

برای دریافت نمونه سؤالات، جزوات و کتب بیشتر به ما پیوندید در

[https://t.me/iust\\_scientific](https://t.me/iust_scientific)

## فضای حقیقی $n$ -بعدی

ریاضیات کلاسیک بر دو رکن اساسی "عدد" و "فضا" بنا شده است. علوم حساب و جبر از عدد نشأت می‌گیرند و هندسه، به مفهوم سنتی آن، علم فضا و اشکال و اجسام موجود در فضا است. بسیاری اوقات می‌توان با یک پدیده دو برخورد متمایز ریاضی، یکی جبری- عددی، و دیگری هندسی، داشت. در برخورد جبری یک چارچوب نمادین ارائه می‌شود که اغلب برای حل مسائل دیگری نیز قابل استفاده است و گاهی نیز منجر به فراهم ساختن یک الگوریتم یا دستورالعمل زنجیره‌ای برای حل این‌گونه مسائل می‌شود. در برخورد هندسی، که ریشه در نیروی باصره انسان دارد، سعی بر این است که جمیع روابط موجود بین اجزاء پدیده یکجا جمع گردند، خصوصیات برجسته شناسایی شوند، و حل مسأله از این مشاهدات دیده شود. به ذکر دو مثال ابتدایی می‌پردازیم:

مثال ۱. می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی که از ۱ شروع شود یک مجذور کامل است. در واقع:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

یک روش جبری- عددی برای اثبات این ادعا، استقراء است. حکم برای  $n = 1$  صحیح است و اگر فرض کنیم (۱) برای  $n$  برقرار است، نشان می‌دهیم برای  $(n + 1)$  نیز برقرار است:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

برخورد هندسی با هممین حکم در شکل ۱ دیده می‌شود. توجه کنید که اعداد فرد به صورت لایه‌هایی از گوشه‌چپ پایین افزوده می‌شوند و همواره یک مربع به ضلع  $n$  پدید می‌آید:

شکل ۱

مثال ۲. می‌خواهیم در مورد تعداد جواب‌های دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر بحث کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases} \quad (2)$$

نخست مسئله را از دیدگاه جبری بررسی می‌کنیم. با تفریق دو رابطه داریم  $x + y = 2$ . اگر  $y = 2 - x$  را در معادله اول جایگزین کنیم نتیجه می‌شود که  $2x^2 - 4x + 2 = 0$  یا  $x^2 - 2x + 1 = 0$ ، پس  $x = 1$ . با جایگزینی در معادله اول داریم  $y = \pm 1$  ولی فقط جواب  $y = 1$  در معادله دوم صدق می‌کند، پس تنها جواب مسئله  $(x, y) = (1, 1)$  است. یک دیدگاه هندسی برای بررسی این مسئله می‌تواند توجه به مکان هندسی دو معادله در صفحه  $xy$  باشد. دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

معادله اول دایره‌ای به شعاع  $\sqrt{2}$  به مرکز  $(0, 0)$  را نمایش می‌دهد و معادله دوم، معادله یک دایره به شعاع  $\frac{3}{4} = \sqrt{2} + \frac{1}{4}$  به مرکز  $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ . حال فاصله مرکز دایره‌ها برابر  $\frac{1}{4}$  است، پس تنها نقطه دایره اول به فاصله  $\frac{3}{4}$  از مرکز دایره دوم، نقطه  $(1, 1)$  است، که تنها جواب مسئله می‌باشد.

توجه کنید که هرچند در راه حل هندسی نیز عملیات جبری انجام شد، لیکن این عملیات در راستای هدف‌های خاص هندسی بودند که شناخت شکل مدور مکان‌های هندسی القاء می‌کرد. برای اشکال نامأنوس یا وقتی که مقایسه طول شعاع‌ها و فواصل آسان نباشد، تحلیل جبری اجتناب‌ناپذیر است، ولی هرجا که دیدگاه هندسی مقدور باشد، معمولاً یک بینش یا تعبیر روشن‌کننده ایجاد می‌شود. نکته مهم دیگر در مورد مسئله بالا این که تعداد متغیرهای مسئله در اینجا ۲ است که بررسی هندسی آن را در صفحه  $xy$  ممکن می‌سازد. برای مسائل سه متغیری نیز می‌توان از تجسم هندسی

بهره جست. اما در بسیاری مسائل ریاضی و کاربردی، تعداد متغیرهای ذی دخل بیش از ۳ است که ظاهراً مانعی چاره‌ناپذیر در راه ارائه دیدگاه هندسی است زیرا که انسان به عنوان موجود سه بعدی هیچ گونه برداشت ادراکی مستقیم از ابعاد بالاتر از سه ندارد. یک هدف مهم ما در این جلسه و چند جلسه آینده فراهم آوردن نوعی هندسه  $n$ -بعدی است که در آن  $n$  به اعداد کوچکتر یا مساوی ۳ محدود نباشد. این هندسه را می‌توان یک زبان ریاضی مناسب برای تعمیم شهود هندسی به فرای ابعاد ۲ و ۳ تلقی کرد که همانند نیروی باصره در سوق دادن تفکر ریاضی به یافتن روش مناسب برای حل مسائل کارساز است. در اینجا هیچ‌گونه ادعایی برای "وجود" فیزیکی فضای  $n$ -بعدی مطرح نیست، بلکه یک نظام دقیق ریاضی مطرح خواهد شد که بستر مناسبی برای نوعی تجسم و شهود، هرچند مجازی و نمادین، در ابعاد بالاتر از ۳ است.

رهنمود ما برای ساختن فضای  $n$ -بعدی ارتباط جبر و هندسه در هندسه تحلیلی است. دیده‌ایم که اولین ارتباط جبر و هندسه از نسبت دادن یک عدد (یعنی "طول") به پاره‌خط‌ها آغاز می‌شود، یعنی در تناظر قرار دادن نقاط یک خط راست با مجموعه اعداد حقیقی،  $\mathbb{R}$ . در هندسه تحلیلی، نقاط یک صفحه با زوج‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر  $\mathbb{R}^2$ ، و نقاط فضا با سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر  $\mathbb{R}^3$ ، مدرج می‌شوند. تا اینجا جبر و هندسه مستقل از یکدیگر در ذهن ما وجود دارند و هندسه تحلیلی یک پل ارتباطی است. برای  $n \geq 4$ ،  $n$ -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی معنی دارند ولی هندسه‌ای فرای فضای عادی سه بعدی نمی‌شناسیم. با الهام گرفتن از ارتباط فوق برای  $n \leq 3$ ، مفاهیم هندسی را برای  $\mathbb{R}^n$ ، یعنی مجموعه  $n$ -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. به این ترتیب نوعی هندسه در  $\mathbb{R}^n$  بنا می‌شود.

با این مقدمه،  $\mathbb{R}^n$ ، مجموعه  $n$ -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی اشیاء ریاضی  $x_i \in \mathbb{R}$ ،  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  را در نظر می‌گیریم و هرچنین  $x$  را یک نقطه  $\mathbb{R}^n$  می‌نامیم. نخست یک عمل جمع در  $\mathbb{R}^n$  مشابه جمع بردارها در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  تعریف می‌کنیم. برای  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  و  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad (۳)$$

### (۱-۱) خواص جمع

(۱-۱-۱) خاصیت تعویض پذیری (جابجایی):  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ .

(۱-۱-۲) خاصیت شرکت پذیری  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ .

(۱-۱-۳) عنصر بی اثر:  $n$  تایی  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

(۱-۱-۴) عنصر قرینه: برای  $n$  تایی داده شده  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ،  $n$  تایی  $-\mathbf{x}$  که به صورت

$-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$  تعریف می شود (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

خواص فوق همه به سادگی از تعریف نتیجه می شوند.

تعریف جمع  $n$  تایی ها و خواص بالا عیناً از حالت دو بعدی و سه بعدی برگرفته شده اند. اگر به نقاط  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  و  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  در  $\mathbb{R}^3$ ، بردارهای ساطع از  $\mathbf{0}$  به این نقاط را منسوب کنیم،  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  مفهوم مجموع برداری معمول را دارد یعنی رأس چهارم متوازی الاضلاعی که سه رأس دیگر آن نقاط  $\mathbf{0}$ ،  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  هستند.

### شکل ۳

برای بردارها در صفحه و فضای سه بعدی، حاصل ضرب یک عدد حقیقی در بردار نیز تعریف شده است. این عمل را می توان در  $\mathbb{R}^n$  نیز تعریف کرد. برای نقطه  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  و عدد حقیقی  $r \in \mathbb{R}$ ، نقطه  $r\mathbf{x}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$r\mathbf{x} = (rx_1, \dots, rx_n) \quad (۴)$$

یعنی همه مؤلفه های  $\mathbf{x}$  در  $r$  ضرب می شوند. تعبیر این عمل در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  را یادآوری می کنیم. اگر بردار واصل از  $\mathbf{0}$  به  $\mathbf{x}$  را در نظر بگیریم،  $r\mathbf{x}$  برداری در همان راستاست که اگر  $r$  مثبت باشد همجهت با  $\mathbf{x}$  و اگر  $r$  منفی باشد در جهت مقابل است.

## شکل ۴

خواص ابتدایی زیر را در مورد ضرب در اعداد و ارتباط آن با عمل جمع ثابت می‌کنیم. همه این احکام نتیجه سراسر است تعریف هستند:

(۲-۱) خواص ضرب در اعداد

$$(۱-۲-۱) \quad 1x = x, x \text{ هر نقطه}$$

$$(۲-۲-۱) \quad \text{اگر } r, s \text{ اعداد حقیقی باشند و } x \text{ یک نقطه، } (rs)x = r(sx).$$

$$(۳-۲-۱) \quad \text{اگر } r, s \text{ اعداد حقیقی باشند و } x \text{ یک نقطه، } (r+s)x = (rx) + (sx).$$

$$(۴-۲-۱) \quad \text{اگر } r \text{ عدد حقیقی باشد و } x, y \text{ دو نقطه، } r(x+y) = (rx) + (ry).$$

با این تعاریف اکنون آماده هستیم مفاهیم هندسه را در  $\mathbb{R}^n$  پیاده کنیم. ساده‌ترین مفهوم هندسی پس از نقطه، "خط راست" است. برای تعریف خط راست در هندسه تحلیلی دو بعدی و سه بعدی راه‌های گوناگون هست. باید تعریفی را مبنا قرار دهیم که بتوان با صرفاً مفاهیم جمع نقاط و ضرب در یک عدد حقیقی آن را بیان کرد، در این صورت چون این مفاهیم در  $\mathbb{R}^n$  معنی دارند همان تعریف را می‌توان در  $\mathbb{R}^n$  اتخاذ کرد. چنین تعریفی از خط راست را می‌توان در  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  در نظر گرفت.

فرض کنید  $a$  و  $A$  دو نقطه در  $\mathbb{R}^2$  یا  $\mathbb{R}^3$  باشند به طوری که  $a \neq A$ .  $a$  را به صورت یک نقطه و  $A$  را به صورت یک بردار (ساطع از مبدأ) تصور کنید. چون  $a \neq A$  فرض شده است مضارب حقیقی  $A$  یک راستا تعریف می‌کنند. حال خط راستی را در نظر بگیرید که از  $a$  می‌گذرد و موازی این راستا است. شرط لازم و کافی برای این که یک نقطه روی این خط باشد این است که بتوان آن را به صورت  $a + tA$ ، برای عدد حقیقی مناسب  $t$ ، نوشت (شکل ۵).

## شکل ۵

در تعریف نقاط این خط به شکل  $a + tA$ ، فقط دو عمل ذکر شده، ضرب در عدد حقیقی و جمع، به کار رفته است پس می‌توان آن را مبنا برای تعریف خط راست در  $\mathbb{R}^n$  قرارداد.

(۳-۱) تعریف. فرض کنید  $a, A \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \underline{0}$ ، داده شده باشند، در این صورت مجموعه زیر یک خط راست در  $\mathbb{R}^n$  خوانده می‌شود:

$$\langle a; A \rangle = \{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

$\langle a; A \rangle$  را به مناسبت مقدمه بالا اصطلاحاً خط راست گذرا از  $a$  به موازات  $A$  نیز می‌نامیم هرچند که هنوز مفهوم "موازی" تعریف نشده است. بدین ترتیب هر نقطه  $x = (x_1, \dots, x_n)$  از مجموعه بالا باید به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} x &= a + tA \\ (x_1, \dots, x_n) &= (a_1, \dots, a_n) + t(A_1, \dots, A_n) \\ &= (a_1 + tA_1, \dots, a_n + tA_n) \end{aligned}$$

پس برای  $a$  و  $A$  داده شده، خط راست  $\langle a; A \rangle$  متشکل از نقاط  $x = (x_1, \dots, x_n)$  به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tA_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tA_n \end{cases} \quad (6)$$

که در اینجا  $t$  همه مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند. (۶) را نمایش پارامتری خط راست  $\langle a; A \rangle$  نیز می‌نامند. توجه کنید که هر خط راست، به مفهوم تعریف شده، همان طور که انتظار می‌رود، در تناظر یک به یک با اعداد حقیقی است. هر نقطه  $\langle a; A \rangle$ ، به شکل  $a + tA$ ، یعنی متناظر با  $t$  است، و این  $t$  منحصر به فرد است زیرا که اگر  $a + tA = a + t'A$ ، با جمع کردن " $-a$ " با دو طرف نتیجه می‌شود که  $tA = t'A$  و  $(t - t')A = \underline{0}$ . حال چون  $A \neq \underline{0}$  فرض شده است، لزوماً  $t - t' = 0$  یا  $t = t'$ .

مثال (محورهای مختصات).  $n$  تایی‌های  $e_1, \dots, e_n$  را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad , \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad , \dots \quad , \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

بدین ترتیب  $e_i$  آن  $n$  تایی است که مؤلفه  $i$  ام آن ۱ و سایر مؤلفه‌هایش صفر است. حال

$$\langle \underline{0}; e_i \rangle = \{(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

یک خط راست است که محور مختصاتی  $i$ -ام یا محور  $x_i$  خوانده می‌شود. تعداد محورهای مختصات در  $\mathbb{R}^n$  برابر  $n$  است.

اگر  $l = \langle a; A \rangle$  یک خط راست باشد، خط راست  $\langle \underline{0}; A \rangle$  را انتقال یافته  $l$  به مبدأ می‌نامیم و با نمادهای  $l^\circ$  یا  $\langle A \rangle$  نیز نمایش می‌دهیم. داریم

$$l^\circ = \langle A \rangle = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(۴-۱) گزاره. برای هر  $B \in l^\circ$  که  $B \neq \underline{0}$  و هر  $b \in l$  داریم:

$$\langle b; B \rangle = \langle a; A \rangle$$

اثبات. اگر  $B \in l^\circ$   $B \neq \underline{0}$ ، داریم  $B = t_0 A$  برای عدد حقیقی مناسب  $t_0 \neq 0$ ، و اگر  $b \in l$ ،  $b = a + t_1 A$  برای عدد حقیقی مناسب  $t_1$ ، پس برای هر عنصر  $b + sB$ ،  $s \in \mathbb{R}$ ، در  $\langle b; B \rangle$  داریم:

$$b + sB = a + t_1 A + s(t_0 A) = a + (t_1 + st_0)A$$

پس  $\langle b; B \rangle \subset \langle a; A \rangle$ . بالعکس اگر نقطه‌ای  $a + tA$  در نظر بگیریم، می‌توان  $t = t_1 + st_0$  را برای  $s$  حل کرد چون فرض کرده‌ایم  $t_0 \neq 0$  و هر نقطه  $\langle a; A \rangle$  به  $\langle b; B \rangle$  متعلق است. پس  $\langle a; A \rangle \subset \langle b; B \rangle$ .  $\square$

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که مفهوم "خط راست" به صورتی که تعریف شد تا چه حد به خط راستی که در فضای مائوس سه بعدی می‌شناسیم نزدیک است؟ از آنجا که خط راست در  $\mathbb{R}^3$  واقع انتقال یافته همه مضارب حقیقی یک  $A$  ثابت به وسیله یک بردار ثابت  $a$  است، انتظار داریم همان خواص اساسی برقرار باشند. به عنوان نمونه یک انتظار ابتدایی را ثابت می‌کنیم:

(۵-۱) گزاره. دو خط راست که دو نقطه مشترک متمایز داشته باشند بر هم منطبقند.

اثبات. فرض کنید  $\langle a; A \rangle$  و  $\langle b; B \rangle$  دو خط راست باشند، و  $P \neq Q$  دو نقطه که متعلق به هر دو خط است. طبق (۴-۱)  $\langle a; A \rangle = \langle P; A \rangle$  و  $\langle b; B \rangle = \langle P; B \rangle$  چون  $P$  روی هر دو خط قرار دارد، پس:

$$Q = P + tA \quad \text{برای } t \in \mathbb{R} \text{ مناسب}$$

$$Q = P + sB \quad \text{برای } s \in \mathbb{R} \text{ مناسب}$$

پس  $tA = sB$ . ضمناً  $s \neq 0$  و  $t \neq 0$  زیرا که فرض کرده‌ایم  $P \neq Q$ . بنابراین از  $tA = sB$  نتیجه می‌گیریم که  $B$  مضربی ناصفر از  $A$  است. طبق (۴-۱) خط راست  $\langle a; A \rangle = \langle P; A \rangle$  برابر می‌شود با  $\langle P; B \rangle$  که همان  $\langle b; B \rangle$  است و حکم به اثبات می‌رسد.  $\square$

دو خط راست  $l_1, l_2$  را موازی می‌نامیم در صورتی که نقطهٔ مشترک نداشته باشند و انتقال یافته آنها به مبدأ یکی باشد،  $l_1^\circ = l_2^\circ$ . بنابراین برای هر خط  $l$  که از  $o$  نگذرد،  $l$  موازی  $l^\circ$  است. توازی دو خط  $l_1, l_2$  را به  $l_1 \parallel l_2$  نمایش می‌دهیم.

نمایش دیگری برای خطوط راست نمایش متقارن است که بدین صورت به دست می‌آید. اگر هر یک از روابط (۶) را برای  $t$  حل کرده نتایج را برابر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{x_1 - a_1}{A_1} = \frac{x_2 - a_2}{A_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{A_n} \quad (7)$$

از آنجا که فرض شده است  $0 \neq A$ ، همهٔ  $A_i$  ها نمی‌توانند صفر شوند. صفر شدن بعضی  $A_i$  ها در (۷) به منزلهٔ تقسیم بر صفر نیست، بلکه اگر به (۶) نگاه کنیم می‌بینیم که  $A_i = 0$  به معنی این است که  $x_i$  ثابت و همواره برابر  $a_i$  می‌باشد.

مثال. فرض کنید  $0 \neq A_1$  و  $0 = A_2 = \dots = A_n$ . در این صورت  $A = (A, 0, \dots, 0)$ ، یعنی  $A$  متعلق به محور  $x_1$  است. نتیجه این که خط راست  $\langle a; A \rangle$  یا موازی محور  $x_1$  است یا خود آن است. به همین ترتیب اگر  $0 \neq A_j$  و سایر  $A_i$  ها صفر باشند، خط  $\langle a; A \rangle$  موازی محور  $x_j$  یا منطبق بر آن خواهد بود.



## اعداد حقیقی (۱)

اعداد اولین بار در رابطه با امر شمارش ظاهر شدند. اعداد طبیعی:

$$1, 2, 3, \dots$$

وسیله سنجش تعدد اشیاء در یک مجموعه مشخص‌اند. از آنجا که کمیت‌های مورد اندازه‌گیری همیشه به صورت گسسته و مجزا ظاهر نمی‌شوند، انسان از دیرباز دریافت که برای سنجش میزان کمیت، شمارش و اعداد طبیعی کفایت نمی‌کنند، بلکه باید نسبت دو کمیت از یک جنس را نیز نوعی عدد تلقی کرد. مقایسه وزن اجسام و طول پاره‌خط‌ها از این جمله‌اند. برای انجام مقایسه دو کمیت، شیئی همجنس با دو شیء مورد مقایسه ولی کوچکتر از آنها در نظر گرفته می‌شود که اندازه هر شیء مضرب صحیحی از اندازه آن باشد. در شکل ۱ دو پاره‌خط  $L$  و  $L_1$  نمایش داده شده‌اند و پاره‌خطی  $L$  که ۵ بار در  $L$  و ۳ بار در  $L_1$  می‌گنجد. در این صورت نسبت طول  $L$  به طول  $L_1$  را به  $\frac{5}{3}$  نمایش می‌دهند. نسبت‌های  $\frac{m}{n}$  که در آن  $m$  و  $n$  عدد طبیعی باشند امروزه اعداد گویا یا کسرهای متعارف می‌نامیم. ریاضیدان یونانی یودوکسوس<sup>۱</sup> حدود ۴ قرن قبل از میلاد کسرها را به طور جامع بررسی کرد و نظریه او در فصل پنجم کتاب اصول اقلیدس (قرن سوم قبل از میلاد) نقل شده است. هرگاه پاره‌خطی  $L$  به عنوان مرجع یا واحد در نظر گرفته شود،  $n$  یک عدد طبیعی باشد، و  $L'$  پاره‌خطی که  $L$  دقیقاً  $n$  بار در آن می‌گنجد، نسبت طول  $L'$  به طول  $L$  برابر  $\frac{n}{1}$  است. از آنجا که طول  $L'$  را می‌توان نتیجه  $n$  بار شمارش طول  $L$  در نظر گرفت، تمایزی میان  $\frac{n}{1}$  و  $n$  قایل نمی‌شویم و از این رو مجموعه اعداد گویا را گسترشی از مجموعه اعداد طبیعی تلقی می‌کنیم.

---

<sup>۱</sup>Eudoxus

به طور کلی دو کمیت از یک جنس را همسنگ می‌نامیم در صورتی که کمیتی از همان جنس (به عنوان "واحد" یا "سنگه") وجود داشته باشد که اندازه هر یک از کمیت‌های داده شده مضرب صحیحی از اندازه سنگه باشد. در شکل ۱، طول پاره‌خط‌های  $L$  و  $L_1$  همسنگ هستند و می‌توان از طول  $L$  به عنوان سنگه استفاده کرد. در عمل به نظر می‌آید باید بتوان برای مقایسه هر دو کمیت همجنس، واحدی به اندازه کافی کوچک انتخاب کرد که هر دو کمیت مضرب صحیحی از آن واحد باشند، یا به عبارتی دیگر، به نظر می‌آید که هر دو کمیت همجنس، همسنگ باشند. برای تأکید بر اهمیت مسأله، موضوع را به صورت یک سؤال مطرح می‌کنیم:

سؤال. آیا هر دو کمیت همجنس، همسنگ نیز هستند؟

اینکه جواب این سؤال منفی است ظاهراً در قرن پنجم پیش از میلاد توسط هیپاسوس<sup>۲</sup> کشف شد و بحرانی در فلسفه و علم باستان پدید آورد. فیثاغورسیان اعتقاد داشتند که اعداد (صحیح) به نوعی منشاء و عنصر ساخت همه هستی‌اند و این کشف هیپاسوس که دو پاره‌خط وجود دارد که نمی‌توان هر دو را با یک واحد مشترک شمرد بنیاد تفکر آنها را متزلزل ساخت. استدلال هیپاسوس را بعداً خواهیم آورد ولی استدلال ساده زیر که دو قرن بعد در جزوه دهم کتاب اصول اقلیدس ظاهر می‌شود اندکی بعد کشف شد. در اینجا نشان داده می‌شود که طول ضلع مربع و طول قطر آن همسنگ نیستند، یا به زبان امروزی نسبت این دو طول یک عدد گویا نیست. اگر طول ضلع مربع را  $l$  بگیریم، طول قطر آن طبق قضیه فیثاغورس برابر  $l\sqrt{2}$  است و نسبت طول قطر به طول ضلع برابر  $\sqrt{2}$  می‌شود. روش ارائه شده در کتاب اقلیدس برای اثبات ناگویا بودن  $\sqrt{2}$ ، برهان خلف است. فرض می‌کنیم  $\sqrt{2} = \frac{M}{N}$  که در آن  $M$  و  $N$  عدد صحیح هستند. کسر  $\frac{M}{N}$  را تا حد ممکن با حذف مقسوم‌علیه‌های مشترک ساده می‌کنیم تا به صورت  $\frac{m}{n}$  در آید، پس  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$  در وضعیتی است که  $m$  و  $n$  مقسوم‌علیه مشترک ندارند. با مجذور کردن دو طرف داریم  $m^2 = 2n^2$ ، پس  $m^2$  زوج است پس  $m = 2k$  و نتیجه می‌گیریم که  $n^2 = 2k^2$ . باز به ترتیب بالا  $n$  باید خود زوج باشد،  $n = 2l$ . حال  $m$  و  $n$  هر دو زوج هستند، یعنی هر دو بر ۲ قابل قسمت‌اند در حالی که فرض شده بود  $m$  و  $n$  مقسوم‌علیه مشترک ندارند. این تناقض نشان می‌دهد که

<sup>۲</sup>Hippasus

بیان  $\sqrt{2}$  به صورت  $\frac{m}{n}$  ممکن نیست، یعنی  $\sqrt{2}$  گویا نیست، و به بیانی دیگر طول ضلع و طول قطر مربع همسنگ نیستند.

در واقع می توان به سادگی ثابت کرد که اگر  $n$  خود مجذور کامل نباشد  $\sqrt{n}$  گویا نیست. در قطعه ۱۴۷ کتاب تئوتوس افلاطون<sup>۳</sup> (قرن چهارم پیش از میلاد) اشاره می شود که ریاضیدان یونانی تئودوروس این مطلب را تا  $n = 17$  به اثبات رسانده است. در جای دیگری از آثار افلاطون یکی از مناظره کنندگان از جهل آنتی ها نسبت به اعداد ابراز شرمساری کند و بالاخص اینکه اکثر مردم به وجود کمیت های ناهمسنگ آگاهی نداشتند.

در اینجا آنچه به ظن قوی کشف هیپاسوس از نسبت های ناگویا بوده است نقل می کنیم. علامت ویژه فیثاغورسیان موسوم به پنتاگرام یک پنج ضلعی منتظم بود. در یک چنین پنج ضلعی با رسم قطر ها پنج ضلعی منتظم دیگری در داخل ساخته می شود و می توان این کار را همواره ادامه داد (شکل ۲). نشان می دهیم چگونه مقایسه نسبت طول قطر پنج ضلعی منتظم به طول ضلع آن یک کمیت ناگویا به دست می دهد. به طور کلی فرض کنید  $a_0$  و  $a_1$  دو کمیت همجنس باشند (مثلاً طول های دو پاره خط) و  $a_1 < a_0$ . اگر دقیقاً  $n_1$  بار در  $a_0$  بگنجد،  $n_1$ : عدد طبیعی، آنگاه  $a_0$  و  $a_1$  همسنگ هستند و داریم  $a_0 = n_1 a_1$ . در هر صورت  $n_1$  را بزرگترین عدد طبیعی می گیریم که  $n_1 a_1$  از  $a_0$  تجاوز نکند و داریم

$$a_0 = n_1 a_1 + a_2 \quad , \quad 0 \leq a_2 < a_1 \quad (1)$$

ملاحظه کردیم که اگر  $a_2 = 0$ ،  $a_1$  خود سنگه مناسب برای مقایسه  $a_0$  و  $a_1$  است. حال فرض کنید  $a_2 \neq 0$ . در اینجا  $a_2$  را به حداکثر دفعات ممکن در  $a_1$  می گنجانیم یعنی بزرگترین عدد طبیعی  $n_2$  را انتخاب می کنیم که  $n_2 a_2 \leq a_1$ . پس:

$$a_1 = n_2 a_2 + a_3 \quad , \quad 0 \leq a_3 < a_2 \quad (2)$$

اگر  $a_3 = 0$ ، آنگاه  $a_2$  مضرب صحیحی از  $a_1$  است. از (۱) می بینیم که در این صورت  $a_0$  نیز مضرب صحیحی از  $a_2$  خواهد شد و بدین ترتیب  $a_2$  سنگه مناسب برای سنجش  $a_0$  و  $a_1$  است. اگر  $a_3 \neq 0$ ،

<sup>۳</sup> دوره آثار افلاطون (جلد پنجم و هفتم)، ترجمه محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۵۷).

این فرایند را ادامه داده می نویسیم:

$$a_2 = n_3 a_3 + a_4, \quad 0 \leq a_4 < a_3 \quad (3)$$

که در آن  $n_3$  یک عدد طبیعی است. مجدداً اگر  $a_4 = 0$  با دنبال کردن (3)، (2) و (1) می بینیم که  $a_3$  سنگه‌ای برای سنجش  $a_1$  و  $a_0$  است و گرنه ادامه می دهیم. ادعا می کنیم:

(1-1) گزاره.  $a_1$  و  $a_0$  همسنگ هستند اگر و تنها اگر فرایند بالا در تعدادی متناهی گام به باقیماندهٔ صفر برسد، یعنی عدد طبیعی  $k$  وجود داشته باشد که  $n_k a_{k-1} = n_k a_k$ : عدد طبیعی. در این صورت  $a_k$  سنگه‌ای برای سنجش  $a_1$  و  $a_0$  است.

اثبات. اگر فرایند فوق در  $k$  گام به صفر برسد داریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_0 = n_1 a_1 + a_2, & 0 < a_2 < a_1 \quad \text{عدد طبیعی } n_1 \\ a_1 = n_2 a_2 + a_3, & 0 < a_3 < a_2 \quad \text{عدد طبیعی } n_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-2} = n_{k-1} a_{k-1} + a_k, & 0 < a_k < a_{k-1} \quad \text{عدد طبیعی } n_{k-1} \\ a_{k-1} = n_k a_k & \text{عدد طبیعی } n_k \end{array} \right. \quad (4)$$

رابطهٔ آخر نشان می دهد  $a_{k-1}$  مضرب صحیحی از  $a_k$  است؛ پس از رابطه یکی به آخر  $a_{k-2}$  مضربی از  $a_k$  است، و به همین ترتیب با صعود به دو رابطهٔ اول نتیجه می شود که  $a_1$  و  $a_0$  هر دو مضرب صحیحی از  $a_k$  هستند، یعنی  $a_k$  سنگه‌ای برای سنجش  $a_1$  و  $a_0$  است. بالعکس فرض کنید  $a_1$  و  $a_0$  همسنگ باشند، در این صورت عددی  $u > 0$  به عنوان سنگه وجود دارد که  $a_1$  و  $a_0$  هر دو مضرب صحیحی از  $u$  هستند. از رابطهٔ اول بالا نتیجه می شود که  $a_2$  نیز مضربی صحیح از  $u$  است؛ سپس از رابطه بعد  $a_3$  مضربی صحیح از  $u$  است، و به همین ترتیب اگر ثابت شده باشد که  $a_0, a_1, \dots, a_p$  مضرب صحیح  $u$  هستند و رابطهٔ بعدی به شکل

$$a_{p-1} = n_p a_p + a_{p+1}$$

باشد، نتیجه می‌گیریم که  $a_{p+1} = a_{p-1} - n_p a_p$  مضرب صحیحی از  $u$  است. حال اگر این فرایند به باقیماندهٔ صفر نرسد، دنباله باقیمانده‌ها به صورت نزولی زیر است:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

که در اینجا همهٔ  $a_j$  ها مضرب صحیحی از عدد مثبت  $u$  می‌باشند. چنین وضعیتی غیرممکن است زیرا که بین دو عدد  $u$  و  $a_1$  فقط تعدادی متناهی مضرب صحیح  $u$  می‌گنجد. این امر نشان می‌دهد که اگر  $a_0$  و  $a_1$  همسنگ باشند، فرایند بالا بالاخره به باقیمانده صفر می‌رسد و آخرین مقسوم‌علیه به دست آمده سنگه لازم است. □

با اتکاء به مطلب بالا و استدلالی هندسی، هیپاسوس نشان داد نسبت‌های قطر و ضلع پنج ضلعی منتظم همسنگ نیستند بدین ترتیب که اگر فرایند فوق برای آنها پیاده شود هیچگاه به باقیمانده صفر نمی‌رسیم. به شکل (۲) توجه کنید. از تساوی زوایای داخلی و اضلاع پنج ضلعی منتظم مشاهده می‌کنیم که هر قطر موازی ضلعی است که از هیچ یک از دو انتهای آن نمی‌گذرد:  $AC \parallel ED$ ،  $BE \parallel CD$ ، ... بنابراین مثلث‌های  $ABC$  و  $EB'D$  به اضلاع دو به دو موازی متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB'}{ED}$$

طول قطر پنج ضلعی را  $a_0$  و طول ضلع آن را  $a_1$  می‌نامیم. از آنجا که زوایای داخلی پنج ضلعی باز هستند ( $108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$ ) داریم  $a_0 > a_1$ . چون چهارضلعی  $ABCB'$  متوازی‌الاضلاع است داریم پس  $EB' = a_0 - a_1$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_0 - a_1}{a_1}$$

$a_0 - a_1$  را به  $a_2$  نمایش می‌دهیم. داریم  $a_2 < a_1$  زیرا که در مثلث  $EB'D$  هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. پس:

$$a_0 = 1 \cdot a_1 + a_2 \quad , \quad 0 < a_2 < a_1$$

حال  $a_1 - a_2$  را به  $a_3$  نمایش می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که  $a_3$  برابر طول پنج ضلعی منتظم کوچک  $A'B'C'D'E'$  است زیرا که طول  $AB'$  برابر  $a_1$  و طول  $AC'$  برابر  $a_2$  است. از طرفی دیگر طول قطر

$A'B'C'D'E'$  برابر  $a_2$  است زیرا که اگر از  $A'$  به  $D'$  و  $C'$  وصل کنیم متوازی الاضلاعی ایجاد می شود  
 $(AD'$  و  $A'D')$  هر دو موازی  $BC$  هستند؛  $A'C'$  و  $AC$  هر دو موازی  $DE$ ) بنابراین  $a_2 < a_3$  و داریم:

$$a_1 = 1 \cdot a_2 + a_3, \quad 0 < a_3 < a_2$$

حال اگر پنج ضلعی منتظم  $A'B'C'D'E'$  به ضلع  $a_3$  و قطر  $a_2$  را در نظر بگیریم، مجدداً وضعیت پنج ضلعی متشابه  $ABCDE$  با طول ضلع و طول قطر به ترتیب  $a_1$  و  $a_0$  تکرار می شود، یعنی خواهیم داشت

$$a_2 = 1 \cdot a_3 + a_4, \quad 0 < a_4 < a_3$$

$$a_3 = 1 \cdot a_4 + a_5, \quad 0 < a_5 < a_4$$

به طور کلی اگر  $a_i$  ها تا  $a_n$  تعریف شده باشند، با تعریف  $a_{n+1} = a_{n-1} - a_n$ ، و با توجه به اینکه همواره با رسم کردن قطرهای پنج ضلعی منتظم یک پنج ضلعی منتظم دیگر در درون پنج ضلعی پدید می آید خواهیم داشت:

$$a_{n-1} = 1 \cdot a_n + a_{n+1}, \quad 0 < a_{n+1} < a_n$$

بدین ترتیب در وضعیت گزاره ۱-۱ هستیم و در شقی که هرگز باقیمانده به صفر نمی رسد، پس  $a_0$  و  $a_1$  همسنگ نیستند، یا به عبارت دیگر  $\frac{a_0}{a_1}$  ناگویا است!

تمرین ۱. نشان دهید  $\frac{a_0}{a_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ . این نسبت به نسبت طلایی معروف است و خواص ریاضی جالب توجهی دارد که بعضی از دوران باستان شناخته شده بودند. بالاخص یونانیان "زیباترین" مستطیل از نظر تناسب اضلاع را، مستطیلی می دانستند که نسبت طول به عرض آن برابر نسبت طلایی باشد. نشان دهید این مستطیل ها، و فقط این مستطیل ها، این ویژگی را دارند که اگر از آنها یک مربع به ضلع عرض مستطیل داده شده برداشته شود، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه است.

تمرین ۲. نشان دهید اگر عدد طبیعی  $n$  مجذور کامل نباشد،  $\sqrt{n}$  ناگویا است. (راهنمایی: از تجزیه اعداد طبیعی به عوامل اول استفاده کنید).

در اینجا باید به این مطلب اشاره شود که نظام عددنویسی متداول امروز به صورت اعشاری (یا هر مبنای دیگر) در زمان یونان باستان وجود نداشت. یک نسبت گویا که مطابق  $(1-1)$  در  $k$  گام به سنگه می‌رسد به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\dots + n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}} \quad (5)$$

چنین عبارتی را یک کسر مسلسل متناهی (یا مختومه) می‌نامند. توجه کنید که طبق (4) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= n_1 + \frac{a_2}{a_1} = n_1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{a_3}{a_2}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} \end{aligned}$$

و با ادامه استفاده از (4) به (5) می‌رسیم. در مورد نسبت‌های ناگویا کسر مسلسل مختومه نمی‌شود. مثلاً در مورد نسبت طلایی نمایش زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} \quad (6)$$

کسرهای مسلسل امروزه نیز در ریاضیات کاربردهای مهم دارند، نه برای نمایش روزمره اعداد، بلکه به منظور محاسبات تقریبی دقیق و نیز در پاره‌ای مقولات نظری.

با روش امروزی عددنویسی (به پایه 10 یا هر پایه دیگر)، می‌توان رهیافت ساده‌ای برای اثبات وجود نسبت‌های ناگویا مشاهده کرد. فرض کنید می‌خواهیم نسبت  $\frac{m}{n}$ ،  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی، را به صورت اعشاری بنویسیم. به روش معمولی تقسیم اگر  $m$  بر  $n$  بخش پذیر باشد که به یک عدد طبیعی می‌رسیم. و گرنه، پس از استفاده از همه ارقام  $m$ ، باقیمانده‌ای حاصل می‌شود که از  $n$  کوچکتر و از صفر بزرگتر است. در این صورت با افزودن یک صفر به طرف راست باقیمانده به عمل تقسیم ادامه می‌دهیم. هر بار عددی کوچکتر از به عنوان باقیمانده به دست می‌آید. اگر این باقیمانده زمانی صفر شود به عددی به شکل  $c_0/c_1c_2\dots c_k$  رسیده‌ایم به معنای

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k}$$

است. اگر باقیمانده هیچگاه صفر نشود، هر باقیمانده باید یکی از اعداد  $1, 2, \dots, n-1$  باشد، بنابراین قطعاً با  $n$  بار تکرار، باقیمانده‌ای برای بار دوم ظاهر خواهد شد. از آن پس ارقام اعشاری به صورت اولین ظهور این باقیمانده تکرار خواهند شد. بنابراین اگر نمایش اعشاری  $\frac{m}{n}$  مختومه نشود، ارقام پس از اعشار مالا به صورت تناوبی تکرار خواهند شد. بنابراین هر کسر اعشاری که مالا تناوبی نباشد نمی‌تواند نمایشگر یک عدد گویا باشد. بدین ترتیب، مثلاً:

$$0/10100100010000100001\dots$$

که در آن طول بلوک‌های صفر هر بار یکی نسبت به قبلی افزایش می‌یابد و امکان تناوب در آن وجود ندارد برابر هیچ کسر  $\frac{m}{n}$  نیست. تنها سؤالی که می‌ماند این است که آیا عبارت بالا واقعاً یک «عدد» است؟ یا به طور کلی، آیا می‌توان هر عبارت به شکل

$$c_0/c_1c_2c_3\dots$$

که در آن  $c_0$  یک عدد صحیح نامنفی و بقیه  $c_i$  ها رقم (یعنی اعداد 0 تا 9) هستند یک «عدد» تلقی کرد؟ برای پاسخ به این سؤال لازم است که مفهوم «عدد» به طور دقیق‌تر بررسی شود و این در جلسه آینده انجام خواهد شد.



## اعداد حقیقی (۲)

صحبت جلسه گذشته با این سؤال به پایان رسید که اگر  $c_0$  یک عدد طبیعی یا صفر باشد و هر  $c_i$ ،  $i = 1, 2, \dots$  یک رقم، یعنی عددی از مجموعه  $\{0, 1, \dots, 9\}$ ، آیا می توان عبارت:

$$c_0/c_1c_2c_3\dots \quad (1)$$

را یک "عدد" تلقی کرد؟ برای اینکه این سؤال معنی داشته باشد باید دو چیز روشن شود:

الف) مقصود از عبارت بالا چیست؟

ب) مقصود از یک عدد چیست؟

در مورد سؤال (ب)، جواب ریاضیدانان باستان را می دانیم و فعلاً همین جواب را مینا قرار می دهیم. مقصود از یک عدد، نسبت طول های دو پاره خط است. بالاخص اگر پاره خطی را به عنوان واحد انتخاب و تثبیت کنیم، طول های همه پاره خط های ممکن، مجموعه اعداد (مثبت) را تشکیل می دهند. به این ترتیب اگر نیم خطی  $H$  انتخاب کنیم، مبدأ آن را  $o$  بنامیم و نقطه ای دیگر را به عنوان نقطه واحد،  $1$ ، اختیار کنیم، تناظری یک به یک میان نقاط این نیم خط و اعداد (مثبت) منظور می شود. بدین ترتیب که هر نقطه  $c$  روی این نیم خط، پاره خطی از  $o$  تا  $c$  تعریف می کند (شکل ۱) که طول این پاره خط نسبت به واحد اختیار شده عدد متناظر است. البته در اینجا ادراک هندسی، شهودی قابل اعتماد تلقی می گردد. بدین ترتیب فرض می کنیم در مورد مفهوم خط راست و طول مناقشه ای نیست، برداشت همه انسان ها از این مفاهیم یکسان است، و کارکردن با این مفاهیم به مشکل منطقی منجر

نمی‌شود. باید توجه داشت که از نظر دانشمندان باستان، هندسه یک شاخه علم طبیعی بود و اصول متعارف متکی بر ادراک انسان مجاز شمرده می‌شدند.

در مورد (الف)، اکنون کوشش خواهیم کرد برای (۱) معنایی قابل شویم. اگر به جای سه نقطه (ادامه نامحدود) در (۱) عبارت  $c_0/c_1 \dots c_n$  را در نظر بگیریم، این عبارت مفهومی دقیق و روشن دارد:

$$C_n = c_0/c_1 \dots c_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n}$$

یک  $n$  خاص تثبیت می‌کنیم. اگر عبارت (۱) یک عدد باشد، این عدد قطعاً باید دست کم به اندازه  $C_n$  باشد زیرا که افزودن ارقام  $c_{n+1}$  به بعد نمی‌تواند آن را کوچکتر سازد. ولی عددی که ممکن است توسط (۱) بیان شود حداکثر چقدر بزرگتر از  $C_n$  می‌تواند باشد؟ این عدد نمی‌تواند از  $\frac{1}{10^n}$  بزرگتر از  $C_n$  باشد زیرا که در آن صورت می‌بایست رقم  $n$  ام پس از اعشار از  $c_n$  بزرگتر شود. بنابراین:

$$C_n \leq c_0/c_1 c_2 c_3 \dots \leq C_n + \frac{1}{10^n} \quad (2)$$

رابطه (۲) باید به‌ازای هر  $n$  برقرار باشد. بدین ترتیب  $c_0/c_1 c_2 c_3 \dots$  در صورت وجود، عددی است که در نامساوی (۲) به‌ازای هر  $n$  صدق می‌کند،  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

(۱-۲) لم. حداکثر یک عدد ممکن است در نامساوی (۲) به‌ازای هر  $n$  صدق کند.

اثبات. اگر دو عدد  $c$  و  $c'$  وجود داشته باشند که به‌ازای هر  $n$  در بازه  $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$  قرار گیرند، فاصله این دو عدد از هر  $\frac{1}{10^n}$  کوچکتر است. چون با بزرگ گرفتن  $n$ ،  $\frac{1}{10^n}$  را می‌توان به دلخواه کوچک ساخت، فاصله  $c$  و  $c'$  باید از هر عددی کوچکتر باشد، پس  $c = c'$ . □

اکنون می‌بینیم که وجود عددی با ویژگی (۲) متضمن چیست. چنین عددی باید در همه بازه‌های  $[C_n, C_n + \frac{1}{10^n}]$  قرار گیرد. توجه کنید که چون

$$C_0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \dots$$

$$C_0 + 1 \geq C_1 + \frac{1}{10} \geq C_2 + \frac{1}{10^2} \geq \dots$$

این بازه‌ها تو در تو هستند:

$$\dots \subset [C_2, C_2 + \frac{1}{10^2}] \subset [C_1, C_1 + \frac{1}{10}] \subset [C_0, C_0 + 1]$$

هر بازه طولی  $\frac{1}{10^n}$  بازه سمت راست خود دارد و عدد فرضی  $c_0/c_1c_2\dots$  باید در همه این بازه‌ها قرار گیرد. شهود ما از "پیوسته بودن" نیم خط  $H$  حکم می‌کند که این دنباله انقباضی بازه‌های بسته باید به یک تک نقطه روی نیم خط  $H$  متقارب شود که باید به ناچار همان نقطه  $c_0/c_1c_2\dots$  باشد که در همه این بازه‌ها قرار دارد. این تصور هندسی قابل اثبات نیست بلکه جزیی از ادراک ما از پیوسته بودن خط راست است. به این دلیل این حکم را به عنوان یک اصل وضع می‌کنیم:

(۲-۲) اصل تمامیت (صورت اول). عددی (منحصر به فرد) وجود دارد که در همه نامساوی‌های (۲)، به ازای  $n = 0, 1, 2, \dots$  صدق می‌کند. (در واقع به زودی خواهیم دید که، بالعکس، هر نقطه روی  $H$  نمایشی به شکل  $c_0/c_1c_2c_3\dots$  مختوم یا نامختوم، دارد).

بدین ترتیب، طبق اصل تمامیت،  $c_0/c_1c_2c_3\dots$  نمایشگر یک عدد (و فقط یک عدد)، طبق لم (۱-۲) است. همچنان که در جلسه قبل دیدیم در میان این اعداد فقط آنهایی که مختومه هستند، یعنی  $c_n = 0$  از یک  $n$  به بعد، و آنهایی که مالا متناوب می‌شوند نمایشگر اعداد گویا، یعنی کسرهای  $m/n$ ،  $n, m$  عدد طبیعی، هستند. سایر اعداد را ناگویا یا اصم می‌نامند. بنابراین با اتکاء به اصل تمامیت می‌توان اعداد ناگویای فراوانی ارائه کرد.

نکته زیر، که به عنوان مثال ارائه می‌شود، نتیجه مستقیم اصل تمامیت و لم ۱-۲ است:

مثال. می‌خواهیم عدد زیر را بررسی کنیم:

$$1/999\dots$$

پس در اینجا  $c_0 = 1$  و  $c_i = 9$  به ازای هر  $i \geq 1$ . طبق اصل تمامیت این قطعاً یک عدد است و در همه نامساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$1/\underbrace{9\dots9}_n \leq 1/999\dots \leq 1/\underbrace{9\dots9}_n + \frac{1}{10^n} = 2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

از طرفی دیگر عدد ۲ نیز در همین نامساوی به ازای هر  $n$  صدق می‌کند. بنابراین طبق ۱-۲ داریم:

$$1/999\dots = 2$$

تمرین. فرض کنید  $9 < c_n$  و  $c_i = 9$  به ازای هر  $i > n$ . به روش مثال قبل ثابت کنید عدد

$$c_0/c_1 \dots c_n 999\dots$$

برابر  $(c_0/c_1 \dots c_{n-1})(c_n + 1)$  است.

در اینجا لازم است برای تکمیل بحث نشان دهیم هر عدد، یعنی هر عضو  $H$ ، به صورت اعشاری مختوم یا نامختوم قابل نمایش است. اگر  $c$  عضوی از  $H$  باشد، دو عدد صحیح متوالی  $c_0 + 1$  و  $c_0$  می‌توان یافت که  $c_0 \leq c < c_0 + 1$ . اگر بازه  $[c_0, c_0 + 1]$  را به صورت زیر به  $10$  زیربازه مجزا تجزیه کنیم:

$$[c_0, c_0 + \frac{1}{10}] \cup [c_0 + \frac{1}{10}, c_0 + \frac{2}{10}] \cup \dots \cup [c_0 + \frac{9}{10}, c_0 + 1]$$

عدد  $c$  در یک و تنها یکی از این  $10$  بازه قرار دارد، مثلاً  $c$  عضو  $[c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1+1}{10}]$ ،  $0, 1, \dots, 9$  است. که در این صورت می‌توان نوشت:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}$$

به همین ترتیب بازه  $[c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}]$  را به  $10$  بازه به طول  $\frac{1}{100}$  تجزیه کرده و نتیجه می‌گیریم که رقمی  $c_2$  وجود دارد به طوری که:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \frac{1}{100}$$

با ادامه این عمل، اگر در گامی،  $c$  دقیقاً برابر نقطه انتهایی سمت چپ شود، مثلاً  $c = c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k}$  داریم  $c = c_0/c_1 \dots c_k$ . در غیر این صورت این فرایند متوقف نمی‌شود و خواهیم داشت:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq c < c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

عددی که در هر همه این نامساوی‌ها صدق کند، طبق تعریف به  $c_0/c_1c_2c_3\dots$  نمایش دادیم. معمولاً اصل تمامیت به شکل معادل دیگری ارائه می‌شود که مجردتر است، کلی‌تر به نظر می‌رسد و وابستگی ظاهری (۲-۲) به مبنای عددنویسی  $10$  را ندارد. ضمن ارائه این صورت اصل تمامیت، نشان خواهیم داد که در واقع دو صورت معادل‌اند. توجه داشته باشید که تصویر هندسی ما از مجموعه اعداد، اکنون نقاط روی یک نیم‌خط  $H$  است. نقطه آغازی این نیم‌خط را  $0$  نامیدیم و امتداد نیم‌خط را معمولاً به طرف راست می‌گیریم (شکل ۱). به این ترتیب رابطه ترتیبی  $a < b$  از نظر هندسی بدین معنی است که  $b$  در طرف راست  $a$  قرار دارد. از این پس از نماد متداول برای بازه‌ها نیز استفاده خواهیم کرد. بدین ترتیب اگر  $a$  و  $b$  در  $H$  باشند،  $[a, b] = \{x \in H \mid a \leq x \leq b\}$ ،  $[a, b[ = \{x \in H \mid a \leq x < b\}$  و به همین ترتیب  $]a, b]$  و  $]a, b[$  تعریف می‌شوند. اگر  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $H$  باشد، عدد  $M$  را یک کران بالا برای  $S$  می‌نامیم در صورتی که:

$$s \leq M \text{ برای هر عضو } s \text{ از } S$$

بعضی زیرمجموعه‌های  $S$  دارای کران بالایی هستند و بعضی نیستند. مثلاً برای هر یک از دو بازه  $[a, b]$  و  $]a, b[$  هر عدد  $M \geq b$  یک کران بالایی برای مجموعه است، ولی مجموعه اعداد طبیعی  $\{1, 2, 3, \dots\}$  کران بالایی ندارد. عدد  $M_0$  را کوچکترین کران بالایی برای مجموعه  $S$  می‌نامیم در صورتی که:

(الف)  $M_0$  یک کران بالا برای  $S$  باشد.

(ب) به ازای هر کران بالای  $M$  برای مجموعه  $S$  داشته باشیم  $M_0 \leq M$ .

توجه کنید که، در صورت وجود، کوچکترین کران بالا منحصر به فرد است زیرا که اگر  $M_1$  و  $M_0$  هر دو کوچکترین کران بالا برای مجموعه  $S$  باشند باید داشته باشیم  $M_0 \leq M_1$  و  $M_1 \leq M_0$ ، پس  $M_1 = M_0$ .

(۲-۳) اصل تمامیت (صورت دوم). اگر برای زیرمجموعه ناتهی  $S$  از  $H$  کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای  $S$  یک کوچکترین کران بالایی (منحصر به فرد) وجود دارد.

لازم به تذکر است که کوچکترین کران بالایی مجموعه  $S$  ممکن است عضو  $S$  باشد یا نباشد. مثلاً برای هر دو مجموعه  $[1, 2]$  و  $[1, 2[$ ، عدد ۲ کوچکترین کران بالا است که عضو  $[1, 2]$  می باشد ولی عضو  $[1, 2[$  نیست.

اکنون نشان می دهیم که دو صورت اصل تمامیت معادل هستند به این مفهوم که اگر هر یک را بپذیریم، دیگری از اصل پذیرفته شده قابل اثبات است.

نخست نشان می دهیم صورت اول، صورت دوم را نتیجه می دهد. بدین ترتیب  $S$  را مجموعه ای ناتهی از  $H$  می گیریم که کران بالایی دارد و برای آن کوچکترین کران بالایی را ارائه می کنیم. هر عضو  $S$  را به صورت اعشاری نمایش می دهیم. چون  $S$  کران بالا دارد، در بین اجزاء صحیح این نمایش های اعشاری بزرگترین وجود دارد (در غیر این صورت برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عضو  $S$  بزرگتر از  $n$  خواهد داشت و  $S$  دارای کران بالایی نخواهد بود). بزرگترین جزء صحیح در میان اعضای  $S$  را  $c_0$  می نامیم. حال  $S_1$  را زیرمجموعه  $S$  می گیریم که از اعضای با جزء صحیح  $c_0$  تشکیل شده است و به رقم اول پس از اعشار اعضای  $S_1$  نگاه می کنیم. این رقم باید یکی از اعداد  $0, 1, \dots, 9$  باشد. بزرگترین رقم اول پس از اعشار موجود میان اعضای  $S_1$  را  $c_1$  می نامیم. حال  $S_2$  را زیرمجموعه  $S_1$  می گیریم که اعضایش با  $c_0/c_1$  شروع می شوند و به رقم دوم پس از اعشار در میان عناصر  $S_2$  نگاه می کنیم. بزرگترین رقم موجود را  $c_2$  می نامیم و عمل بالا را ادامه می دهیم. حال  $c = c_0/c_1c_2c_3\dots$  طبق اصل تمامیت یک عدد است و از روش ساخت  $c$  مشخص است که:

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ادعا می کنیم  $c$  کوچکترین کران بالایی برای مجموعه  $S$  است. اینکه  $c$  کران بالایی برای  $S$  است از نامساوی های سمت چپ نتیجه می شود، در واقع در هر مرحله رقم  $n$  ام  $c$  بزرگترین رقم موجود در بین عناصر  $S$  انتخاب شد. به علاوه کران بالایی کوچکتری از  $c$  برای  $S$  وجود ندارد زیرا که اگر  $c' = c'_0/c'_1c'_2c'_3\dots$  کوچکتر از  $c = c_0/c_1c_2c_3\dots$  باشد، در یک مرحله رقم متناظر،  $c'_n < c_n$  باید کوچکتر از  $c_n$  باشد. اگر این رویداد برای اولین بار به ازای  $n = k$  رخ دهد، عناصری از  $S$  وجود دارند که رقم  $k$  ام آنها بزرگتر از  $c'_k$  است، پس  $c'$  از بعضی عناصر  $S$  کوچکتر است و نمی تواند کران بالا برای  $S$

باشد.

