# باسمه تعالی

•　　　•　　　•

•　　　•

تهیه و تنظیم : انجمن علمی دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه علم و صنعت ایران



آدرس کانال تلگرام :
@iust_scientific
@iust_ssme

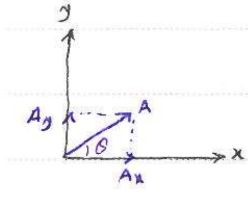
تابستان۱۳۹۵

دانشگاه علم و صنعت ایران

ن والقلم
دانشگاه علم و صنعت ایران
انجمن علمی دانشکده مکانیک

* فیزیک ۱ :

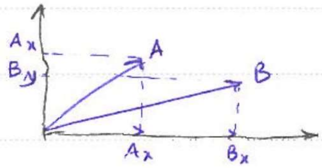
شیوه‌ی نمایش بردار به روش تحلیلی :




$\vec{A} = A_x i + A_y j$

$A_x = A\cos\theta \quad , \quad A_y = A\sin\theta$

جمع و تفریق:




$A+B = (A_x + B_x) + (A_y + B_y)$

ضرب در بردار:

$c\vec{A} = c(A_x i + A_y j + A_z k)$

ضرب اسکالر یا نقطه‌ای دو بردار :

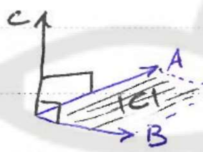
عدد $C = A\cdot B = |A||B|\cos\theta$

$i\cdot j = 1\times 1\times \cos\frac{\pi}{2} = 0 = j\cdot k = k\cdot i$

$i\cdot i = 1\times 1\times \cos 0 = 1 = j\cdot j = k\cdot k$

ضرب برداری دو بردار (خارجی)

بردار $C = A\times B \longrightarrow$ اندازه $|C| = |A||B|\sin\theta$




$i\times j = k \qquad i\times i = j\times j = k\times k = 0$

$j\times k = i$

$k\times i = j$

زاویه بین دو بردار $\longrightarrow \cos\theta = \dfrac{\overset{\vec{a}}{A}\cdot\overset{\vec{v}}{B}}{\underset{|a|\,|v|}{|A||B|}}$

حاصلضرب سه بردار :

$$A\cdot(B\times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$A\times(B\times C) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

کَبْ ـ کَبْ

فصل سوم : حرکت یک بعدی

مکانیک:
- سینماتیک : بررسی حرکت اجسام بدون پرداختن به دلیل آن
- دینامیک : دلایل حرکت اجسام
  - نیرو
  - گشتاور نیرو

حرکت : هنگامی انجام می‌شود که مختصات یک جسم نسبت به یک مبدأ قراردادی تغییر کند.

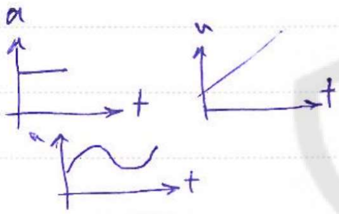
انواع حرکت : انتقالی    دورانی

سرعت متوسط : میزان تغییرات جابجایی در یکای زمان.    $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ m/s

شتاب متوسط : میزان تغییرات سرعت در یکای زمان.    $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

انواع حرکت انتقالی : یکنواخت : حرکتی با سرعت ثابت (در امتداد خط راست) در این صورت می‌توان نوشت :

$\bar{v} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow x = vt + x_0$    معادله حرکت یکنواخت

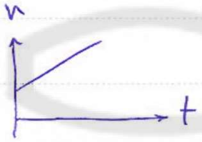


حرکت غیر یکنواخت : حرکت با سرعت متغیر . غیر یکنواخت منظم (شتاب ثابت)

غیر یکنواخت نامنظم (شتاب متغیر)

سرعت لحظه‌ای : سرعت جسم در هر لحظه را گویند.    $v = \frac{dx}{dt}$ ← شیب نمودار x-t

شتاب لحظه‌ای : شتاب جسم در هر لحظه را گویند.    $a = \frac{dv}{dt}$ ← شیب نمودار v-t



حرکت یک بعدی با شتاب ثابت :    $\bar{a} = a = \frac{dv}{dt}$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \rightarrow \boxed{v = at + v_0} = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ v &= \frac{dx}{dt} \rightarrow dt = \frac{dx}{v} \end{aligned}\right\} \boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

معادلات حرکت در سقوط آزاد اجسام : چنانچه سقوط آزاد اجسام را حرکتی با شتاب ثابت بگیریم در این صورت بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا برابر $9.8\ \frac{m}{s^2}$ می‌باشد که با g نمایش می‌دهیم.

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$    $v^2 - v_0^2 = -2gy$    برای تمام حرکت‌ها $\boxed{x = \bar{v}t}$

$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ ← در حرکت شتاب‌دار ثابت

س) جسمی را با سرعت اولیه $v_0$ به بالا پرتاب می کنیم. اگر شتاب حاصل از مقاومت هوا متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای باشد با فرض ثابت بودن g بدست آورید:

الف) جسم تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

ب) در بازگشت به نقطه‌ی پرتاب چه سرعتی دارد؟

الف) $a=-g-kv^2 \rightarrow \frac{dv}{dt}=-g-kv^2 \rightarrow \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dy}{dy} = v\frac{dv}{dy}$ $= v\frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{v\,dv}{-g-kv^2}=dy$

$\cancel{v\frac{dv}{dt}} \rightarrow -\int \frac{v\,dv}{g+kv^2} = \int_{y_1}^{y_2} dy \rightarrow$

$g+kv^2=u \rightarrow 2kv\,dv=du$

$v\,dv=\frac{du}{2k}$

$-\frac{1}{2k}\left(\frac{du}{u}=(y_2-y_1)\right.$

$-\frac{1}{2k}$

س) قایقی که با سرعت ثابت $v_0$ در حرکت است ناگهان موتورش خاموش می شود. اگر شتاب حرکت کند شونده قایق پس از خاموش شدن موتور به صورت $a=-kv$ باشد

الف) سرعت به صورت تابعی از زمان

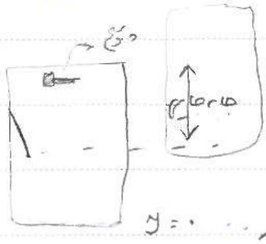
ب) موقعیت x به صورت تابعی از زمان

ج) سرعت قایق به صورت تابعی از زمان

د) زمان و مکان ایستادن قایق

مثال) آسانسوری با شتاب رو به بالای $1.2\ m/s^2$ بالا می‌رود. در لحظه‌ای که سرعت رو به بالای آن $2.4\ m/s$ است، پیچی از سقف آسانسور که $2.7\ m$ بالاتر از کف آسانسور است می‌افتد. بدست آورید:

الف) زمان حرکت پیچ از سقف تا کف؟ ب) جابجایی پیچ تا لحظه‌ی برخورد به کف؟



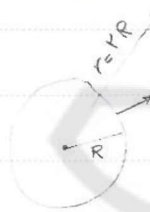

پیچ $\quad y_1 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 = -5t^2 + 2.4t + 2.7$

کف آسانسور $\quad y = 0 \qquad y_2 = \frac{1}{2} a t^2 + v_0' t + y_0' \to 0 = \frac{1}{2} \times 1.2 t^2 + 2.4t$

لحظه‌ی برخورد $\to y_1 = y_2 \to t = 0.71\ s \qquad y_1 = -5(0.71)^2 + 2.4(0.71) + 2.7 = ?$

جابجایی $= 2.7 - y_1$

مثال) از سطح زمین جسمی را دستکم با چه سرعت اولیه‌ای پرتاب کنیم تا الف) به اندازه‌ی شعاع زمین از سطح زمین بالا رود؟ ب) دیگر به زمین برنگردد؟




$$a = -g = -G\frac{M_e}{r^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

$$= v\frac{dv}{dr} \to \int_{v_0}^{0} v\,dv = -GM_e \int_{R}^{2R} \frac{dr}{r^2} \to v = \frac{GM_e}{R}$$

ب) $\quad v = \sqrt{\frac{2GM_e}{R}}$

فصل ۴) حرکت بر مسیر منحنی (حرکت در صفحه):

برای حرکت شتابدار با شتاب ثابت در صفحه:

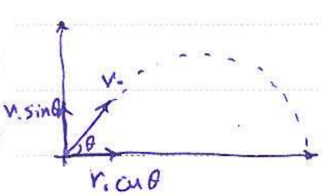
$x: a_x = cte \to v_x = v_{0x} + a_x t \quad ; \quad x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0$

$y: a_y = cte \to v_y = v_{0y} + a_y t \quad ; \quad y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$

$\vec{v} = (v_{0x} + a_x t)\vec{i} + (v_{0y} + a_y t)\vec{j} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$r = xi + yj = \cdots = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + r_0$

حرکت پرتابی:




$x: a_x = 0$ حرکت یکنواخت $\to x = \underset{v_0\cos\theta}{v_{0x}} t + x_0$

$y: a_y = -g$ شتاب‌دار ثابت $\to y = -\frac{1}{2} g t^2 + \underset{v_0\sin\theta}{v_{0y}} t + y_0$

Subject (5)
Date

$x: \ V_x = V_{0x} = cte \quad \longrightarrow \quad v_0 = v_0 \cos\theta \vec{i} + v_0 \sin\theta j$

$y: \ v_y = -gt + v_{0y} \quad \hookrightarrow v = v_{x} i + v_{y} j = i(v_0\cos\theta) + j(v_0 \sin\theta - gt)$

$r = x i + y j = i(v_0 \cos\theta t) + \vec{j}(v_0 \sin\theta t - 1/2 g t^2)$

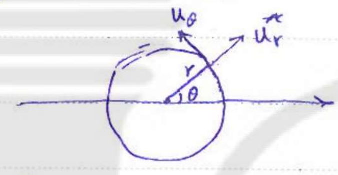
$a = -g\vec{j} \quad \longrightarrow \quad y = x \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$

حرکت دورانی یکنواخت: حرکت با اندازه‌ی سرعت ثابت بر روی یک دایره.

