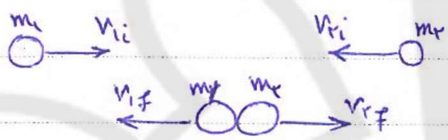
انواع برخورد: ۱- کشسان (elastic)   ۲- ناکشسان (inelastic)   ۳- ناکشسان کامل

① برخورد است که انرژی درونی اجسام برخورد کننده تغییر نکند. $P_i = P_f \longrightarrow k_i = k_f$

② انرژی درونی اجسام برخورد کننده تغییر کنند. $P_i = P_f \longrightarrow k_i = k_f + Q$ ← میزان انرژی جنبشی گرفته یا داده شده

③ دو جسم پس از برخورد به هم می‌چسبند. $P_i = P_f \longrightarrow k_i = k_f + Q$

برخورد کشسان یک بعدی:



$$P_i = P_f \longrightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$k_i = k_f \longrightarrow \tfrac{1}{2} m v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2} m v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m v_{2f}^2$$

از حل دستگاه $\Rightarrow$
$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\[2ex] v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases}$$

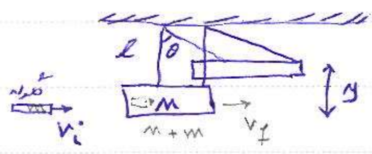
الف) اگر $m_1 = m_2 \Longrightarrow \begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases} \xrightarrow{\text{اگر } v_{2i} = 0} \begin{cases} v_{1f} = 0 \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$

ب) $m_1 \neq m_2$ ساکن m_2 $\longrightarrow \begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\[2ex] v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} m_2 \gg m_1 \rightarrow \begin{cases} v_{1f} = -v_{1i} \\ v_{2f} \approx 0 \end{cases} \\[3ex] m_1 \gg m_2 \rightarrow \begin{cases} v_{1f} = v_{1i} \\ v_{2f} = 2v_{1i} \end{cases} \end{cases}$$

آونگ بالستیک: وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری یک گلوله شلیک شده.

فرض: زمان برخورد (زمان ساکن شدن گلوله نسبت به قطعه چوب) خیلی کوچک باشد.



ناکشسان $P_i = P_f \rightarrow m v_i = (m+M)\, v_f$

$$E_i' = E_f' \rightarrow \tfrac{1}{2}(m+M)\, v_f^2 = (m+M)\, g\, y \qquad (y = \ell - \ell\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_i = \frac{m+M}{m}\sqrt{2 g y}}$$

دقیقاً لحظه پس از برخورد

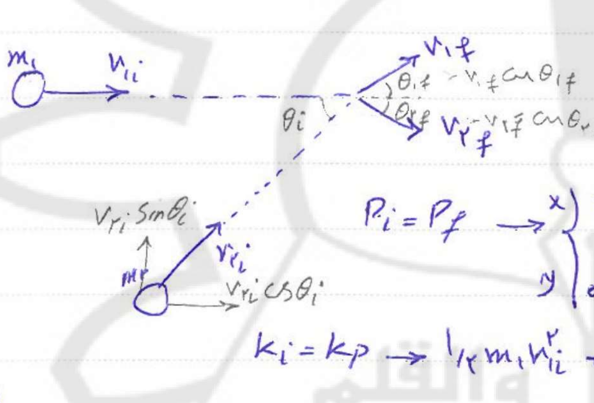
لحظه رسیدن به بالاترین نقطه

$E_i = \tfrac{1}{2} m v_i^2$

$E_f = \tfrac{1}{2}(m+M)\, v_f^2$

$$\rightarrow \frac{E_f}{E_i} = \frac{m}{m+M} \quad , \quad E_f - E_i = Q \;\text{ (انرژی از دست رفته)}$$

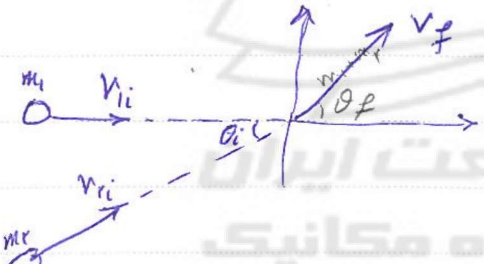
کشسان دو بعدی



$$P_i = P_f \rightarrow \begin{cases} x) & m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}\cos\theta_i = m_1 v_{1f}\cos\theta_{1f} + m_2 v_{2f}\cos\theta_{2f} \\ y) & 0 + m_2 v_{2i}\sin\theta_i = m_1 v_{1f}\sin\theta_{1f} + m_2 v_{2f}\sin\theta_{2f} \end{cases}$$

$$K_i = K_f \rightarrow \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

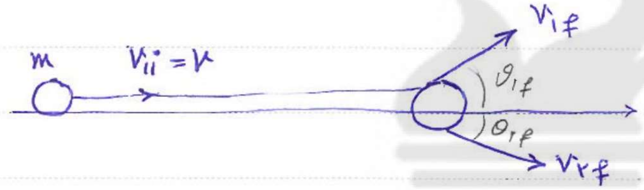
برخورد کاملاً ناکشسان دو بعدی:



$$x:\; m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}\cos\theta_i = (m_1 + m_2)\, v_f\cos\theta_f$$

$$y:\; m_2 v_{2i}\sin\theta_i = (m_1 + m_2)\, v_f\sin\theta_f$$

نمونه: دو گلوله یکسان به جرم m داریم که سرعت یکی v و دیگری ساکن است. اگر برخورد کشسان آنها در امتداد مرکز جرمشان نباشد، زاویه بین امتداد حرکت اجسام را پس از برخورد بیابید؟



هوشی: $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m v_{2f}^2 \rightarrow v^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \rightarrow \theta_{1f} + \theta_{2f} = \pi/2$

جواب اصلی $\Rightarrow$ $x: P_{ix} = P_{fx} \rightarrow mv + 0 = m v_{1f} \cos\theta_{1f} + m v_{2f} \cos\theta_{2f}$ (1)

$y: P_{iy} = P_{fy} \rightarrow 0 + 0 = m v_{1f} \sin\theta_1 - m v_{2f} \sin\theta_2$ (2)

$K_i = K_f \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$ (3)

$\xrightarrow{(1)\text{ در }(3)} (v_{1f} \cos\theta_{1f} + v_{2f} \cos\theta_{2f})^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$

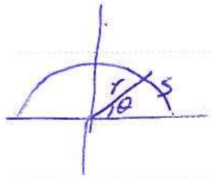
$\rightarrow 2 v_{1f} v_{2f} \cos\theta_{2f} = v_{1f}^2 + \sin^2\theta_{1f} + v_{2f}^2 \sin^2\theta_{2f} = (v_{1f} \sin\theta_{1f} - v_{2f} \sin\theta_{2f})$

$+ 2 v_{1f} v_{2f} \sin\theta_{1f} \sin\theta_{2f} \rightarrow 2 v_{1f} v_{2f} (\cos\theta_{1f} \cos\theta_{2f} - \sin\theta_{1f} \sin\theta_{2f}) = 0$

$2 v_{1f} v_{2f} \cos(\theta_{1f} + \theta_{2f}) = 0 \rightarrow \theta_{1f} + \theta_{2f} = \pi/2$

$\theta = \omega t$ $\quad \bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$ حرکت شتاب ثابت

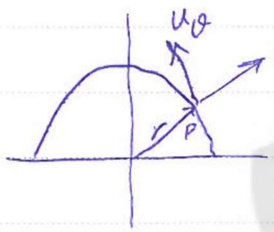
رابطه بین سینماتیک خطی و زاویه‌ای در حرکت دایره‌ای:



$$s = r\theta \rightarrow \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow v = r\omega$$

مماسی $\quad a_T = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$ $\qquad$ شعاعی $\quad a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$

روابط بالا به صورت برداری:



$$\vec{r} = r\hat{u}_r \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = r\omega\hat{u}_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_\theta + r\omega\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} \rightarrow \boxed{\vec{a} = r\alpha\hat{u}_\theta - r\omega^2\hat{u}_r}$$

$$\begin{cases} a_T = r\alpha\hat{u}_\theta \\ a_r = -r\omega^2\hat{u}_r \end{cases}$$

نمونه: چرخ A به شعاع $r_A = 10\ cm$ به وسیله تسمه B به چرخ C به شعاع $r_C = 25\ cm$ وصل شده است. سرعت زاویه‌ای چرخ از حالت سکون با شتاب یکنواخت $\pi/2\ rad/s^2$ افزایش می‌یابد. با فرض اینکه تسمه نلغزد مدت زمانی را که لازم است تا سرعت چرخ C به ۱۰۰ دور بر دقیقه برسد بدست آورید.

بلغزد X: زنجیر می‌شکند $v_A' > v_C'$

بلغزد X: زنجیر می‌سوزد $v_C' > v_A'$

نلغزد $\rightarrow \boxed{v_A = v_C}$

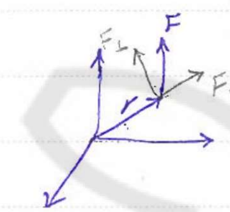
$$v_A = v_C \rightarrow r_A\omega_A = r_C\omega_C \xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{مشتق}} r_A\alpha_A = r_C\alpha_C \rightarrow \alpha_C = \left(\frac{r_A}{r_C}\right)\alpha_A$$

$W_C = \alpha_C t + \overset{0}{W_{0C}} \longrightarrow t = \frac{W_C}{\alpha_C} = \frac{r_C W_C}{r_A \alpha_A} \longrightarrow$ جایگذاری

(از حالت سکون)

فصل ۱۲) دینامیک دورانی:

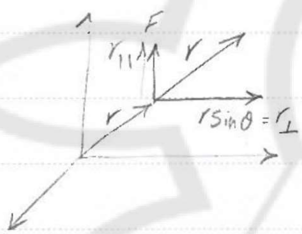
گشتاور نیرو: همانطور که در حرکت انتقالی عامل شتاب خطی و حرکت اجسام را نیرو می‌نامیم، در حرکت دورانی عامل شتاب زاویه‌ای و چرخش اجسام را گشتاور نیرو نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.



