۱ از تعریف با انتگرال اصلی $\Longrightarrow \begin{cases} L[\cos at] = \dfrac{s}{a^2+s^2} \\ L[\sin at] = \dfrac{a}{s^2+a^2} \end{cases}$

نکته: جدول تبدیل لاپلاس بعضی از توابع مهم به شرح زیر است!

$f(t)$	$F(s)$
a	$a/s \quad , s>0$
at^n	$a\dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad , s>0$
$kt^a , a>-1$	$k\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \quad , s>0$
ke^{at}	$\dfrac{k}{s-a} \quad , s>a$
$k\cos at$	$k\cdot\dfrac{s}{a^2+s^2} \quad , s>0$
$k\sin at$	$k\cdot\dfrac{a}{s^2+a^2} \quad , s>0$
$k\cosh at$	$k\cdot\dfrac{s}{s^2-a^2} \quad s>\lvert a\rvert$
$k\sinh at$	$k\cdot\dfrac{a}{s^2-a^2} \quad s>\lvert a\rvert$

Subject
Date

مثال:

مقدار انتگرال زیر را کدام است.

$$\int_0^\infty e^{-2t}\cos t\,dt = L[\cos t]$$

الف) $2/3$

ب) $1/3$

ج) $2/5$ ✓

د) $1/5$

$$= \frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=2} = 2/5$$

مثال:

اگر فرض کنیم $L[f] = \frac{1}{s^2+25}$ باشد آنگاه $f(t)$ کدام است؟

الف) $1/5 \sin 5t$ ✓

ب) $1/5 \cos 5t$

ج) $5 \sin 5t$

د) $5 \cos 5t$

طرفین را در ۵ ضرب می‌کنیم

$$L[5f(t)] = \frac{5}{s^2+25}$$

$$5L(f(t)) = \frac{5}{s^2+25} = L[\sin 5t]$$

$$f(t) = 1/5 \sin 5t$$

مثال:

تبدیل لاپلاس $5\sin 2t - 3\cos 2t$

$$5L[\sin 2t] - 3L[\cos 2t] = \frac{5\times 2}{s^2+4} - \frac{3s}{s^2+4}$$

$$= \frac{10-3s}{s^2+4}$$

PAPCO

مثال:

تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = 1 - \cos bx$ را بدست آورید.

$$L[f(x)] = L[1] - L[\cos bx] = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$= \frac{\cancel{s^2}+b^2-\cancel{s^2}}{s(s^2+b^2)} = \frac{b^2}{s(s^2+b^2)}$$

تمرین:

تبدیل لاپلاس های زیر را بیابید.

1) $L(3e^{4t}) = \dfrac{3}{s-4}$

2) $L\left(-\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{7}{2}e^{3t}\right)$

مثال:

مطلوبست حل عبارت زیر:

عبارت را به کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right)$$

$$= \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s-3)}$$

$$\begin{cases} A = -4/3 \\ B = -1/6 \\ C = 7/2 \end{cases} \qquad F(s) = L^{-1}\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)} =$$

$$= L^{-1}\left[\frac{-4/3}{s-2}\right] + L^{-1}\left[\frac{-1/6}{s+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{7/2}{s-3}\right]$$

$$= -4/3\, e^{2t} + -1/6\, e^{-t} + 7/2\, e^{3t}$$

تمرین:

۱- اگر تبدیل لاپلاس $L[f] = 1/s^4$ باشد $f(t)$ کدام است؟

الف) $t/2$ ب) $t^2/4$ ج) $\checkmark\, t^3/6$ د) $t^4/8$

۲- تبدیل معکوس زیر را بیابید.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{4s^2-9}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{(2s)^2-9}\right] = 1/2\,(1/3)\sinh 3/2\, t = 1/6 \sinh 3/2\, t$$

نکته بسیار مهم:

اگر تبدیل $L[f(t)] = F(s)\ ,\ s>a$ آنگاه برای $b>0$

$$L[f(bt)] = 1/b\ F[s/b] \quad , \quad s/b > a$$

$$L^{-1}[F(ks)] = 1/k\ f(t/k)$$

مثال:

اگر لاپلاس $L\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) = \ln(1+1/s)$ آنگاه تبدیل لاپلاس $\frac{1-e^{-2t}}{2t}$

را بیابید.

جواب: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s+2}{s}\right)$

تبدیل لاپلاس مشتق:

اگر $f(t)$ تابعی پیوسته روی $t \geq 0$ و $f'(t)$ تابعی پیوسته قطعه‌ای روی $t \geq 0$ باشد آنگاه

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$L(f''(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

در حالت کلی داریم:

$$L[f^n(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Subject

Date

مثال:

مقدار جواب مسئله $y''+y=\sin 2x$ را در نقطه $x=\pi$ در صورتیکه $y(0)=0$ بدست آورید.

از طرفین تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$y''+y=\sin 2x$$

$$L(y'')+L(y)=L(\sin 2x)$$

$$s^2Y(s)-s\cancel{y(0)}^{\,0}-y'(0)+Y(s)=\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s).\,(s^2+1)-y'(0)=\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s)=\frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)}+\frac{y'(0)}{s^2+1}$$

کسر جزئی

$$Y(s)=\frac{-2/3}{s^2+4}+\frac{y'(0)+2/3}{s^2+1}$$

$$\to L^{-1}\Rightarrow y(x)=-\tfrac{1}{3}\sin 2x+\tfrac{2}{3}\sin x+y'(0)\sin x$$

$$=Y(\pi)=0$$

تمرین:

مطلوبست حل معادله زیر:

$$z''+z'-2z=0 \qquad z'(0)=1$$
$$z(0)=4$$

جواب: $z(x)=3e^{x}+e^{-2x}$

PAPCO

Subject

Date

تمرین: اگر بدانیم $L(\sin\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}} e^{-1/4p}$ آنگاه $L\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$ را محاسبه کنید.

