Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۶ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = 0$ با شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ کدام است.

جواب: $y = \frac{1}{2}\sin 2x$

مثال ۶ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 5y = 0$ را بدست آورید.

$t^2 - 4t + 5 = 0 \qquad t_{1,2} = 2 \pm i$

$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$$\begin{cases} c_1 = A\sin\alpha \\ c_2 = A\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow y = e^{2x}(A\sin\alpha\cos x + A\cos\alpha\sin x)$$

$\Rightarrow y = A e^{2x}\sin(x+\alpha)$

مثال ۶ معادله دسته منحنی های گذرنده از مبدا مختصات با معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 5y = 0$ کدام است.

$y = e^{2x}(B\cos x + A\sin x) \qquad (x,y) = (0,0) \Rightarrow B = 0$

$y = A e^{2x}\sin x$

مثال ۶ معادله $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ دارای جواب

۱) $y = e^{ix}$ ۲) $y = c\cos x$ ۳) $y = c\sin x$ ۴) گزینه ۲و۳

$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i$

$y = c_1\cos x + c_2\sin x \qquad \begin{cases} c_1 = 0 & y = c\sin x \\ c_2 = 0 & y = c\cos x \end{cases}$

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject: جلسه ششم
Year. Month. Date. ( )

معادلات خطی همگن از مرتبه دلخواه با ضرایب ثابت :

یک معادلهٔ خطی همگن از مرتبهٔ دلخواه n به صورت زیر باشد .

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = 0$$

اگر ضرایب همگی ثابت باشند $f_1(x), f_2(x), \cdots f_n(x)$
معادله به صورت زیر در می آیند .

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

برای هر یک از این معادله
ابتدا معادلهٔ مشخصه را تشکیل داده ریشه هایش را یافته و سپس از حالات زیر استفاده می کنیم.

معادلهٔ مشخصه دارای n ریشه حقیقی و متمایز $t_1, t_2 \cdots t_n$ می باشد در اینصورت

جواب عمومی معادله به صورت $y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x} + \cdots + c_n e^{t_n x}$

مثال ٤ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل زیر کدام است ؟

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + 2t = 0 \rightarrow t(\underbrace{1t^2 - 3t + 2}_{a+b+c=0}) = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \\ t_3 = 2 \end{cases}$$

$$y = c_1 e^0 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$

$t^2(t-2) - (t-2) = 0 \longrightarrow (t-2)(t^2-1) = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \\ t_3 = -1 \end{cases}$

$y = c_1 e^{x}\ c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}$

حالت دوم: معادلهٔ مشخصه دارای n ریشهٔ حقیقی است که m تای آن مساوی هستند

$t_1 = t_2 = \cdots = t_m$

در اینصورت $y_1 = e^{t_1 x}$ ، $y_2 = x e^{t_1 x}$ ... $y_m = x^{m-1} e^{t_1 x}$ و y_{m+1} ... y_n

مانند حالت اول هستند

مثال ۶: جواب عمومی معادله $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ کدام است؟

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \longrightarrow (t-1)^3 = 0 \longrightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 1$

$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x}$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b \pm 3ab^2 \pm b^3$$

* اگر y_1 و y_2 جواب معادله بوده هر ترکیب خطی از آنها نیز جواب معادله است.

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

مثال ۴ جواب معادله $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ کدام است.

$t^4 - 2t^2 + 1 = 0$

$(t^2-1)^2 = 0$

$(t-1)^2 (t+1)^2 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_3 = t_4 = -1 \end{cases}$

$e^x, \ xe^x, \ xe^{-x}$

مثال ۵ معادله دیفرانسیلی که توابع $(\underbrace{1, x}, e^{3x}, xe^{3x})$ تشکیل دهنده مجموع جوابهای پایه آن باشند کدام است؟

(0) ریشه مضاعف

〃 (3)

$y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 0$

$y^{(4)} - 4y''' + 9y'' = 0$

$y^{(4)} - 6y''' + 12y'' = 0$

$2y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 0$

$t^2(t-3)^2 = 0 \rightarrow t^2(t^2 - 6t + 9) = 0$

$t^4 - 6t^3 + 9t^2 = 0 \qquad y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 0$

حالت سوم: اگر معادله مفسر دارای ریشه مختلط هم باشد مثلاً

$t_1 = p + iq$

$t_2 = p - iq$

و بقیه ریشه ها حقیقی باشند در جواب عمومی به جای $c_1y_1 + c_2y_2$ عبارت

$y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$

را قرار می دهیم.

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

★ مثال ٤ معادلهٔ مشخصه $y^{(4)} + y = 0$ را بدست آورید.

$$t^4 + 1 = 0 \rightarrow t^2 = i \qquad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \tan^{-1}\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$t_k = \cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}$$

یادآوری

$$Z = x + iy$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$$

$k = 0, 1$

$$t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$$

فرمول دموآور

$$z = r^n(\cos n\theta + \sin n\theta) = r^n\,\mathrm{cis}\,n\theta$$

ضریب به توان n ، n کمان

حالت چهارم:

معادلهٔ مشخصه دارای ریشه مختلط تکراری است.