$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\theta = rF_\perp$$

بازوی گشتاور

$$= (r\sin\theta)F = r_\perp F$$



تکانه زاویه‌ای (یا گشتاور تکانه) یا اندازه حرکت زاویه‌ای:

تکانه خطی

تعریف $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \Rightarrow |L| = rP_\perp = r_\perp P = rP\sin\theta$

اندازه

هم از رابطه $F = \frac{dP}{dt}$ در حرکت دورانی:

$$\left.\begin{array}{l} F = \frac{dP}{dt} \\ \tau = \vec{r} \times \vec{F} \end{array}\right\} \rightarrow \tau = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

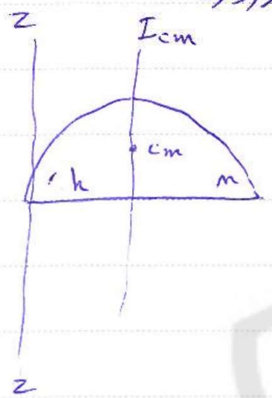
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{V}} \times \underbrace{\vec{P}}_{m\vec{V}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\Big\} \rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

θ	x
ω	v
α	a
$\tau = \frac{dL}{dt}$	$F = \frac{dP}{dt}$
P	L

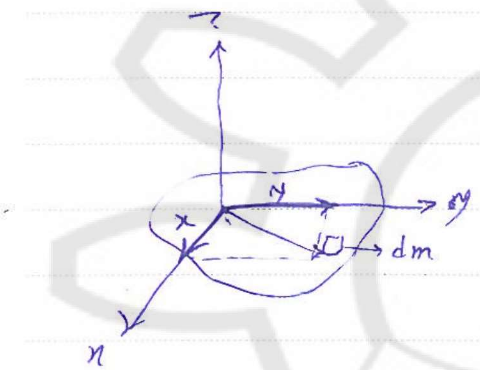
$\vec{V} \times \vec{V} = 0$ (ضرب خارجی)

قضیه‌ی محورهای موازی: رابطه‌ی میان لختی دورانی I یک جسم نسبت به هر محور دلخواه با لختی دورانی آن نسبت به یک محور موازی که از مرکز جرم جسم می‌گذرد و به فاصله‌ی h از آن قرار دارد.



$$I_z = I_{cm} + Mh^2$$

قضیه‌ی محورهای عمود بر هم (فقط برای اجسام دوبعدی):



$$I_{oz} = \int r^2 dm = \int (x^2+y^2)\,dm$$

$$= \underbrace{\int x^2 dm}_{\text{گشتاور ماند نسبت به محور ox}} + \underbrace{\int y^2 dm}_{\text{گشتاور ماند نسبت به محور oy}}$$

$$\boxed{I_{oz} = I_{oy} + I_{ox}}$$

نمونه: یک حلقه‌ی نازک به شعاع درونی R_1 و بیرونی R_2 موجود است. بدست آورید گشتاور ماند را پیرامون:

ب) قطری از حلقه، الف) محور حلقه، ج) محوری مماس بر حلقه، د) این موارد را برای یک پوسته‌ی حلقه‌ای و یک قرص نازک نیز بررسی کنید

الف) $I = \int r^2 dm$ $\qquad dm = \sigma dA = \sigma(2\pi r)dr$

$$I = \int r^2(\sigma 2\pi r)dr = 2\pi\sigma \int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr = \frac{\pi\sigma}{2}(R_2^4 - R_1^4)$$

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

$\frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$

پیرامون محور حلقه

ب) برای دیسک حول محورهای عمود بر هم : $I_z = I_x + I_y = 2I_x \to I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{m}{4}(R_2^2 + R_1^2)$

ج) برای دیسک حول محورهای موازی

$$I_{y'} = \underset{I_{cm}}{\underline{I_y}} + MR_2^2 = \frac{m}{4}(R_2^2 + R_1^2) + MR_2^2$$

د) پوسته حلقه‌ای $R = R_1 \approx R_2$

پیرامون محور : MR^2

پیرامون قطر $= 1/2\, MR^2$

پیرامون مماس $= 3/2\, MR^2$

قرص نازک $R_1 = 0$

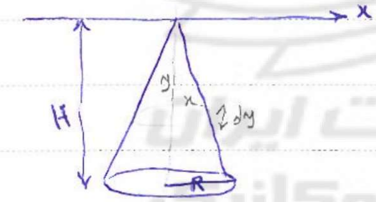
پیرامون محور : $1/2\, MR^2$

پیرامون قطر $= 1/4\, MR^2$

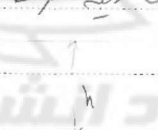
پیرامون مماس : $5/4\, MR^2$

نمونه : گشتاور ماند یک مخروط توپر به جرم m پیرامون محور ox در شکل زیر بیابید؟ اگر جسم همگن نیست مثلاً $\frac{1}{y} = \rho$ در معادلات

چون پس از انتگرال‌ها دیگه ρ ثابت نیست و در انتگرال‌گیری شرکت می‌کند.



$I = \int r^2 dm$



برای قرص نازک به جرم dm نسبت به قطری که موازی محور ox است داریم :

مثال قبل

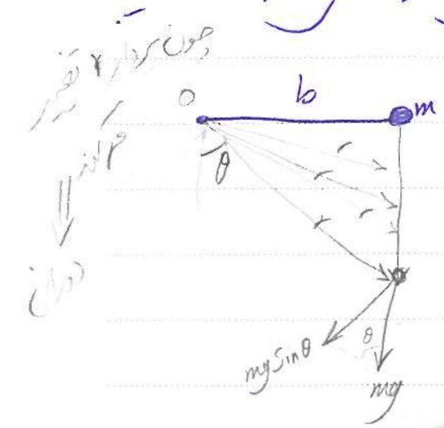
$$dI_{cm} = x^2/4\, dm \xrightarrow{\text{قضیه محورهای موازی}} dI_{ox} = dI_{cm} + (dm)y^2$$

$dm = \rho dv = \rho(\pi x^2)dy \quad \to \quad$ در مخروط $\to \frac{x}{R} = \frac{y}{h} \to x = \frac{R}{h}y$

$$\int dI_{ox} = \int_0^h \frac{x^2}{4}(\rho\pi x^2)dy + \int((\rho\pi x^2)dy)y^2 \to I_{ox} = \frac{\rho\pi R^4}{4h^4}\int_0 y^4 dy + \frac{\rho\pi R^2}{h^2}\int_0 y^4 dy$$

$$= \frac{\rho\pi R^4 h}{20} + \frac{\rho\pi R^2}{5}h^3 \qquad \rho = \frac{m}{V = 1/3\,\pi r^2} \implies I = \frac{3MR^2}{20} + \frac{3m}{5}h^2$$

نمونه: ذره‌ای به جرم m از حال سکون رها می‌شود. گشتاور نیرو و تکانه زاویه‌ای را در لحظه t بدست آورید؟



$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = r\,mg\sin\theta = \overbrace{(r\sin\theta)}^{b}\,mg = b\,mg$$

$$\vec{L} = \vec{P}\times\vec{r} = r\cdot P\sin\theta$$

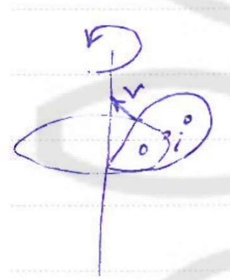
$$b\cdot P = b\,m\underset{\text{سقوط آزاد}}{v} = b\,mgt$$

دستگاه ذرات: برای دستگاهی متشکل از n ذره داریم:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$\to \tau_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

انرژی جنبشی دورانی و لختی دورانی:



$$v_i = r_i\omega \to k_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

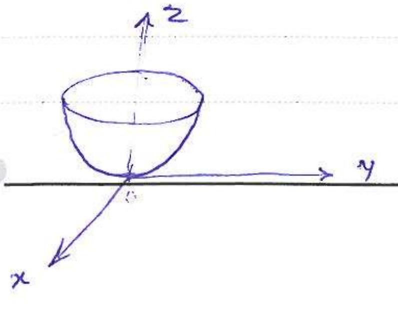
$$k_T = \tfrac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \tfrac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\underbrace{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots}\right)\omega^2$$

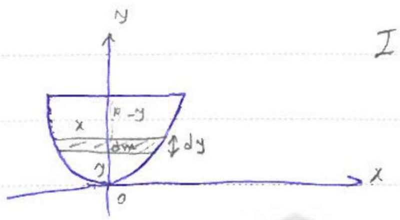
$$\text{لختی دورانی} = I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$I = \int r^2\,dm \leftarrow$ اگر جسم پیوسته باشد، ذره ذره نباشد

نمونه: گشتاور ماند یک نیم‌کره توپر به شعاع R و جرم m را پیرامون محور oz بدست آورید؟



نمونه: گشتاور ماند یک نیم قرص شکل به شعاع R و جرم M را پیرامون محور ox به دست آورید.



$$I = \int r^2 dm \qquad dm = \sigma\, dA = \sigma\, 2x\, dy$$

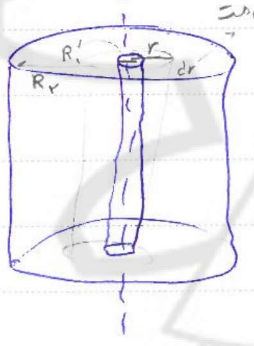
چگالی سطحی جرم

$$I_{ox} = 2\sigma \int x y^2 dy \qquad x^2 + (R-y)^2 = R^2$$

$$I_{ox} = 2\sigma \int_0^R \left[R^2 - (R-y)^2\right]^{1/2} y^2 dy = 2\sigma \int \left[R^2 - R^2 + 2Ry - y^2\right]^{1/2} y^2 dy$$

$$= 2\sigma \int \sqrt{2Ry - y^2}\; y^2 dy = ?$$

سوال) گشتاور ماند یک استوانه توخالی به شعاع R دارتفاع h و جرم m پیرامون محور استوانه؟



$$I = \int r^2 dm \qquad dm = \rho\, dv = \rho\,(2\pi r\, dr)\cdot h$$

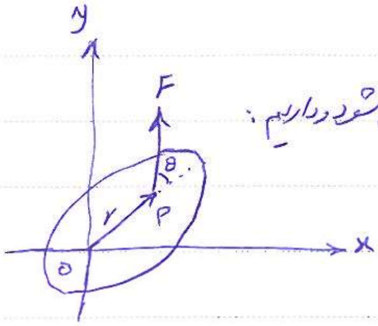
$$I = \int r^2 \rho (2\pi r)\, dr\, h = \rho\, 2\pi h \int r^3 dr = 2\pi \rho h \left.\frac{r^4}{4}\right|_{R_1}^{R_2}$$

$$= \frac{\pi \rho h}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right) = \frac{M}{2}\,\frac{R_2^4 - R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{m}{\pi h (R_2^2 - R_1^2)}$$

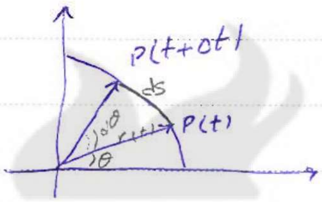
$I = M/2\,(R_2^2 + R_1^2)$ گشتاور ماند استوانه توخالی

اگر استوانه توپر بود $\rightarrow R_1 = 0$ / برای استوانه توخالی $\rightarrow R_1$ و R_2



دینامیک دورانی جسم صلب پیرامون محور ثابت:

در جسم صلب گشتاور نیروی τ وارد شده به یک ذره = تمام ذرات جسم وارد می‌شود داریم:



$$ds = r\,d\theta$$

$$dW = F\cdot ds = F\cos\varphi\, ds$$

$$dW = (\underbrace{F\cos\varphi\, r}_{\tau})\,d\theta$$

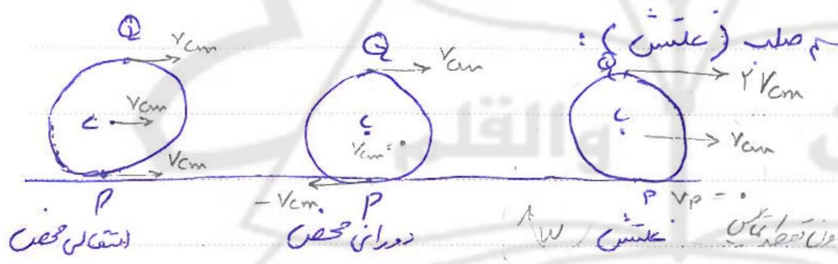
$$\frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \boxed{\underset{\text{توان}}{P} = \tau\omega}$$

در نبود اتلاف انرژی کاری یافته به وسیله F به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} \xrightarrow{K = \frac{1}{2}I\omega^2} \frac{1}{2}I(2\omega)\frac{d\omega}{dt} = \tau\omega \longrightarrow \boxed{\tau = \alpha I}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \begin{cases} \tau = I\dfrac{d\omega}{dt} \xrightarrow{I = cte} \dfrac{d(I\omega)}{dt} \longrightarrow \boxed{L = I\omega} \\ \tau = \dfrac{dL}{dt} \end{cases}$$

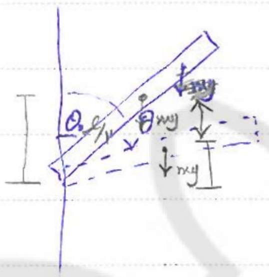
ترکیب حرکتهای دورانی و انتقالی یک جسم صلب (غلتش):



غلتش یک جسم به دور یک محور ترکیبی از حرکتهای انتقالی و دورانی است و آن را می‌توان به صورت یک حرکت دورانی محض در نظر گرفت که در آن جسم در هر لحظه پیرامون محوری ثابت که از نقطه تماس جسم با سطح می‌گذرد با همان سرعت زاویه‌ای (ω) می‌چرخد.

مثال) میله‌ی همگنی به طول L و جرم M می‌تواند آزادانه به دور محوری که از انتهای آن می‌گذرد دوران می‌کند. میله از وضعیت θ_0 بدون سرعت اولیه رها می‌شود تعیین کنید الف) سرعت و شتاب زاویه‌ای در وضعیت θ ؟

ب) شتاب مماسی و شعاعی مرکز جرم میله در وضعیت θ ؟ پ) در وضعیت θ مجموع نیروهایی در راستای میله و عمود بر میله به میله وارد می‌کند؟ $I_o = \frac{1}{3} ML^2$



$$\Delta U = -\Delta K$$

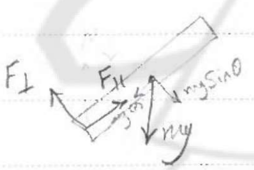
$$mg\, l/2\,(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 1/2\, I_o \omega^2 = 1/2 \times 1/3\, ML^2\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{3g(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{l} \longrightarrow 2\omega \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\alpha} = \frac{3g}{l}\left(0 + \sin\theta \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\right)$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L} \sin\theta$$

مماسی $a_T = r\alpha = l/2 \times (\dots)$ شعاعی $a_r = a_N = r\omega^2 = l/2 \times (\dots)$

$$\tau_{cm} = I_{cm} \times \alpha$$

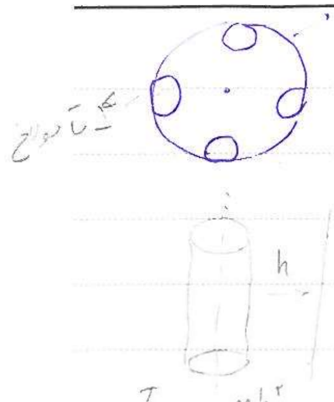


$$F_\perp\, l/2 = 1/12\, ML^2 \cdot 3g/2L\, \sin\theta \longrightarrow F_\perp = ?$$

$$mg\cos\theta - F_\parallel = m a_N \longrightarrow F_\parallel = ?$$

Subject ٤٣

Date التکمله



مثال) گشتاور ماند بدست آورید؟

$- 4 \times (r-R)^2$

$= \frac{1}{2} MR^2 - 4 \times \left(I_{cm} + m(r-R)^2 \right)$

$I_{cm} \to \frac{1}{2} m r^2$

$I_{cm} + mh^2$

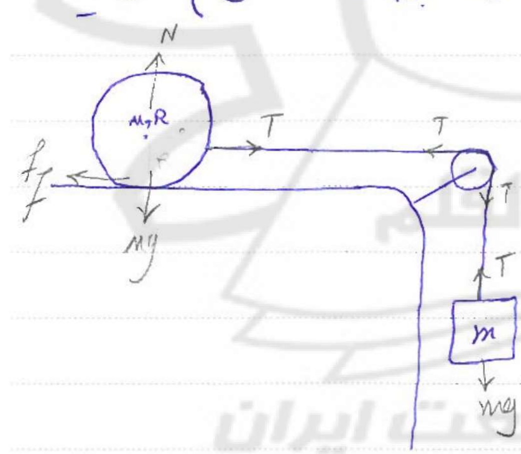
مثال) مطابق شکل غلتک همگنی بجرم M و شعاع R و گشتاور ماند $I = \frac{1}{2} MR^2$ روی سطح افقی قرار دارد.

ریسمان سبکی به مرکز غلتک بسته شده، پس از عبور از روی قرقره کوچک بدون جرمی به مکعبی بجرم m متصل است.

دستگاه را آزاد می‌گذاریم تا m سقوط کند و غلتک روی سطح افقی بدون لغزش بغلتد. مطلوب است:

پس اصطکاک دارد

الف) نمودار نیروهای وارد بر غلتک بجرم M ب) شتاب حرکت جرم m ج) کشش ریسمان



$N - Mg = 0 \to N = Mg$

نوشتن مجموع معادلات ج

$f_s = \mu_s N$

$M: \; T - f_s = M a_{cm}$

$\tau = I\alpha$

$T \times 0 + f_s \times R = I\alpha = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$

$m: \; mg - T = ma \; (1), \quad a = a_{cm} = R\alpha$

$a = \frac{2mg}{2m + 3M} \xrightarrow{(1)} T = \frac{3Mmg}{2m + 3M}$

PAPCO

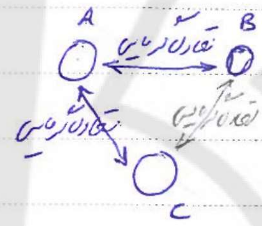
فصل ۱۳) دما

سیستم : در بررسی های فیزیکی، بخشی از ماده که آن را به طور ذهنی از محیط پیرامونش جدا کرده ایم، گویند.

محیط : هر چیز خارج از سیستم که در رفتار سیستم مؤثر است را گویند.

علم ترمودینامیک : مجموعه قوانینی که کمیت های ماکروسکوپیک مؤثر در فرایندهای گرمایی را به هم مربوط می کند پایه علم ترمودینامیک را تشکیل می دهد.

قانون صفرم ترمودینامیک :



هم دما می باشند

اندازه گیری دما : ۱) ویژگی دماسنجی مخصوص (حجم، فشار، مقاومت الکتریکی، ...)

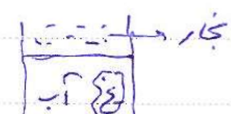
۲) انتخاب ماده دماسنجی مناسب ۳) رابطه تابعی مخصوص میان اندازه گیری های این ویژگی فیزیکی و

یک مقیاس دمایی مورد قبول جهانی : $T = T(x)$ ← ویژگی فیزیکی

به طور دلخواه چنین انتخاب می کنیم : $T(x) = ax$

هدف : پیدا کردن a ← نیاز به ثابت استانداردی داریم که در تمام دماسنج ها دمای یکسانی را نشان دهند.

نقطه سه گانه آب :



$$\frac{T(x_1)}{T(x_2)} = \frac{a x_1}{a x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

$T(x_3) =$ دمای نقطه سه گانه، آن را $273.16K$ انتخاب می کنیم

$$\frac{T(x)}{T(x_{tr})} = \frac{x}{x_{tr}} \longrightarrow \boxed{T(x) = 273.16\,\frac{x}{x_{tr}}}$$

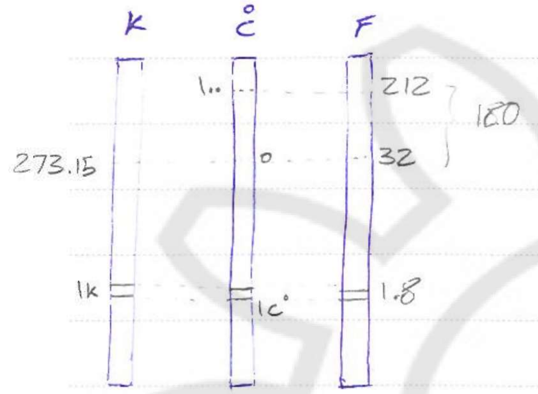
① اگر x طول ارتفاع ستون جیوه در لوله شیشه‌ای باشد (L) : $T(L) = 273.16 \frac{L}{L_{tr}}$

② اگر x حجم یک گاز کامل در فشار ثابت باشد : $T(V) = 273.16 \frac{V}{V_{tr}}$

③ اگر x مقاومت الکتریکی یک سیم پلاتینی باشد : $T(R) = 273.16 \frac{R}{R_{tr}}$

⋮

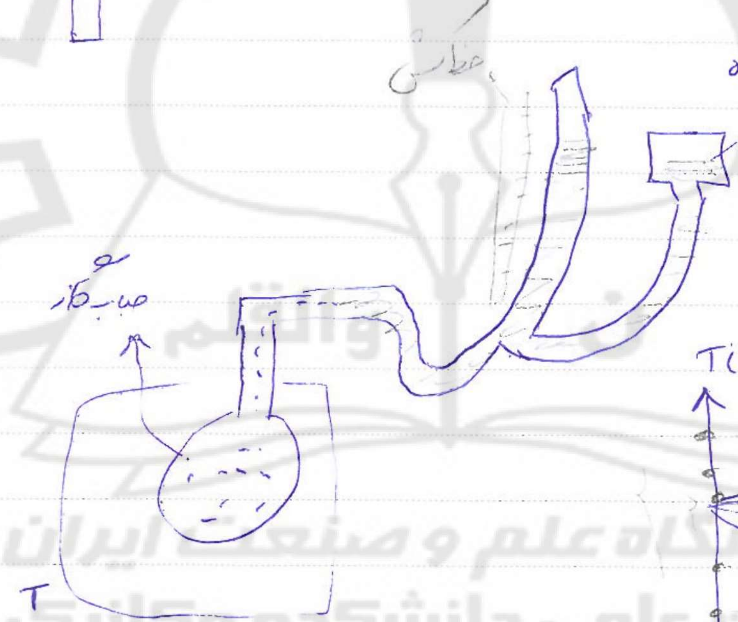
مقیاس دمائی سلسیوس - فارنهایت - کلوین

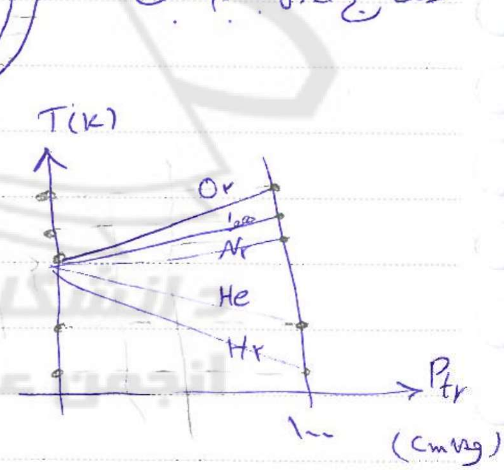


$$\boxed{\begin{aligned} T_C &= T_K - 273.15 \\ T_F &= 32 + 1.8\,T_C \end{aligned}}$$