حل: $\frac{\sqrt{\pi}}{p^{1/2}} e^{-1/4p}$

Subject جلسه ۱۵
Date ۹۲,۹,۱۰

فصل ۵ :

مشتق گیری از تبدیل لاپلاس :

اگر $L[f(t)] = F(s)$ باشد آنگاه برای $n = 1, 2, \ldots$

$$F^{(n)}(s) = \frac{(-1)d^n F(s)}{ds^n} = L\left[(-t)^n f(t)\right] \qquad s > 0$$

مثال :

$$L(t^2 e^{-3t}) = ? \qquad L(e^{-3t}) = \frac{1}{s+3}$$

$$L(t^2 e^{-3t}) = (-1)^2 \frac{d^2F}{ds^2} = \frac{d^2 F}{ds^2} = F''(s)$$

$$F'(s) = \frac{-1}{(s+3)^2} \qquad F''(s) = \frac{2}{(s+3)^3} \qquad L(t^2 e^{-3t}) = \frac{2}{(s+3)^3}$$

نکته :

$$L(t^2 f(t)) = F''(s) \quad , \quad L(t f(t)) = -F'(s)$$

مثال :

$$f(t) = t\cos t \qquad L[F(t)] = ?$$

$$F(s) = L(\cos t) = \frac{s}{s^2+1} \longrightarrow L(t f(t)) = -F'(s)$$

$$L(t\cos t) = \left(\frac{s}{-s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

۸. اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر با $F(s)$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس $tf(t)$ کدام است؟

الف) $F'(s)$ ب) $sF'(s)$ ج) $s^2F'(s)$ د) $-F'(s)$

$$L(tf(t)) = (-1)^1 F^{(1)}(s) = -F'(s)$$

تبدیل لاپلاس زیر را حساب کنید.

$$L\left[\frac{x}{2a}\sin ax\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{2a}\sin ax$$

نتیجه ۵۵،۱۱،۲ $L(xf(x)) = -F'(p)$

$$L[f(x)] = F(p) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{a}{p^2+a^2} = \frac{1}{2(p^2+a^2)}$$

$$L\left(\frac{x}{2a}\sin ax\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+a^2}\right)'$$ مشتق می‌گیریم $$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$$

تمرین:

$$L(x^3e^{4x}) =$$

الف) $\frac{1}{(s-4)^3}$ ب) $\frac{5}{(s-4)^3}$ ج) $\frac{2}{s}$ د) $\frac{6}{(s-4)^4}$

Subject
Date

** حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\int_0^\infty t e^{-t} \sin 2t \, dt$$

ابتدا حاصل انتگرال را بدست آوریم سپس جواب را در $s=1$ محاسبه می‌کنیم.

الف) $\frac{2}{25}$ ب) $\frac{4}{25}$ ج) $\frac{25}{4}$ د) $\frac{25}{2}$

$$\int_0^\infty t e^{-t} \sin 2t \, dt = L(t \sin 2t)$$

$$L(t \sin 2t) = \left(\frac{-2}{s^2+4}\right)' = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$\int_0^\infty t e^{-t} \sin 2t \, dt = \left.\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right|_{s=1} = \frac{4}{25}$$

مثال:

1- مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty x e^{-sx} \cos \beta x \, dx \qquad (s>0)$$

جواب: $\dfrac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$

روش حل مانند مثال بالا می‌باشد.

P4PCO

Subject
Date

2- لاپلاس معکوس عبارت زیر را بیابید.

$$\ln \frac{p+1}{p+3}$$

جواب: $\frac{1}{x}\left(e^{-3x} - e^{-x}\right)$

3- اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$، $\frac{s}{s-1}$ باشد، $f(t)$ را بیابید.

جواب: $\frac{e^{t}-1}{t}$

*** تبدیل لاپلاس معکوس تابع $\operatorname{Arc\,cot} \frac{s}{\omega}$ را بیابید.

$$F'(s) = \frac{-1/\omega}{1+\frac{s^2}{\omega^2}} = \frac{-\omega}{\omega^2+s^2}$$

$$L^{-1}\left[F'(s)\right] = L^{-1}\frac{-\omega}{\omega^2+s^2} = -\sin\omega t$$

$$f(t) = L^{-1}\left(\operatorname{Arc\,cot}\frac{s}{\omega}\right) = -1/t\,(-\sin\omega t)$$

تبدیل لاپلاس معکوس $\ln \frac{s-a}{s+b}$ کدام است؟ (بسیار مهم)

$$F(s) = \ln\frac{s-a}{s+b} \longrightarrow F'(s) = \frac{d}{ds} =$$

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\left(\ln\left(\frac{s-a}{s+b}\right)\right) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+b}$$

P4PCO

Subject

Date

$$L^{-1}[F'(s)] = e^{at} - e^{-bt}$$

$$f(t) = L^{-1}\left(\ln \frac{s-a}{s+b}\right) = \frac{-1}{t} \cdot L^{-1}[F'(s)]$$

$$= -\frac{1}{t}\left(e^{at} - e^{-bt}\right) = \frac{e^{-bt} - e^{at}}{t}$$

نمونه سؤالات تشریحی:

۱- تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر را بیابید. (بسیار مهم)

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$L(xy'') + L(y') - L(xy') + L(y) = 0$$

قضیه : $L(xf(x)) = \frac{-d}{ds}(F(s))$

$$\frac{-d}{ds} L(y'') + sY(s) - y(0) + \frac{d}{ds} L(y') + Y(s) = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + sY(s) - 1 + \frac{d}{ds}\left[sY(s) - y(0)\right]$$

$$+ Y(s) = 0$$

P4PCO

$$-s^2Y'(s) - 2sY(s) + 1 + sY(s) - 1 + Y(s) + sY'(s) + Y(s) = 0$$

$$Y'(s)(s^2 - s) - Y(s)(s-2) = 0$$

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = \frac{s-2}{s^2-s} = \frac{s-2}{s(s-1)} = -\frac{2}{s} - \frac{1}{s-1}$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم $\longrightarrow \ln Y(s) = -2\ln s + \ln(s-1) = \ln\left(\frac{s-1}{s^2}\right)$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{s-1}{s^2}$$

۲- اگر جواب $y(t)$ از معادله $ty'' + 2y' + ty = 0$ دارای تبدیل لاپلاس $Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t)\, dt$

باشد آنگاه $y(s)$ را بدست آورید. (بسیار مهم)

از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$L(ty'') + 2L(y') + L(ty) = 0$$

$$L(tf(t)) = -F'(s)$$ از خواص:

$$-\frac{d}{ds}L(y'') + 2sY(s) - 2y(0) - \frac{d}{ds}L(y) = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 2sY(s) - 2y(0) - Y'(s) = 0$$

$$-s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0) + 2sY(s) - 2y(0) - Y'(s) = 0$$

Subject
Date

$$-Y'(S)(S^2+1) = y(0) \longrightarrow Y'(S) = -\frac{y(0)}{S^2+1}$$

$$\xrightarrow{\int} Y(S) = -y(0)\,\text{Arctan}\, S + C$$

از طرفی: $\lim_{S\to\infty} Y(S) = 0 \xrightarrow{C} Y(S) = y(0)\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} S\right)$

تمرین:

تبدیل لاپلاس جواب مسئله $xy'' + (1+x)y' + y = 0$ که در شرط $y(0)=1$ صدق کند را به دست آورید.