فرض کنید پس از تجزیهٔ معادلهٔ مشخصه قسمتی که ریشه مختلط دارد تکراری باشد یعنی به به توان m باشد در اینصورت $2m$ جواب مربوط به این قسمت به صورت زیر خواهد بود

$$C_1 e^{px}\cos qx, \quad C_2 e^{px}\sin qx$$

$$C_3 x e^{px}\cos qx, \quad C_4 x e^{px}\sin qx$$

http://www.ab-rafiee.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$c_5 x^2 e^{px} \cos qx \ , \ c_6 x^2 e^{px} \sin qx$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$c_{2m-1} x^{m-1} e^{px} \cos qx \ , \ c_{2m} x^{m-1} e^{px} \sin qx$

و آن را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$e^{px}\left(c_1 + c_3 + \cdots + c_{2m-1} x^{m-1}\right)\cos qx + e^{px}\left(c_2 + c_4 x + \cdots + c_{2m} x^{m-1}\right)\sin qx$$

مثال ۴: جواب عمومی معادلهٔ زیر کدام است.

$$y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$$

$$t^6 + t^4 - t^2 - 1 = 0 \rightarrow t^4(t^2+1) - (t^2+1) = 0$$

$$(t^2+1)(t^4-1) = 0$$

$t_1 = t_2 = 1$, $\cancel{t_3 = t_4 = i}$, $\cancel{t_5 = t_6 = -i}$

$$t^4 - 1 = 0 \rightarrow (t^2-1)(t^2+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \ , \ t_2 = -1 \\ t_3 = i \ , \ t_4 = -i \end{cases}$$

$$t^2 + 1 = 0 \rightarrow t^2 = -1 \rightarrow t = \pm\sqrt{-1} \rightarrow t_5 = t_6 = \pm i$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + (c_3 + c_4 x)\cos x + (c_5 + c_6 x)\sin x$$

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: اگر $y_1, y_2, \ldots, y_n$ جوابهای معادلهٔ خطی زیر باشند هر ترکیب خطی آنها

نیز یک جواب معادله خواهد بود. $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$

و شرط اینکه این جواب، جواب عمومی معادله باشد آن است که $y_1 \ldots y_n$

مستقل خطی باشند. $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

نکته ۴: شرط استقلال خطی جواب ها اگر توابع $y_1, \ldots, y_n$ روی

فاصلهٔ $[a, b]$ مستقل خطی باشند آن‌گاه روی این فاصله دترمینان زیر مخالف

صفر خواهد بود.

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

نکته ۶: $W(x)$ را رونسکین (wronskien) جوابهای $y_1, y_2, \ldots, y_n$ می‌نامند.

y_1, y_2 مستقل خطی هستند هرگاه $\frac{y_1}{y_2} \neq C$ (مقدار ثابت) باشد.

http://www.ab-rafiee.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ٤: رونسکین 2 ، $\cos x$ ، $\cos 2x$ کدام است.

✓ 1) $-8\sin^3 x$ 2) $\sin^3 x$ 3) $-8\cos^3 x$ 4) $\cos^3 x$

$$W(x)=\begin{vmatrix} 2 & \cos x & \cos 2x \\ 0 & -\sin x & -2\sin 2x \\ 0 & -\cos x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = -8\sin^3 x$$

مثال ٤: رونسکین جوابهای معادله $y''-3y'+2y=0$ کدام است.

1) e^x 2) e^{2x} 3) e^{3x} 4) e^{4x}

$$t^2-3t+2=0 \rightarrow \begin{cases} t_1=1 \\ t_2=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=e^x \\ y_2=e^{2x} \end{cases}$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}$$

$$\sin nx = 2\sin\frac{nx}{2}\cos n\frac{x}{2}$$

مثال ٤: در فضای . کدام یک از زیرمجموعه های زیر وابسته است.

1) $\{1, e^x, e^{2x}\}$ 2) $\{\sin x, \cos x\}$ 3) $\{1, \cos 2x, \sin^2 x\}$

4) $\{e^x, xe^x\}$

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$W(x) = ۲ e^{۳x} \neq ۰$ مستقل خطی

$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq ۰$ مقدار ثابت — مستقل خطی

$W(x) \neq ۰$ $\frac{x e^x}{e^x} = x \neq 0$ مستقل خطی

* سؤال ۶ کدام گزینه جواب از معادله دیفرانسیل $W(e^x, y) = e^x$ می باشد.

$$W(e^x, y) = \begin{vmatrix} e^x & y \\ e^x & y' \end{vmatrix} = e^x$$

$$y' e^x - y e^x = e^x$$

$$y' - y = 1 \longrightarrow dy = (1+y)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int dx \longrightarrow \ln(1+y) = x$$

$$1 + y = e^{cx} \longrightarrow y = e^{cx} - 1$$

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject جلسه 7
Date ۹۲/۸/۱۹

معادلات خطی غیرهمگن مرتبه دوم:

هر معادله دیفرانسیل بصورت $y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = f_3(x)$ را یک معادله خطی غیرهمگن مرتبه دوم می نامند.

روش حل: جواب عمومی این معادله بصورت مجموعه دو جواب $y_h(x)$ و $y_p(x)$ می باشد که $y_h(x)$ جواب عمومی معادله همگن بشرط $f_3(x)=0$ می باشد و $y_p(x)$ یک جواب ساده بدون پارامتر معادله می باشد. از این دو جواب عمومی معادله بصورت زیر است.

$$y = y_h + y_p$$

روش ضرایب نامعین برای بدست آوردن جواب خصوصی معادله غیرهمگن با ضرایب ثابت:

برای بدست آوردن جواب خصوصی معادله $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ با استفاده از این روش سعی می کنیم $y(p)$ را مشابه با $f(x)$ انتخاب کنیم. برای این کار ابتدا ریشه های معادله مشخصه را بدست آورده سپس از حالات زیر استفاده می کنیم.