مقیاس دمایی گاز کامل :

دماسنج گازی با حجم ثابت





$P_{tr} \to 0$

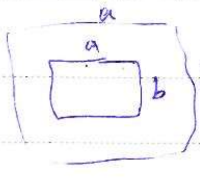
انبساط بر اثر دما : الف) انبساط طولی جامدات :

ضریب انبساط طولی

$\Delta l = l \alpha \Delta T$

$$\left.\begin{aligned} \Delta l &\propto \Delta T \\ \Delta l &\propto l \end{aligned}\right\}$$

ب) انبساط سطحی جامدات:



$$\begin{cases} \Delta a = \alpha a \Delta T \\ \Delta b = \alpha b \Delta T \end{cases}$$

$$A' = (a+\Delta a)\cdot(b+\Delta b) = ab + a\Delta b + \Delta a b \Rightarrow A' = A + 2\alpha A \Delta T$$

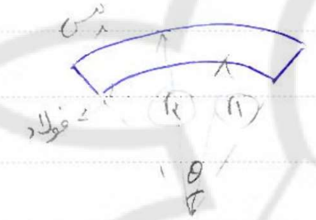
ج) انبساط حجمی جامدات:

$$V' = V + 3\alpha V \Delta T$$

نمونه: دو تیغه‌ی مسی و فولادی است که طول شان در صفر درجه سانتی‌گراد باهم برابر است به فاصله‌ی 4 mm از هم به طور موازی با یکدیگر جوش داده شده‌اند. اگر دو تیغه تا 200° گرم شوند شعاع انحنای آنها که در اثر اختلاف انبساط طولی آنها به وجود می‌آید چقدر است؟

$$\alpha_{Cu} = 17\times 10^{-6}\ 1/K$$

$$\alpha_{\text{فولاد}} = 11\times 10^{-6}\ 1/K$$



$$l + \Delta l_1 = r_1\theta$$

$$l + \Delta l_2 = r_2\theta$$

$$\Delta l_1 = \alpha_1 l \Delta T$$

$$\Delta l_2 = \alpha_2 l \Delta T$$

$$r_2 = r_1 + 0.4\,cm \longrightarrow r_1 = \frac{4(1+\alpha_1\Delta T)}{(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T}$$

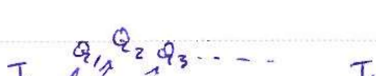
گرما و قانون اول ترمودینامیک:

ظرفیت گرمایی (C):

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

ظرفیت گرمایی ویژه

$$C = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$$ ← وابسته به دما



$$Q = \Sigma \Delta Q = \Sigma m c \Delta T = m\int_{T_i}^{T_f} c\, dT$$

c گرمای ویژه ثابت نیست و بستگی به آزمایش رجوع ... دارد.

$V = cte \longrightarrow C_v \approx cte$

$P = cte \longrightarrow C_p \approx cte$

گرمای ویژه مولی: گرمای لازم برای تغییر دمای یک مول از ماده به اندازه‌ی $1K$ است.

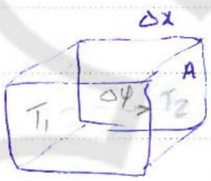
گرمای تبدیل L: گرمای لازم برای تغییر فاز یک جرم ماده در دمای ثابت.

l_v گرمای تبخیر (مایع ← گاز)

l_f " ذوب (مایع ← جامد)

روش‌های انتقال دما:

رسانش گرمایی: انتقال انرژی ناشی از اختلاف دمای میان بخش‌هایی در یک جسم رخ می‌دهد.



$T_1 > T_2$ جهت درست شارش گرما $T_2 - T_1 < 0$

جریان گرمایی $H = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x} \rightarrow H = -KA \frac{\Delta T}{\Delta x}$

در حالت حدی: $H = -KA \frac{dT}{dx}$

نمونه: جریان گرمایی را برای میله‌ای به طول l و سطح مقطع A در حالت پایا حساب کنید.

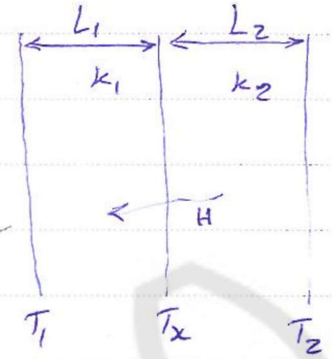
حالت پایا: دمای هر نقطه ثابت بماند در طول زمان

$T_2 > T_1$

بنابراین: جریان گرمایی در تمام سطح مقطع‌ها یکسان است و با ثابت بودن K و A نیز $\frac{dT}{dx}$ در همه مقاطع یکسان است.

ثابت $\frac{dT}{dx} = \frac{\Delta T}{\Delta x} \longrightarrow H = -KA \frac{T_2 - T_1}{l}$

مثال: یک دیوار مرکب از دو ماده‌ی با ضخامت‌های l_1 و l_2 و ضریب رسانش گرمایی k_1 و k_2 تشکیل شده است
اگر دمای سطح خارجی T_1 و T_2 باشد آهنگ انتقال گرما و دمای فصل مشترک را بیابید.



(H) جریان گرمایی در همه جا یکسان است

$T_2 > T_1$

$$H_1 = H_2 = H = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{k_2 A (T_2 - T_x)}{l_2} = \frac{k_1 A (T_x - T_1)}{l_1}$$

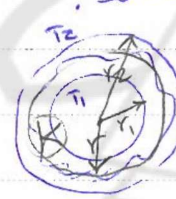
$\Rightarrow T_x = ?$ T_x که بدست آمد در یکی از معادلات قرار داده و H (جریان گرمایی) بدست می‌آید.

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \dots + \frac{L_n}{k_n}} \qquad \sum_{1}^{N} \frac{L_i}{k_i}$$

حال اگر n لایه داشتیم باز هم این فرمول است، دمای اولیه و ثانویه مستقلی داشته و فقط مخرج کسر جمع می‌شود: $\frac{L_1}{k_1} + \dots + \frac{L_n}{k_n}$

نکته: اگر k ثابت نبود مثلاً بود: $k = \alpha x^2$ باید مثل در سوال پایین از انتگرال استفاده کرده و در انتگرال k دیگر ثابت نیست.
k می‌تواند برحسب T (دما) باشد.

نمونه: با فرض ثابت بودن k آهنگ شعاعی جریان گرما در ماده‌ی میان دو کره‌ی هم مرکز را بیابید.

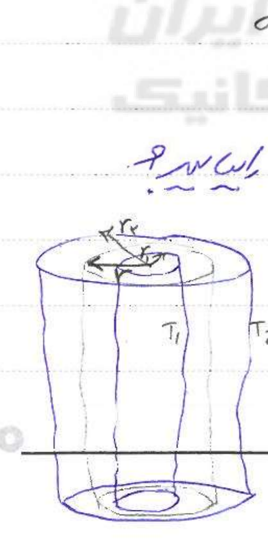


$$H = -kA\frac{dT}{dx} = -k4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

$$\int \frac{H\,dr}{-4\pi r^2 k} = \int_{T_1}^{T_2} dT \longrightarrow H_{\text{کره}} = \frac{4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1}(T_1 - T_2)$$

که با مواد بین دو کره کشیده شده است

مثال: با فرض ثابت بودن k آهنگ شعاعی جریان گرما را در ماده‌ی میان دو استوانه‌ی هم‌مرکز را بیابید.



$$H = -kA\frac{dT}{dr} = -k2\pi r h\frac{dT}{dr} \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \frac{H\,dr}{-k2\pi r h} = \int_{T_1}^{T_2} dT$$

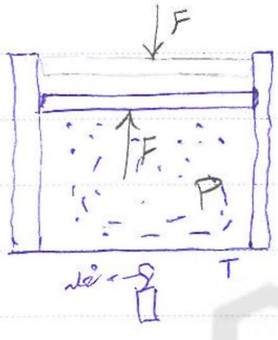
$$H = \frac{2\pi k h}{\ln r_2/r_1}(T_1 - T_2)$$

هیچ ارتباطی ندارد دقت بالایی با پایینی

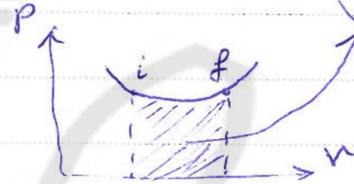
گرما و کار:

کار: صورتی از انرژی است که برای انتقال از دستگاهی به دستگاه دیگر به طور مستقیم دما در آن نقش ندارد.

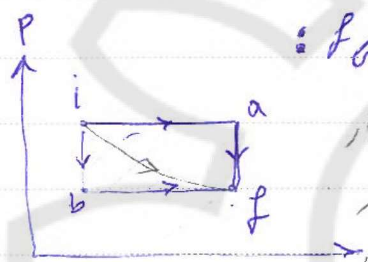
کار حاصل از انبساط گرمایی گاز:



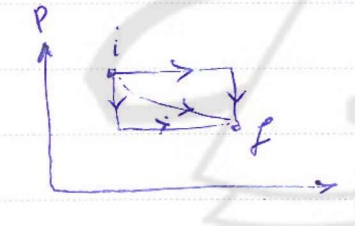
$$W=\int F\cdot ds,\quad F=PA \;\Big\}\; W=\int PA\,ds \rightarrow \boxed{W=\int_{V_i}^{V_f} P\,dV}$$



وابستگی کار و گرما به مسیر در انتقال دستگاه از حالت ابتدایی i به حالت پایانی f:



سطح زیر نمودار متفاوت پس کار انجام شده وابسته به مسیر است. (پایستار نیست)



سطح زیر نمودار متفاوت. پس گرمای انتقال یافته وابسته به مسیر است.