$y(0) = -1$

جواب: $Y(S) = \frac{1}{S+1}$

انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس:

اگر لاپلاس $f(t)$ برابر با $F(S)$ باشد، $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آنگاه:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_S^\infty F(u)\,du$$

مثال:

تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ را به دست آورید.

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_S^\infty L(\sin t)\,du = \int_S^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \tan^{-1} u \Big|_S^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} S$$

Subject
Date

مثال:

تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$f(t) = \frac{\sin 4t}{t}$$

الف) $\tan^{-1}\frac{s}{4}$ ب) $\tan^{-1} 1/s$ ج) $\cot^{-1}\frac{s}{4}$ د) $4\cot^{-1} s$

$$L(\sin 4t) = \frac{4}{s^2+16} \quad , \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin 4t}{t} = 4$$

$$L\left(\frac{\sin 4t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{4}{u^2+16}\,du = \tan^{-1} u/4 \Big|_s^\infty = \underbrace{\pi/2 - \tan^{-1}}_{\cot^{-1}}\frac{s}{4}$$

$$= \cot^{-1} s/4$$

مثال:

اگر $L[\sin ax] = \frac{a}{s^2+a^2}$, $a \in R$ آنگاه لاپلاس $L\left[\frac{\sin ax}{a}\right]$ را بدست آورید.

جواب: $\pi/2 - \tan^{-1}\frac{s}{a}$

مثال به عنوان تمرین:

تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$\frac{1-\cos t}{t}$$

جواب: $\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$

Subject
Date

مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

الف) $e^{a/b}$ ب) $e^{b/a}$ ج) $\ln b/a$ ✓ د) $\ln a/b$

ابتدا این انتگرال را به این صورت می‌نویسیم:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = L\left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)$$

$$f(x)=e^{-ax}-e^{-bx} \longrightarrow F(s)=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$$

$$L\left[\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right]=\int_s^\infty\left(\frac{1}{u+a}-\frac{1}{u+b}\right)du=\ln(u+a)-\ln(u-b)$$

$$=\ln\left|\frac{u+a}{u-b}\right|\Bigg]_s^\infty=\ln\frac{s+b}{s+a}\quad,\quad\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{S}$$

$$=\ln\frac{s+b}{s+a}\Bigg|_{s=0}=\ln b/a$$

تمرین:

مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty \frac{\cos t-\cos^2 t}{t}$$

الف) $\ln 2$ ✓ ب) $\ln 3$ ج) e^2 د) e^3

PAPCO

Subject

Date

مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t\,dt}{t}$$

الف) $\tan^{-1} a$ ب) $\cot^{-1} a$ ✓ ج) $\sec^{-1} a$ د) $\sec^{-1} 2a$

پیچش یا تلفیق (convolution)

پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را با نماد $(f*g)(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda$$

convolution دارای خواص زیر است:

1- $f*g = g*f$

2- $f*(g+h) = f*g + f*h$

3- $f*(g*h) = (f*g)*h$

4- $0*f = f*0 = 0$

5- $cf*g = f*(cg) = c(f*g)$

ثابت

6- $1*f = \int_0^x f(t)\,dt$

P4PCO

Subject
Date

نکته: اگر لاپلاس $L[f(t)] = F(s)$ ، لاپلاس $L[g(t)] = G(s)$ آنگاه:

$$L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = (f * g)(t)$$

مثال:

- لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$f(t) = e^{-t} \cdot \int_0^t x \cdot e^{x} \, dx$$

$$f(t) = \int_0^t x e^{x-t} \, dx = \int_0^t x e^{-(t-x)} \, dx =$$

$$L^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)]$$

$$F_1(s) = L^{-1}(t) = 1/s^2$$

$$F_2(s) = L^{-1}(e^{-x}) = \frac{1}{s+1}$$

$$L[f(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

مثال:

لاپلاس معکوس تابع زیر را بدست آورید.

$$L^{-1} \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$= \frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{(s^2+1)} \cdot \frac{s}{(s^2+1)}$$

$$= L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \cos t \longrightarrow L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)}\right)^2$$

PAPCO

$$= \int_0^t \cos\lambda \cos(t-\lambda) \, d\lambda =$$

Subject

Date

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos t + \cos(2\lambda - t)\right] d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$$

$$* \; L^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+1)^2}\right) \neq L^{-1}\left(\frac{s}{s+1}\right) \cdot L^{-1}\left(\frac{s}{s+1}\right) \; *$$

مثال ضرب :

اگر ۱ را n بار در خودش تلفیق کنیم حاصل برابر است ؟

$$f(t) = \underbrace{1 * 1 * 1 * 1 * \cdots * 1}_{n}$$

الف) $\frac{t^n}{n+1}$ ب) $\frac{t^n}{n!}$ ج) $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ د) ✓ $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$n=2 \quad 1*1 = \int_0^t 1 \cdot 1 \, d\lambda = t$

$n=3 \quad 1*1*1 = t*1 = \int_0^t \lambda \, d\lambda = \frac{t^2}{2}$

$n=4 \quad 1*1*1*1 = \frac{t^2}{2} * 1 = \int_0^t \frac{\lambda^2}{2} d\lambda = \frac{t^3}{6}$

$n=n \longrightarrow f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

Subject

Date

تمرین:

تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$f(t) = \int_0^t (t-\lambda)^3 \sin\lambda \, d\lambda$$

جواب : $\dfrac{3!}{s^2} \cdot \dfrac{1}{1+s^2}$

PAPCO

Subject جلسه ۱۱

Date ۹۲/۸/۱۷

معادلات انتگرالی : (۹۵٪ تمرین از سوالات شرحی)

معادلاتی هستند که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال باشد.