$i \quad u_r$

$j \quad u_\theta$

دستگاه مختصات قطبی:

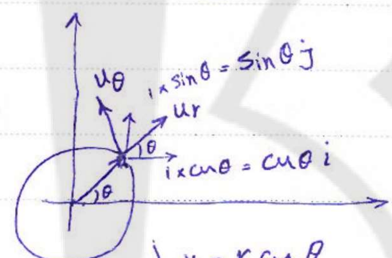



$r = r(x, y)$

$\theta = \theta(x, y)$

$i = i(u_r, u_\theta)$

$j = j(u_r, u_\theta)$




$$\begin{cases} \hat{u}_r = \cos\theta i + \sin\theta j \\ u_\theta = -\sin\theta i + \cos\theta j \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

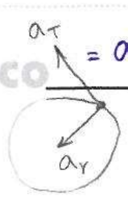
(ω) سرعت زاویه‌ای

$$\begin{cases} \dot{u}_r = \frac{du_r}{dt} = (-\sin\theta)\dot{\theta} i + (\cos\theta)\dot{\theta} j \longrightarrow \boxed{\dot{u}_r = \dot{\theta} u_\theta} \\ \dot{u}_\theta = \frac{du_\theta}{dt} = (-\cos\theta)\dot{\theta} i - (\sin\theta)\dot{\theta} j \longrightarrow \boxed{\dot{u}_\theta = -\dot{\theta} u_r} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{r} = r\hat{u}_r} \quad \boxed{\vec{v} = r\omega \hat{u}_\theta} \quad \boxed{\vec{a} = -r\omega^2 \hat{u}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{u}_r}$$

شتاب مماس در حرکت دورانی: چنانچه در حرکت دورانی اندازه‌ی سرعت نیز تغییر کند، داریم:

$$\vec{v} = v u_\theta \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} u_\theta + v\frac{du_\theta}{dt} = a_T u_\theta - v\omega u_r = a_T u_\theta - r\omega^2 u_r$$

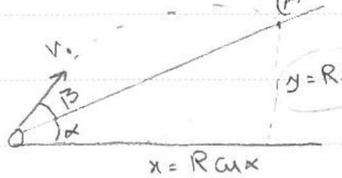



$$= a_T u_\theta - \frac{v^2}{r} u_r = \boxed{\vec{a} = a_T u_\theta - a_r u_r} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_r^2}$$

شتاب مماسی

شتاب شعاعی

مثال) توپی مانند شکل جلوی سراشیبی قرار گرفته است که گلوله هایی را با سرعت اولیه ی $v_0$ به سوی بالای تپه ای با شیب $\alpha$ شلیک می کند. این توپ با چه زاویه ای نسبت به افق باید نشانه گیری شود تا بیشینه ی برد آن یعنی $R$ در دامنه ی تپه به دست آید؟




$$\theta = \alpha + \beta = ?$$

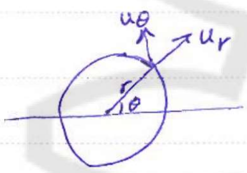
$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

$$\theta = \alpha + \beta$$

$$R = \frac{2v_0}{g\cos\alpha}\sin\theta - \frac{2v_0\sin\alpha\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$$

$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \longrightarrow R = R_{max} \longrightarrow \theta = ? \longrightarrow \beta = ?$$

بررسی حرکت دایره ای غیریکنواخت در مختصات قطبی:




$$\boxed{\vec{r} = r u_r} \qquad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}u_r + \dot{r}\dot{\theta}u_\theta + \dot{r}\dot{\theta}u_\theta + r\ddot{\theta}u_\theta - r\dot{\theta}u_r \longrightarrow \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)u_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})u_\theta}$$

مثال) موقعیت یک ذره در مختصات قطبی به صورت زیر است. $\theta = t^2$ ، $r = t^4$ که $r$ برحسب متر و $\theta$ برحسب رادیان است. در $t = 1s$ به دست آورید که زاویه ی میان سرعت و شتاب ذره چقدر است؟

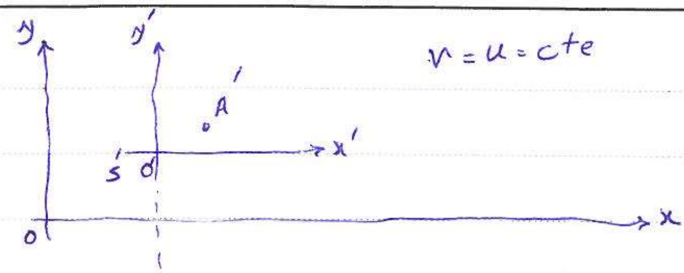
$$a \cdot v = |a||v|\cos\theta$$

$$\dot{r} = 4t^3 \quad \ddot{r} = 12t^2 \quad \dot{\theta} = 2t \quad \ddot{\theta} = 2$$

$$\vec{v} = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta = \overset{A_1}{4t^3}u_r + \overset{A_2}{t^4(2t)}u_\theta \longrightarrow v = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \xrightarrow{t=1s}$$

$$\vec{a} = \dots = \underbrace{(12t^2 - t^4(2t)^2)}_{B_1}u_r + \underbrace{[2\times 4t^3\times 2t + t^4(2)]}_{B_2}u_\theta \longrightarrow a = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

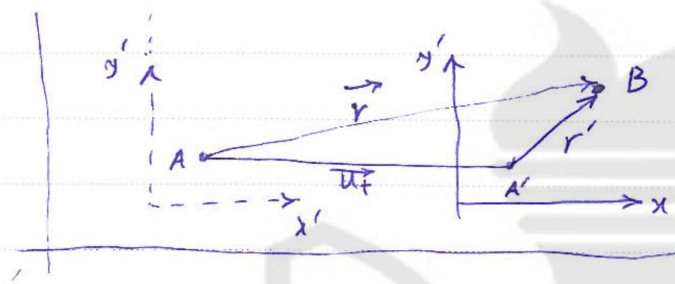
$$\cos\theta = \frac{68}{\sqrt{20}\sqrt{388}}$$




$v = u = cte$

سرعت نسبی و شتاب :

سرعت امری است نسبی . یعنی بستگی به بیننده و چارچوب مرجعی دارد که حرکت جسم را بررسی می کند. حال پرسشی که در اینجا مطرح می شود اینست که چگونه می توان این اندازه گیری را باهم مقایسه نمود. یکی از ساده ترین حالتها بررسی حرکت از دید دو بیننده ای است که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می کنند.




دو قطار
دو ایستگاه

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$

$v = v' + u$

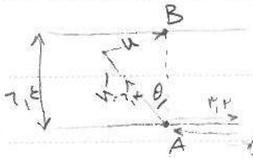
سرعت جسم در دستگاه s

سرعت جسم در s'

سرعت دستگاه s' نسبت به s

$\vec{a} = \vec{a}'$ شتاب ناورداست

مثال) شخصی می تواند با پارو زدن در آب ساکن قایق را با سرعت $۶,۴ \ km/h$ براند : الف) اگر او بخواهد از رودخانه ای که در آن سرعت جریان آب $۳,۲ \ km/h$ است عبور کند و به نقطه ای درست روبروی نقطه ی حرکتش برسد قایق را در چه جهتی باید براند؟ ب) اگر پهنای رودخانه $۶,۴ \ km$ باشد چقدر طول می کشد شخص با قایق از آن عبور کند؟ ج) چه مدت طول می کشد تا شخص $۳,۲ \ km$ در جهت آب پارو بزند و به نقطه ی اول برسد؟ د) چه مدت طول می کشد تا شخص $۳,۲ \ km$ در خلاف جهت آب پارو بزند و سپس به نقطه ی اول برگردد؟ ه) اگر او بخواهد در کمترین زمان ممکن از رودخانه عبور کند قایق را در چه جهتی باید براند؟




جریان آب
الف) $v = v' + u = 6.4 + 3.2 = 9.6$

$\sin\theta = \frac{u}{v'} = \frac{3.2}{6.4} \to \theta = 30^\circ$

ب) $v^2 = v'^2 - u^2 \to \boxed{v = ?}$

$v = v'\cos\theta = ?$ $\to y = vt \to t = \frac{6.4}{v}$

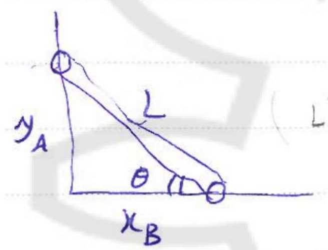
ج) رفت $v = v' + u = 3.2 + 6.4 = 9.6\ km/h$ $\quad x = vt_1 \to t_1 = \frac{3.2}{9.6}\ (h)$

برگشت $v = v' - u = 6.4 - 3.2 = 3.2$ $\quad x = vt_2 \to t_2 = \frac{3.2}{3.2} = 1\ (h)$

د) $t_{کل} = t_1 + t_2$

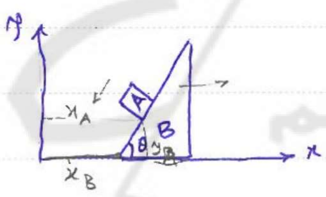
بررسی حرکت در سیستم‌های مقید :

در شکل روبرو نسبت سرعت A به B را بیابید !