اگر گرما از دستگاه خارج شود $Q<0$ — اگر گرما به دستگاه داده شود $Q>0$

اگر کار بر روی دستگاه انجام شود $W<0$ — اگر کار توسط دستگاه انجام شود $W>0$

$$\Delta U = Q - W \qquad (U_f - U_i)$$

وابسته به مسیر نیست و فقط به نقاط ابتدا و انتهایی وابسته است $\Rightarrow$ قانون اول ترمودینامیک

برخی کاربردهای قانون اول ترمودینامیک: الف) فرایند تک فشار (هم فشار): $P = cte$

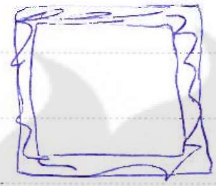
$$W=\int P\,dV \xrightarrow{P=cte} = P\int_{V_i}^{V_f} dV \rightarrow W=P(V_f-V_i)$$

برای نمونه در تبدیل آب ۱۰۰ درجه به بخار آب ۱۰۰ درجه در فشار ثابت داریم:

$$\Delta U = Q - W$$
$$= mL_v - P(V_f - V_i)$$

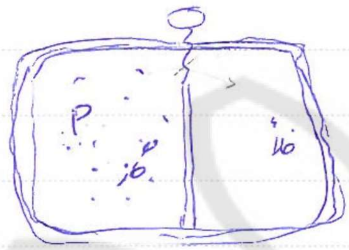
برای تبدیل m کیلوگرم از آب ۱۰۰ درجه به بخار ۱۰۰ درجه

ب) فرایند بی‌دررو:



$$Q = 0$$
$$\Delta U = Q - W = -W$$

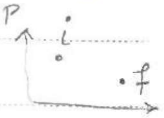
فرایند انبساط آزاد:



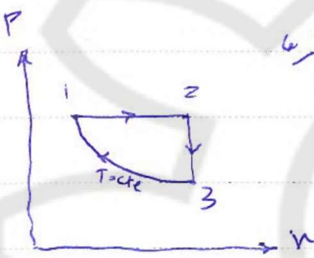
عایق $Q = 0$

$W = 0 \rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow U = cte$

نمودارش نیست و فقط ابتدا و انتها داریم



فرایند چرخه‌ای: فرایندی را گویند که در آن سیستم یا دستگاه پس از چند فرایند و مبادله‌ی کار و گرما دوباره به حالت اولیه‌ی خود باز گردد.



$$\Delta U = U_f - U_i = 0 \rightarrow \boxed{Q = W}$$

نظریه‌ی جنبشی گازها: در سطح ابتدایی و ساده می‌توان قوانین گازها را به وسیله‌ی روش‌های نسبتاً ~~ساده~~ فیزیکی و بالعکس روش‌های ساده‌ی میانگین‌گیری ریاضی برای مجموعه‌ی اتم‌ها بکار بست.

قانون بویل - ماریوت: برای حالت‌های تعادل به ازای جرم معینی از گاز در دمای ثابت فشار با وارون حجم متناسب است:

$$T = cte \rightarrow P \propto \frac{1}{V} \rightarrow PV = cte \quad (1)$$

قانون شارل - گیلوساک: در فشار ثابت حجم و دما متناسبند:

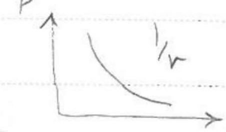
$$P = cte \rightarrow V \propto T \rightarrow \frac{V}{T} = cte \quad (2)$$

$$(1),(2) \longrightarrow \frac{PV}{T} = cte = nR \longrightarrow \boxed{PV = nRT}$$

تعداد مول گاز
مقدار ثابت

؟ ... } مقدار R برای تمام گازها یکسان است و برابر $R = 8.314 \, J/mole = 1.986 \, cal/mole$ می‌باشد که به آن ثابت عمومی گازها گویند. گازی که از رابطهٔ $PV = nRT$ پیروی کنند ← کامل.

نمونه: کاری را که به وسیلهٔ یک مول گاز آرمانی در انبساط تک دما از حجم اولیه V_i به نهایی V_f انجام می‌شود را بیابید؟



$$W = \int P\,dV \xrightarrow{P = \frac{nRT}{V}} nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

یادآوری: اگر فرض کنیم در مورد مولکولهای یک گاز آرمانی هیچ انرژی پتانسیل درونی وجود ندارد و تمام انرژی به صورت انرژی جنبشی می‌باشد، در این صورت با توجه به اینکه انرژی جنبشی انتقالی میانگین هر مولکول از رابطهٔ $3 \times \frac{1}{2} kT$ بدست می‌آید، برای گازی با N مولکول می‌توان نوشت:

$$U = N\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right) = \tfrac{3}{2} NKT \xrightarrow{K = R/N_0}$$

این رابطه نشان می‌دهد که در یک گاز کامل انرژی درونی فقط به دما بستگی دارد:

$$= \tfrac{3}{2} \tfrac{N}{N_0} RT = \boxed{\tfrac{3}{2} nRT}$$

عدد آووگادرو

گرمای ویژهٔ گاز آرمانی:

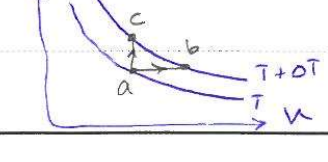
گرمای ویژه در حجم ثابت:

$$C_v: \quad \Delta U = Q - W \xrightarrow{P\Delta V = 0} \Delta U = Q, \quad Q = nC_v \Delta T \quad \Big\} \; \boxed{\Delta U = nC_v \Delta T}$$

در فشار ثابت:

$$C_p: \quad \Delta U = Q - W, \quad Q = nC_p \Delta T, \quad W = P\Delta V \quad \Big\} \; \boxed{\Delta U = nC_p \Delta T - P\Delta V}$$

از آنجا که U یک گاز کامل آرمانی فقط بستگی به T دارد می‌توان نوشت:



$$\Delta U)_{p,\; a\to b} = \Delta U)_{v,\; a\to c} \rightarrow nC_p \Delta T - P\Delta V = nC_v \Delta T$$

$$PV=nRT \xrightarrow{\text{مشتق}} P\Delta V+\overset{\text{فشار ثابت}\ \cdot}{V\Delta P}=nR\Delta T \rightarrow P\Delta V=nR\Delta T$$

$$\rightarrow nC_p\Delta T-nR\Delta T=nC_v\Delta T \rightarrow \boxed{C_p-C_v=R} \quad \boxed{\frac{C_p}{C_v}=\gamma}$$

مهم — مهم

اصل تقسیم برابر انرژی: به کمک مکانیک آماری می‌توان نشان داد که اگر تعداد ذرات زیاد بوده و مکانیک نیوتنی برقرار باشد مقادیر میانگین این جمله‌ها برابر بوده و فقط به دما بستگی دارد.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}mv^2 \ \text{(انتقالی)}\\ \frac{1}{2}I\omega^2 \ \text{(دورانی)}\\ \frac{1}{2}\mu v^2 \ \text{(ارتعاشی)}\end{array}\right\} \frac{1}{2}kT$$

μ: جرم کاهیده

در مورد گاز تک اتمی:

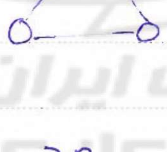
$$U=3n\left(\frac{RT}{2}\right) \rightarrow C_v=\frac{dU}{ndT} \rightarrow C_v=\frac{3}{2}R$$

$$C_p-C_v=R \rightarrow C_p=\frac{5}{2}R$$

گاز دو اتمی: به فرض دو اتم به وسیله‌ی میله‌ی صلبی به هم وصل باشند:

$$U=3n\left(\frac{RT}{2}\right)+2n\left(\frac{RT}{2}\right)=\frac{5}{2}nRT \rightarrow C_v=\frac{5}{2}R,\ C_p=\frac{7}{2}R$$

گاز سه اتمی [illegible]:



$$U=3n\left(\frac{RT}{2}\right)+3n\left(\frac{RT}{2}\right)=3nRT$$

$$C_v=3R \quad C_p=4R \Rightarrow \gamma=\frac{4}{3}$$

نمونه: نشان دهید که برای یک گاز آرمانی در یک فرایند بی‌دررو pv^{γ} مقدار ثابتی است؟

$$\Delta U=Q-W \xrightarrow[\Delta U=nC_v\Delta T]{Q=0,\ W=P\Delta V} \Delta T=\frac{-P\Delta V}{nC_v} \quad (1)$$

$$PV=nRT \rightarrow P\Delta V+V\Delta P=nR\Delta T \rightarrow \Delta T=\frac{P\Delta V+V\Delta P}{nR} \quad (2)$$

$$\xrightarrow[R=C_p-C_v]{(1),(2)} VC_v\Delta P=-PC_p\Delta V$$

$$\frac{\Delta P}{P}+\frac{C_p}{C_v}\frac{\Delta V}{V}=0 \xrightarrow[\text{حدی}]{\text{در حالت}} \int\frac{dP}{P}+\int\gamma\frac{dV}{V}=0$$

$$\ln\frac{P}{P_0}+\gamma\ln\frac{V}{V_0}=0 \rightarrow \ln P+\ln V^{\gamma}=cte \rightarrow \ln PV^{\gamma}=cte \rightarrow \left.\begin{array}{l}PV^{\gamma}=cte\\ P_1V_1^{\gamma}=P_2V_2^{\gamma}\end{array}\right\} \text{مهم}$$

$PV = nRT \rightarrow P = \frac{nRT}{V} \longrightarrow \boxed{TV^{\gamma-1} = cte}$

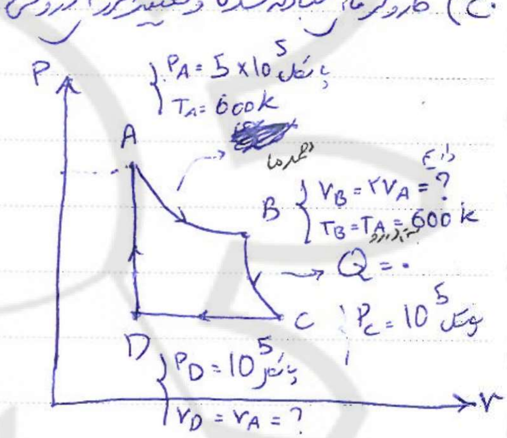
این سه فرمول بسیار کاربردی است که در سوالات نموداری در فرایندی دررو مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$V = \frac{nRT}{P} \longrightarrow P\left(\frac{nRT}{P}\right)^{\gamma} = cte \longrightarrow \boxed{P^{1-\gamma} T^{\gamma} = cte}$

۴) دو مول از یک گاز کامل دواتمی مطابق شکل چرخه ABCDA را می‌پیماید. فشار و دمای گاز در نقطه A برابر 5×10^5 پاسکال و 600 کلوین و حجم در نقطه B دو برابر حجم در نقطه A است. اگر فشار در نقطه D، 10^5 پاسکال باشد کمیت‌های را حساب کنید: الف) فشار در نقطه B؟ ب) دما در نقطه D؟ ج) کار و گرمای مبادله شده و تغییر انرژی درونی هر یک از فرایندها؟ د) بهره ترمودینامیکی چرخه؟

$(0/4)^{2/7} = 0/77$ $\quad C_v = \frac{5}{2}R$

$R = 8.3 \quad C_p = \frac{7}{2}R$



$P_A V_A = nRT_A \longrightarrow V_A = ?$

$P_A V_A = P_B V_B \longrightarrow P_B = ?$

$P_D V_D = nRT_D \longrightarrow T_D = ?$

$P_B V_B^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma} \longrightarrow V_C = ?$