حالت اول: اگر $f(x)$ بصورت یک چند جمله ای درجه n باشد جواب خصوصی را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$y_p = x^m \quad (\text{یک چند جمله ای کامل از درجه } n)$$

که در آن m تعداد ریشه های صفر معادله مشخصه است.

http://www.ab-rafiee.com

Subject

Date

تذکر: این حالت برای مرتبه دلخواه n هم صادق است.

مثال:

جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ کدام است؟

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$$

$$y_h = Ae^{x} + Be^{2x}$$

$$y_p = A_1 x + A_2 \qquad y'_p = A_1 \ , \ y''_p = 0$$

در معادله اصلی قرار میدهیم:

$$0 - 3A_1 + 2A_1 x + 2A_2 = 2x - 3$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A_1 = 2 \Rightarrow A_1 = 1 \\ -3A_1 + 2A_2 = -3 \Rightarrow A_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$y_p = x \Rightarrow y = y_h + y_p \Rightarrow Ae^{x} + Be^{2x} + x$$

مثال:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = 8x^2$ چیست؟

1) $t^2 + 4 = 0 \rightarrow t^2 = -4 \Rightarrow t = \pm 2i$

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

2) $y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3 \Rightarrow y'_p = 2A_1 x + A_2 \ , \ y''_p = 2A_1$

در معادله اصلی قرار میدهیم:

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

$$2A_1 + 4A_1x^2 + 4A_2x + 4A_3 = 8x^2$$

$$\begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = -1 \end{cases} \longrightarrow y_p = 2x^2 - 1$$

3) $y = y_h + y_p \rightarrow A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 1$

مثال:

جواب عمومی معادله $y'' - 4y' = -4$ را بدست آورید.

راه‌حل $\begin{cases} y_p = Ax \\ \end{cases}$

جواب $\begin{cases} y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{4x} + x \end{cases}$

مثال: یک جواب معادله $y'' + y = x^2$ را بدست آورید.

راه‌حل: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

جواب $y = y_h + y_p \rightarrow y = c_1\cos x + c_2\sin x + x^2 - 2$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject

Date

مثال:

جواب خصوصی معادله را بیابید!

$$3\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-y=x^2$$

معادله مشخصه آن:

$$3t^2-2t-1=0$$

$$y_p=Ax^2+Bx+C \quad , \quad y'_p=2Ax+B \quad , \quad y''_p=2A$$

$$3(2A)-2(2Ax+B)-Ax^2-Bx-C=x^2$$

$$\begin{cases} A=-1 \\ B=4 \\ C=-14 \end{cases} \longrightarrow y_p=-x^2+4x-14$$

مثال:

معادله $y''+y=x^2+2$ با شرایط $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ مفروض است، $y(\pi)=?$

راه حل:

1) $t^2+1=0 \rightarrow t^2=-1 \quad t=\pm i$

$$y_h=c_1\cos x+c_2\sin x$$

2) $y_p=Ax^2+Bx+C \quad , \quad y'=2Ax+B \quad , \quad y''=2A$

در معادله اصلی

$$2A+Ax^2+Bx+C=x^2+2$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ 2A+C=2 \rightarrow C=0 \end{cases} \Longrightarrow y_p=x^2$$

P4PCO

Subject
Date

تکلیف – تمام مسائل از درس کتاب اصلی نیست – راه حل المثنی

3) $y = y_h + y_p \Rightarrow c_1 \cancel{\cos} x + c_2 \sin x + x^2$

$y(0) = 0 \longrightarrow c_1 = 0$

$y' = c_2 \cos x + 2x$

$y'(0) = 1 \longrightarrow c_2 = 1$

$\longrightarrow y = x^2 + \sin x$

حالت دوم:

اگر $f(x)$ به صورت $M(x)e^{px}$ که در آن $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است باشد، در این صورت

y_p را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$y_p = x^m e^{p(x)}$ (یک چندجمله‌ای از درجه n)

که m تعداد ریشه‌های مساوی p معادله مشخصه باشد.

تذکر: این حالت برای درجه دلخواه n نیز برقرار است.

مثال:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

// $t^2-4t+3=0 \quad \begin{cases} t_1=1 \\ t_2=c/a=3 \end{cases} \rightarrow y = Ae^{x}+Be^{3x}$

ریشه معادله مشخصه است: $t=3$

$y_P = Cxe^{3x} \qquad y'_P = C(1e^{3x}+3xe^{3x}) \qquad y''_P =$

با جایگزینی در معادله اصلی خواهیم داشت:

$y = y_h + y_P \longrightarrow Ae^{x}+Be^{3x}+\frac{x}{2}e^{3x}$

مثال:

جواب خصوصی معادله زیر را بدست آورید.

$y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$

$t^3+3t^2+3t+1=0 \longrightarrow (t+1)^3=0 \longrightarrow t_1,t_2,t_3=-1$

$y_p = \underbrace{(Ax+B)}_{\text{درجه چندجمله‌ای فرض شده}}\, x^{3} e^{-x} \longrightarrow P(x)$

تعداد ریشه‌های تکراری معادله مشخصه

مثال:

کدام گزینه جواب خصوصی معادله زیر می‌باشد.