$(L^2 = y_A^2 + x_B^2)' \to 0 = 2y_A y_A' + 2x_B x_B' \to \boxed{\frac{y_A'}{x_B'} = -\frac{x_B}{x_A} = \frac{v_A}{v_B}}$

مثال) رابطه‌ی شتاب‌ها را در دستگاه روبرو بیابید ؟




$tg\theta = \frac{y_A}{x_B - x_A} \to y_A'' = (x_A'' - x_B'')\, tg\theta$

$a_{y_A} = (a_{x_A} - a_{x_B})\, tg\theta$

فصل ۵) دینامیک ذره : علل حرکت و چرخش

انواع برهم‌کنش‌های موجود در طبیعت : ۱) گرانش : دو جسم با جرم‌های مشخص همدیگر را جذب می‌کنند. (نیروی بین اجرام)

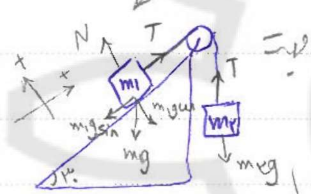
۲) الکترومغناطیس : بحث در مورد ماهیت اجسام و الکترون‌ها

۳) هسته‌ای قوی و ضعیف

Subject (۹)
Date

قوانین نیوتن: اول) هر جسم در حال سکون و یا در حال حرکت در امتداد خط مستقیم به سرعت ثابت خود ادامه می‌دهد مگر آنکه از خارج نیرو یا نیروهایی به آن وارد شود. دوم) اگر به جسمی نیرو وارد شود در راستای نیرو شتابی می‌گیرد که با نیرو متناسب بوده و با جرم آن رابطه عکس دارد. $a \propto \frac{1}{m} \to F = ma$ سوم) برای هر کنش واکنشی است مساوی و خلاف جهت آن.

مثال) جسمی به جرم $m_1 = 3kg$ بر روی یک سطح شیبدار با زاویه $30°$ قرار دارد و به وسیله ریسمانی که از روی قرقره بدون اصطکاک گذشته است به جسم دیگری به جرم $m_2 = 2kg$ که به طور عمودی آویزان است، وصل شده. الف) شتاب هر جسم؟ ب) نیروی کشش ریسمان؟ جهت حرکت را به یک طرف فرض می‌کنیم. شتاب مثبت شد جهت درست.

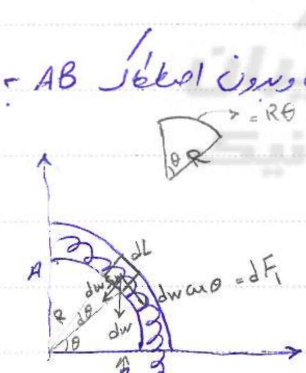



$$\begin{cases} m_1 : T - m_1 g \sin\theta = m_1 a_1 = m_1 a \\ m_2 : T - m_2 g = m_2 a_2 = -m_2 a \\ a_1 = -a_2 = a \end{cases} \Rightarrow m_1 g \sin\theta - m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \sin\theta) g}{m_1 + m_2} \to a_1 = 1 \, m/s^2 \quad T = m_1 g \sin\theta + m_1 a = 18 \, (N)$$

چون مثبت شد جهت واقعی حرکت خلاف جهت فرضی است.

مثال) در شکل رو به رو زنجیری همگن به طول L و چگالی جرمی خطی λ درون لوله‌ی خمیده و بدون اصطکاک AB به شعاع R آغاز به لغزیدن می‌کند. شتاب آن را بیابید؟




جمع تدریجی همه جرم

$$dF_1 = dw \cos\theta \xrightarrow{\text{جمع}} F = \int dF_1 = \int dw \cos\theta$$

$$dw = g\,dm = g \lambda\, dL \to F_1 = \int_0^{\theta} R g \lambda \cos\theta \, d\theta \to \boxed{F_1 = \lambda g R \sin\theta}$$

$$dL = R\,d\theta$$

$$F_2 = m_2 g = y \lambda g \xrightarrow{y = L - R\theta} \boxed{F_2 = \lambda g (L - R\theta)}$$

جرم کل زنجیر

$$\Sigma F = ma \to F_1 + F_2 = ma$$

$$a = \lambda g \frac{(R\sin\theta + (L - R\theta))}{\lambda L} = \frac{g\,(R\sin\theta + (L - R\theta))}{L}$$

اگر تمامی زنجیر خارج شود $\theta = 0 \to \sin 0 = 0 \to a = g$

فصل ۶ ) دینامیک ذره ۲ (بررسی نیروهای متغیر)

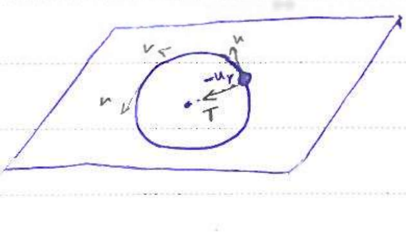
نیروی مالشی (اصطکاک) : اگر جسمی بر روی یک سطح کشیده شود نیروی مقاومی در خلاف جهت حرکت جسم وارد می‌شود . ① اصطکاک ایستایی $f_s$ : اصطکاکی که در حال سکون از سوی سطح تماس به جسم وارد می‌شود و متناسب است با نیروی عمود بر سطح و بیشترین مقدار آن با کمترین نیروی لازم برای آغاز حرکت جسم برابر است . $f_s \le \mu_s N \Leftarrow F_{min} = f_{smax} = \mu_s N$ برای حرکت

② اصطکاک جنبشی $f_k$ : نیروی مالشی میان سطوحی که نسبت به هم در حال حرکتند و با نیروی عمود بر سطح متناسب بوده و همواره از نیروی اصطکاک ایستایی ماکزیمم کوچکتر است . $f_k = \mu_k N < f_{smax} \rightarrow \mu_k < \mu_s$

ضریب ایستایی $\mu_s$

ضریب جنبشی $\mu_k$ : ضریبی است که هرگاه در نیروی عمود بر سطح $N$ ضرب شود کمترین مقدار نیروی لازم را برای متوقف کردن دو جسم که نسبت به هم در حال حرکت یکنواختند فراهم کند .

دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت : $F = ma \rightarrow F = m\frac{v^2}{r}$

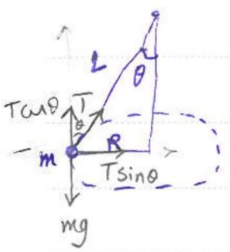


$\vec{F} = m\frac{v^2}{r}(-u_r)$ $F = -m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$

اگر جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد قرص باشد متصل به انتهای یک نخ که روی یک میز افقی بدون اصطکاک در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند، آنگاه به خاطر شتاب‌دار بودن حرکت، نیرویی به جسم وارد می‌شود

که برابر است با: $F = -m\frac{v^2}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

آونگ مخروطی:

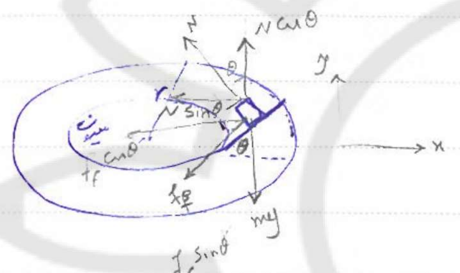



$$\begin{cases} x: T\sin\theta = m\frac{v^2}{R} \\ y: T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{v^2 = Rg\,tg\theta}$$

$$\tau \text{ تاو} \rightarrow \text{زمان تناوب} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g\,tg\theta}}$$

$$\xrightarrow{R = L\sin\theta} \tau = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

نمونه) شیب چقدر باشد تا ماشین پرتاب نشود




$$x: N\sin\theta + f_f\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$$

$$f_f = \mu N$$

$$y: N\cos\theta - f_f\sin\theta - mg = 0$$

$$v = \sqrt{rg\left(\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}\right)}$$

$$tg\theta = \frac{v^2 - \mu rg}{\mu v^2 + rg}$$

چارچوب مرجع لخت: چارچوب مرجعی است که نسبت به ستاره‌ها ساکن است و یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

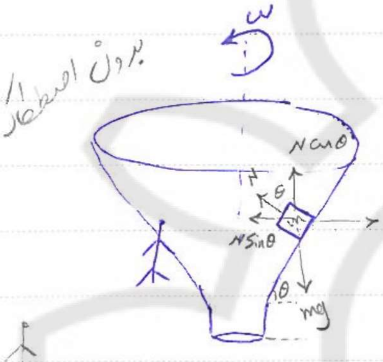
چارچوب مرجع نالخت: چارچوب مرجعی است که شتاب‌دار است و یا نسبت به ستاره‌ها می‌چرخد.

به عبارتی دیگر این چارچوب‌ها، چهارچوب‌هایی هستند که به وسیله‌ی قانون اول نیوتن تعریف می‌شوند.

در بررسی حرکت از چارچوب های نالخت در بکارگیری قوانین مکانیک کلاسیک در توصیف پدیده های طبیعی محدودیت وجود دارد.

نکته مهم: همانطور که در نمونه های بالا دیده می‌شود در دستگاه نالخت یک نیروی مجازی به جسم وارد می‌شود که برابر است با $-ma$ که در آن $a$ شتاب دستگاه نالخت نسبت به چارچوب لخت می‌باشد. به محض بررسی حرکت در دستگاه لخت نیروهای مجازی حذف خواهند شد.