$P_C V_C = nRT_C \longrightarrow T_C = ?$

$A \longrightarrow B : \overset{\text{هم دما}}{W_{AB}} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \; / \; \Delta U_{AB} \overset{\text{T ثابت است}}{=} 0 \; / \; \Delta U = Q - W \rightarrow Q_{AB} = W_{AB}$

$B \longrightarrow C : \overset{\text{بی دررو}}{Q_{BC}} = 0 \; / \; \Delta U = Q - W = -W = nC_v \Delta T_{BC} = -5727\,J$

$C \longrightarrow D : Q_{CD} = nC_p \Delta T_{CD} = -1987 \; / \; \Delta U = nC_v \Delta T_{CD} = -14193 \; / \; W = Q - \Delta U = -5677\,J$

$D \longrightarrow A : \overset{\text{ح ج}}{W_{DA}} = 0 \; / \; \Delta U = nC_v \Delta T_{DA} = 19920\,J \; / \; \Delta U = Q - W \rightarrow Q = \Delta U_{DA}$

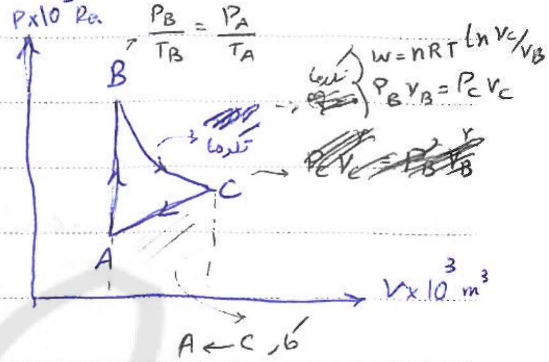
$\eta = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}} \qquad Q_{in} = Q_{AB} + Q_{DA}$

$Q_{out} = Q_{CD}$

گرما وارد شده ← $A \rightarrow B$
گرما = صفر ← $B \rightarrow C$
گرما خارج شده ← $C \rightarrow D$
گرما وارد شده ← $D \rightarrow A$

۴) یک دهم مول از یک گاز کامل چرخه‌ای مطابق شکل را طی می‌کند که در آن فرایند BC تکدما است. مطلوب است:

الف) کار مبادله شده در هر فرایند ب) تغییر انرژی درونی در هر فرایند ج) گرمای مبادله شده در هر فرایند.



$W_{AB}=0 \qquad \underset{\text{هم‌دما}}{W_{BC}}=\int P\,dV \xrightarrow{PV=nRT} nRT_{C\,\text{یا}\,B}\ln V_C/V_B$

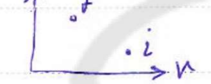
$W_{CA}=AC$ سطح زیر نمودار

$\Delta U_{AB}=\frac{3}{2}nR(T_B-T_A)$, $T_B=\frac{P_BV_B}{nR}$, $T_A=\frac{P_AV_A}{nR}$

$\Delta U_{BC}=\frac{3}{2}nR(\underbrace{T_C-T_B}_{0})=0 \qquad \Delta U_{CA}=\frac{3}{2}(P_AV_A-P_CV_C)$

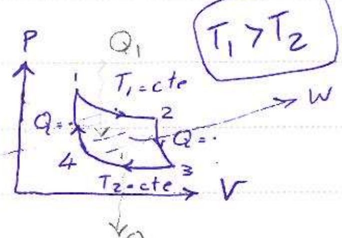
فصل آنتروپی و قانون دوم ترمودینامیک

فرایند برگشت‌ناپذیر: در آن سیستم با عبور از یک رشته حالتهای نامتعادل از یک حالت تعادل i به حالت تعادل دیگر f

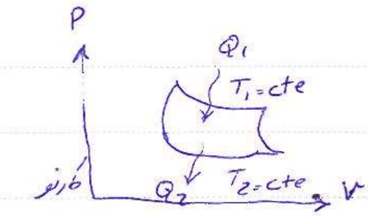


رفته و لذا نمی‌توان فرایند را به صورت یک نمودار پیوسته بر روی نمودار P-V کشید.

فرایند برگشت‌پذیر: اگر در رسیدن از i به f با افزایش نامحدود تعداد مراحل فرایند و هم‌پای آن کاهش اندازه هر تغییر باعث شویم که سیستم از حالتهای تعادلی متوالی و پیوسته‌ای گذر کند به طوری که بتوان نمودار P-V پیوسته‌ای کشید گویند. ویژگی ← با یک تغییر جزئی در محیط مسیر فرایند را وارونه می‌کنیم.



چرخه کارنو: $e=\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|$ (گرمای خارج شده: Q_2، گرمای وارد شده: Q_1)

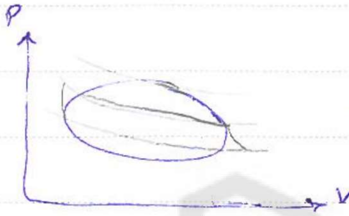


آنتروپی : $\left|\frac{Q_1}{T_1}\right| = \left|\frac{Q_2}{T_2}\right| \rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \rightarrow \sum \frac{Q}{T} = 0$ در چرخه کارنو

آنتروپی $= \sum \frac{Q}{T} \xrightarrow{\text{جزئی}} \boxed{ds = \frac{đQ}{T}}$

قانون دوم ترمودینامیک

برای یک چرخه‌ی برگشت پذیر :



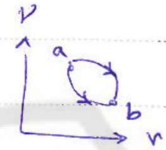
$\sum Q/T = 0$

علامت مسیر بسته

$$\rightarrow \oint \frac{đQ}{T} = \oint ds = 0$$

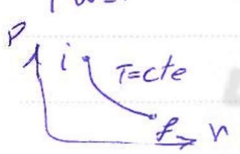
$\oint ds = 0 \longrightarrow$ که یک متغیر حالت است $\longrightarrow \int_a^b ds = \int_a^b ds$

مسیر ۲ مسیر ۱



آنتروپی فرایندهای برگشت ناپذیر: از آنجا که $S_b - S_a = \int_a^b \frac{đQ}{T}$ برای فرایندهای برگشت پذیر معتبر است بنابراین نمی‌توان آن را برای یک فرایند برگشت ناپذیر نوشت. اما از آنجا که ΔS فقط به موقعیت‌های i و f وابسته است. لذا کافی است که i و f را با یک فرایند برگشت پذیر به هم وصل نموده و ΔS آن را بدست می‌آوریم که در واقع ΔS فرایند برگشت ناپذیر هم خواهد بود. مانند فرایند انبساط آزاد:

$$\begin{cases} Q = 0 \\ W = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow T = cte$$



پس کافی است انبساط آزاد را مانند یک فرایند برگشت پذیر که تکدما در نظر گرفت.

$$\Delta S = S_f - S_i = \int \frac{đQ}{T} \rightarrow Q = W \quad = \frac{1}{T}\int đQ = \frac{1}{T}\int đW$$

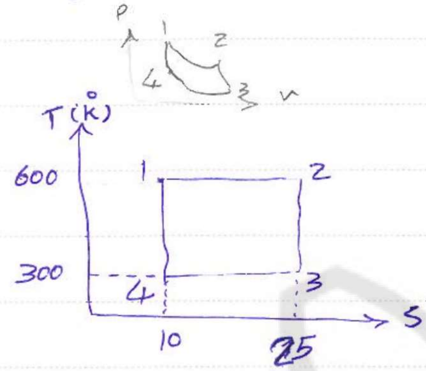
$$= \frac{1}{T}\left(nRT \ln \frac{V_f}{V_i}\right) \rightarrow \Delta S = nR \ln V_f/V_i$$

هر فرایند طبیعی در جهتی پیش خواهد رفت که آنتروپی مجموعه سیستم محیط زیاد شود.

در فرایندهای برگشت پذیر آنتروپی مجموعه سیستم و محیط بدون تغییر می ماند.

نمونه: نمودار تغییرات آنتروپی و دمای مطلق یک ماشین گرمایی کارنو مانند شکل زیر است. الف) بازده ماشین؟

ب) گرمای وارد شده به ماشین؟ ج) گرمای خارج شده از ماشین؟



الف) $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{600} = ۱/۲ = \%50$

$ds = \frac{dQ}{T} \rightarrow dQ = T\,ds \rightarrow \int_1^2 dQ = \int_1^2 T\,ds$

$\rightarrow Q = T\Delta S\Big|_1^2 \rightarrow Q_{in} = 600 \times 15$

$Q_{out} = T\Delta S\Big|_3^4 = -300 \times 15$

یادآوری:

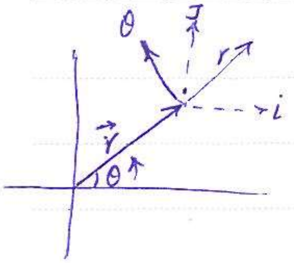
$S_{\text{کره}} = ۴\pi r^۲$ $V_{\text{کره}} = ۴/۳\,\pi r^۳$

$P_{\text{دایره}} = ۲\pi r$ $S_{\text{دایره}} = \pi r^۲$

$S_{\text{استوانه}} = ۲\pi r h$ $V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h$

حل تمرین فیزیک ۱ :

سری سوم سوال ها : (درسنامه)
حرکت دورانی



$$\hat{r} = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}$$

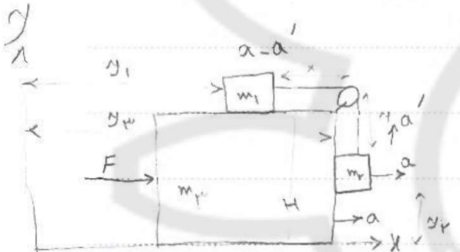
$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

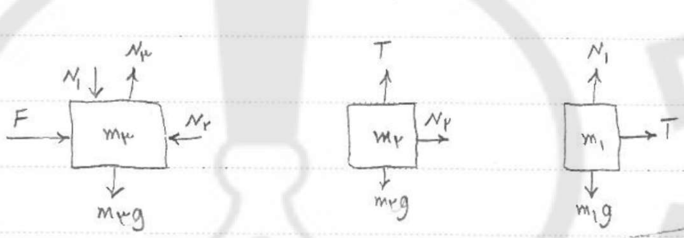
(۱)

$r = 4t \to \dot{r} = 4 \to \ddot{r} = 0$ $\qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = 4\hat{r} + 4t \times \dot{\theta} \times \hat{\theta}$

$\theta = t + 1 \to \dot{\theta} = 1 \to \ddot{\theta} = 0$ $\qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} = -4t \times \hat{r} + 8\hat{\theta}$

(۴)





غلط : نسبت m_3

$x + y = \text{cte} \to \dot{x} + \dot{y} = 0 \to \dot{x} = -\dot{y} \to a_1 = -a_2$ (نسبی)

$A_1 = a_1 + a_3$ (مطلق = نسبی + ...)

$$\begin{cases} m_3 : F - N_2 = m_3 a_3 \\ m_2 : T - m_2 g = m_2 A_2 \\ m_1 : T = m_1 A_1 \end{cases}$$