بالعکس ثابت می‌کنیم صورت دوم اصل تمامیت، صورت اول را نتیجه می‌دهد. یعنی ثابت می‌کنیم هرگاه  $c_0$  یک عدد صحیح از مجموعه  $\{0, 1, 2, \dots\}$  باشد و  $c_i$  ها یک مجموعه ارقام، یعنی اعضای مجموعه  $\{0, 1, \dots, 9\}$ ، آنگاه عددی  $c$  وجود دارد که:

$$(3) \quad c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq c \leq c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

برای این کار، مجموعه  $T$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \{c_0, c_0/c_1, c_0/c_1c_2, \dots\}$$

این مجموعه کران بالا دارد (مثلاً  $c_0 + 1$ )، پس طبق صورت دوم اصل تمامیت، دارای کوچکترین کران بالایی است که به  $c$  نمایش می‌دهیم. باید ثابت کنیم این عدد  $c$  در نامساوی‌های (3) صدق می‌کند. اینکه  $c$  کران بالایی برای  $S$  است نشان می‌دهد  $c$  از هیچ یک از  $c_0/c_1 \dots c_n$  ها کوچکتر نیست، یعنی نامساوی‌های سمت چپ برقرارند. حال اگر نامساوی‌های سمت راست برقرار نباشند عدد صحیحی  $k$  وجود دارد که

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} < c$$

ولی  $c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}$  از همه عناصر  $T$  بزرگتر است (توجه کنید که  $c_0/c_1 \dots c_n < c_0/c_1 \dots c_{k+1} \dots c_n < \frac{1}{10^k}$ ) بنابراین یک کران بالایی برای  $T$  کوچکتر از  $c$  یافت شده است که خلاف انتخاب  $c$  به عنوان کوچکترین کران بالایی  $T$  است. بدین ترتیب صورت اول اصل تمامیت از صورت دوم نتیجه می‌شود.

در اینجا لازم است از "اعداد منفی" نیز صحبت شود. از نظر تاریخی پذیرفتن اعداد منفی به عنوان عدد قرن‌ها طول کشید و در واقع اعداد منفی کمابیش همراه با "اعداد موهومی" که در جلسات بعد مطرح خواهند شد در قرن شانزدهم میلادی طی توسعه بیشتر علم جبر به عنوان "عدد" پذیرفته شدند. ساده‌ترین راه معرفی اعداد منفی تداوم نیم خط  $H$  به سوی چپ به یک خط راست کامل است. قرینه

هر عضو  $x$  در  $H$  را به " $-x$ " نمایش می‌دهیم، عملیات جبری مانوس را اعمال می‌کنیم و رابطه ترتیب  $a < b$  به معنای  $a$  در طرف چپ  $b$  قرار دارد را منظور می‌کنیم. مجموعه اعداد مثبت، منفی و صفر که بدین طریق به دست می‌آیند مجموعه اعداد حقیقی می‌نامیم و به  $\mathbb{R}$  نمایش می‌دهیم. صورت دوم اصل تمامیت را می‌توان عیناً برای اعداد حقیقی نوشت:

(۲-۴) اصل تمامیت برای  $\mathbb{R}$ . اگر برای زیرمجموعه ناتهی  $S$  از  $\mathbb{R}$  کران بالایی وجود داشته باشد، آنگاه برای  $S$  یک کوچکترین کران بالایی وجود دارد.

اینکه (۲-۴) از (۲-۳) نتیجه می‌شود به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. به علاوه می‌توان مفهوم کران پایین و بزرگترین کران پایین را نیز با وارونه کردن نامساوی‌ها تعریف کرد و حکم زیر را نتیجه گرفت:

(۲-۴) اگر برای زیرمجموعه ناتهی  $S$  از  $\mathbb{R}$  کران پایینی وجود داشته باشد، آنگاه برای  $S$  بزرگترین کران پایینی وجود دارد.

تمرین. (۲-۵) را از (۲-۴) نتیجه بگیرید (راهنمایی. مجموعه  $S'$  را در نظر بگیرید که از کلیه " $-x$ " ها، به ازای  $x \in S$  تشکیل شده است).

تمرین. نشان دهید کران بالایی  $A$  برای مجموعه  $S$  کوچکترین کران بالایی است  $A$  اگر و تنها اگر به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، عضوی از  $s$  از  $S$  وجود داشته باشد که  $s > A - \frac{1}{n}$ .

هرگاه  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی باشند، بازه‌های  $[a, b]$ ،  $[a, b[$ ،  $]a, b]$  و  $]a, b[$  عیناً مانند قبل تعریف می‌شوند. مقصود از  $]a, \infty[$  مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$  و مقصود از  $]a, \infty]$  مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$  است. به همین ترتیب مجموعه‌های  $]a, \infty[$  و  $]a, \infty]$  تعریف می‌شوند.



## دنباله عددی و سری عددی (۱)

وقتی در جلسات اول مفهوم عدد حقیقی را مطرح کردیم، اشاره داشتیم به اینکه عملیات جبری را می‌توان همانند عملیاتی که برای اعداد گویا مطرح می‌شود به همه اعداد حقیقی تعمیم داد. در واقع اگر چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را به صورت هندسی مطرح کنیم هیچ تفاوتی میان اعداد گویا و ناگویا مشاهده نمی‌شود. در شکل ۱ این چهار عمل نمایش داده شده‌اند. فرض کنید دو عدد حقیقی مثبت  $a$  و  $b$  داده شده‌اند. نقاط  $A$  و  $B$  در سمت راست محور حقیقی را طوری می‌گیریم که پاره‌خط‌های  $OA$  و  $OB$  طول‌های به ترتیب  $a$  و  $b$  داشته باشند. حال اگر دهانه پراگاری را به اندازه  $OA$  باز کنیم و به مرکز  $B$  و این شعاع دایره‌ای رسم کنیم، نقطه تقاطع دایره در سمت راست نقطه  $B$ ، یعنی نقطه  $C$ ، عدد  $b+a$  را نمایش می‌دهد (یعنی طول پاره‌خط  $OC$  برابر  $b+a$  است) و نقطه تقاطع در سمت چپ  $B$ ، یعنی نقطه  $D$ ، نمایشگر عدد  $b-a$  است. برای عمل ضرب دو نیم‌خط از  $O$  رسم می‌کنیم. روی یک نیم‌خط نقاط  $U$  و  $B$  را طوری می‌گیریم که طول  $OU$  برابر واحد و طول  $OB$  برابر  $b$  باشد. روی نیم‌خط دیگر نقطه  $A$  به نحوی اختیار می‌کنیم که طول  $OA$  برابر  $a$  باشد. حال اگر خط راستی از  $B$  به موازات  $UA$  رسم کنیم، نقطه تلاقی آن با نیم‌خط دیگر، یعنی  $C$  طوری است که طول  $OC$  برابر  $ab$  است (بنابر تشابه مثلث‌ها). برای ترسیم نسبت  $\frac{a}{b}$  کافی است بدانیم چگونه باید  $\frac{1}{b}$  را رسم کنیم. روی دو نیم‌خط متقاطع در  $O$ ، نقاط  $U$  و  $V$  را طوری بگیریم که  $OU$  و  $OV$  هر دو طول واحد داشته باشند. نقطه  $B$  را روی نیم‌خط  $OU$  طوری می‌گیریم که طول  $OB$  برابر  $b$  باشد. در این صورت خطی که از  $U$  به موازات  $BV$  رسم شود دیگر را در نقطه‌ای  $B'$  قطع می‌کند که فاصله‌اش از  $O$  برابر  $\frac{1}{b}$  است (مجدداً تشابه). روش معمول دیگری این است که دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز  $O$  رسم

می‌کنیم. روی نیم خطی ساطع از  $O$ ، نقطه  $B$  را طوری می‌گیریم که طول  $OB$  برابر  $b$  باشد. نخست فرض کنید  $b > 1$ ، پس  $B$  خارج دایره باشد. در این صورت از  $B$  مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و از نقطه تماس بر  $OB$  عمود می‌کنیم. فاصله پای عمود،  $B'$ ، از  $O$  برابر  $\frac{1}{b}$  است (مجدداً تشابه مثلث‌ها). برای  $b < 1$ ، با مراجعه به همان شکل معکوس فرایند بالا را در نظر می‌گیریم.

هرگاه یکی یا هر دوی  $a$  و  $b$  منفی باشند، می‌توان با قرینه‌گیری مناسب کماکان از روش‌های بالا استفاده کرد. این نیز قابل ذکر است که هرگاه پاره‌خط‌هایی به طول  $a$  و  $b$  داده شده باشند، ترسیمات هندسی فوق به کمک پرگار و خط‌کش غیرمدرج قابل اجرا هستند.

حال می‌خواهیم چهار عمل اصلی را به صورت حسابی یا جبری توصیف کنیم. فرض کنید  $a = a_0/a_1a_2a_3\dots$  و  $b = b_0/b_1b_2b_3\dots$  دو عدد مثبت باشند. چگونه باید  $a + b$  را محاسبه کرد؟ اگر بسط اعشاری  $a$  و  $b$  مختومه باشند روش محاسبه  $a + b$  را در دبستان آموخته‌ایم. به طور کلی اگر  $a$  و  $b$  گویا باشند، آنها را به صورت  $a = \frac{m}{n}$  و  $b = \frac{m'}{n'}$  می‌نویسیم، که در اینجا  $m, n, m', n'$  عدد صحیح مثبت هستند، و داریم  $a + b = \frac{nm' + n'm}{nn'}$ . مشکل وقتی است که  $a$  و  $b$  ناگویا باشند. روشن است که الگوریتم دبستانی جمع اعشاری از سمت راست در اینجا جوابگو نیست زیرا که در سمت راست این اعداد مختومه نمی‌شوند و نقطه شروعی وجود ندارد.

$$\begin{array}{r} a_0 / a_1 a_2 a_3 \dots \\ + b_0 / b_1 b_2 b_3 \dots \\ \hline ? \end{array}$$

ولی می‌توان یک راه تقریب عملی به صورت زیر ارائه کرد. اگر هر یک از دو عدد بالا رقم پس از  $n$  رقم اعشار مختومه کنیم عددهای  $a' = a_0/a_1\dots a_n$  و  $b' = b_0/b_1\dots b_n$  به دست می‌آیند که تقریب‌های  $a$  و  $b$  هر یک با خطای کوچکتر یا مساوی  $\frac{1}{10^n}$  هستند. حال اگر  $a'$  و  $b'$  را به طریق عادی جمع کنیم حاصل حداکثر  $2 \times \frac{1}{10^n}$  با مجموع  $a + b$  فاصله دارد. با بزرگ گرفتن  $n$  می‌توان  $\frac{1}{10^n}$ ، یعنی حداکثر خطای حاصل جمع، را به دلخواه کوچک کرد. اکنون می‌توان به سادگی نشان داد که  $a + b$  در واقع کوچکترین کران بالایی این تقریب‌هاست. در مورد حاصلضرب و خارج قسمت (به فرض مخرج  $\neq 0$ ) می‌توان به روش مشابهی از کسرهای مختومه برای تقریب استفاده کرد ولی در این دو مورد اگر  $|a - a'| \leq \frac{1}{10^n}$  و  $|b - b'| \leq \frac{1}{10^n}$ ، تخمین خطای حاصل ضرب و خارج قسمت، یعنی  $|ab - a'b'|$  و

به این سادگی نیست. در زیر مفهومی کارساز و کلی تر، زیر عنوان "همگرایی دنباله" مطرح می‌کنیم که در برگیرنده همه این موارد است و کاربردهای فراوان دیگری نیز خواهد داشت. مقصودمان از یک قطعه از اعداد صحیح مجموعه‌ای به شکل زیر متشکل از اعداد صحیح است:

$$\{k, k+1, k+2, \dots\}$$

یعنی قطعه شامل همه اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی  $k$  است. اگر  $S$  یک قطعه از اعداد صحیح باشد و  $E$  یک مجموعه، هر تابع  $a: S \rightarrow E$  را یک دنباله (در  $E$ ) می‌نامند. بدین ترتیب  $a$  به هر عضو  $n$  از  $S$ ، عنصری  $a(n)$  از  $E$  نسبت می‌دهد. معمولاً به جای  $a(n)$  می‌نویسیم  $a_n$  و تصویر تابع  $a$  را به ترتیب صعودی ردیف می‌کنیم:

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots \quad (1)$$

نماد  $(a_i)_{i=k}^{\infty}$  نیز برای نمایش دنباله به کار می‌رود. بدین ترتیب معمولاً به جای اینکه دنباله را یک تابع از  $S$  به  $E$  تلقی کنیم، دنباله را مجموعه‌ای از عناصر  $E$  تلقی می‌کنیم که به ترتیب از  $k$  شماره‌گذاری شده است. ضمناً لزومی ندارد که  $a_i$  ها، به عنوان اعضای  $E$ ، متمایز باشند، یا به زبان تابعی، تابع  $a$  لزوماً یک به یک فرض نمی‌شود.

### (۱-۶) چند مثال

(۱-۱-۶) دنباله  $a: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

این یک دنباله از اعداد حقیقی است که به سوی نقطه  $0$  تجمع می‌کند.

(۲-۱-۶) دنباله  $a: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت

$$a_n = n + \frac{1}{n}$$

تعریف می شود دنباله ای دیگر از اعداد حقیقی است که با افزایش اندیس  $n$  به تدریج بزرگتر می شود و هیچ جا تجمع نمی کند.

(۳-۱-۶) دنباله  $\mathbb{C} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\} : a$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$a_n = \frac{i^n}{n}$$

چند جمله اول این دنباله عبارتند از:

$$i, \frac{-1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, \frac{-1}{6}, \dots$$

این اعداد به صورت چرخشی چهار نیم محور صفحه را متناوباً سیر می کنند و به سوی  $\infty$  تجمع می کنند (شکل ۲).

(۴-۱-۶)  $\mathcal{L}$  را مجموعه خطوط راست در صفحه می گیریم و تابع  $\mathcal{L} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} : l$

را به صورت زیر تعریف می کنیم:  $l(n)$  یا  $l_n$  خط راست گذرا از  $\infty$  با شیب  $n$  است، یعنی خط راست  $y = nx$  (شکل ۳). این یک دنباله خطوط راست است که به سوی محور  $y$  میل می کند.

(۵-۱-۶)  $\mathcal{F}$  را مجموعه تابع های از  $\mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}$  می گیریم و تابع  $\mathcal{F} \rightarrow \{1, 2, \dots\} : c$  را به صورت

زیر تعریف می کنیم:  $c(n)$  تابع  $\cos nx$  است (شکل ۴). هر  $c_n$  یک تابع تناوبی است با دوره تناوب  $\frac{2\pi}{n}$ .

در این مرحله ما فقط به دنباله های عددی می پردازیم یعنی دنباله های  $a : S \rightarrow E$  که در آن

$E$  معمولاً  $\mathbb{C}$  یا  $\mathbb{R}$  است. بحث کلی را برای دنباله های اعداد مختلط می نویسیم و از آنجا که  $\mathbb{R}$

زیر مجموعه ای از  $\mathbb{C}$  تلقی می شود، می توان دنباله های اعداد حقیقی را نیز به عنوان دنباله هایی از اعداد

مختلط در نظر گرفت. در بعضی مثالها مانند (۱-۱-۶) و (۳-۱-۶) می بینیم که با افزایش

اندیس  $n$ ، اعضای دنباله به نقطه خاصی نزدیک می شوند. اگر دقت دید یا تشخیص دستگاه های

مشاهده مثلاً  $e > 0$  باشد، آنگاه اگر اعضای دنباله در فاصله ای کوچکتر از  $e$  نسبت به نقطه تجمع قرار

گیرند، آنگاه نمی توان آنها را از نقطه تجمع تمیز داد، انگار که دنباله به حالت سکون رسیده است. این

مفهوم را "همگرایی" می نامیم و به شکل دقیق زیر تعریف می کنیم:

(۲-۶) تعریف. دنباله  $\mathbb{C} \rightarrow a : S$  را به نقطه  $a^*$  همگرا می نامیم یا می گوئیم  $a_n$  به  $a^*$  میل

می کند، (و می نویسیم  $a_n \rightarrow a^*$  یا  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a^*$ )

در صورتی که برای هر  $\epsilon > 0$ ، عدد صحیح مثبت  $N$  وجود داشته باشد که هرگاه  $n \geq N$ ، آنگاه

$$|a_n - a^*| < \epsilon$$

توجه کنید که طبق این تعریف، هر درجه تشخیص  $\epsilon > 0$  که منظور شود، قرار است مرحله‌ای  $N$ ، علی‌الاصول وابسته به  $\epsilon$ ، وجود داشته باشد که از آن مرحله به بعد،  $a_n$  ها از  $a^*$  غیر قابل تشخیص باشند.

### (۳-۶) چند مثال

(۱-۳-۶) به مثال ۱-۱-۶ توجه کنید. در اینجا داریم  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  زیرا که اگر  $\epsilon > 0$  منظور شود، با گرفتن عدد صحیح  $N$  بزرگتر از  $\frac{1}{\epsilon}$ ، یعنی  $\frac{1}{N} < \epsilon$ ، داریم: هرگاه  $n \geq N$ ، آنگاه:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

(۲-۳-۶) در مثال ۳-۳-۶، دنباله به همگراست زیرا که برای هر  $\epsilon > 0$  داده شده، اگر مجدداً  $N$  را بزرگتر از  $\frac{1}{\epsilon}$  می‌گیریم. برای  $n \geq N$  داریم:

$$\left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

(۳-۳-۶) فرض کنید  $c = c_0/c_1c_2c_3\dots$  یک عدد مثبت به صورت بسط اعشاری باشد. دنباله  $C_n$  را به صورت بسط‌های مختومه این عدد تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$C_0 = c_0, \quad C_1 = c_0/c_1, \quad C_2 = c_0/c_1c_2, \quad \dots$$

ادعا می‌کنیم  $C_n \rightarrow c$ . فرض کنید  $\epsilon > 0$  داده شده باشد. عدد  $N$  را طوری می‌گیریم که  $\frac{1}{10^N} < \epsilon$  برای  $n \geq N$  داریم:

$$|c - C_n| = c_0/c_1\dots/c_{n+1}c_{n+2}\dots \leq \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^N} < \epsilon$$

(۴-۳-۶) مثال فوق را می‌توان بدین صورت تعمیم داد. فرض کنید  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که  $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$  و مجموعه  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  دارای کران بالایی باشد.

نشان می دهیم  $a_n$  به کوچکترین کران بالایی مجموعه فوق میل می کند. نخست می دانیم که طبق اصل تمامیت برای مجموعه  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  کوچکترین کران بالایی  $a^*$  وجود دارد. حال هر  $e > 0$  که منظور شود، به بازه  $[a^* - e, a^* + e]$  نگاه می کنیم. اگر هیچ  $a_N$  در این بازه قرار نگیرد، از آنجا که  $a^*$  یک کران بالایی برای مجموعه  $a_n$  هاست، باید داشته باشیم  $a_n \leq a^* - e$  برای هر  $n$ . بنابراین هر عدد بین  $a^* - e$  و  $a^*$  یک کران بالایی برای مجموعه، کوچکتر از  $a^*$ ، خواهد بود که خلاف این فرض است که  $a^*$  کوچکترین کران بالایی برای  $\{a_0, a_1, \dots\}$  می باشد. پس  $N$  وجود دارد که  $a_N$  در  $[a^* - e, a^* + e]$  قرار می گیرد. البته  $a^* - e < a_N \leq a^*$ . از آنجا که دنباله  $(a_n)$  غیرنزولی است و هر  $a_n$  باید کوچکتر از کران بالایی  $a^*$  با مساوی آن باشد، برای هر  $n \geq N$  داریم:

$$a^* - e < a_N \leq a_n \leq a^*$$

بنابراین برای هر  $n \geq N$ ، نامساوی  $|a_n - a^*| < e$  برقرار است.

اکنون به مسأله ای که در آغاز این بخش مطرح شد باز می گردیم، یعنی روش محاسبه مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت اعداد حقیقی با تقریب مختومه ساختن را بررسی می کنیم. گزاره زیر در واقع کلی تر از این نیاز خاص است و بعداً موارد استفاده بسیار دیگری نیز خواهد داشت.

(۴-۶) گزاره. فرض کنید  $(a_n)_{n=k}^{\infty}$  و  $(b_n)_{n=k}^{\infty}$  دو دنباله اعداد مختلط باشند که  $a_n \rightarrow a^*$  و

$b_n \rightarrow b^*$  در این صورت:

الف) اگر دنباله  $(c_n)_{n=k}^{\infty}$  را به صورت  $c_n = a_n + b_n$  تعریف کنیم، داریم  $c_n \rightarrow a^* + b^*$ .

ب) اگر دنباله  $(c_n)_{n=k}^{\infty}$  را به صورت  $c_n = a_n \cdot b_n$  تعریف کنیم، داریم  $c_n \rightarrow a^* \cdot b^*$ .

ج) اگر مضافاً فرض کنیم  $b_n \neq 0$  برای هر  $n$  و  $b^* \neq 0$  و دنباله  $(c_n)_{n=k}^{\infty}$  را به صورت  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

تعریف کنیم، داریم  $c_n \rightarrow \frac{a^*}{b^*}$ .

اثبات. الف) فرض کنید  $e > 0$  داده شده باشد،  $N$  را طوری جستجو می کنیم که  $n \geq N$

نتیجه دهد  $|(a_n + b_n) - (a^* + b^*)| < e$ . اگر بتوانیم  $N$  را طوری تأمین کنیم که  $|a_n - a^*| < \frac{e}{2}$  و

هر دو به ازای  $n \geq N$  برقرار شوند، بنابر نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned}
 |(a_n + b_n) - (a^* + b^*)| &= |(a_n - a^*) + (b_n - b^*)| \\
 &\leq |a_n - a^*| + |b_n - b^*| \\
 &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon
 \end{aligned}$$

ولی از آنجا که  $a_n \rightarrow a^*$  برای  $\frac{\epsilon}{4} > 0$ ، عددی  $N_1$  وجود دارد که  $n \geq N_1$  نتیجه می‌دهد که  $|a_n - a^*| < \frac{\epsilon}{4}$ ، و نیز از آنجا که  $b_n \rightarrow b^*$  برای  $\frac{\epsilon}{4} > 0$ ، عددی  $N_2$  وجود دارد که  $n \geq N_2$  نتیجه می‌دهد  $|b_n - b^*| < \frac{\epsilon}{4}$ . پس با گرفتن  $N = \max\{N_1, N_2\}$ ، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(ب) در اینجا نیز برای  $e > 0$  داده شده،  $N$  را طوری جستجو می‌کنیم که  $n \geq N$  نتیجه دهد  $|a_n b_n - a^* b^*| < e$ . در اینجا مرتبط ساختن  $|a_n b_n - a^* b^*|$  با دو کمیت  $|a_n - a^*|$  و  $|b_n - b^*|$  به سادگی قسمت (الف) نیست، مثلاً حاصل ضرب  $(a_n - a^*)(b_n - b^*)$  برابر است با  $a_n b_n - a_n b^* - a^* b_n + a^* b^*$  که در آن دو جمله زاید وجود دارد و به جای تفاضل  $a_n b_n - a^* b^*$ ، مجموع این دو جمله ظاهر می‌شود. از حکم کمکی زیر استفاده می‌کنیم:

(۵-۶) لم. هرگاه  $(c_n)$  دنباله‌ای همگرا از اعداد مختلط باشد و  $c_n \rightarrow c^*$ ، آنگاه عددی  $K > 0$

وجود دارد که  $|c_n| \leq K$  و  $|c^*| \leq K$  برای هر  $n$  (یا به اصطلاح، هر دنباله همگرا کراندار است).

اثبات ۵-۶. حول  $c^*$  یک گوی به شعاع ۱ در نظر می‌گیریم. طبق تعریف همگرایی، عددی  $N$  وجود دارد که برای  $n \geq N$  داریم  $|c_n - c^*| < 1$ . بنابراین برای  $n \geq N$  داریم  $|c_n| < |c^*| + 1$  زیرا که هر نقطه داخل گوی شعاع ۱ حول  $c^*$  باید نزدیکتر از  $|c^*| + 1$  از  $0$  باشد. حال در بین تعداد متناهی عضو دنباله، قبل از مرحله  $N$ ، که در بیرون گوی هستند، فاصله دورترین آنها به  $0$  را به  $R$  نمایش می‌دهیم. در این صورت  $K = \max\{R, |c^*| + 1\}$  عدد مورد نظر است. □

اکنون به اثبات قسمت (ب) از گزاره باز می‌گردیم. عبارت  $a_n b_n - a^* b^*$  را به صورت

$$a_n b_n - a^* b^* = a_n b_n - a_n b^* + a_n b^* - a^* b^*$$

$$\begin{aligned}
 |a_n b_n - a^* b^*| &\leq |a_n b_n - a_n b^*| + |a_n b^* - a^* b^*| \\
 &\leq |a_n| |b_n - b^*| + |b^*| |a_n - a^*|
 \end{aligned}$$

حال طبق لم ۵-۶، کرانی  $K_1$  برای دنباله  $(a_n)$  و  $a^*$ ، و نیز کرانی  $K_2$  برای  $(b_n)$  و  $b^*$  وجود دارد،

پس:

$$|a_n b_n - a^* b^*| \leq K_1 |b_n - b^*| + K_2 |a_n - a^*| \quad (2)$$

از آنجا که  $a_n \rightarrow a^*$ ، برای  $\frac{\epsilon}{4K_2} > 0$ ، عددی  $N_1$  وجود دارد که برای  $n \geq N_1$  داریم  $|a_n - a^*| < \frac{\epsilon}{4K_2}$ ، و نیز نتیجه می‌دهد که  $b_n \rightarrow b^*$ ،  $\frac{\epsilon}{4K_1} > 0$  وجود دارد که برای  $n \geq N_2$  داریم  $|b_n - b^*| < \frac{\epsilon}{4K_1}$ . با گرفتن  $N = \max\{N_1, N_2\}$ ، برای  $n \geq N$  هر دو نامساوی برقرارند و نتیجه می‌شود که  $|a_n b_n - a^* b^*| < \epsilon$ .

(ج) برای اثبات  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a^*}{b^*}$ ، کافی است نشان دهیم  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b^*}$  و از حکم (ب) برای حاصل ضرب  $\frac{1}{b_n} \cdot a_n$  استفاده کنیم. در اینجا نیز یک لم کمکی مشابه و معکوس لم قبلی مورد نیاز است:

(۶-۶) هرگاه  $(b_n)$  دنباله‌ای از اعداد مختلط ناصفر باشد که  $b_n \rightarrow b^*$  و  $b^* \neq 0$ ، آنگاه عددی  $k > 0$  وجود دارد که  $|b_n| \geq k$  و  $|b^*| \geq k$  برای هر  $n$ .

اثبات. نقطه  $b^*$  در فاصله مثبت  $|b^*|$  از  $0$  قرار دارد. اگر گوی به شعاع  $\frac{1}{4}|b^*|$  به مرکز  $b^*$  را در نظر بگیریم، چون  $b_n \rightarrow b^*$ ،  $N$  وجود دارد که برای  $n \geq N$ ،  $|b_n - b^*| < \frac{|b^*|}{4}$ ، پس  $|b_n| > \frac{|b^*|}{4}$  برای  $n \geq N$ . برای تعداد متناهی عضو دنباله که ممکن است در خارج این گوی باشند، یعنی برای  $n < N$  چون همه غیر صفر هستند، یکی کوچکترین فاصله مثبت ممکن از  $0$  را دارد. این فاصله را به  $r$  نمایش می‌دهیم. حال  $\min\{r, \frac{|b^*|}{4}\}$  عدد  $k$  مورد نظر است. □

به اثبات (ج) باز می‌گردیم، می‌خواهیم ثابت کنیم  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b^*}$ . فرض کنید  $\epsilon > 0$  داده شده باشد. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b^*} \right| &= \frac{|b_n - b^*|}{|b_n| |b^*|} \\ &\leq \frac{|b_n - b^*|}{k^2} \quad (\text{طبق لم ۶-۶}) \end{aligned} \quad (3)$$

حال چون  $b_n \rightarrow b^*$ ، برای  $\epsilon k^2 > 0$ ، وجود دارد  $N$  که  $n \geq N$  نتیجه می‌دهد  $|b_n - b^*| < \epsilon k^2$ ، پس برای  $n \geq N$  داریم  $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b^*} \right| < \epsilon$ . □

بدین ترتیب، برای محاسبه حاصل ضرب و خارج قسمت دو عدد  $a = a_0/a_1 a_2 a_3 \dots$  و  $b = b_0/b_1 b_2 b_3 \dots$  می‌توان از تقریب‌های مختومه  $a = a_0/a_1 \dots a_n$  و  $b = b_0/b_1 \dots b_n$  استفاده کرد.



و با افزایش  $n$  به مقدار واقعی  $a \cdot b$  نزدیکتر شد. اما در مورد حاصل ضرب و خارج قسمت تفاوت عمده‌ای با مجموع وجود دارد. در مورد مجموع دیدیم که اگر  $a$  و  $b$  هر یک پس از  $n$  رقم بعد از ممیز مختومه شوند، خطای مجموع از  $\frac{2}{10^n}$  بیشتر نیست، مستقل از اینکه اعداد  $a$  و  $b$  چه باشند. در مورد حاصل ضرب و خارج قسمت نمی‌توان احکام مشابهی صادر کرد بدین معنی که اگر  $a = a_0/a_1 \dots a_n$  و  $b = b_0/b_1 \dots b_n$  به عنوان تقریب‌های مختومه  $a$  و  $b$  در نظر گرفته شوند، انحراف حاصل ضرب (و خارج قسمت، به ترتیب) این دو عدد از  $ab$  (و  $\frac{a}{b}$ ، به ترتیب) فقط به  $n$  وابسته نیست، بلکه به اندازه  $a$  و  $b$  نیز بستگی خواهد داشت. مثلاً در اثبات ۶-۴ (ب)، طبق (۲) داریم:

$$|a_n b_n - a^* b^*| \leq K_1 |b_n - b^*| + K_2 |a_n - a^*|$$

که در اینجا  $K_1$  یک کران بالایی برای دنباله  $(a_n)$  و  $K_2$  یک کران بالایی برای دنباله  $(b_n)$  است. بدین ترتیب اگر قدرمطلق  $a_n$  ها به نسبت بزرگ باشد، باید  $|b_n - b^*|$  را متناسباً کوچک انتخاب کرد، و همین طور برای  $b_n$  ها در رابطه با  $|a_n - a^*|$ ، تا دقت مورد نظر حاصل شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

### (۶-۷) مثال

(۶-۷-۱) دو عدد  $a = 487/r_1 r_2 r_3 \dots$  و  $b = 3/s_1 s_2 s_3 \dots$  داده شده‌اند. می‌خواهیم  $n$  را طوری اختیار کنیم که انحراف حاصل ضرب  $a_n = 487/r_1 \dots r_n$  و  $b_n = 3/s_1 \dots s_n$  از حاصل ضرب  $ab$  کوچکتر از  $10^{-5}$  باشد. برای چنین  $n$  داریم  $|a_n - a^*| \leq 10^{-n}$  و  $|b_n - b^*| < 10^{-n}$ ، پس طبق (۲):

$$|a_n b_n - ab| \leq (K_1 + K_2) 10^{-n}$$

می‌توان  $K_1 = 488$  و  $K_2 = 4$  را به عنوان کران بالایی برای دنباله‌های مختومه در نظر گرفت، پس طرف راست نامساوی بالا کوچکتر از  $10^{-5}$  (۴۹۲) است. اگر بخواهیم این خط کوچکتر از  $10^{-5}$  باشد،  $n = 8$  کار می‌کند زیرا  $492 < 10^3$  ولی  $n = 7$  کار نمی‌کند. بدین ترتیب اگر هر یک از  $a$  و  $b$

پس از هشت رقم پس از ممیز مختومه شوند، انحراف حاصل ضرب دو عدد مختومه از حاصل ضرب واقعی کوچکتر از  $10^{-5}$  خواهد بود.

(۶-۷-۲) عدد  $b = 0.032190990999\dots$  را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد را پس از  $n$  رقم بعد از ممیز مختومه کنیم. تقریب را به  $b_n$  نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم  $n$  را طوری اختیار کنیم که اختلاف  $\frac{1}{b}$  با  $\frac{1}{b_n}$  کوچکتر از  $10^{-3}$  باشد. طبق نامساوی (۳) در اثبات ۶-۶ داریم:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{1}{k^2} |b_n - b|$$

که در آن  $k > 0$  عددی است که  $|b_n| \geq k$  و  $|b^*| \geq k$ . در اینجا می‌توانیم  $k$  را برابر  $0.0321$  اختیار کنیم و با توجه به این که  $(0.0321)^2 > 10^{-5}$  داریم  $(0.0321)^2 > 10^{-3}$  و  $\frac{1}{k^2} < 10^3$ ، پس

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < (10^3) |b_n - b^*|$$

برای اینکه طرف راست کوچکتر از  $10^{-3}$  باشد، کافی است که  $|b_n - b^*|$  کوچکتر از  $10^{-6}$  باشد، بنابراین معکوس  $0.032190$  از  $b^{-1}$  انحرافی کوچکتر از  $10^{-3}$  خواهد داشت. محاسبه با ماشین حساب به نسبت قوی نشان می‌دهد که:

$$(0.032190990999)^{-1} = 31.06459195$$

$$(0.032190)^{-1} = 31.06554830$$

اختلاف این دو عدد برابر  $0.00095635$  است که از  $10^{-3}$  کوچکتر می‌باشد.

## دنباله عددی و سری عددی (۲)

در عمل دسته مهمی از دنباله‌ها از جمع زدن متوالی یا انباشتن جملات یک دنباله داده شده حاصل می‌شوند. مثلاً اگر به نمایش اعشاری عددی نگاه کنیم:

$$c = c_0/c_1c_2c_3\dots$$

این در واقع حد دنباله اعداد اعشاری مختومه زیر است:

$$c_0, c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100}, \dots$$

که این دنباله از انباشتن متوالی دنباله زیر به دست می‌آید:

$$c_0, \frac{c_1}{10}, \frac{c_2}{100}, \dots$$

به طوری کلی اگر دنباله  $(a_n)_{n=k}^{\infty}$  داده شده باشد، مقصود از سری مجموع‌های جزئی این دنباله، دنباله زیر است:

$$a_k, a_k + a_{k+1}, a_k + a_{k+1} + a_{k+2}, \dots$$

اگر دنباله اخیر به  $A$  همگرا باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود که سری  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  همگراست و می‌نویسیم  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$ . در غیر این صورت، سری واگرا خوانده می‌شود. بدین ترتیب، اگر دنباله عدد صحیح نامنفی  $c_0, c_1, c_2, \dots$  داده شده باشد که در آن برای  $i \geq 1$ ،  $0 \leq c_i \leq 9$ ، سری  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}$  طبق اصل تمامیت همگراست و حد آن به  $c_0/c_1c_2c_3\dots$  نمایش داده می‌شود. وقتی همه  $a_k$  ها اعداد حقیقی مثبت باشند واضح به نظر می‌رسد که انباشتن  $a_n$  ها فقط وقتی ممکن است منجر به یک حد متناهی شود که  $a_n$  ها سریعاً کوچک شوند. مثلاً برای  $c = c_0/c_1c_2c_3\dots$  جمله اندیس  $n$  برابر

است که به صفر میل می کند وقتی  $n \rightarrow +\infty$ . در واقع شرط  $a_n \rightarrow 0$  یک شرط لازم برای همگرایی است حتی اگر  $a_n$  ها عدد مختلط باشند.

(۷-۱) شرط لازم همگرایی. اگر سری اعداد مختلط  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  همگرا باشد، داریم  $a_n \rightarrow 0$  وقتی  $n \rightarrow +\infty$ .

اثبات. مجموع جزئی  $a_k + \dots + a_n$  را به  $S_n$  نمایش می دهیم. فرض کنید سری  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  به  $S$  همگراست، یعنی  $S_n \rightarrow S$ . اگر  $e > 0$  داده شده باشد، می خواهیم  $N$  را طوری بیابیم که برای  $n > N$  داشته باشیم  $|a_n| < e$ . چون  $S_n \rightarrow S$ ، برای  $N_1, \frac{e}{4} > 0$  وجود دارد که اگر  $n > N_1$ ، آنگاه  $|S_n - S| < \frac{e}{4}$ . قرار می دهیم  $N = N_1 + 1$ ، پس برای  $n > N$  داریم:

$$|S_n - S| < \frac{e}{4}, \quad |S_{n-1} - S| < \frac{e}{4}$$

بنابراین طبق نامساوی مثلث

$$|S_n - S_{n-1}| \leq |S_n - S| + |S - S_{n-1}| < e$$

ولی  $S_n - S_{n-1} = a_n$  و حکم به اثبات می رسد. □

لازم به تأکید است که این شرط به تنهایی برای همگرایی  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  کافی نیست و در واقع  $a_n$  ها ممکن است در عین کوچکتر شدن و میل کردن به صفر، آنقدر سریع کوچک نشوند که مجموع آنها به عددی میل کند. مثال ساده و معروف زیر را باید همواره در ذهن داشت.

(۷-۲) سری هارمونیک. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  را بررسی می کنیم. در اینجا شرط لازم همگرایی برقرار است زیرا که  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  ولی نشان می دهیم سری واگراست. به گروه بندی زیر از جملات سری تا اندیس  $n = 2^k$  توجه کنید:

$$S_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)$$

داریم  $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1} \left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2}$ ،  $\dots$ ،  $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$  بنابراین  $S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ ، چون با افزایش  $k$ ،  $1 + \frac{k}{2}$  به دلخواه بزرگ می شود،  $S_n$  ها به حدی (متناهی)

میل نمی‌کنند. این مثال نشان می‌دهد که بررسی همگرایی یک سری ممکن است در مواردی دشوار باشد. در این جلسه ضمن معرفی چند سری مرجع، آزمون‌هایی برای همگرایی سری‌ها مطرح خواهیم کرد.

دو مثال زیر نقطه ارجاع بسیاری از سری‌های دیگر و نیز بحث‌های نظری هستند.

### (۷-۳) دو مثال

(۷-۳-۱) سری هندسی. فرض کنید  $a \neq 0$  و  $r$  دو عدد مختلط داده شده باشند. سری  $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$  را در نظر می‌گیریم که از انباشتن دنباله زیر به دست می‌آید:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

مورد  $a = 0$  را کنار گذاشتیم زیرا که در این حالت همه جملات صفر می‌شوند و وضعیت سری مشخص است. نشان می‌دهیم سری  $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$  همگراست اگر و تنها اگر  $|r| < 1$ . نخست به اتحاد زیر توجه کنید

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (1)$$

که صحت آن را می‌توان با طرفین- وسطین تحقیق کرد. بنابراین به عنوان مجموع جزیی سری هندسی داریم:

$$\sum_{n=0}^N ar^n = a \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

حال اگر  $|r| < 1$ ،  $r^{N+1} \rightarrow 0$  وقتی  $N \rightarrow +\infty$ ، پس  $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$  به  $\frac{a}{1-r}$  همگراست. بالعکس اگر  $|r| \geq 1$ ، آنگاه  $|ar^n| \geq |a| > 0$  و جمله  $n$ ام به صفر میل نمی‌کند، پس شرط لازم همگرایی برقرار نیست.

(۷-۳-۲) سری  $p$ . برای  $p > 0$  داده شده، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  را سری  $p$  می‌نامند. در اینجا سری را فقط برای مقادیر صحیح  $p$  در نظر می‌گیریم. در آینده مقادیر غیر عدد صحیح نیز در نظر گرفته خواهد شد. برای  $p = 1$ ، سری هارمونیک  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$  به دست می‌آید که دیدیم واگراست هر چند که جمله  $n$ ام

آن به صفر میل می کند وقتی  $n \rightarrow +\infty$  برای  $p = 2$ ، توجه کنید که

$$n > 1 : \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

و داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2-n} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N} \end{aligned}$$

بنابراین  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$  به مقدار ۱ همگراست. حال داریم:

$$N > 1 : \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2-n} = 2 - \frac{1}{N} < 2$$

بنابراین دنباله  $(S_N)$ ،  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ ، یک دنباله صعودی با کران بالایی است که طبق ۶-۳-۴ جلسه قبل به کوچکترین کران بالایی خود میل می کند. به همین ترتیب اگر  $p > 2$ ، داریم  $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n^2}$  و مجموع های جزئی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  دنباله های صعودی با کران بالایی هستند، پس سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  همگراست.

ایده اثبات فوق را برای ارجاع بعدی به صورت زیر ثبت می کنیم:

(۷-۴) فرض کنید  $(a_n)_{n=k}^{\infty}$  یک دنباله اعداد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت سری  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  همگراست اگر و تنها اگر برای دنباله مجموع های جزئی یک کران بالایی وجود داشته باشد.

اثبات. دنباله مجموع های جزئی را در نظر می گیریم:

$$S_k = a_k, S_{k+1} = a_k + a_{k+1}, \dots$$

چون  $a_i \geq 0$ ، داریم  $S_k \leq S_{k+1} \leq S_{k+2} \leq \dots$ . پس اگر  $S_n$  ها دارای کران بالایی باشند، طبق ۶-۳-۴،  $S_n$  به کوچکترین کران بالایی مجموعه  $\{S_k, S_{k+1}, \dots\}$  میل می کند. بالعکس اگر دنباله  $(S_n)$  همگرا باشد، می دانیم که در واقع هر دنباله همگرا در  $\mathbb{C}$  کراندار است. □

به دلایلی که به زودی خواهیم دید، سری های اعداد حقیقی غیرمنفی از اهمیت ویژه ای برخوردارند. برای این گونه سری ها اکنون می توانیم با توجه به (۷-۴) چند آزمون همگرایی ارائه کنیم:

(۵-۷) فرض کنید  $(a_n)_{n=k}^{\infty}$  و  $(b_n)_{n=l}^{\infty}$  دو دنباله از اعداد حقیقی غیرمنفی باشند و اندیسی  $N$  وجود داشته باشد،  $N \geq k, l$ ، که برای  $n \geq N$  داشته باشیم  $a_n \leq b_n$ . در این صورت:

الف) اگر  $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$  همگرا باشد،  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  نیز همگراست.

ب) اگر  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  واگرا باشد،  $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$  نیز واگراست.

اثبات. چون جمع کردن تعدادی متناهی جمله اولیه اثری بر همگرایی یا واگرایی ندارد، کافی است در مورد سری های  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  و  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  بحث کنیم. اگر  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  همگرا باشد، دنباله مجموع های جزئی آن از کران بالایی، مثلاً  $M > 0$  برخوردار است. چون  $a_n \leq b_n$ ، کران بالایی برای مجموع های جزئی  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  نیز می باشد، پس طبق ۴-۷،  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  همگراست. بالعکس اگر  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  همگرا نباشد، مجموع های جزئی آن دارای کران بالایی نیستند و چون  $b_n \geq a_n$ ، مجموع های جزئی  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  نیز به طور اولی کران بالایی ندارند، پس  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  واگراست. □  
 در این آزمون مقایسه اندازه  $a_n$  و  $b_n$  به صورت تفاضل مطرح بود (یعنی  $b_n - a_n \geq 0$ ). آزمون مشابهی برای نسبت وجود دارد:

(۶-۷) دو دنباله اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و  $N$  وجود دارد که  $b_n \neq 0$  برای  $n \geq N$ . در این صورت:

الف) اگر عددی  $M > 0$  وجود داشته باشد که  $\frac{a_n}{b_n} \leq M$  برای  $n$  از مرحله ای به بعد، آنگاه اگر  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  همگرا باشد،  $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$  نیز همگراست.

ب) اگر عددی  $m > 0$  وجود داشته باشد که  $\frac{a_n}{b_n} \geq m$  برای  $n$  از مرحله ای به بعد، آنگاه اگر  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  واگرا باشد،  $\sum_{n=l}^{\infty} a_n$  نیز واگراست.

اثبات. الف) شرط  $\frac{a_n}{b_n} \leq M$  معادل  $a_n \leq M b_n$  است. اگر  $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$  به  $B$  همگرا باشد،  $\sum_{n=l}^{\infty} (M b_n)$  به  $M B$  همگراست، پس طبق (۵-۷)،  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  نیز همگراست.

ب) شرط  $\frac{a_n}{b_n} \geq m$  معادل  $a_n \geq m b_n$  است. اگر  $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$  واگرا باشد،  $\sum_{n=l}^{\infty} (m b_n)$  نیز واگراست چون  $m \neq 0$  (اگر  $\sum_{n=l}^{\infty} (m b_n)$  همگرا باشد، با ضرب کردن هر جمله در  $\frac{1}{m}$  نتیجه می شود که سری  $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$  نیز واگراست) پس چون  $a_n \geq m b_n$ ، طبق (۴-۷) سری  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  نیز همگراست. □

بسیاری اوقات حالت خاصی از (۷-۵) به صورت زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

(۷-۷)  $(a_n)_{n=k}^{\infty}$  و  $(b_n)_{n=l}^{\infty}$  دو دنباله اعداد حقیقی غیرمنفی هستند و  $N$  وجود دارد که  $b_n \neq 0$  برای  $n \geq N$ . فرض کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  وجود داشته باشد و برابر  $L$  باشد. در این صورت:

(الف) اگر  $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$  همگرا باشد،  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  نیز همگراست.

(ب) اگر  $L > 0$  و  $\sum_{n=l}^{\infty} b_n$  واگرا باشد،  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  نیز واگراست.

اثبات. این در واقع حالت خاصی از ۷-۶ است. در (الف)، می توان از  $M = L + 1$  استفاده کرد زیرا که اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ، از مرحله ای به بعد همه  $\frac{a_n}{b_n}$  ها از  $L + 1$  کوچکتر می شوند. در (ب)، اگر  $L > 0$ ، با گرفتن  $m = \frac{L}{2}$ ، می بینیم که چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ، از مرحله ای به بعد  $\frac{a_n}{b_n}$  ها باید از  $m$  بزرگتر باشند. □

(۷-۸) مثال. وضعیت سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - n + 3}{n^4 + 1}$  را از نظر همگرایی بررسی می کنیم. در این گونه مثال ها آنچه تعیین کننده است، اختلاف درجه بالاترین جمله صورت و مخرج است. اگر (درجه صورت) - (درجه مخرج)  $= p$ ، مقایسه با  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  کارساز است. در مثال فوق:

$$\frac{\frac{2n^2 - n + 3}{n^4 + 1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2n^3 - n^2 + 3n}{n^4 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

بنابراین واگرایی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  نتیجه می دهد که سری داده شده واگراست.

(۷-۹) نکته. فرض کنید  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  و  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  دو سری همگرا، به ترتیب به  $A$  و  $B$  باشند. در این صورت سری  $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$  را در نظر می گیریم که در آن  $c_n = a_n + b_n$ . ادعا می کنیم که  $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$  به  $A + B$  همگراست. در واقع اگر مجموع های جزئی  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ،  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  و  $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$  را به ترتیب به  $A_n$ ،  $B_n$  و  $C_n$  نمایش دهیم، داریم  $C_n = A_n + B_n$  و حکم از گزاره ۶-۴ جلسه قبل نتیجه می شود. به همین ترتیب اگر  $c$  یک عدد مختلط دلخواه باشد، به سادگی دیده می شود که  $\sum_{n=k}^{\infty} (ca_n)$  به  $cA$  همگراست. ولی نباید تصور کرد که اگر  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$  و  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n = B$ ، آنگاه  $\sum_{n=k}^{\infty} (a_n b_n)$  برابر  $AB$  است. مجموع جزئی سری اخیر تا مرحله  $N$  برابر  $a_k b_k + \dots + a_N b_N$  است



در حالی که حاصل ضرب مجموع‌های جزئی  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  و  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ ، هر یک تا مرحله  $N$ ، برابر  $(a_k + \dots + a_N)(b_k + \dots + b_N)$  می‌باشد.

به کمک سری هندسی می‌توان دو آزمون بسیار مؤثر برای سری‌های اعداد مثبت ارائه کرد. دو آزمون زیر هر یک، یکی از ویژگی‌های سری هندسی را مبنا قرار می‌دهد. به سری هندسی زیر توجه کنید که در آن  $r$  یک عدد حقیقی مثبت فرض می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

می‌دانیم شرطی لازم و کافی برای همگرایی این سری این است که  $r < 1$ . حال می‌توان  $r$  را دو گونه تعبیر کرد. از سویی  $r$  نسبت دو جمله متوالی است و از سویی دیگر  $r$  ریشه  $n$  ام جمله اندیس  $n$  این سری. در زیر "آزمون نسبت" در شرایطی که نسبت جملات متوالی تقریباً رفتاری مانند رفتار سری هندسی دارد، یعنی حدوداً ثابت است، کار می‌کند. "آزمون ریشه" وقتی کارایی دارد که ریشه  $n$  ام جمله اندیس  $n$  حدوداً ثابت باشد.

(۷-۱۰) آزمون نسبت. فرض کنید  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی  $\rho < 1$  وجود داشته باشد و مرحله‌ای  $N$  که برای  $n \geq N$  داشته باشیم  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$ ، آنگاه  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  همگراست.

ب) اگر مرحله‌ای  $N$  وجود داشته باشد که برای  $n \geq N$  داشته باشیم  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ، آنگاه  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  واگراست.

اثبات. طبق فرض داریم  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$  برای  $n \geq N$ ، پس:

$$a_{N+1} \leq \rho a_N$$

$$a_{N+2} \leq \rho a_{N+1} \leq \rho^2 a_N$$

⋮

$$a_{N+k} \leq \rho a_{N+k-1} \leq \dots \leq \rho^k a_N$$

بنابراین از مقایسه سری با جملات مثبت  $a_{N+1} + a_{N+1} + \dots$  با سری هندسی  $a_N \rho + a_N \rho^2 + a_N \rho^3 + \dots$  با قدرنسبت  $\rho < 1$  نتیجه می شود که  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  همگراست. در مورد (ب)، داریم

$$\dots \geq a_{N+2} \geq a_{N+1} \geq a_N > 0$$

بنابراین شرط لازم همگرایی،  $a_n \rightarrow 0$ ، تأمین نمی شود، و سری واگراست. □  
گاهی اوقات یک نتیجه ایده آزمون فوق به صورت زیر کفایت می کند. فرض کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R$  وجود داشته و برابر  $R$  باشد. اگر  $R < 1$ ، عددی  $\rho$  بین  $R$  و  $1$  در نظر می گیریم  $R < \rho < 1$ . طبق تعریف حد دنباله، مرحله ای  $N$  وجود دارد که برای  $n \geq N$ ،  $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - R| < \rho - R$ ، پس  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$  و همگرایی نتیجه می شود. اگر  $R > 1$ ، مجدداً مرحله ای  $N$  وجود دارد که برای  $n \geq N$  داریم  $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - R| < R - 1$ ، پس  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  و سری واگراست. در حالتی که  $R = 1$ ، نتیجه قاطعی از این آزمون حاصل نمی شود. مثلاً برای سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^p} = 1$$

مستقل از اینکه  $p$  چه باشد. ولی این سری به ازای  $p = 1$  واگرا و به ازای  $p > 1$  همگراست.

(۷-۱۱) مثال. فرض کنید عدد حقیقی  $x > 0$  داده شده باشد. نشان می دهیم  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  همگراست. از آزمون نسبت داریم:

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

پس این سری همگراست.

(۷-۱۲) آزمون ریشه. فرض کنید  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  یک سری با جملات مثبت است. در این صورت:

الف) اگر عددی  $\rho < 1$  وجود داشته باشد و مرحله ای  $N$  که برای  $n \geq N$  داشته باشیم  $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$ ، آنگاه  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  همگراست.

ب) اگر برای بی نهایت اندیس  $n$  داشته باشیم  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ، آنگاه سری  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  واگراست.