$y''-2y'+y = 3e^{x}$

// $t^2-2t+1=0 \longrightarrow \begin{cases} t_1=1 \\ t_2=\frac{c}{a}=1 \end{cases} \longrightarrow y_h = C_1e^{x}+C_2xe^{x}$

PAPCO

2) $y_p = Ax^2e^x \qquad y'_p = 2Axe^x + Ax^2e^x$

$y''_p = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x$

مقادیر بالا را در معادله اصلی قرار دهیم:

$A = 3/2 \rightarrow y_p = \frac{3}{2}x^2e^x \rightarrow 2y_p = 3x^2e^x$

مثال:

جواب خصوصی معادله زیر چیست!

$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$

راه حل: $y_p = A_1x + A_2 + A_3e^{3x}$

جواب: $y = 2x + 3 + 1/2\, e^{3x}$

مثال:

یک جواب خاص معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$y'' - y' - 6y = e^{3x}$

راه حل: $y_p = Axe^{3x}$

جواب: $y = 1/5\, xe^{3x}$

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

حالت سوم:

اگر $f(x)$ به صورت $m(x)\cos qx + N(x)\sin qx$ باشد و $m(x)$ و $N(x)$ چندجمله‌ای‌هایی باشند آن گاه جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$y_p = x^m \left[R(x)\cos qx + S(x)\sin qx \right]$$

که در آن m تعداد ریشه‌های qi آن معادله مشخصه و $R(x)$ و $S(x)$ چندجمله‌ای‌هایی از درجه n می‌باشند و n بزرگترین درجه بین $m(x)$ و $n(x)$ است.

تذکر: این حالت برای مرتبه دیگر هم صادق است.

مثال:

بدون در نظر گرفتن ثابت‌های A و B جواب خصوصی این معادله را بدست آورید.

$$y^{(4)} + y'' = \cos x$$

$$t^4 + t^2 = 0 \longrightarrow t^2(t^2+1) = 0 \Rightarrow t=0$$ ریشه مضاعف $t = \pm i$

i ریشه‌های معادله مشخصه است:

$$y = x(A\cos x + B\sin x)$$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject

Date

مثال:

یک جواب خصوصی معادله ناهمگن $y''+4y = x\sin 2x$ را بیابید؟

1/ $t^2+4=0 \longrightarrow t^2=-4 \longrightarrow t=\pm 2i$

2/ $y_p = x\left[(A\cdot x + A_1)\cos 2x + (B\cdot x + B_1)\sin 2x\right]$

$= \left[(A x^2 + A_1 x)\cos 2x + (B\cdot x^2 + B_1 x)\sin 2x\right]$

مثال:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بنویسید:

$$\frac{d^4(y)}{dx^4} - y = x\sin x$$

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

حالت چهارم:

اگر $f(x)$ به صورت $e^{p(x)}\left[M(x)\cos qx + N(x)\sin qx\right]$

و $M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله‌ای باشند در این صورت جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$y_p = x^m e^{p(x)}\left[R(x)\cos qx + S(x)\sin qx\right]$$

که در آن m تعداد ریشه‌های $p+iq$ معادله مشخصه و $R(x)$، $S(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه n

هستند، n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است.

تذکر: این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

مثال:

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - 2y' + y = e^x \sin x$$

جواب: $y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \sin x$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject

Date

مثال:

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر چیست؟

$$y''' + y'' = e^{x}\cos x$$

جواب $\quad y_p = e^{x}\left(-\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right)$

روش عمومی برای حل معادلات خطی غیرهمگن (روش تغییر پارامتر):

فرض کنیم در معادله دیفرانسیل $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$ ، f_1 , f_2 , f_3 در یک فاصله پیوسته باشند و جواب عمومی معادله همگن متناظر نیز موجود باشد یعنی داشته باشیم

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$$

جواب خصوصی y_p را از رابطه زیر می‌توان بدست آورد.

$$y_p = -y_1\int \frac{f_3(x)\,y_2}{w(x)}\,dx + y_2\int \frac{f_3(x)\,y_1}{w(x)}\,dx$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

تذکر: این روش برای معادلات خطی غیرهمگن با مرتبه دلخواه نیز صادق است.

نکته: اگر معادله با ضرایب ثابت باشد وقتی از این روش استفاده کنیم که تابع طرف دوم جزء چهار حالت بیان شده در روش ضرایب نامعین نباشد.