$N_2 = m_2 a_3$

طول نخ $= y_2 - y_1 + H - y_3$

دو بار مشتق $\to 0 = a_3 - a_1 - a_2$

$a_2 = a_3 - a_1$

$= a - (a - a') = a'$

جزو جواب پایین ما لازم داشتیم

شتاب دستگاه + شتاب نسبی = شتاب مطلق

(۱) $T - m_2 g = m_2 a'$ ، (۲) $T = m_1(a - a')$ ، $N = m_2 a$ (عمل N_2) ، $F - N - T = m_3 a$

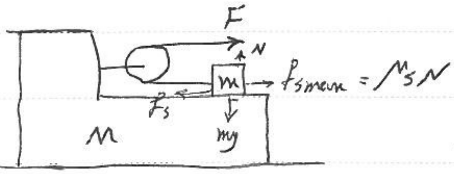
$$(1),(2) \to m_1 a - m_1 a' = m_2 g + m_2 a' \to a = \frac{m_2 g + (m_1 + m_2)a'}{m_1}$$

$$F = N + T + m_3 a = m_2 a + m_1 a - m_1 a' + m_3 a = (m_1 + m_2 + m_3)\left(\frac{m_2 g (m_1 + m_2) a'}{m_1}\right) - m_1 a' \xrightarrow{m_1 = m_2 = m_3}$$

$$= 3m\left(\frac{mg + 2ma'}{m}\right) - ma' = \boxed{3mg + 5ma'}$$

Subject
Date

(1)



$x: 2F - f_{s\,max} = Ma$

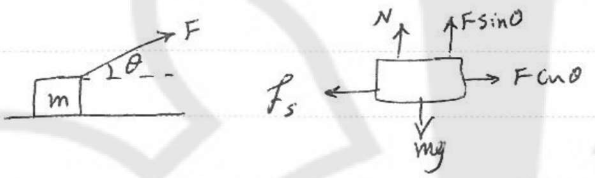
$\mu_s mg - F = ma$

$$\frac{2F - \mu_s mg}{M} = \frac{\mu_s mg - F}{m}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu_s mg(m+M)}{2m+M} \qquad \mu_s mg - F = ma$$

$$a = \mu_s g - \frac{\mu_s mg(m+M)}{2m+M} = \mu_s g\left(1 - \frac{m+M}{2m+M}\right) = \frac{\mu_s mg}{2m+M}$$

(2)



$N = mg - F\sin\theta$

$f_{s\,max} = F\cos\theta \rightarrow \mu_s N = F\cos\theta \rightarrow \mu_s(mg - F\sin\theta) = F\cos\theta \rightarrow$

$$mg\mu_s - F\sin\theta\,\mu_s = F\cos\theta \rightarrow F = \frac{mg\mu_s}{\cos\theta + \sin\theta\,\mu_s}$$

مینیمم $F \rightarrow F' = 0 \rightarrow \dfrac{-(-\sin\theta + \cos\theta\,\mu_s)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta\,\mu_s^2 + 2\sin\theta\cos\theta\,\mu_s} = 0 \rightarrow \cos\theta\,\mu_s = \sin\theta$

$\mu_s = \tan\theta$

$$F_{min} = \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}} = \frac{\mu_s mg}{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\mu_s mg}{1+\tan^2\theta} = \frac{\mu_s mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$$

(3)

الف) $W = -\int f_k\,dx = -\int \mu_k N\,dx = -\int \mu_k mg\,dx = -\mu_k mg x$

ب) $W = \int f_d\,dx = \int kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$

ج) $W_N = \int f_N\,dx\cos\alpha = 0$

$W_{mg} = \int f_{mg}\,dx\cos\alpha = 0$

د) $\Delta K = W_T$

$-\mu_k mgx + \frac{1}{2}kx^2$

ه) $W_2 = -\frac{1}{2}kl^2 + \mu_k mgl$

$\frac{1}{2}mv_0^2 = ---$

سری هفتم :

①

$$\begin{cases} F = -\frac{b}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\ b = 3\ N/m^2 \end{cases}$$

الف) $F = ?$ اگر $A|_0^2 \to B|_0^5$

$$F = \frac{-3}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\hat{i} + y\hat{j}) \to W = \int F_x dx + \int \cancel{F_y} dy \to$$

$$W = \int \frac{-3x}{x^4} dx = \int_2^5 -\frac{3}{x^3} dx = \cancel{-4/4\, x^{-4}}$$

ب) $m = 2kg \quad W = ? \quad r = 7m \quad W = \int F_x dx + \int F_y dy = \int \frac{-3}{7^3} x\, dx + \int \frac{-3}{7^3} y\, dy$

$= -\frac{3}{7^3}\left(\int x\, dx + \int y\, dy\right) = 0$ چون دوره به نقطه اول برمی‌گردد . پس $W = 0$

ج) $m = 2kg \to V = ?$ $\quad \Sigma F = ma \xrightarrow{\text{حرکت دایره‌ای}} F = mv^2/r \to v^2 = \frac{7}{2}\left(-\frac{3}{7^3}\right)(x\hat{i} + y\hat{j})$

$$= -\frac{3}{98}(x\hat{i} + y\hat{j})$$

---

②

$F = a(\sin\omega t\,\hat{i} + \cos\omega t\,\hat{j}) \to a = \frac{F}{m} = \frac{a}{m}(\sin\omega t\, i + \cos\omega t\, j)$

$\to \vec{r} = \int_0^t a(t)dt = \frac{a}{m\omega}\left((1-\cos\omega t)i + (\sin\omega t)j\right)$

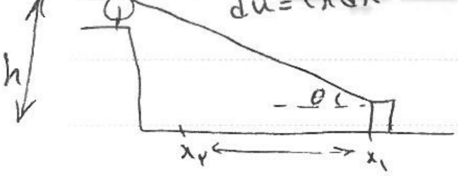
$W = \Delta K = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}m\frac{a^2}{m^2\omega^2}(\underbrace{1 + \cos^2\omega t - 2\cos\omega t + \sin^2\omega t}_{1}) =$

$\frac{a^2}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) \quad \to P = \frac{dW}{dt} = \frac{a^2}{m\omega^2}\frac{d(1-\cos\theta)}{m\omega^2} = \frac{a^2\omega\sin\omega t}{m\omega^2}$

$= \frac{a^2\sin\omega t}{m\omega^2}$

---

③

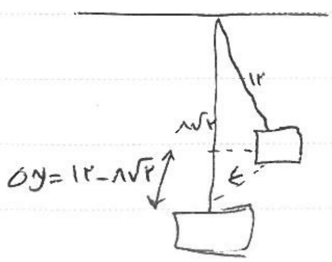


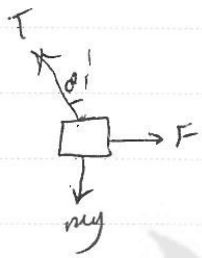
$u = h^2 + x^2$
$du = 2x\,dx$

$W = \int F_x dx = 25\int \cos\theta\, dx = \frac{25}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{h^2+x^2}} dx$

$\frac{25}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x} = 25\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = 25\sqrt{h^2+x^2}\Big|_2^1$

Subject
Date





۴

$$F = T\sin\theta$$

$$mg = T\cos\theta \rightarrow F = mg\tan\theta = \frac{۲۴۰۰}{۲\sqrt{۲}}$$

$$W = -\Delta U = -(-mg\,\Delta y)$$

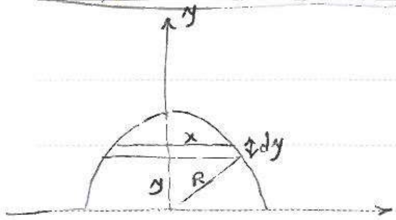
$$= ۲۴۰۰(۱۲ - ۸\sqrt{۲})$$

$$F_x d = \frac{۴۶۰۰}{\sqrt{۲}} = W'$$

92433231 مجتبی محمدزاده
Subject
Date 61 آقای حق‌بین

حل تمرین فیزیک ۱ — دوره‌ی نهم سوالات

سوال ۲



$$y_{cm}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}\quad,\quad dm=\lambda dA=\lambda(2x\,dy)$$

$$y_{cm}=\frac{\int 2\lambda xy\,dy}{\int 2\lambda x\,dy}\qquad x^2+y^2=R^2\rightarrow x=\sqrt{R^2-y^2}$$

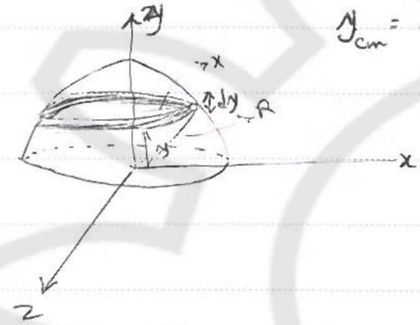
$$y_{cm}=\frac{\int \lambda\left(2y\sqrt{R^2-y^2}\,dy\right)}{\int \lambda\, 2\sqrt{R^2-y^2}\,dy}$$

مخرج کسر برابر جرم کل نیمدایره است که می‌شود:

$$\lambda A=\lambda\frac{\pi R^2}{2}$$

$$y_{cm}=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^R 2y\sqrt{R^2-y^2}\,dy=\frac{4R}{3\pi}$$

سوال ۳

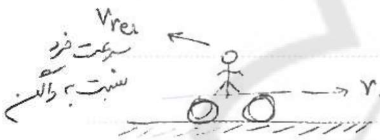


$$y_{cm}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}\qquad dm=\rho\,dV=\rho\pi x^2\,dy$$

$$x^2=R^2-y^2$$

$$y_{cm}=\frac{\int \rho\pi x^2 y\,dy}{\int \rho\pi x^2\,dy}=\frac{\int (R^2-y^2)y\,dy}{\int (R^2-y^2)\,dy}=\frac{3}{8}R$$

سوال ۴



$$M_{tot}\times V_{cm\,i}=M_{tot}\times V_{cm\,f}$$

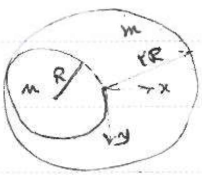
$$\rightarrow V_{cm\,i}=V_{cm\,f}=V_0$$

$$V_0=V_{cm\,f}=\frac{m_1V_{1f}+m_2V_{2f}}{m_1+m_2}$$

$V_{1f}=V_{2f}-V_{rel}$ سرعت فرد نسبت به زمین

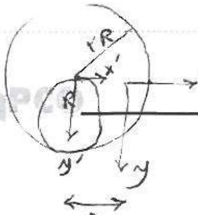
$$\underbrace{V_{2f}-V_0}_{\text{تغییر سرعت}}=\frac{m_2V_{rel}}{m_1+m_2}=\frac{W_2V_{rel}}{W_1+W_2}$$

سوال ۶



$$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{-RM+0}{M+m}=\frac{-RM}{M+m}$$

$$x_{cm\,i}=x_{cm\,f}=x'_{cm\,f}+\Delta\rightarrow\boxed{\Delta=\frac{-RM}{M+m}}$$



یعنی کره باید به اندازه $\frac{-RM}{M+m}$ به سمت چپ جابجا شده است.