جسم m ساکن در قیف



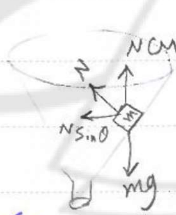

مثال) از دید بیننده متصل به قیف:

دستگاه در راستای نیروی جانب مرکز

$F_i = \frac{mv^2}{r} \qquad F_i = -ma$

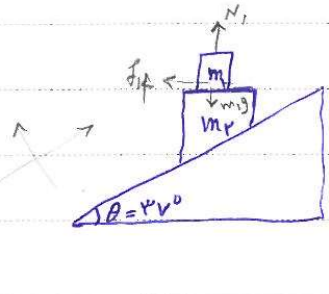
$$\begin{cases} x: \frac{mv^2}{r} - N\sin\theta = 0 \\ y: N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

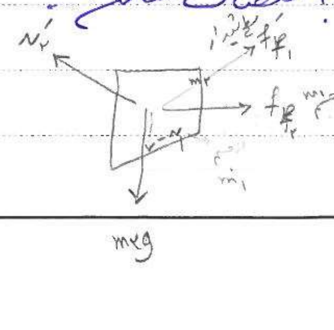
از دید بیننده خارج از قیف:




$$\begin{cases} y: N\cos\theta - mg = 0 \\ x: N\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \end{cases}$$

مثال) بر روی سطح شیبداری به زاویه $37^\circ$ مانند شکل ۲ وزنه $m_1$ و $m_2$ به ترتیب به جرم ۶ و ۱۵ کیلوگرم بر روی هم قرار دارند. اگر ضریب اصطکاک بین تماس سطوح تماس $\mu =$ ۰/۱ باشد تعیین کنید مولفه های افقی و عمودی شتاب ۲ جسم نسبت به مختصات ساکن.



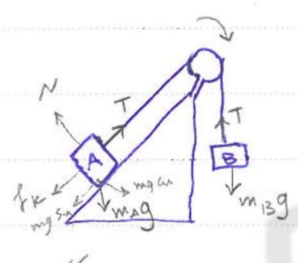
$$a_{1y} = a_{2y} = -a_y$$

$$m_2: \begin{cases} f_2 \sin\theta + N_2 \cos\theta - N_1 - m_2 g = -m_2 a_y \\ f_2 = \mu N_2 \\ f_2 \cos\theta + f_1 - N_2 \sin\theta = m_2 a_{2x} \rightarrow \mu N_2 \cos\theta + \mu N_1 - N_2 \sin\theta = m_2 a_{2x} \\ tg\,\theta = \frac{a_y}{a_x} \end{cases}$$

$$m_1: \begin{cases} N_1 - m_1 g = -m_1 a_y \\ f_1 = m_1 a_{1x} \rightarrow \mu N_1 = m a_{1x} \\ f_1 = \mu N_1 \end{cases}$$

نمونه: جسم A و جسم B مانند شکل از راه طناب بدون جرمی به هم متصل شده اند. قرقره اصطکاک ندارد و سطح شیبدار ثابت است. اگر $m_A = 2m_B$ و زاویه ی سطح شیبدار $37^\circ$ باشد و جسم ها با سرعت ثابت حرکت کنند، جهت حرکت و ضریب اصطکاک حرکتی میان جسم A و سطح شیبدار را بیابید؟

ف: جهت حرکت



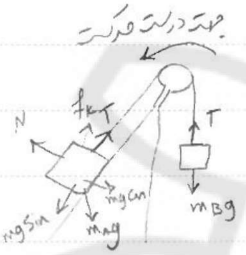

$$B: T - m_B g = 0$$

$$A: T - f_k - m_A g \sin\theta = 0 \quad , \quad N - m_A g \cos\theta = 0$$

$$f_k = \mu_k N$$

از حل دستگاه $\rightarrow \mu_k = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{m_B}{m_A} - \sin\theta\right) = -\frac{1}{8} < 0 \rightarrow$ جهت حرکت نادرست

جهت درست حرکت




$$B: T = m_B g$$

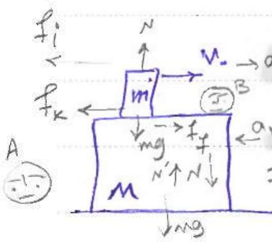
$$A: T + f_k = m_A g \sin\theta \quad , \quad f_k = \mu_k N$$

$$\mu_k = \frac{1}{\cos\theta}\left(-\frac{m_B}{m_A} + \sin\theta\right) \rightarrow \mu_k = \frac{1}{8} \simeq 0.12$$

نمونه: جسمی به جرم m بر روی قطعه ای به جرم M قرار دارد و قطعه بر روی زمین بدون اصطکاک قرار گرفته است. ضریب اصطکاک حرکتی بین جسم و مکعب $\mu_k$ است. با ضربه زدن به جسم m سرعت اولیه ی $v_0$ به آن می دهیم. حساب کنید که پس از چه مدت زمانی جسم m نسبت به مکعب متوقف می شود و در این مدت بر روی مکعب چه مسافتی را طی کرده است؟

از نظر B

از نظر A




$$-f_k = ma \rightarrow -\mu_k mg = ma \rightarrow a = -\mu_k g \quad (1)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{-v_0^2}{2a} \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \Delta x = \frac{v_0^2}{2\mu_k g} \quad , \quad \Delta x = \frac{v + v_0}{2}\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v_0}{\mu_k g}$$

کاملاً اشتباه

$$a_m = \frac{-\mu_k mg}{m} = -\mu_k g \quad , \quad a_M = \frac{\mu_k mg}{M} \rightarrow v = at + v_0 \quad \begin{cases} v_m = v_0 - \mu_k g t \\ v_M = \mu_k \frac{m}{M} g t \end{cases}$$

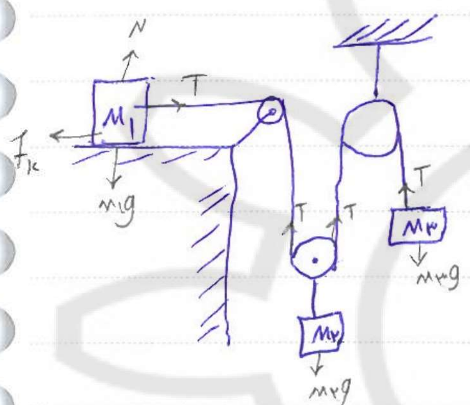
Subject
Date



$\xrightarrow[\text{دو سرعت برابر}]{\text{هنگام توقف}} v_0 - \mu_k g t = \mu_k \frac{m}{M} g t \rightarrow v_0 = g \mu_k t (\frac{m}{M} + 1) \rightarrow t_{\text{توقف}} = \frac{v_0}{\mu_k g (\frac{m}{M} + 1)}$

$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$ $\qquad$ $a_{\text{نسبی}} = a_1 - a_2$

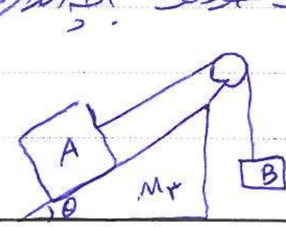
نمونه) در شکل روبه‌رو قرقره متصل به جسم میانی متحرک است و تقیید قرقره‌ها ثابتند. اگر $m_1 = m_3 = 1kg$ و $m_2 = 2kg$ و ضریب اصطکاک میان جسم سمت چپ و میز $\mu_k = \mu_k$ باشد الف) چه ارتباطی میان شتاب $m_1, m_2, m_3$ وجود دارد؟ ب) کشش نخی که جسم‌ها را به هم متصل کرده چقدر است؟



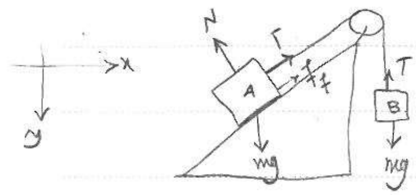

$$\begin{cases} T - f_k = m_1 a_1 \\ N = m_1 g \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - m_3 g = m_3 a_3 \\ 2T - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases}$$

نمونه: مانند شکل زیر دو جسم A و B بر روی گوه با زاویه شیب $\theta$ قرار دارند. بین جسم A و سطح گوه اصطکاک وجود دارد ولی خود گوه روی سطحی بدون اصطکاک قرار دارد. اگر جسم B به اندازه‌ی H بالا بیاید جسم A هم به پایین سطح حرکت می‌کند. در این صورت خود گوه به چه اندازه روی سطح جابه‌جا شده؟




$m_A = M_1$
$m_B = M_2$
$m_{\text{گوه}} = M_3$



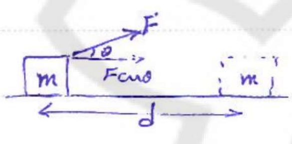
$$y:\ m_A g - N\cos\theta - f_f\sin\theta - T\sin\theta = a_{y_A} m_A$$

$$x:\ f_f\cos\theta + T\cos\theta - N\sin\theta = a_{x_A} m_A$$

$$m_B g - T = a_B m_B$$

## فصل ۷ : کار و انرژی

کار حاصل از نیروی ثابت : کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد برابر است با حاصلضرب نیرو در جابجایی جسم در راستای نیرو و داریم :