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

مثال:

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y'' + y = \cancel{\cos x}\ \csc x$$

1) $t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm i$

$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

2) $y_p = -\cos x \int (\sin x)(\csc x)\,dx + \sin x \int \cos x \underbrace{\csc x}_{\frac{1}{\sin x}}\,dx$

$= -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$

مثال:

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$y'' + y = \sec x$ در $x = \pi/2$

الف) $\pi/2$ ✓

ب) 0

ج) ∞

د) 1

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

21) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

جواب: $y_p = x e^x \ln x - e^x$

مثال:

جواب خصوصی معادله $y'' + y = \tan x$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

الف) $(\pi/2, 0)$ $\qquad$ $y_p(\pi/2) = 0$

ب) $(\pi/2, 1)$

ج) $(\pi/2, -1)$

د) هیچکدام

مثال:

جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ کدام است؟

جواب: $y = y_h + y_p \longrightarrow (A + Bx + x\ln x - x)e^{2x}$

http://www.ab-rafiee.com

Subject جلسه 8
Date 92/8/26

روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دو معادلات خاص :

الف : روش کاهش مرتبه

هرگاه در معادله دیفرانسیل $F(x, y'')=0$ اگر y'' به صورت صریح برحسب x بیان شده باشد $y''=f(x)$
در این صورت با دوبار انتگرال گیری جواب عمومی به دست خواهد آمد. چنانچه نتوانیم y'' را برحسب x به صورت
صریح بیان کنیم از حالت 2 استفاده می‌کنیم.

تذکر: برای حل معادله دیفرانسیل $y^{(n)}=f(x)$ کافی است n بار انتگرال بگیریم در این صورت جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود.

$$y=\int\cdots\int f(x)\,dx\cdots dx + c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+c_{n-1}x+c_n$$

مثال: مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y''=(1-x^2)^{-1/2} \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0$$

$$y'=\int(1-x^2)^{-1/2}=\sin^{-1}x+c$$

$$y'(0)=0 \longrightarrow c=0$$

$$y=\int \underbrace{\sin^{-1}x\,dx}_{\text{جزء به جزء}}=x\sin^{-1}x+(1-x^2)+c_1$$

$$y(0)=1 \longrightarrow c=0$$

$$y=x\sin^{-1}x+(1-x^2)$$

http://www.ab-rafiee.com

مثال:

فرض کنید y حل معادله دیفرانسیل $y'' = 3x - 2$ با شرایط مرزی $y'(1) = -3$ ،

$y(0)=2$ باشد، مقدار $y(2)$ چقدر است؟

نکته: شرایط مسئله یک نقطه ای = شرایط اولیه (initial condition)

شرایط مسئله دو نقطه ای = شرایط مرزی (boundary condition)

$$y' = \int (3x-2)\,dx = \frac{3x^2}{2} - 2x + c$$

$$y'(1) = -3 \longrightarrow c = -5/2$$

$$y' = \frac{3x^2}{2} - 2x - \frac{5}{2}$$

$$y = \int \left(\frac{3x^2}{2} - 2x - \frac{5}{2}\right) dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{6}} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \frac{5}{2}x + c$$

$$\rightarrow y(0) = 2 \longrightarrow c_1 = 2$$

$$= y = 1/2\, x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 2 \longrightarrow y(2) = -3$$

http://www.ab-rafiee.com

Subject

Date

حالت دوم:
هرگاه معادله دیفرانسیل فاقد y باشد (یعنی y نداشته باشد) یعنی بصورت $F(x, y', y'')=0$

یعنی با فرض $y' = p$ معادله مرتبه دوم به یک معادله مرتبه اول تبدیل می‌شود زیرا

$$y' = p \quad , \quad y'' = \frac{dp}{dx} = p'$$

با جایگذاری y' و y'' در معادله داریم: $F(x, p, p')=$ (1)

معادله (1) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که با حل آن ابتدا p را بدست می‌آوریم

$$p = f(x, c) \quad (2)$$

و با انتگرال‌گیری از رابطه (2) جواب عمومی بدست می‌آید.

مثال: جواب عمومی معادله $xy'' + y' = x$ را بدست آورید.

$$y' = p \qquad y'' = p'$$

$$xp' + p = x \longrightarrow p' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} p = \underbrace{1}_{Q(x)}$$

$$p = y' = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int 1 e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c_1 \right]$$

$$y' = \frac{1}{x} \left[\int x\, dx + c_1 \right] = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x}$$

$$y = \int \left(\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} \right) dx \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^2}{4} + c_1 \ln x + c_2$$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر چیست؟

$$xy'' + y' = 1 + x^2$$

$$y' = p \quad , \quad y'' = p'$$ ← معادله فاقد تابع y است

$$xp' + p = 1 + x^2 \Rightarrow p' + \frac{1}{x}p = \frac{1+x^2}{x}$$

$$p = y' = e^{-\int 1/x\,dx}\left[\int \frac{1+x^2}{x} e^{\int 1/x\,dx}\,dx + c_1\right]$$

$$p = y' = 1/x\left[x + \frac{x^3}{3} + c_1\right]$$

$$y' = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}$$

$$y = \int\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}\right)dx = x + \frac{x^3}{9} + c_1 \ln x + c_2$$

مثال: جواب عمومی معادله زیر را با شرایط کمکی ذکر شده بدست آورید.

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y'(0) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} y(x) = \frac{\pi^2}{8}$$

جواب: $y = (\text{Arctan}\, x)^2$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

حالت سوم:

هرگاه معادله دیفرانسیل فاقد متغیر مستقل باشد (یعنی x نداشته باشد) $F(y, y', y'')=0$ باشد ←

$p=y'$ و p به عنوان تابعی از y داریم:

$$y'=p \qquad y''=\frac{dp}{dx} \to \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

با جایگذاری y' و y'' در معادله داریم:

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0$$

که این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

تذکر: این روش در مورد مراتب بالاتر هم صادق است.

مثال:

جواب معادله دیفرانسیل $y''+y'^3e^{2y}=0$ را بدست آورید.