Subject
Date

نرم افزارهای کاربردی رشته‌ی صنایع : ۴۳

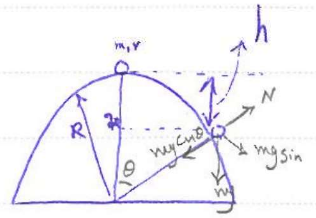
عمران : Autocad _ Etabs & safe _ sap

صنایع : msproject _ primara _ PMBOK

matlab

مکانیک : catia _ solidworks _

نمونه: از بالاترین نقطه‌ی نیم‌کره‌ای به جرم M و شعاع R بدون سرعت اولیه به پایین می‌لغزد و غلتش آن بدون لغزش است.
به ازای چه مقدار از زاویه‌ی θ مهره سطح نیمکره را ترک می‌کند؟



$$mgh = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

$$I = \tfrac{2}{5} mr^2, \quad \omega = \frac{\bar{v}}{r}$$

$$mgh = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\times\tfrac{2}{5} mr^2 \frac{\bar{v}^2}{r^2} \rightarrow gh = \tfrac{7}{10}\bar{v}^2 \rightarrow \bar{v}^2 = \tfrac{10}{7} gh$$

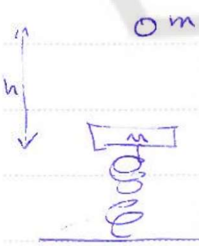
$$h = (R+r) - (R+r)\cos\theta = (R+r)(1-\cos\theta) \rightarrow \bar{v}^2 = \tfrac{10}{7} g(R+r)(1-\cos\theta) \quad (1)$$

$$mg\cos\theta - N = \frac{m\bar{v}^2}{R+r} \xrightarrow{\text{در لحظه‌ای که } N=0 \text{ مهره سطح نیمکره را ترک می‌کند}} mg\cos\theta = \frac{m\bar{v}^2}{R+r} \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \cos\theta = \tfrac{10}{17} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\tfrac{10}{17}$$

$$\theta = \cos^{-1} 2/3$$

نمونه: مطابق شکل گلوله‌ای به جرم $m = 1kg$ از ارتفاع $h = 5m$ بدون سرعت اولیه رها می‌شود. این گلوله با جسم $M = 3kg$
روی فنری به ضریب سختی $k = 300$ برخورد کاملاً کشسان می‌کند. مطلوب است: الف) سرعت m و M
بلافاصله پس از برخورد؟ ب) حداکثر تراکم فنر؟

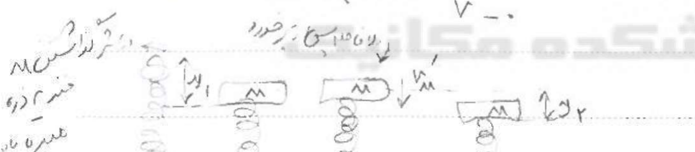


$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times5} = 10\, m/s \downarrow$$

$$\begin{cases} mv + M\times 0 = mv'_m + Mv'_M \\ e = -\dfrac{v'_m - v'_M}{v - 0} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1\times10 = v'_m + 3v'_M \\ 10 = v'_M - v'_m \end{cases}$$

$$v'_M = 5\, m/s \downarrow \qquad v'_m = -5\, m/s \uparrow$$

سرعت‌ها بلافاصله پس از برخورد



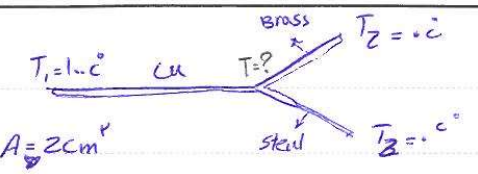
به ازای $v'' = 0$ تراکم فنر حداکثر است

$$\tfrac{1}{2} k y_1^2 + \tfrac{1}{2} M v'^2 = \tfrac{1}{2} k y_2^2 + \tfrac{1}{2} M v''^2 - Mg(y_2 - y_1) \rightarrow$$

$$y_1 = Mg/k$$

Subject
Date

نمونه: T چقدر است؟



$A = 2cm^2$

$l_{cu} = 45cm$

$k_{cu} = 400 \ J/s.m.K$

$L_B = 15$

$L_s = 12$

$k_B = 100$

$k_s = 50$

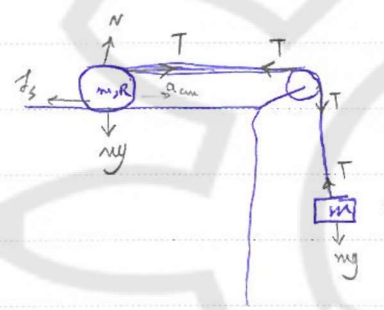
$$H_1 = k_c A \frac{T_1 - T}{L_c} \quad , \quad H_1 = H_2 + H_3$$

$$H_2 = k_B A \frac{T - 0}{L_B}$$

$$H_3 = k_S A \frac{T - 0}{L_S}$$

نمونه: در شکل مقابل شتاب مرکز جرم استوانه و شتاب سقوط وزنه m و کشش نخ و حرکت استوانه را

بدون لغزش فرض کنید و از جرم قرقره صرف نظر نمایید.



$$mg - T = ma$$

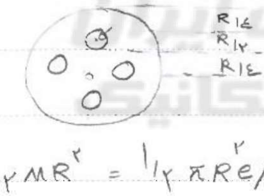
$$T - f_s = Ma_{cm}$$

$$f_s R + T.R = 1/2 MR^2 \alpha$$

$$a = a_A = 2a_{cm} = 2R\alpha$$

→ اگر طناب به مرکز جرم وصل می‌شود دیگر ضریب ۲ را نداشتیم. چون ۲ بالا وصل شده پس شتاب بالا ۲ برابر شتاب مرکز است. اگر به مرکز وصل می‌شد T دیگر گشتاور نداشت.

نمونه: مطابق شکل از یک قرص همگن به شعاع R به ضخامت e و جرم مخصوص ρ، ۴ حفره هر یک به شعاع $r = R/4$ بیرون آورده‌ایم. اینرسی دورانی این جسم را بدست آورید نسبت به محور قرص (O)



$I_o = 1/2\, MR^2 = 1/2\, \pi R^2 e\rho R^2 = 1/2\, \pi e\rho R^4$ گشتاور ماند قرص قبل از در آوردن حفره‌ها

$i_o = 1/2\, \pi e\rho r^4 = 1/2\, \pi e\rho \frac{R^4}{256}$

$i_o = 1/2\, \pi e\rho R^4/256 + \underset{\pi r^2 e\rho}{m} (R/2)^2 = \frac{\pi e\rho R^4}{512} + \pi (R/4)^2 e\rho (R/2)^2 = \frac{\pi e\rho R^4}{512} + \frac{\pi e\rho R^4}{64}$

$= \frac{9\pi e\rho R^4}{512} \times \underbrace{4}_{\text{۴ تا حفره}}$

$I' = 1/2\, \pi e\rho R^4 - 4 \times \frac{9}{512}\pi e\rho R^4$

$= \frac{55}{128} \pi e\rho R^4$

اگر جرم جسم باقیمانده m' باشد I کل را برحسب m' و R بدست آورید.

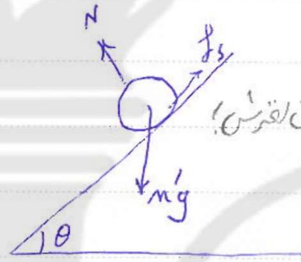
$$m' = \pi R^2 e\rho - 4\pi (R/4)^2 e\rho = 3/4\, \pi e\rho R^2 \rightarrow \pi e\rho R^2 = 4/3\, m'$$

$$I = \frac{55}{96} m' R^2$$

ادامه سوال قبل

نمونه: الف) شتاب مرکز جرم؟

ب) حداقل ضریب اصطکاک برای غلتش بدون لغزش؟



الف)
$$\begin{cases} m'g\sin\theta - f_s = m' a_{cm} \\ f_s R = I\alpha \\ a_{cm} = R\alpha \end{cases}$$

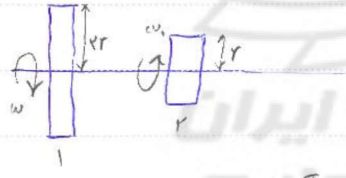
الف) $$a_{cm} = \frac{m'g\sin\theta}{m' + I/R^2}$$

ب) $$f_s = \frac{I \times m'g\sin\theta}{(m' + I/R^2) R^2}$$ نیروی اصطکاک مورد نیاز برای غلتش بدون لغزش

$$f_s = \mu_s m' g\cos\theta \longrightarrow \mu_s = \frac{I}{(m' + I/R^2) R^2} \operatorname{tg}\theta$$

$$= \frac{\frac{55}{96} m'R^2}{m'R^2 + \frac{55}{96} m'R^2} \operatorname{tg}\theta = \frac{55}{151} \operatorname{tg}\theta \simeq \frac{11}{30} \operatorname{tg}\theta$$

نمونه: مسئله ۳۶ هالیدی فصل ۱۲



$$\sum \tau_{ext} = 0 \rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$I_1\omega_1 \pm I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$$

$$I_1 = 1/2\, mR_1^2 = 1/2\, m(2r)^2 = 2mr^2$$

یکی خلاف دیگری است

$$I_2 = 1/2\, mR_2^2 = 1/2\, mr^2$$

$$2mr^2\omega_0 - 1/2\, mr^2\omega_0 = 5/2\, mr^2\omega \longrightarrow \omega = 3/5\, \omega_0$$

سوال: چقدر انرژی مصرف میشه؟

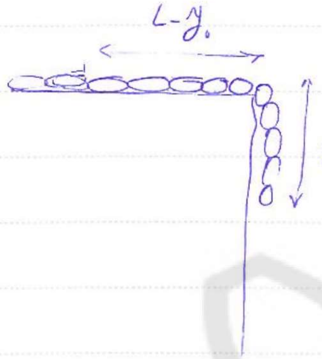
$$\underset{\text{اتلاف انرژی}}{\Delta K} = 1/2\, I_1\omega_1^2 + 1/2\, I_2\omega_2^2 - 1/2\,(I_1 + I_2)\omega^2$$

Subject

Date

بهره ماشین ~~[illegible]~~، کارنو، تبرید و اتو، دیزل

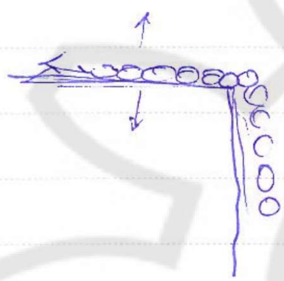
سوال میان‌ترم



$$\lambda g y_0 = \lambda g \mu (L - y_0)$$

$$y_0 = \mu L - \mu y_0$$

$$\boxed{y_0 = \frac{\mu L}{1+\mu}}$$



$$\Sigma F = ma \rightarrow \lambda g y - \mu \lambda g (L-y) = \lambda L \underbrace{v\frac{dv}{dy}}_{a}$$

$$g(y - \mu(L-y))\, dy = L\, v\, dv$$

$$\int_{y_0}^{L}$$