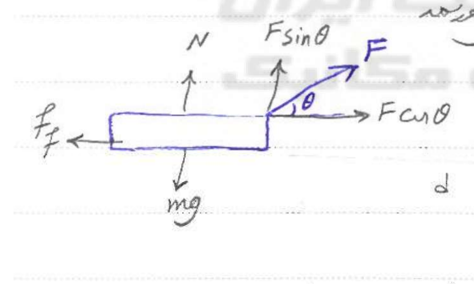
$$W = F_x d = F\cos\theta\, d = Fd\cos\theta \qquad N.m = J$$

نکته : اگر به جسمی بیش از یک نیرو وارد شود کار انجام یافته روی جسم برابر است با حاصل جمع جبری کارهای انجام یافته به وسیله‌ی تک تک نیروها :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \Rightarrow W_T = F.d = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots = W_1 + W_2 + \dots$$

مثال ) شخصی سورتمه‌ای به وزن $W$ را روی سطح افقی با سرعت ثابت به اندازه‌ی $d$ می‌کشد . اگر ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k$ باشد و نیروی کشش با افق زاویه‌ی $\theta$ بسازد ، مقدار کار انجام یافته به وسیله‌ی شخص بر روی سورتمه در این جابجایی چقدر است ؟

کار شخص روی سورتمه : $W_F = ? = Fd$

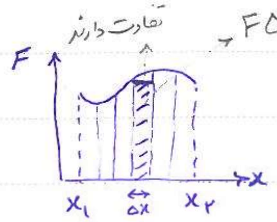


سرعت ثابت

$$\Sigma F = 0 \rightarrow \begin{cases} F\cos\theta - f_f = 0 \\ F\sin\theta + N - mg = 0 \\ f_f = \mu_k N \end{cases} \Rightarrow F = \frac{\mu_k mg}{(\cos\theta + \mu_k\sin\theta)}$$

$$W = F\cos\theta\, d = \frac{\mu_k mg\cos\theta\, d}{(\cos\theta + \mu_k \sin\theta)}$$

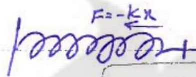
کار حاصل از یک نیروی متغیر:




الف) حالت یک بعدی: سطح زیر نمودار $F-x$

$$\boxed{W_T = \sum W = \sum_{\Delta x \to 0} F_i \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx}$$

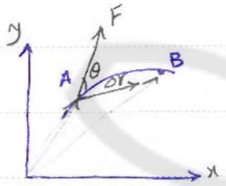
نیروی کشسانی فنر:




$$W = \int F\cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\, dx = 1/2\, kx^2 \Rightarrow \boxed{W = 1/2\, k(x_2^2 - x_1^2)}$$

نیروی گرانش:

$$F = \frac{G m_1 m_e}{r^2} \Rightarrow \boxed{W = -mg(y_2 - y_1)} \rightarrow$$ برای جسمی در حوزه نزدیک زمین




ب) حالت دو بعدی: چنانچه نیرو از نظر اندازه و جهت تغییر کند و ذره در فضای دو بعدی حرکت کند خواهیم داشت:

$$\Delta W = F\cdot \Delta r = F\cos\theta\, \Delta r$$

$$W_{AB} = \int_A^B F\cdot dr = \int_A^B F\cos\theta\, dr$$

$$W_{AB} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy + \underbrace{\int_A^B F_z dz}_{\text{سه بعدی}}$$

قضیه کار-انرژی: چنانچه به فرض نیروی برایند $F$ به جسمی وارد شده و جسم در راستای آن (مقدار راستای $x$) جابجا شود، داریم:

$$W = \int F\cdot dr = \int F dx = \int m\frac{dv}{dt}dx = \int_{v_1}^{v_2} m v\, dv = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \Delta E_k = \Delta K$$

$W = \Delta K$ تغییر انرژی درونی

برای حالتی با بیش از یک نیرو: $F = F_1 + F_2 + \dots \rightarrow W = Fx = F_1 x + F_2 x + \dots \rightarrow W = W_1 + W_2 + \dots = \Delta K$

رها شدن جسم از حال سکون و از ارتفاع $h$: $W = F\cdot d = mgh = \Delta K = 1/2\, m(v^2 - v_0^2) = 1/2\, mv^2$


$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

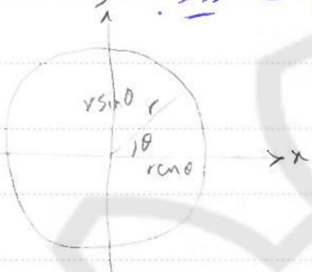
توان: میزان کار انجام یافته در یکای زمان

$\bar{P}_{\text{میانگین}} = \frac{W}{t}$ $\quad \xrightarrow{P = cte} \bar{P} = P$

$P_{\text{لحظه‌ای}} = \frac{dW}{dt}$ $\quad P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = F \cdot v$

مثال) اگر نیروی $F = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y + z^2)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$ باعث شود که ذره‌ای در صفحه‌ی $xy$ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات

به شعاع $r = 3m$ را بپیماید. کار این نیرو را در یک دور کامل بر روی دایره‌ی یاد شده را بدست آورید.




$W = \int F\, dr = \ldots \xrightarrow{z = cte = 0} = \int (2x - y)\, dx + \int (x + y)\, dy$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \longrightarrow dx = -r\sin\theta\, d\theta \\ y = r\sin\theta \longrightarrow dy = r\cos\theta\, d\theta \end{cases} \longrightarrow W = \int_0^{2\pi} -r^2 (\sin 2\theta + \underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}})\, d\theta +$

$\int_0^{2\pi} r^2 (\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} + 1/2 \sin 2\theta)\, d\theta \longrightarrow W = 18\pi$

مثال) نیروی زیر به جسمی وارد می‌شود. $F = 2xy\,\hat{i} + (x^2 + 2yz)\hat{j} + y^2\hat{k}$ کار انجام یافته بر روی جسم

برای حرکت از مبدأ مختصات به نقطه‌ی $(1,1,2)$ در مسیری که با معادله‌ی پارامتری زیر مشخص می‌شود را بیابید. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

$W = \int_0^1 F_x\, dx + \int_0^1 F_y\, dy + \int_0^2 F_z\, dz \longrightarrow \int_0^1 2(t)(t)\, dt + \int_0^1 t^2 + 4t^2\, dt + \int_0^1 \cancel{4}t^2\, dt$

$= \int_0^1 2t^2 + \int_0^1 5t^2\, dt + \int_0^1 2t^2\, dt = \int_0^1 9t^2 = \frac{9}{3} t^3 \Big|_0^1$

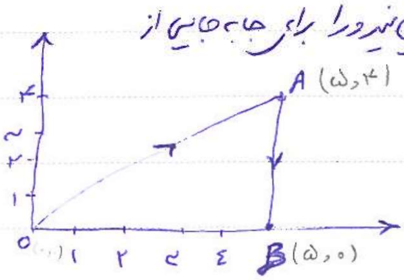
$= 3J$

$(0,0,0) \longrightarrow (1,1,2)$

$t = 0 \longrightarrow t = 1$

$\begin{cases} x = t \xrightarrow{x = 0} \\ y = t \xrightarrow{y = 0} \\ z = 2t \xrightarrow{z = 0} \end{cases} \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad + \begin{cases} 1 \end{cases}$

مثال) نیروی $\vec{F}=\alpha x y\,\hat{i} + \beta x^2\hat{j}$ بر ذره‌ای اثر می‌کند که $\alpha$ و $\beta$ اعداد ثابت هستند الف) کار این نیرو را برای جابجایی از نقطه‌ی O به A در مسیری که در شکل دیده می‌شود حساب کنید. ب) کار این نیرو را برای جابجایی از نقطه A به B در مسیری که در شکل دیده می‌شود حساب کنید.




$\frac{y}{x}=\frac{4}{5} \rightarrow y=\frac{4}{5}x$ معادله خط

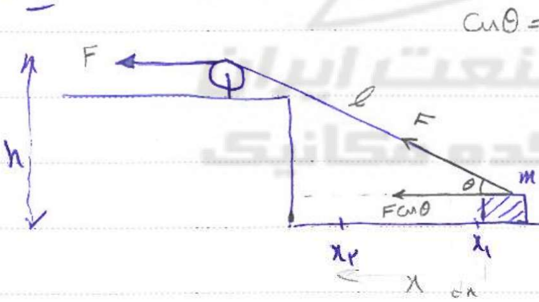
$$W=\int F_x dx+\int F_y dy=\overbrace{\int_0^5 \alpha x y\, dx}^{W_x} \xrightarrow{y=\frac{4}{5}x} \int_0^5 \frac{4\alpha}{5}x^2 dx=\frac{4\alpha}{3\times 5}x^3\Big|_0^5=\frac{100}{3}\alpha\ j \text{ ژول}$$

$$W_y=\int_0^4 \beta x^2 dy \xrightarrow{x=\frac{5}{4}y} \int_0^4 \frac{25\beta}{16}y^2 dy=\frac{25\beta}{16\times 3}y^3\Big|_0^4=\frac{100}{3}\beta\ j \text{ ژول}$$

$$W_{AB}=\int F_x dx+\int F_y dy=\int_4^0 \beta x^2 dy \xrightarrow{x=cte=5} \beta x^2\int_4^0 dy=\beta x^2 y=\beta(5)^2 y\Big|_4^0=-100\beta\ j \text{ ژول}$$

مثال) در شکل زیر ارابه در راستای محور x ها روی ریل افقی بدون اصطکاک می‌لغزد، این ارابه به طنابی بسته شده است که از روی قرقره بدون جرم و اصطکاکی که در ارتفاع $h=1.2\,m$ عبور کرده است. در اثر کشیده شدن طناب با نیروی $25\,N$ ارابه از نقطه‌ی $x_1=3m$ به $x_2=1m$ کشیده می‌شود. تغییر انرژی جنبشی ارابه در هنگام این جابجایی چقدر است؟