معادله فاقد متغیر مستقل است پس ←

$$y'=p \qquad y''=p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy}+p^3e^{2y}=0 \to p\left(\frac{dp}{dy}+p^2e^{2y}\right)=0$$

جواب غیر عادی معادله:

$$\begin{cases} p=0 \to y=c \\ \dfrac{dp}{dy}+p^2e^{2y}=0 \quad (2) \end{cases}$$

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject

Date

2,1 $\longrightarrow \dfrac{dp}{p^2} + e^{2y}dy = 0 \xrightarrow{\int}$

$-p^{-1} + \frac{1}{2}e^{2y} = c_1 \longrightarrow p = y' = \dfrac{2}{e^{2y} - 2c_1}$

$(e^{2y} - 2c_1)dy = 2dx \xrightarrow{\int}$

طرفین در دو ضرب شد $\frac{1}{2}e^{2y} - 2c_1 y = 2x + c_2 \Rightarrow 4x - e^{2y} = \overset{c_0}{-4c_1}y - \overset{c_1}{2c_2}$

$= 4x - e^{2y} = \underline{c_0}y + \underline{c_1}$

تمرین: جواب های معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (روش دوم)

$2yy'' + y'^2 = 0$

$y' = p \longrightarrow y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ ← معادله فاقد متغیر است

جواب: $y^{3/2} = c_1x + c_2$

$$\begin{cases} c_1 = \pm \frac{3}{2}c \\ c_2 = \frac{3}{2}c' \end{cases}$$

حالت دوم:

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه n فاقد تابع باشد $F(x, y', y'' \cdots y^{(n)}) = 0$ با انتخاب

$y' = p \quad y'' = p' \quad \cdots \quad y^{(n)} = p^{(n-1)}$

تبدیل به معادله مرتبه n-1 می‌شود $F(x, p, p', p'' \cdots, p^{(n-1)}) = 0$ که در معادله دیفرانسیل

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

مرتبه n باشد تابع و مشتق تا مرتبه m-1 نباشد

$F(x, y^{m}, y^{(m-1)}, \dots y^{(n)}) = 0$

با اعمال $y^{(m)} = p \; , \; y^{(m+1)} = p' \; \dots \; y^{n} = p^{n-m}$

معادله فوق به معادله مرتبه $n-m$ تبدیل می‌شود

$F(x, p, p' \dots p^{(n-m)}) = 0$

مثال:

جواب معادله دیفرانسیل $xy''' - 2y'' = 0$ را بیابید.

معادله فاقد تابع و مشتق مرتبه اول است پس ← $y'' = p \; , \; y''' = p'$

$xp' - 2p = 0 \longrightarrow \frac{dp}{p} = 2\frac{dx}{x}$

$\ln x^2 + \ln c = \ln cx^2$

$\ln p = 2\ln x + \ln c \longrightarrow y'' = p = cx^2$

$y' = \int cx^2 dx \longrightarrow \int cx^3/3 + c_1$

$y = \int (cx^3/3 + c_1) dx = cx^4/12 + c_1 x + c_2$

$= y = Ax^4 + Bx + C$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

مثال:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

معادله فاقد تابع و مشتق مرتبه اول آن است ← $y''=p \quad , \quad y'''=p'$

$$xp'-p=0 \longrightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$$

$$\ln p=\ln x+\ln c$$

$$p=y''=cx$$

$$y'=\int cx\,dx \longrightarrow \frac{cx^2}{2}+c \Longrightarrow y=\int\left(c\frac{x^2}{2}+c_1\right)dx$$

$$y=c\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2 = c_1x^3+c_2x+c_3$$

* مثال: کدام تابع زیر جوابی از معادله $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ می‌باشد؟ (کارشناسی ارشد ریاضی)

مشتق مرتبه ۵ ، مشتق مرتبه ۴

الف) $y=x\sin x$

ب) $y=x^5\sin x$

ج) $y=x^3+x^2+x+1$ ✓

د) $y=x^6+x^5+x^4+x+1$

معادله فاقد تابع و مشتق تا مرتبه سوم آن است:

$$y^{(4)}=p \longrightarrow y^{(5)}=p'$$

$$xp'-p=0 \longrightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$$

PAPCO

Subject
Date

$$\ln p = \ln x + \ln c \longrightarrow p = cx$$

$y^{(4)} = cx \longrightarrow$ با ۴ بار انتگرال گیری y بدست آمد

$$y = c_1x^5 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$$

بنابراین جواب معادله یک چندجمله‌ای درجه ۵ است که جمله‌های از درجه ۲ به پایین دلخواه باشد حل معادله "

چندجمله‌ای مشتق گیری شده دوم است که اینجا یک تابع صحیح گنگ است.

مثال: اگر معادله زیر اساس $y'' + \sin y = 0$ معادله تغییر مکان یک متحرک با شرایط اولیه $y'(0) = \pi/3$ و $y(0) = 0$

باشد در این صورت سرعت متحرک v را بدست آورید.