اثبات. برای (الف) داریم  $a_n \leq \rho^n$  برای هر  $n \geq N$  و مقایسه با سری هندسی  $\sum \rho^n$ ، همگرایی سری را به اثبات می‌رساند. در مورد (ب)،  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  به‌ازای بی‌نهایت اندیس  $n$ ، نشان می‌دهد  $a_n \geq 1$  به‌ازای بی‌نهایت اندیس  $n$ ، پس شرط لازم همگرایی  $a_n \rightarrow 0$  نمی‌تواند برقرار باشد و سری واگراست. □

در اینجا نیز بسیاری اوقات  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  در نظر گرفته می‌شود. اگر این حد وجود داشته باشد و آن را به  $R$  نمایش دهیم، سه وضعیت زیر ممکن است رخ دهد. اگر  $R < 1$  سری همگراست زیرا که اگر عددی  $\rho$  بین  $R$  و  $1$  اختیار کنیم،  $R < \rho < 1$ ، از تعریف حد دنباله نتیجه می‌گیریم مرحله‌ای  $N$  وجود دارد که برای  $n \geq N$  داریم  $|\sqrt[n]{a_n} - R| < \rho - R$ ، پس  $\sqrt[n]{a_n} < \rho$  و همگرایی نتیجه می‌شود. اگر  $R > 1$ ، پس از مرحله‌ای  $N$  داریم  $|R - \sqrt[n]{a_n}| < R - 1$ ، پس  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  و واگرایی نتیجه می‌شود. در اینجا نیز  $R = 1$  نتیجه‌ای در مورد همگرایی نمی‌دهد زیرا که مجدداً در مورد سری  $p$ :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p$$

از آنجا که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ، حد عبارت بالا به‌ازای هر  $p$  برابر  $1$  است. پس این آزمون نمی‌تواند میان سری واگرایی  $\sum \frac{1}{n}$  و سری همگرایی  $\sum \frac{1}{n^p}$  تمیز دهد.

(۷-۱۳) مثال. فرض کنید عدد حقیقی  $x > 0$  داده شده است، نشان می‌دهیم سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$  همگراست.

طبق آزمون ریشه:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}} = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

پس سری همگراست. می‌توانستیم این امر را از مقایسه  $\frac{x^n}{n^n} \leq \frac{x^n}{n!}$  نیز به کمک مثال ۷-۹ نتیجه بگیریم.

## دنباله عددی و سری عددی (۳)

در جلسه قبل اشاره داشتیم به اینکه سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و آزمون‌های همگرایی که مطرح کردیم مربوط به سری‌های اعداد غیرمنفی بودند. دلیل اهمیت سری‌های اعداد حقیقی غیرمنفی قضیه زیر است:

(۸-۱) قضیه. فرض کنید  $(z_n)_{n=k}^{\infty}$  یک دنباله اعداد مختلط باشد. اگر  $\sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$  همگرا باشد، آنگاه  $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$  نیز همگراست.

بدین ترتیب اگر بتوانیم به کمک یکی از آزمون‌های جلسه قبل همگرایی سری قدرمطلق‌های جملات یک سری را به اثبات برسانیم، همگرایی سری اولیه نتیجه می‌شود. اگر برای سری  $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$ ، سری قدرمطلق‌ها، یعنی  $\sum_{n=k}^{\infty} |z_n|$  همگرا باشد،  $\sum_{n=k}^{\infty} z_n$  را همگرای مطلق می‌نامند. پس طبق قضیه بالا، همگرایی مطلق، همگرایی را نتیجه می‌دهد. برای اثبات قضیه بالا نخست به یک نکته کلی اشاره می‌کنیم.

(۸-۲) گزاره. فرض کنید  $(c_n)_{n=k}^{\infty}$  یک دنباله اعداد مختلط باشد،  $c_n = a_n + ib_n$  و  $c = a + ib$  یک عدد مختلط. در این صورت  $c_n \rightarrow c$  اگر و تنها اگر  $a_n \rightarrow a$  و  $b_n \rightarrow b$ .

اثبات. داریم

$$|a_n - a|, |b_n - b| \leq |c_n - c| \quad (1)$$

و

$$|c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad (2)$$

نامساوی اولی بیان این مطلب است که در مثلث قائم الزاویه هر ضلع زاویه قائمه کوچکتر از وتر است، و نامساوی دوم بیان این مطلب که طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است (شکل ۱).

فرض کنید  $c \rightarrow c_n$  پس برای هر  $\epsilon > 0$ ،  $N$  وجود دارد که  $|c_n - c| < \epsilon$  برای هر  $n > N$ . بنابراین از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود که  $|a_n - a| < \epsilon$  و  $|b_n - b| < \epsilon$  وقتی  $n > N$ . پس  $c \rightarrow c_n$  نتیجه می‌دهد  $a \rightarrow a_n$  و  $b \rightarrow b_n$ . بالعکس فرض کنید  $a \rightarrow a_n$  و  $b \rightarrow b_n$ . برای  $\epsilon$  داده شده،  $N_1$  و  $N_2$  وجود دارند که:

$$n > N_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$n > N_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

با قرار دادن  $N = \max\{N_1, N_2\}$  می‌بینیم که اگر  $n > N$ ، آنگاه طبق نامساوی (۲) داریم  $|c_n - c| < \epsilon$  و حکم به اثبات می‌رسد. □

به زبان هندسی، گزاره ۸-۲ حکم می‌کند که شرطی لازم و کافی برای  $c \rightarrow c_n$  این است که مؤلفه افقی (قسمت حقیقی)  $c_n$  به مؤلفه افقی (قسمت حقیقی)  $c$  میل کند و مؤلفه قائم (قسمت موهومی)  $c_n$  به مؤلفه قائم (قسمت موهومی)  $c$ .

حال قضیه ۸-۱ را در حالتی که  $c_n$  ها حقیقی باشند در نظر بگیرید. پس دنباله‌ای از اعداد حقیقی  $(c_n)_{n=k}^{\infty}$  داریم که همگراست. می‌نویسیم:

$$c_n = (c_n + |c_n|) + (-|c_n|)$$

چون  $\sum |c_n|$  همگرا فرض شده است، اگر همه جملات در عدد ثابت  $(-1)$  ضرب شوند، نتیجه می‌شود که  $\sum_{n=k}^{\infty} (-|c_n|)$  همگراست. پس اگر ثابت شود که  $\sum_{n=k}^{\infty} (c_n + |c_n|)$  نیز همگراست، آنگاه مجموع جمله به جمله دو سری همگرای فوق، همگرا خواهد شد. ولی داریم

$$0 \leq c_n + |c_n| \leq 2|c_n|$$

و  $\sum_{n=k}^{\infty} (2|c_n|)$  همگراست، پس طبق آزمون مقایسه جلسه قبل، ۷-۵، سری  $\sum_{n=k}^{\infty} (c_n + |c_n|)$  همگراست.

اکنون قضیه ۸-۱ را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. فرض کنید  $c_n = a_n + ib_n$ ، پس  $|a_n| \leq |c_n|$  و  $|b_n| \leq |c_n|$ . اگر  $\sum |c_n|$  همگرا باشد، طبق آزمون مقایسه،  $\sum |a_n|$  و  $\sum |b_n|$  همگرا خواهند شد. ولی  $a_n$  و  $b_n$  اعداد حقیقی هستند، پس طبق بحث بالا  $\sum a_n$  و  $\sum b_n$  نیز همگرا می‌شوند. بنابراین طبق گزاره ۸-۲،  $\sum c_n$  که در آن  $c_n = a_n + ib_n$  نیز همگراست و اثبات ۸-۱ به انجام می‌رسد.

(۸-۳) چند مثال.

(۸-۳-۱) همگرایی سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$  را بررسی می‌کنیم. داریم  $|n+i| = \sqrt{n^2+1} > n$ ، پس  $|\frac{1}{(n+i)^2}| < \frac{1}{n^2}$  و در مقایسه با سری  $p$ ، به‌ازای  $p=2$ ،  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+i|^2}$  همگراست، در نتیجه  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}$  همگراست.

همگرایی مطلق شرطی کافی برای همگرایی است ولی یک شرط لازم نیست. مثلاً با آن که سری هارمونیک  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  واگراست، اگر جملات را یکی در میان منفی کنیم، سری حاصل، یعنی:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

همگراست. در واقع آزمون کلی زیر برقرار است:

(۸-۴) آزمون سری متناوب لایب‌نیتس. فرض کنید  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  یک دنباله اعداد حقیقی نامنفی باشد که:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

و  $a_n \rightarrow 0$  وقتی  $n \rightarrow +\infty$ . در این صورت سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  همگراست.

اثبات. به دنباله مجموع‌های جزئی این سری نگاه می‌کنیم:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 - a_2, S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \dots$$

مجموعه‌های جزئی با اندیس فرد، یعنی  $S_1, S_3, S_5, \dots$  را در نظر بگیرید. چون  $a_{2n} \geq a_{2n+1}$  داریم:

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

پس

$$\dots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$$

همین طور چون  $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$  برای مجموعه‌های جزئی زوج داریم  $S_{2n+2} =$

$$S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

$$\dots \geq S_6 \geq S_4 \geq S_2$$

توجه کنید که  $a_1$  یک کران بالایی برای دنباله مجموعه‌های جزئی زوج است زیرا که  $a_i \geq a_{i+1}$  پس:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + \dots - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &\leq a_1 \end{aligned}$$

بنابراین دنباله مجموعه‌های جزئی با اندیس زوج به کوچکترین کران بالایی خود، مثلاً  $S$  میل می‌کند. نشان می‌دهیم کل دنباله مجموعه‌های جزئی،  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ، به  $S$  میل می‌کند. فرض کنید  $e > 0$  داده شده است. از آنجا که  $N_1, S_{2n} \rightarrow S$  وجود دارد که:

$$n > N_1 : |S_{2n} - S| < \frac{e}{4}$$

از طرفی دیگر، فرض کرده‌ایم  $a_n \rightarrow 0$  پس  $N_2$  وجود دارد که:

$$n > N_2 : |a_n| < \frac{e}{4}$$

حال اگر قرار دهیم  $N = 2 \max\{N_1, N_2\}$ ، اگر  $n = 2k > N$  داریم  $k > N_1$  پس  $|S_n - S| < \frac{e}{4} < e$

و اگر  $n = 2k - 1 > N$  آنگاه  $2k > N_2$  و:

$$\begin{aligned} |S_{2k-1} - S| &\leq |S_{2k-1} - S_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &= |a_{2k}| + |S_{2k} - S| \\ &< \frac{e}{4} + \frac{e}{4} = e \end{aligned}$$

□ پس  $S_n \rightarrow S$  و حکم به اثبات می‌رسد.

در واقع ایده اثبات فوق بسیار ساده و جالب توجه است. از آنجا که جملات سری متناوباً تغییر علامت می‌دهند و قدرمطلق جملات نوعاً کوچکتر می‌شوند (به هر حال هیچ‌گاه بزرگتر نمی‌شوند)، دنباله  $S_n$  روی محور حقیقی متناوباً به چپ و راست می‌جهد در حالی که دامنه جهش آن روبه تازل به صفر است ( $a_n \rightarrow 0$ ). به این ترتیب  $S_{2n}$  ها از طرف چپ و  $S_{2n+1}$  ها از طرف راست به سوی نقطه‌ای روی محور حقیقی تجمع می‌کنند (شکل ۲).

با توجه به این گزاره، سری‌های زیر همگرا هستند:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \dots$$

در آینده مجموع این دو سری خاص را محاسبه خواهیم کرد.

در این مقطع لازم است نکته‌ای در مورد به‌کارگیری نماد  $\sum$  به عنوان حد سری گوشزد کنیم.  $\sum$  معمولاً به معنای "مجموع" به‌کار می‌رود، مثلاً  $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$ . از آنجا که  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  به معنای انباشتن متوالی ولی تمام نشدنی  $a_i$  هاست، نماد  $\sum$  بی‌مورد نیست ولی نباید پنداشت که این "مجموع نامتناهی" لزوماً خواص جمع معمولی را دارد. دیدیم که اگر هر جمله یک سری را در عدد ثابت  $c$  ضرب کنیم، حد سری نیز در همان عدد ضرب خواهد شد (تعمیم قانون بخشی)، و نیز اگر  $\sum a_n$  و  $\sum b_n$  همگرا باشند،  $\sum (a_n + b_n)$  نیز همگراست و به مجموع  $\sum a_n$  و  $\sum b_n$  میل می‌کند. این نوعی قانون جابجایی (تعویض‌پذیری) عمل جمع به بی‌نهایت عامل جمع است ولی اگر سری‌های  $\sum a_n$  و  $\sum b_n$  خود همگرا نباشند، سری مجموع جملات متناظر، یعنی  $\sum (a_n + b_n)$  می‌تواند رفتار غیرمنتظره‌ای داشته باشد. در واقع ثابت می‌شود که اگر  $\sum a_n$  یک سری همگرا باشد که همگرایی مطلق نباشد، می‌توان با جابه‌جا کردن عوامل جمع، حد مجموع را به هر عدد دلخواه میل داد! روش کار را با مثال سری زیر نشان می‌دهیم. همین نوع استدلال در حالت کلی کار می‌کند. سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (3)$$



را در نظر بگیرید. این در واقع مجموع دو سری غیر همگراست که جمله نمونه هر یک به صفر میل می کند. یکی از این سری ها، سری جملات با مخرج زوج است:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots$$

این سری با ضرب کردن جملات سری هارمونیک در  $(-\frac{1}{3})$  پدید آمده است پس لزوماً واگراست (و گرنه با ضرب کردن جملات در  $-2$ ، سری هارمونیک همگرا می شود). از طرفی دیگر چون  $\frac{1}{3} > 1$ ،  $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ ، ...، سری جملات با مخرج فرد نیز واگراست. حد سری (۳) قطعاً از ۱ کوچکتر است زیرا با نوشتن سری به صورت زیر:

$$1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + (-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}) + \dots$$

چون مجموع داخل هر پرانتز منفی است، هر بار عددی از مجموع قبلی کم می شود. با این حال نشان می دهیم با جابجایی مناسب می توان مجموع سری را به مثلاً عدد ۲ میل داد. برای این کار نخست جملات فرد  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$  را تا جایی جمع می کنیم که از ۲ بیشتر شود. جدول زیر که از محاسبه با ماشین حساب حاصل شده است نشان می دهد باید تا  $\frac{1}{15}$  جلو رفت:

$$1 < 2$$

$$1 + \frac{1}{3} \simeq 1/3333 < 2$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \simeq 1/5333 < 2$$

$$\vdots$$

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13} \simeq 1/9551 < 2$$

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15} \simeq 2/0218 > 2$$

حال جملات زوج (منفی) را از مجموع محاسبه شده کم می کنیم تا مجموع کوچکتر از ۲ شود. در واقع در اینجا افزودن  $\frac{1}{3}$  - کافی است:

$$(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15}) - \frac{1}{2} \simeq 1/5218$$

مجدداً جملات فرد (مثبت) را به ترتیب می‌افزاییم تا مجموع از ۲ تجاوز کند. محاسبه با ماشین حساب می‌دهد:

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{41}\right) \simeq 2/0041 > 2$$

اکنون از جملات زوج استفاده می‌کنیم تا مجموع از ۲ کوچکتر شود:

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{41}\right) - \frac{1}{4} \simeq 1/7541$$

با ادامه دادن این فرایند می‌بینیم که میزان انحراف از ۲ تدریجاً کوچکتر می‌شود زیرا که  $\frac{1}{n}$  به تدریج کوچکتر می‌شود. روشن است که به جای ۲ می‌توان با این روش مجموع را به هر عددی میل داد. قضیه‌ای جالب حکم می‌کند که این پدیده برای سری‌های همگرای مطلق رخ نمی‌دهد، یعنی اگر یک سری همگرای مطلق باشد، هیچ‌گونه جابجایی در جملات اثری بر حد سری نخواهد داشت. نکته تمایز از وضعیت بالا این است که در بالا به سبب واگرایی  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  قادر بودیم با افزودن جملات، مجموع را به ۲ برسانیم ولی در مورد سری‌های همگرای مطلق، هیچ زیر دنباله‌ای از سری، واگرا نخواهد شد و قادر نخواهیم بود نوسان‌های مورد نیاز را ایجاد کنیم.

## پایداری محاسبه

از این بخش بررسی تابع‌های حقیقی یک متغیری را آغاز می‌کنیم. مقصود از یک تابع حقیقی یک متغیری تابعی  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  است که در آن دامنه تابع، یعنی  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  است. به این ترتیب به هر عضو  $s$  از  $S$ ، عدد حقیقی مشخصی  $f(s)$  منسوب می‌شود. اگر  $f$  را، که معمولاً با یک فرمول یا دستورالعمل داده می‌شود، یک ماشین محاسبه یا برنامه‌ای رایانه‌ای فرض کنیم، به‌ازای ورودی  $s$ ، همواره خروجی مشخصی  $f(s)$  حاصل می‌شود.

یکی از ملاحظات که در همه محاسبات علمی و مهندسی ظاهر می‌شود، موضوع تقریب است. نتیجه یک محاسبه یا حاصل به‌کارگیری یک تابع ممکن است عددی باشد که دانش "دقیق" آن به منظور کاربرد مورد نظر ضروری است. اما "دقیق" به چه معنی است؟ مثلاً توجه کنید که حتی عظیم‌ترین رایانه جهان حافظه‌ای محدود دارد و گنجایش ضبط و به‌کارگیری یک عدد اعشاری نامختومه  $c_0/c_1c_2c_3\dots$  را ندارد. به علاوه در هر کاربرد نیز، حساسیت دستگاه‌ها و دقت سنجش، آستانه‌ای دارد که دقت بیش از آن نه عملی است و نه لزوماً ضروری. بنابراین در هر کاربرد یا مقوله، معمولاً اندازه خطای قابل تحملی  $e > 0$  منظور می‌شود که عملاً دو نتیجه نزدیکتر از  $e$  به یکدیگر از هم غیرقابل تشخیص‌اند و تقریب تا این اندازه قابل قبول محسوب می‌شود.

در زمینه محاسبه مقدار توابع، معمولاً آستانه دقتی برای نتیجه حاصل از به‌کارگیری تابع منظور می‌شود و سؤال اساسی این است که داده‌ها باید به چه دقتی معلوم باشند که حاصل محاسبه از دقت مورد نظر برخوردار شود. با ذکر چند مثال موضوع را پیگیری می‌کنیم.

(۹-۱) چند مثال.

(۹-۱-۱) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x) = 5x + 3$  تعریف می‌کنیم. ورودی این تابع باید به چه دقت باشد که خطای خروجی آن کمتر از  $10^{-4}$  باشد؟

حل و بحث. توجه کنید که چنین سؤالی می‌تواند مصداق عملی کاملاً معنی‌داری داشته باشد. فرض کنید لازم است ابعاد یک تصویر رایانه‌ای را پنج برابر بزرگ کنیم به طوری که تصویر حاصل همچنان هموار به نظر رسد یعنی جزئیات عکس به صورت نقطه‌چین ظاهر نشود. به این منظور لازم است نقطه‌های مجاور از فاصله معینی به هم نزدیک‌تر بمانند که چشم انسان عکس را به صورت هموار مشاهده کند. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که در شکل اولیه نقاط روشن باید چه اندازه به هم نزدیک باشند که پس از بزرگ‌سازی با ضریب ۵ تصویر قابل قبولی به دست آید. در فرمول این تابع می‌توان جمع کردن عدد ۳ را به معنای انتقال تصویر تلقی کرد که نباید اثری بر جواب مسأله داشته باشد.

حال به حل مسأله می‌پردازیم. دو ورودی  $x_1$  و  $x_2$  در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم فاصله این دو ورودی، یعنی  $|x_1 - x_2|$  چقدر باشد که فاصله خروجی‌های متناظر، یعنی  $|f(x_1) - f(x_2)|$  کوچکتر از  $10^{-4}$  باشد. باید داشته باشیم:

$$|(5x_1 + 3) - (5x_2 + 3)| < 10^{-4}$$

یا معادلاً

$$5|x_1 - x_2| < 10^{-4}$$

بنابراین واضح است که اگر  $|x_1 - x_2| < \frac{1}{5} 10^{-4}$ ، آنگاه دقت مورد نظر در خروجی منظور می‌شود.

(۹-۱-۲) تابع مجذور کردن، یعنی  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x) = x^2$  را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم عدد  $x$  باید به چه وقتی معلوم باشد که خطا در محاسبه مجذور آن کوچکتر از  $10^{-3}$  باشد.

حل و بحث. خواهیم دید که بر خلاف مثال قبل، در اینجا جواب مطلق وجود ندارد، بلکه جواب به

حدود اندازه  $x$  وابسته است. اگر  $x_1$  و  $x_2$  دو ورودی این تابع باشند، می‌خواهیم درجه دقتی  $\delta > 0$  منظور کنیم که اگر  $|x_1 - x_2| < \delta$  آنگاه فاصله خروجی‌های متناظر، یعنی  $|x_1^2 - x_2^2|$ ، کوچکتر از  $10^{-3}$  باشد. پس باید داشته باشیم:

$$|x_1^2 - x_2^2| < 10^{-3}$$

یا معادلاً:

$$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| < 10^{-3}$$

کمی توجه به عبارت بالا نشان می‌دهد که مسأله به این صورت جواب ندارد، یعنی هیچ مقدار  $\delta > 0$  وجود ندارد که برای هر دو عدد  $x_1$  و  $x_2$  به فاصله کوچکتر از  $\delta$ ، فاصله  $|x_1^2 - x_2^2|$  کوچکتر از  $10^{-3}$  باشد. فرض کنید چنین  $\delta$  ای وجود داشته باشد. اگر دو عدد  $x_1$  و  $x_2$  را هر دو بزرگتر از  $\frac{1}{\delta}$  ولی به فاصله  $\frac{\delta}{4}$  از یکدیگر انتخاب کنیم، مثلاً:

$$x_1 = \frac{1}{\delta}, \quad x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{4}$$

از طرفی داریم  $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{4} < \delta$  و از سویی دیگر  $|x_1 + x_2| = \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{4}$ ، پس:

$$\begin{aligned} |x_1^2 - x_2^2| &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| = \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{\delta}{4}\right) \\ &= \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{\delta}{4}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} \end{aligned}$$

که  $\delta$  هرچه باشد  $1 + \frac{\delta^2}{4}$  از  $10^{-3}$  کوچکتر نمی‌شود. نکته این مسأله این است که وقتی عددی مجذور می‌شود، یعنی در خود ضرب می‌شود، هر خطا در عدد ورودی، خطایی حدوداً دو برابر حاصل ضرب این خطا در مقدار عدد داده شده در نتیجه محاسبه ایجاد می‌کند. به طور دقیق، فرض کنید  $x$  مقدار "واقعی" و  $h$  خطایی در ارائه آن باشد. در این صورت:

$$(x + h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

وقتی  $h$  کوچکتر از ۱ باشد،  $h^2$  از  $h$  کوچکتر است، ولی  $2hx$  می‌تواند بزرگ باشد اگر  $x$  بزرگ باشد.

بدین ترتیب سؤال مطرح شده را نمی‌توان به این کلیت پاسخ داد ولیکن در عمل، عددی که باید مجذور شود به طور تقریبی معلوم است و این دانش تقریبی، کافی است که ما را قادر سازد حدودی برای تقریب لازم به دست آوریم. مسأله خاص زیر را در نظر می‌گیریم. عددی  $a$  به صورت زیر داده شده است:

$$a = ۱۵/a_۱a_۲a_۳a_۴ \dots$$

که ارقام پس از اعشار  $a_n$  تا  $n$  های خیلی بزرگ معلومند یا قابل محاسبه‌اند. می‌خواهیم بدانیم این عدد را پس از چند رقم مختومه کنیم که اختلاف مجذور عدد حاصل از مجذور  $a$  کوچکتر از  $۱۰^{-۳}$  باشد. اگر عدد  $a$  را پس از  $n$  رقم اعشار مختومه کنیم، عددی

$$A_n = ۱۵/a_۱ \dots a_n$$

به دست می‌آید. می‌خواهیم بدانیم تا چند رقم  $n$  باید جلو رفت که  $|A^۲ - A_n^۲|$  کوچکتر از  $۱۰^{-۳}$  باشد. توجه کنید که این مصداقی از مسأله اولیه است. وقتی  $a$  را پس از  $n$  رقم اعشاری مختومه می‌کنیم، اختلاف  $|A - A_n|$  کوچکتر یا مساوی  $۱۰^{-n}$  است. پس در واقع سؤال این است که  $|A - A_n|$  چه قدر کوچک گرفته شود که  $|A^۲ - A_n^۲| < ۱۰^{-۳}$  داریم.

$$|A^۲ - A_n^۲| = |A + A_n||A - A_n|$$

حال قطعاً  $A$  و  $A_n$  هر دو کوچکتر ۱۶ هستند، پس:

$$|A^۲ - A_n^۲| < ۳۲|A - A_n| \leq (۳۲)۱۰^{-n}$$

پس اگر بتوانیم  $n$  را طوری بگیریم که  $۱۰^{-n} \leq (۳۲)۱۰^{-۳}$ ، دقت مورد نظر در محاسبه مجذور حاصل می‌شود. معادلاً باید داشته باشیم:

$$۱۰^n \geq (۳۲)۱۰^۳$$

اگر  $n$  برابر ۵ یا بزرگتر گرفته شود این نامساوی برقرار می‌شود. حاصل اینکه مجذور  $a_۱ \dots a_۵$  از  $۱۵/a_۱a_۲a_۳ \dots$  کمتر از  $۱۰^{-۳}$  فاصله دارد.

در مثال خاص بالا ما فقط تقریب نقصانی برای  $A$  را در نظر گرفتیم زیرا  $A_n \leq A$ . همین استدلال را می‌توان در واقع به طور کلی، بدون استفاده از عددنویسی اعشاری برای محاسبه مجذور اعداد نزدیک به ۱۵ تکرار کرد. فرض کنید  $a$  عددی باشد  $15 < a < 16$ ، می‌خواهیم عددی  $\delta > 0$  بیابیم که اگر  $\delta < |a - a'|$ ، آنگاه  $|a^2 - a'^2| < 10^{-3}$ . مقدمتاً  $\delta_1$  را کوچکتر یا مساوی  $16 - a$  و  $a - 15$  می‌گیریم، پس اگر  $\delta_1 < |a - a'|$ ، آنگاه  $a'$  نیز عددی در بازه  $[15, 16]$  است. در این صورت داریم:

$$|a^2 - a'^2| = |a + a'| |a - a'| < (32) |a - a'|$$

بنابراین اگر  $|a - a'| < \frac{1}{32} 10^{-3}$  کوچکتر از  $10^{-3}$  باشد، یعنی  $|a - a'| < \frac{1}{32} 10^{-3}$  کوچکتر از  $10^{-3}$  خواهد بود. پس

$$\delta = \min\{16 - a, a - 15, \frac{1}{32} 10^{-3}\}$$

ویژگی مورد نظر را دارد. اگر هیچ دانشی نسبت به اندازه  $a - 15$  و  $16 - a$  نداشته باشیم، یعنی ندانیم  $a$  کجای بازه  $[15, 16]$  قرار گرفته است می‌توانیم برای به دست آوردن  $\delta$  مناسب به طریق زیر عمل کنیم. مقدمتاً فرض می‌کنیم  $\delta_1 = 1$ . آنگاه اگر  $\delta_1 < |a - a'|$ ، قطعاً  $14 < a' < 17$ ، پس  $|a + a'| = a + a' < 33$  و داریم:

$$|a^2 - a'^2| = |a + a'| |a - a'| < 33 |a - a'|$$

پس اگر  $|a - a'| < \frac{1}{33} 10^{-3}$  گرفته شود، داریم  $|a^2 - a'^2| < 10^{-3}$ . بنابراین

$$\delta = \min\{1, \frac{1}{33} 10^{-3}\} = \frac{1}{33} 10^{-3}$$

به هر حال کار می‌کند.

(۹-۱-۳) تابع  $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم که  $f(x) = \frac{1}{x}$ . می‌خواهیم بدانیم عدد  $x$  باید به چه دقت معلوم باشد که خطای معکوس محاسبه شده از  $10^{-2}$  کوچکتر باشد.

حل و بحث. در اینجا نیز پدیده‌ای مشابه مثال قبل ظاهر می‌شود، یعنی به طور کلی جواب به حدود اندازه  $x$  وابسته خواهد بود. توجه کنید که اگر دو عدد بزرگ به اندازه  $10^{-n}$  اختلاف داشته باشند ( $n$  بزرگ) اختلاف معکوس آنها بسیار کوچک است؛ در حالی که اگر دو عدد کوچک همین اندازه اختلاف داشته باشند معکوسشان می‌تواند به نسبت دور از هم باشد. به عنوان مثال:

$$x_1 = 10 \quad , \quad x_2 = 10 + 10^{-3} \quad , \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \simeq 0/0000099990$$

در حالی که

$$x_1 = 10^{-3} \quad , \quad x_2 = 10^{-3} + 10^{-3} \quad , \quad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 500$$

بنابراین لازم است سؤال اولیه را با قید بیشتری مطرح کنیم. فرض کنید عدد  $a$  به صورت زیر داده شده است:

$$a = 0/02a3a4a5\dots$$

می‌خواهیم  $0 < \delta$  را طوری تعیین کنیم که اگر  $|a - a'| < \delta$ ، آنگاه  $|1/a - 1/a'| < 10^{-2}$ . چون دامنه  $f$  را اعداد حقیقی مثبت در نظر گرفته‌ایم؛ برای هر  $a'$  در دامنه  $f$  داریم:

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right| = \frac{|a - a'|}{aa'}$$

از این عبارت روشن است که  $\delta = a$  نمی‌تواند تخمین  $|1/a - 1/a'| < 10^{-2}$  را تأمین کند زیرا که اگر  $\delta = a$ ،  $a'$  را می‌توان به دلخواه نزدیک به  $0$  گرفت و در این صورت کسر به دلخواه بزرگ می‌شود. برای رفع این اشکال، مقدماً  $0 < \delta_1$  را عددی کوچکتر از  $a$  می‌گیریم، مثلاً  $\delta_1 = 10^{-2}$ . بنابراین اگر  $|a - a'| < \delta_1$ ، چون  $a = 0/02a3a4a5\dots \geq 0/02$ ، داریم  $a' > 0/01$ . بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$|a - a'| < 10^{-2} : \quad \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right| < \frac{|a - a'|}{(0/01)(0/02)} = \frac{10^4}{2} |a - a'|$$

اکنون می‌توانیم  $0 < \delta$  نهایی مورد نظر را پیدا کنیم. می‌خواهیم عبارت بالا از  $10^{-2}$  کوچکتر شود، پس اگر  $\delta$  را برابر یا کوچکتر از  $(2)(10^{-6})$  بگیریم داریم:

$$|a - a'| < 2 \times 10^{-2} : \quad \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right| < \frac{10^4}{2} |a - a'| < 10^{-2}$$



ضمناً این  $\delta$  از  $\delta_1$  مقدماتی، یعنی  $10^{-2}$ ، کوچکتر است؛ پس شرط اولیه دور ماندن از  $\circ$  نیز خود به خود برقرار می‌شود.

در دو مثال آخر سعی کردیم نشان دهیم تأمین دقت لازم در یک محاسبه ممکن است چندان آسان نباشد. گاهی اوقات درجه دقت در داده‌ها باید بسیار زیاد باشد تا دقت مورد نظر در نتیجه حاصل شود. به طور کلی این انتظار که بتوان با اعمال دقت کافی در ارائه داده‌ها، دقت مورد نظر در نتیجه مورد نظر را تأمین کرد "پایداری محاسبه" می‌نامیم. این ویژگی همیشه برقرار نیست. مثلاً تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۲ نمایش داده شده است. مقدار این تابع در  $x = 0$  برابر ۱ است. توجه کنید که هیچ  $\delta > 0$  وجود ندارد که  $|x - 0| < \delta$  لزوماً دقت مثلاً  $10^{-1}$  را تضمین کند زیرا که اگر  $x > 0$  و  $|x - 0| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x) - f(0)| = 1 - x$  و هر قدر کوچکتر شود،  $1 - x$  بزرگتر می‌شود.

در زیر تعریف دقیق پایداری محاسبه  $f$  در نقطه‌ای از قلمرو  $f$  را توصیف می‌کنیم. عنوان معمول‌تری برای "پایداری محاسبه"، اصطلاح "پیوستگی" است که در اینجا نیز به کار خواهیم برد؛ ولی کلمه پیوستگی بار شهودی زیادی دارد که گاهی موجب سوء تفاهم می‌شود. دانشجو باید همواره تعریف دقیق زیر و آنچه با استدلال صحیح از آن نتیجه می‌شود در نظر داشته باشد و بیش از آن را از مفهوم پیوستگی انتظار نداشته باشد.

(۲-۹) تعریف. تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده است و  $a \in S$ . می‌گوییم تابع  $f$  در  $a$  پیوسته است (یا تابع  $f$  در  $a$  از پایداری محاسبه برخوردار است) در صورتی که برای هر  $\epsilon > 0$  داده شده،  $\delta > 0$  متنظری وجود داشته باشد که برای هر نقطه  $x$  از دامنه  $f$  که  $|x - a| < \delta$  داشته باشیم

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

اگر تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  در هر نقطه دامنه خود پیوسته باشد، تابع  $f$  را پیوسته می‌نامیم. همان طور که

اشاره کردیم، نباید از کلمه پیوستگی انتظاراتی فرای تعریف داشت. در مثال اول زیر تابع فقط در یک نقطه از دامنه خود پیوسته است و در مثال دوم تابعی پیوسته داریم که اطلاق کلمه پیوسته برای آن دور از انتظار به نظر خواهد رسید.

### چند مثال

(۹-۳-۱) تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{گویا } x \\ 1-x & \text{ناگویا } x \end{cases}$$

نشان می‌دهیم این تابع فقط در نقطه  $x = \frac{1}{2}$  پیوسته است. از تمرین‌های بخش ۱ یادآوری می‌کنیم که در هر بازه‌ای باز از اعداد حقیقی، هم اعداد گویا و هم اعداد ناگویا یافت می‌شوند. بنابراین شکل تقریبی نمودار این تابع (شکل ۳) را می‌توان به صورت دو نقطه چین متراکم روی خطوط  $y = x$  و  $y = 1-x$  تصور کرد که در نقطه  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  تجمع می‌یابند. نشان می‌دهیم این تابع در  $x = \frac{1}{2}$  پیوسته است. برای  $e > 0$  داده شده، ادعا می‌کنیم  $\delta = e$  در نقطه  $\frac{1}{2}$  شرط تعریف را برآورده می‌کند. فرض کنید  $|x - \frac{1}{2}| < e$ . اگر  $x$  گویا شد که  $f(x) = x$  و  $|f(x) - f(\frac{1}{2})| < e$ . اگر  $x$  ناگویا باشد، داریم  $f(x) = 1-x$ ، پس  $f(x) - \frac{1}{2} = 1-x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - x$  پس مجدداً  $|f(x) - f(\frac{1}{2})| = |\frac{1}{2} - x| = |x - \frac{1}{2}| < e$ . حال نشان می‌دهیم برای  $a \neq \frac{1}{2}$ ، تابع در  $a$  پیوسته نیست.  $e$  را برابر  $|a - \frac{1}{2}| > 0$  می‌گیریم.  $\delta > 0$  هرچه باشد، نقطه‌ای  $x$  ارائه می‌کنیم که  $|x - a| < \delta$  ولی  $|f(x) - f(a)| \not< e$ . دو حالت در نظر می‌گیریم. اگر  $a$  گویا باشد داریم  $f(a) = a$  و نقطه ناگویای  $x$  را آنقدر نزدیک به  $a$  می‌گیریم که اولاً  $x$  در یک طرف  $\frac{1}{2}$  باشند، ثانیاً  $|x - a| < \delta$ . در این صورت  $f(x) = 1-x$  و:

$$|f(x) - f(a)| = |1-x-a| = |(\frac{1}{2}-x) + (\frac{1}{2}-a)|$$

حالت دیگر اینکه  $a$  ناگویا و  $f(a) = 1-a$ . در این حالت  $x$  را نقطه‌ای گویا آنقدر نزدیک به  $a$

می‌گیریم که  $x$  و  $a$  هر دو در یک طرف  $\frac{1}{4}$  باشند و  $|x - a| < \delta$ . در این صورت نیز داریم:

$$|f(x) - f(a)| = |x - \frac{1}{4} + a| = |(\frac{1}{4} - x) + (\frac{1}{4} - a)|$$

چون  $x$  و  $a$  در یک طرف  $\frac{1}{4}$  انتخاب شده‌اند،  $\frac{1}{4} - a$  و  $\frac{1}{4} - x$  هم علامتند، پس:

$$\begin{aligned} |(\frac{1}{4} - x) + (\frac{1}{4} - a)| &= |\frac{1}{4} - x| + |\frac{1}{4} - a| \\ &> |\frac{1}{4} - a| = e \end{aligned}$$

در نتیجه مستقل از اینکه  $\delta > 0$  چه باشد، برای چنین  $x$  که  $|x - a| < \delta$  داریم  $|f(x) - f(a)| > e$ ، یعنی  $f$  در  $a$  پیوسته نیست.

(۹-۳-۲) مجموعه اعداد صحیح،  $\mathbb{Z}$ ، زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  است. نشان می‌دهیم هر تابع  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته است. این ممکن است با شهود پیوستگی سازگار به نظر نرسد ولی ملاحظه خواهیم کرد که "گسستگی دامنه" در واقع پیوستگی تابع را سهل‌تر می‌سازد. نشان می‌دهیم  $f$  در هر نقطه دامنه،  $n \in \mathbb{Z}$  پیوسته است.  $e > 0$  هر چه باشد، می‌گیریم  $\delta = 1$ . حال اگر  $x$  عنصری از دامنه باشد که  $|x - n| < 1$ ، چون  $x$  عدد صحیح است، لزوماً داریم  $x = n$ ، پس  $|f(x) - f(n)| = 0 < e$  و شرط پیوستگی برقرار است. این مثال را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد که اگر قرار باشد داده‌ها همه عدد صحیح باشند، تنها داده "نزدیک" به یک عدد صحیح خود آن است، پس خطایی در محاسبه صورت نمی‌گیرد.

(۹-۳-۳) در مقابل مثال قبل فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی باشد که همه جا صفر است به استثنای در مقادیر صحیح  $n$  که در آن  $f(n) \neq 0$ . نشان می‌دهیم  $f$  در  $n$  پیوسته نیست.  $e > 0$  را کوچکتر از  $|f(n)|$  می‌گیریم. حال  $\delta > 0$  هر چه باشد، نقطه‌ای  $x$  وجود دارد که  $|x - n| < \delta$  و  $x$  عدد صحیح نیست. پس  $f(x) = 0$  و  $|f(x) - f(n)| = |f(n)| > e$  در  $n$  پیوسته نیست. به سادگی می‌توان نشان داد  $f$  در هر نقطه غیر عدد صحیح پیوسته است.

در مورد کارایی تعریف پیوستگی در رابطه با محاسبات عملی آن‌گونه که در آغاز این بخش مورد بحث قرار گرفت، ممکن است ایراد زیر به ذهن برسد. ما پیوستگی یا پایداری محاسبه تابع  $f$  در یک

نقطه  $a$  را تعریف کردیم. از آنجا که مقدار  $a$  ممکن است فقط به طور تقریبی معلوم باشد و تابع ممکن است در نقاط به دلخواه نزدیک به  $a$  پیوسته نباشد (مانند مثال ۹-۳-۱)، این تعریف چه ارزش عملی می‌تواند داشته باشد؟ در زیر نشان می‌دهیم که در واقع اگر  $f$  در  $a$  پیوسته باشد، برای هر دو مقدار  $a_1$  و  $a_2$  به اندازه کافی نزدیک به  $a$ ، فاصله  $|f(a_1) - f(a_2)|$  نیز کوچک است، و بالعکس برقراری این رابطه دال بر پیوستگی  $f$  در  $a$  است.

(۹-۴) گزاره. تابع  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده است و  $a \in S$ . در این صورت  $f$  در  $a$  پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر  $\epsilon > 0$ ، عددی  $\delta > 0$  وجود داشته باشد که برای هر دو نقطه  $a_1$  و  $a_2$  در دامنه  $f$  که در بازه  $[a - \delta, a + \delta]$  باشند، داشته باشیم  $|f(a_1) - f(a_2)| < \epsilon$ .

برهان. نخست توجه کنید که اگر ویژگی ذکر شده برقرار باشد، تابع در  $a$  پیوسته است زیرا که می‌توان یکی از  $a_1$  و  $a_2$  را خود نقطه  $a$  گرفت و دیگری را نقطه‌ای دلخواه  $x$  در  $[a - \delta, a + \delta]$ . پس  $|x - a| < \delta$  نتیجه می‌دهد  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ .

بالعکس فرض کنید  $f$  در  $a$  پیوسته است. اگر  $\epsilon > 0$  داده شده باشد، طبق پیوستگی  $f$  در  $a$ ، برای  $\frac{\epsilon}{2} > 0$ ، عددی  $\delta > 0$  وجود دارد که  $|x - a| < \delta$  نتیجه می‌دهد  $|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$ . حال اگر برای  $a_1$  و  $a_2$  در دامنه تابع داشته باشیم  $|a - a_1| < \delta$  و  $|a - a_2| < \delta$ ، نتیجه می‌شود که:

$$|f(a_1) - f(a_2)| \leq |f(a_1) - f(a)| + |f(a) - f(a_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

بدین ترتیب اگر داده‌ها همه نزدیک به یک نقطه پیوستگی تابع  $f$  باشند، می‌توان انتظار داشت که نتایج محاسبه با آنها نیز به هم نزدیک باشند.

نکته قابل ذکر دیگر اینکه همچنان که مثال‌های ۹-۱-۲ و ۹-۱-۳ در آغاز این بخش نشان دادند، برای  $\epsilon > 0$  داده شده،  $\delta > 0$  مناسب ممکن است علاوه بر وابستگی به  $\epsilon$ ، به نقطه‌ای که در آن پیوستگی مطرح است وابسته باشد. در مثال ۹-۱-۱، برای  $\epsilon > 0$  داده شده، یک  $\delta > 0$  واحد برای هر نقطه دامنه تعریف پیوستگی را برقرار می‌ساخت ولی در مثال‌های ۹-۱-۲ و ۹-۱-۳، مقدار  $\delta$

به اندازه نقطه  $a$  در دامنه نیز وابسته بود. در حالتی که برای  $\epsilon > 0$  داده شده، یک  $\delta > 0$  وجود داشته باشد که در سراسر دامنه کار کند، یعنی هرگاه  $|x_1 - x_2| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$  می‌گوییم تابع  $f$  در دامنه خود به طور یکنواخت پیوسته است. در حالت کلی، مانند مثال  $f(x) = x^2$ ، در مثال  $9-1-2$ ، یا مثال  $f(x) = \frac{1}{x}$  در مثال  $9-1-3$  با دامنه  $x > 0$ ، تابع در سراسر دامنه خود پیوسته است ولیکن از پیوستگی یکنواخت برخوردار نیست.

## تابع‌های پیوسته: مثال‌های ابتدایی

مفهوم پیوستگی یا پایداری محاسبه در بخش قبل معرفی شد. خواننده ممکن است شباهتی میان استدلال‌هایی که در بحث مثال‌های  $۹-۱-۲$  و  $۹-۱-۳$  به کار رفت و استدلال همگرایی حاصل ضرب و خارج قسمت دنباله‌های همگرا مشاهده کرده باشد. این شباهت تصادفی نیست. در واقع می‌توان پیوستگی را با ضابطه‌ای بر اساس همگرایی دنباله‌ها بیان کرد.

(۱-۱۰) گزاره. تابع  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده است که  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  است و  $a \in S$ . در این صورت  $f$  در  $a$  پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنباله  $(a_n)$  از نقاط  $S$  که  $a_n \rightarrow a$  داشته باشیم  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ .

دنباله همگرا به  $a$  را می‌توان سلسله‌ای از اندازه‌گیری‌های تدریجاً دقیق‌تر یک داده تلقی کرد و محتوای این گزاره این است که در صورت پیوستگی  $f$  در  $a$ ، اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر ورودی  $a$ ، نتیجه‌های دقیق‌تر خروجی را فراهم می‌آورند.

برهان. فرض کنید  $f$  در  $a$  پیوسته است و  $a_n \rightarrow a$ . می‌خواهیم ثابت کنیم  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ . پس برای  $\epsilon > 0$  داده شده، می‌خواهیم  $N$  را طوری تعیین کنیم که اگر  $n > N$ ، آنگاه  $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$ . بنابر پیوستگی  $f$  در  $a$ ، برای همین  $\epsilon$ ،  $\delta$  وجود دارد که اگر  $|x - a| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . حال چون  $a_n \rightarrow a$ ، برای این  $\delta$ ،  $N$  وجود دارد که اگر  $n > N$ ، آنگاه  $|a_n - a| < \delta$ . بنابراین این  $N$  شرط مورد نظر را ارضاء می‌کند.

بالعکس فرض کنید برای هر دنباله  $(a_n)$  که  $a_n \rightarrow a$  داریم  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ ، نشان می‌دهیم  $f$  در  $a$  پیوسته است. فرض کنید  $\epsilon > 0$  داده شده باشد. اگر  $f$  در  $a$  پیوسته نباشد هیچ  $\delta > 0$  نمی‌توان یافت که برای هر نقطه دامنه با  $|x - a| < \delta$  داشته باشیم  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . مثلاً برای  $\delta = 1$ ، نقطه‌ای  $x_1$  در دامنه وجود دارد که  $|x_1 - a| < 1$  و  $|f(x_1) - f(a)| \geq \epsilon$ . به همین ترتیب برای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، نقطه‌ای  $x_n$  در دامنه یافت می‌شود که  $|x_n - a| < \frac{1}{n}$  و  $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ . حال توجه کنید که دنباله به دست آمده از نقاط دامنه، یعنی  $(x_n)$  به  $a$  همگراست. اگر  $\rho > 0$  داده شده باشد، عدد  $N$  را طوری می‌گیریم که  $\frac{1}{N} < \rho$ ، پس اگر  $n > N$  داریم

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \rho$$

پس  $x_n \rightarrow a$ . طبق فرض باید داشته باشیم  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ، پس برای  $\epsilon > 0$  بالا، باید  $N$  وجود داشته باشد که  $n > N$  نتیجه دهد  $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ ، در حالی که داریم  $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$  برای هر  $n$ . این تناقض نشان می‌دهد که فرض ناپیوستگی  $f$  در  $a$  درست نیست.  $\square$

به کمک گزاره بالا می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت تابع‌های پیوسته را نتیجه گرفت.

(۱۰-۲) گزاره. فرض کنید تابع‌های  $f$  و  $g$  دارای دامنه مشترک تعریف  $S$  هستند،  $a \in S$ ، و هر دو تابع در نقطه  $a$  پیوسته‌اند. در این صورت:

الف) تابع  $f + g : S \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  تعریف می‌شود در  $x = a$  پیوسته است.

ب) تابع  $f \cdot g : S \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$  تعریف می‌شود در  $x = a$  پیوسته است.

ج) فرض کنید مضافاً  $g(a) \neq 0$  و  $S' = \{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$ . در این صورت تابع  $\frac{f}{g} : S' \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  تعریف می‌شود در  $x = a$  پیوسته است.

برهان. اثبات این احکام همه به سادگی از احکام مشابه برای دنباله‌ها، گزاره ۶-۴، و گزاره ۱۰-۱ نتیجه می‌شوند. به عنوان نمونه، اثبات (ج) را ارائه می‌کنیم. فرض کنید دنباله‌ای در  $S'$  است که  $x_n \rightarrow a$  باید نشان دهیم  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$ . بنابر پیوستگی  $f$  و  $g$  در نقطه  $a$  داریم  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  و  $x_n \rightarrow a$  و  $g(x_n) \rightarrow g(a)$  و  $g(a) \neq 0$ . طبق گزاره (۶-۴) نتیجه می‌شود که  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$ . □  
به کمک گزاره بالا می‌توان دسته بزرگی از تابع‌های پیوسته را شناسایی کرد. نشان می‌دهیم تابع‌های گویا، یعنی تابع‌هایی که مقدار آنها برابر نسبت دو چندجمله‌ای است:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} \quad (1)$$

در هر نقطه که مخرج صفر نباشد پیوسته‌اند.

گام اول. هر تابع ثابت پیوسته است. این واضح است زیرا که برای هر  $\epsilon > 0$   $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$  مستقل از  $x$ .

گام دوم. "تابع همانی"، یعنی تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x) = x$ ، همه جا پیوسته است. برای  $a \in \mathbb{R}$  و  $\epsilon > 0$  داده شده، با گرفتن  $\delta = \epsilon$ ،  $|x - a| < \delta$  نتیجه می‌دهد  $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \epsilon$ .

گام سوم. هر تابع تک جمله‌ای،  $f(x) = cx^k$  پیوسته است، زیرا که حاصل ضرب متوالی تابع‌های با مقدار  $c, x, \dots, x$  است.

گام چهارم. هر تابع چندجمله‌ای  $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_px^p$  پیوسته است زیرا که مجموع تابع‌های پیوسته گام سوم می‌باشد.

گام پنجم. در نقاطی که مخرج (۱) صفر نباشد. طبق قسمت (ج) گزاره (۱۰-۲) خارج قسمت دو تابع از نوع گام چهارم پیوسته است.

بدین ترتیب با اتکاء به گزاره ۱۰-۲ می‌توان با استفاده از عملیات جبری از تابع‌های پیوسته داده شده تابع‌های پیوسته جدید ساخت. حربه دیگری برای تولید تابع‌های پیوسته، استفاده از ترکیب



تابع های پیوسته است:

(۱۰-۳) گزاره. فرض کنید  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g: T \rightarrow \mathbb{R}$  تابع های داده شده اند،  $f(a) = b, a \in S$  در  $T$  قرار دارد،  $f$  در  $a$  پیوسته است و  $g$  در  $b$  پیوسته است. در این صورت تابع  $g \circ f$  در  $a$  پیوسته است.

برهان. قبل از ارائه اثبات لازم است یادآوری کنیم که دامنه تعریف  $g \circ f$  زیرمجموعه زیر از  $S$  است:

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

بدین ترتیب  $a$  در  $S'$  است و  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  معنی دارد. برای  $e > 0$  داده شده،  $\delta > 0$  را جستجو می کنیم به طوری که اگر  $x \in S'$  و  $|x - a| < \delta$ ، آنگاه  $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < e$ .  
 نخست چون  $g$  در نقطه  $b = f(a)$  پیوسته است،  $\delta' > 0$  وجود دارد که اگر  $y \in T$  و  $|y - b| < \delta'$ ، آنگاه  $|g(y) - g(b)| < e$ . حال چون  $f$  در  $a$  پیوسته است و  $b = f(a)$ ، برای  $\delta' > 0$  بالا،  $\delta > 0$  متناظری وجود دارد که اگر  $x \in S$  و  $|x - a| < \delta$  آنگاه  $|f(x) - f(a)| < \delta'$ . بالاخص چون  $S' \subset S$ ، همین حکم برای عناصر  $x$  از  $S'$  که  $|x - a| < \delta$  نیز برقرار است. بنابراین برای  $x \in S'$  که  $|x - a| < \delta$  داریم  $|f(x) - f(a)| < \delta'$  و طبق انتخاب  $\delta'$ ، آنگاه  $|g(f(x)) - g(f(a))| < e$  و پیوستگی  $g \circ f$  در  $x = a$  به اثبات می رسد.  $\square$

در اینجا ضمن یادآوری توابع مثلثاتی، خواص پیوستگی آنها را بررسی می کنیم. برای بیان "اندازه زاویه" به طریق زیر عمل می کنیم. دایره واحد  $x^2 + y^2 = 1$  را در نظر بگیرید. همه زوایا به صورت قطبی با رأس در مبدأ مختصات و نیم خط مثبت محور  $x$  به عنوان ضلع آغازی در نظر گرفته می شوند. اندازه زاویه همواره به "رادیان" است، یعنی نسبت طول کمان مقابل به زاویه روی دایره، به شعاع دایره (که در اینجا واحد فرض شده است). از آنجا که این اندازه به صورت نسبت دو کمیت همجنس (هر دو طول) است، اندازه زاویه به رادیان یک "عدد" حقیقی است. جهت مثلثاتی را جهت مثبت و جهت عقربه ساعت را منفی قرارداد می کنیم. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی یک زاویه منظور می شود که به معنای طی کردن مسافتی روی محیط دایره (در جهت مثبت یا منفی، بسته به این که عدد داده شده مثبت یا منفی باشد) برحسب رادیان به اندازه آن عدد است. بدین ترتیب برای هر عدد حقیقی  $\theta$ ، نقطه

مشخصی روی دایره واحد به دست می آید. مختصه  $x$  این نقطه را  $\cos \theta$  و مختصه  $y$  این نقطه را  $\sin \theta$  می نامیم. توابع مثلثاتی دیگر به صورت  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ،  $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ ،  $\sec = \frac{1}{\cos}$  و  $\csc = \frac{1}{\sin}$  تعریف می شوند که البته دامنه تعریف این چهار تابع حقیقی همه  $\mathbb{R}$  نیست، بلکه مجموعه نقاطی از  $\mathbb{R}$  است که در آن مخرج عبارت تعریف کننده صفر نباشد. اتحادهای مربوط توابع مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا مانند  $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$  همان طور که در بررسی اعداد مختلط دیدیم، همه از ضرب اعداد مختلط نتیجه می شوند و در اینجا دانسته فرض می شوند.

(۴-۱۰) گزاره. هر شش تابع مثلثاتی در دامنه تعریف خود پیوسته اند.