معادلات دیفرانسیل انتگرالی:

معادلات انتگرالی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز باشند. برای حل این معادلات از رابطه

زیر استفاده می‌کنیم.

$$L\left(\int_0^t f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda\right) = F(s)\,.\,G(s)$$

مثال:

جواب معادله انتگرالی زیر را حساب کنید.

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(x) \sin(t-x)\, dx$$

$$L(y(t)) = L(1) + L\left(\int_0^t y(x)\sin(t-x)\,dx\right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + Y(s)\,.\,\frac{1}{s^2+1} \longrightarrow Y(s) = \frac{1/s}{\frac{s^2}{s^2+1}}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3} \longrightarrow y(t) = L^{-1}(1/s) + L^{-1}(1/s^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}t^2$$

P4PCO

Subject

Date

مثال: جواب معادله انتگرالی زیر را بدست آورید.

$$y'(t) + \int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du = \cos t$$

$$L(y'(t)) + L\left(\int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du\right) = L(\cos t)$$

$$sY - y(0) + Y \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+2} \longrightarrow y(t) = L^{-1}\,Y(s)$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}\,t$$

مثال: تابع مشتق پذیر φ که در معادله انتگرالی زیر صدق کند را بدست آورید.

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(x) = x + \int_0^x \varphi(x-t)\cos t\,dt$$

$$L(\varphi'(x)) = L(x) + L\left(\int_0^x \varphi(x-t)\cos t\,dt\right)$$

$$sL(\varphi(x)) = \frac{1}{s^2} + L(\varphi(x)) \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

$$L(\varphi(x)) = \frac{1+s^2}{s^5} = \frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^3}$$

P4PCO

Subject

Date

$$f(x) = L^{-1}(1/s^5) + L^{-1}(1/s^3)$$

$$= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

مثال:

اگر $x(t)$ جواب معادله زیر باشد مقدار $x(t)$ در نقطه $t=5$ چقدر است؟

$$x(t) = 2 + \int_0^t e^{t-u} x'(u)\,du$$

$$L(u(t)) = L(2) + L\int_0^t e^{t-u} x'(u)\,du)$$

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1}(sX(s) - x(0))$$

$$x(0) = 2$$

$$X(s) = 2/s + \frac{s}{s-1}(X(s)) - \frac{2}{s-1}$$

$$X(s) = 2/s \longrightarrow x(t) = L^{-1}\frac{2}{s}$$

$$x(t) = 2 \longrightarrow x(5) = 2$$

مثال:

جواب عمومی معادله انتگرالی زیر را بدست آورید.

$$y(t) - 1 + \int_0^t (t-x)\,y(x)\,dx = 0$$

Subject

Date

$$L(y(t)) - L(1) + L\left(\int_0^t (t-x)\, y(x)\, dx\right) = 0$$

$$Y(s) - 1/s + \frac{1}{s^2} \cdot Y(s) = 0$$

$$Y(s)\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = 1/s \longrightarrow Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$y(t) = L^{-1}(Y(s)) = \cos t$$

تمرین :

۱- جواب معادله انتگرالی زیر را بدست آورید.

$$f(t) = 2 + \int_0^t e^{t-u} f(u)\, du$$

راهنمایی : $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}$

جواب : $f(t) = 1 + e^{2t}$

۲- جواب معادله انتگرالی زیر چیست ؟

$y(0) = 1$

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(\tau)\, d\tau = 0$$

جواب : $y(t) = e^{-t}(1-t)$

PAPCO

Subject

Date

3- جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بدست آورید؟ (نمره)

مشتق دوم یعنی $x''(t)$

$$\ddot{x} + x = f(t) \quad , \; t \geq 0$$

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 0$$

$$\underbrace{L(\ddot{x})}_{\downarrow} + L(x) = L(f(t))$$

$$\underbrace{s^2 L(x) - s\,x(0) - x'(0)} + L(x) = L(f(t))$$

$$(s^2+1)\,L(x) = L(f(t))$$

$$L(x) = L(f(t))\,\frac{1}{s^2+1}$$

$$x(t) = L^{-1}\left(L\,f(t) \cdot \frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\begin{cases} F(s) = L(f(t)) \\ G(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

$$x(t) = f(t) * \sin t$$

$$x(t) = \int_0^t f(u)\,\sin(t-u)\,du$$

PAPCO

۴- معادله زیر را حل کنید (نیمسال دوم ۹۱-۹۰)

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-u)\, y(u)\, du$$

حل $\quad y(x) = \cos x$

5- معادله انتگرالی زیر را حل کنید. (سال ۸۹)

$$f(t) = 4t - 3\int_0^t f(u) \sin(t-u)\, du$$

حل : $\quad f(t) = 2\sin 2t + t - \frac{1}{2}\sin t$

تبدیل لاپلاس توابع متناوب :

تابع $f(t)$ را متناوب با دوره تناوب p گوییم هرگاه :

$$f(t+p) = f(t)$$

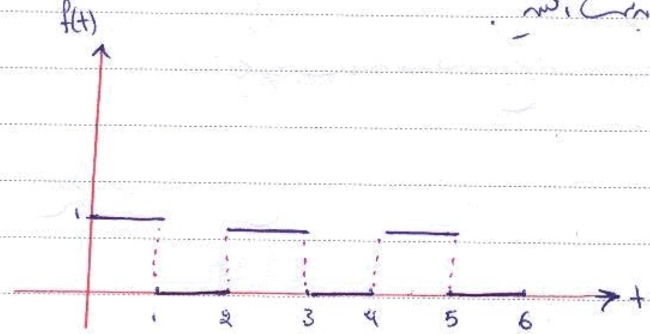
اگر $f(t)$ تابع پیوسته قطعه‌ای و متناوب با دوره تناوب p باشد آنگاه داریم :

$$L(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$$

تعداد نقاط ناپیوستگی متناهی

Subject
Date

مثال: تبدیل لاپلاس تابع f با منحنی زیر را بدست آورید.



