quad \text{نیروی عمودی وارد بر سطح}$$

$$-(p + \tau_{rr})|_{r=R} \cos \theta \quad \text{مولفه جهت Z}$$

$$F^{(n)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [-(p + \tau_{rr})|_{r=R} \cos \theta] R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\tau_{rr}|_{r=R} = 0, \quad p|_{r=R} = p_0 - \rho g R \cos \theta - \frac{3}{2} \frac{\mu V_\infty}{R} \cos \theta$$

$$\Rightarrow F^{(n)} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 2\pi \mu R V_\infty$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} \quad \text{تنش برش وارد بر سطح در جهت } \theta$$

$$(\tau_{r\theta}|_{r=R}) \sin \theta \quad \text{در جهت } z$$

$$F^{(t)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\mu V_\infty}{R} \sin \theta$$

$$\Rightarrow F^{(t)} = 4\pi \mu R V_\infty$$

$$= F^{(t)} + F^{(n)} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 2\pi\mu R V_\infty + 4\pi\mu R V_\infty \text{ نیروی استوکس}$$

$$F = F_b + F_k = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R V_\infty$$

$$F_k = 6\pi\mu R V_\infty \quad \text{قانون استوکس}$$

$$\text{Re} < 0.1$$

- سقوط آزاد یک ذره کوچک

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_s g = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R V_t$$

$$V_t = \frac{2R^2(\rho_s - \rho)g}{9\mu}$$

$$C_D = \frac{F_k}{\frac{1}{2} \rho V^2 \cdot A} = \frac{6\pi\mu R V_t}{\frac{1}{2} \rho V_t^2 \cdot \pi R^2} = \frac{24\mu}{\rho V_t D} = \frac{24}{\text{Re}}$$

Re < 0.1