برهان. کافی است پیوستگی  $\sin$  و  $\cos$  ثابت شود زیرا سایر توابع از ضرب و تقسیم این دو به دست می آیند و هر جا که مخرج صفر نباشد، طبق ۱۰-۲ پیوسته خواهند شد. به عنوان نمونه پیوستگی  $\cos$  را ثابت می کنیم، پیوستگی  $\sin$  مشابه است و نیز می توان با توجه به  $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ، پیوستگی آن را به عنوان ترکیب دو تابع پیوسته  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$  و  $\cos$  نتیجه گرفت. نخست نشان می دهیم کسینوس در  $0$  پیوسته است. چون  $\cos 0 = 1$ ، باید ثابت کنیم که برای هر  $e > 0$  داده شده،  $\delta$  وجود دارد که هرگاه

$$|\theta - 0| = |\theta| < \delta, \text{ آنگاه } |\cos \theta - 1| < e. \text{ برای } |\theta| \text{ کوچک و مثبت طول } OH \text{ برابر } \cos \theta \text{ است}$$

و برای  $|\theta|$  کوچک منفی طول  $OK$  برابر  $\cos \theta$  می باشد. بنابراین  $|\cos \theta - 1| = 1 - \cos \theta$  برابر طول  $HT$  (یا  $KT$ ) در حالت  $\theta$  مثبت (به ترتیب در حالت  $\theta$  منفی) می باشد. در مثلث قائم الزاویه  $AHT$  (به ترتیب  $BKT$ ) طول ضلع مجاور به زاویه قائمه از طول وتر کوچکتر است، یعنی  $0 \leq 1 - \cos \theta \leq AT$  (به ترتیب  $0 \leq 1 - \cos \theta \leq BT$ ). از طرفی دیگر طول وتر  $AT$  (به ترتیب  $BK$ ) از طول کمان  $AT$  (به ترتیب  $BT$ ) کوچکتر است؛ پس

$$0 \leq 1 - \cos \theta \leq |\theta| \quad (2)$$

حال اگر برای  $e > 0$  داده شده،  $\delta$  را برابر  $e$  بگیریم، از  $|\theta - 0| < \delta$  نتیجه شود که  $|\cos \theta - 1| < e$  و پیوستگی  $\cos$  در  $\theta = 0$  به اثبات می رسد. به همین ترتیب پیوستگی  $\sin$  در  $\theta = 0$  را می توان ثابت کرد. در واقع توجه کنید که  $|\sin \theta|$  برابر طول  $AH$  یا  $BK$  است که هر یک به دلیل مشابه فوق از  $|\theta|$  کوچکتر

است، بنابراین

$$\circ \leq |\sin \theta| \leq |\theta| \quad (۳)$$

یا  $|\sin \theta - \sin \circ| \leq |\theta - \circ|$  و مجدداً با گرفتن  $\delta = e$  می توان پیوستگی  $\sin$  در  $\theta = \circ$  را نتیجه گرفت. حال نشان می دهیم  $\cos$  در هر نقطه  $\theta_0$  پیوسته است. برای  $e > \circ$  داده شده، می خواهیم  $\delta > \circ$  پیدا کنیم که  $\delta < |h|$  نتیجه دهد  $|\cos(\theta_0 + h) - \cos \theta_0| < e$ . داریم

$$\begin{aligned} |\cos(\theta_0 + h) - \cos \theta_0| &= |\cos \theta_0 \cos h - \sin \theta_0 \sin h - \cos \theta_0| \\ &\leq |\cos \theta_0 (\cos h - 1)| + |\sin \theta_0| |\sin h| \\ &\leq |\cos h - 1| + |\sin h| \quad (|\cos \theta_0| \leq 1, |\sin \theta_0| \leq 1 \text{ چون}) \\ &\leq 2|h| \quad (\text{طبق (۲) و (۳)}) \end{aligned}$$

بنابراین با گرفتن  $\delta = \frac{e}{2}$  حکم به اثبات می رسد. □

بدین ترتیب اکنون با توجه به گزاره های  $10-2$ ،  $10-3$  و  $10-4$ ، می توان در مورد پیوستگی

انواع آمیزه های توابع گویا و توابع مثلثاتی بحث کرد.

## خواص تابع‌های پیوسته (۱)

در دو بخش قبل کوشش کردیم بر مفهوم پیوستگی به عنوان "پایداری محاسبه" تأکید کنیم و خواننده را از اینکه پیوستگی را نوعی اتصال و یکپارچگی نمودار تابع تلقی کند بر حذر کنیم. در واقع اگر دامنه یک تابع پیوسته یک بازه باشد، نمودار تابع برخی خواص "اتصال و یکپارچگی" را خواهد داشت. بعضی احکام این بخش در تأیید این ادعا هستند.

(۱-۱۱) قضیه مقدار بینی. فرض کنید  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته باشد،  $f(a) = A$  و  $f(b) = B$ . در این صورت برای هر عدد حقیقی  $C$  بین  $A$  و  $B$ ، نقطه‌ای  $c$  در  $[a, b]$  وجود دارد که  $f(c) = C$ .

اگر نمودار  $f$  را یک ریمان فرض کنیم که بین نقطه  $(a, A)$  و  $(b, B)$  کشیده شده است، طبق حکم این قضیه، ریمان برای گذر از ارتفاع  $A$  به ارتفاع  $B$  باید از هر ارتفاع بینابینی  $C$  نیز گذر کند که تأییدی بر به هم بستگی و یکپارچگی ریمان است. در شکل ۱، نمودار تابع سه بار، به ازای مقادیر  $c_1, c_2$  و  $c_3$  در  $[a, b]$ ، از ارتفاع  $C$  عبور می‌کند.

طبعاً برای اثبات این قضیه فقط می‌توان از تعریف تابع پیوسته و احکام دیگری که از این تعریف نتیجه شده باشند استفاده کرد. نخست حالتی خاص از این قضیه را به صورت زیر به اثبات می‌رسانیم، سپس نشان می‌دهیم حالت کلی به سادگی از این حالت خاص نتیجه می‌شود:

(۱-۲) (حالت خاص) فرض کنید  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد که  $g(0) < 0$  و  $g(1) > 0$ . در این صورت نقطه‌ای  $r$  در  $[0, 1]$  وجود دارد که  $g(r) = 0$ .

برهان. نقاط بازه  $[0, 1]$  در مبنای ۲ می نویسیم. بدین ترتیب هر عدد نمایشی به شکل  $0/n_1 n_2 n_3 \dots$  دارد که در آن  $n_i$  برابر صفر یا یک است. بالاخص نقطه ۱ به صورت  $0/1111 \dots$  نمایش داده می شود. ما در جستجوی نقطه ای

$$r = 0/r_1 r_2 r_3 \dots$$

هستیم که  $g(r) = 0$ . ارقام پس از ممیز چنین عددی را متوالیاً محاسبه خواهیم کرد.  $g(\frac{1}{4})$  را در نظر می گیریم. اگر  $g(\frac{1}{4}) = 0$ ، عددی با خاصیت مطلوب در بازه  $[0, 1]$  پیدا شده است و  $\dots = 0/1000 \dots$  (طرف راست به مبنای ۲) جواب مورد نظر است. اگر  $g(\frac{1}{4}) \neq 0$ ، یکی از دو حالت  $g(\frac{1}{4}) > 0$  یا  $g(\frac{1}{4}) < 0$  برقرار است. قرار می دهیم:

$$r_1 = \begin{cases} 0 & \text{اگر } g(\frac{1}{4}) > 0 \\ 1 & \text{اگر } g(\frac{1}{4}) < 0 \end{cases}$$

اگر  $g(\frac{1}{4}) > 0$  بازه  $[0, \frac{1}{4}]$  را  $I_1$  می نامیم و از این پس جستجو را در این بازه ادامه می دهیم زیرا که همانند بازه اولیه  $[0, 1]$ ، تابع در انتهای چپ این بازه منفی و در انتهای راست مثبت است. چون نمایش نقاط بازه  $[0, \frac{1}{4}]$  در مبنای ۲ با رقم ۰ شروع می شود قرار دادیم  $r_1 = 0$ . همین طور اگر  $g(\frac{1}{4}) < 0$ ، بازه  $[\frac{1}{4}, 1]$  را  $I_1$  خوانده و جستجو برای  $r$  را در این بازه ادامه می دهیم که  $g$  در انتهای چپ آن منفی و در انتهای راست آن مثبت است. چون نمایش نقاط این بازه در مبنای ۲ با رقم ۱ شروع می شود قرار دادیم  $r_1 = 1$ . در هر صورت حال به بازه  $I_1$  توجه می کنیم و مجدداً این بازه را به دو زیربازه بسته چپ و راست تجزیه می کنیم. اگر  $m_1$  نقطه میانی (مکان تجزیه) باشد به علامت  $g(m_1)$  نگاه می کنیم. اگر  $g(m_1) = 0$ ، ویژگی مورد نظر را دارد و کار تمام است، در غیر این صورت  $g(m_1)$  باید مثبت یا منفی باشد. اگر  $g(m_1) > 0$  آنگاه نیمه چپ  $I_1$  دارای این ویژگی است که در انتهای چپ آن تابع  $g$  منفی و در انتهای راست آن  $g$  مثبت است. از این پس جستجو برای  $r$  را در این بازه پیگیری می کنیم و قرار می دهیم  $r_2 = 0$  زیرا در نمایش مبنای ۲ نیمه چپ  $I_1$  رقم دوم پس از ممیز ۰ است. بالعکس اگر  $g(m_1) < 0$ ، نیمه راست  $I_1$  دارای این ویژگی است که در دو انتهای چپ و راست تابع  $g$  به ترتیب منفی و مثبت است و این زیربازه را برای ادامه جستجو انتخاب می کنیم.

در این صورت طبعاً قرار می‌دهیم  $r_2 = 1$ . در هر صورت بازه انتخاب شده را به  $I_2$  نمایش می‌دهیم. حال مجدداً علامت نقطه وسط  $I_2$ ،  $m_2$  را در نظر می‌گیریم و عمل بالا را تکرار می‌کنیم. به طور کلی بسته به این که علامت  $g(m_k)$  مثبت یا منفی باشد رقم  $k$ -ام پس از ممیز را به ترتیب  $0$  یا  $1$  می‌گیریم، و اگر  $g(m_k) = 0$  عدد مورد نظر به صورت  $r = 0/r_1 \dots r_k$  به دست آمده است. وقتی هیچ  $g(m_k)$  صفر نشود، هر رقم پس از اعشار محاسبه می‌شود و عددی  $r = 0/r_1 r_2 r_3 \dots$  به دست می‌آید. ادعا می‌کنیم  $g(r) = 0$ . مبنای شهودی این ادعا این است که دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو در نظر گرفته‌ایم  $0 \subset I_2 \subset I_1 \subset [0, 1]$  که طول آنها به ترتیب  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$  است و تابع  $g$  در انتهای چپ هر یک از این بازه‌ها منفی و در انتهای راست آن مثبت است. عدد  $r$  در همه این بازه‌ها قرار دارد، پس دنباله‌ای از چپ به آن میل می‌کند که در همه نقاط دنباله تابع  $g$  منفی است و دنباله از طرف راست به آن میل می‌کند که در تمام نقاط آن مثبت است. از پیوستگی تابع  $g$  نتیجه خواهیم گرفت که  $g(r) = 0$ .

به روش برهان خلف عمل می‌کنیم. نشان می‌دهیم  $g(r) \neq 0$  به تناقض منجر می‌شود. اگر  $g(r) \neq 0$ ،  $g(r)$  باید مثبت یا منفی باشد. حالت  $g(r) > 0$  را در نظر می‌گیریم، مورد  $g(r) < 0$  کاملاً مشابه است. اگر  $g(r) > 0$ ، نشان می‌دهیم بازه‌ای  $[r - \delta, r + \delta]$  حول  $r$  وجود دارد که برای هر نقطه  $x$  از  $[0, 1]$  که در این بازه قرار گیرد داریم  $g(x) > 0$ . دلیل، پیوستگی  $g$  در  $r$  است (و این در واقع تنها استفاده ما از پیوستگی در اثبات است)، زیرا اگر  $e > 0$  را کوچکتر یا مساوی  $g(r)$  بگیریم، طبق تعریف پیوستگی  $0 < \delta$  وجود دارد که برای هر عنصر دامنه  $g$  (یعنی  $[0, 1]$ ) که در فاصله کوچکتر از  $\delta$  از  $r$  قرار گیرد داریم:

$$-e < g(r) - g(x) < e$$

چون  $0 < e \leq g(r)$ ، از نامساوی طرف راست نتیجه می‌گیریم که  $g(x) > 0$ . حال توجه کنید که طول بازه  $I_n$  برابر  $\frac{1}{2^n}$  است و اگر  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد  $\frac{1}{2^n} < \delta$ . از آنجا که  $r$  عضو  $I_n$  هست و طول  $I_n$  کوچکتر از  $\delta$ ، نتیجه می‌شود که  $I_n$  به تمامی در  $[r - \delta, r + \delta]$  قرار دارد. بنابراین در هر نقطه  $I_n$ ،  $g$  باید مثبت باشد، در حالی که در انتهای چپ  $I_n$  تابع  $g$  همواره منفی بود. این تناقض نشان می‌دهد که  $g(r) > 0$  ممکن نیست. مشابهاً  $g(r) < 0$  نیز منجر به تناقض می‌شود. پس لزوماً  $g(r) = 0$ .  $\square$

اکنون نشان می‌دهیم که حالت کلی قضیه ۱-۱۱ به سادگی از ۱۱-۲ نتیجه می‌شود. فرض کنید در صورت ۱-۱۱ داریم  $A < B$ . حالت  $A > B$  را می‌توان با در نظر گرفتن تابع  $f -$  نتیجه گرفت. پس  $A < C < B$ . ایده اثبات این است که از یک سو با کم کردن مقدار ثابت  $C$  از  $f(x)$  تابعی پیوسته به دست می‌آوریم که در انتهای چپ منفی و در انتهای راست مثبت است، و از سویی دیگر با تغییر مقیاس و انتقال  $[a, b]$  به  $[0, 1]$ ؛ مسأله را به ۱۱-۲ تبدیل می‌کنیم. برای این کار، تابع  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f((1-t)a + tb) - C$$

توجه کنید که وقتی متغیر  $t$  بازه  $[0, 1]$  را طی می‌کند، عبارت درجه یک  $(1-t)a + tb$  بازه  $[a, b]$  را می‌پیماید.

تابع  $\phi$  که به صورت  $\phi(t) = (1-t)a + tb$  تعریف می‌شود پیوسته است چون از درجه ۱ نسبت به  $t$  است، داریم  $g(t) = f(\phi(t)) - C$ . چون ترکیب تابع‌های پیوسته، پیوسته است  $f \circ \phi$  پیوسته است و افزودن تابع ثابت  $-C$  نیز پیوستگی را حفظ می‌کند، پس  $g$  پیوسته است. ولی  $g(0) = A - C < 0$  و  $g(1) = B - C > 0$  پس طبق ۱۱-۲، نقطه‌ای  $r$  در  $[0, 1]$  وجود دارد که  $g(r) = 0$  یعنی

$$f((1-r)a + rb) - C = 0$$

حال  $c = (1-r)a + rb$  نقطه متناظر  $r$  در  $[a, b]$  است و داریم  $f(c) = C$  چنان که حکم بود. تعدادی از احکام مربوط به تابع‌های پیوسته که حدس صحت آنها مبتنی بر شهود اتصال نمودار تابع پیوسته است از قضیه مقدار بینی نتیجه می‌شوند. در باقیمانده این بخش دو نمونه از این احکام را بررسی خواهیم کرد. یک مورد استفاده ساده این قضیه در اثبات وجود ریشه برای معادلات است.

مثال ۱. نشان دهید معادله  $\sin x - x^2 + x + 3 = 0$  دارای دست کم دو ریشه در  $[-\pi, \pi]$  است. عبارت  $f(x) = \sin x - x^2 + x + 3$  یک تابع پیوسته تعریف می‌کند زیرا که مجموعی از تابع‌های پیوسته است. می‌خواهیم نشان دهیم دست کم دو  $x$  متمایز در  $[-\pi, \pi]$  وجود دارند که  $f(x) = 0$  توجه

کنید که:

$$f(-\pi) = -\pi^2 - \pi + 3 < 0$$

$$f(\pi) = -\pi^2 + \pi + 3 < 0$$

ولی  $f(0) = 3 > 0$ . بنابراین قضیه مقدار بینی  $f(x) = 0$  هم در  $[-\pi, 0]$  و هم در  $[0, \pi]$  ریشه دارد، که بنابراین دو ریشه متمایزاند.

مثال ۲. فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  یک تابع پیوسته است، یعنی در واقع می توان  $f$  را یک تابع پیوسته از  $[a, b]$  به  $\mathbb{R}$  تصور کرد که برای هر  $x$  در دامنه،  $f(x) \in [a, b]$ . نشان می دهیم نقطه ای  $x_0$  در  $[a, b]$  وجود دارد که  $f(x_0) = x_0$ . چنین نقطه  $x_0$  را یک نقطه ثابت برای تابع  $f$  می نامند. برای این کار، تابع کمکی  $\phi(x) = x - f(x)$  را در نظر بگیرید،  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . نیز پیوسته است زیرا که تفاضل دو تابع پیوسته می باشد. چون  $f(a) \in [a, b]$  داریم  $f(a) \geq a$  پس  $\phi(a) \leq 0$ . همچنین  $f(b) \in [a, b]$  نتیجه می دهد  $f(b) \leq b$  پس  $\phi(b) \geq 0$ . اگر داشته باشیم  $\phi(a) = 0$  یا  $\phi(b) = 0$  داریم  $f(a) = a$  یا به ترتیب  $f(b) = b$ ، و وجود نقطه ثابت به دست آمده است، پس فرض کنید  $\phi(a) < 0$  و  $\phi(b) > 0$ . از قضیه مقدار بینی نتیجه می گیریم نقطه ای  $c$  در  $[a, b]$  هست که  $\phi(c) = 0$  یا  $f(c) = c$  و حکم به اثبات می رسد. نمایش هندسی این مطلب را می توان به صورت زیر به خاطر سپرد. چون برای هر  $x$  در  $[a, b]$ ،  $f(x)$  نیز در  $[a, b]$  است، نمودار  $f$  در مربع  $[a, b] \times [a, b]$  محصور است. خط  $y = x$  از گوشه چپ پایین این مربع به گوشه راست بالا رسم شده است. نمودار  $f$  ضلع چپ مربع را به ضلع راست مربع وصل می کند. حکم مسأله این است که این نمودار لزوماً خط  $y = x$  را قطع می کند (شکل ۳).

اکنون به تشریح دو کاربرد قضیه مقدار بینی که قبلاً اشاره کردیم می پردازیم.

(۱۱-۳) گزاره. فرض کنید  $I$  یک بازه است و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته و یک به یک. در این صورت  $f$  اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.



برهان. فرض کنید  $x$  یک نقطه درونی  $I$  است. در این صورت ادعا می‌کنیم یک و تنها یکی از دو وضعیت زیر برقرار است:

(الف) برای هر  $x > x_0$  داریم  $f(x) > f(x_0)$  و برای هر  $x < x_0$  داریم  $f(x) < f(x_0)$ .

(ب) برای هر  $x > x_0$  داریم  $f(x) < f(x_0)$  و برای هر  $x < x_0$  داریم  $f(x) > f(x_0)$ .

برای اثبات فرض کنید  $x_1 > x_0$ . از آنجا که  $f$  یک به یک است یا  $f(x_1) > f(x_0)$  یا  $f(x_1) < f(x_0)$ . نخست فرض کنید  $f(x_1) > f(x_0)$ . نشان می‌دهیم وضعیت (الف) برقرار است. اگر  $x_2 < x_0$  باید داشته باشیم  $f(x_2) < f(x_0)$  زیرا اگر  $f(x_2) > f(x_0)$  و  $f(x_1) > f(x_0)$ ، از یک به یک بودن  $f$  نتیجه می‌گیریم که  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . حال هر یک از  $f(x_1)$  و  $f(x_2)$  که بزرگتر باشد، مثلاً  $f(x_1)$ ، تابع پیوسته  $f$  باید در گذر از  $f(x_0)$  به  $f(x_2)$  مقدار  $f(x_1)$  را یک بار دیگر در بازه بین  $x_0$  و  $x_2$  اتخاذ کند که خلاف یک به یک بودن  $f$  است. حال فرض کنید  $x_2 > x_0$ . نشان می‌دهیم  $f(x_2) > f(x_0)$ . اگر  $f(x_2) < f(x_0)$ ، آنگاه داریم  $f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$ ، پس تابع پیوسته  $f$  باید در گذر از مقدار  $f(x_2)$  به  $f(x_1)$  دست کم یک بار مقدار  $f(x_0)$  را بین  $x_1$  و  $x_2$  اتخاذ کند خلاف یک به یک بودن  $f$  است زیرا که  $x_0$  در یک طرف  $x_1$  و  $x_2$  قرار دارد. به همین ترتیب اگر برای یک نقطه  $x_1 > x_0$  داشته باشیم  $f(x_1) < f(x_0)$ ، می‌توانیم استدلال کنیم که وضعیت (ب) برقرار است.

برای ادامه اثبات، نقطه دلخواه درونی  $x_0$  از  $I$  را در نظر می‌گیریم. نسبت به  $x_0$  یکی از دو شرط (الف) یا (ب) بالا برقرار است. در حالت (الف) نشان می‌دهیم  $f$  لزوماً صعودی است و در حالت (ب) لزوماً نزولی. مثلاً فرض کنید وضعیت (ب) برقرار است. نشان می‌دهیم  $f$  نزولی است. دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  در  $I$  در نظر بگیرید که  $x_1 < x_2$ . باید ثابت کنیم  $f(x_1) > f(x_2)$ . وضعیت نسبی سه نقطه  $x_0$ ،  $x_1$  و  $x_2$  روی  $I$  به یکی از سه صورت زیر است که در هر مورد استدلال لازم را ارائه می‌کنیم:

$x_0 < x_1 < x_2$  طبق (ب) داریم  $f(x_1) < f(x_0)$  و  $f(x_2) < f(x_0)$ . حکم نخست برهان (برقرار بودن (الف) یا (ب)) برای هر نقطه درونی درست است، پس اگر این حکم را برای نقطه درونی  $x_1$

به کار ببریم، چون  $f(x_0) > f(x_1)$ ، نتیجه می شود که  $f(x_2) < f(x_1)$ ، همان گونه که می خواستیم.

$x_1 < x_0 < x_2$  چون در وضعیت (ب) برای  $x_0$  هستیم، داریم  $f(x_1) > f(x_0)$  و  $f(x_2) < f(x_0)$ ، پس  $f(x_2) < f(x_1)$ .

$x_1 < x_2 < x_0$  در اینجا حکم نخست برهان را برای نقطه درونی  $x_2$  به کار می گیریم. چون طبق (ب)  $f(x_2) > f(x_0)$ ، نتیجه می شود که  $f(x_1) > f(x_2)$  و حکم به اثبات می رسد.

استدلال در حالتی که (الف) برای  $x_0$  برقرار باشد، کاملاً مشابه است و به خواننده واگذار می شود. □  
 کاربرد مهم دیگر قضیه مقدار بینی که ارائه می کنیم پیوستگی وارون یک تابع پیوسته است. اگر  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد، قرار می دهیم:

$$T = \{f(x) \mid x \in S\}$$

$T$  را مجموعه مقادیر  $T$  می نامند. اگر  $f$  یک به یک باشد، به ازای هر  $y \in T$  یک و تنها یک  $x$  در  $S$  وجود دارد که  $f(x) = y$ . به این ترتیب تابعی  $f^{-1}: T \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف می شود که  $f^{-1}(y) = x$ .  
 را وارون یا معکوس (ترکیبی)  $f$  می نامند. دو حکم زیر برقرارند:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad : \text{ برای هر } x \text{ در } S$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad : \text{ برای هر } y \text{ در } T$$

لازم به ذکر است که چون  $f^{-1}$  نقش  $x$  و  $y$  نسبت به  $f$  را تعویض می کند، نمودار  $f^{-1}$  در واقع قرینه نمودار  $f$  نسبت به خط  $y = x$  است (شکل ۴).

(۱۱-۴) گزاره. فرض کنید  $I$  یک بازه است و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع یک به یک و پیوسته. در این صورت  $f^{-1}$  نیز پیوسته است.

برهان. طبق گزاره ۱۱-۳ تابع  $f$  صعودی یا نزولی است. حکم را در حالتی که  $f$  صعودی است ثابت می کنیم و حالت  $f$  نزولی را که مشابه است به خواننده واگذار می کنیم. نخست توجه کنید که مجموعه

تصویر، یعنی:

$$J = \{f(x) \mid x \in I\}$$

یک بازه است، بدین معنی که اگر  $y_1$  و  $y_2$  دو نقطه  $J$  باشند که  $y_1 < y_2$ ، آنگاه  $[y_1, y_2]$  به تمامی در  $J$  قرار دارد. این مطلب را به این صورت توجیه می‌کنیم. چون  $y_1$  و  $y_2$  در  $J$  هستند،  $x_1$  و  $x_2$  یگانه در  $I$  وجود دارند که  $y_1 = f(x_1)$  و  $y_2 = f(x_2)$ . چون  $f$  صعودی است،  $x_1 < x_2$ . حال اگر نقطه‌ای  $y$  در  $[y_1, y_2]$  باشد، چون  $f$  روی  $[x_1, x_2]$  پیوسته است، طبق قضیه مقدار بینی باید عددی  $x$  در  $[x_1, x_2]$  یافت شود که  $f(x) = y$ ، پس  $y \in J$ .

برای اثبات پیوستگی  $f^{-1}$ ، طبق گزاره ۱-۱۰ بخش پیشین کافی است نشان دهیم که برای هر دنباله  $(y_n)$  از نقاط  $J$  (دامنه  $f^{-1}$ ) که  $y_n \rightarrow y$ ،  $y \in J$  داریم  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$ . اول فرض کنید  $y$  یک نقطه درونی  $J$  است و  $y = f(x)$ . ادعا می‌کنیم که در این صورت  $x$  نیز یک نقطه درونی  $I$  است. برای این منظور، چون  $y$  نقطه درونی است،  $\delta > 0$  وجود دارد که  $[y - \delta, y + \delta]$  به تمامی در  $J$  قرار دارد. پس  $y - \delta = f(x_1)$  و  $y + \delta = f(x_2)$ ، و از آنجا که  $f$  صعودی است  $x_1 < x < x_2$ . پس بازه  $[x_1, x_2]$  حول  $x$  به تمامی در  $I$  قرار دارد و  $x$  یک نقطه درونی است. اکنون به اثبات  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$  می‌پردازیم. قرار می‌دهیم  $f^{-1}(y_n) = x_n$ ، یا معادلاً  $f(x_n) = y_n$ . دو نقطه  $x + \rho$  و  $x - \rho$ ،  $\rho > 0$ ، حول  $x$  در  $I$  در نظر بگیریم. باید ثابت کنیم  $N$  به قسمی وجود دارد که برای  $n > N$  داریم  $x_n \in [x - \rho, x + \rho]$ . قرار دهید  $\underline{y} = f(x - \rho)$  و  $\bar{y} = f(x + \rho)$ . چون  $y_n \rightarrow y$ ،  $N$  وجود دارد که برای  $n > N$  داریم  $y_n \in [\underline{y}, \bar{y}]$ . نتیجه این که برای  $n > N$  داریم  $x_n \in [x - \rho, x + \rho]$  و حکم به اثبات می‌رسد. وقتی  $y$  یک نقطه انتهایی  $J$  باشد، و این تنها در صورتی است  $J$  از یک طرف بسته باشد،  $I$  نیز در طرف متناظر بسته است (به علت صعودی بودن  $f$ ) و استدلال بالا با استفاده از بازه‌هایی که یک انتهای آنها بسته است تکرار می‌شود.  $\square$

مثال ۱. فرض کنید  $\mathbb{R}^+$  مجموعه اعداد حقیقی غیرمنفی است. تابع  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x) = x^n$  تعریف می‌کنیم که در آن  $n \geq 1$  یک عدد صحیح است. این تابع یک به یک و پیوسته و صعودی است؛ بنابراین وارون آن نیز باید پیوسته باشد. از آنجا که مجموعه تصویر نیز برابر  $\mathbb{R}^+$  است،

تابع وارون به دامنه  $\mathbb{R}^+$  است. این تابع عبارت است از  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ .

مثال ۲ (وارون توابع مثلثاتی) شش تابع مثلثاتی که تعریف کرده‌ایم همه تناوبی هستند؛ پس یک به یک نیستند و وارون به مفهوم معمول ندارند. ولی اگر دامنه هر یک از این توابع را طوری محدود کنیم که در آن دامنه، تابع یک به یک باشد، می‌توان از وارون تابع مثلثاتی صحبت کرد. برای این کار انتخاب‌های متنوعی به عنوان دامنه هر یک از تابع‌ها وجود دارد ولی قراردادهای زیر، قراردادهای متداول‌اند:

الف) برای سینوس، دامنه را به  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  محدود می‌کنیم که در این بازه سینوس همه مقادیر  $[-1, 1]$  را به طور یک به یک اتخاذ می‌کند. بنابراین  $\sin^{-1}$  روی  $[-1, 1]$  تعریف می‌شود و مقادیر آن در  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  منظور می‌شوند.  $\sin^{-1}$  را گاهی به  $Arcsin$  (با "A" بزرگ) نمایش می‌دهند.

ب) برای کسینوس، دامنه به  $[0, \pi]$  محدود می‌شود که کسینوس این بازه را به طور یک به یک بر  $[-1, 1]$  می‌نگارد. بدین ترتیب  $\cos^{-1}$  روی  $[-1, 1]$  تعریف شده و در  $[0, \pi]$  مقدار می‌گیرد.  $\cos^{-1}$  را به  $Arccos$  نیز نمایش می‌دهند.

ج) برای تانژانت، از  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  استفاده می‌کنیم. تانژانت این بازه را به طور یک به یک بر تمام  $\mathbb{R}$  می‌نگارد.  $\tan^{-1}$  یا  $Arctan$  روی  $\mathbb{R}$  تعریف شده است و در  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  مقدار می‌گیرد. تمرین. ثابت کنید مجموعه تصویر تانژانت همه  $\mathbb{R}$  است.

د) برای  $csc\theta$  و  $sec\theta$  و  $cot\theta$ ، به ترتیب دامنه‌های  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$  و  $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$  و  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$  را منظور می‌کنند.

## مفهوم حد

در بخش‌های ۶ تا ۸ مفهوم حد دنباله و سری را بررسی کردیم. در واقع دنباله، تابعی بود که روی یک مجموعه گسسته از نقاط (اعداد صحیح از یک مقدار  $k$  به بعد) تعریف شده و مقداری حقیقی یا مختلط می‌گرفت. حد دنباله وقتی وجود داشت که با سیر کردن دامنه تابع، یعنی با گذر به اعداد صحیح بزرگتر و بزرگتر، مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شد. مفهوم حد که در این بخش معرفی خواهیم کرد کاملاً مشابه است با این تفاوت که به جای دنباله، تابع‌هایی را در نظر خواهیم گرفت که دامنه آنها یا یک مجموعه از نوع بازه است یا دست‌کم نقاط دامنه دارای مکان تجمع هستند؛ برخلاف مجموعه‌های عدد صحیح که عناصرش از فاصله معینی (واحد) به هم نزدیکتر نمی‌شوند. ایده حد زاده کوشش‌هایی است که طی دو قرن برای دقیق ساختن مفهوم "مشتق"، که خود بیان‌کننده آهنگ لحظه‌ای تغییر یک کمیت متغیر است، صرف شد. امروزه مفهوم حد کاربردهایی خارج از محدوده مشتق نیز دارد؛ بالاخص همچنان که خواهیم دید با مفهوم پیوستگی در رابطه نزدیک است.

فرض کنید  $S$  یک زیرمجموعه  $\mathbb{R}$  باشد. نقطه  $a \in \mathbb{R}$  را یک نقطه حدی  $S$  می‌نامیم اگر برای هر

$\delta > 0$ ، در "بازه محذوف شعاع  $\delta$  حول  $a$ "، یعنی

$$]a - \delta, a + \delta[ - \{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

نقطه‌ای از  $S$  موجود باشد. تذکر یکی دو نقطه در مورد این تعریف بجاست:

(الف) اینکه بازه را "محذوف" گرفته‌ایم، یعنی  $x = a$  مطرح نیست؛ بدین معنی است که تعریف

مستقل از این است که خود  $a$  نقطه‌ای از  $S$  باشد یا نباشد؛ هر دو صورت ممکن است رخ دهد.

(ب) تعریف در واقع نتیجه می‌دهد که در هر بازه محذوف حول  $a$ ، بی‌نهایت عضو متمایز از  $S$  باید

موجود باشد زیرا اگر مثلاً  $s_1 \in S$  در بازهٔ محذوف شعاع  $\delta_1$  حول  $a$  باشد، و  $\delta_2$  را طوری بگیریم که  $|s_1 - a| < \delta_2 < \delta_1$ ، آنگاه باید عضو دیگری  $s_2$  از  $S$  در بازهٔ محذوف شعاع  $\delta_2$  حول قرار داشته باشد. به همین ترتیب اگر  $\delta_3$  را کوچکتر از  $|s_2 - a|$  و مثبت در نظر بگیریم، نقطهٔ دیگری  $s_3$  از  $S$  باید در این بازهٔ محذوف باشد و همین طور با ادامهٔ این روش یک دنبالهٔ  $(s_n)$  از نقاط متمایز  $S$  به دست می آید که همه در بازهٔ محذوف شعاع  $\delta_1$  حول  $a$  قرار دارند.

در واقع با تغییر کوچکی در استدلال بالا می توان نشان داد اگر  $a$  یک نقطهٔ حدی برای مجموعهٔ  $S$  باشد، آنگاه دنباله‌ای  $(s_n)$  از نقاط متمایز  $S$  وجود دارد که  $s_n \rightarrow a$ . اگر در استدلال بالا بگیریم  $\delta_1 = 1$ ، نقطهٔ  $s_1$  به فاصلهٔ کوچکتر از ۱ از  $a$  است، اگر بگیریم  $\delta_2 < \min\{\frac{1}{2}, |s_1 - a|\}$ ، آنگاه نقطهٔ  $s_2$  در فاصلهٔ کوچکتر از  $\frac{1}{2}$  از  $a$  است و  $s_2 \neq s_1$ . به همین ترتیب با گرفتن  $\delta_3 < \min\{\frac{1}{3}, |s_2 - a|\}$ ، نتیجه می شود که  $s_3$  در فاصلهٔ کوچکتر از  $\frac{1}{3}$  از  $a$  قرار دارد و متمایز از  $s_1$  و  $s_2$  است. به طور کلی اگر به استقراء،  $\delta_n$  را به صورت  $\delta_n < \min\{\frac{1}{n}, |s_{n-1} - a|\}$  بگیریم و عضو  $s_n$  از  $S$  را در بازهٔ محذوف شعاع  $\delta_n$  حول  $a$  اختیار کنیم، نتیجه می شود که  $|s_n - a| < \frac{1}{n}$  و عناصر  $s_1, s_2, \dots, s_n$  همه متمایزند. دنبالهٔ عناصر متمایز  $S$  که به این ترتیب ساخته می شود به همگراست زیرا برای هر  $\delta > 0$ ، اگر  $N$  را طوری بگیریم که  $\frac{1}{N} < \delta$ ، آنگاه برای  $n > N$  داریم  $|s_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ .

بالعکس نیز، اگر دنباله‌ای  $(s_n)$  از نقاط متمایز  $S$  به  $a$  میل کند،  $a$  یک نقطهٔ حدی  $S$  است. برای  $\delta > 0$ ، چون  $s_n \rightarrow a$ ،  $N$  وجود دارد که برای  $n > N$  داریم  $|s_n - a| < \delta$ . به علاوه چون همه نقاط  $s_n$  متمایزند، حداقل یکی از آنها باید غیر از خود  $a$  باشد، یعنی  $s_n$  وجود دارد که  $|s_n - a| < \delta$ . بدین ترتیب به تعریف معادلی برای نقطه حدی دست یافته ایم:

(۱-۱۳) لم. اگر  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  باشد و  $a \in \mathbb{R}$ ،  $a$  یک نقطهٔ حدی برای  $S$  است اگر و تنها اگر دنباله‌ای  $(s_n)$  از نقاط متمایز  $S$  وجود داشته باشد که  $s_n \rightarrow a$ .

### (۱۳-۲) چند مثال

(۱۳-۲-۱) فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{Z}$ ، یعنی مجموعه‌ای اعداد صحیح، است. در این صورت هیچ نقطه‌ی  $\mathbb{R}$  یک نقطه‌ی حدی برای  $\mathbb{Z}$  نیست زیرا که اگر بازه‌ی محذوفی به شعاع کوچکتر از  $\frac{1}{2}$  حول این نقطه بگیریم، حداکثر یک نقطه‌ی  $S$  می‌تواند در این بازه قرار گیرد.

(۱۳-۲-۲) فرض کنید  $S$  بازه‌ی  $[a, b]$  است. در این صورت همه‌ی نقاط  $[a, b]$ ، نقاط حدی  $[a, b]$  هستند زیرا که در هر بازه‌ی محذوف به شعاع مثبت حول  $c \in [a, b]$  نقطه‌ای از  $[a, b]$  یافت می‌شود. به علاوه اگر  $c \notin [a, b]$ ،  $c$  نقطه‌ی حدی  $[a, b]$  نیست زیرا اگر  $c < a$ ، آنگاه برای  $0 < \delta < a - c$ ، و اگر  $c > b$ ، برای  $0 < \delta < c - b$ ، در بازه‌ی شعاع  $\delta$  حول  $c$  هیچ نقطه‌ی از  $[a, b]$  یافت نمی‌شود. به همین ترتیب مجموعه‌ی نقاط حدی  $[a, b]$ ،  $[a, b[$  و  $]a, b]$  همه‌ی برابر هستند.

(۱۳-۲-۳)  $S$  را برابر مجموعه‌ی  $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  می‌گیریم. تنها نقطه‌ی حدی  $S$  نقطه‌ی  $0$  است. هر گوی محذوف شعاع  $\delta$  حول  $0$  شامل بی‌نهایت نقطه‌ی  $S$  است (همه‌ی  $a_n$  ها که  $\frac{1}{n} < \delta$ ). برای نقطه‌ی  $\frac{1}{n}$ ، بازه‌ی محذوف شعاع  $(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$  حول این نقطه شامل هیچ نقطه‌ی  $S$  نیست. برای  $a > 1$ ، بازه شعاع  $\delta = a - 1$ ، برای  $a < 0$ ، بازه شعاع  $-a$ ، و برای  $\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n+1}$ ، بازه شعاع  $\delta = \min\{\frac{1}{n} - a, a - \frac{1}{n+1}\}$  فاقد نقاط  $S$  هستند. اکنون آماده‌ایم تعریف حد را ارائه کنیم.

(۱۳-۳) تعریف. فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  است،  $a$  یک نقطه‌ی حدی  $S$ ، و  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع. می‌گوییم حد تابع  $f$  وقتی  $x$  به  $a$  میل می‌کند برابر  $L$  است، و می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  در صورتی که برای هر  $\epsilon > 0$ ، وجود داشته باشد  $\delta > 0$  که هرگاه  $x \in S$  و  $0 < |x - a| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

نکات شباهت و تمایز تعریف حد و تعریف پیوستگی از تعریف مشهودند. در مورد پیوستگی، نقطه‌ی  $a$  باید در دامنه‌ی تعریف  $f$  باشد ولی در مورد حد کافی است  $a$  یک نقطه‌ی حدی مجموعه‌ی  $S$  باشد و اساساً به دلیل شرط  $0 < |x - a|$ ، مقدار  $f$  در نقطه‌ی  $a$  اصلاً مطرح نیست. از طرفی دیگر پیوستگی در همه‌ی

نقاط دامنه  $f$  قابل طرح کردن است؛ در حالی که برای مطرح ساختن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  لازم است که  $a$  یک نقطه حدى دامنه باشد. مثلاً برای تابعی که دامنه آن  $\mathbb{Z}$  باشد، حد در هیچ نقطه‌ای تعریف نشده است در صورتی که دیدیم هر تابع با دامنه  $\mathbb{Z}$  در همه نقاط دامنه پیوسته است. قرابت حد و پیوستگی را می‌توان در گزاره زیر که نتیجه فوری تعریف است خلاصه کرد:

(۱۳-۴) گزاره. فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  است و  $a$  یک نقطه حدى  $S$  که نقطه حدى  $S$  نیز می‌باشد. در این صورت  $f$  در  $a$  پیوسته است اگر و تنها اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  وجود داشته و برابر  $f(a)$  باشد.  $\square$

در واقع اگر  $a$  یک نقطه حدى  $S$  باشد و  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع، حد  $f$  وقتی  $x$  به  $a$  میل می‌کند مقداری است که اگر  $f(a)$  را برابر آن تعریف کنیم، تابع  $f$  در  $a$  پیوسته می‌شود. گزاره زیر نیز عیناً مانند گزاره مشابه در مورد پیوستگی ثابت می‌شود و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

(۱۳-۵) گزاره. فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  باشد،  $a$  یک نقطه حدى  $S$ ، و  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع. در این صورت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  اگر و تنها اگر برای هر دنباله  $(a_n)$  از عناصر  $S$  که  $a_n \rightarrow a$  داشته باشیم  $f(a_n) \rightarrow L$ .  $\square$

به کمک این گزاره، همچنان که در مورد مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت تابع‌های پیوسته عمل کردیم، گزاره زیر نتیجه می‌شود:

(۱۳-۶) گزاره. فرض کنید  $S$  یک زیرمجموعه  $\mathbb{R}$  است،  $a$  یک نقطه حدى  $S$ ، و  $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$  دو تابع که  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ . در این صورت:

(الف) حد  $f + g$  وقتی  $x$  به  $a$  میل می‌کند وجود دارد و برابر  $L_1 + L_2$  است.

(ب) حد  $f \cdot g$  وقتی  $x$  به  $a$  میل می‌کند وجود دارد و برابر  $L_1 L_2$  است.

(ج) اگر مضافاً  $L_2 \neq 0$  و  $a$  یک نقطه حدى مجموعه  $\{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$  باشد، آنگاه حد  $\frac{f}{g}$  وقتی



□ به  $x$  میل می کند وجود دارد و برابر  $\frac{L_1}{L_2}$  است.

در (ج) توجه کنید که مجموعه  $\{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$  در واقع دامنه تعریف  $\frac{f}{g}$  است و برای اینکه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  مطرح شود، لازم است که  $a$  یک نقطه حدی این مجموعه باشد. اثبات گزاره بالا که عیناً مانند گزاره مشابه در مورد تابع های پیوسته است به خواننده واگذار می شود.

### (۱۳-۷) چند مثال حد

(۱۳-۷-۱) فرض کنید در مورد وجود، و در صورت وجود، مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$  سؤال شده است که در آن  $n$  یک عدد صحیح مثبت است. چون  $f(x) = x - 1$  یک تابع پیوسته است، حد آن وقتی  $x \rightarrow 1$  برابر مقدار  $f(1)$ ، یعنی  $0$ ، است. پس نمی توان از قضیه خارج قسمت در این مورد استفاده کرد. ولی از آنجا که وجود حد و مقدار آن هیچ گونه ارتباطی با مقدار یک تابع در نقطه مورد نظر ندارد، می توان با شرط  $x \neq 1$ ، یعنی در دامنه  $S = \mathbb{R} - \{1\}$ ، تابع  $\frac{x^n - 1}{x - 1}$  را در نظر گرفت. چون  $x = 1$  یک نقطه حدی  $S$  است، می توان به هر حال  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$  را مطرح کرد. حال در نقاط دامنه که  $x \neq 1$  داریم  $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$ . بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + \dots + 1)$  که چون چند جمله ای  $x^{n-1} + \dots + x + 1$  یک تابع پیوسته تعریف می کند، حد آن وقتی  $x \rightarrow 1$  برابر مقدار تابع یعنی  $n$  است.

تعداد زیادی از حدهای مقدماتی را می توان به روش بالا محاسبه کرد. در واقع همچنان که در بررسی مفهوم مشتق خواهیم دید، تعریف حد و تمایز آن از مقدار تابع، از بررسی عبارتهایی که صورت و مخرج هر دو به صفر میل می کنند وقتی متغیر به نقطه ای حدی از دامنه میل می کند، سرچشمه گرفته است.

(۱۳-۷-۲) (دو حد اساسی مثلثاتی) در مورد وجود و مقدار حدهای زیر بحث می کنیم:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \quad , \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

(  $\theta$  بر حسب رادیان )

توجه کنید که دامنه تعریف هر دو تابع بالا، یعنی  $\frac{\sin \theta}{\theta}$  و  $\frac{1 - \cos \theta}{\theta}$ ، مجموعه اعداد حقیقی ناصفر،

$\mathbb{R} - \{0\}$  است، و نقطهٔ  $0$  نقطهٔ حدى دامنه است، پس مفهوم حد مطرح شدنی است.

برای  $0 \neq \theta$  و  $|\theta| < \frac{\pi}{4}$ ، با توجه به شکل ۱ داریم:

$$(\theta > 0) \quad \sin \theta < \theta < \tan \theta$$

$$(\theta < 0) \quad \tan \theta < \theta < \sin \theta$$

بنابراین برای  $0 \neq \theta$ :

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

در بخش ۱ دیدیم که  $\cos \theta$  تابعی پیوسته از  $\theta$  است، پس  $\frac{1}{\cos \theta}$  به  $1$  میل می‌کند وقتی  $\theta \rightarrow 0$ . تابع ثابت  $1$  نیز دارای حد  $1$  است وقتی  $\theta \rightarrow 0$ . به سادگی دیده می‌شود که چون  $\frac{\theta}{\sin \theta}$  بین  $1$  و  $\frac{1}{\cos \theta}$  قرار دارد و هر دوی این توابع به مقدار واحدی، در اینجا  $1$ ، میل می‌کنند،  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$ . بنابراین طبق

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{ج، داریم ۱-۳، ۶-۱۳}$$

از طرفی دیگر  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ ، پس:

$$\frac{1 - \cos \theta}{\theta} = \left( \sin \frac{\theta}{2} \right) \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

چون تابع سینوس در صفر پیوسته است  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \frac{\theta}{2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \frac{\theta}{2} = 0$  و نیز

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0 \quad \text{ب، طبق ۱-۳، ۶-۱۳، پس} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = 1$$

(۱۳-۷-۳) آیا می‌توان نوشت  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta}} = 1$ ؟ سؤال اساسی در اینجا این است که آیا  $\theta = 0$  یک نقطهٔ حدى دامنه تعریف است یا نه؟ اگر چنین باشد، و اگر در دامنهٔ تعریف داشته باشیم  $\sin \frac{1}{\theta} \neq 0$ ، آنگاه با یک تابع ثابت با مقدار  $1$  سروکار داریم که حد آن در هر نقطه حدى برابر  $1$  خواهد بود. تابع داده شده فقط در نقاطی که مخرج صفر شود قابل تعریف شدن نیست و اینها عبارتند از مقادیر:

$$\theta = 0, \pm \frac{1}{\pi}, \pm \frac{1}{2\pi}, \pm \frac{1}{3\pi}, \dots$$

بنابراین دامنهٔ تعریف عبارت است از

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq \frac{\pm 1}{n\pi}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

توجه کنید که  $\circ$  یک نقطهٔ حدی  $S$  است زیرا که مثلاً دنبالهٔ متمایز نقاط  $S$ :

$$a_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{4}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

به  $\circ$  میل می‌کند. بنابراین با تعریف ارائه شده از حد می‌توان نوشت  $\lim_{\theta \rightarrow \circ} \frac{\sin \frac{1}{\theta}}{\sin \frac{1}{\theta}} = 1$ . در واقع اگر در همهٔ نقاط  $\mathbb{R}$  که خارج از  $S$  هستند، مقدار تابع را برابر ۱ تعریف کنیم، تابع ثابت ۱ روی همهٔ  $\mathbb{R}$  به دست می‌آید.

(۱۳-۷-۴) فرض کنید  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف شده‌اند،  $a$  یک نقطهٔ حدی  $S$  است،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \circ$  و  $g$  یک تابع کراندار است، یعنی عددی  $M > \circ$  وجود دارد که  $|g(x)| \leq M$  برای هر  $x \in S$ . در این صورت ادعا می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow a} ((f \cdot g)(x)) = \circ$$

فرض کنید  $e > \circ$  داده شده است. چون  $\lim_{x \rightarrow \circ} f(x) = \circ$ ،  $\delta > \circ$  وجود دارد که هرگاه  $x \in S$  و  $\circ < |x - a| < \delta$  آنگاه:

$$|f(x) - \circ| < \frac{e}{M}$$

پس با این شرط روی  $x$  داریم  $|f(x)g(x)| < e$  و حکم به اثبات می‌رسد.

(۱۳-۷-۵) در مورد  $\lim_{x \rightarrow \circ} \sin \frac{1}{x}$  بحث کنید. عبارت  $\sin \frac{1}{x}$  به‌ازای هر  $x \neq \circ$  تعریف شده است، پس  $x = \circ$  یک نقطهٔ حدی دامنه است و  $\lim_{x \rightarrow \circ} \sin \frac{1}{x}$  قابل طرح کردن است. اگر  $\lim_{x \rightarrow \circ} \sin \frac{1}{x}$  وجود داشته باشد و برابر  $L$  باشد، باید برای هر دنباله  $(a_n)$  از اعداد حقیقی ناصفر (داخل دامنه) که  $a_n \rightarrow \circ$  داشته باشیم  $\sin \frac{1}{a_n} \rightarrow L$ . اگر  $a_n$  را برابر  $\frac{1}{n\pi}$ ،  $n = 1, 2, \dots$  بگیریم، داریم  $\sin \frac{1}{a_n} = \sin n\pi = \circ \rightarrow \circ$  پس اگر حد وجود داشته باشد برابر  $\circ$  است. از طرفی دیگر، اگر بگیریم  $a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{4}}$  داریم  $\sin a_n = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{4}) = 1$  و دنبالهٔ ثابت ۱ به  $\circ$  میل نمی‌کند. پس حد وجود ندارد.

(۱۳-۷-۶) علیرغم عدم وجود  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ ، چون  $\sin \frac{1}{x}$  برای  $x \neq 0$  کراندار است، اگر  $n$  یک عدد صحیح مثبت باشد، طبق ۱۳-۷-۴ داریم  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0$ .  
 در باقیمانده این بخش تعمیم‌هایی از مفهوم حد را در نظر می‌گیریم. بالاخص به توصیف نمادهایی مانند نمادهای زیر می‌پردازیم:

$$\dots, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

(۱۳-۸) تعریف  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  کاملاً مشابه تعریف حد دنباله‌ای است با این تفاوت که در مورد دنباله‌ها متغیر  $x$  فقط مقادیر عدد صحیح از یک  $k$  به بعد را سیر می‌کند، ولی در اینجا دامنه تعریف  $f$ ، یعنی  $x$  های مجاز، یک بازه به شکل  $[A, +\infty[$  یا  $]A, +\infty]$  را تشکیل می‌دهند. فرض کنید دامنه تعریف  $f$  بازه‌ای به شکل  $[A, +\infty[$  یا  $]A, +\infty]$  باشد. در این صورت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  بدین معنی است که برای هر  $e > 0$  داده شده، وجود داشته باشد عدد حقیقی  $M$  به طوری که برای هر  $x$  در دامنه  $f$  که  $x > M$  داشته باشیم  $|f(x) - L| < e$ . مشابهاً  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  برای تابع‌های  $f$  تعریف می‌شود که دامنه‌های آنها به شکل  $] -\infty, A]$  یا  $] -\infty, A[$  باشد و در اینجا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  به این معنی است که برای هر  $e > 0$ ، عدد حقیقی  $M$  وجود داشته باشد که برای هر  $x$  در دامنه  $f$  با  $x < M$  داشته باشیم  $|f(x) - L| < e$ .  
 برای دنباله اعداد حقیقی  $(a_n)$ ، می‌نویسیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  در صورتی که برای هر  $M > 0$ ، وجود داشته باشد عدد صحیح  $N$  که هرگاه  $n > N$ ، آنگاه  $a_n > M$ . تمرین زیر اثباتی مشابه قضیه متناظر برای حد معمولی دارد.

تمرین. فرض کنید  $f$  روی  $[A, +\infty[$  تعریف شده است. نشان دهید  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  اگر و تنها اگر برای هر دنباله اعداد حقیقی  $(a_n)$  که  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  داشته باشیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$ .

(۱۳-۹) حال فرض کنید تابعی  $f$  روی دامنه  $]a, b[$  تعریف شده است که در آن  $a$  و  $b \in \mathbb{R}$  می‌تواند یک عدد حقیقی کوچکتر از  $b$  یا  $-\infty$  باشد. مفهوم  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$  (تابع  $f$

به  $+\infty$  میل می کند وقتی  $x$  از سمت چپ به  $b$  میل کند) این است که برای هر  $M > 0$ ، وجود دارد  $\delta > 0$  که هرگاه  $x$  در دامنه  $f$  بوده و در بازه  $[b - \delta, b]$  باشد، آنگاه  $f(x) > M$ . مشابهاً  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$ ،  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = -\infty$  تعریف می شوند. وقتی می نویسیم  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$  مقصود این است که دامنه تعریف شامل یک بازه محذوف  $[x - \rho, x + \rho]$ ،  $\rho > 0$  است و برای هر  $M > 0$ ،  $\delta > 0$  وجود دارد که هرگاه  $x$  در دامنه  $f$  بوده و در بازه محذوف  $[x - \delta, x + \delta] - \{x\}$  قرار گیرد، آنگاه  $f(x) > M$ . به سادگی مشاهده می شود که این معادل برقراری دو شرط  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$  است.

(۱۳-۱۰) بالاخره این تذکر لازم است که مفاهیم حد راست و چپ به طور کلی در چارچوب ارائه شده برای حد قابل بیان است. وقتی می نویسیم  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ، یعنی در واقع دامنه تعریف  $f$  را به آن های دامنه  $f$  که بزرگتر از  $a$  هستند محدود کرده ایم و حد تابع محدود شده را بررسی می کنیم. فرض کنید  $D$  دامنه تعریف  $f$  باشد. برای اینکه  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  قابل طرح شدن باشد اولاً باید  $a$  یک نقطه حدى مجموعه  $[a, +\infty) \cap D$  باشد. سپس برای هر  $\epsilon > 0$ ، باید  $\delta > 0$  وجود داشته باشد که برای هر  $x \in D$  که  $a < x < a + \delta$  داشته باشیم  $|f(x) - L| < \epsilon$ . مفهوم حد چپ نیز به طور مشابه تعریف می شود.