جواب: $\dfrac{a}{s(1+e^{-s})}$

تابع دلتا دیراک

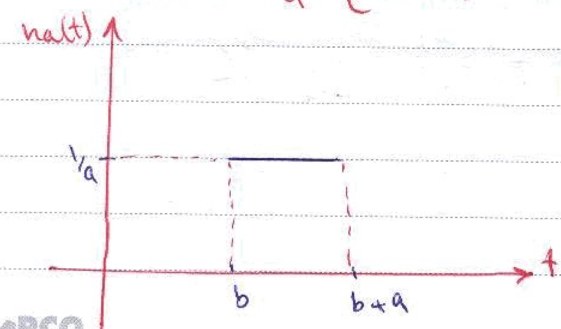
Dirac_Delta function

برای هر $a>0$ تابع $h_a(t)$ را روی فاصله $[0,+\infty[$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h_a(t) = \begin{cases} 1/a, & b \leq t \leq b+a \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

بنابراین:

$$h_a(t) = 1/a\,[u_a(t) - u_{b+a}(t)]$$



مساحت = طول فاصله زمانی × اندازه تابع = 1

اگر فاصله زمانی a خیلی کوچک باشد به اندازه تابع بسیار بزرگ شود تا حاصلضرب تابع در زمان برابر ۱ شود.

این تابع را ضربه لحظه یا تابع دلتا دیراک می‌نامیم.

$$\delta(t-b) = \lim_{a \to 0} h_a(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq b \\ \infty & , t = b \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-b)\, dt = 1$$

نکته:

با استفاده از تعریف تابع دلتا دیراک می‌توان نتیجه گرفت: (در تستها هم اگر آمد درست است)

1- $\int_{0}^{\infty} \delta(t-b)\, dt = 1$

2- $\int_{0}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

3- $L\left[\delta(t-b)\right] = e^{-bs}$

4- اگر $g(t)$ یک تابع پیوسته در فاصله $[0, \infty)$ باشد آنگاه:

$$\forall b \geq 0 \quad , \quad \int_{0}^{\infty} \delta(t-b)\, g(t)\, dt = g(b)$$

مثال: (مهم)

هرگاه $\delta(t)$ تابع ضربه دیراک باشد آنگاه تبدیل لاپلاس $L(\delta(t))$ کدام است؟

الف: 5 ب: 1 ج: $1/5$ د) هیچکدام

$$\delta(t) = \lim \frac{1}{a}\left[u_0(t) - u_a(t)\right]$$

$$L\left[\delta(t)\right] = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\left[L(u(t)) - L(u_a(t))\right]$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sa}}{s}\right] = \lim_{a\to 0} \frac{1-e^{-sa}}{sa}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{\cancel{s}e^{-sa}}{\cancel{s}} = \lim_{a\to 0} e^{-sa} = 1$$

مثال:

تبدیل لاپلاس زیر را بدست آورید. (مهم)

$$f(t) = \delta(t-1)\cos t$$

$$L(f(t)) = L(\delta(t-1)\cos t)$$

$$= \int_0^\infty \delta(t-1)\cos t\, e^{-st}\, dt$$

فرض کنیم $g(t) = e^{-st}\cos t$ باشد:

$$L\left[f(t)\right] = \int_0^\infty \delta(t-1)\, g(t)\, dt$$

$$= g(1) = e^{-s}\cos 1$$

Subject
Date

مثال: اگر تابع زیر، $g(t)$ یک تابع پیوسته باشد کدام رابطه صحیح نیست؟

$$\delta(t)=\lim f(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t>0\end{cases}$$

الف: $\int_0^\infty \delta(t)dt=1$

ب: $\int_0^\infty \delta(t)g(t)dt=g(0)$

ج: $\int_0^\infty \delta(t-a)g(t)dt=g(a)$

د: $\int_0^\infty \delta(t-a)g(t)dt=g(0)$ ✓

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی:

فرض کنیم $y_1, y_2, \ldots, y_n$ توابعی از یک متغیر مستقل مانند t باشند یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را خطی گوییم اگر هر یک از معادلات دستگاه یک معادله دیفرانسیل خطی باشد.

نکته: برای حل دستگاه معادلات خطی از چند روش حذفی، اپراتوری و استفاده از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم

الف: روش حذفی:

در این روش با حذف کردن تابع‌های مجهول و مشتقات این توابع معادلاتی را بدست خواهیم آورد که فقط شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد. با حل این معادله یکی از توابع مجهول بدست خواهد آمد و سپس سایر توابع مجهول را به دست می‌آوریم.

PAPCO

Subject
Date

مثال:

y_1 حاصل از حل دستگاه زیر کدام است؟

$$\begin{cases} y_1'' = y_2 + 1 & (a) \\ y_2'' = y_1 + x & (b) \end{cases}$$

از رابطه a دو بار مشتق می‌گیریم:

$$y_1^{(4)} = y_2'' \quad (1)$$

همچنین از معادله a داریم:

$$y_2 = y_1'' - 1$$

در رابطه (1) بجای y_2'' مقدارش را قرار می‌دهیم.

$$y_1^{(4)} = y_1 + x$$

$$y_1^{(4)} - y_1 = x \quad (3)$$

از حل معادله (3) داریم:

$$y_1 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - x$$

ـــ : روش اپراتوری (بیشتر سؤال آمده است)

فرض کنید که دستگاه معادلات را بتوانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{cases} f_1(D)x + g_1(D)y = h_1(t) \\ f_2(D)x + g_2(D)y = h_2(t) \end{cases}$$

Subject
Date

که در آن D اپراتوری است که به صورت زیر تعریف شده است.

$$D = \frac{d}{dt} \quad , \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2} \quad , \quad \ldots$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} h_1(t) & g_1(D) \\ h_2(t) & g_2(D) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} f_1(D) & h_1(t) \\ f_2(D) & h_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}}$$

با حل دترمینان ها و استفاده از روش های بیان شده برای به دست آوردن جواب های عمومی و خصوصی

جواب های خصوصی که می توان تابع x و y را به دست آورد.