$\cos\theta=\frac{x}{L}$




$$dw=F\cos\theta\, dx=F\frac{x\,dx}{L} \rightarrow w=\int\frac{F x\,dx}{L}$$

نیروی پایستار: کار انجام یافته‌ی آن وابسته به مسیر نیست.

$$\oint F\cdot dr = 0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} F_z = \frac{\partial}{\partial z} F_y \\ \frac{\partial}{\partial x} F_z = \frac{\partial}{\partial z} F_x \\ \frac{\partial}{\partial z} F_y = \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{cases}$$

انرژی پتانسیل (یک بعدی):

$$\Delta K = -\Delta U \rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0$$

$$\rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = E$$ قانون پایستگی انرژی مکانیکی

نکته:

$$W = \Delta K \;,\; \Delta K = -\Delta U \;,\; W = \int F\cdot dr \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \Delta U = -\int F\cdot dr \\ U = -\int F\cdot dr + U_0 \end{array}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} U = -\int F_x\,dx + C(z,y) \\ U = -\int F_y\,dy + C(x,z) \\ U = -\int F_z\,dz + C(x,y) \end{cases} \longrightarrow \boxed{F = -\hat{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial U}{\partial z}}$$

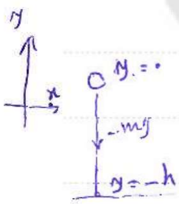
نیروهای ناپایستار:

$$\Delta K + \Delta U \neq 0 = W_f$$ کار نیروی ناپایستار

$$\Delta E = W_f \rightarrow \boxed{E - E_0 = W_f} \quad W_f < 0 \rightarrow E < E_0$$

$$= -U_{int} \qquad \rightarrow \Delta E + U_{int} = 0$$

انرژی پتانسیل گرانشی:




$$U = -\int F\cdot dr = -\int F_y\,dy = -\int_{-h}^{0} -mg\,dy \rightarrow U = mgh\Big|_{-h}^{0} = -mgh$$

انرژی پتانسیل نیروی کشسانی فنر:

$$W = \tfrac{1}{2}kx^2$$ فنر

$$F = -kx \quad \rightarrow W = \int F\cdot dr = \int F_x\,dx = \int -kx\,dx = -\tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\Delta U = -(-\tfrac{1}{2}kx^2) = \tfrac{1}{2}kx^2$$

Subject
Date



مثال نمودار

ج) نسبت $\alpha$ به $\beta$ را طوری بیابید که نیروی بالا پایستار باشد؟

د) به ازای $\alpha = 1$ پتانسیل این نیروی پایستار را بیابید؟

ج.) $\frac{\partial}{\partial y} F_z = \frac{\partial}{\partial z} F_y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(0) = \frac{\partial}{\partial z}(\beta x^2) \rightarrow 0 = 0$

$\frac{\partial}{\partial x} F_z = \frac{\partial}{\partial z} F_x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(0) = \frac{\partial}{\partial z}(\alpha x y) \rightarrow 0 = 0$

$\frac{\partial}{\partial x} F_y = \frac{\partial}{\partial y} F_x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\beta x^2) = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha x y) \rightarrow 2\beta x \stackrel{?}{=} \alpha x \xrightarrow[\text{پایستار بودن}]{\text{شرط}} \boxed{\alpha = 2\beta}$

د) $\alpha = 1 \rightarrow \beta = 1/2 \rightarrow F = xy\,\hat{i} + 1/2\, x^2\,\hat{j}$

$U = -\int F_x\,dx + C(y,z) = -\int (xy)\,dx + C(y,z) = -\frac{yx^2}{2} + C(y,z)$

$U = -\int F_y\,dy + C(x,z) = -\int \frac{x^2}{2}\,dy + C(x,z) = -\frac{yx^2}{2} + C(x,z)$

$U = -\int F_z\,dz + C(x,y) = 0 + C(x,y)$

$U = -\frac{yx^2}{2} + \underbrace{C(y,z)}_{\to C_0}$

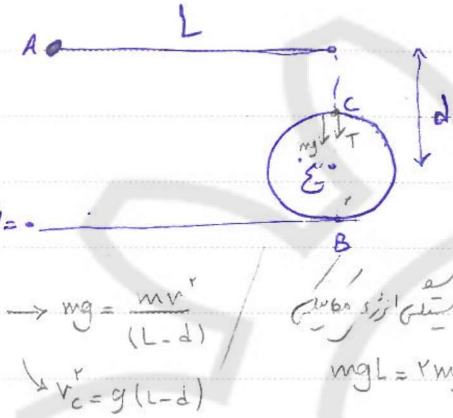
$U = -\frac{yx^2}{2} + \underbrace{C(x,z)}_{\to C_0}$

$U = -\frac{yx^2}{2} + \underbrace{C(x,y)}_{\to -\frac{yx^2}{2} + C_0}$

حل کامل مسئله ی مربوط به نیروهای یک بعدی که فقط به موضع بستگی دارند :

$$k+u=E \longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + u(x) = E \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E-u(x))} = \frac{dx}{dt} \longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-u_x)}} = \int dt$$

مثال) در شکل مقابل فاصله ی میخ تا نقطه ی آویز برابر d است. نشان دهید که d باید دست کم برابر $0.6L$ باشد تا گلوله روی دایره ای به مرکز میخ به طور کامل دور بزند.




c در: $T+mg = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{(L-d)}$

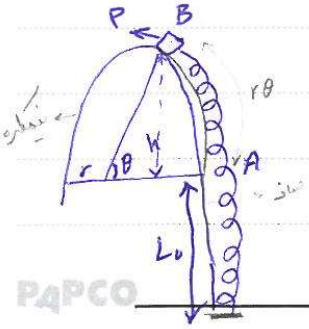
کمترین سرعت ممکن برای دور کامل زمانی است که $T=0$ کشش

$\longrightarrow mg = \frac{mv^2}{(L-d)} \to v_c^2 = g(L-d)$

پایستگی انرژی مکانیکی : $mgL = mg2(L-d) + \frac{1}{2}mv_c^2$

$mgL = 2mg(L-d) + \frac{1}{2}mg(L-d) \longrightarrow d = \frac{3}{5}L$

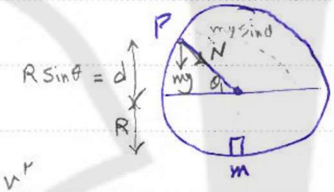
مثال) مانند شکل نیروی متغیر P را همواره مماس بر سطح استوانه ای به شعاع R نگه می داریم. این نیرو جسمی به جرم m را که به فنری متصل است حرکت می دهد به طوریکه سر دیگر فنر به نقطه ای ثابت شده است. جسم m را در اثر کشش نیروی P از نقطه ی A بدون سرعت اولیه به نقطه ی B منتقل شده و به سرعت $v_0$ می رسد درصورتیکه در نقطه ی A فنر طول طبیعی ما داشته باشد و ضریب سختی فنر $k=ax^2+bx$ باشد که در آن a و b مقادیر ثابت و x تغییر طول فنر است، کار نیروی P را در این جابجایی به دست آورید.



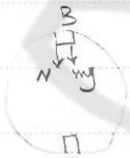

$W_P = \Delta U + \Delta K + \Delta e_{\text{فنر}}$ | $\Delta e_{\text{فنر}} = \int_0^{r\theta} F\,dx$ , $F = kx = ax^3+bx^2$

$$\int_0^{r\theta}(ax^3+bx^2)\,dx = \frac{ar^4\theta^4}{4} + \frac{br^3\theta^3}{3} \longrightarrow W_P = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 + \Delta e \xrightarrow{h=r\sin\theta}$$

مثال) در شکل روبه رو ذره ای به جرم m در بخش درونی یک دایره ی عمودی به شعاع R حرکت می کند و نیروی مالشی وجود ندارد. سرعت m وقتی که در پایین ترین وضعیت خود قرار دارد $v_0$ است. الف) کمینه مقدار $v_0$ ($v_m$) چقدر باشد تا m بدون اینکه از مسیر جدا شود تمام دایره را بپیماید؟ ب) فرض کنید که $v_0 = 0.775 v_m$ است. در این حالت ذره تا نقطه ی P بالا می رود و از آنجا از مسیر خارج می شود و در امتداد مسیری که با خط چین نشان داده شده است حرکت می کند.




موضع زاویه ی θ در نقطه ی P را بیابید؟




$$N + mg = m\frac{v^2}{r}$$

$(T=0)$ مثل سوال قبل $\Longrightarrow mg = m\,v^2/r \rightarrow v_B^2 = Rg$

پس $N = 0$

$$\tfrac{1}{2} m v_B^2 + mg(2R) = \tfrac{1}{2} m v_A^2 \rightarrow Rg + 4Rg = v_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{5Rg} = v_{min}$$

ب) $v_0 = 0.775\, v_m$

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2} m v_0^2 = mg(R + R\sin\theta) + \tfrac{1}{2} m v_P^2 \\ P: \; N + mg\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \xrightarrow[N=0]{\text{در حال جدا شدن}} g\sin\theta = \frac{v_P^2}{r} \end{cases}$$

$$\rightarrow \tfrac{1}{2} m v_0^2 = mg(R + R\sin\theta) + \tfrac{1}{2} mgR\sin\theta \rightarrow \sin\theta = ?$$

اصل بقاء جرم و انرژی: برای جسم در حال حرکت:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \Longrightarrow K = (\Delta m)c^2$$

سرعت نور ← $c$

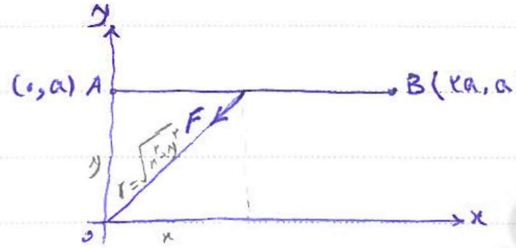
تغییر جرم جسم ← $\Delta m$

سرعت نور ← $c$

$K = 90{,}000{,}000{,}000{,}000\ J$

مثال) ذره‌ای متحرک مانند شکل بوسیله‌ی نیروی $\vec{F}=-\frac{k}{y}\hat{r}$ به سوی مبدأ مختصات جذب می‌شود (k ثابت است). کار انجام یافته بوسیله‌ی این نیرو را در حرکت از A به B بیابید.