## مفهوم مشتق

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم مشتق است. متبلور شدن ایده مشتق و به کارگیری مؤثر آن پاسخگوی چند نیاز ریاضی و علمی ریشه دار است. پس از رواج فرمول بندی مسایل ریاضی به صورت جبری و به خصوص پیدایش زمینه هندسه تحلیلی، مفهوم مشتق در طی قرن هفدهم میلادی در آثار ریاضیدانان مختلف ظاهر شد و در کارهای ریاضی نیوتن و لایب نیتس به صورت بندی جامعتری رسید و ارتباط آن با مفهوم "انتگرال" که به اعتباری سابقه تاریخی دیرینه تر داشت روشن گردید. تعریف مشتق که در آغاز از دقت ریاضی مرسوم برخوردار نبود، مدت ها مورد انتقاد و نارضایتی تعدادی از دانشمندان و فلاسفه قرار داشت و حتی گاهی موجب مناقشات جدی ریاضی می شد. این مشکلات به مدت دو قرن همچنان دامنگیر حساب دیفرانسیل و انتگرال بود تا با شکل گرفتن مفهوم حد، صورت امروزی خود را یافت. در زیر ما با استفاده از مفهوم حد، به معرفی مشتق می پردازیم. می توان نیازهایی را که به پیدایش مفهوم مشتق منجر شد حول دو محور "آهنگ تغییر لحظه ای" و "مساله مماس" مطرح کرد. از نظر تاریخی مساله مماس بود که منجر به تعریف مشتق شد ولی پس از چندی کاربرد مشتق در تعیین آهنگ تغییر لحظه ای نیز معلوم شد و مشتق به عامل تعیین کننده ای در رشد علم مکانیک مبدل گردید. جای تعجب است که نیوتن که خود حدود پانزده سال پس از مطالعاتش در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مکانیک کلاسیک را نیز پایه گذاشت، در کتاب بزرگ مکانیک خود Principia Mathematica از مفهوم مشتق استفاده نکرده است و به کارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال در مکانیک، برخلاف تصویری که طبیعی نیز به نظر می رسد، سال ها بعد در میان ریاضیدانان سوییس، فرانسه و آلمان رایج شد.

(۱-۱۴) آهنگ تغییر لحظه‌ای. شاید ساده‌ترین مثال از این نوع مسأله، صورت‌بندی دقیق مفهوم سرعت یک متحرک است. در ساده‌ترین حالت یک متحرک نقطه‌ای را در نظر بگیرید که روی یک خط راست جهت‌دار و مدرج حرکت می‌کند. مکان متحرک در زمان  $t$  به صورت تابعی از زمان،  $t$ ،  $s = f(t)$  داده شده است (شکل ۱).

می‌خواهیم مفهوم "سرعت" (= آهنگ تغییر مکان) را برای این حرکت بررسی کنیم. برای خط راست داده شده جهت قابل شده‌ایم، بدین ترتیب مثلاً حرکت به طرف راست، تغییر مکان در جهت مثبت و حرکت به سمت چپ، تغییر مکان در جهت منفی تلقی می‌شود. سرعت متوسط یا میانگین سرعت متحرک از زمان  $t_1$  تا زمان  $t_2$ ، به صورت نسبت  $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$  تعریف می‌شود که در واقع متوسط مسافت طی شده (با منظور کردن جهت) در واحد زمان است. اگر حرکت به صورت یکنواخت در یکی از دو جهت صورت گیرد، نسبت  $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$  همواره مقدار ثابتی است، یعنی نه به زمان شروع اندازه‌گیری، نه به زمان پایان اندازه‌گیری، و نه به طول مدت اندازه‌گیری، بستگی نخواهد داشت. در این وضعیت است که مسافت پیموده شده حاصل ضرب این سرعت ثابت (یکنواخت) در طول بازه زمانی حرکت است. موضوع وقتی پیچیده می‌شود که حرکت یکنواخت نباشد، یعنی سرعت متغیر باشد. در این صورت سرعت متوسط در بازه زمانی  $[t_1, t_2]$  ممکن است اطلاع قابل استفاده‌ای در مورد شیوه حرکت در یک بازه خاص زمانی کوچکتر ندهد به خصوص اگر  $[t_1, t_2]$  به نسبت بزرگ باشد. برای کسب اطلاع دقیق‌تر در مورد سرعت حرکت در حوالی زمان  $t$  بهتر است دو بازه زمانی  $t_1$  و  $t_2$  نزدیک به  $t$  در نظر بگیریم که  $t_1 < t < t_2$  و به سرعت متوسط  $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$  نگاه کنیم. هر چه  $t_1$  و  $t_2$  به  $t$  نزدیکتر باشند، سرعت متوسط به دست آمده انعکاس دقیق‌تری از کیفیت حرکت حوالی زمان  $t$  است. آیا می‌توان به "سرعت در لحظه  $t$ " معنی دقیقی نسبت داد؟ اگر طول بازه زمانی را صفر بگیریم، یعنی  $t_1 = t = t_2$  آنگاه  $f(t_1) = f(t_2)$  و صورت و مخرج کسر  $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$  هر دو صفر می‌شوند و این عبارت معنی ندارد. راه‌گرایان است که سرعت در لحظه  $t$  را در واقع یک حد تلقی کنیم، یعنی حد سرعت متوسط وقتی طول بازه زمانی به صفر میل می‌کند. به بیان دیگر، حد زیر، در صورت وجود، به

سرعت متحرک در زمان  $t$  تعبیر می شود:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (1)$$

ممکن است این کسر متقارن به نظر نرسد، یعنی تصور شود که فقط تغییر مسافت در یک طرف بازهٔ زمانی نسبت به  $t$  دخیل می شود. در واقع چون نزدیک شدن  $h$  به  $0$  هم از طرف راست و هم از طرف چپ منظور می شود، تقارن خود به خود اعمال می شود. تمرین زیر این ادعا را به طور قاطع تر ثابت می کند.

تمرین. اگر حد (1) وجود داشته باشد، ثابت کنید حد زیر نیز موجود است و برابر حد (1) می باشد:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} \quad (2)$$

اگر به جای تغییر مکان و مسافت، کمیت متغیر دیگری نسبت به زمان را به  $f(t)$  نمایش دهیم، مجدداً می توان آهنگ تغییر لحظه ای  $f$  در زمان  $t$  را به صورت (1) تعریف کرد. از این کلی تر، اگر دو کمیت  $x$  و  $y$  با رابطهٔ تابعی  $y = f(x)$  به هم مربوط باشند، آهنگ تغییر  $y$  نسبت به  $x$  به صورت حد زیر تعریف می شود:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

(۱۴-۲) مسأله مماس. همهٔ ما ایده ای شهودی و کاملاً روشن از تمایز میان مماس بودن و متقاطع بودن دو منحنی داریم ولی بیان دقیق ریاضی این تمایز آسان به نظر نمی رسد. در عهد باستان ریاضیدانان خط مماس بر منحنی را برای هر یک از تعداد محدود منحنی هایی که در آن دوران مورد بررسی عمیق قرار گرفته بود به کمک ویژگی های خاصی تعریف می کردند. مثلاً خط  $L$  بر دایرهٔ  $C$  در نقطهٔ  $T$  مماس محسوب می شد اگر شعاع  $OT$  بر خط  $L$  عمود باشد. همین طور خط  $L$  بر بیضی  $E$  در نقطهٔ  $T$  مماس محسوب می شد اگر زاویه های بین  $L$  و خطوط واصل از  $T$  به دو کانون بیضی برابر



باشند (اگر بیضی را مقطع یک سطح صیقل تصور کنیم و قانون فیزیکی زاویه تابش = زاویه بازتاب، را اعمال کنیم اشعه نور ساطع از یک کانون پس از برخورد با بیضی از کانون دیگر خواهد گذشت)، و به همین ترتیب خط مماس بر سهمی و هذلولی نیز تعریف می‌شد. این تعریف‌ها همه برخاسته از دانش و شناخت دقیق منحنی‌های خاص بودند و یک تعریف کلی برای مماس بودن یک خط راست بر یک منحنی نامشخص، یا مماس بودن دو منحنی، وجود نداشت. پس از آنکه هندسه تحلیلی امکان ارائه کردن بی‌شمار منحنی متنوع را ممکن ساخت، ضرورت یک تعریف کلی و قابل استفاده از "مماس بودن" در مسایل هندسی نمایان‌تر گردید. راه حل زیر برای تعریف خط مماس بر یک منحنی  $C$  در نقطه  $T$  از منحنی در قرن هفدهم کاملاً متداول شده بود.

روی منحنی در نزدیکی نقطه  $T$ ، نقطه متحرکی  $P$  را در نظر می‌گیریم که تدریجاً به  $P$  نزدیک‌تر می‌شود. در هر وضعیت نقطه  $P$ ، وقتی هنوز به  $T$  نرسیده است، خط راست گذرا از  $P$  و  $T$  را در نظر می‌گیریم. در شکل ۲، این خط برای وضعیت‌های گوناگون  $P_1, P_2, P_3, \dots$  از نقطه  $P$  نمایش داده شده است. وقتی  $P$  به  $T$  نزدیک می‌شود اگر این خط راست به وضعیت مشخصی، مانند  $t$  در شکل ۲، نزدیک شود، این "وضعیت حدی" را خط مماس بر  $C$  در نقطه  $T$  می‌نامیم. برای نوشتن معادله این خط کافی است شیب آن معلوم شود زیرا که یک نقطه خط، یعنی  $T$ ، داده شده است. فرض کنید قطعه‌ای از منحنی  $C$  که در نزدیکی  $P$  قرار دارد به صورت نمودار تابعی  $y = f(x)$  قابل نمایش دادن است و مختصات  $T$  به صورت  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  می‌باشد. حال اگر مختصات نقطه متحرک  $P$  را به  $(x, y) = (x, f(x))$  نمایش دهیم، شیب خط گذرا از  $P$  و  $T$  برابر است با

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (4)$$

وقتی  $P$  به  $T$  میل کند، حد عبارت فوق، در صورت وجود، به

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5)$$

نمایش داده می‌شود. توجه کنید که اگر بنویسیم  $x = x_0 + h$ ، حد بالا را می‌توان به

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (6)$$

نمایش داد که از نوع آهنگ تغییر، یعنی (۳)، است. با توجه به شباهت عبارت‌های (۱)، (۳) و (۶)، ارائه و بررسی تعریف زیر کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد:

(۱۴-۳) تعریف. فرض کنید  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع است و  $a$  یک نقطه درونی  $S$ ، یعنی  $\delta > 0$  وجود دارد که بازه  $[a - \delta, a + \delta]$  در  $S$  قرار دارد. در این صورت  $f$  را مشتق‌پذیر در  $a$  می‌نامیم در صورتی که حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (۷)$$

در صورت وجود، حد بالا را به  $f'(a)$  نمایش داده، آن را مشتق  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامیم. تابع  $f$  را مشتق‌پذیر می‌نامیم در صورتی که  $f$  در همه نقاط دامنه خود مشتق‌پذیر باشد.

(۱۴-۴) یادداشت. در بالا فرض کردیم  $a$  یک نقطه درونی بازه تعریف  $f$  است. در واقع اگر  $a$  یک عضو دامنه و نیز یک نقطه حدى دامنه باشد، بررسی حد (۷) معنی دارد. علت محدود کردن تعریف به نقاط درونی دامنه فقط این است که بیشتر کاربردهای مورد نظر ما به این حالت محدود می‌شوند و لزومی ندارد حالت‌های کلی‌تری که بعضاً پیچیدگی‌های نامطلوبی دارند در اینجا مطرح کنیم. دو مورد استثنایی بعضاً مورد استفاده قرار خواهند گرفت. اگر  $\delta > 0$  وجود داشته باشد که  $[a, a + \delta]$  در دامنه تابع قرار گیرد، می‌توانیم  $h$  را به مقادیر مثبت محدود کنیم که در این صورت "حد یک طرفه"  $\lim_{h \rightarrow 0^+}$  بدین معنی است که فقط مقادیر  $h > 0$  در نظر گرفته شده است. حد

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (۸)$$

را مشتق  $f$  از راست در نقطه  $a$  می‌نامیم و به  $f'_+(a)$  نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب  $f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  نیز که مشتق  $f$  از چپ در نقطه  $a$  خوانده می‌شود، مطرح شدنی است.

به تعریف اصلی باز می‌گردیم و مسأله مماس را پیگیری می‌کنیم. فرض کنید تابع  $f$  در نقطه  $a$  مشتق‌پذیر است. بدین ترتیب نمودار  $f$  حول  $a$  یک منحنی است که در نقطه  $(a, f(a))$  دارای خط

مماس به شیب  $f'(a)$  می‌باشد. چون  $f'(a)$  یک عدد حقیقی است؛ در این حالت مماس بر منحنی نمی‌تواند حالت قائم داشته باشد. معادله خط مماس عبارت است از

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \quad (9)$$

(۱۴-۵) چند مثال.

(۱۴-۵-۱) نشان می‌دهیم تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f(x) = Ax + B$ ،  $A$  و  $B$  ثابت، مشتق پذیر است و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم. در نقطه  $x_0$  از دامنه داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(Ax+B) - (Ax_0+B)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x-x_0)}{x-x_0} \end{aligned}$$

چون حد عبارت فوق وقتی  $x \rightarrow x_0$  مطرح است، مقدار  $x = x_0$  در نظر گرفته نمی‌شود؛ پس می‌توان  $x - x_0$  را از صورت و مخرج حذف کرد و داریم  $f'(x_0) = A$ . البته نمودار  $f$  خط راستی با شیب  $A$  است و بدین ترتیب خط مماس بر این خط در هر نقطه، خود آن خط می‌شود. بالاخص توجه کنید که مشتق تابع ثابت  $f(x) = B$  همه جا صفر است.

(۱۴-۵-۲) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x) = cx^n$  در نظر می‌گیریم که در آن،  $c$  یک عدد حقیقی داده شده است و  $n$  یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cx^n - cx_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ c \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \right] \end{aligned}$$

مجدداً برای محاسبه حد،  $x - x_0 = 0$  مطرح نیست؛ پس

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

حال چند جمله‌ای طرف راست تابعی پیوسته نسبت به  $x$  تعریف می‌کند، پس حد آن وقتی  $x \rightarrow x_0$  برابر می‌شود با  $nx_0^{n-1}$ ، و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = cnx_0^{n-1}$$

(۱۴-۵-۳) می‌خواهیم معادله خط مماس بر بیضی  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  را در نقطه  $(2, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$  بنویسیم. تحقیق کنید که این نقطه روی بیضی قرار دارد. باید جزیی از بیضی شامل نقطه  $(2, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$  را به صورت نمودار تابعی  $y = f(x)$  بنویسیم و به‌ازای  $x = 2$  مشتق تابع را محاسبه کنیم تا شیب خط مماس به دست آید. از معادله بیضی داده شده داریم:

$$y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}$$

که از آن دو تابع استخراج می‌شود، یکی شاخه بالایی بیضی و دیگری شاخه پایینی آن. نقطه  $(2, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$  روی شاخه پایینی قرار دارد، بنابراین از تابع  $f(x) = -\frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}$  استفاده می‌کنیم. برای  $x_0 = 2$  داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{16 - x^2} - 2\sqrt{3}}{x - 2} \end{aligned}$$

وقتی  $x \rightarrow 2$  صورت و مخرج کسر هر دو به صفر میل می‌کنند، بنابراین سعی می‌کنیم کسر را از عوامل احتمالی مشترک ساده کنیم. در عبارت‌های این گونه معمولاً ضرب کردن صورت و مخرج در "مزدوج" عبارت رادیکالی، در اینجا  $\sqrt{16 - x^2} + 2\sqrt{3}$ ، مؤثر واقع می‌شود. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{3}{4}\right) \frac{(16 - x^2) - 12}{(x - 2)(\sqrt{16 - x^2} + 2\sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(+\frac{3}{4}\right) \frac{x + 2}{(\sqrt{16 - x^2} + 2\sqrt{3})} \end{aligned}$$

حال توجه کنید که صورت و مخرج هر دو تابع‌های پیوسته نسبت به  $x$  هستند و برای محاسبه حد به‌ازای  $x \rightarrow 2$  می‌توان مقدار  $x = 2$  را جایگزین کرد، پس:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

نتیجه اینکه معادله خط مماس عبارت است از  $y + 3\sqrt{x} = \sqrt{x}(x - 2)$ .

(۴-۵-۱۴) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $f(x) = |x|$  در نظر می‌گیریم و مشتق‌پذیری آن را در نقاط گوناگون  $x_0$  بررسی می‌کنیم. اگر  $x_0 > 0$ ، قطعه کوچکی از نمودار  $f(x) = |x|$  بر نمودار  $g(x) = x$  منطبق است و از آنجا که مشتق فقط به مقادیر تابع برای  $x$  های نزدیک  $x_0$  (برای مشتق‌گیری) بستگی دارد، مشتق  $f$  در نقطه  $x_0$  برابر مشتق  $g$  در نقطه  $x_0$  یعنی ۱ است. این با انتظار طبیعی که خط مماس بر نمودار به‌ازای  $x_0 > 0$  باید خط  $y = x$  باشد سازگار است.

همین‌طور برای  $x_0 < 0$ ، مشتق تابع برابر -۱ به‌دست می‌آید و خط  $y = -x$  بر نمودار در نقطه  $(x_0, |x_0|)$  مماس است. حال نقطه  $x_0 = 0$  را بررسی می‌کنیم. حد زیر، در صورت وجود، مورد نظر است:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

اگر دنباله‌ای از اعداد مثبت مثلاً  $x_n = \frac{1}{n}$  در نظر بگیریم که  $x_n \rightarrow 0$ ، اگر حد وجود داشته باشد، باید  $\frac{|x_n|}{x_n}$  به آن حد میل کند. برای  $x_n = \frac{1}{n} > 0$  داریم  $|x_n| = x_n$ ، پس  $\frac{|x_n|}{x_n} = 1$ ، بنابراین حد، در صورت وجود باید برابر ۱ باشد. ولی اگر دنباله‌ای از اعداد منفی، مثلاً  $x_n = -\frac{1}{n}$  را در نظر بگیریم که  $x_n \rightarrow 0$ ، داریم  $\frac{|x_n|}{x_n} = -1$  و دنباله ثابت (-۱) به ۱ میل نمی‌کند. بنابراین تابع در  $x_0 = 0$  مشتق‌پذیر نیست. توجه کنید که در این مثال مشتق راست و مشتق چپ در  $x_0 = 0$  وجود دارند،  $f'_-(0) = -1$  و  $f'_+(0) = 1$ .

در پیگیری مسأله مماس، سؤال طبیعی دیگری که مطرح است این است که اگر دو منحنی از یک نقطه  $(x_0, y_0)$  گذر کنند، در چه صورتی این دو منحنی را در آن نقطه "مماس" برهم تعریف می‌کنیم؟ در حالتی که هر دو منحنی در نقطه  $(x_0, y_0)$  دارای خط مماس باشند، دو منحنی مماس برهم تلقی می‌شوند در صورتی که خط مماس آنها یکی باشد. ولی می‌توان وضعیتی مانند شکل ۴ تجسم کرد که دو منحنی فاقد خط مماس در نقطه مشترک  $(x_0, y_0)$  هستند ولی در عین حال به‌نظر می‌آید که باید آنها را مماس بر یکدیگر تلقی کرد. در اینجا کوشش می‌کنیم تعریف جامعتری از مماس بودن ارائه کنیم که در حالت خاص تعریف خط مماس را شامل شود.

وضعیت‌های شکل‌های ۵ (الف) و ۵ (ب) را مقایسه کنید. در هر دو شکل نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g$  از نقطهٔ مشترک  $(x_0, y_0)$  می‌گذرند. در هر دو شکل، چون  $f$  و  $g$  پیوسته فرض شده‌اند، فاصلهٔ قائم بین دو نمودار وقتی  $x$  به  $x_0$  نزدیک می‌شود به صفر میل می‌کند. برداشت بعدی ما از دو شکل این است که در (الف) نمودارها متقاطع‌اند و در (ب) مماس می‌باشند.

چگونه می‌توان با یک تعریف دقیق ریاضی این دو وضعیت را از هم تمیز داد؟ در ۵ (الف) اگر قطعهٔ کوچکی از دو نمودار حول  $(x_0, y_0)$  تقریباً خط راست فرض کنیم می‌بینیم که طول پاره‌خط‌های محصور میان دو نمودار به نسبت تقریباً ثابتی کوچک شده و به صفر میل می‌کند. در شکل ۵ (ب)، اگر قطعات کوچکی از نمودار حول  $(x_0, y_0)$  خط راست فرض شوند، این دو خط راست را باید بر هم منطبق فرض کرد و در نتیجه فاصلهٔ عمودی بین دو نمودار در نزدیکی  $(x_0, y_0)$  در مقایسه با ۵ (الف) عملاً صفر است. این برداشت شهودی را می‌توان به صورت دقیقی تعریف کرد:

(۱۴-۶) تعریف. فرض کنید  $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$  دو تابع هستند و  $x_0$  یک نقطهٔ درونی  $S$  است. در این صورت می‌گوییم  $f$  بر  $g$  در  $x_0$  مماس است در صورتی که دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\text{(الف)} \quad f(x_0) = g(x_0).$$

$$\text{(ب)} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

شرط (الف) فقط بیانگر این است که نمودار دو تابع باید از یک نقطه بگذرد و در مورد نمودارهای متقاطع نیز برقرار است، ولی توضیح خواهیم داد که شرط (ب) در واقع تمیزدهندهٔ وضعیت مماس بودن است. توجه کنید که قدرمطلق  $f(x) - g(x)$  فاصلهٔ قائم دو نمودار به ازای مقدار  $x$  از متغیر است. شرط (ب) بیانگر این امر است که این فاصلهٔ قائم طوری شدید به صفر میل می‌کند که اگر بر کمیت  $x - x_0$  که خود نیز به ۰ میل می‌کند، تقسیم شود، هنوز نسبت به صفر میل می‌کند. کسر  $\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$  نسبت فاصلهٔ دو نمودار به نزدیکی نقطهٔ  $x$  از  $x_0$  است. میل کردن این نسبت به صفر نشانگر این است که فاصلهٔ قائم دو نمودار شدیدتر از  $x - x_0$  کوچک می‌شود.

مثال. وضعیت شکل ۴ را بررسی می کنیم. داریم  $f(x) = g(x)$  پس (الف) برقرار است. برای (ب):

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \frac{x^2|x|}{x^2 + 1} \leq |x|$$

بنابراین وقتی  $x \rightarrow x_0$ ، نسبت  $\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}$  به صفر میل می کند. بنابراین  $f$  و  $g$  در  $x_0$  بر هم مماس اند و این در حالی است که هیچ یک از دو تابع در  $x = x_0$  مشتق پذیر نیست.

### (۱۴-۷) مثال اساسی: خط مماس و تقریب خطی

فرض کنید  $x_0$  یک نقطه درونی دامنه تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  باشد. می خواهیم خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه  $(x_0, f(x_0))$  را از دیدگاه جدیدی بررسی کنیم. کلیه خطوط راست غیر قائم گذرا از نقطه  $(x_0, f(x_0))$  را در نظر می گیریم (خط قائم را مستثنی کرده ایم زیرا که این خط نمودار تابعی از  $x$  نیست). معادله کلی این خطوط هست:

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

که  $m$  ضریب زاویه خط است. طرف راست کلی ترین عبارت تعریف کننده یک تابع درجه یک نسبت به  $x$  است که نمودار آن از  $(x_0, f(x_0))$  می گذرد. می خواهیم این موضوع را بررسی کنیم که آیا از میان این توابع درجه یک، تابعی هست که به مفهومی "نزدیکترین" به نمودار  $f$  در حوالی نقطه  $(x_0, f(x_0))$  باشد؟ اگر "نزدیکترین" را به مفهوم مماس بودن طبق تعریف ۱۴-۶ تعبیر کنیم، نشان می دهیم که حداکثر یک تابع درجه یک از این امتیاز برخوردار است. می نویسیم  $g(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ . شرط (الف) برقرار است و برای (ب):

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} &= \frac{f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \quad (\text{به فرض } x \neq x_0) \end{aligned}$$

برای بررسی حد این عبارت وقتی  $x \rightarrow x_0$ ،  $x = x_0$  مطرح نیست؛ پس فرض  $x \neq x_0$  و ساده کردن  $x - x_0$  مجاز است. پس برای  $m$  ثابت،  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$  اگر و تنها اگر  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  وجود داشته و برابر  $m$  باشد. بنابراین در صورت وجود مشتق،  $f'(x_0)$ ، خط راست با شیب  $f'(x_0)$  یگانه

خط گذرا از  $(x_0, f(x_0))$  است که به تعبیر ۱۴-۶ بر نمودار  $f$  مماس است. با توضیحاتی که قبل از تعریف ۱۴-۶ دادیم، فاصله قائم بین این خط و نمودار تابع سریعتر از فاصله قائم هر خط راست دیگر به صفر میل می‌کند. بنابراین اطلاق "خط مماس" به  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  در صورت مشتق‌پذیری  $f$  در  $x_0$ ، توجیه تازه‌ای می‌یابد. توجه کنید که به این تعبیر، شرطی لازم و کافی برای مشتق‌پذیری  $f$  در نقطه  $x_0$  وجود خط مماس غیرقائم برای نمودار در نقطه  $(x_0, f(x_0))$  است. معادلاً مشتق‌پذیری  $f$  در  $x_0$  بدین معنی است که یک تابع درجه یک مماس بر  $f$  در نقطه  $x_0$  وجود داشته باشد. این تابع درجه یک، یعنی

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (10)$$

را تقریب خطی  $f$  در  $x_0$  نیز می‌نامیم. با توجه به توضیحات ارائه شده، در میان همه تابع‌های درجه ۱، تقریب خطی نزدیک‌ترین مقدار به  $f$  را در نزدیکی  $x_0$  دارد. از این ویژگی در جلسات آینده استفاده‌هایی عملی ذکر خواهیم کرد.

این بحث را با گزاره ساده زیر به اتمام می‌رسانیم:

(۱۴-۸) گزاره. اگر  $f$  در  $x_0$  مشتق‌پذیر باشد،  $f$  در  $x_0$  پیوسته است.

برهان. از آنجا که  $\frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0}$  و  $(x - x_0)$  هر دو به صفر میل می‌کنند، حاصل ضرب آنها نیز به صفر میل می‌کند وقتی  $x$  به  $x_0$  میل کند، ولی

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]\} = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0))$$

□ که صفر بودن این حد بدین معنی است که  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  وجود داشته و برابر  $f(x_0)$  باشد.



## قاعده زنجیره‌ای

یکی از اساسی‌ترین قضایای ابتدایی مربوط به مشتق، مشتق‌پذیر بودن ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر و فرمول حاصل برای مشتق ترکیب دو تابع است که به "قاعده زنجیره‌ای" معروف می‌باشد. قبل از بیان این مطلب، مفهوم مشتق‌پذیری را که تاکنون به دو صورت معادل وجود یک حد، و وجود تابع درجه یک مماس، بررسی کرده‌ایم، به صورت معادل سوومی ارائه می‌کنیم.

فرض کنید  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  در نقطه درونی  $a$  از  $S$  مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر  $f'(a)$  می‌باشد.

در این صورت می‌دانیم که:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]}{h} = 0 \quad (1)$$

که در اینجا  $f(a) + f'(a)h$  مقدار تقریب خطی  $f$  در نقطه  $a$  به‌ازای  $x = a + h$  است. اگر بنویسیم

$$\phi(h) = \frac{f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]}{h} \quad (2)$$

$\phi$  تابعی است که در یک بازه محذوف حول  $0$  تعریف شده است، یعنی برای  $|h|$  کوچک و  $h \neq 0$ ، زیرا

$a$  یک نقطه درونی  $S$  است و برای  $|h|$  کوچک  $f(a+h)$  تعریف شده است. به علاوه  $\phi(h) \rightarrow 0$

وقتی  $h \rightarrow 0$ . پس از طرفین - وسطین در (۲) می‌توان نوشت

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \phi(h)h \quad (3)$$

بنابراین اگر  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر باشد، عددی حقیقی  $f'(a)$  وجود دارد و تابعی  $\phi$  تعریف شده به‌ازای  $|h|$

کوچک  $\neq 0$ ، به طوری که  $\phi(h) \rightarrow 0$  وقتی  $h \rightarrow 0$  و رابطه (۳) برقرار است. بالعکس فرض کنید

برای تابعی  $f$  که  $a$  یک نقطه درونی دامنه آن است، عددی حقیقی  $m$  وجود داشته باشد و تابعی  $\phi$  تعریف شده برای  $|h|$  کوچک  $\neq 0$  که  $\phi(h) \rightarrow 0$  وقتی  $h \rightarrow 0$  داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

در این صورت

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - m = \phi(h)$$

و چون  $\phi(h) \rightarrow 0$  وقتی  $h \rightarrow 0$ ، نتیجه می شود که حد  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  وجود دارد وقتی  $h \rightarrow 0$  و برابر  $m$  است. بدین ترتیب می توان مشتق پذیری  $f$  در  $a$  را به صورت معادل زیر بیان کرد

(۱-۱۵) گزاره.  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده است و  $a$  یک نقطه درونی  $S$  است. در این صورت  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است اگر و تنها اگر عددی حقیقی  $m$  و تابعی  $\phi$  تعریف شده برای  $|h|$  کوچک  $\neq 0$  وجود داشته باشند که  $\phi(h) \rightarrow 0$  وقتی  $h \rightarrow 0$  داشته باشیم

$$f(a+h) = f(a) + mh + \phi(h)h$$

□

البته  $m$  را معمولاً به  $f'(a)$  نمایش می دهیم و مشتق  $f$  در نقطه  $a$  می نامیم. رابطه (۴) یا (۳) را می توان به صورت گویای دیگری نیز نوشت. اگر متغیر تابع  $f$  را به  $x$  و مقدار  $f$  را به  $y$  نمایش دهیم،  $y = f(x)$ ، تغییر کوچک در مقدار  $x$  را گاهی به جای  $h$ ، به  $\Delta x$ ، و تغییر متناظر در  $y$  را به جای  $f(a+h) - f(a)$  به  $\Delta y$  نمایش می دهیم. در این صورت (۴) یا (۳) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x \cdot \phi(\Delta x) \quad (4)$$

یا معادلاً

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta x\phi(\Delta x) \quad (5)$$

توجه کنید که  $f'(a)\Delta x$  مقدار تغییر  $y$  روی خط مماس است. بنابراین مشتق پذیری  $f$  در  $a$  را می توان بدین صورت تعبیر کرد که خطی وجود دارد گذرا از نقطه  $(a, f(a))$  که اختلاف مقدار  $y$  روی این خط

و مقدار  $y$  تابع، در نزدیکی نقطه  $a$ ، "بسیار کوچک" است بدین معنی است که حاصل ضرب دو کمیت  $\Delta x$  و  $\phi(\Delta x)$  می باشد که هر یک به صفر میل می کنند وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ .

(۱۵-۲) قاعده زنجیره ای. فرض کنید  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g: T \rightarrow \mathbb{R}$  دو تابع هستند،  $a$  یک نقطه درونی  $S$  است،  $b$  یک نقطه درونی  $T$ ، و  $f(a) = b$ . اگر تابع  $f$  در  $a$  و تابع  $g$  در  $b$  مشتق پذیر باشند، آنگاه  $g \circ f$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر است و

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) \quad (6)$$

برهان. نخست توجه کنید که دامنه  $g \circ f$  عبارت است از

$$S' = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

برای اینکه مشتق پذیری  $g \circ f$  در  $a$  مطرح شود،  $a$  باید یک نقطه درونی  $S'$  باشد. البته  $a \in S'$  چون  $f(a) = b$  عضو  $T$  است، ولی باید نشان دهیم برای  $x$  های به اندازه کافی نزدیک  $a$  نیز داریم  $f(x) \in T$ . چون  $b$  یک نقطه درونی  $T$  است،  $e > 0$  وجود دارد که  $b - e, b + e$  به تمامی در  $T$  قرار دارد. تابع  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است، پس در  $a$  پیوسته نیز می باشد، بنابراین  $\delta > 0$  وجود دارد که هرگاه  $x \in S$  و  $|x - a| < \delta$ ، آنگاه  $|f(x) - b| < e$ ، یعنی  $f(x)$  در  $T$  قرار دارد. چون  $a$  یک نقطه درونی  $S$  است، می توان  $\delta$  فوق را در صورت لزوم کوچکتر کرد به طوری که برای هر  $x$  با  $|x - a| < \delta$  داریم  $x \in S$ . نتیجه اینکه برای  $x$  های به اندازه کافی نزدیک به  $a$ ،  $f(x)$  در  $T$  قرار می گیرد، یعنی  $a$  یک نقطه درونی  $S'$  است.

حال به اثبات مشتق پذیری  $g \circ f$  در  $a$  و محاسبه مشتق می پردازیم. می نویسیم  $y = f(x)$  و  $z = g(y)$ . چون  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است، تابعی  $\phi$  وجود دارد که برای  $|\Delta x|$  کوچک  $\phi \neq 0$  تعریف شده است،  $\phi(\Delta x) \rightarrow 0$  وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ، داریم

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \Delta x\phi(\Delta x) \quad (7)$$

همچنین چون  $g$  در  $b$  مشتق پذیر است، تابعی  $\psi$  وجود دارد که برای  $|\Delta y|$  کوچک  $\psi \neq 0$  تعریف شده

است،  $\psi(\Delta y) \rightarrow 0$  وقتی  $\Delta y \rightarrow 0$ ، و داریم

$$\Delta z - g'(b)\Delta y = \Delta y\psi(\Delta y) \quad (8)$$

با جایگزینی (8) در (9) حاصل می شود

$$\Delta z - g'(b)(f'(a)\Delta x + \Delta x\phi(\Delta x)) = (f'(a)\Delta x + \Delta x\phi(\Delta x))\psi(\Delta y)$$

یا

$$\Delta z - (g'(b)f'(a))\Delta x = \Delta x\{g'(b)\phi(\Delta x) + [f'(a) + \phi(\Delta x)]\psi(\Delta y)\}$$

اگر نشان دهیم عبارت داخل آکلاد  $\{ \}$  برای  $|\Delta x|$  کوچک  $\neq 0$  تعریف شده است و به صفر میل می کند وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ، حکم به اثبات می رسد. در داخل  $\{ \}$  کافی است نشان می دهیم  $\psi(\Delta y)$  برای  $|\Delta x|$  کوچک  $\neq 0$  تعریف شده است و به صفر میل می کند وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ، وضعیت سایر جملات روشن است.  $\psi(\Delta y)$  برای  $|\Delta y|$  کوچک تعریف شده است. چون  $f$  در  $a$  پیوسته است، اگر  $|\Delta x|$  به اندازه کافی کوچک باشد،  $|\Delta y|$  نیز به اندازه مورد نظر کوچک خواهد شد، پس  $\psi(\Delta y)$  برای  $|\Delta x|$  کوچک تعریف شده است. از طرفی دیگر مجدداً بنابر پیوستگی  $f$ ، اگر  $\Delta x \rightarrow 0$ ، داریم  $\Delta x \rightarrow 0$ ، پس  $\psi(\Delta y) \rightarrow 0$  وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ، و حکم به اثبات می رسد.  $\square$

مثال ۱. مشتق تابع  $h(x) = (x^2 + x + 1)^{10}$  را به دست آورید. البته در اینجا تابع  $h$  به وضوح مشتق پذیر است زیرا که اگر عبارت  $x^2 + x + 1$  در خود  $10$  بار ضرب شود یک چندجمله ای (از درجه  $20$ ) به دست می آید. اگر بنویسیم  $f(x) = x^2 + x + 1$  و  $g(x) = x^{10}$ ، داریم  $h(x) = (g \circ f)(x)$ .

چون  $f'(x) = 2x + 1$  و  $g'(x) = 10x^9$ ، طبق قاعده زنجیره ای داریم

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 10(x^2 + x + 1)^9(2x + 1) \end{aligned}$$

مثال ۲. نشان دهید تابع  $h(x) = \sin(\cos x)$  مشتق پذیر است و مشتق آن را به دست آورید. می نویسیم

بنابراین  $h(x) = (g \circ f)(x)$  پس  $g(x) = \sin x$  و  $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) \end{aligned}$$

مثال ۳. تابعی مشتق پذیر دارای این ویژگی است که  $f(0) = 0$  و  $f'(0) = 2$ . مشتق تابع  $h = f \circ f$  را در  $x = 0$  به دست آورید. طبق قاعده زنجیره ای داریم

$$h'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0)$$

چون  $f(0) = 0$ ، نتیجه می شود که  $h'(0) = f'(0)^2$  یا  $h'(0) = 4$ .

### (۱۵-۳) نمادگذاری لایب نیتس

لایب نیتس برای بیان مشتق نمادی ابداع کرد که برای محاسبات طولانی بسیار سودمند است هر چند که بی دقتی در استفاده از آن ممکن است موجب گمراهی شود. اگر تابع  $f$  را به  $y = f(x)$  نمایش دهیم و  $f$  مشتق پذیر باشد،  $f'(x)$  را لایب نیتس به  $\frac{dy}{dx}$  نمایش داد که در اینجا نماد  $x$  در مخرج نمایشگر متغیر و نماد  $y$  در صورت، نمایشگر مقدار تابع است. مقدار مشتق در نقطه  $x = a$  به این ترتیب به  $\frac{dy}{dx}|_a$ ،  $\frac{dy}{dx}(a)$  یا  $\frac{dy(f(a))}{dx(a)}$  نمایش داده می شود هر چند که نمایش سوم کمتر به کار می رود. از آنجا که مشتق، حد یک کسر، یعنی حد  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  است، این مفهوم از بعضی رفتارهای کسر گونه برخوردار است و گاهی شکل کسری  $\frac{dy}{dx}$  احکام درستی را تداعی می کند. ولی باید توجه داشت که  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  بدین معنی نیست که  $dy$  حد  $\Delta y$  است و  $dx$  حد  $\Delta x$ ، زیرا که در چارچوب ما حد  $\Delta x$  و  $\Delta y$  هر دو صفر هستند. تعبیر درستی که در این چارچوب می توان از  $\frac{dy}{dx}$  به عنوان یک کسر ارائه کرد به صورت زیر است. فرض کنید تابع  $f$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر است، یعنی  $f'(a)$  وجود دارد. اگر به جای  $f$ ، تقریب خطی  $f$  در نقطه  $a$  را در نظر بگیریم که نمودار آن یک خط راست به شیب  $f'(a)$  است، این تابع به هر مقدار نمو  $h$  از متغیر، مقدار نمو  $h f'(a)$  در مقدار تابع را نظیر می کند.  $dx(a)$  را باید نمو متغیر تابع تقریب خطی و  $dy(f(a))$  را نمو مقدار تابع تقریب خطی تلقی کرد، که در این صورت  $dy(f(a)) = f'(a) \cdot dx(a)$ . بدین ترتیب

پیشوند “d” در  $dx$  و  $dy$  بدین معنی است که متغیر، مربوط به تقریب خطی است، نه خود تابع. در مورد خود تابع، از  $\Delta x$  و  $\Delta y$  به عنوان نمو متغیر و نمو مقدار تابع استفاده می‌کنیم. شکل ۱ در توضیح این موضوع است.

با استفاده از نمادگذاری لایب‌نیس، نتیجه قاعدهٔ زنجیره‌ای به شکلی یادماندنی در می‌آید. اگر در

۱۵-۲ بنویسیم  $y = f(x)$  و  $z = g(y)$ ، آنگاه  $z = (g \circ f)(x)$ ، و (۷) صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{dz(g(b))}{dx(a)} = \frac{dz(g(b))}{dy(b)} \cdot \frac{dy(b)}{dx(a)} \quad (9)$$

یا

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(b) \cdot \frac{dy}{dx}(a) \quad (10)$$

که به اختصار نوشته می‌شود:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (11)$$

به این شکل، وقتی تعداد ترکیب‌ها زیاد و محاسبات طولانی است، پیگیری محاسبات سریعتر می‌شود ولی باید همواره در ذهن داشت که  $\frac{dz}{dy}$  و  $\frac{dy}{dx}$  در نقاط مختلف مطرح هستند، اولی در  $a$  و دومی در  $b = f(a)$ ، در حالی که  $\frac{dz}{dx}$  در نقطهٔ  $a$  مطرح است.

با روش تحریر (۱۰) ممکن است این سؤال پیش آید که چرا قاعدهٔ زنجیره‌ای با حذف  $dy(b)$  از صورت و مخرج نتیجه نمی‌شود؟ این کار دو اشکال دارد، اول اینکه تا مشتق‌پذیری  $g \circ f$  در نقطهٔ  $a$  ثابت نشود، اصلاً  $\frac{dz(g(b))}{dx(a)}$  معنی ندارد، و دوم اینکه ممکن است  $dy(b)$  صفر باشد که در این صورت حذف آن از صورت و مخرج مجاز نیست.

مثال ۱. ظرفی قیف شکل به ارتفاع  $20\text{ cm}$  و شعاع قاعدهٔ  $10\text{ cm}$  طوری قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و محور قیف در راستای قائم قرار دارد. اگر آب به سرعت  $20 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$  در این ظرف ریخته شود، آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب  $6\text{ cm}$  باشد پیدا کنید.

متغیر زمان برحسب ثانیه را به  $t$ ، ارتفاع آب در زمان  $t$  را به  $h$ ، و حجم آب در زمان  $t$  را به  $V$  نمایش می‌دهیم.  $h$  و  $V$  هر دو تابع  $t$  هستند و به فرض مشتق‌پذیری،  $\frac{dh}{dt}$  (آهنگ تغییر ارتفاع سطح آب) و  $\frac{dV}{dt}$  (آهنگ تغییر حجم آب) معنی دارند. در واقع  $\frac{dV}{dt} = 2$  داده شده است و مجهول مسأله  $\frac{dh}{dt}$  است وقتی که  $h = 6$ . توجه کنید که می‌توان  $V$  را به عنوان تابعی صرفاً از  $h$  در نظر گرفت. اگر  $r$  شعاع سطح آب در زمان  $t$  باشد، به سبب تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

پس

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

حال طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

از فرمول  $V$  برحسب  $h$  نتیجه می‌شود که  $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4}h^2$ ، پس با جایگزینی در فرمول بالا داریم:

$$2 = \left(\frac{\pi}{4}h^2\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

مجهول مسأله  $\frac{dh}{dt}$  است وقتی که  $h = 6$ ، پس  $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi} \frac{cm}{sec}$ .

مثال ۲. یک منبع نور  $S$  در فاصلهٔ ۴ متر از دیواری قرار دارد. این منبع نور در داخل محفظهٔ مدوری به مرکز  $S$  قرار دارد که با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\frac{1}{4}$  رادیان بر ثانیه در جهت مثلثاتی می‌چرخد. روی سطح این محفظه سوراخی قرار دارد که نور از آن سوراخ بر دیوار می‌تابد و در نتیجه یک نقطهٔ نورانی روی دیوار حرکت می‌کند. تندی حرکت نقطهٔ نورانی روی دیوار را وقتی این نقطه در فاصلهٔ ۵ متری از  $S$  قرار دارد پیدا کنید.

$\theta$  را زاویهٔ بین امتداد موازی دیوار از نقطهٔ  $S$  به شعاع حامل به سوراخ می‌گیریم. داریم:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{rad}{sec}\right)$$

از طرفی دیگر داریم  $x = 4 \cot \theta$ . بنابراین طبق قاعده زنجیره‌ای:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{4}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

که  $\frac{dx}{dt}$  سرعت حرکت نقطه نورانی روی دیوار است. وقتی فاصله  $S$  از دیوار ۵ متر باشد داریم

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{100}{16} \cdot \frac{1}{2} = -3/25$$

و چون تندی حرکت، یعنی قدرمطلق سرعت، مورد نظر است، نقطه نورانی وقتی فاصله آن از  $S$  پنج متر است با تندی  $3/25$  متر بر ثانیه حرکت می‌کند.

یکی از کاربردهای قاعده زنجیره‌ای یافتن مشتق تابع وارون (ترکیبی) است. فرض کنید  $I$  یک بازه است و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته (اکیداً) صعودی یا (اکیداً) نزولی. می‌دانیم که  $f^{-1}$  نیز پیوسته است. در زیر حالتی را در نظر می‌گیریم که  $f$  مضافاً مشتق‌پذیر با مشتق مثبت یا منفی در سراسر درون بازه  $I$  است.

(۴-۱۵) قضیه.  $I$  یک بازه است،  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی که در نقاط درونی  $I$  مشتق‌پذیر است و مشتق آن همه جا مثبت یا همه جا منفی است. در این صورت تابع وارون ترکیبی،  $f^{-1}$ ، نیز در همه نقاط درونی دامنه خود مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر نقطه درونی  $b = f(a)$  از دامنه  $f^{-1}$  داریم:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad (12)$$

برهان. اگر مشتق‌پذیری  $f^{-1}$  ثابت شود، فرمول بالا به سادگی از به‌کارگیری قاعده زنجیره‌ای برای  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$  نتیجه می‌شود، ولی اثبات مشتق‌پذیری که در زیر خواهد آمد خود این نتیجه را به‌دست می‌دهد. چون مشتق همه جا مثبت یا منفی است می‌دانیم که تابع صعودی یا نزولی است، و چون  $f$  پیوسته است، می‌دانیم که نقاط درونی بازه  $I$  تحت  $f$  به نقاط درونی بازه تعریف  $f^{-1}$  نگاشته



می‌شوند و بالعکس. حال فرض کنید  $a$  یک نقطه درونی  $I$  است، پس  $b = f(a)$  یک نقطه درونی دامنه  $f^{-1}$  می‌باشد. بنابراین اگر  $|k|$  به اندازه کافی کوچک باشد،  $b+k$  نیز یک نقطه درونی دامنه  $f^{-1}$  است. ولی دامنه  $f^{-1}$  از نقاط  $f(x)$  تشکیل شده است که  $x$  در دامنه  $f$  است، پس داریم  $b+k = f(a+h)$  برای  $h$  مناسب. بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(a+h)) - f^{-1}(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h}{f(a+h) - f(a)} \end{aligned}$$

از آنجا که  $f^{-1}$  پیوسته است نتیجه می‌گیریم که وقتی  $k \rightarrow 0$  آنگاه  $h \rightarrow 0$ ، بنابراین حد بالا برابر است با:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(a+h) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

و حکم مورد نظر به اثبات می‌رسد.

### (۱۵-۵) چند مثال مهم

(۱۵-۵-۱)  $\mathbb{R}^+$  را مجموعه اعداد حقیقی مثبت بگیرد و فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح ناصفر است. تابع  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $f(x) = x^n$  تعریف می‌شود مشتق پذیر است و  $f'(x) = nx^{n-1}$ . برای  $x \in \mathbb{R}^+$  داریم  $f'(x) > 0$  اگر  $n > 0$  و  $f'(x) < 0$  اگر  $n < 0$ . بنابراین تابع  $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

تعریف می‌شود طبق قضیه بالا مشتق پذیر است. از (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x^n) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{n} x^{1-n} \end{aligned}$$

و اگر به جای  $x^n$  مقدار  $x$  را جایگزین کنیم:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad (13)$$

پس فرمول  $\frac{d(x^p)}{dx} = px^{p-1}$  هم برای اعداد صحیح  $p$  و هم برای اعداد به شکل  $\frac{1}{n}$  برقرار است. در واقع اکنون نتیجه می‌شود که فرمول برای توان گویا برقرار است زیرا تابع  $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^{\frac{m}{n}}$  را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع  $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$  و  $g(x) = x^m$  نوشت،  $h = g \circ f$  پس طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\
 &= m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (\frac{1}{n})x^{\frac{1}{n}-1} \\
 &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}
 \end{aligned}$$

(۱۵-۵-۲) دیدیم که اگر تابع مثلثاتی سینوس را به دامنه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  محدود کنیم، وارون ترکیبی آن،  $\sin^{-1}$ ، وجود دارد و پیوسته است. حال  $\sin' x = \cos x$  در درون بازهٔ تعریف، یعنی در  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  همواره مثبت است، پس  $\sin^{-1}$  در  $[-1, 1]$  مشتق پذیر است. اگر با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای از  $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$  مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\sin'(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

$$\cos(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1})'(x) = 1$$

برای  $x$  در  $[-1, 1]$ ،  $\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$  پس مقدار می‌گیرد، نتیجه:

$$(\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (14)$$

ضمناً توجه کنید که چون:

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه می‌شود که:

$$(\cos^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (15)$$

(۱۵-۵-۳) تابع  $\tan^{-1}$  را در نظر می‌گیریم که روی  $\mathbb{R}$  تعریف شده است و در  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$  مقدار می‌گیرد. از آنجا که  $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$ ، طبق قضیه،  $\tan^{-1}$  مشتق پذیر است. به علاوه با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، اگر از  $\tan(\tan^{-1}(x)) = x$  مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\tan'(\tan^{-1} x) \cdot (\tan^{-1})'(x) = 1$$

$$(1 + \tan^2(\tan^{-1}(x))) \cdot (\tan^{-1})'(x) = 1$$

پس

$$(\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (16)$$

مجدداً از اینکه  $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{4}$  نتیجه می‌گیریم که

$$(\cot^{-1})'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \quad (17)$$

## تقریب خطی

از بدو بررسی مشتق دیدیم که از میان همه خطوط راستی که از یک نقطه نمودار یک تابع مشتق پذیر می گذرند، خط مماس به معنایی "نزدیکترین" این خطوط به نمودار تابع است. به طور دقیق، برای نقاط نزدیک نقطه داده شده، تفاضل مقدار  $y$  روی نمودار و روی خط مماس آنقدر کوچک است که این تفاضل به سرعت مضاعف (مانند  $\Delta x \phi(\Delta x)$ ) به صفر میل می کند. طبیعی است که کوشش کنیم از این نزدیکی برای تقریب مقدار تابع استفاده کنیم چه محاسبه  $y$  برای خط راست که معادله درجه یک دارد کاری بسیار ساده است. اگر تابع  $f$  در نقطه درونی  $a$  از دامنه خود مشتق پذیر باشد، تقریب زدن مقدار  $f$  در نزدیکی  $a$  را به صورت زیر نمایش می دهیم

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h \quad (1)$$

با نوشتن  $h = \Delta x$  و  $f(a+h) - f(a) = \Delta y$ ، (1) به صورت

$$\Delta y \simeq f'(a)\Delta x \quad (2)$$

نیز نوشته می شود. به نماد لایب نیتس، اگر نمو متغیر تقریب خطی، یعنی  $dx$ ، را به اندازه  $\Delta x$  بگیریم، (2) به صورت زیر در می آید

$$Dy \simeq dy \quad (3)$$

در نوشتگان گوناگون ممکن است به هر یک از سه صورت بالا برخورد کنید، که همه یک معنی دارند. چند مثال محاسباتی ارائه می کنیم.

مثال ۱. مقداری تقریبی برای  $\sqrt[3]{1/0.12}$  ارائه کنید.

در این نوع مسایل باید تابعی مناسب محاسبه مورد نظر ارائه کنیم، مثلاً در اینجا  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ؛ سپس عددی  $a$ ، نزدیک متغیر مورد محاسبه که برای آن محاسبه مقدار تابع، یعنی  $f(a)$ ، ساده باشد، در اینجا  $a = 1$ ؛ و بالاخره  $h$  را برابر تفاضل عدد داده شده و عدد  $a$  بگیریم؛ در اینجا  $h = 0/0.12$ . بدین ترتیب تقریب (۱) در اینجا به شکل زیر در می آید

$$\sqrt[3]{1/0.12} \simeq \sqrt[3]{1} + f'(1) \cdot (0/0.12)$$

با مشتق گیری از  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$  داریم  $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ ؛ پس  $f'(1) = -\frac{1}{3}$  و داریم

$$\sqrt[3]{1/0.12} \simeq 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(0/0.12) = 1/0.04$$

مثال ۲. گفته می شود که برای مقادیر کوچک  $|\theta|$ ، برحسب رادیان،  $\sin \theta \simeq \theta$ . نشان می دهیم مبنای این ادعا، تقریب خطی است. می نویسیم  $f(x) = \sin x$ ؛ پس  $f'(x) = \cos x$ ؛ و  $a = 0$ ؛ پس  $f(a) = 0$  و  $f'(a) = 1$ . بنابراین با قراردادن  $\theta$  به جای  $h$  در (۱) داریم

$$\sin \theta \simeq 0 + 1 \cdot \theta = \theta$$

مثال ۳. ظرف قیف شکل طبق شکل ۱ را در نظر می گیریم که ارتفاع آن ۲۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۱۰ سانتی متر است و طوری قرار گرفته که رأس آن در پایین و محور مخروط در راستای قائم قرار دارد. مقداری آب در این ظرف ریخته شده است و ارتفاع آب از رأس قیف برابر ۶ سانتی متر با خطای ممکن  $\pm 0/1$  سانتی متر اندازه گیری شده است. اگر حجم آب موجود در این ظرف را براساس ارتفاع اندازه گیری شده محاسبه کنیم؛ خطای ممکن در محاسبه حجم حداکثر چه قدر است؟

اگر ارتفاع سطح آب را به  $h$  و شعاع سطح آب را به  $r$  نمایش دهیم؛ از تشابه مثلث ها داریم

$$r = \frac{h}{4}$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

با مشتق گیری نتیجه می شود که

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4}h^2$$

با استفاده از (۲) داریم

$$\Delta V \simeq \left(\frac{\pi}{4}(6^2)\right)\Delta h = (9\pi)(\Delta h)$$

خطای محاسبه ارتفاع سطح آب  $\pm 0/1$  سانتی متر فرض شده است، یعنی  $|\Delta h| \leq 0/1$  بنابراین  $|\Delta V|$  حدوداً از  $\frac{9}{10}\pi$  یعنی حدوداً  $2/83$  سانتی متر مکعب کوچکتر است.