$y' = p \ , \ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ ← معادله فاقد x می‌باشد

$$p\frac{dp}{dy} + \sin y = 0 \longrightarrow p\,dp = -\sin y\,dy \longrightarrow \tfrac{1}{2}p^2 = \cos y + c$$

$y' = \sqrt{2\cos y + c} \longrightarrow c = -1$ با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$y' = v = \sqrt{2\cos y - 1}$$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

مثال: جواب خصوصی معادله $y''-3y^2=0$ را که شرایط $y(0)=2$ ، $y'(0)=-4$ را دارد از کدام نقطه می‌گذرد؟

الف) $(-2,4)$

ب) $(2,-2)$

ج) $(-1,2)$

د) $(-1,1/2)$ ✓

معادله فاقد x است $\qquad y'=p \;,\; y''=p\dfrac{dp}{dy}$

جواب: $\dfrac{-2}{\sqrt{y}}=\sqrt{2}\,(x-1)$

معادله کوشی ـ معادله اویلر:

هر معادله دیفرانسیل بصورت

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+a_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$$

یا بصورت

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=f(x)$$

را معادله کوشی یا اویلر می‌نامند که با تغییر متغیرهای

$x=e^z$

یا

$ax+b=e^z$

تبدیل به معادله خطی مرتبه n با ضرایب ثابت می‌شود.

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject

Date

مثال: به ازای کدام تبدیل معادله دیفرانسیل $4x^2y'' - 5xy' - 18y = 0$ به معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود؟

الف) $y = ux$

ب) $x = \log t$

ج) $x = e^t$ ✓

د) $y = xe^t$

مثال: به ازای تغییر متغیر ... می‌توان معادله زیر را به یک معادله خطی همگن با ضرایب ثابت تبدیل نمود.

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

الف) $z = x^2$

ب) $x = \ln z$

ج) $z = \frac{8}{\sqrt{x}}$

د) $z = \ln x$ ✓

نکته: معادله کوشی مرتبه دوم $x^2y'' + axy' + by = f(x)$ با استفاده از تغییر متغیر $x = e^z$ به معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + b = f(e^z) \quad (1)$$

معادله مشخصه معادله 1 به صورت زیر می‌باشد.

(مشخصه) $t^2 + (a-1)t + b = 0$

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject

Date

۱- اگر معادله مشخصه دارای ۲ ریشه حقیقی و متمایز t_1 و t_2 باشد داریم: $t_1 \neq t_2$

$$y_1 = e^{t_1 z} = e^{t_1 \ln x} = x^{t_1}$$

$$y_2 = e^{t_2 z} = e^{t_2 \ln x} = x^{t_2}$$

پس جواب عمومی معادله کشی اویلر به صورت زیر خواهد بود:

$$y_h = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2}$$

۲- اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف حقیقی t باشد داریم:

$$y_1 = e^{tz} = e^{t \ln x} = x^{t}$$

$$y_2 = z e^{tz} = e^{t \ln x} \cdot \ln x = x^{t} \cdot \ln x$$

و جواب عمومی معادله کشی اویلر به صورت زیر خواهیم داشت:

$$y_h = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^{t}$$

۳- اگر معادله مشخصه دارای ریشه مختلط $p \pm iq$ باشد جواب عمومی معادله کشی اویلر به صورت زیر خواهد بود:

$$y_h = e^{pz}(c_1 \cos qz + c_2 \sin qz)$$

$$y_h = x^{p}\left(c_1 \cos(q \ln x) + c_2 \sin(q \ln x)\right)$$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

بجای به دست آوردن جواب عمومی معادله ناهمگن به $f(e^z)$ ، $y_p(x)$ را با استفاده از روش های قبلی

بدست آورده و در این صورت جواب عمومی معادله بصورت زیر خواهد بود

$$y = y_h + y_p$$

جواب‌های

مثال:

پاسخ معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه داده شده کدام است؟

$$x^2 y'' - 3y'x + 4y = 0$$

$$y(1) = 1 \quad , \quad y'(1) = 1$$

جواب: $y = (1 + c_2 \ln x)x^2 = (1 - \ln x)x^2$

مثال:

جواب این معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' + y = 0$ که در شرط $y(1)=1$ صادق باشد کدام است؟

الف) $y = e^{(\cosh x - 1)}$

معادله کوشی ـ معادله دیفرانسیل ...

جواب:

ب) $y = e^{x-1}$

ج) $y = \cos(\ln x)$ ✓ $\quad y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$

د) $y = \dfrac{1}{2x-1}$

$$c_1 = 1 \quad , \quad \ln 1 = 0$$

$$y = \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

مثال:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

جواب: $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1}$

مثال:

جوابهای خاص معادله زیر را بدست آورید.

$$x^2y'' - 2y = 0 \qquad x>0$$

جواب: $\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = x^{-1} \\ y_2 = x^2 \end{cases}$

مثال:

در معادله دیفرانسیل $x^2y'' - xy' + y = 0$ ، $y(1)=0$ و $y'(1)=1$ در این صورت $y(e)$ کدام است!