مثال:

جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} y' = 3x - y \\ x' = x + y \end{cases}$$

PAPCO

Subject

Date

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y = 3x - y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Dx = x + y \\ Dy = 3x - y \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (D-1)x - y = 0 & (1) \\ 3x - (D+1)y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2), (1), $\longrightarrow 3x - (D+1)(D-1)x = 0 \longrightarrow$

$3x - (D^2-1)x = 0 \longrightarrow 3x - x'' + x = 0$

$x'' - 4x = 0$

$t^2 - 4 = 0 \longrightarrow t = \pm 2 \longrightarrow$

$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$

$y = (D-1)x \longrightarrow y = x' - x$

$y(t) = (2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t}) - (c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t})$

$y(t) = c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t}$

PAPCO

Subject
Date

مثال:

روش تعیین جواب های اساسی دستگاه زیر چیست؟

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x + y \end{cases}$$

جواب: $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 4e^{2t}$$

مثال:

با توجه به دستگاه معادلات زیر جواب $x(t)$ چیست؟ (اپراتوری)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}$$

جواب: $x(t) = Ae^{-t} + Be^{3t}$

مثال:

جواب عمومی دستگاه زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

جواب: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{t} + 4c_2 e^{6t} \\ y(t) = -c_1 e^{t} + c_2 e^{6t} \end{cases}$

P4PCO

ب: روش حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تبدیل لاپلاس:

در این روش از هر کدام از معادلات دستگاه، تبدیل لاپلاس گرفته و با به دست آوردن تبدیل لاپلاس توابع مجهول به روش جبری با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس توابع مجهول را به دست می‌آوریم.

(مثال‌ها بسیار مهم است)

مثال:

1- جواب دستگاه زیر با شرایط اولیه $y(0)=1$, $x(0)=0$ که در آن $k=cte$ است را به دست آورید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = k \\ x + \dfrac{dy}{dt} = kt \end{cases}$$

جواب: $\begin{cases} x=0 \\ y=\cos t \end{cases}$

2- تبدیل لاپلاس جواب $x(t)$ در دستگاه زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} tx + y' = \cos t \\ x' + y = \sin t \\ y(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

الف) $Ce^{s^3/2}$

ب) $Ce^{-s^2/2}$

ج) $Ce^{-s^3/3}$ ✓

د) $Ce^{s^2/2}$

3- شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$ با شرایط اولیه $x(0)=8$, $y(0)=3$ مفروض است. صورت لاپلاس معادلات را بنویسید.

Subject

Date

$X = L(x)$

$Y = L(y)$

$$\begin{cases} L(\dot{x}) = 2L(x) - 3L(y) \\ L(\dot{y}) = L(y) - 2L(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} SX - x_0 = 2X - 3Y \\ SY - y_0 = Y - 2X \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(S-2) + 3Y = 8 \\ 2X + Y(S-1) = 3 \end{cases}$$

PAPCO

Subject: جلسه 12
Date: 92/9/24

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها :

سری توانی :

یکی از مهمترین انواع سری هایی که به صورت زیر تعریف می شود :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

نکته 1:

شعاع همگرایی سری توانی از رابطه زیر بدست می آید :

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

و فاصله $(-R, R)$ میدان همگرایی یک سری توانی است یعنی به ازای x های مشمول بین فاصله سری همگرا و به ازای x های خارج از این فاصله سری واگرا می باشد

نکته 2:

به ازای $x=R$, $x=-R$ ممکن است سری همگرا یا واگرا باشد در این صورت باید جداگانه مورد بررسی قرار گیرد.

Subject

Date

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی : (دو سؤال تشریحی - حتماً یک سؤال تشریحی و چند سؤال تستی)

برای حل این معادلات جواب را به صورت سری توانی

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{یا} \quad y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

در نظر می‌گیریم. سپس y و مشتقاتش را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم و آن‌گاه با مساوی قرار دادن

ضرایب xهای هم‌توان ضرایب سری توانی را به دست می‌آوریم.

مثال:

اگر $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جوابی به صورت سری توانی برای معادله $y''-2xy'+8y=0$

و $y'(0)=0$ و $y(0)=12$ باشد آن‌گاه مقدار ضریب a_2 کدام است؟

الف: ۰/۱ ب: ۴۸- ج: ۲۴- د: ۶-

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots$$

$$y''=2a_2+6a_3x^2+12a_4x^3+\dots$$

$$y''-2xy'+8y=0 \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری مقادیر } y', y''}$$

PAPCO

پس از ساده کردن داریم :

ضریب x^0 : $2a_2 + 8a_0 = 0$ $\qquad a_2 = -4a_0$

$y(0) = 12 \longrightarrow a_0 = 12 \longrightarrow a_2 = -4(12) = -48$

مثال :

اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+1)y = 0$ با شرایط

$y'(0) = 2$ و $y(0) = -2$ باشد در بسط آن بر حسب توان های صحیح x ضریب x^3 چیست ؟

(سری توانی)

الف: $-1/3$ $\qquad$ ب: $-2/3$ $\qquad$ ج: $1/3$ $\qquad$ د: $2/3$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

چند جمله اول سری $\quad y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + \dots$$

مقادیر y , y' , y'' را در معادله اصلی جایگذاری می کنیم .

$$y'' - (x^2+1)y = 0$$

پس از جایگذاری و ساده کردن :

چون ضریب x^3 مد نظر (سوال) برابر c_3 است پس فقط c_3 را حساب می کنیم .

$y(0) = c_0 = -2 \longrightarrow c_0 = -2$

$y'(0) = c_1 = 2 \longrightarrow c_1 = 2$

Subject
Date

ضریب x^1 $= 6c_3 - c_1 = 0 \longrightarrow c_3 = 1/3$

تمرین:

فرض کنید جواب معادله $y'' - 2xy' + y = 0$ به صورت سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

باشد. برای آن نشان دهید $a_4 = -\frac{3}{4!} a_0$

جواب: کافی است اول سری را تا چند جمله مقدار y' ، y'' و y را در معادله جایگزین کرده و ساده کنیم سپس داریم:

ضریب x^0 $= 2a_2 + a_0 = 0 \longrightarrow a_2 = -\frac{1}{2} a_0$

ضریب x^1 $= 6a_3 - 2a_1 + a_1 = 0 \longrightarrow a_3 = \frac{1}{6} a_1$

ضریب x^2 $= 12a_4 - 4a_2 + a_2 = 0 \longrightarrow a_4 = \frac{1}{4} a_2$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} a_0\right) = -\frac{1}{8} a_0 = \frac{-3}{4!} a_0$$

$$-\frac{3}{24} = \frac{-1}{8}$$

نکته: در بحث قبل شرط اولیه به صورت $y(0) = y_0$ فرض شده بود به همین دلیل جواب را به صورت

$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ در نظر گرفتیم ولی اگر بخواهیم جواب را به صورت سری توانی برحسب توان های

$x - a$ بنویسیم یعنی اگر شرط اولیه به شکل $y(a) = y_0$ باشد در این صورت جواب را به صورت

PAPCO

Subject
Date

$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ در نقطه عادی به دنبال بسط سری

$X=x-a \qquad dX=dx$

$\frac{dy}{dX}=\frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{d^2y}{dX^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$

جواب به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ خواهد بود که شبیه همان است که حول نقطه صفر به دست آوردیم

جواب عادی $X \longrightarrow x-a$ تبدیل می‌گردد.