مثال های بالا را باید از نظر علمی بدوی تلقی کرد زیرا که در کاربردهای مختلف درجه دقت های متفاوت مورد نظر است و تقریبی که در یک کاربرد پذیرفتنی است در کاربردی دیگر ممکن است منجر به خطاهای غیرقابل قبول شود. برای هر روش تقریب باید قاعده ای عملی برای تخمین حدود خطا نیز ارائه شود که به کمک آن بتوانیم به یک ارزیابی در مورد قابل قبول بودن روش تقریب دست یابیم. در مورد تقریب خطی به زودی به چنین روشی برای تخمین خطا دست خواهیم یافت ولی در حال حاضر موضوع "خطای نسبی" را مطرح می کنیم که از نظر عملی اغلب ضابطه ای سودمندتر از خطای مطلق است. به طور کلی، خطای نسبی برابر نسبت خطا به مقدار واقعی تعریف می شود. بدین ترتیب اگر نموی کوچک متغیر، یعنی  $\Delta x$ ، را به عنوان خطا در اندازه گیری مقدار  $x$  متغیر فرض کنیم، خطای نسبی  $\frac{\Delta x}{x}$  خواهد بود، و نیز خطای نسبی متناظر برای مقدار تابع،  $\frac{\Delta y}{y}$  می شود.

مثال ۴. در مثال ۳ بالا، اگر ارتفاع آب ۶ سانتی متر با خطای نسبی حداکثر یک درصد اندازه گیری شده باشد، حداکثر خطای نسبی حاصل در محاسبه حجم متناظر چیست؟

در اینجا داریم  $|\frac{\Delta h}{h}| \leq \frac{1}{100}$  و می خواهیم کران بالایی برای  $|\frac{\Delta V}{V}|$  به دست آوریم. داشتیم

$$\Delta V \simeq f'(a)\Delta h$$

با تقسیم کردن بر  $V$  نتیجه می شود

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \left(\frac{\pi}{4}h^2\right) \frac{\Delta h}{\frac{\pi}{12}h^3} = 3 \frac{\Delta h}{h}$$

بنابراین  $|\frac{\Delta V}{V}| \leq \frac{3}{100}$ ؛ یعنی خطای نسبی متناظر در محاسبه حجم حداکثر ۳ درصد است.

مثال ۵. مثال بالا را می توان به این صورت تعمیم داد. فرض کنید  $y = kx^n$  که در آن  $k$  ثابت است. اگر در محاسبه یا اندازه گیری  $x$  حداکثر خطای نسبی  $r$  درصد باشد، حداکثر خطای نسبی در محاسبه  $y$  چیست؟

داریم  $\frac{dy}{dx} = nkx^{n-1}$  پس

$$\Delta y \simeq nkx^{n-1} \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{nkx^{n-1}}{kx^n} \Delta x = n \frac{\Delta x}{x}$$

بدین ترتیب اگر کمیت  $y$  متناسب با توان  $n$  کمیت  $x$  باشد خطای نسبی در  $y$  حدوداً  $n$  برابر خطای نسبی در  $x$  خواهد بود. به یک مثال آشنا در این زمینه توجه کنید. مربعی به ضلع  $a$  با خطای  $\pm h$  داده شده است. می خواهیم خطای احتمالی حادث در محاسبه مساحت مربع را تخمین بزنیم. داریم

$$(a \pm h)^2 - a^2 = \pm 2ah + h^2$$

اگر  $h$  کوچک باشد،  $h^2$  در مقایسه بسیار کوچکتر است و معمولاً "قابل صرف نظر" تلقی می شود.  $h^2$  برابر مساحت گوشه کوچک هاشورزده در شکل ۲ است. بنابراین داریم

$$(a \pm h)^2 - a^2 \simeq \pm 2ah$$

این دقیقاً برابر نتیجه ای است که از تقریب خطی تابع  $f(x) = x^2$  حاصل می شود؛ با تقسیم بر  $a^2$  نتیجه زیر به دست می آید

$$\frac{(a \pm h)^2 - a^2}{a^2} \simeq \pm 2 \frac{h}{a}$$

در اینجا  $\frac{h}{a}$  خطای نسبی در محاسبه طول ضلع مربع است و طرف چپ خطای نسبی در محاسبه مساحت مربع.

اکنون به بررسی تخمین خطا در تقریب خطی می‌پردازیم. چهار نمونه تقریب خطی در نمودارهای شکل ۳ را در نظر بگیرید.

در همه موارد به وضوح مشاهده می‌شود که هر چه  $|h|$  کوچکتر باشد، فاصله بین خط مماس و نمودار تابع کوچکتر است. تفاوت دیگری که میان شکل‌های (الف) و (ب) از یک سو با (ج) و (د) در سوی دیگر وجود دارد این است که با رشد  $|h|$  در شکل‌های (الف) و (ب)، میزان خطا، یعنی اختلاف مقدار  $y$  میان نمودار تابع و تقریب خطی، به شدت افزایش می‌یابد در حالی که در شکل‌های (ج) و (د)، نمو خطا به نسبت کند است. در (ج) و (د) نمودار تا فاصله زیادی نسبت  $(a, f(a))$  نزدیک به خط راست می‌ماند در حالی که در (الف) و (ب)، انحراف نمودار از "راست بودن" بسیار شدید است. چگونه می‌توان این تفاوت را به صورت ریاضی صورت‌بندی کرد؟ اگر فرض کنیم تابع  $f$  در سراسر دامنه، یا دست‌کم در بازه‌ای حول  $a$ ، مشتق‌پذیر است، یعنی خط مماس بر تابع در همه نقاط نمودار یا دست‌کم نقاط نزدیک به  $(a, f(a))$  وجود دارد، آنگاه مشاهده می‌کنیم که شیب مماس در شکل‌های (الف) و (ب) سریعاً تغییر می‌کند در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) شیب مماس آهنگ تغییر کندی دارد. ولی شیب مماس برابر مشتق تابع است، پس در شکل‌های (الف) و (ب) آهنگ تغییر مشتق تابع در قدرمطلق بزرگ است، در حالی که در شکل‌های (ج) و (د) آهنگ تغییر مشتق کوچک می‌باشد. بنابراین اگر مشتق تابع  $f$ ، یعنی  $f'$ ، را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم، و اگر این تابع خود مشتق‌پذیر باشد، از آنجا که آهنگ تغییر به وسیله مشتق سنجیده می‌شود، اندازه مشتق  $f'$  باید نشان‌دهنده شدت انحراف نمودار از یک خط راست باشد، مشتق  $f'$  را که به  $f''$  نمایش می‌دهند، "مشتق دوم  $f$ " می‌نامند. در زیر تعریف دقیق را بررسی می‌کنیم:

(۱-۱۷)  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع است و  $f$  در نقاط زیرمجموعه‌ای  $S'$  از  $S$  مشتق‌پذیر است، یعنی  $f' : S' \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف شده است. برای نقطه درونی  $a$  از  $S'$ ، اگر مشتق  $f'$  در نقطه  $a$  وجود داشته باشد، آن را مشتق دوم  $f$  در نقطه  $a$  خوانده و به  $f''(a)$  نمایش می‌دهیم.

اگر بنویسیم  $y = f(x)$ ، در نمادگذاری لایب‌نیتس،  $f''(x)$  به  $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$  یا اختصاراً  $\frac{d^2y}{dx^2}$  نمایش داده می‌شود.



اکنون می‌توانیم به کمک مشتق دوم  $f$ ، تخمینی برای خطای تقریب خطی ارائه کنیم.

(۲-۱۷) (تخمین خطای تقریب خطی) فرض کنید تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  در یک بازه باز شامل نقطه درونی  $a$  از  $S$  دارای مشتق‌های مرتبه اول و دوم است. در این صورت اگر نقطه  $a+h$  در این بازه باشد داریم

$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)h] = \frac{1}{2} f''(c) h^2 \quad (۴)$$

که در آن  $c$  نقطه‌ای بین  $a$  و  $a+h$  است.

توجه کنید که این حکم با انتظارات ما سازگار است. از یک طرف هر قدر  $|h|$  کوچکتر باشد، خطای منتظره کوچکتر است (در واقع طرف راست (۴) با مجذور  $h$  متناسب است)، و از طرفی دیگر اندازه مشتق دوم بین  $a$  و  $a+h$  می‌تواند بر مقدار خطا اثر بگذارد. ظهور مجذور  $h$  بدین معنی است که در مبنای عددنویسی اعشاری اگر اندازه‌گیری  $a$  یک رقم اعشار دقیق‌تر شود، می‌توان انتظار داشت که خطای محاسبه تا دو رقم اعشار کاهش یابد زیرا اگر به جای  $h$  از  $\frac{h}{10}$  استفاده کنیم، طرف راست (۴) بر ۱۰۰ تقسیم خواهد شد. در اثبات ۲-۱۷ خواهیم دید که حکم آن در واقع همتای قضیه میانگین برای تابع‌های دوبار مشتق‌پذیر است. در واقع اثبات ما به تبعیت از اثبات قضیه میانگین با ارائه همتایی از قضیه رل شروع خواهد شد.

(۳-۱۷) (همتای قضیه رل برای مشتق دوم)  $I$  یک بازه باز است،  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی دارای مشتق‌های مرتبه اول و دوم در  $I$ ،  $a$  و  $b$  دو نقطه  $I$  که  $a < b$ ،  $f(a) = f(b) = 0$  و  $f'(a) = 0$ . در این صورت نقطه‌ای  $c$  وجود دارد،  $a < c < b$ ، که  $f''(c) = 0$ .

برهان. شرایط قضیه رل معمول برای  $[a, b]$  برقرار است، پس نقطه‌ای  $c_1$  وجود دارد،  $a < c_1 < b$ ، که  $f'(c_1) = 0$ .

حال شرایط قضیه رل معمولی برای تابع  $f'$  در  $[a, c_1]$  برقرار می‌شود زیرا که  $f'(a) = f'(c_1) = 0$ ، پس نقطه‌ای  $c$  وجود دارد  $a < c < c_1$ ، که  $f''(c) = (f')'(c) = 0$ . □

(۱۷-۴) (همتای قضیه میانگین برای مشتق دوم)  $I$  یک بازه باز است،  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی دارای مشتق‌های مرتبه اول و دوم در  $I$ ،  $a$  و  $b$  و نقطه  $I$  که  $a < b$ . در این صورت نقطه‌ای  $c$  وجود دارد، که  $a < c < b$ :

$$f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)] = \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2 \quad (5)$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم  $b = a + h$ ، (۵) به (۴) تبدیل می‌شود و پس از اثبات ۱۷-۴، صحت ۱۷-۲ نیز نتیجه می‌شود.

برهان ۱۷-۴. مشابه شیوه‌ای که از قضیه رل معمولی، قضیه میانگین را نتیجه گرفتیم، عمل می‌کنیم. در آنجا با کم کردن مقدار  $y$  خط واصل از  $(a, f(a))$  به  $(b, f(b))$  از  $y = f(x)$  دیدیم که تفاضل در قضیه رل صدق می‌کند. در اینجا چون شیب خط راست فوق لازم نیست برابر  $f'(a)$  باشد، این تفاضل شرط لازم برای مشتق در نقطه آغازی را برآورده نمی‌کند. بنابراین تابعی یک درجه پیچیده‌تر از تابع درجه یک (با نمودار خط راست) باید جستجو کنیم که در نقطه  $a$  مقدار تابع و مقدار مشتق آن برابر به ترتیب  $f(a)$  و  $f'(a)$  باشند، و در نقطه  $b$  مقدار تابع برابر  $f(b)$ . برای برآورده کردن این سه شرط یک تابع درجه ۲ کفایت می‌کند. تابعی کمکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$$

برای اینکه  $\phi(a) = f(a)$ ، باید داشته باشیم  $A = f(a)$ . اگر یک بار از  $\phi$  مشتق بگیریم حاصل می‌شود:

$$\phi'(x) = B + 2C(x-a)$$

برای اینکه  $\phi'(a) = f'(a)$ ، باید داشته باشیم  $B = f'(a)$ ، پس

$$\phi(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + C(x-a)^2 \quad (6)$$

برای تعیین ضریب  $C$ ، از شرط  $\phi(b) = f(b)$  استفاده می‌کنیم:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + C(b-a)^2$$

یا

$$C = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^2} \quad (7)$$

بدین ترتیب با این مقدار برای  $C$ ، تابع  $\phi$  در (6) در شرایط زیر صدق می کند:

$$\phi(a) = f(a) \quad , \quad \phi'(a) = f'(a) \quad , \quad \phi(b) = f(b) \quad (8)$$

حال تابع  $g$  را به صورت

$$g(x) = f(x) - \phi(x)$$

تعریف می کنیم. از (8) نتیجه می شود که

$$g(a) = g(b) = 0 \quad , \quad g'(a) = 0$$

بنابراین طبق (3-17) نقطه ای  $c$  وجود دارد، که  $a < c < b$ ،  $g''(c) = 0$ ، ولی:

$$g''(c) = f''(c) - 2C = 0$$

یا

$$f''(c) = (2) \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^2}$$

□ و با طرفین - وسطین حکم (5) نتیجه می شود.

بدین ترتیب همان طور که قبل از ارائه برهان اشاره شد، تخمین خطای تقریب خطی، یعنی فرمول

(4) و گزاره 2-17 از 4-17 نتیجه می شوند.

مثال 6. تقریب خطی  $\sqrt[3]{1/0.12} \simeq 1/0.04$  را که در مثال 1 آوردیم بررسی می کنیم. در این مثال

داشته ایم  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، پس  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  و  $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ . بنابراین طبق 2-17

$$\sqrt[3]{1/0.12} - 1/0.04 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)\frac{1}{c^{\frac{5}{3}}}\left(\frac{12}{1000}\right)^2 \quad (9)$$

که در اینجا  $c$  بین ۱ و  $۱/۰۱۲$  است.  $۱۷-۲$  اطلاع دقیق تری در مورد  $c$  نمی دهد و اصولاً نباید انتظار داشت که بتوان میزان خطا را به راحتی و دقت به دست آورد زیرا در این صورت با افزودن این مقدار به مقدار تقریبی، مقدار دقیق به دست می آید. آنچه در اینجا مطلوب است یافتن حدود یا یک کران بالایی برای قدرمطلق خطاست. اگر بتوانیم کرانی بالایی برای خطا به دست آوریم که در کاربرد خاص مورد نظر قابل قبول باشد، تقریب مطرح شده نیز پذیرفتنی است. در اینجا چون  $۱ < c < ۱/۰۱۲$  و  $c$  در مخرج طرف راست (۹) است، با قرار دادن  $c = ۱$ ، قدرمطلق طرف راست (۹) یک کران بالایی برای قدرمطلق خطا به دست می دهد:

$$|\sqrt[3]{1/0.12} - 1/0.04| < \frac{17}{106}$$

بنابراین اگر مثلاً دقت  $۱۰^{-۴}$  مورد نظر باشد، تقریب بالا قابل قبول است. اگر از قاعده روند کردن استفاده کنیم، چون  $1/0.04 < \frac{17}{106} < 10^{-۴}$ ، تقریب  $1/0.04$  تا چهار رقم اعشار درست است. محاسبه با یک ماشین حساب به نسبت قوی می دهد  $\sqrt[3]{1/0.12} \simeq 1/0.039841$  که اگر به چهار رقم پس از اعشار روند شود به همان  $1/0.04$  می رسد.

ذکر یکی دو نکته در مورد مثال بالا لازم است. اول اینکه علامت منفی طرف راست (۹) نشانگر این است که تقریب  $1/0.04$  از مقدار واقعی بزرگتر است. در واقع با توجه به علامت منفی  $f''(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$  برای  $x > 0$ ، مشاهده می کنیم که  $\frac{1}{3}f''(c)h^2 < 0$  و طبق (۴) نمودار تابع همواره زیر خط مماس قرار دارد (شکل ۵).

نکته دوم که از  $f''(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$  و نیز نمودار تابع  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ،  $x > 0$ ، مشاهده می شود این است که  $|f''(x)|$  به  $+\infty$  میل می کند وقتی  $x \rightarrow 0^+$ ، در حالی که  $|f''(x)|$  به صفر میل می کند وقتی  $x \rightarrow +\infty$ . در نمودار این نکته به این صورت ظاهر می شود که شیب خط مماس بر نمودار وقتی  $x \rightarrow 0^+$  به شدت تغییر می کند در حالی که تغییر شیب وقتی  $x \rightarrow +\infty$  بسیار کندتر است. بنابراین می توان انتظار داشت که مثلاً مقداری که تقریب خطی در نقطه  $a = 1$  برای  $\sqrt[3]{1+h}$  به دست می دهد، یعنی  $1 + \frac{h}{3}$ ، برای  $h > 0$  دقیق تر از  $h < 0$  با همان  $|h|$  باشد. مثلاً برای  $h = 0.21$  مقدار تقریبی  $1/0.7$  به دست می آید که تا دو رقم اعشار با روند کردن درست است (ماشین حساب به نسبت قوی

مقدار  $1/0.656$  را می دهد که با روند کردن به  $1/0.7$  تبدیل می شود). این در حالی است که برای  $h = -0.21$  تقریب  $0.93$  با مقدار ارائه شده توسط ماشین حساب به صورت  $0.92443$  تا دو رقم پس از اعشار، پس از روند کردن، مطابقت ندارد. برای  $|h|$  بزرگتر تفاوت فاحش تر می شود. برای  $h = 1$  اختلاف تقریب خطی  $1/333333 = 1 + \frac{1}{3}$  با مقدار  $1/259921$  ماشین حساب حدوداً  $0.073412$  است در حالی که برای  $h = -1$ ، تقریب خطی  $\frac{2}{3}$  با مقدار واقعی  $0.666666$ ، اختلاف دارد.

## نمودار تابع و کاربردهای آن

بحث جلسه قبل اهمیت مشتق دوم را در تخمین خطای تقریب خطی نشان داد. در اینجا نخست به بررسی بیشتر کاربردهای مشتق دوم می پردازیم. یادآوری می کنیم که اگر تابع  $f$  در بازه  $I$  دوبار مشتق پذیر باشد و  $a$  و  $a + h$  در این بازه باشند، آنگاه:

$$f(a + h) - [f(a) + f'(a)h] = \frac{1}{2}f''(c)h^2 \quad (1)$$

که در آن  $c$  نقطه ای بین  $a$  و  $a + h$  است. از (۱) بلافاصله نتیجه می شود که:

(۱۸-۱) گزاره. فرض کنید  $I$  یک بازه باز است و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی دوبار مشتق پذیر که مشتق دوم آن در سراسر بازه  $I$  مثبت (به ترتیب منفی) است. در این صورت برای هر نقطه درونی  $a$  از  $I$ ، نمودار تابع به ازای هر  $x \neq a$  در بالا (به ترتیب پایین) خط مماس در نقطه  $a$  قرار می گیرد. به بیان دیگر:

$$x \neq a \quad : \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2)$$

$$(x \neq a \quad : \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{به ترتیب}) \quad (3)$$

□

ضمناً در وضعیت  $f'' > 0$ ، مشتق اول، یعنی شیب مماس، صعودی؛ و در وضعیت  $f'' < 0$ ، شیب مماس نزولی خواهد بود. اگر  $a < b < c$  طوری باشند که  $f''$  روی  $[a, b]$  و  $[b, c]$  علامت مختلف داشته باشد، نقطه  $b$  را یک نقطه عطف می نامند. اگر  $f''$  پیوسته باشد در این نقطه که  $f''$  تغییر علامت

می‌دهد باید داشته باشیم  $f''(b) = 0$ . در شکل ۱ (الف) تابعی با  $f'' > 0$ ، در شکل ۱ (ب) تابعی با  $f'' < 0$ ، و در شکل ۱ (ج) یک نقطه عطف نمایش داده شده است.

از شکل‌های ۱ (الف) و ۱ (ب) به نظر می‌رسد که وقتی  $f'' > 0$ ، خط واصل بین هر دو نقطه نمودار باید در بالای نمودار قرار گیرد، و بالعکس وقتی  $f'' < 0$ ، خط واصل بین دو نقطه نمودار در زیر نمودار تابع واقع می‌شود. این حدس در واقع درست است:

(۱۸-۲) گزاره.  $I$  یک بازه باز است و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی دوبار مشتق‌پذیر. فرض کنید  $f''$  در سراسر  $I$  مثبت (به ترتیب منفی) است. در این صورت برای هر دو نقطه  $a$  و  $b$  از  $I$  که  $a < b$ ، خط واصل بین  $(a, f(a))$  و  $(b, f(b))$  بالای (به ترتیب پایین) نمودار  $f$  روی  $[a, b]$  قرار می‌گیرد.

برهان. مطلب را برای  $f'' > 0$  ثابت می‌کنیم، حالت  $f'' < 0$  مشابه است و نیز با تعویض  $f$  به  $-f$  به دست می‌آید. توجه کنید که نقاط بازه  $[a, b]$  را می‌توان به صورت  $(1-t)a + tb$  (نوشت که در آن  $0 \leq t \leq 1$ ). همچنین هر نقطه پاره‌خط واصل بین  $(a, f(a))$  و  $(b, f(b))$  به صورت  $((1-t)a + tb, (1-t)f(a) + tf(b))$ ،  $0 \leq t \leq 1$ ، نمایش داده می‌شود. در واقع باید ثابت کنیم:

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b) \quad : \quad 0 < t < 1 \quad (4)$$

فرض می‌کنیم به‌ازای یک  $t$ ،  $0 < t < 1$ ، نامساوی (۴) برقرار نیست و به تناقض می‌رسیم. بدین ترتیب فرض کنید  $t$  وجود دارد که

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

پس

$$(1-t)f((1-t)a + tb) + tf((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

بنابراین

$$(1-t)(f((1-t)a + tb) - f(a)) \geq t(f(b) - f((1-t)a + tb))$$

اگر دو طرف را بر  $t(1-t)(b-a)$  تقسیم کنیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{f((1-t)a+tb) - f(a)}{t(b-a)} \geq \frac{f(b) - f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}$$

یا:

$$\frac{f((1-t)a+tb) - f(a)}{(1-t)a+tb-a} \geq \frac{f(b) - f((1-t)a+tb)}{b - ((1-t)a+tb)}$$

برای سهولت در نوشتن، نقطه  $(1-t)a+tb$  را به  $c$  نمایش دهید. پس داریم:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a} \geq \frac{f(b) - f(c)}{b-c}$$

کسر سمت چپ شیب خط واصل بین  $(a, f(a))$  و  $(c, f(c))$  است. طبق قضیه میانگین نقطه‌ای  $c_1$  بین  $a$  و  $c$  وجود دارد که کسر سمت چپ برابر  $f'(c_1)$  است. به همین ترتیب نقطه‌ای  $c_2$  وجود دارد،  $c < c_2 < b$  که  $f'(c_2)$  برابر کسر سمت راست است. بنابراین

$$f'(c_1) \geq f'(c_2)$$

ولی چون  $f', f'' > 0$  صعودی است، پس  $f'(c_1) < f'(c_2)$  و به تناقض مورد نظر رسیده‌ایم. □  
 به طور کلی تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطه نمودار در بالای نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های محدب (محدب رو به پایین، یا مقعر رو به بالا)، و تابع‌هایی که برای آنها خط واصل بین دو نقطه نمودار در زیر نمودار تابع قرار گیرد تابع‌های مقعر (مقعر رو به پایین، یا محدب رو به بالا) می‌نامند. بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که:

(۳-۱۸) نتیجه. فرض کنید  $I$  یک بازه باز و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  دوبار مشتق پذیر است. اگر  $f''$  در سراسر  $I$

مثبت (به ترتیب منفی) باشد، تابع  $f$  در  $I$  محدب (به ترتیب مقعر) است. □  
 با توجه به این نتیجه می‌توان در رسم نمودار تابع‌ها، با توجه به علامت مشتق دوم بازه‌های تحدب و تقعر تابع را منظور نمود.

حال فرض کنید تابع  $f$  در بازه‌ای حول نقطه درونی  $a$  از بازه خود مشتق پذیر است و در نقطه  $a$  دارای مشتق دوم،  $f''(a)$ ، است. آیا علامت  $f''(a)$  در تک نقطه  $a$  اطلاعاتی در مورد این نقطه



به دست می دهد؟ در بخش ۱۵، احکام ۱-۴-۱۵ و ۲-۴-۱۵ نشان دادند که اگر برای تابعی  $g$  داشته باشیم  $g'(a) > 0$  (به ترتیب  $g'(a) < 0$ )، آنگاه برای  $x$  های نزدیک  $a$  و بزرگتر از  $a$  داریم  $g(x) > g(a)$  (به ترتیب  $g(x) < g(a)$ )، و برای  $x$  های نزدیک و کوچکتر از  $a$  داریم  $g(x) < g(a)$  (به ترتیب  $g(x) > g(a)$ ). حال اگر به جای  $g$  تابع  $f'$  را جایگزین کنیم، نتیجه می شود که به فرض  $f''(a) > 0$  (به ترتیب  $f''(a) < 0$ )، برای  $x$  های نزدیک و بزرگتر از  $a$  داریم  $f'(x) > f'(a)$  (به ترتیب  $f'(x) < f'(a)$ )، و برای  $x$  های نزدیک و کوچکتر از  $a$  داریم  $f'(x) < f'(a)$  (به ترتیب  $f'(x) > f'(a)$ ). بالاخص اگر  $f'(a) = 0$ ، یعنی  $a$  یک نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد نتیجه می شود که:

• اگر  $f''(a) > 0$ ، برای  $x$  های نزدیک و بزرگتر از  $a$  داریم  $f'(x) > 0$  و برای  $x$  های نزدیک و کوچکتر از  $a$  داریم  $f'(x) < 0$ .

• اگر  $f''(a) < 0$ ، برای  $x$  های نزدیک و بزرگتر از  $a$  داریم  $f'(x) < 0$  و برای  $x$  های نزدیک و کوچکتر از  $a$  داریم  $f'(x) > 0$ .

پس در وضعیت  $f'(a) = 0$  و  $f''(a) > 0$ ، تابع در سمت راست  $a$  صعودی، در سمت چپ آن نزولی است، در نتیجه  $a$  یک نقطه کمینه موضعی خواهد بود. به همین ترتیب، وقتی  $f'(a) = 0$  و  $f''(a) < 0$ ، نقطه  $a$  یک بیشینه موضعی است. بنابراین "آزمون مشتق دوم" به شرح زیر ثابت شده است.

(۱۸-۴) آزمون مشتق دوم. فرض کنید تابع  $f$  در یک بازه حول نقطه درونی  $a$  از دامنه خود مشتق پذیر است و در نقطه  $a$ ، مشتق دوم  $f$ ،  $f''(a)$ ، وجود دارد. به علاوه فرض کنید  $f'(a) = 0$ . در این صورت:

الف) اگر  $f''(a) > 0$ ، نقطه  $a$  یک کمینه (مینیم) موضعی است.

ب) اگر  $f''(a) < 0$ ، نقطه  $a$  یک بیشینه (ماکسیم) موضعی است. □

آزمون مشتق دوم نیز در رسم نمودار تابع ها گاهی مؤثر واقع می شود. اگر علاوه بر  $f'(a) = 0$  داشته باشیم  $f''(a) = 0$ ، اطلاعی در مورد ماهیت نقطه  $a$  حاصل نمی شود. در شکل (۴) چهار نمونه با

$f'(a) = f''(a) = 0$  . نمایش داده شده‌اند که چهار وضعیت مختلف دارند.

چند مثال زیر شکل‌های ۱ و ۳ بخش ۱۵ را توجیه می‌کنند.

مثال ۱. نمودار تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ،  $f(x) = x^4 - x^3$  را رسم کنید.

داریم  $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$  ،  $f''(x) = 12x^2 - 6x$  . در جدول زیر علامت تابع و علامت

مشتق‌های اول و دوم آن را در بازه‌های گوناگون نمایش داده‌ایم:

$x$	$0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$0$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$0$	$+$	$+$

با توجه به داده‌های بالا، شکل ۳ (الف) به دست می‌آید.

مثال ۲. نمودار تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ،  $f(x) = x - \sin x$  را رسم کنید.

داریم  $f'(x) = 1 - \cos x$  و  $f''(x) = \sin x$  . این تابع صعودی است زیرا که فقط در مجموعه‌ای

گسسته از نقاط، یعنی  $x = 2k\pi$  مشتق صفر می‌شود و در سایر نقاط مشتق مثبت است، پس بین هر دو

مضرب متوالی  $2\pi$  تابع صعودی است. مشتق دوم تابع در مضارب  $\pi$  صفر می‌شود و تغییر علامت

می‌دهد، پس این نقاط همه نقاط عطف هستند. ضمناً داریم  $f(0) = 0$  ، و از صعودی بودن تابع نتیجه

می‌شود که  $f(x) > 0$  برای  $x > 0$  و  $f(x) < 0$  برای  $x < 0$  . با در نظر گرفتن علامت  $f''$  در بازه‌های

مختلف، شکل ۳ (ب) به دست می‌آید.

مثال ۳. نمودار تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را که به صورت زیر تعریف شده است رسم کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

برای  $x \neq 0$  تابع داده شده ترکیب و حاصل ضرب تابع‌های مشتق‌پذیر است پس برای  $x \neq 0$

مشتق‌پذیر می‌باشد. در  $x = 0$  مشتق‌پذیر بودن تابع را مستقیماً از تعریف تحقیق می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h) \left( \sin \frac{1}{h} \right)$$

از آنجا که  $|\sin \frac{1}{h}|$  کراندار با کران ۱ است و  $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ ، حد بالا وجود دارد و برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار در  $x = 0$  وجود دارد و افقی است. ضمناً فرمول مشتق  $f$  به ازای  $x \neq 0$  از فرمول لایب‌نیتس و قاعده زنجیره‌ای محاسبه می‌شود:

$$x \neq 0 \quad : \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (5)$$

ادعا می‌کنیم دنباله‌ای از نقاط  $(x_n)$  وجود دارد که  $x_n \rightarrow 0$  و  $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$  در واقع با قرار دادن  $f'(x) = 0$  داریم:

$$\tan \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

اگر قرار دهیم  $t = \frac{1}{x}$ ، باید نشان دهیم دنباله‌ای  $t_n$  وجود دارد که  $t_n \rightarrow +\infty$  و  $\tan t_n = \frac{1}{2t_n}$ . این مطلب با توجه به شکل ۴ بدیهی است زیرا که نمودار تابع  $\alpha(t) = \frac{1}{2t}$  همه شاخه‌های نمودار تابع تناوبی  $\beta(t) = \tan t$  را قطع می‌کند.

با قرار دادن  $x_n = \frac{1}{t_n}$  حکم مورد نظر به دست می‌آید. ضمناً  $f'(x)$  در همه این نقاط تغییر علامت می‌دهد زیرا که اگر بنویسیم

$$f'(x) = (2x \cos \frac{1}{x})(\tan \frac{1}{x} - \frac{1}{2x})$$

در نقاط  $x_n$  پرانتز دوم صفر شده تغییر علامت می‌دهد زیرا که خط راست  $\alpha(t) = \frac{1}{2t}$  متناوباً در بالا و پایین نمودار  $\beta(t) = \tan t$  قرار می‌گیرد و  $2x \cos \frac{1}{x}$  در  $x = x_n$  تغییر علامت نمی‌دهد. نتیجه اینکه نقاط  $(x_n)$  یکی در میان ماکسیمم و مینیمم موضعی هستند. نهایتاً اینکه چون  $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ ، نمودار تابع  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  بین نمودارهای  $y = x^2$  و  $y = -x^2$  محصور می‌ماند. این نمودار در شکل ۵ نمایش داده شده است.

توجه کنید که  $f'(0) = 0$  ولی نقطه  $0$  نه کمینه موضعی، نه بیشینه موضعی و نه نقطه عطف معمولی آن است. در واقع چون تابع  $f'$  در  $0$  پیوسته نیست (عبارت (۵) حد ندارد وقتی  $x \rightarrow 0$  در حالی که  $f'(0) = 0$ )،  $f'$  نمی‌تواند در  $0$  مشتق پذیر باشد، یعنی  $f''(0)$  موجود نیست.

مثال ۴. شکل ۱ بخش ۱۵ نمودار تابعی  $f$  را نشان می‌دهد که  $f'(0) > 0$  ولی  $f$  در هیچ بازه‌ی حول  $0$  صعودی نیست. با اندک تغییری در مثال ۳ می‌توان فرمولی برای چنین تابعی ارائه کرد. می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

از محاسبات مثال ۳ نتیجه می‌شود که  $f$  همه جا مشتق پذیر است و  $f'(0) = \frac{1}{4} > 0$ . طبق ۱۵-۴-۱، این تابع برای  $x > 0$  کوچک مقدار مثبت و برای  $x < 0$  با قدر مطلق کوچک، مقدار منفی دارد. برای  $x \neq 0$  داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{4} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

ادعا می‌کنیم دنباله‌ای  $(x_n)$  وجود دارد که  $x_n \rightarrow 0$ ،  $f'(x_n) = f'(-x_n) = 0$  و در این نقاط تغییر علامت می‌دهد. در واقع چون  $2x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$  وقتی  $x \rightarrow 0$  و  $\cos \frac{1}{x}$  با کوچک شدن  $x$  بی‌نهایت نوسان بین  $-1$  و  $+1$  دارد،  $f'(x) = 0$  بی‌نهایت جواب در نزدیکی  $0$  دارد. در این نقاط  $f'$  تغییر علامت می‌دهد زیرا نمودار  $\cos \frac{1}{x}$  خطوط نزدیک ارتفاع  $\frac{1}{4}$  را در گذر بین  $-1$  و  $+1$  قطع می‌کند. در شکل ۶ تقاطع نمودارهای تابع با مقدار  $\frac{1}{4} - \cos \frac{1}{x}$  و تابع با مقدار ثابت  $\frac{1}{4}$  به طور تقریبی رسم شده است. بدین ترتیب شکل ۱ بخش ۱۵ توجیه می‌شود.

آنچه تا این مرحله از خواص مشتق اول و دوم آموخته‌ایم ابزاری نیرومند و مؤثر برای صورت‌بندی و حل بسیاری مسایل عملی در اختیار ما قرار می‌دهد. در باقیمانده این بخش و در جلسه آینده چند نمونه از این مسایل را بررسی خواهیم کرد. نخست در این جلسه مثال‌هایی مطرح می‌کنیم در آنها می‌توان به کمک شکل اطلاعات کیفی سودمند کسب کرد و در بخش آینده تعدادی مثال کمی بهینه‌یابی مطرح خواهیم ساخت.

مثال ۱. گلدانی به صورت شکل ۷ (الف) داده شده است. در این گلدان با آهنگ ثابت آب می‌ریزیم تا گلدان پر شود. نمودار تغییر ارتفاع آب در گلدان را برحسب زمان رسم کنید.

زمان را به  $t$  و ارتفاع آب را به  $h$  نمایش می‌دهیم. هدف در اینجا رسم نمودار  $h$  نسبت به  $t$  است. ارتفاع‌های حساس، مربوط به برآمدگی‌ها و تورفتگی‌های گلدان را به  $a$ ،  $b$  و  $c$  نمایش داده‌ایم و

$h = 0$  را کف گلدان می‌گیریم. قطعاً با ریختن آب در گلدان ارتفاع سطح آب افزایش می‌یابد، پس  $h$  تابعی صعودی از  $t$  خواهد بود. به فرض مشتق‌پذیری، مشتق اول  $h$  نسبت به  $t$  مثبت است. عامل دیگری که در شکل نمودار مؤثر است علامت مشتق دوم  $h$  نسبت به  $t$  است. اگر مشتق اول، یعنی آهنگ افزایش  $h$  در زمان، خود صعودی باشد، مشتق دوم مثبت و نمودار محدب است، ولی اگر آهنگ افزایش  $h$  نسبت به  $t$  نزولی باشد، مشتق دوم منفی و نمودار مقعر خواهد بود. پس لازم است تغییر ارتفاع را در بازه‌های مختلف بررسی کنیم. در بازه  $0 \leq h \leq a$ ، ضخامت بدنه گلدان رو به افزایش است، بنابراین آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب به تدریج کندتر می‌شود، پس مشتق دوم  $h$  نسبت به  $t$  وقتی  $0 < h < a$ ، منفی است. بالعکس برای  $a \leq h \leq b$ ، تنگ‌تر شدن مقطع گلدان موجب می‌شود که آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب فزونی یابد و در نتیجه در  $a < h < b$ ، مشتق دوم  $h$  نسبت به  $t$  مثبت خواهد بود. و بالاخره در  $b \leq h \leq c$ ، نیز، مانند  $0 \leq h \leq a$ ، آهنگ افزایش ارتفاع سطح آب نزولی است و  $h''(t)$  منفی می‌باشد. یکی دو نکته دیگر در اینجا حائز اهمیت است. در هر دو بازه  $0 \leq h \leq a$  و  $b \leq h \leq c$  داریم  $h'(t) > 0$  و  $h''(t) < 0$ ، ولی شکل مقطع گلدان در دو مورد متفاوت است، این اختلاف شکل گلدان را چگونه می‌توان در نمودار  $h(t)$  منعکس کرد؟ اگر فرض کنیم طول بازه‌های  $[0, h]$  و  $[b, c]$  برابر است و مقطع گلدان در ارتفاع‌های  $0$  و  $b$  برابر و نیز در ارتفاع‌های  $a$  و  $c$  برابر است، می‌بینیم که حجم گلدان بین  $0$  و  $a$ ، به سبب برآمدگی، بیشتر از حجم گلدان بین  $b$  و  $c$  است. بنابراین، توجه به اینکه آب با آهنگ ثابت وارد گلدان می‌شود، مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع  $0$  تا  $a$  بزرگتر از مدت زمان لازم برای پرکردن ارتفاع  $b$  تا  $c$  است. این نکته در نمودار منظور شده است، توجه کنید که بازه  $[t_b, t_c]$  کوچکتر از  $[0, t_a]$  منظور شده است.

تمرین. همین بررسی را برای گلدان‌های شکل زیر انجام دهید. علاوه بر شکل کیفی، با توجه به داده‌های تصاویر فرمولی برای  $h$  بر حسب  $t$  به دست آورید و مشتق‌های اول، دوم و سوم  $h$  نسبت به  $t$  را مطالعه کنید.

مثال ۲. نمودار مصرف  $\frac{\text{لیتر}}{\text{ساعت}}$  بنزین یک نوع اتومبیل برحسب سرعت اتومبیل در شکل ۹ آمده است.

چگونه می توان سرعتی را پیدا کرد که در آن بهترین راندمان  $\frac{\text{لیتر}}{\text{کیلومتر}}$  حاصل می شود؟

سرعت اتومبیل را به  $v$  نمایش می دهیم. برای هر سرعت  $v$ ،  $p$  متناظر در نمودار، مصرف بنزین اتومبیل به لیتر است اگر اتومبیل یک ساعت با سرعت ثابت  $v$  حرکت کند، یا به بیان دیگر  $p = \frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}$  اگر اتومبیل با سرعت ثابت  $v$  حرکت کند. در شکل می بینیم که بهترین راندمان نسبت به زمان، یعنی کمترین مصرف در ساعت، به ازای  $v = 50$  کیلومتر در ساعت به دست می آید. مجهولی که مطرح است، بهترین راندمان مصرف بنزین نسبت به مسافت است. اگر  $q = \frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{مسافت به کیلومتر}}$  را به  $q$  نمایش دهیم، در سرعت ثابت  $v$  داریم:

$$q = \frac{\frac{\text{مصرف به لیتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}}{\frac{\text{مسافت به کیلومتر}}{\text{زمان برحسب ساعت}}} = \frac{p}{v}$$

بنابراین مسأله یافتن مینیمم  $q$  مطرح است. توجه کنید که شهوداً نباید انتظار داشت که مینیمم  $q$  و مینیمم  $p$  لزوماً در یک سرعت حاصل شوند. بهترین راندمان سوخت بنزین در ساعت از نظر حفظ و نگاهداری موتور بهینه است ولی ممکن است برای رسیدن به یک مقصد دوردست کمترین مصرف بنزین را متضمن نباشد. در واقع اگر منحنی  $p$  برحسب  $v$  طبق شکل ۹ باشد (این منحنی از آزمایش های واقعی گرفته شده است)، هدف ما مینیمم کردن  $\frac{p}{v}$  است نه مینیمم کردن  $p$ . توجه کنید که برای هر سرعت  $v$ ،  $q$  متناظر برابر شیب خط راستی است که از  $\circ$  به نقطه  $(v, p)$  روی نمودار رسم می شود. بنابراین باید نقطه ای را روی نمودار پیدا کرد که شیب این خط راست برای آن حداقل ممکن باشد. واضح است که این حداقل برای خط مماسی که از  $\circ$  به نمودار رسم شود به دست می آید و این سرعتی  $v_0$  بالاتر از نقطه مینیمم  $p$  به دست می دهد (در شکل ۹،  $v = v_0$ ). به عنوان یک تقریب محاسباتی، فرض کنید  $5 + \frac{1}{100}(v - 50)^2 = p$  که به ازای  $v = 50$  مینیمم دارد. داریم

$$\frac{dp}{dv} = \frac{1}{50}v - 1 \text{ و}$$

$$\frac{dq}{dv} = \frac{\frac{dp}{dv} \cdot v - p}{v^2} = \frac{\frac{1}{50}v^2 - v - \frac{1}{100}(v - 50)^2 - 5}{v^2}$$

برای یافتن مینیمم  $q$ ، قرار می‌دهیم  $\frac{dq}{dv} = 0$  (از ماهیت نمودار  $v$  روشن است که  $q$  باید دارای مینیمم در یک نقطهٔ درونی بازهٔ تعریف باشد) که نتیجه می‌دهد  $0 = 30 - \frac{1}{10}v^2$ ، یا  $v \simeq 54/8$  کیلومتر بر ساعت.

## بهینه سازی

یکی از کاربردهای بسیار معمول مشتق در مسایل بهینه‌سازی است. مقصود از بهینه‌سازی یافتن ماکسیمم یا مینی‌موم یک تابع با تنظیم مناسب متغیرهای تابع است. در اینجا ما با تابع یک متغیری سروکار داریم یعنی تابعهای به شکل  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  که  $S$  زیر مجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  است. نمونه‌هایی از مسایل بهینه‌سازی که در عمل به آن بر می‌خوریم مسایل زیرند: یافتن سرعتی که اتومبیل با آن سرعت، بهترین راندمان  $\frac{\text{کیلومتر}}{\text{لیتر}}$  را داشته باشد (مثال جلسه قبل)، یافتن میزان تولید یک کالا به طوری که سود حاصل از فروش حداکثر ممکن باشد، یافتن مناسبترین ابعاد برای یک قوطی حلبی استوانه شکل با حجم ثابت به طوری که کمترین مقدار حلبی در ساخت آن به کار گرفته شود، ... معمولاً دامنه تابع  $f$  یک بازه از اعداد حقیقی است که بسته به نوع مساله ممکن است یک بازه کراندار یا بی‌کران باشد و نقاط انتهایی بازه کراندار ممکن است مطرح باشند یا نباشند.

نخست حالی را در نظر بگیرید که یک تابع به شکل  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده است. می‌دانیم که اگر  $f$  پیوسته باشد، تابع  $f$  دارای ماکسیمم و مینی‌موم روی  $[a, b]$  است. در این حالت انجام موفقیت‌آمیز سه‌گام زیر منجر به یافتن ماکسیمم مینی‌موم می‌شود:

### (۱-۱۹) گامهای یافتن ماکسیمم و مینی‌موم روی $[a, b]$

(الف) محاسبه  $f(a)$  و  $f(b)$ .

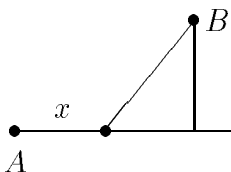
(ب) یافتن مقدار  $f$  در نقاط درونی بازه که در آن مشتق وجود دارد و مشتق در آن نقاط صفر است. این نقاط شامل همه نقاط ماکسیمم مینی‌موم موضعی می‌شود که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر است. این نقاط را نقاط بحرانی می‌نامند.

(ج) یافتن مقدار  $f$  در نقاطی که در آن  $f$  مشتق‌پذیر نیست. این نقاط را نقاط تکین می‌نامند. این سه نوع نقطه همه نامزدهای ممکن برای نقاط ماکسیمم و مینی‌موم را در بر می‌گیرند. با مقایسه مقدار  $f$  در این سه دسته نقطه می‌توان ماکسیمم و مینی‌موم تابع  $f$  را در  $[a, b]$  پیدا کرد.



اگر  $a = -\infty$ ،  $b = +\infty$ ، هر دو، و یا اگر باز  $^{\circ}$  به شکل  $[a, b[$ ،  $]a, b[$  یا  $]a, b]$  باشد، طبیعی است که به جای گام (الف)، باید رفتار تابع را وقتی مقدار متغیر به هر انتهای مشمول نشده در دامنه تعریف  $f$  نزدیک می شود بررسی کنیم. به هر صورت در مسایل عملی از این نوع، نقطه آغاز حل مساله، طرح دقیق تابع مورد نظر و مشخص کردن دامنه آن است. چنانچه بتوان یک شکل تقریبی از این تابع رسم نمود، معمولاً شکل راهنمای خوبی برای پیشگیری از اشتباه در حل مساله و برخورد با جوابهای نامعقول است.

مثال ۱. برای رسیدن به جزیره  $B$  که در فاصله مستقیم ۳ کیلومتری ساحل قرار دارد، فردی در نقطه  $A$  در ساحل که ۵ کیلومتر از نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره فاصله دارد و می تواند از قایق موتوری و نیز یک اتومبیل برای حرکت در جاده ساحلی استفاده کند.



سرعت قایق موتوری  $20 \text{ km/hr}$  و سرعت اتومبیل در جاده ساحلی  $40 \text{ km/hr}$  است. تعیین کنید که برای رسیدن به جزیره در حداقل زمان ممکن، باید چه مساحتی را نخست با اتومبیل طی کرد و سپس از قایق استفاده نمود.

در این مساله، زمان،  $t$ ، باید مینمی موم شود. زمان لازم برای رسیدن به نقطه  $B$  مجموع دو زمان  $t_1, t_2$  است،  $t = t_1 + t_2$ ، که در آن زمان استفاده از اتومبیل و  $t_2$  مدت زمان استفاده از قایق می باشد. اگر مسافت  $x$  کیلومتر نخست در جاده ساحلی با اتومبیل طی شود، داریم:

$$t_1 = \frac{x}{40}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{3^2 + (5-x)^2}}{20}$$

بنابراین تابعی که باید مینی موم آن پیدا میشود عبارت است از:

$$t = \frac{x}{40} + \frac{\sqrt{9 + (5 - x)^2}}{20}$$

لازم است که دامنه این تابع، یعنی حدود  $x$ ، نیز مشخص شود. در اینجا  $0 \leq x \leq 5$  زیرا که اگر فرد مستقیماً از نقطه  $A$  به سوی  $B$  با قایق حرکت کند داریم  $x = 0$ ، و از سوی دیگر حداکثر استفاده معقول از اتومبیل راندن تا پای نزدیکترین نقطه ساحل به جزیره، یعنی  $x = 5$ ، و استفاده از قایق پس از آن است. بنابراین گامهای (الف)، (ب) و (ج) را به صورت زیر پیاده می‌کنیم:

(الف) در  $x = 0$  داریم (ساعت)،  $t = \frac{\sqrt{34}}{20} \approx 0.275$  و برای  $x = 5$  ساعت

$$t = 0.125 + 0.15 = 0.275$$

(ب) و (ج).  $t$  به عنوان تابع  $x$  در داخل بازه  $[0, 5]$  مشتقپذیر است زیرا تابع جذر فقط در نقطه

$0$  مشتقپذیر نیست و اینجا زیر رادیکان حداقل  $9$  است. بنابراین کافی است گام (ب) اجرا شود، یعنی

$\frac{dt}{dx}$  برابر صفر قرار داده شده نقاط بحرانی و مقدار  $f$  در آنها مشخص شود. داریم:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{40} + \frac{-2(5-x)}{40\sqrt{9-(5-x)^2}} = 0$$

$$\sqrt{9-(5-x)^2} = 2(5-x)$$

$$9-(5-x)^2 = 4(5-x)^2$$

$$(5-x)^2 = \frac{9}{5}$$

$$5-x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$$

چون  $0 \leq x \leq 5$  تنها جواب عبارت است از

$$x = 5 - \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 3.658$$

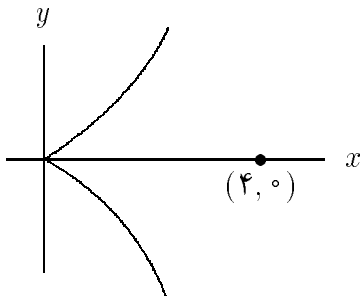
و در این نقطه:

$$t = \frac{5 - \frac{3}{\sqrt{5}}}{40} + \frac{\sqrt{9 + \frac{9}{5}}}{20}$$

$$\approx 0.091 + 0.164 = 0.255 \text{ (ساعت)}$$

در مقایسه این مقدار با دو مقدار انتهایی، ملاحظه می‌کنیم که مینی‌موم به‌ازای  $x \approx 3/658^{km}$  به دست می‌آید.

مثال ۲. می‌خواهیم نزدیکترین نقطه منحنی  $y^2 = x^3$  را به نقطه  $(4, 0)$  پیدا کنیم. این مسأله ساده را از سه راه مختلف حل می‌کنیم، و طبعاً در هر سه راه حل به یک جواب خواهیم رسید ولی مقایسه روشها آموزنده است.



راه اول منحنی داده شده اجتماع نمودارهای دو تابع  $y = x^{3/2}$  و  $y = -x^{3/2}$  هر دو با دو دامنه  $[0, +\infty[$  است. بنابر تقارن دو شاخه نسبت به نقطه  $(4, 0)$  کافی است مسأله را برای یک شاخه حل کنیم و قرینه نقطه به دست آمده در شاخه دیگر را نیز منظور کنیم. بنابراین فقط  $y = x^{3/2}$  روی  $[0, \infty[$  را در نظر می‌گیریم. فاصله نقطه  $(4, 0)$  از نقطه‌ای  $(x, y)$  روی این منحنی برابر است با  $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ . از آنجا که مینی‌موم کردن یک کمیت مثبت مطرح است، می‌توان مجذور همین عبارت یعنی  $(x-4)^2 + y^2$  را در نظر گرفت که فاقد نماد  $\sqrt{\quad}$  است و محاسبه با آن سر راست‌تر. ضمناً برای نقاط منحنی،  $y^2 = x^3$  پس باید مینی‌موم تابع زیر را به دست آورد:

$$D(x) = (x-4)^2 + x^3, \quad 0 \leq x < +\infty$$

در نقطه انتهایی  $x = 0$  داریم  $D(0) = 16$ . رفتار تابع وقتی  $x \rightarrow +\infty$  را نیز باید در نظر بگیریم که  $D(x) \rightarrow +\infty$  وقتی  $x \rightarrow +\infty$ . تابع  $D$  به‌عنوان تابع  $x$  در  $0 < x < +\infty$  مشتقپذیر

است، پس باید  $\frac{dD}{dx}$  را برابر صفر قرار داده مینویسم مومهای موضعی را پیدا کنیم.

$$\frac{dD}{dx} = 2(x - 4) + 3x^2$$

معادله  $3x^2 + 2x - 8 = 0$  دارای ریشه های  $-\frac{4}{3}$ ،  $2$  است که  $-2$  در دامنه تابع ما نیست، بنابراین فقط  $x = \frac{4}{3}$  نیاز به بررسی دارد. داریم  $D(\frac{4}{3}) = \frac{256}{27}$ . با توجه به اینکه  $D(\frac{4}{3}) < D(0)$ ، جواب مساله به ازای  $\frac{4}{3}$  به دست می آید و نقاط منحنی که حداقل فاصله را می دهند عبارتند از  $(\frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3\sqrt{3}})$ .

راه دوم. می توانیم بجای اینکه  $y$  را تابعی از  $x$  روی منحنی بگیریم،  $x$  را تابعی از  $y$  فرض کنیم، و در این صورت به جای تابع  $D$  بالا که بر حسب  $x$  نمایش داده شده، مجذور فاصله را بر حسب  $y$  بررسی می کنیم:

$$E(y) = (y^{2/3} - 4)^2 + y^2, \quad -\infty < y < +\infty$$

توجه کنید که در اینجا فقط یک تابع مطرح است و دامنه آن تمام  $\mathbb{R}$  می باشد. وقتی  $y \rightarrow \pm\infty$ ، داریم  $E \rightarrow +\infty$ . تابع داده شده در  $y = 0$  مشتق پذیر نیست بنابراین باید مقدار تابع را در این نقطه به طور جداگانه بررسی کرد. داریم  $E(0) = 16$ . در سایر نقاط تابع مشتق پذیر است و با قرار دادن  $\frac{dE}{dy} = 0$  نقاط بحرانی را پیدا می کنیم. داریم

$$\frac{dE}{dy} = \frac{4}{3} \frac{1}{y^{1/3}} (y^{2/3} - 4) + 2y$$

با قرار دادن  $\frac{dE}{dy} = 0$  مضرب کردن در  $\frac{4}{3} y^{1/3}$  (توجه کنید که  $y = 0$  قبلاً بررسی شد). نتیجه می شود.

$$3y^{4/3} + 2y^{2/3} - 8 = 0$$

که یک معادله درجه ۲ بر حسب  $y^{2/3}$  است. از حل این معادله نتیجه می شود  $y^{2/3} = -2/\frac{4}{3}$  یا  $y^{2/3} = \frac{4}{3}$ ، پس  $y^{2/3} = \frac{4}{3}$ ، یا  $y^{2/3} = \frac{4}{3}$ ، یا  $y = \pm \frac{8}{3\sqrt{3}}$  و در نتیجه  $x = \sqrt{y^2}$ . مجدداً  $E(\pm \frac{8}{3\sqrt{3}}) < E(0)$  و همان جواب راه اول نتیجه می شود.