الف) e ✓

ب) $2e$

ج) 1

د) 0

معادله مشخصه $t^2 - 2t + 1 = 0 \longrightarrow t = 1$

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x$$

$y(1) = 0 \longrightarrow c_1 = 0$ چون $\ln(1) = 0$

$$y = c_2 x \ln x \longrightarrow y' = c_2(\ln x + 1)$$

$y'(1) = 0 \longrightarrow c_2 = 1 \qquad y = x\ln x \xrightarrow{x=e} y(e) = e$

P4PCO

http://www.ab-rafiee.com

Subject جلسه ۹
Date 92/9/3

تبدیل لاپلاس (Laplace Transform)

تبدیل لاپلاس $f(t)$ که برای مقادیر t تعریف شده را با نماد $F(s)$ یا $L[f(t)]$ نمایش می‌دهیم.

$$** \quad L[f(t)] \text{ یا } F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\, dt$$

اگر این انتگرال همگرا باشد، تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ می‌نامیم، تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس
$F(s)$ می‌نامیم و آن را با نماد $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

تابع زیر داده شده، تبدیل لاپلاس آن کدام است؟

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & t<a \\ 1, & t>a \end{cases}$$

الف: $\frac{e^{-as}}{s}$ ✓
ب: e^{-as}
ج: $\frac{e^{-as}}{s^2}$
د: $\frac{e^{as}}{s}$

$$L[H(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot H(t-a)\, dt$$

$$= \underbrace{\int_0^a e^{-st} \cdot H(t-a)\, dt}_{0} + \int_a^\infty e^{-st} \underbrace{H(t-a)}_{1}\, dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_a^\infty = \frac{e^{-sa}}{s}$$

http://www.ab-rafiee.com

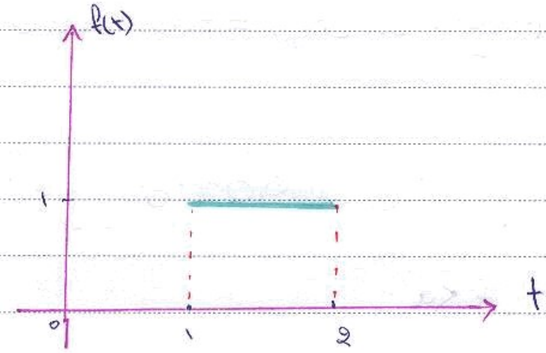
Subject

Date

حل معادلات با لاپلاس :

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{معادله در حوزه } x \text{ یا } t} \arrow[r, "L"] \arrow[d, dashed, no head] & \boxed{\text{معادله در حوزه } s} \arrow[d] \\
\boxed{\text{جواب در حوزه } x} & \boxed{\text{جواب در حوزه } s} \arrow[l, "L^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

مثال: تبدیل لاپلاس معادله $f(t)$ که نمودار آن به شکل داده شده است را بدست آورید.



$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} . f(t) . dt$$

$$= \int_0^1 e^{-st} (0)\, dt + \int_1^2 e^{-st} (1)\, dt + \int_2^{\infty} e^{-st} (0)\, dt$$

$$= \int_1^2 e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_1^2 = \frac{1}{s} \left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com

نکته: تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی هستند

الف) $L\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 L\left[f_1(t)\right] + c_2 L\left[f_2(t)\right]$

ب) $L^{-1}\left[c_1 F(s) + c_2 F_2(s)\right] = c_1 L^{-1}\left[F_1(s)\right] + c_2 L^{-1}\left[F_2(s)\right]$

مثال:

تبدیل لاپلاس e^{at} چه مقدار است؟

$f(t) = e^{at}$

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{-1}{s-a}\left(e^{-(s-a)t}\right)\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s-a} \quad , \quad s > a$$

$$e^{at} = \frac{1}{s-a}$$

مثال:

تبدیل لاپلاس $\cosh at$ را بدست آورید

$$f(t) = \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$L[\cosh at] = \frac{1}{2}\left[L[e^{at}] + L[e^{-at}]\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2} \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \sinh at = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

$$\cosh at = \frac{s}{s^2-a^2} \qquad \cos at = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\sinh at = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad \sin at = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثال:

تبدیل لاپلاس $\sin at$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{s-a}$

ب) $\frac{a}{s^2-a^2}$

ج) $\frac{s}{a^2+s^2}$

د) $\frac{a}{s^2+a^2}$ ✓

یادآوری: رابطه اویلر:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

پاسخ: طبق رابطه اویلر: $e^{iat} = \cos at + i\sin at$

$$L[e^{iat}] = L[\cos at] + iL[\sin at] \quad (1)$$

از طرفی:

$$L[e^{iat}] = \frac{1}{s-ia}$$

$$= \frac{s+ia}{(s+ia)(s+ia)} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$$

http://www.ab-rafiee.com

Subject
Date

(۱) از مقایسه با رابطه اصلی $\Longrightarrow \begin{cases} L[\cos at] = \dfrac{s}{a^2+s^2} \\ L[\sin at] = \dfrac{a}{s^2+a^2} \end{cases}$

نکته: جدول تبدیل لاپلاس بعضی از توابع مهم به شرح زیر است!

$f(t)$	$F(s)$
a	$a/s \quad , s>0$
at^n	$a\dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad , s>0$
$kt^a , a>-1$	$k\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \quad , s>0$
ke^{at}	$\dfrac{k}{s-a} \quad , s>a$
$k\cos at$	$k\cdot\dfrac{s}{a^2+s^2} \quad , s>0$
$k\sin at$	$k\cdot\dfrac{a}{s^2+a^2} \quad , s>0$
$k\cosh at$	$k\cdot\dfrac{s}{s^2-a^2} \quad s>\lvert a\rvert$
$k\sinh at$	$k\cdot\dfrac{a}{s^2-a^2} \quad s>\lvert a\rvert$

PAPCO

http://www.ab-rafiee.com