مثال:
هرگاه معادله دیفرانسیل $xy'-y=x$ و $y(1)=1$ دارای جوابی به صورت سری توانی باشد آنگاه ضریب a_1 را بدست آورید.

الف: 0   ب: 1   ✓ج: 2   د: -2

نقاط تحلیلی، معمولی، منفرد: (امتحان ندارد)

(این تعریف سؤال شده)
(مهم)
** تابع $f(x)$ را در $x=a$ تحلیلی گوییم هرگاه در نقطه $x=a$ دارای بسط تیلور با $R>0$ باشد.

قضیه:
در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم $y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=P_3(x)$ توابع P_1، P_2 و P_3 در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند آنگاه هر جواب این معادله در نقطه $x=a$ تحلیلی خواهد بود.

نقطه منفرد : (Singular point)

در معادله دیفرانسیل $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ که در آن f_1 ، f_2 ، f_3

چند جمله‌ای برحسب x می‌باشند نقطه $x=a$ را معمولی می‌نامیم هرگاه $f_1(a) \neq 0$ در غیر این صورت

نقطه $x=a$ را منفرد می‌نامیم.

قضیه:

اگر $x=a$ یک نقطه معمولی $f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0$ باشد آنگاه این معادله دارای

جواب به صورت سری توانی برحسب توان‌های $x-a$ خواهد بود و جواب عمومی به صورت زیر است.

$y = c_1 \Big((x-a)^{\text{توان صفر}}$ سری توانی برحسب $+ \; c_2 \, (x-a)^{\text{توان یک}}$ سری توانی برحسب $\Big)$

مثال:

اگر سری $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y'' + xy^2 = 0$ باشد آنگاه

جواب: 5 جمله اول سری را نوشته، y ، y' ، y'' را در معادله $y'' + xy^2 = 0$ جایگذاری کرده ساده‌ترین شکل را داریم:

1) $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$

2) $a_{n+3} = \dfrac{a_{n+1}}{(n+3)(n+2)}$

3) $a_{n+3} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+3)(n+4)}$

4) $a_{n+4} = -\dfrac{a_n}{(n+3)(n+4)}$

Subject
Date

x^{n-2} ضریب : $n(n-1)a_n + a_{n-4}$

ضریب را برای شروع لازم
در جمله a_n در سری داشته باشیم

$$a_n = \frac{-a_{n-4}}{n(n-1)}$$

اگر $n \to n+4$ $\Rightarrow$ تفاضل زیر ۴ درجه می‌شود

روش مشتقات متوالی :

برای پیدا کردن جواب یک معادله دیفرانسیل به صورت سری توانی می‌توان از این روش استفاده کرد. در خصوص

وقتی که معادله با شرایط اولیه داده شده باشد در این روش جواب را به صورت : (تیلور)

$$y = y(a) + \frac{(x-a)}{1!}y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}y''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^n}{n!}y^{(n)}(a)$$

در نظر می‌گیریم. $a=0$ باشد : (مک لوران)

$$y = y(0) + \frac{x}{1!}y'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}y^{(n)} = 0$$

(مثال: مهم)

معادله $y'' + y + y^3 = \cos 10x$ با شرایط $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ مفروض است.

بسط مک لوران جواب معادله را بدست آورید.

Subject

Date

$$y''(0) + y(0) + (y(0)^3) = \cos 10(0) \longrightarrow y''(0) = 1$$

از طرفین مشتق می‌گیریم :

$$y''' + y' + 3y^2 y' = -10 \sin 10x$$

$$y'''(0) + y'(0) + 3y^2(0)\, y'(0) = -10 \sin 10(0) \longrightarrow y'''(0) = -1$$

$$y = y(0) + \frac{x}{1!} y'(0) + \frac{x^2}{2!} y''(0) + \frac{x^3}{3!} y'''(0) + \cdots$$

$$y = x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

روش فروبنیوس : (روش توسعه یافته سری توانی) (۱۰۰٪ سوال امتحانی)

هر معادله دیفرانسیل بصورت

$$y'' + \frac{g(x)}{x} y' + \frac{h(x)}{x^2} y = 0$$

که توابع h و g در نقطه $x = 0$ تحلیلی باشند لااقل دارای یک جواب بصورت

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad c_0 \neq 0$$

است که r می‌تواند عددی حقیقی یا موهومی باشد و طوری انتخاب می‌شود که $c_0 \neq 0$ است.

PAPCO

Subject
Date

تعریف:

در معادله دیفرانسیل $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ که f_1, f_2, f_3 چندجمله‌ای می‌باشند نقطه $x = a$ را منفرد گوییم هرگاه $f_1(a) = 0$، و ضریب y'' معادله را یک کنیم و آن را بصورت زیر بنویسیم.

$$y'' + \frac{g(x)}{(x-a)} y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2} y = 0$$

و $h(x)$ و $g(x)$ هردو در نقطه $x = a$ تحلیلی باشند. نقطه $x = a$ را نقطه منفرد منظم و در غیر این صورت منفرد نامنظم می‌نامیم.

مثال:

نقطه $x = 0$ برای معادله دیفرانسیل $x^3y'' + x^2y' + y = 0$ چه نقطه‌ای است؟

الف: منفرد منظم ب: منظم ج: عادی د: منفرد نامنظم ✓

$f_1(0) = 0 \longrightarrow x = 0$ منفرد است.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^3}y = 0$$

$g(x) = 1$

$h(x) = 1/x \longrightarrow$ در نقطه $x = 0$ تحلیلی نیست

PAPCO

Subject

Date

مثال: (سوال تحقیقی امتحان)

نقاط $x=2$, $x=0$ برای معادله زیر چه نقاطی هستند؟

$$(x-2)\,x^2y'' - y'\sin x + y = 0$$

ابتدا همه را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم.

$$y'' - \frac{\sin x}{(x-2)x^2}\,y' + \frac{1}{(x-2)x^2}\,y = 0$$

$x=0$, $x=2$ منفرد (غیرعادی) هستند: $f_1(0) = f_1(2) = 0$

$x=0$

$$g(x) = \frac{-\sin x}{x(x-2)}$$

$g(x)$ در $x=0$ (به خاطر وجود x) تحلیلی نیست

$$h(x) = \frac{1}{x-2}$$

پس $x=0$ منفرد نامنظم است

$x=2$

$$h(x) = \frac{x-2}{x^2}$$

$$g(x) = \frac{-\sin x}{x^2}$$

* مثال: در معادله دیفرانسیل $(x+1)xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ نقاط $x=0$, $x=1$

چه نوع نقاطی هستند.