راه سوم . وقتی از رابطه  $f(x, y) = 0$  نتوان یکی از  $x$  یا  $y$  را به صورت تابعی ساده از دیگری نوشت، ممکن است کوشش کنیم هر دو متغیر  $x, y$  را برحسب متغیر جدیدی  $t$  بنویسیم . با تجسم  $t$  به عنوان زمان می توان فرض کرد که منحنی داده شده مسیر حرکت نقطه ای  $(x, y)$  برحسب زمان است . برای منحنی  $y^2 = x^3$  می توان نوشت:

$$x = t^2, y = t^3, -\infty < t < +\infty$$

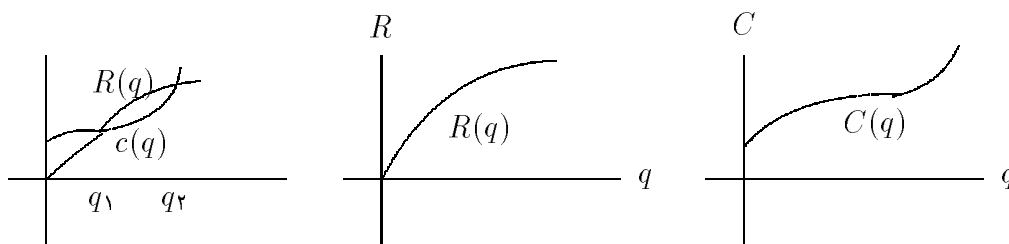
در این صورت مجذور فاصله  $(x, y)$  از  $(4, 0)$  به صورت تابعی از  $t$  ارائه می شود:

$$F(t) = (t^2 - 4)^2 + t^6, -\infty < t < +\infty$$

داریم  $F(t) \rightarrow +\infty$  وقتی  $Ft \rightarrow \pm\infty$  به عنوان تابعی از  $t$  همه جا مشتق پذیر است، مشتق آن نسبت به  $t$  را برابر صفر قرار می دهیم که نتیجه می شود  $6t^5 + 4t^3 - 16t = 0$  یا  $t(3t^2 + 2t - 8) = 0$  که جوابهای  $t = 0$ ،  $t^2 = -2$  و  $t^2 = \frac{4}{3}$  (غیر قابل قبول) را می دهد . داریم  $F(0) = 16$  و  $F(\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{256}{27}$  و جواب مساله همان نقاط  $(\frac{4}{3}, \pm \frac{8\sqrt{3}}{27})$  هستند .

نکته قابل مقایسه در این سه راه حل وضعیت نقطه  $(0, 0)$  روی منحنی  $y^2 = x^3$  است که یک ماکسیمم موضعی برای فاصله از نقطه  $(4, 0)$  می باشد . از راه حل اول، این نقطه به صورت یک انتهای بازه تابع ظاهر می شود، در راه حل دوم به عنوان یک نقطه تکین که در آن تابع مشتق پذیر نیست، و در راه حل سوم به عنوان یک نقطه که در آن مشتق وجود دارد و صفر است . بنابراین بسته به اینکه مساله چگونه صورتبندی شود، ماهیت یک نقطه ممکن است به صورتهای گوناگون دیده شود .

(۱۹-۲) کاربرد در مسایل اقتصاد فرض کنید یک شرکت تولیدی کالایی تولید می کند که می توان میزان تولید آن کالا را عملاً کمیتی پیوسته فرض کرد . مثلاً تولید شکر برحسب تن یا کیلوگرم، ولی نه تولید هواپیما یا زیردریایی که در موارد اخیر میزان تولید با عدد صحیح سنجیده می شود . هزینه تولید برحسب مقدار تولید نوعاً یک منحنی مانند شکل ۳ است . اگر هزینه تولید  $q$  مقدار از کالا را به  $C(q)$  نمایش دهیم (مثلاً برحسب ریال)، شکل نمودار شکل ۳



شکل ۵

شکل ۴

شکل ۳

به صورت زیر توجیه می شود. برای راه اندازی تولید، مقداری سرمایه گذاری اولیه لازم است، بنابراین در آغاز (یعنی  $q = 0$ ) به هر حال مبلغی هزینه شده است که به صورت  $C(0) > 0$  ظاهر می شود. با افزایش تولید، چون سرمایه گذاری اولیه جدیدی لازم نیست هزینه نسبی تولید کاهش می یابد، یعنی  $C(q)$  پایین تر از یک خط راست خواهد بود. مثلاً در چاپ یک کتاب، هزینه ای که صرف تهیه فیلم و زینک می شود و به نسبت بالاست تکرار نمی شود و هرچه تولید بیشتر باشد هزینه نسبی، یعنی  $\frac{C(q)}{q}$  کاهش می یابد. این واقعیت به صورت تقعر نمودار  $C(q)$  تا مقدار قابل ملاحظه ای از  $q$  نمایش داده شده است. ولی وقتی تولید از حد معینی تجاوز کند ممکن است نیاز به افزایش ماشین آلات و نیروی کار باشد که در این صورت این افزایش برحسب تغییر جهت تقعر  $C(q)$  می شود، همچنان که در شکل نمایش داده شده است. برای تولید بعضی محصولات ممکن است این تغییر جهت صورت نگیرد تا خیلی دیر به وقوع بپیوندد. در مقابل هزینه تولید، در شکل ۴ در آمد حاصل از فروش  $q$  مقدار کالا،  $R(q)$ ، نمایش داده شده است. در اینجا  $R(0) = 0$ ، یعنی قبل از فروش در آمدی وجود ندارد. در آغاز فروش  $R$  حدوداً خطی است، یعنی به تناسب فروش  $q$  واحد، در آمدی که برابر حاصل ضرب  $q$  در قیمت فروش یک واحد است حاصل می شود. ولی با افزایش تولید نوعاً به سبب برآورده شدن نیاز و اشباع بازار، یا به سبب ظهور واحدهای رقیب و افت قیمت، تدریجاً افزایش تولید موجب افزایش متناسب در آمد نمی شود و نمودار  $R(q)$  رو به پایین مقعر می شود. در شکل ۵ دو منحنی روی هم قرار داده شده اند. روی بازه  $[q_1, q_2]$  میزان در آمد از هزینه بالاتر است و برای اینکه تولید سود ده باشد، باید مقدار تولید در بازه  $[q_1, q_2]$  بماند. در واقع تولید کننده مایل است که سود خود، یعنی  $p(q) = R(q) - C(q)$  را

به حداکثر ممکن برساند، یعنی باید میزانی از تولید،  $q$ ، را در بازه  $[q_1, q_2]$  انتخاب کند که برای آن  $P(q)$  ماکسیمم شود. برای اینکه بتوانیم از ابزار حساب دیفرانسیل استفاده کنیم، فرض می‌کنیم تابعهای  $C(q)$ ،  $R(q)$  عملاً علاوه بر پیوسته بودن، مشتقپذیر نیز باشند. در اینصورت ماکسیمم سود حتماً در میزانی  $q$  از تولید حادث می‌شود که در آن  $\frac{dp}{dq} = 0$ . برای درک اقتصادی این مطلب باید برداشتی اقتصادی از مفهوم مشتق ارائه کنیم.

$\frac{dC}{dq}$  و  $\frac{dR}{dq}$  چه معنایی دارند؟ طبق تعریف، برای میزان  $q_0$  از تولید، داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) = \lim_{q \rightarrow q_0} \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$$

پس در واقع برای  $q$  نزدیک  $q_0$  داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) \approx \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$$

در عمل میزان تولید واقعاً پیوسته نیست، مثلاً برای تولید شکر، حداقل معنی داری از تغییر متغیر، یک تن شکر است، یا در مورد تولید هر کالای دیگر نیز، یک کوچکترین واحد معنی داری به عنوان حداقل افزایش یا کاهش تولید مطرح است. بنابراین کوچکترین مقدار مثبت  $q - q_0$  را می‌توان واحد فرض کرد و داریم:

$$\frac{dC}{dq}(q_0) \approx \frac{C(q_0+1) - C(q_0)}{1} = C(q_0 + 1) - C(q_0) \quad (1)$$

به بیان دیگر، تعبیر اقتصادی  $\frac{dC}{dq}(q_0)$  هزینه تولید یک واحد اضافی از کالا است وقتی تولید به  $q_0$  رسیده باشد. در اصطلاح اقتصاد،  $\frac{dC}{dq}(q_0)$  را هزینه نهایی می‌نامند (دلیل استفاده از لغت نهایی را خواهیم دید). با عیناً همین استدلال می‌توان گفت که:

$$\frac{dR}{dq}(q_0) \approx R(q_0 + 1) - R(q_0) \quad (2)$$

یعنی  $\frac{dR}{dq}(q_0)$  درآمد حاصل از فروش یک واحد اضافی از کالا است وقتی تولید به  $q_0$  رسیده باشد.  $\frac{dR}{dq}(q_0)$  را درآمد نهایی می‌نامند.

حال به مسأله ماکسیمم کردن سود باز می‌گردیم. اگر به ازای مقدار  $q_0$  در  $[q_1, q_2]$  ماکسیمم

سود حاصل شود، داریم  $\frac{dR}{dq}(q_0) - \frac{dC}{dq}(q_0) = 0$ ، پس بنابر (1) و (2):

$$R(q_0 + 1) - R(q_0) \approx C(q_0 + 1) - C(q_0) \quad (3)$$

یعنی درجایی ماکسیمم حاصل می‌شود که درآمد ناشی از فروش یک واحد اضافی از کالا برابر هزینه تولید یک واحد اضافی از کالا است. این مطلب را می‌توان به‌طور شهودی نیز توجیه کرد. برای اینکه  $q_0$  یک نقطه ماکسیمم باشد باید برای  $q$  نزدیک  $q_0$  و کوچکتر از  $q_0$ ، تابع  $P = R - C$  صعودی باشد یعنی تولید بیشتر، سود بیشتر ایجاد کند، یا به عبارت دیگر در آمد فروش هر واحد بیش از هزینه تولید همان واحد باشد. بالعکس برای  $q$  نزدیک  $q_0$  و بزرگتر از  $q_0$ ، تابع  $P = R - Q$  باید نزولی باشد، یعنی تولید بیشتر، سود کمتر ایجاد کند، یا معادلاً درآمد فروش هر واحد بیشتر کمتر از هزینه تولید همان واحد باشد. بنابراین در نقطه گذر از صعود به نزول  $P$ ، باید هزینه تولید یک واحد اضافی با درآمد ناشی از فروش آن برابر شود. حال می‌توان به دلیل استفاده از لغت نهایی پی برد. مقدار  $q_0$  که در آن ماکسیمم سود حاصل می‌شود، در واقع میزان نهایی تولید مطلوب است زیرا که پس از آن سود تولید کاهش خواهد یافت.

به‌عنوان تمرینی در این مفاهیم، به‌عنوان مثال، روشی ترسیمی برای محاسبه هزینه نهایی را که در اقتصاد معمول است ارائه می‌کنیم.

**مثال** فرض کنید هزینه تولید یک واحد از کالا را وقتی که مقدار تولید کالا  $q$  باشد به  $a(q)$  نمایش دهیم. در اینصورت داریم:

$$C(q) = q.a(q) \quad (3)$$

نمودار  $a(q)$  بسیاری اوقات مانند شکل ۶ است، یعنی تولید هرچه بیشتر باشد (تا حد معقولی)، هزینه تولید هر واحد ارزانتر می‌شود. برای یافتن  $\frac{dC}{dq}(q_0)$  می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد. در نقطه  $(q_0, a(q_0))$  مماس نمودار  $a(q)$  را رسم می‌کنیم تا محور قائم را در نقطه  $S$  قطع کند. از  $S$  خط راستی یا ضریب زاویه دو برابر ضریب زاویه خط مماس فوق رسم می‌کنیم تا خط قائم  $q = q_0$  را در نقطه‌ای  $T$  قطع کند. مختصه قائم  $T$  برابر  $\frac{dC}{dq}(q_0)$  است. توجیه این مطلب یک محاسبه سر راست است. با مشتقگیری از رابطه (۳) داریم.

$$\frac{dC}{dq}(q_0) = a(q_0) + q_0 \frac{da}{dq}(q_0) \quad (4)$$



از طرفی دیگر معادله خط مماس بر نمودار  $a(q)$  در نقطه  $(q_0, a(q_0))$  هست:

$$y - a(q_0) = \frac{da}{dq}(q_0) \cdot (q - q_0)$$

این خط محور قائم،  $y$ ، را در  $q = 0$  قطع می‌کند، پس  $S = (0, a(q_0) - \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0)$ . معادله خط راست گذرا از  $S$  با شیب  $2 \frac{da}{dq}(q_0)$  هست:

$$y - a(q_0) + \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 = 2 \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q$$

اشتراک این خط راست با  $q = q_0$  با قرار دادن  $q = q_0$  حاصل می‌شود که بنابراین مقدار  $y$  آن هست:

$$\begin{aligned} y &= a(q_0) - \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 + 2 \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 \\ &= a(q_0) + \frac{da}{dq}(q_0) \cdot q_0 \end{aligned}$$

که در مقایسه با (۴) نتیجه می‌دهد:

$$y = \frac{dC}{dq}(q_0)$$

همانطور که ادعا شده بود.

## چند جمله‌ای تیلور و تقریب‌های مرتبه بالا

یادآوری می‌کنیم که اگر تابع  $f$  در نقطه  $a$  از دامنه خود مشتقپذیر باشد، تقریب خطی  $f$  در نقطه  $a$  تابعی از درجه یک است، در واقع تابع با مقدار  $A(x) = f(a) + f'(a).(x - a)$ ، که مقدار آن به ازای  $x = a$  برابر مقدار تابع  $f$  در آن نقطه است و وقتی  $x$  از  $a$  دور می‌شود،  $f(x)$  به کندی از  $A(x)$  فاصله می‌گیرد. این نزدیکی ترتیب خطی به تابع اصلی برای  $x$  های نزدیک  $a$  ناشی از این است که تقریب خطی در واقع مقدار تابع درجه یک مماس بر تابع  $f$  است یعنی نه تنها  $A(a) = f(a)$ ، بلکه مشتق  $A$  و  $f$  نیز در  $x = a$  برابرند،  $A'(a) = f'(a)$ . هدف ما در این بخش ارائه یک دنباله تقریبهای به‌طور فزاینده دقیقتر از یک تابع حول نقطه‌ای  $a$  از دامنه تابع است. در مقابل دقیقتر شدن تقریب، محاسبه این توابع تدریجاً دشوارتر می‌شود. به‌طور کلی برای اینکه یک روش تقریب از ارزش و اعتبار برخوردار باشد، شرایط زیر ضروری است:

(۱) محاسبه نامزد تقریب باید ساده‌تر از محاسبه تابع اصلی باشد.

(۲) نامزد تقریب باید واقعاً به‌تابع داده شده «نزدیک» باشد.

در مورد (۱)، تقریب خطی نمونه بارز تابعی است که محاسبه آن ساده است. پس از تابعهای ثابت، تابعهای خطی که نمودار آنها یک خط راست است ساده‌ترین توابع محسوب می‌شوند. در این بخش تابعهایی که به‌عنوان تقریب مطرح می‌کنیم چند جمله‌ایهای از درجات گوناگون هستند. به‌طور کلی چند جمله‌ایها نیز که از جمع و ضرب اعداد حقیقی به‌دست می‌آیند توابع به‌نسبت ساده محسوب می‌شوند. هر چه درجه چند جمله‌ای کوچکتر باشد، محاسبه چند جمله‌ای ساده‌تر است. چند جمله‌ایهای درجه صفر، توابع ثابت هستند، چند جمله‌ایهای درجه یک به‌عنوان تقریب خطی به کار می‌روند، و غیره.

در مورد (۲)، نزدیک بودن تقریب به تابع را چگونه باید ارزیابی کرد؟ در واقع برای سودمند بودن یک روش تقریب، باید بتوانیم اطمینان خاطر حاصل کنیم که خطای استفاده از این تقریب در حد قابل قبول برای به‌کارگیری در کاربرد مورد نظر است. به این منظور باید یک روش تخمین خطا همراه را با روش تقریب در دست باشد که بتوان به کمک آن یک کران بالایی برای قدر مطلق خطا ارائه کرد. در

مورد تقریب خطی دیدیم که اگر تابع  $f$  دوبار مشتقپذیر باشد، خطا از  $\frac{1}{2}M(x-a)^2$  تجاوز نمی‌کند که در اینجا  $M$  یک کران بالایی برای مشتق دوم تابع در بازه بین  $a$  و  $x$  است. بنابراین با محاسبه  $\frac{1}{2}M(x-a)^2$  می‌توان ملاحظه کرد که حداکثر خطای احتمالی در حد قابل قبولی هست یا نیست. به همین ترتیب، برای روشهای کلی‌تری که در این جلسه عرضه خواهیم کرد، یک روش تخمین خطا نیز به همراه خواهیم آورد که کرانی برای حداکثر خطای ممکن ارائه می‌کند.

به تعریف مشتق دوم یک تابع باز می‌گردیم. اگر  $a$  نقطه‌ای در دامنه تعریف  $f$  باشد و اگر مشتق  $f$  در سراسر یک بازه باز حول  $a$  تعریف شده باشد، آنگاه  $a$  یک نقطه درونی بازه تعریف  $f'$  است و می‌توان وجود مشتق برای  $f'$  در نقطه  $a$  را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به  $f''(a)$  یا  $f^{(2)}(a)$  نمایش می‌دهیم. همینطور اگر  $f''(x)$  در همه نقاط یک بازه باز حول  $a$  وجود داشته باشد، می‌توان مشتقپذیری  $f''$  در نقطه  $a$  را مطرح ساخت، که در صورت وجود آن را به  $f'''(a)$  یا  $f^{(3)}(a)$  نمایش می‌دهیم و مشتق سوم  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامیم. به‌طور کلی، اگر مشتق  $n$ -ام تابع  $f$  در سراسر یک بازه باز حول  $a$  تعریف شده باشد، می‌توان مشتقپذیری  $f^{(n)}$  را در نقطه  $a$  مورد بررسی قرار دارد که در صورت وجود آن را به  $f^{(n+1)}(a)$  نمایش می‌دهیم و مشتق (مرتبه  $(n+1)$ -ام  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامیم. تابع  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  را  $k$  بار مشتقپذیر می‌نامیم اگر  $f$  در همه نقاط دامنه دارای مشتق از مرتبه  $k$ -ام باشد. اگر  $f$  در یک نقطه  $a$  یا در زیر مجموعه  $T$  از دامنه خود دارای مشتق از هر مرتبه باشد،  $f$  را بینهایت بار مشتقپذیر در نقطه  $a$  یا در مجموعه  $T$  می‌نامیم.

مثال. یک تابع چند جمله‌ای در نظر بگیرید:

$$p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

از آنجا که مشتق  $p$  نیز یک چند جمله‌ای است (از درجه یکی پایین‌تر)، مشتق  $p$  نیز برای هر  $x$  مشتقپذیر است و با ادامه مشتقگیری می‌بینیم که  $p$  در سراسر  $\mathbb{R}$  بینهایت بار مشتقپذیر است. به‌علاوه توجه کنید که به‌سبب تقلیل درجه در مشتقگیری، برای  $k > n$  داریم  $p^{(k)}(x) = 0$ .

مثال ۲. تابع  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید. داریم  $\sin' = \cos$  و  $\sin'' = -\sin$ ، بنابراین می‌توان مشتقگیری را همواره ادامه داد و پس از چهار بار مشتقگیری تابع سینوس مجدداً ظاهر می‌شود،  $\sin^{(4)} = \sin$ . تابع کسینوس وضعیت مشابهی دارد. چهار تابع مثلثاتی دیگر نیز در دامنه تعریف خود بینهایت بار مشتقپذیرند.

مثال ۳. تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ -x^n & x < 0 \end{cases}$$

در اینجا  $n$  یک عدد صحیح مثبت داده شده است. برای  $n = 1$  داریم  $f(x) = |x|$  که در هر نقطه  $x \neq 0$  مشتقپذیر است ولی در  $x = 0$  مشتقپذیر نیست. حال  $n > 1$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $a \neq 0$ ، در یک بازه باز حول  $a$ ، تابع  $f$  همان مقدار  $x^n$  یا  $-x^n$  را دارد که یک چند جمله‌ای است، بینهایت بار مشتقپذیر است، و  $f^k(a) = 0$  برای  $k > n$ . برای  $n > 1$  داریم

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & x > 0 \\ -nx^{n-1} & x < 0 \end{cases}$$

در  $a = 0$  از تعریف استفاده می‌کنیم:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\pm h^n - 0}{h} = \pm h^{n-1}$$

با توجه به  $n > 1$ ، حد عبارت بالا صفر است، پس  $f'(0) = 0$  و فرمول (۱) را می‌توان به  $x \geq 0$  یا  $x \leq 0$  تعمیم داد. به طور کلی به استقرا فرض کنید که برای  $k < n$  ثابت کرده‌ایم:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-(k-1))x^{n-k} & x \geq 0 \\ -n(n-1)\dots(n-(k-1))x^{n-k} & x < 0 \end{cases}$$

آنگاه برای مشتق مرتبه  $(k+1)$  در  $a$  کسر زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f^{(k)}(0+h) - f^{(k)}(0)}{h} = \pm n(n-1)\dots(n-(k-1))h^{n-k-1}$$

تا زمانی که  $k + 1 < n$ ، حد عبارت بالا همچنان صفر است ولی برای  $k + 1 = n$ ، یا  $k = n - 1$  داریم

$$\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} = \pm n!$$

که علامت  $\pm$  بستگی به این دارد که  $h > 0$  یا  $h < 0$ ، بنابراین  $f^{(n)}(0)$  وجود ندارد. خلاصه اینکه تابع  $f$  در همه نقاط  $\mathbb{R}$  به استثنای  $x = 0$  بینهایت بار مشتقپذیر است ولی در  $0$  فقط  $(n - 1)$  بار مشتقپذیر با مشتقهای صفر می باشد.

### (۱-۲۰) چند جمله ای تیلور درجه $k$

اکنون آماده ایم که تقریب درجه  $k$  یک تابع را معرفی کنیم. فرض کنیم  $I$  یک بازه است،  $a$  یک نقطه درونی بازه،  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی  $(k - 1)$  بار مشتقپذیر در سراسر  $I$  و  $k$  بار مشتقپذیر در نقطه  $a$  است، نشان می دهیم یک (و تنها یک) چند جمله ای  $p(x)$  از درجه  $k$  وجود دارد که

$$p(a) = f(a), p'(a) = f'(a), \dots, p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad (1)$$

یعنی این چند جمله ای و مشتقات آن تا مرتبه  $k$  با تابع  $f$  و مشتقات متناظر آن تا مرتبه  $k$  در نقطه  $a$  تطابق دارند. چند جمله ای درجه  $k$  مورد نظر  $p(x)$  به شکل  $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$  است. با نوشتن  $x = (x - a) + a$  و به توان رساندن، می توانیم  $p(x)$  را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_k(x - a)^k \quad (2)$$

مشتقات  $p(x)$  تا مرتبه  $k - 1$  م به صورت زیر در می آیند:

(۳)

$$\begin{cases} p'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \dots + ka_k(x-a)^{k-1} \\ \vdots \\ p^{(i)}(x) = i!a_i + \dots + k(k-1)\dots(k-(i-1))a_k(x-a)^{k-i} \\ \vdots \\ p^{(k)}(x) = k!a_k \end{cases}$$

بنابراین در مقایسه (۲) و (۳) با شرط (۱) داریم:

$$a_0 = f(a), a_1 = f'(a), a_2 = \frac{1}{2!}f''(a), \dots, a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$$

پس ضرایب چند جمله‌ای (۲) از شرط (۱) به‌طور منحصر به‌فرد تعیین می‌شوند و داریم:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \quad (4)$$

این چند جمله‌ای یگانه چند جمله‌ای درجه  $k$  است که خود و مشتقات آن تا مرتبه  $k$  با  $f$  و مشتقات آن تا مرتبه  $k$  در نقطه  $a$  برابرند  $p(x)$  را اینک چند جمله‌ای تیلور درجه  $k$  تابع  $f$  در نقطه  $a$  یا تقریب درجه  $k$  تابع  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامند. توجه کنید که برای  $k=1$ ، تقریب خطی  $f$  در نقطه  $a$  حاصل می‌شود. نکته این است که برابری مشتقات  $f$  با مشتقات  $p$  در نقطه  $a$ ، تا مرتبه  $k$ ، موجب خواهد شد که به معنایی که در زیر خواهد آمد  $f(x)$  و  $p(x)$  در نزدیکی نقطه  $a$  بسیار هم نزدیک باشند.

(۲-۲۰) قضیه اگر  $p(x)$  چند جمله‌ای تیلور درجه  $k$  تابع  $f$  در نقطه  $a$  باشد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^k} = 0 \quad (5)$$

توجه کنید که برای  $k=1$ ، این همان تعریف خط مماس یا تقریب خطی است. هرچه  $k$  بزرگتر باشد  $(x-a)^k$  سریعتر کوچک می‌شود وقتی  $x \rightarrow a$ ، بنابراین تقریب درجه  $k$  باید به‌تابع خیلی نزدیک باشد که نسبت  $\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^k}$  به صفر میل کند.

برهان (۲۰-۲) حکم را با استقراء روی  $k$  ثابت می‌کنیم. همانطور که اشاره شد، برای  $k = 1$ ، تعریف مشتق پذیری یا خط مماس حاصل می‌شود. فرض کنید حکم تا مرتبه  $(k - 1)$  ثابت شده است، بدین مفهوم که اگر تابعی  $g$  در نقطه  $a$ ،  $(k - 1)$  بار مشتق پذیر باشد و  $q(x)$  چند جمله‌ای تیلور درجه  $(k - 1)$  آن در نقطه  $a$  باشد داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - q(x)}{(x - a)^{k-1}} = 0$$

به بیان دیگر، هرگاه  $\epsilon > 0$  داده شده باشد،  $\delta > 0$  وجود دارد که:

$$|x - a| < \delta \implies |g(x) - q(x)| < \epsilon \cdot |x - a|^{k-1} \quad (6)$$

اگر صورت کسر (۵) را به  $\varphi(x)$  نمایش دهیم،  $\varphi(x) = f(x) - p(x)$  داریم

$$\varphi(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k] \quad (7)$$

چون  $f$  و چند جمله‌ای  $p(x)$  مشتق پذیرند،  $\varphi$  نیز مشتق پذیر است و داریم:

$$\varphi'(x) = f'(x) - [f'(a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}] \quad (8)$$

چون  $f$  در نقطه  $a$ ،  $k$  بار مشتق پذیر است،  $f'$  در نقطه  $a$ ،  $(k - 1)$  بار مشتق پذیر می‌شود. به علاوه عبارت داخل کروشه چند جمله‌ای تیلور درجه  $(k - 1)$  تابع  $f'$  در  $a$  است، پس طبق فرض استقراء، برای  $\epsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  وجود دارد که طبق (۶):

$$0 < |x - a| < \delta \implies |\varphi'(x)| = |f'(x) - [f'(a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}]| < \epsilon |x - a|^{k-1}$$

از طرف دیگر طبق قضیه مقدار میانگین برای تابع مشتق پذیر  $\varphi$  داریم:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c) \cdot (x - a)$$

ولی طبق (۷)،  $\varphi(a) = 0$ ،

$$0 < |x - a| < \delta \implies |\varphi(x)| < \epsilon |c - a|^{k-1} |x - a|$$

و چون  $c$  بین  $x$  و  $a$  است،  $|c - a| < |x - a|$  و در نتیجه:

$$|c - a| < |x - a| \implies |\varphi(x)| < \epsilon |x - a|^k$$

بنابراین با کوچک گرفتن  $|x - a|$  می توان  $\frac{|\varphi(x)|}{|x - a|^k}$  به دلخواه کوچک کرد و حکم به اثبات می رسد. □  
قضیه ۲.۲ معقول بودن چند جمله ای تیلور درجه  $k$  به عنوان تقریبی برای تابع  $f$  برای  $x$  های نزدیک  $a$  را توجیه می کند. قبل از ادامه بحث به چند مثال توجه می کنیم.

مثال ۱ چند جمله ایهای تیلور درجه  $k$  توابع سینوسی و کسینوسی را در  $a = 0$  می نویسیم. برای سینوس داریم:

$$\sin(0) = 0, \sin'(0) = \cos(0) = 1, \sin''(0) = 0 \text{ و } \sin'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$-\sin(0) = 0$$

و چون مشتق چهارم سینوس همان سینوس می شود، از این پس مشتقهای  $0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$  تکرار می شوند، بنابراین اگر  $\sum_{j=0}^k a_j x^j$  چند جمله ای تیلور درجه  $k$  سینوس در  $a = 0$  باشد، داریم:

$$a_j = \begin{cases} 0 & j \text{ زوج} \\ \pm 1 & j \text{ فرد} \end{cases}$$

مثلاً چند جمله ای تیلور درجه ۱ و درجه ۲ سینوس عبارتند از  $p(x) = x$  چند جمله ای تیلور درجه ۳ و درجه ۴ سینوس برابر  $p(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$ ، و چند جمله ای تیلور درجه ۵ و درجه ۶ سینوس برابر  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$  می شوند. به همین ترتیب برای کسینوس چند جمله ای تیلور زیر در  $a = 0$  به دست می آیند:

$$1 \quad \text{چند جمله ای تیلور درجه ۱}$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 \quad \text{چند جمله ای تیلور درجه ۲ و ۳}$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \quad \text{چند جمله ای تیلور درجه ۴ و ۵}$$

و غیره.



مثال ۲. چند جمله‌ای تیلور درجه  $k$  تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در  $a = 1$  بنویسید. این چند جمله‌ای به شکل  $\sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(1)}{j!} (x-1)^j$  خواهد بود. برای محاسبه مشتقها داریم  $f(x) = x^{-1}$  پس  $f'(x) = -x^{-2}$ ،  $f''(x) = 2x^{-3}$ ، و به طور استقرایی می‌بینیم که  $f^{(j)}(x) = (-1)^j j! x^{-j-1}$  پس  $\frac{f^{(j)}(1)}{j!} = (-1)^j$  و چند جمله‌ای تیلور درجه  $k$  تابع در  $a = 1$  می‌شود.

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 \pm \dots + (-1)^k (x-1)^k$$

در اینجا این نکته باید تذکر داده شود که نزدیکی چند جمله‌ای بالا به  $\frac{1}{x}$  حوالی  $a = 1$  معتبر است ولی مثلاً وقتی  $x$  به  $0$  میل کند،  $\frac{1}{x}$  بی‌کران می‌شود در حالی که چند جمله‌ای بالا به  $(k+1)$  نزدیک می‌شود. همینطور وقتی  $x$  به  $2$  میل کند،  $\frac{1}{x}$  به  $\frac{1}{2}$  میل می‌کند ولی چند جمله‌ای بالا بسته به اینکه  $k$  فرد یا زوج باشد به  $0$  یا  $1$  میل می‌کند (که میانگین آنها  $\frac{1}{2}$  است!).

مثال ۳. چند جمله‌ای تیلور تابع  $f(x) = 1 - x + x^4$  از درجات مختلف را در  $a = -1$  بنویسید. وقتی تابع داده شده یک چند جمله‌ای باشد لازم نیست از مشتفگیری استفاده کنیم. اگر به جای  $x$  قرار دهیم  $x = (x-a) + a$  و جملات را به توانهای داده شده بسط داده به ترتیب درجه مرتب کنیم، چند جمله‌ایها تیلور درجات مختلف ظاهر می‌شوند. توجه کنید که روش یافتن ضرایب چند جمله‌ای تیلور این بود که چند جمله‌ای تیلور را بر حسب توانهای  $(x-a)$  مرتب کردیم و با مشتفگیری متوالی دریافتیم که ضریب جمله  $(x-a)^j$  همان  $\frac{f^{(j)}(a)}{j!}$  است. بنابراین در این مثال:

$$f(x) = 1 - ((x+1) - 1) + ((x+1) - 1)^4$$

$$f(x) = 3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4 \quad (9)$$

بنابرای چند جمله‌ایهای تیلور درجه ۱، ۲ و ۳ تابع در  $a = -1$  عبارتند از به ترتیب  $3 - 5(x+1)$ ،  $3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2$ ، و  $3 - 5(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3$ . چند جمله‌ایهای تیلور درجه ۴ به بالای تابع، همان طرف راست عبارت (۹) هستند که دقیقاً برابر خود تابع می‌شوند.

بالاخره برای استفاده از تقریب درجه  $k$ ، همانطور که در حالت خاص تقریب خطی عمل کردیم، باید دستوری برای تخمین خطا ارائه کنیم. قضیه زیر تعمیم و وضعیت تقریب خطی است.

(۳-۲۰) قضیه فرض کنید تابع  $f$  در سراسر بازه  $I$ ،  $(k+1)$  بار مشتقپذیر است و  $a \in I$ . اگر  $p(x)$  چند جمله‌ای تیلور درجه  $k$  تابع  $f$  در نقطه  $a$  باشد، برای هر  $x$  در  $I$  داریم:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) (x-a)^{k+1} \quad (۱۰)$$

که در اینجا  $c$  نقطه‌ای بین  $a$  و  $x$  است.

توجه کنید که به ازای  $k=1$ ، دقیقاً تخمین خطای تقریب خطی به دست می‌آید. عبارت طرف راست (۱۰) را گاهی باقیمانده لاگرانژ سری تیلور می‌نامند.

اثبات ۳-۲۰ دقیقاً مانند حالت  $k=1$  است. نخست تعمیم زیر از قضیه ۱ را بیان می‌کنیم که اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود:

(۴-۲۰) فرض کنید تابع  $f$  در بازه  $I$ ،  $(k+1)$  بار مشتقپذیر باشد،  $a < b$  دو نقطه  $I$  باشند، و داشته باشیم:

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = f^{(k+1)}(a) = 0$$

در اینصورت نقطه‌ای  $c$  وجود دارد،  $a < c < b$ ، که  $f^{(k+1)}(c) = 0$ . □

حال همانطور که در حالت  $k=1$  عمل کردیم، یک چند جمله‌ای درجه  $(k+1)$  در نظر می‌گیریم.

$$Q(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_k(x-a)^k + c_{k+1}(x-a)^{k+1}$$

که  $Q(a) = f(a)$ ،  $Q'(a) = f'(a)$ ،  $\dots$ ،  $Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  و  $Q(b) = f(b)$ . مقایسه  $f$  و  $Q$  با مشتقگیری نتیجه می‌دهد که  $c_0 = f(a)$ ،  $c_1 = f'(a)$ ،  $\dots$ ،  $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ ، و  $c_{k+1} = \frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^{k+1}}$ . حال با به کار گرفتن (۴-۲۰) در مورد تابع  $f(x) - Q(x)$ ، حکم (۱۰) نتیجه می‌شود: جزئیات کاملاً مشابه اثبات در حالت  $k=1$  است و به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۴ اگر برای تقریب  $\sin \frac{1}{10}$  (البته  $\frac{1}{10}$  به رادیان) از تقریب  $x - \frac{1}{3!}x^3$  استفاده کنیم، کرانی بالایی برای خطا به دست آورید.

توجه کنید که  $x - \frac{1}{3!}x^3$  هم تقریب درجه ۳ و هم تقریب درجه ۴ تابع  $\sin$  در  $a = 0$  است. اگر این چند جمله‌ای را تقریب درجه ۴ محسوب می‌کنیم تخمین دقیقتری به دست خواهد آمد زیرا که در طرف راست ( $10^\circ$ )، کمیت کوچک  $\frac{1}{10} = x - a$  به توان بالاتری رسانده می‌شود. طبق ( $10^\circ$ ) داریم:

$$\text{خطا} = \frac{1}{5!} f^{(5)}(c) \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5$$

مشتق پنجم سینوس برابر کسینوس است که در بازه  $[\frac{1}{10}, 0]$  از ۱ کوچکتر است، پس

$$\text{خطا} = \frac{1}{5!} \cdot 10^{-5} = \frac{1}{1/2} 10^{-7}$$

اگر از قرار داد روند کردن استفاده کنیم، با توجه به اینکه  $10^{-6} < \frac{1}{5!} 10^{-5}$  بسط اعشاری تقریب تا ۶ رقم پس از اعشار با مقدار واقعی تطابق دارد.

مثال ۵ فرض کنید می‌خواهیم از چند جمله‌ای تیلور درجه  $k$  به دست آمده در مثال ۲ برای  $\frac{1}{x}$  استفاده کنیم.  $\frac{1}{10^k}$  را به صورت

$$1 - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} - \dots + (-1)^k \frac{1}{10^{2k}}$$

تقریب می‌زنیم. خطای این تقریب را تخمین بزنید.

این مثال را از دو طریق بررسی خواهیم کرد. از روش باقیمانده لاگرانژ، طبق ( $10^\circ$ ) داریم:

$$\begin{aligned} \text{خطا} &= \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c) \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} (k+1)! (-1)^{k+1} \frac{1}{c^{k+2}} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

که  $c$  بین ۱ و  $1/10$  است. برای یافتن کران بالایی،  $c$  را که در مخرج است برابر ۱ می‌گیریم، پس

$$\text{خطا} < 10^{-2k-2}$$

در این مثال خاص می توان خطا را که یک سری هندسی است به طور دقیق محاسبه کرد. توجه کنید که

$$\frac{1}{1/0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1/0}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{1/0^j}$$

بنابراین تقریب ارائه شده جملات این سری تا  $j = k$  هستند و باقیمانده (=خطا) می شود:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} (-1)^j (1/0)^{-j} &= (-1)^{k+1} (1/0)^{-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (1/0)^{-j} \\ &= (-1)^{k+1} (1/0)^{-k-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{1/0}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(1/0)^{-k}}{1/0} \end{aligned}$$

یا  $|\text{خطا}| = \frac{(1/0)^{-2k-2}}{1/0}$  که کمی دقیقتر از کران بالایی به دست آمده از باقیمانده لاگرانژ است.

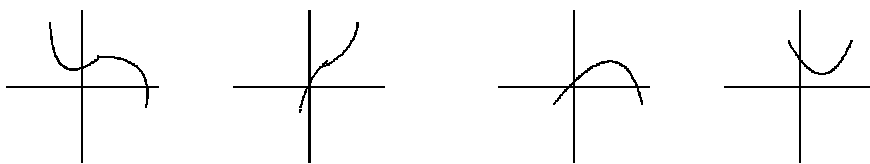
## (۵-۲۰) کاربرد در بررسی نقاط بحرانی

آزمون مشتق دوم برای بررسی نقاط بحرانی وقتی نتیجه می داد که مشتق دوم تابع در نقطه بحرانی ناصفر باشد. در اینجا با استفاده از ۲-۲ آزمون مشتق دوم را طوری تعمیم می دهیم که بسیاری حالاتی که در آن مشتق دوم نیز صفر می شود در بر می گیرد. نخست با اندکی شرط اضافی مبنای شهودی آزمونی را که ارائه خواهیم کرد ارائه می کنیم. فرض کنید تابع  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  در بازه  $I$ ،  $(k+1)$  بار مشتق پذیر است، مشتقات  $f$  در نقطه درونی  $a$  از بازه  $I$  تا مرتبه  $(k-1)$  همه صفر هستند و  $f^{(k)}(a) \neq 0$  در این صورت چند جمله ای تیلور درجه  $k$  تابع  $f$  در نقطه  $a$  به شکل  $f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$  می باشد. عدد  $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$  را به  $\alpha$  نمایش می دهیم طبق (۱۰) داریم:

$$f(x) = f(a) + \alpha(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

فرض کنید  $|f^{(k+1)}(c)|$  در نزدیکی نقطه  $a$  دارای کرانی  $M$  است (اگر  $f^{(k+1)}(x)$  پیوسته باشد، چنین کرانی موجود است). در این صورت برای مقادیر  $x$  نزدیک  $a$  که برای آن  $|x-a|$  کوچک است. انتظار داریم  $(x-a)^{k+1}$  در قدر مطلق به طور قابل ملاحظه ای کوچکتر از قدر مطلق  $(x-a)^k$  باشد. بنابراین انتظار داریم شکل تقریبی نمودار  $f$  در نزدیکی  $x=a$  مشابه  $f(a) + \alpha(x-a)^k$  باشد. در شکل

۱ وضعیت نمودار  $f(a) + \alpha(x - a)^k$  را در چهار حالت ممکن، بسته به این که  $\alpha > 0$  یا  $\alpha < 0$ ،  $k$  زوج یا فرد نمایش داده‌ایم. توجه کنید که اگر  $k$  زوج باشد، تابع در نقطه  $a$  ماکسیمم



$\alpha > 0, k$  زوج (الف)       $\alpha < 0, k$  زوج (ب)       $\alpha > 0, k$  فرد (ج)       $\alpha < 0, k$  فرد (د)

یا مینی‌موم موضعی دارد بسته به اینکه  $\alpha < 0$  یا  $\alpha > 0$ . وقتی  $k$  فرد باشد، نقطه  $a$  نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی زیرا که  $(x - a)^k$  در  $x = a$  تغییر علامت می‌دهد. در واقع این مطلب را می‌توان بدون شرط اضافی وجود مشتق  $(k + 1)$ ام مستقیماً از  $2 - 2^0$  نتیجه گرفت:

### (۶-۲۰) آزمون مشتق $k$ -ام

فرض کنید تابع  $f$  در نقطه درونی  $a$  از دامنه تعریف خود دارای مشتق تا مرتبه  $k$ -ام است ( $k \geq 2$ )، مشتقات آن در نقطه  $a$  تا مرتبه  $(k - 1)$  همه صفر هستند و  $f^{(k)}(a) \neq 0$ :

$$f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0$$

در اینصورت:

(الف) اگر  $k$  زوج باشد نقطه  $a$  یک مینی‌موم یا ماکسیمم موضعی است بسته به اینکه  $f^{(k)}(a) > 0$  یا  $f^{(k)}(a) < 0$ .

(ب) اگر  $k$  فرد باشد، نقطه  $a$  نه ماکسیمم موضعی است و نه مینی‌موم موضعی.

برهان. چند جمله‌ای تیلورد درجه  $k$  تابع  $f$  در نقطه  $a$  هست  $f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ . طبق  
۱-۲:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^k} = 0$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k} - \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \right] = 0$$

جمله  $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$  مثبت یا منفی است و عددی ثابت است. بنابراین برای  $x$  به اندازه کافی نزدیک  $a$ ،  
 $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k}$  باید همعلامت  $f^{(k)}(a)$  باشد. اگر  $k$  زوج باشد،  $(x-a)^k > 0$ ، پس  $f(x) - f(a)$  و  
همعلامت  $f^{(k)}(a)$  است (برای  $x$  نزدیک  $a$ ). در نتیجه اگر  $f^{(k)}(a) > 0$  داریم  $f(x) > f(a)$  و  
 $a$  یک نقطه مینیوم موضعی است، و اگر  $f^{(k)}(a) < 0$ ، نتیجه می‌شود که  $f(x) < f(a)$  و  $a$  یک  
نقطه ماکسیمم موضعی است. اگر  $k$  فرد باشد،  $(x-a)^k$  در  $x = a$  تغییر علامت می‌دهد، پس  
 $f(x) - f(a)$  نیز باید در  $x = a$  تغییر علامت دهد که علامت  $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k}$  همانند علامت  $f^{(k)}(a)$   
باقی بماند. بنابراین در یک طرف  $a$ ،  $f(x) < f(a)$ ، و در طرف دیگر،  $f(x) > f(a)$  و  $a$  نمی‌تواند  
ماکسیمم یا مینیوم موضعی باشد. □

مثال ۶. وضعیت نقطه  $x = 0$  برای تابع  $f$  که به صورت  $f(x) = x^6 \cos x - x^5 \sin x$  تعریف  
شده است بررسی کنید.

می‌نویسیم  $c_1 \cos c_1 + \frac{x^5}{5!} \cos c_1 - x = \sin x$  که  $c_1$  نقطه‌ای بین  $0$  و  $x$  است، و نیز  $\cos x =$   
 $c_2 \cos c_2 - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \cos c_2$ ، که  $c_2$  نقطه‌ای بین  $0$  و  $x$  است. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cos c_2 \right) - x^5 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \sin c_1 \right) \\ &= \left( -\frac{1}{6} \right) x^8 + x^1 \left( \frac{1}{4!} \cos c_2 - \frac{1}{5!} \sin c_1 \right) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز در قدر مطلق از  $\frac{1}{5!} + \frac{1}{4!}$  بیشتر نیست و برای  $|x|$  کوچک، جمله  $\left( -\frac{1}{6} \right) x^8$  غالب  
است. در واقع از تساوی بالا می‌بینیم که مشتقات  $f$  تا مرتبه ۷ در  $x = 0$  همه صفر هستند و  
 $0 < f^{(8)}(0) = \left( -\frac{1}{6} \right) (8!) < 0$ . بنابراین  $f$  در نقطه صفر یک ماکسیمم موضعی دارد.

مثال ۷. نقاط بحرانی تابع  $f(x) = (x^2 - 2x)^{100}$  را بررسی کنید.

داریم  $f'(x) = 100(x^2 - 2x)^{99}(2x - 2)$ ، پس سه نقطه بحرانی  $x = 0, 1, 2$  به دست می‌آیند. در واقع می‌توان نوشت  $f(x) = x^{100}(x - 2)^{100}$  و از این عبارت واضح است که  $x = 0, 2$  مینی‌موم موضعی برای تابع هستند زیرا که مقدار تابع در این نقاط صفر است و در سایر نقاط مثبت. از طرفی دیگر، این تابع، که پیوسته است، باید در  $[0, 2]$  ماکسیمم داشته باشد و در این نقطه ماکسیمم که لزوماً یک نقطه درونی است، مشتق  $f$  باید صفر شود. پس لزوماً  $x = 1$  نقطه ماکسیمم واقع در  $[0, 2]$  است. به این ترتیب وضعیت هر سه نقطه را می‌توان از ملاحظات ابتدایی روشن ساخت. ولی همین نتایج را اکنون با توجه به آزمون  $2^\circ - 6^\circ$  به دست می‌آوریم. در نقطه  $x = 0$  تابع را به صورت توانهای  $x$  بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{100}(x - 2)^{100} = x^{100} \left( \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} x^j (-2)^{100-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{100} (-1)^j \binom{100}{j} 2^{100-j} x^{100+j} \end{aligned}$$

عبارت طرف راست لزوماً چند جمله‌ای تیلور درجه  $\geq 200$  تابع  $f$  در نقطه صفر است. از این عبارت می‌بینیم که مشتقات  $f$  تا مرتبه ۹۹ در  $x = 0$  همه صفر هستند و  $f^{(100)}(0) = (100!) 2^{100} > 0$ ، پس  $x = 0$  یک مینی‌موم موضعی است. همینطور در نقطه ۲:

$$\begin{aligned} f(x) &= ((x - 2) + 2)^{100}(x - 2)^{100} \\ &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} (x - 2)^j 2^{100-j} (x - 2)^{100} \\ &= \sum_{j=0}^{100} 2^{100-j} \binom{100}{j} (x - 2)^{100+j} \end{aligned}$$

مجدداً در اینجا مشتقات  $f$  تا مرتبه ۹۹ در  $x = 2$  صفر می‌شوند و  $f^{(100)}(2) = (100!) 2^{100}$  و

$x = 2$  یک مینی موم موضعی است. بالاخره برای  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= ((x - 1) + 1)^{100} ((x - 1) - 1)^{100} = ((x - 1)^2 - 1)^{100} \\ &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} (-1)^j (x - 1)^{2j} \\ &= 1 - 100(x - 1)^2 + \dots \end{aligned}$$

در اینجا مشتق دوم تابع در  $x = 1$  منفی است و یک ماکسیمم موضعی به دست می آید.



## سری تیلور و سری توانی (۱)

در جلسه ۲۰ چند جمله‌ای تیلور را بررسی کردیم. اگر تابع  $f$  در نقطه درونی  $a$  از دامنه تعریف خود دارای مشتق تا مرتبه  $n$  باشد، چند جمله‌ای تیلور درجه  $n$  تابع  $f$  در نقطه  $a$ ، یا تقریب درجه  $n$  تابع  $f$  در نقطه  $a$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)$$

حال فرض کنید تابع  $f$  دارای مشتق از هر مرتبه در نقطه  $a$  است، پس می‌توان  $f^{(k)}(a)$  را به‌ازای هر  $k$  در نظر گرفت. بدین ترتیب می‌توان به‌ازای هر عدد  $x$ ، سری زیر را تشکیل داد:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \quad (2)$$

سری فوق را سری تیلور تابع  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامیم. دو سؤال طبیعی در اینجا به ذهن می‌رسد.

الف) آیا سری (۲) به‌ازای هر  $x$  یا بعضی  $x$  ها همگراست؟

ب) اگر  $x$  در دامنه تعریف  $f$  باشد و سری (۲) به‌ازای  $x$  همگرا، آیا حد سری برابر  $f(x)$  می‌شود؟

توجه کنید که زمینه‌ای معقول برای جواب مثبت به (ب) وجود دارد. به طور کلی دیدیم که با افزایش درجه تقریب تابع، یعنی افزایش  $n$  در (۱)، تقریب درجه  $n$  در نزدیکی  $a$  از تابع دورتر نمی‌شود. بنابراین غیرقابل تصور به نظر نمی‌رسد که با افزایش  $n$ ، حد (۱)، یعنی سری (۲)، به خود تابع میل کند. مثال‌های زیر تنوع وضعیت‌های ممکن را تا حدی بیان خواهد کرد.

### مثال (۳۳-۱)

(۳۳-۱-۱) تابع  $f(x) = e^x$  را با  $a = 0$  در نظر می گیریم. از آنجا که  $f^{(n)}(0) = 1$  به ازای هر  $n$ ، سری تیلور تابع در  $a = 0$  به شکل زیر است:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3)$$

می خواهیم همگرایی سری فوق را به ازای  $x$  های مختلف بررسی کنیم و اینکه اگر به ازای یک  $x$  این سری همگرا باشد، آیا مجموع سری برابر  $e^x$  است؟ در اینجا، و در بسیاری موارد دیگر، هر روشی که برای تخمین خطای تقریب درجه  $n$  در اختیار داشته باشیم می تواند مفید واقع شود. می دانیم که اگر  $p_n(x)$  تقریب درجه  $n$  تابع  $f$  در  $a$  باشد، داریم:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (4)$$

که در اینجا  $c$  نقطه ای بین  $a$  و  $x$  (و البته وابسته به  $n$ ) است جمله دوم سمت را باقیمانده لاگرانژ نامیدیم. اگر برای  $x$  داده شده داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = 0$$

آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - p_n(x)) = 0$ ، یعنی سری تیلور به ازای  $x$  به مقدار  $f(x)$  میل می کند. پس در این صورت به ازای چنین مقدار  $x$ ، جواب (الف) و (ب) هر دو مثبت می شود. در مورد تابع  $f(x) = e^x$  و  $a = 0$  داریم:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

که  $c$  نقطه نامشخصی بین  $0$  و  $x$  و وابسته به  $n$  است. هرچه باشد می توان نوشت  $0 \leq c \leq |x|$ ، پس  $e^c \leq e^{|x|}$ . بنابراین برای  $x$  داده شده، چنانچه ثابت کنیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ، باقیمانده لاگرانژ به صفر میل می کند و نتیجه خواهد شد که سری تیلور (۳) به  $e^x$  همگراست. در واقع برای  $x$  داده شده،

$N$  را بزرگتر یا مساوی  $|x|$  می گیریم. در این صورت برای  $n > N$  داریم:

$$\begin{aligned} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{|x|^N}{N!} \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n+1} \\ &\leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{n-N} \end{aligned}$$

چون نسبت ثابت  $\frac{|x|}{N+1}$  اکیداً از یک کوچکتر است؛ وقتی  $n \rightarrow \infty$  طرف راست بالا به صفر میل می‌کند، پس باقیمانده لاگرانژ به صفر میل می‌کند. بنابراین برای هر  $x$  داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (5)$$

بدین ترتیب برای این مثال، سری تیلور  $e^x$  در  $a = 0$  به‌ازای هر  $x$  به خود تابع میل می‌کند. در اثبات بالا دیدیم که برای کوچک کردن باقیمانده لازم بود  $N$  را بزرگتر یا مساوی  $|x|$  بگیریم. به طور کلی باید انتظار داشت که هرچه  $x$  از  $a$  دورتر شود، برای نزدیک کردن مجموع سری تیلور به  $f(x)$  جملات بیشتری از سری تیلور لازم باشد. در شکل ۱ مجموع‌های  $1$ ،  $1+x$ ،  $1+x+\frac{x^2}{2!}$  و  $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$  به عنوان تقریب‌های  $e^x$  نمایش داده شده‌اند. ملاحظه کنید که هرچه  $|x|$  بزرگتر شود، تقریب از مقدار واقعی دورتر است هرچند که به‌ازای هر  $x$  داده شده، با افزودن جملات سری تیلور می‌توان به  $e^x$  به دلخواه نزدیک شد.

?