بردار یکه $= \hat{r}$



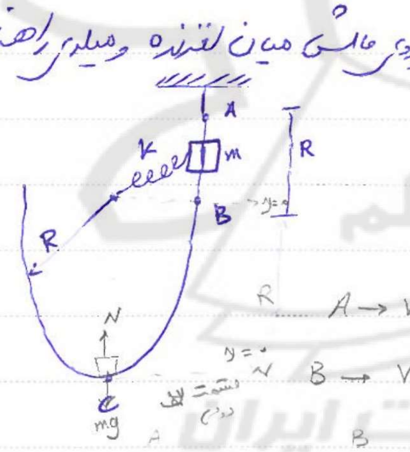

$$\vec{F}=-\frac{k}{y}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{-k}{y\sqrt{x^2+y^2}}(x\hat{i}+y\hat{j})$$

$$W=\int F\cdot dr=\int F_x\,dx+\int F_y\,dy$$

به دلیل ثابت بودن y در مسیر AB

$$W=\int F_x\,dx=\int\frac{-kx\,dx}{y\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{k}{a}\int_0^{2a}\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

نمونه: هنگامی که لغزنده‌ای به جرم m از موقعیت B می‌گذرد، فنر با ثابت k طول آزاد خود را دارا می‌باشد. اگر لغزنده از حالت سکون از موقعیت A رها شود. الف) تندی حرکت آن را به هنگام عبور از B و C بیابید. ب) نیروی عمودی وارده بر لغزنده بوسیله‌ی میله‌ی راهنما در موقعیت C چقدر است؟ از نیروی مالشی میان لغزنده و میله‌ی راهنما که در صفحه‌ی عمودی قرار دارد چشم پوشی کنید.




$l_0=R$

$l=\sqrt{R^2+R^2}$

A → $v=0$ ، ارتفاع دارد ، فنر کشش دارد

B → $v$ دارد ، ارتفاع ندارد ، فنر کشش ندارد

$$\frac{1}{2}k(\Delta L)^2+mgR=\frac{1}{2}mv_B^2\rightarrow\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}k(\sqrt{R^2+R^2}-R)^2+mgR$$

$$v_B^2=\frac{k(\sqrt{R^2+R^2}-R)^2}{m}+\frac{2gR}{m}\rightarrow v_B^2=\frac{kR^2}{m}(\sqrt{2}-1)^2+2Rg$$

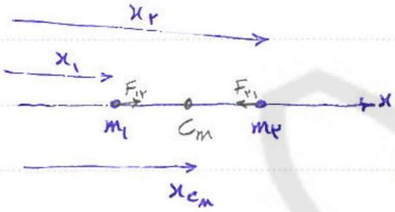
$$E_B=E_C\rightarrow\frac{1}{2}mv_B^2+mgR=\frac{1}{2}mv_C^2+0\rightarrow v_C^2=\frac{kR^2}{m}(\sqrt{2}-1)^2+4Rg$$

ب) $N-mg=\frac{mv_C^2}{R}\rightarrow N=4mg+0.12kR$

## فصل ۹: پایستگی تکانه خطی

مرکز جرم: در حالت کلی هر جسم از ذرات زیادی تشکیل می‌شود. از نگاه فیزیکی تشکیل یک ~~...~~ دستگاه ذرات می‌دهد.

در حرکت این دستگاه ذرات به وسیله‌ی نیروهای خارجی نقطه‌ای به نام مرکز جرم در جسم قرار دارد که حرکت آن مانند حرکت تک ذره‌ای است که زیر اثر همان نیروهای خارجی قرار دارد.



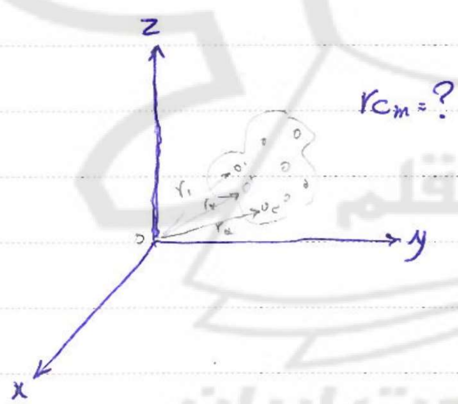

حرکت مرکز جرم دستگاه دو ذره‌ای در یک بعد:

مکان $x_{cm} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\dots}{m_1+m_2+\dots}$

سرعت $V_{cm} = \frac{m_1V_1+m_2V_2+\dots}{m_1+m_2+\dots}$ شتاب $a_{cm} = \frac{m_1a_1+m_2a_2+\dots}{m_1+m_2+\dots}$

در نبود نیروهای خارجی: $a_{cm} = \frac{F_{12}+F_{21}}{M} \xrightarrow[\vec F_{12}=-\vec F_{21}]{\text{کنش و واکنش}} = \frac{0}{M} = 0$

مرکز جرم دستگاه n ذره‌ای در سه بعد:



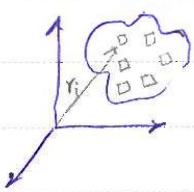

$r_{cm} = ?$

$$r_{cm} = \frac{m_1\vec r_1+m_2\vec r_2+\dots}{\underbrace{m_1+m_2+\dots}_{M\ \text{کل}}} \longrightarrow \frac{d}{dt}\,M r_{cm} = \sum_1^n m_i \frac{d}{dt} r_i$$

$$\frac{d}{dt}\,M V_{cm} = \sum m_i \frac{d}{dt} V_i = \vec P_1 + \vec P_2 + \dots \longrightarrow P_{\text{کل}} = M\vec V_{cm}$$

$$M a_{cm} = \sum m_i a_i = \underbrace{\sum F_{ext}}_{\text{خارجی}} + \underbrace{\sum F_{int}}_{\text{داخلی}\ 0} = \sum F_{ext}$$

برای یک دستگاه با توزیع پیوسته‌ی جرمی داریم:




$$\vec r_{cm} = \frac{1}{M}\int (dm) r_i = \frac{\int r\,dm}{\int dm} \longrightarrow \begin{cases} \vec y_{cm} \leftarrow y \\ \vec x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \\ \vec z_{cm} \leftarrow z \end{cases}$$

فرمول قبلی به جای dm

$\rho = \frac{m}{v} = \frac{dm}{dv} \rightarrow \boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{\int \rho \vec{r}\, dv}{\rho v}}$ چگالی

برای جسم همگن (توزیع ذرات یکنواخت)، می‌توان نوشت:

پایستگی تکانه خطی:

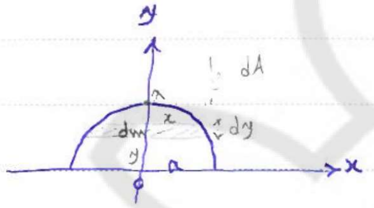
$\vec{P} = M\vec{V}_{cm}$

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} = Ma_{cm} = \Sigma F_{ex} = 0$ — در نبود نیروهای خارجی (یا برایند صفر)

$\frac{dP}{dt} = 0 \rightarrow P = cte$ قانون پایستگی تکانه خطی

نمونه: مرکز جرم یک صفحه‌ی نیم دایره‌ای همگن به شعاع a را بیابید؟

وقتی یک جسم همگن باشد و متقارن نیز باشد، حتماً مرکز جرم روی محور است.



$\vec{r}_{cm} = \frac{\int r\, dm}{M = \int dm} \rightarrow \begin{cases} x_{cm} = \frac{\int x\, dm}{M} = 0 \\ y_{cm} = \frac{\int y\, dm}{M} \end{cases}$ به دلیل تقارن نسبت به محور yها

$dm = \sigma dA$ (σ: چگالی سطحی جرم) $\rightarrow y = \frac{\int y \sigma dA}{M} = \frac{\sigma \int y(2x\, dy)}{M} = \frac{2\sigma}{M}\int yx\, dy$

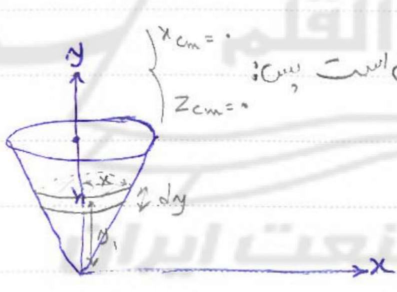
$x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow x = \sqrt{a^2 - y^2}$

$\frac{2\sigma}{M}\int_0^a y(a^2 - y^2)^{1/2} dy = \frac{4R}{3\pi}$

$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{2M}{\pi a^2}$

نمونه: مرکز جرم یک مخروط همگن به ارتفاع h را بیابید؟ چون متقارن است پس: $x_{cm} = 0$ ، $z_{cm} = 0$

dm را باید جوری برش بزنیم که هر نقطه از آن‌ها y یکسان داشته باشد.