PAPCO

Subject
Date

مثال:

نقطه $x=0$ برای معادله دیفرانسیل $x^2y''+y'\sin x+y\cos x=0$

چه نوع نقطه‌ای است؟

الف: غیرعادی منظم ✓ ب: غیرعادی نامنظم ج: عادی د: عادی نامنظم

مثال:

در معادله $(x-3)^2xy''+3xy'+(x-3)y=0$ نقاط $x=0$ و $x=3$ چه نقاطی

هستند؟

جواب: $x=0$ منفرد عادی

$x=3$ منفرد غیرعادی

بقیه مثال *

$f_1(0)=f_1(1)=0$

$x=0,1$ غیرعادی (تکین) هستند

$$y''-\frac{(2x-1)}{x(x+1)}y'+\frac{2}{x(x+1)}y=0$$

$$g(x)=\frac{-2x+1}{x+1}$$

برای $x=0$

g و h هر دو در صفر تحلیلی هستند

$$h(x)=\frac{2x}{x+1}$$

$x=0$ تکین منظم است. (منفرد منظم)

Subject

Date

$$g(x) = -\frac{2x+1}{x}$$

برای $x=-1$

$$h(x) = \frac{2(x+1)}{x}$$

h و g در $x=-1$ مماس مشترک

پس $x=-1$ نقطه تماس است.

Subject: جلسه 13
Date: 92/9/25

معادله بسل: (Bessel's Equation)

تابع بسل نوع اول:

هر معادله دیفرانسیل به صورت زیر که در آن ν عددی دلخواه است به صورت زیر می‌باشد

(قالب معادله بسل حفظ شود سؤال امتحانی)

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$

نکته:

جواب عمومی معادله بسل بالا به ازای $\nu \neq 0$ و مخالف عدد صحیح به صورت زیر می‌باشد.

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \qquad , x \neq 0$$

که در آن

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{m+\nu} \cdot m! \, \Gamma(\nu+m+1)} x^{2m}$$

تابع گاما

این جواب معادله بسل را تابع بسل نوع اول از مرتبه ν نامیم که به ازای همه مقادیر x همگرا است.

هرگاه $\nu = n$ ، n عدد صحیح باشد آنگاه،

(حفظ شود) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

نکته ۱: (حفظ شود)

الف) $\left[x^\nu J_\nu(x)\right]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$

ب) $\left[x^{-\nu} J_{\nu}(x)\right]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$

نکته ۲:

روابط بازگشتی زیر در مورد توابع بسل نوع اول برقرار است.

الف) $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x)$

ب) $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x)$

ج) $\int x^{\nu} \cdot J_{\nu-1}(x)\, dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + c$

د) $\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\, dx = -x^{-\nu} J_{\nu}(x) + c$

ه) $\int J_{\nu+1}(x)\, dx = \int J_{\nu-1}(x)\, dx - 2J_{\nu}(x)$

مثال:

با توجه به روابط بازگشتی زیر، برای $J_n(x)$ (تابع بسل نوع اول مرتبه n) حاصل انتگرال برابر با چیست؟

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$$

یک اندیس بالاتر از J_1

$$\int_0^1 r^2 J_1(r)\, dr = r^2 J_2(r)\Big|_0^1 = J_2(1)$$

از رابطه ج نکته ۲ استفاده کرده

الف) $J_2(1)$

ب) $J_0(1)$

ج) $J_1(1) - J_2(1)$

د) $J_0(1) - J_1(1)$

Subject
Date

مثال:

جواب معادله $xy''+y'+xy=0$ که $y(0)=1$ کدام گزینه درست است؟

این معادله، معادله بسل با $\nu=0$ است پس جواب این معادله $y=J_0(x)$ است یعنی داریم:

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2^{2m+\nu}\cdot m!\,\Gamma(\nu+m+1)} x^{2m}$$

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}\cdot m!\,\underbrace{\Gamma(m+1)}_{m!}} x^{2m} = \frac{(-1)^m}{4^m\cdot m!\cdot m!} x^{2m}$$

میدانیم: $\Gamma(m+1) = m!$

$$= \frac{(-1)^m}{4^m\cdot (m!)^2} x^{2m}$$

مثال: (این سؤال را باید حتماً تمرین کنید)

با توجه به رابطه بازگشتی زیر، انتگرال $\int_0^1 x(1-x)^2 J_0(x)\,dx$ را محاسبه کنید:

الف) $2J_2(1)$

ب) $J_1(1)$

ج) $J_1(1)-J(0)$

د) $J_2(1)-J_1(1)$

$$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)\,J_0(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 xJ_0(x)\,dx - \int_0^1 x^3 J_1(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 xJ_0(x)\,dx = xJ_0(x)\Big|_0^1 = J_1(1)$$

Subject
Date

$$\int_0^1 x^3 J_0(x)\,dx = x^3 J_1(x)\Big|_0^1 - \int 2x^2 J_1(x)\,dx$$

$$= J_1(1) - 2x^2 J_2(x)\Big|_0^1 = J_1(1) - 2J_2(1)$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)\,J_0(x)\,dx = 2J_2(1)$$

$u = x^2$ $\qquad$ $dv = xJ_0(x)\,dx$

$du = 2x\,dx$ $\qquad$ $v = xJ_1(x)$

برای توابع بسل نوع اول داریم $J_n(x) = (-1)^n J_n(x)$ و داریم

از آن $\dfrac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$ یعنی $\dfrac{dJ_n(x)}{dx}$

J'

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

$$J'_n(x) = \tfrac{1}{2} J_{n-1}(x) - \tfrac{1}{2} J_{n+1}(x)$$

PAPCO