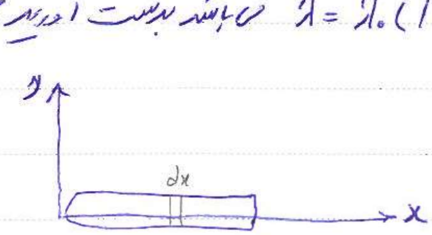
$y_{cm} = \frac{\int y\, dm}{\int dm}$

$dm = \rho dv = \rho \pi x^2 dy$

$y_{cm} = \frac{\rho\pi \int_0^h y\, x^2 dy}{\rho\pi \int_0^h x^2 dy} = \frac{\rho\pi \frac{R^2}{h^2}\int_0^h y^3 dy}{\rho\pi \frac{R^2}{h^2}\int_0^h y^2 dy} = \frac{3}{4}h$

$\frac{x}{y} = \frac{R}{h} \rightarrow x = \frac{R}{h}y$

نمونه: مرکز جرم میله‌ای به طول l را که توزیع جرمی آن به صورت $\lambda = \lambda_0(1+ax)$ می‌باشد بدست آورید.




$$y_{cm} = 0 \qquad x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int_0^l x\lambda_0(1+ax)\,dx}{\int_0^l \lambda_0(1+ax)\,dx}$$

$$dm = \lambda dx = (\lambda_0(1+ax))\,dx \qquad = \frac{3l+2al^2}{6+3al}$$

نمونه: مانند شکل دو سورتمه با فاصله کمی از یکدیگر، بر روی یخ و در امتداد مستقیم قرار دارند. جرم هر سورتمه ۲۲,۷kg است. گربه‌ای به جرم ۳,۶۳kg که در ابتدا روی سورتمه A قرار دارد به سورتمه B می‌جهد و سپس با جهش دوم به سورتمه A برمی‌گردد. هر دو جهش با سرعت ۳,۰۵ m/s نسبت به یخ انجام می‌شود. سرعت نهایی هر یک از دو سورتمه را بدست آورید.

$$\Sigma P_i = cte$$

$$\Sigma P_i = cte = 0 = \Sigma P_f$$


برای اولین پرش:

$$P_{iA} + P_{iC} = 0 = P_{fA} + P_{fC}$$

$$m_C V_{fC} = m_A V_{fA} \to 3.63 \times 3.05 = 22.7 \times V_{fA} \to V_{fA} = 0.49\ m/s$$

$$(m_C + m_B) \times V'_{fBC} = m_A V_{Af} \to V'_{fBC} = -0.42\ m/s$$

$$(m_B+m_C)V'_{fBC} = P''_B + P''_C = m_B V''_{fB} + m_C \times 3.05 \to V''_{fB} = -0.97\ m/s$$

پیش از — پس از

$$m_C V'''_C + m_A V_{fA} = (m_C + m_A) V'''_{fAC} \to V'''_{fAC} = 0.84\ m/s$$

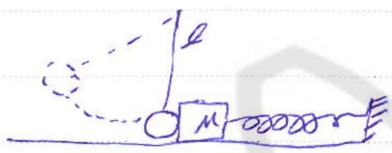
$$(m_B + m_g) V_f = m_A V_A$$

فرض: B با سرعت ۲m/s به سمت چپ

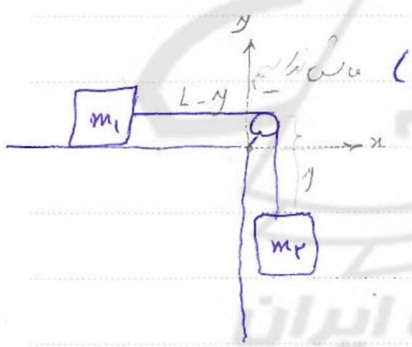
$V_f = 1\ m/s$

$$m_g V_f + m_B V_B = (m_B + m_g) V_f$$

مطابق شکل گلوله‌ای به جرم $m$ که به انتهای نخی به طول $l$ بسته شده است از وضعیت افقی رها می‌شود و هنگام عبور از حالت عمودی با قطعه‌ای به جرم $M$ برخورد کشسان است. $(M>m)$. اگر ضریب سختی فنر متصل به قطعه $M$ برابر $k$ باشد، مطلوب است: الف) سرعت هریک از ۲ جسم بلافاصله پس از برخورد ب) حداکثر فشردگی فنر




نمونه: در شکل زیر معادلات حرکت مرکز جرم دستگاه را بیابید (طول طناب $l$) مالش نداریم




$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 (L-y) + 0}{m_1 + m_2} \qquad V_{x_m} = \frac{-m_1 V_{m_2}}{m_1 + m_2}$$

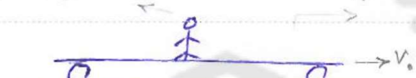
$$y_{cm} = \frac{0 + m_2 y}{m_1 + m_2} \qquad V_y = \frac{m_2 V_{m_2}}{m_1 + m_2}$$

Subject

Date



نمونه: یک واگن مسطح به وزن $W_1$ می‌تواند روی یک مسیر افقی بدون مالش و مستقیم حرکت می‌کند. در ابتدا که واگن با سرعت $V_0$ به سوی راست حرکت می‌کند شخصی به وزن $W_2$ روی آن ایستاده است. اگر این شخص طوری به سوی چپ بدود که درست پیش از پریدن از انتهای سمت چپ واگن سرعتش نسبت به واگن $V'$ باشد، تغییر سرعت واگن چقدر است؟




$$\sum F_{ext,x} = 0 \to F = \frac{dP}{dt} = 0 \to \vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$M_{tot} V_{cm_i} = M_{tot} \cdot V_{cm_f} \to V_{cm_i} = V_{cm_f} = V_0$$

$$V_0 = V_{cm_f} = \frac{m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f}}{m_1 + m_2} \longrightarrow \underbrace{V_{2f} - V_0}_{\text{تغییر سرعت}} = \frac{m_2 V'}{m_1 + m_2} = \frac{W_2 V'}{W_1 + W_2}$$

$V_{1f} = V_{2f} - V'$ سرعت فرد نسبت به زمین

دستگاه‌های با جرم متغیر: در دستگاه‌هایی که در طول حرکت جرم آن‌ها تغییر می‌کند قانون دوم نیوتن به صورت دیگری تبدیل می‌شود:

$F = \frac{dP}{dt}$ ✗

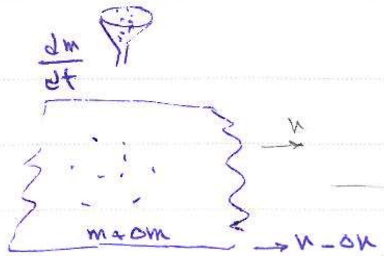

در راستای افقی
$$F = \frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_f - P_i}{\Delta t} = \lim \frac{[(m - \Delta m)(v + \Delta v) + (\Delta m) u] - mv}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ m \frac{\Delta v}{\Delta t} + \underbrace{[u - (v + \Delta v)]}_{V_{rela}} \frac{\Delta m}{\Delta t} \right. \to F = m\frac{dv}{dt} + V_{rela} \frac{dm}{dt} \to m \frac{dv}{dt} = F \overset{+|V_{re}|}{-V_{re}} \frac{dm}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} = F + \underbrace{|V_{re}| \frac{dm}{dt}}_{\text{نیروی پیشران یا نیروی واکنش}}$$

PAPCO

Subject. Yaer. Month. Day.




تسمه نقاله

$$F_{ex}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_f-P_i}{\Delta t}=\lim\frac{[(m+\Delta m)(v-\Delta v)]-mv}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta v\frac{\Delta m}{\Delta t}\approx 0 \rightarrow F_{ex}=-m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}\xrightarrow{\frac{dv}{dt}=0\rightarrow v=cte}F_{ex}=v\frac{dm}{dt}$$

نیروی لازم برای ثابت ماندن سرعت دستگاه.

فصل ۱۰) برخورد

تعریف برخورد: از دید فیزیک وقتی دو ذره از مجاورت هم عبور کنند بطوریکه تبادل انرژی و اندازه ی حرکت خطی میان آن دو انجام شود گوییم برخورد انجام گرفته است.

در یک برخورد نیروی نسبتاً زیادی در زمان نسبتاً کوتاه به ذرات برخورد کننده وارد می شود بطوریکه می توان در طول برخورد از نیروهای خارجی وارد بر دستگاه مانند گرانش، اصطکاک و ... در مقایسه با این نیروهای ضربه ای چشم پوشی نمود و فرض کنیم که پایستگی تکانه خطی تقریباً همیشه برقرار است.

نیروی ضربه ای: نیروهایی هستند که در مدت زمان کوتاه اثر می کنند مانند ضربه به توپ بیلیارد.

هدف: هدف از بررسی برخورد این است که با فرض ناآگاهی از نیروهای موثر در طول یک برخورد و تنها با داشتن حرکت های اولیه ذرات برخورد کننده بتوانیم با کمک اصول پایستگی اندازه حرکت و انرژی حرکات نهایی ذرات تعیین نمود.

تعریف ضربه: انتگرال نیرو در بازه ی زمانی که نیرو اثر می کند را گویند و با $\vec{J}$ نشان می دهند.

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}\rightarrow\Delta\vec{P}=\vec{J}=\int_{t_i}^{t_f}F\,dt$$