(۲-۱-۳۳) تابع‌های  $\sin x$ ،  $\cos x$ ،  $\sinh x$  و  $\cosh x$  را در نظر می‌گیریم. سری‌های تیلور این

توابع در  $a = 0$  به سادگی محاسبه می‌شوند زیرا که

$$\sin^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ 1 & n = 4k + 1 \\ -1 & n = 4k + 3 \end{cases} \quad \cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ 1 & n = 4k \\ -1 & n = 4k + 2 \end{cases}$$

$$\sinh^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ 1 & \text{فرد } n \end{cases} \quad \cosh^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}$$

پس سری‌های تیلور این توابع در  $a = 0$  به شرح زیرند:

$$\sin x : x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x : 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh x : x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x : 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

در واقع به سبب شباهت ضرایب این سری ها به ضرایب سری تیلور  $e^x$ ، می توان با استفاده از باقیمانده لاگرانژ به روشی مشابه آنچه در مثال قبل گذشت نشان داد که هر یک از این سری ها به ازای هر  $x$  به تابع مربوط میل می کند، یعنی به ازای هر  $x$  داریم:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (7)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (8)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (9)$$

به عنوان مثال، چند تقریب متوالی  $\sin x$  با چند جمله ای های تیلور در شکل ۲ نمایش داده شده است.

?

(۳-۱-۳۳) تابع  $f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در نظر می گیریم. سری تیلور این تابع را در نقطه  $a = 1$  از قلمرو بررسی می کنیم. داریم  $f'(x) = x^{-2}$ ،  $f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$ ، و با استقراء  $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$ ، پس  $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$  و  $\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n$ . بنابراین سری تیلور تابع در  $a = 1$  به صورت زیر است:

$$1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \dots$$

ملاحظه می کنیم که این سری هندسی با قدر نسبت  $-(x - 1)$  است، پس شرطی لازم و کافی برای همگرایی آن این است که  $1 > |-(x - 1)|$ ، یا  $0 < x < 2$ . از طرفی دیگر از فرمول مجموع سری هندسی همگرا، برای  $1 > |-(x - 1)|$  داریم:

$$1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - \dots = \frac{1}{1 - (-(x - 1))} = \frac{1}{x}$$

۴

بدین ترتیب برای تابع  $\frac{1}{x}$  و  $a = 1$ ، نتیجه زیر در مورد (الف) و (ب) حاصل می‌شود: سری تیلور در بازه  $0, 2$  [همگراست و در این بازه به خود تابع میل می‌کند. از آنجا که تابع  $\frac{1}{x}$  در  $x = 0$  تعریف نشده است، واگرایی سری تیلور به‌ازای  $x = 0$  شاید عجیب به نظر نرسد، ولی برای  $x \geq 2$  تابع  $\frac{1}{x}$  تعریف شده است و در عین حال سری تیلور در  $a = 1$  همگرا نیست.

(۳۳-۱-۴) یک تابع چندجمله‌ای در نظر بگیرید:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

داریم  $f^{(n)}(x) = 0$  اگر  $n > k$ . دیده‌ایم که اگر به جای  $x$ ،  $(x - a) + a$  جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

پس در واقع سری تیلور  $f$  در نقطه  $a$  برابر چندجمله‌ای تیلور تابع در نقطه  $a$  و برابر خود تابع است.

(۳۳-۱-۵) تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

برای  $x \neq 0$  با استفاده مکرر از قاعده زنجیره‌ای می‌توان ملاحظه کرد که این تابع از هر مرتبه مشتق دارد. در واقع ادعا می‌کنیم که به‌ازای  $x = 0$  نیز تابع از هر مرتبه مشتق دارد و  $f^{(n)}(0) = 0$  برای هر  $n$ . اگر این ادعا ثابت شود نتیجه می‌شود که همه ضرایب سری تیلور،  $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ، در  $a = 0$  صفر هستند، پس سری تیلور  $f$  در  $a = 0$  به صورت:

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$$

است، پس سری تیلور به‌ازای هر  $x$  همگراست ولی به‌جای اینکه به تابع  $f$  میل کند، به تابع ثابت صفر میل می‌کند! در واقع تقریب درجه  $n$  تابع  $f$  در صفر، برای هر  $n$ ، تابع ثابت صفر است. برای اثبات

ادعا، به طور استقرایی ثابت می کنیم که

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} c \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p} & \text{مجموع جملات به شکل } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در عبارت بالا،  $c$  یک عدد حقیقی و  $p$  یک عدد صحیح مثبت است. نخست توجه کنید که حکم برای  $n = 1$  درست است زیرا که برای  $x \neq 0$  داریم

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)$$

و

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

اگر  $\frac{1}{x}$  را برابر  $t$  قرار دهیم حد بالا برابر  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}}$  می شود که صفر است. حال فرض می کنیم حکم تا  $n$  ثابت شده است و حکم را برای  $(n+1)$  ثابت می کنیم. طبق فرض، مشتق  $n$ -ام تابع  $f$  در  $x \neq 0$  مجموع جملاتی هر یک به شکل  $c e^{-x^{-2}} x^{-p}$  است پس مشتق  $(n+1)$ -ام در  $x \neq 0$  مجموع جملاتی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(c e^{-x^{-2}} x^{-p}) &= c[2e^{-x^{-2}} x^{-p-2} + e^{-x^{-2}} (-p)x^{-p-1}] \\ &= (2c) \frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+2}} - p \frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+1}} \end{aligned}$$

پس مشتق  $(n+1)$ -ام نیز همچنان مجموع جملاتی به شکل مورد نظر است. حال برای مشتق  $(n+1)$ -ام در صفر باید حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x}$$

که در آن  $f^{(n)}(x)$  مجموع جملاتی به شکل  $c e^{-x^{-2}} x^{-p}$  است. برای هر چنین چند جمله ای داریم:

$$\frac{c e^{-x^{-2}} \cdot x^{-p}}{x} = c \frac{e^{-x^{-2}}}{x^{p+1}} = c \frac{t^{p+1}}{e^{t^2}}$$

که در اینجا  $t$  را جایگزین  $\frac{1}{x}$  کرده ایم. وقتی  $x \rightarrow 0$ ، داریم  $t \rightarrow \pm\infty$  و حد بالا صفر است. بدین ترتیب ادعا به اثبات می رسد.

مثال‌های متنوع بالا نشان داد که اولاً جواب سؤال (الف) ممکن است به‌ازای بعضی  $x$  ها منفی باشد، یعنی سری تیلور تابع  $f$  در نقطه  $a$  از دامنه  $f$  ممکن است به‌ازای بعضی  $x$  ها همگرا نباشد، و ثانیاً در جواب (ب)، حتی اگر سری تیلور به‌ازای  $x$  همگرا باشد، ممکن است مجموع سری برابر خود تابع نشود. در مقابل دیدیم که در مورد بعضی توابع مائوس و مهم مانند  $e^x$ ،  $\sin x$ ،  $\cos x$ ،  $\sinh x$  و  $\cosh x$  سری تیلور در  $a = 0$  به‌ازای هر  $x$  به خود تابع میل می‌کند. برای درک بهتر نظام حاکم بر این امر، به یک بحث جامع‌تر می‌پردازیم.

فرض کنید  $c$  یک عدد حقیقی یا مختلط باشد و  $e_0, e_1, e_2, \dots$  اعداد حقیقی یا مختلط داده شده برای هر  $z$  مختلط، سری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$e_0 + e_1(z - c) + e_2(z - c)^2 + \dots \quad (10)$$

سری (10) را یک سری توانی در  $c$  (یا حول  $c$ ، یا به مرکز  $c$ ) می‌نامند. از آنجا که مجموعه اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط است، بحث بعدی را در مورد اعداد مختلط انجام خواهیم داد، که در واقع روشن‌کننده‌تر است، ولی خواننده می‌تواند  $e_i$  ها،  $c$  و  $z$  را حقیقی فرض کند و هیچ تغییری در بحث حاصل نخواهد شد. اگر سری بالا به‌ازای  $z$  هایی همگرا باشد، مجموع سری تابعی به دامنه این  $z$  ها تعریف می‌کند. شباهت (10) را به نمایش اعداد حقیقی در یک مبنا، مثلاً مبنای  $10$ ، ملاحظه کنید. هر عدد مثبت را می‌توانیم به صورت:

$$a_0 + a_1 \frac{1}{10} + a_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots \quad (11)$$

بنویسیم که در آن  $a_0$  یک عدد صحیح مثبت است و  $a_1, a_2, \dots$  ارقامی از میان  $0$  تا  $9$ . همان‌طور که اعداد (مثبت) را به صورت (11) نمایش می‌دهیم، جالب خواهد بود اگر بتوانیم تابع‌ها، یا دست‌کم دسته بزرگی از تابع‌ها، را به صورت واحد (10) نمایش دهیم. در این صورت چندجمله‌ای‌ها متناظر کسره‌های اعشاری مختومه می‌شوند. قضیه ساده‌ی زیر کلید بحث‌های بعدی است.

(۳۳-۲) قضیه. اعداد مختلط  $e_0, e_1, e_2, \dots$  داده شده‌اند. در این صورت  $\rho$  وجود دارد،  $0 \leq \rho \leq \infty$ ، به طوری که:

الف) به ازای هر  $z$  که  $|z - c| < \rho$ ، سری توانی  $(10)$  همگرای مطلق است.

ب) به ازای هر  $z$  که  $|z - c| > \rho$ ، سری توانی  $(10)$  واگراست.

قبل از ارائه اثبات ۲-۳۳، نتایج حکم آن را مختصراً تشریح می‌کنیم. نخست توجه کنید که به ازای  $z = c$  تمام جملات سری  $(10)$  از اندیس ۱ به بعد صفر می‌شوند و سری به  $c$  همگراست. اگر  $\rho = 0$ ، الف) مصداقی ندارد و هر  $z \neq c$  در  $|z - c| > 0$  صدق می‌کند؛ پس سری  $(10)$  به ازای هر  $z \neq c$  واگراست. بالعکس اگر  $\rho = +\infty$ ، حکم ب) مصداقی ندارد و به ازای هر  $z$ ، سری  $(10)$  همگرای مطلق است. در حالت  $0 < \rho < \infty$ ، اگر دایره به شعاع  $\rho$  و مرکز  $c$  را در نظر بگیریم، طبق حکم قضیه، سری  $(10)$  به ازای هر  $z$  در درون دایره همگرای مطلق و به ازای هر  $z$  در بیرون این دایره واگراست. قضیه حکمی در مورد نقاط روی دایره ارائه نمی‌کند و در واقع بررسی این نقاط را باید جداگانه در هر مورد خاص انجام داد. بدین ترتیب نظام مشخصی بر مجموعه نقاط همگرایی و واگرایی یک سری مانند  $(10)$  حکم فرماست. در حالتی که همه داده‌ها، یعنی  $c_0, c_1, c_2, \dots$  حقیقی باشند و نظر خود را فقط به  $z$  های حقیقی محدود کنیم،  $z = x$ ، قضیه ۲-۳۳ نتیجه می‌دهد که بازه‌ای به شعاع  $\rho$  حول  $c$  وجود دارد به طوری که برای هر  $x$  در  $[c - \rho, c + \rho]$ ، سری  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - c)^n$  همگرای مطلق است و به ازای هر  $x$  که  $|x - c| > \rho$ ، سری  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - c)^n$  واگرا می‌باشد. در مورد دو نقطه انتهایی بازه، یعنی  $x = c + \rho$  و  $x = c - \rho$ ، قضیه حکمی نمی‌کند و در واقع بستگی به مورد خاص دارد. توجه کنید که سری تیلور یک تابع  $f$  در نقطه  $a$ ، یک سری توانی حول  $a$  است. بدین ترتیب دامنه همگرایی سری تیلور نیز از نظام خاص برخوردار است یعنی بازه‌ای متقارن به مرکز  $a$  وجود دارد که سری در تمام نقاط داخل این بازه همگرای مطلق و در همه نقاط بیرون بازه واگراست. مثلاً در مثال ۳-۱-۳۳، تابع  $\frac{1}{x}$  حول  $a = 1$ ، دیدیم که  $\rho = 1$  و سری تیلور مربوط بیرون  $[0, 2]$ ، واگراست هر چند که  $\frac{1}{x}$  برای همه  $x \geq 2$  تعریف شده است.

برهان ۲-۳۳. کافی نشان دهیم اگر  $(10)$  به ازای  $z_1 = z$  همگرا باشد، آنگاه به ازای هر  $z$  که  $|z - c| < |z_1 - c|$ ، یعنی به ازای هر  $z$  نزدیکتر از  $z_1$  به  $c$ ، نیز سری همگرا و در واقع همگرای مطلق



است. پس فرض کنید  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - c)^n$  همگراست. در این صورت کرانی  $K$  برای قدرمطلق جملات این سری وجود دارد، یعنی عددی  $K > 0$  هست که:

$$|c_n(z_1 - c)^n| \leq K \quad : \quad \text{برای هر } n$$

حال  $z$  را طوری در نظر بگیرید که  $|z - c| < |z_1 - c|$  و  $\frac{|z-c|}{|z_1-c|}$  را برابر  $\sigma$  قرار دهید، که  $\sigma < 1$ . داریم

$$|c_n(z - c)^n| = |c_n(z_1 - c)^n| \cdot \left| \frac{z - c}{z_1 - c} \right|^n \leq K \cdot \sigma^n$$

مقایسه با سری هندسی  $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$ ،  $0 \leq \sigma < 1$  نشان می‌دهد که  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - c)^n|$  همگراست، یعنی  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - c)^n$  همگرای مطلق است و حکم به اثبات می‌رسد. □

عدد  $\rho$  را شعاع همگرایی سری (۱۰) می‌نامند و گوی باز  $|z - c| < \rho$  (یا در حالت حقیقی بازه  $[c - \rho, c + \rho]$ ) ناحیه همگرایی سری خوانده می‌شود. محاسبه  $\rho$  بسیاری اوقات ساده است. در واقع می‌توان بر اساس هر آزمون همگرایی مطلق روشی برای محاسبه  $\rho$  ارائه کرد. مثلاً آزمون نسبت را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$  وجود دارد و برابر  $L$  است ( $0 \leq L \leq +\infty$ ). در این صورت ادعا می‌کنیم که:

$$\rho = \frac{1}{L} \quad (12)$$

در واقع حد نسبت قدرمطلق دو جمله توانی (۱۰) عبارت است از:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}(z - c)^{n+1}|}{|c_n(z - c)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |z - c| \right) = L \cdot |z - c|$$

اگر این حد کوچکتر از ۱ باشد، یعنی  $|z - c| < \frac{1}{L}$ ، سری همگرای مطلق است، و اگر بزرگتر از ۱ باشد، یعنی  $|z - c| > \frac{1}{L}$ ، سری واگراست، پس شعاع همگرایی سری است. به همین ترتیب با استفاده از آزمون ریشه، چنانچه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  وجود داشته و برابر  $L$  باشد، مجدداً  $\rho = \frac{1}{L}$  شعاع همگرایی  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - c)^n$  خواهد بود.

### (۳-۳۳) چند مثال

(۳-۳-۳۳) در مورد سری  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  قبلاً دیدیم (مثال ۳۳-۱-۱) به ازای هر  $z$  حقیقی این سری به  $e^x$  میل می کند. حال چون هر  $z$  مختلط نزدیکتر از یک  $x$  حقیقی به  $\infty$  است (مثلاً نزدیکتر از  $(2|z|)$ )، از قضیه نتیجه می شود که  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  به ازای هر  $z$  همگرا (ی مطلق) است. مجموع این سری را به تبعیت از حالت حقیقی  $e^z$  یا  $\exp z$  می نامیم. بدون استفاده از مطالب چندجمله ای تیلور و باقیمانده نیز می توان شعاع همگرایی این سری را به دست آورد. مثلاً از آزمون نسبت، داریم

$$\rho = +\infty \text{ پس } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

(۳-۳-۳۳) سری های توانی طرف راست (۶)، (۷)، (۸) و (۹) را با جایگزینی  $z$  مختلط به جای  $x$  در نظر بگیرید. از آنجا که هر یک از این سری ها به ازای هر  $x$  حقیقی همگراست، از قضیه نتیجه می شود که این سری ها به ازای هر  $z$  مختلط نیز همگرا می شوند. در واقع  $\sin z$ ،  $\cos z$ ،  $\sinh z$  و  $\cosh z$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (13)$$

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad \cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (14)$$

سایر توابع مثلثاتی و هذلولوی برای مقادیر مختلط نیز برحسب  $\sin z$ ،  $\cos z$ ،  $\sinh z$  و  $\cosh z$  تعریف می شوند. مجدداً می توان مستقیماً نشان داد شعاع همگرایی هر یک از سری های توانی بالا  $+\infty$  است. مثلاً برای  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$  داریم  $c_n = 0$  اگر  $n$  فرد باشد و  $c_n = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$  اگر  $n = 2k$ . برای  $n$  فرد  $\sqrt[n]{|c_n|} = 0$  و برای  $n$  زوج،  $n = 2k$ ،  $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ ، نشان می دهیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . چون برای هر عدد صحیح مثبت  $m$ ،  $\sqrt[m]{m} \geq 1$ ، داریم

$$\frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \leq \frac{1}{\sqrt[2k]{2k}} \cdots \frac{1}{\sqrt[2k]{k+1}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

و حد جمله طرف راست صفر است وقتی  $k \rightarrow +\infty$ .

(۳-۳-۳۳) برای سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)z^n$ ، از آنجا که  $\frac{(n+1)!}{n!} \rightarrow +\infty$  وقتی  $n \rightarrow +\infty$  داریم  $\rho = 0$ .

(۴-۳-۳۳) برای عدد حقیقی و نامنفی داده شده  $p$ ، سری توانی  $p$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$$

از آنجا که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n/n}\right)^p$  برابر ۱ است، داریم  $\rho = 1$ ، هر چه باشد. بدین ترتیب برای هر  $z$  با  $|z| < 1$  این سری همگرا و به ازای هر  $z$  با  $|z| > 1$  این سری واگراست. برای مقادیر مختلف  $p$ ، رفتار این سری روی دایره  $|z| = 1$  متفاوت است. برای  $p > 1$ ، چون  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^p}\right|$  همگراست. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  به ازای هر  $z$  با  $|z| = 1$  همگراست. برای  $p = 1$ ، سری هارمونیک  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  که به ازای  $z = 1$  می آید واگراست و لیکن سری متناوب  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ، برای  $z = -1$ ، همگراست. برای  $p = 0$ ، سری هندسی  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  به ازای هر  $z$  با  $|z| = 1$  واگراست.

## سری تیلور و سری توانی (۲)

در جلسه قبل نخست سری تیلور و سپس به طور کلی سری توانی را در نظر گرفتیم. هر سری تیلور یک سری توانی است. یکی از دستاوردهای بحث این جلسه این خواهد بود که هر سری توانی با شعاع همگرایی مثبت، خود سری تیلور تابعی است که در ناحیه همگرایی سری به آن میل می‌کند. در این جلسه بحث را به سری‌های توانی حقیقی محدود خواهیم کرد هر چند که همین ملاحظات در حالت مختلط نیز معتبر است. دلیل محدود کردن بحث این است که مفاهیم مشتق و انتگرال را که در اینجا به کار گرفته خواهد شد در حال حاضر فقط برای تابع‌های حقیقی در اختیار داریم. در یکی دو جا اشاراتی به حالت مختلط نیز خواهد شد. بدین ترتیب سری توانی

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots \quad (1)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن  $a, a_0, a_1, a_2, \dots$  اعداد حقیقی داده شده‌اند و  $x$  متغیر حقیقی است. طبق قضیه جلسه قبل،  $\rho$  وجود دارد،  $0 \leq \rho \leq +\infty$  که سری فوق برای هر  $x$  با  $|x-a| < \rho$  همگرایی مطلق است و برای هر  $x$  با  $|x-a| > \rho$  واگرا.  $\rho$  را شعاع همگرایی سری توانی خواندیم. قضیه اساسی زیر که در اینجا ثابت نخواهیم کرد جمع‌بندی خواص مهم (۱) است:

فرض کنید  $0 < \rho$ ، پس  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  برای  $x$  با  $|x-a| < \rho$  به عددی میل می‌کند که آن

را  $f(x)$  می‌نامیم. بدین ترتیب تابعی  $f: ]a-\rho, a+\rho[ \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف می‌شود. داریم:

(۳۴-۱) قضیه. الف) در  $f$  در  $]a-\rho, a+\rho[$  مشتق پذیر است و به ازای هر  $x$  در این بازه داریم

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \quad (2)$$

ب) به ازای هر  $x$  در بازه  $[a - \rho, a + \rho]$ ، انتگرال  $\int_a^x f$  وجود دارد و:

$$\int_a^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \quad (3)$$

تذکر چند نکته در اینجا ضروری است:

### (۲-۳۴) یادداشت

(۱-۲-۳۴) توجه کنید که (۲) و (۳) بیانگر این مطلب هستند که برای مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری از  $f$  می‌توانیم از تک تک جملات سری  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  مشتق و انتگرال گرفته و سپس مجموع سری مشتق‌ها یا انتگرال‌ها را در نظر بگیریم. این مطلب ممکن است واضح به نظر برسد، و در واقع برای مجموع‌های متناهی درست است، ولی برای مجموع یک سری (که در واقع یک حد است) به طور کلی درست نیست. به زودی در بررسی سری فوری خواهیم دید که مجموع یک سری تابع‌های مشتق‌پذیر ممکن است اصلاً پیوسته نباشد. بدین ترتیب قضیه ۳۴-۱ تعمیم قضیه مجموع مشتق = مشتق مجموع، و مجموع انتگرال = انتگرال مجموع، به جملات تشکیل‌دهنده یک سری توانی است.

(۲-۲-۳۴) حکم (الف) نشان می‌دهد که شعاع همگرایی  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$  دست کم  $\rho$  (= شعاع همگرایی سری توانی اولیه  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ) است زیرا که برای  $x$  در  $[a - \rho, a + \rho]$  سری بالا به عدد  $f'(x)$  میل می‌کند. در واقع شعاع همگرایی سری مشتق‌ها دقیقاً برابر  $\rho$  است زیرا که طبق (ب) شعاع همگرایی سری تابع‌های اولیه نیز دست کم  $\rho$  است. بدین ترتیب شعاع‌های همگرایی سری‌های توانی  $\sum a_n (x-a)^n$ ،  $\sum n a_n (x-a)^{n-1}$  و  $\sum \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$  هر سه برابرند. رفتار این سری‌ها در نقاط انتهایی  $a \pm \rho$  ممکن است متفاوت باشد همچنان که مثال‌های آینده نشان خواهد داد.

### (۳-۳۴) چند مثال

(۱-۳-۳۴) در مثال ۳۱-۱-۳ دیدیم که سری توانی (هندسی)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$  در

$|x - 1| < 1$ ، یعنی  $0 < x < 2$ ، به تابع  $\frac{1}{x}$  همگراست:

$$0 < x < 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n = \frac{1}{x} \quad (4)$$

با مشتق گیری طبق قسمت (الف) قضیه ۳۴-۱ حاصل می شود:

$$0 < x < 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (x-1)^{n-1} = \frac{-1}{x^2} \quad (5)$$

با مشتق گیری مجدد از این سری توانی داریم:

$$0 < x < 2, \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)(x-1)^{n-2} = \frac{2}{x^3} \quad (6)$$

و به این ترتیب می توان با مشتق گیری مکرر یک نمایش سری توانی برای تابع  $\frac{1}{x^k}$  در  $0 < x < 2$  به دست آورد.

(۳۴-۲-۲) اگر قسمت (ب) قضیه ۳۴-۱ را در مورد (۴) به کار گیریم حاصل می شود:

$$0 < x < 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1} = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

یا

$$0 < x < 2, \quad (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \dots = \ln x \quad (7)$$

مقایسه (۴) و (۷) در نقاط انتهایی بازه همگرایی قابل توجه است. سری توانی (۴) که یک سری هندسی است در هیچ یک از دو نقطه انتهایی  $0, 2$  همگرا نیست. سری توانی سمت چپ (۷) در  $x = 0$  برابر منفی سری هارمونیک است و همگرا نمی باشد ولی به ازای  $x = 2$  سری متناوب زیر به دست می آید:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

که همگراست. سؤالی که به طور طبیعی مطرح می شود این است که آیا مجموع این سری را می توان با جایگزینی  $x = 2$  در سمت راست (۷) به دست آورد، یعنی آیا  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ؟ قضیه زیر از آبل (که در اینجا ثابت نخواهد شد) گویای این مطلب در حالت کلی است:

(۳۴-۴) قضیه. فرض کنید سری توانی (۱) دارای شعاع همگرایی  $\rho$  است،  $0 < \rho < +\infty$  و در  $|x - a| < \rho$  به تابع  $f$  میل می کند. اگر به ازای نقطه انتهایی  $x = a + p$  (به ترتیب نقطه انتهایی  $x = a - p$  سری  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$  (به ترتیب  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \rho^n$ ) همگرا باشد، آنگاه داریم

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \rho^n = \lim_{x \rightarrow (a-\rho)^+} f(x) \right) \text{ (به ترتیب)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = \lim_{x \rightarrow (a-\rho)^-} f(x) \quad (۸)$$

در مورد مثال بالا، از آنجا که  $\ln x$  در  $x = 2$  پیوسته است، حد آن همان مقدار  $\ln 2$  می باشد و

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \quad (۹)$$

اکنون به بهره برداری از قضیه ۳۴-۱ ادامه می دهیم. همان طور که در یادداشت ۳۴-۲-۲ و در مثال ۳۴-۳-۱ دیدیم، سری مشتق یک سری توانی، یعنی (۲)، خود در  $|x - a| < \rho$  همگراست (به تابع  $f'$ )، پس با استفاده مکرر از قضیه، می توان نتیجه گرفت که تابع  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ ، دارای مشتق از هر مرتبه در بازه  $[a - \rho, a + \rho]$  است و

$$a - \rho < x < a + \rho \quad , \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (x-a)^{n-k} \quad (۱۰)$$

در نقطه  $x = a$  نتیجه می شود که:

$$f^{(k)}(a) = (k!) a_k \quad (۱۱)$$

زیرا که به ازای  $n > k$  جملات  $(x - a)^{n-k}$  صفر می شوند. این نتیجه رابطه تنگاتنگ سری توانی (۱) و تابعی را که توسط آن تعریف می شود نشان می دهد. در واقع می توان نوشت:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

یعنی سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$  در واقع سری تیلور تابع  $f$  در نقطه  $a$  است! بدین ترتیب نه تنها هر سری تیلور یک سری توانی است، بلکه هر سری توانی، سری تیلور تابعی است که آن سری توانی در  $|x - a| < \rho$  تعریف می کند. قضیه زیر آخرین قضیه از دنباله قضایایی است که بدون اثبات به ذکر صورت آن خواهیم پرداخت. ساده ترین و طبیعی ترین روش اثبات قضایایی که در این جلسه بدون

اثبات ذکر شدند گذر به صفحه مختلط و استفاده از مشتق و انتگرال تابعی مختلط است که این کار زمینه سازی قابل توجهی نیاز دارد. می توان این قضایا را در محدوده اعداد حقیقی ثابت کرد ولی اثبات ها به نسبت دشوارند.

فرض کنید تابع  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده است.  $f$  را در نقطه درونی  $a$  از  $S$  تحلیلی می نامیم در صورتی که  $f$  دارای مشتق از هر مرتبه در  $a$  باشد و عددی  $\sigma$  وجود داشته باشد که بازه  $[a - \sigma, a + \sigma]$  در  $S$  بوده و سری تیلور  $f$  در  $a$  به ازای هر  $x$  در  $[a - \sigma, a + \sigma]$  به  $f(x)$  میل کند.

به عنوان مثال، در جلسه قبل دیدیم که توابع  $\cos x$ ،  $\sin x$ ،  $e^x$ ،  $\cosh x$ ،  $\sinh x$  در  $a = 0$  تحلیلی

هستند (و در واقع  $\sigma = +\infty$ )، تابع  $\frac{1}{x}$  در  $a = 1$  تحلیلی است با  $\sigma = 1$ ، و تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در  $a = 0$  تحلیلی نیست. حال داریم:

(۳۴-۵) قضیه. فرض کنید  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  در نقطه درونی  $a$  از  $S$  تحلیلی است و سری تیلور آن در نقطه  $a$ ، یعنی  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ ، در  $|x-a| < \sigma$  به  $f(x)$  میل می کند. در این صورت برای هر  $b$  در  $[a - \sigma, a + \sigma]$ ، تابع  $f$  در  $b$  نیز تحلیلی است و شعاع همگرایی سری تیلور  $f$  به تابع  $f$  در  $b$  دست کم به اندازه حداقل فاصله  $b$  از دو انتهای  $[a - \sigma, a + \sigma]$  است. □

(۳۴-۶) چند مثال

(۳۴-۶-۱) در مورد پنج تابع  $e^x$  و سینوس و کسینوس مثلثاتی و هذلولوی، دیدیم که تابع ها در  $a = 0$  تحلیلی هستند و  $\sigma = +\infty$ . پس به ازای هر  $b$  حقیقی، تابع ها در  $b$  تحلیلی هستند و سری تیلور در  $b$  به ازای همه مقادیر  $x$  به تابع میل می کند. در مورد این پنج تابع، به سبب سادگی ضرایب، می توان موضوع را مستقیماً بدون استفاده از قضیه بالا تحقیق کرد و این کار را به خواننده واگذار می کنیم. در اینجا سری تیلور  $e^x$  و  $\sin x$  را در نقاطی غیر از  $a = 0$  می نویسیم. برای  $e^x$ ، نقطه دلخواه  $a$  را در نظر



بگیرید. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x)|_{x=a} = e^a$$

پس سری تیلور  $e^x$  در نقطه  $a$  به شکل زیر است:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n \quad (12)$$

البته این فرمول، با فاکتورگیری از  $e^a$ ، چیزی جز  $e^x = e^a \cdot e^{x-a}$  نیست.

سری تیلور  $\sin x$  را در  $x = \frac{\pi}{4}$  می نویسیم. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x)|_{x=\frac{\pi}{4}} = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ (-1)^k & n \text{ زوج} \end{cases}$$

بنابراین

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x - \frac{\pi}{4})^{2k} \quad (13)$$

می توان (12) را از بسط  $\sin((x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4})$  و سری تیلور  $\cos x$  در  $a = 0$  نیز نتیجه گرفت.

(۳۴-۶-۲) نشان می دهیم تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  در هر نقطه  $a \neq 0$  تحلیلی است و سری تیلور آن در شعاع  $|x-a| < |a|$  به خود تابع میل می کند. در حالت  $a = 1$ ، این همان مثال ۳۳-۱-۳ جلسه قبل است. داریم:

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{a}\right) \frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}}$$

برای  $|x-a| < |a|$  یا  $|\frac{x-a}{a}| < 1$ ، کسر  $\frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}}$  برابر مجموع سری هندسی  $\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{x-a}{a})^n$  است پس:

$$|x-a| < |a| \quad , \quad \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (x-a)^n \quad (14)$$

با مشتق گیری متوالی از این عبارت می توان سری تیلور  $\frac{1}{x^k}$ ، برای عدد صحیح مثبت  $k$ ، را در  $a \neq 0$  نوشت. توجه کنید که نمی توان انتظار داشت شعاع همگرایی سری از  $|a|$  تجاوز کند زیرا نقطه  $O$  که در آن  $f$  تعریف نشده است در فاصله  $|a|$  از  $a$  قرار دارد.

(۳-۶-۳۴) به روال مثال قبل، با استفاده از سری هندسی، سری تیلور  $\frac{1}{1+x}$  را در  $|x| < 1$  داریم:

$$|x| < 1, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (15)$$

در اینجا نیز چون تابع سمت چپ در  $x = -1$  تعریف نشده است. شعاع همگرایی سری توانی سمت راست نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند. ولی برای  $|x| < 1$ ، داریم  $|x^2| < 1$ ، پس با جایگزینی:

$$|x| < 1, \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

نکته جالب توجه در مورد این سری اینکه طرف راست، که یک سری هندسی است، فقط در  $|x| < 1$  همگراست، ولی طرف چپ به ازای هر  $x$  تعریف شده است و در واقع می‌توان نشان داد در هر نقطه  $a$  تحلیلی است. در اینجا شعاع همگرایی سری تیلور  $\frac{1}{1+x^2}$  در  $a = 0$  برابر ۱ است در حالی که تابع در سراسر  $\mathbb{R}$  تعریف شده است. در پس این مطلب اعداد مختلط نهفته‌اند. توجه کنید که  $\frac{1}{1+z^2}$  به ازای  $z = \pm i$  تعریف شده نیست، بنابراین شعاع همگرایی سری تیلور  $\frac{1}{1+z^2}$  حول  $a = 0$  نمی‌تواند از  $\rho = 1$  تجاوز کند!

(۴-۶-۳۴) فرض کنید  $a > 0$ . با انتگرال‌گیری از (۱۴)، سری تیلور  $\ln x$  را در  $a$  به دست

می‌آوریم:

$$|x - a| < a, \quad \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (x-a)^{n+1} \quad (16)$$

این سری را قبلاً به ازای  $a = 1$  دیده‌ایم. با قرار دادن  $a = 1$  و  $x - 1 = t$ ، شکل معمول‌تری از (۱۶) حاصل می‌شود:

$$|t| < 1, \quad \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} \\ = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \dots \quad (17)$$

(۵-۶-۳۴) انتگرال‌گیری از (۱۵) نتیجه می‌دهد:

$$|x| < 1, \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (18)$$

در دو نقطه انتهایی بازه همگرایی، یعنی  $x = \pm 1$ ، سری های متناوب همگرا حاصل می شوند و طبق قضیه آبل داریم:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (19)$$

## سری تیلور و سری توانی (۳)

یکی از پر استفاده ترین نمایش های تابعی به صورت سری تیلور، نمایش تابع  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ،  $|x| < 1$  عدد حقیقی دلخواه، است. این نمایش را نیوتن در آغاز تحقیقات خود در حساب دیفرانسیل و انتگرال کشف کرد و تعمیمی از اتحاد  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$  است.

(۳۵-۱) سری دوجمله ای فرض کنید  $\alpha$  یک عدد حقیقی داده شده است. تابع:

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+x))$$

برای  $x > -1$  تعریف شده است و ترکیب بالا نشان می دهد که در این دامنه دارای مشتق از هر مرتبه است. نخست سری تیلور  $f$  را در  $a = 0$  می نویسیم و سپس نشان می دهیم این سری در  $|x| < 1$  به خود تابع همگراست. مشتقات  $f$  به سادگی محاسبه می شوند:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \dots, f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad (1)$$

بنابراین سری تیلور  $f$  در  $a = 0$  به صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \quad (2)$$

ضرب  $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$  را گاهی به  $\binom{\alpha}{n}$  نمایش می دهند زیرا که در واقع برای عدد صحیح  $\alpha < n$  داریم  $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!}$ . شعاع همگرایی سری توانی (۲) را محاسبه می کنیم. از آزمون

نسبت داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\binom{\alpha}{n+1}|}{|\binom{\alpha}{n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - n|}{n+1} = 1$$

پس شعاع همگرایی برابر ۱ است. مجموع سری فوق را در  $|x| < 1$  به  $g(x)$  نمایش می دهیم. باید ثابت کنیم  $g(x) = f(x)$ . برای این کار از روشی غیر مستقیم استفاده می کنیم که در موارد مشابه دیگر نیز گاهی مورد استفاده قرار می گیرد. طبق قضیه (۳۴-۱)، قسمت (الف)، می توان از  $g$  در  $]-1, 1[$  جمله به جمله مشتق گرفت و داریم:

$$g'(x) = \alpha + \alpha(\alpha - 1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \dots$$

$$xg'(x) = \alpha x + \alpha(\alpha - 1)x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3 + \dots$$

پس با جمع جملات هم مرتبه داریم:

$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) &= \alpha + \alpha((\alpha - 1) + 1)x + \alpha\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} + (\alpha - 1)\right)x^2 + \dots \\ &= \alpha\left[1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots\right] \\ &= \alpha g(x) \end{aligned}$$

بدین ترتیب تابع  $g$  در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند:

$$|x| < 1, \quad (1+x)g'(x) = \alpha g(x) \quad (3)$$

اگر بنویسیم  $y = g(x)$ ، با توجه به اینکه در  $|x| < 1$ ،  $1+x \neq 0$ ، می توان نوشت:

$$|x| < 1, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha \frac{y}{1+x} \quad (4)$$

طبق قضیه اساسی وجود و یگانگی جواب معادله دیفرانسیل عادی، این دستگاه به ازای شرط آغازی  $(x=0, y=1)$  جواب یگانه دارد. از طرفی دیگر تابع  $f(x) = (1+x)^\alpha$  واجد این شرط آغازی است و با مشتق گیری ملاحظه می شود که در (۴) صدق می کند، پس در واقع ثابت کرده ایم که:

$$|x| < 1, \quad g(x) = (1+x)^\alpha$$

یعنی سری تیلور تابع  $f(x) = (1+x)^\alpha$  در  $|x| < 1$  به خود تابع میل می کند.

(۲-۳۵) چند مثال

(۱-۲-۳۵) اگر  $\alpha = p$  یک عدد صحیح مثبت باشد، برای  $f(x) = (1+x)^p$  مشتقات از مرتبه بزرگتر از  $p$  صفر می شوند و در واقع بسط دوجمله ای مانوس

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k$$

به دست می آید. این نمایش در واقع برای هر  $x$  حقیقی برقرار است.

(۲-۲-۳۵) برای  $\alpha = -p$ ،  $n$  عدد صحیح مثبت، داریم

$$\begin{aligned} |x| < 1, \quad \frac{1}{(1+x)^p} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} x^n \end{aligned} \quad (5)$$

که  $\binom{n+p-1}{n} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!n!}$ . سری (۵) در محاسبه تقریبی عبارتی به صورت  $\frac{1}{(a+h)^p}$  که در آن  $|h|$  نسبت به  $|a|$  کوچک است مؤثر واقع می شود. برای  $|h| < |a|$  داریم  $|\frac{h}{a}| < 1$ ، پس:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+h)^p} &= \left(\frac{1}{a^p}\right) \frac{1}{\left(1+\frac{h}{a}\right)^p} \\ &= \left(\frac{1}{a^p}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} \left(\frac{h}{a}\right)^n \end{aligned}$$

یا:

$$|h| < |a|, \quad \frac{1}{(a+h)^p} = \frac{1}{a^p} - \frac{ph}{a^{p+1}} + \frac{p(p+1)h^2}{2a^{p+2}} - + \dots \quad (6)$$

برای  $|h|$  بسیار کوچک، حتی تقریب خطی

$$\frac{1}{(a+h)^p} - \frac{1}{a^p} \simeq \frac{ph}{a^{p+1}} \quad (7)$$

برای بسیاری مقاصد بسنده می کند.

لازم به ذکر است که این مثال خاص، یعنی  $\alpha = -p$ ، را می توانستیم از مشتق گیری مکرر سری

هندسی مربوط به تابع  $\frac{1}{1+x}$  نیز به دست آوریم.

(۳-۲-۳۵) حالت  $\alpha = -\frac{1}{4}$  را در نظر می‌گیریم:

$$|x| < 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{3}{4})}{1 \times 2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{3}{4})(-\frac{5}{4})}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \dots$$

با جایگزینی  $-x$  به جای  $x$  داریم:

$$|x| < 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)x + \frac{(1 \times 3)}{(2 \times 4)}x^2 + \frac{(1 \times 3 \times 5)}{(2 \times 4 \times 6)}x^3 + \dots$$

و اگر  $x^2$  را جایگزین  $x$  کنیم

$$|x| < 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{(1 \times 3)}{(2 \times 4)}x^4 + \frac{(1 \times 3 \times 5)}{(2 \times 4 \times 6)}x^6 + \dots \quad (8)$$

حال با استفاده از انتگرال‌گیری جمله به جمله، قضیه  $34-1$ ، ب، داریم:

$$|x| < 1, \quad \sin^{-1} x = x + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)\frac{x^5}{5} + \dots \quad (9)$$

که سری تیلور  $\sin^{-1} x$  در  $a = 0$  است.

در اینجا لازم است به عملیات جبری بین سری‌های توانی اشاره‌ای داشته باشیم. فرض کنید دو سری توانی حول  $a$ ،  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  به شعاع همگرایی  $\rho_1$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$  به شعاع همگرایی  $\rho_2$  داده شده باشند. فرض کنید سری اول در  $|x-a| < \rho_1$  به  $f(x)$  و سری دوم در  $|x-a| < \rho_2$  به  $g(x)$  میل می‌کند. برای  $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$  و  $|x-a| < \rho$ ؛ هر دو سری همگرا هستند، پس با توجه به اینکه سری مجموع جملات متناظر دو سری همگرا، به مجموع حد دو سری میل می‌کند، داریم:

$$|x-a| < \rho, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n = f(x) + g(x) \quad (10)$$

برای به دست آوردن یک سری توانی که به  $f(x)g(x)$  میل کند به طریق زیر عمل می‌کنیم. توجه کنید که برای اینکه حاصل ضرب دو جمله سری‌های توانی داده شده از درجه  $n$  باشد لازم و کافی است که مجموع اندیس‌های ضرایب برابر  $n$  شود. تعریف می‌کنیم:

$$c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0. \quad (11)$$

سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  را حاصل ضرب کوشی دو سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$  می نامند.

(۳-۳۵) گزاره. برای  $|x-a| < \rho$  که  $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$  حاصل ضرب کوشی به  $f(x)g(x)$  همگراست.

برهان. داریم  $|c_n| \leq |a_0||b_n| + \dots + |a_n||b_0|$  پس:

$$|c_0| + |c_1||x-a| + \dots + |c_n||x-a|^n \leq (|a_0| + \dots + |a_n||x-a|^n)(|b_0| + \dots + |b_n||x-a|^n)$$

از طرفی دیگر سری های  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$  به ازای  $|x-a| < \rho$  همگرای مطلق هستند، پس طرف راست نامساوی بالا کراندار است. نتیجه اینکه مجموع های جزیی  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  نیز به طور مطلق همگرا هستند. بنابراین می توان مجموع جملات  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  را جابجا کرد بدون اینکه در مجموع تغییری حاصل شود. □

می توان ثابت کرد که اگر  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  در  $|x-a| < \rho_1$  و  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$  در  $|x-a| < \rho_2$  و  $g(x) \neq 0$  به ازای هر  $x$  در  $|x-a| < \rho_2$ ، آنگاه  $\rho > 0$  وجود دارد که  $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$  در  $|x-a| < \rho$  تحلیلی است. در این صورت با نوشتن  $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$  و با استفاده از حاصل ضرب کوشی، می توان با مقایسه ضرایب دو طرف  $f(x) = g(x)h(x)$ ، ضرایب  $c_n$  را محاسبه کرد. این مطلب را با یک مثال نشان می دهیم.

مثال. فرض کنید می دانیم  $\tan x$  در  $a = 0$  تحلیلی است، چند ضریب اول سری تیلور آن را در  $a = 0$  محاسبه کنید. محاسبه مستقیم از طریق مشتق گیری و محاسبه ضرایب  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  به سرعت افزایش  $n$  پیچیده می شود. به جای آن می نویسیم

$$\sin x = (\cos x)(\tan x)$$

پس اگر  $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$  بسط تیلور  $\tan x$  در  $a = 0$  باشد داریم:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots)(t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \dots)$$



با محاسبه حاصل ضرب کوشی طرف راست و برابر قرار دادن ضرایب آن با ضرایب متناظر طرف چپ داریم:

$$\begin{aligned}
 0 &= t_0 \\
 1 &= t_1 \\
 0 &= t_2 - \frac{1}{4}t_0 \\
 -\frac{1}{4} &= t_3 - \frac{1}{4}t_1 \\
 0 &= t_4 - \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4!}t_0 \\
 \frac{1}{4!} &= t_5 - \frac{1}{4}t_3 + \frac{1}{4!}t_1 \\
 &\vdots \quad \vdots \quad \vdots
 \end{aligned}$$

می توان این دستگاه را از بالا به پایین حل کرد و متوالیاً ضرایب  $t_n$  را به دست آورد:

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 0, t_3 = \frac{1}{3}, t_4 = 0, t_5 = \frac{2}{15}, \dots$$

توجه کنید که چون  $\tan x$  یک تابع فرد است، مشتقات آن از مرتبه زوج همه فرد هستند و در  $a = 0$  برابر صفر می شوند، بنابراین در سری تیلور  $\tan x$  در  $a = 0$  فقط جملات درجه فرد ظاهر می شوند. در بالا ضرایب را تا درجه ۵ محاسبه کردیم:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \quad (12)$$

(۳۵-۴) محاسبه حد به کمک سری تیلور

بسیاری از محاسبات حدی که در مباحث مقدماتی از طریق استفاده مکرر از روش هایی مانند قاعده هوییتال حل می شوند می توان به سادگی با توجه به سری تیلور انجام داد. به مثال زیر توجه کنید

مثال . می خواهیم  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 \cos x - x^5 \sin x}{x^8}$  را محاسبه کنیم . محاسبه این حد از طریق قاعده هوییتال هشت بار مشتق گیری می طلبد ولی توجه کنید که :

$$\begin{aligned}
 x^7 \cos x - x^5 \sin x &= x^7 \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \right) - x^5 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \right) \\
 &= \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) x^8 + (\text{جملات توان } 10 \text{ در } x \text{ به بالا})
 \end{aligned}$$

بنابراین برای  $x \neq 0$  داریم :

$$\frac{x^7 \cos x - x^5 \sin x}{x^8} = \left( -\frac{1}{3} \right) + (\text{جملات توان } 2 \text{ در } x \text{ به بالا})$$

بنابراین حد عبارت بالا وقتی  $x$  به  $0$  میل کند برابر  $-\frac{1}{3}$  است .

## سری فوریه

تا این مرحله با چند جمله‌ای‌های تیلور به عنوان حربه تقریب توابع و سری تیلور به عنوان روش نمایشی برای خانواده بزرگی از توابع آشنایی پیدا کرده‌ایم. هر یک از این دو، از مجموع عناصر ساختی  $(x - a)^n$  با ضرایب مناسب تشکیل شده‌اند. یک خصوصیت مهم تقریب به وسیله چند جمله‌ای تیلور "موضعی" بودن آن است بدین معنی که هر چه  $x$  به  $a$  نزدیک‌تر باشد، تقریب دقیق‌تر است و با دور شدن  $x$  از  $a$  باید معمولاً تعداد جملات را به شدت افزایش داد تا تقریب معقولی حاصل شود. روش‌های تقریب و روش‌های نمایش دیگری نیز برای توابع موجود است که در اینجا به مهمترین آنها موسوم به چند جمله‌ای فوریه و سری فوریه می‌پردازیم. دو ویژگی متمایزکننده این روش در مقابل روش چند جمله‌ای و سری تیلور به این شرح‌اند:

یکی اینکه تقریب به وسیله چند جمله‌ای‌های فوریه به نوعی سرتاسری است یعنی معمولاً هیچ نقطه خاصی از دامنه، "مرکز تقریب" نیست، بلکه فاصله عمومی بین نمودار تابع و نمودار تقریب به مفهومی که ذکر خواهد شد کوچک می‌شود، و نکته دوم اینکه این روش حربه مهمی برای بررسی پدیده‌های تناوبی و تقریباً تناوبی مانند پدیده‌های موجی است.

فرض کنید  $T > 0$  داده شده است، قرار می‌دهیم  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . تابع‌های  $\sin m\omega x$  و  $\cos m\omega x$  : عدد صحیح، همه دوره تناوب  $T$  دارند. اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع با دوره تناوب  $T$  باشد، هدف ما نمایش  $f$  به صورت یک سری با عناصر ساختی  $\sin n\omega x$  و  $\cos n\omega x$ . مقصود از یک سری مثلثاتی با دوره تناوب  $T$ ، عبارتی به شکل زیر است:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (1)$$

جمله ثابت را به جای  $a_0$  به  $\frac{a_0}{\pi}$  نمایش داده‌ایم که بعداً هماهنگی کاملی در فرمول محاسبه  $a_m$  ها ایجاد شود. فرض کنید بتوان مقدار تابع  $f$  را به صورت مجموع بالا نمایش داد:

$$f(x) = \frac{a_0}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega x + b_m \sin m\omega x) \quad (2)$$

سعی می‌کنیم با یک "بحث اکتشافی" رابطه  $a_m$  ها و  $b_m$  ها را با  $f$  مشخص کنیم. از فرمول‌های انتگرالی زیر که به سادگی از فرمول‌های مثلثاتی حاصل ضرب سینوس با سینوس، سینوس با کسینوس و کسینوس با کسینوس نتیجه می‌شوند استفاده خواهیم کرد:

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} (\cos m\omega x)(\sin n\omega x) dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{\pi} & m = n \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T}{\pi} & m = n \end{cases} \quad (5)$$

توجه کنید که اگر به جای بازه انتگرال گیری  $[-\frac{T}{\pi}, \frac{T}{\pi}]$  از هر بازه دیگر به طول دوره تناوب، مثلاً  $[0, T]$ ، نیز استفاده کنیم همان نتایج (3)، (4) و (5) به دست می‌آیند. استفاده از بازه متقارن  $[-\frac{T}{\pi}, \frac{T}{\pi}]$  این حسن را دارد که در موارد خاص که بعداً به تابع‌های فرد یا زوج برمی‌خوریم بعضاً انتگرال گیری ساده‌تر می‌شود. همچنین توجه کنید که داریم:

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} \cos m\omega x dx = 0, \quad \int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} \sin m\omega x dx = 0 \quad (6)$$

محاسبه  $a_m$  ها و  $b_m$  ها را اکنون بدین طریق پیش می‌بریم. نخست از دو طرف (2) روی بازه  $[-\frac{T}{\pi}, \frac{T}{\pi}]$  انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} f(x) dx = \frac{a_0}{\pi} T + \int_{-\frac{T}{\pi}}^{\frac{T}{\pi}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \right) dx$$

در طرف راست بالا انتگرال مجموع یک سری مطرح است. همان طور که قبلاً در بحث سری های تیلور بحث شد، به طور کلی نمی توان نوشت  $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$  ولی در اینجا چون فقط یک بحث اکتشافی را دنبال می کنیم؛ این جابجایی انتگرال و مجموع نامتناهی را انجام می دهیم. نهایتاً قضیه ای ذکر خواهیم کرد که نتیجه به دست آمده را توجیه می کند. بنابراین نتیجه می گیریم که:

$$\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f(x) dx = \frac{a_0}{4} T + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos n\omega x + b_n \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \sin n\omega x) dx$$

طبق (6) مقدار هر یک از انتگرال های سمت راست صفر است؛ پس:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f(x) dx \quad (7)$$

چون طول بازه  $[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}]$  برابر  $T$  است؛ اگر این محاسبه توجیه پذیر باشد؛ نتیجه گرفته ایم که جمله ثابت یعنی  $\frac{a_0}{4}$  برابر میانگین تابع  $f$  در یک دوره تناوب است. این نتیجه را با مقدار جمله ثابت سری تیلور مقایسه می کنیم. در مورد سری تیلور  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  جمله ثابت؛ یعنی  $a_0$  برابر  $f(a)$  است. تمایز بین سری تیلور و سری فوریه در همین گام آشکار می شود. در مورد سری تیلور؛  $a_0$  به عنوان تقریب درجه 0 تابع؛ فقط به مقدار تابع در نقطه  $a$  توجه دارد؛ در حالی که در مورد سری فوریه؛ جمله ثابت میانگین همه مقادیر تابع در یک بازه به طول  $T$  (دوره تناوب  $f$ ) می باشد.

با همین روش به مقادیری آزمایشی برای سایر ضرایب دست می یابیم. اگر برای  $n > 0$  ثابت؛ دو طرف (2) را در  $\cos n\omega x$  ضرب کرده و روی  $[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}]$  از دو طرف انتگرال بگیریم؛ مجدداً با جابجایی انتگرال و  $\sum_{m=1}^{\infty}$  داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f(x) \cos n\omega x dx &= \frac{a_0}{4} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos n\omega x dx + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} (\cos m\omega x)(\cos n\omega x) dx) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (b_m \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} (\sin m\omega x)(\cos n\omega x) dx) \end{aligned}$$

با توجه به فرمول های (3)، (4) و (6) نتیجه می شود که

$$\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f(x) \cos n\omega x dx = a_n \cdot \frac{T}{4}$$

یا معادلاً

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx \quad (8)$$

توجه کنید که (۷) حالت خاص (۸) به ازای  $n = 0$  است. به این دلیل بود که جمله ثابت را به  $\frac{a_0}{2}$  نمایش دادیم. همین طور اگر دو طرف (۲) را در  $\sin n\omega x$  ضرب کرده و روی  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  انتگرال گیری کنیم، با جابجایی مشابه و با استفاده از فرمول‌های (۳)، (۵) و (۶)، نتیجه می‌گیریم که

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx \quad (9)$$

قضیه‌ای در زیر خواهیم آورد، که اثبات آن از بحث ما خارج است، ولی تحت شرایط مناسب صحت فرمول‌های (۸) و (۹) را توجیه می‌کند. تابع  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  را قطعه قطعه  $C^1$  می‌نامیم در صورتی که شرط زیر برقرار باشد: افرازی  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  وجود دارد که تحدید  $f$  به هر  $[a_{i-1}, a_i]$  مشتق پذیر با مشتق پیوسته است و به علاوه در هر  $a_i$  تابع  $f$  و مشتق آن، تابع  $f'$  دارای حد چپ و راست هستند (در نقطه  $a = a_0$  فقط حد راست، و در نقطه  $b = a_k$  فقط حد چپ مطرح است).

(۳۶-۱) قضیه. فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تناوبی با دوره تناوب  $T$  و در بازه تناوب خود قطعه قطعه  $C^1$  است و  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  در این صورت سری:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

که در آن  $a_n$  و  $b_n$  طبق فرمول‌های (۸) و (۹) تعریف شده‌اند دارای ویژگی زیر است.

الف) در هر نقطه  $x$  که تابع  $f$  پیوسته باشد، مجموع سری بالا برابر  $f(x)$  است.

ب) در هر نقطه ناپیوستگی  $x$  برای تابع  $f$ ، مجموع سری بالا برابر میانگین حد چپ و راست تابع  $f$  است.  $\square$

سری بالا را سری فوریه تابع  $f$  می‌نامند. مجموع متناهی

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (10)$$

تقریب فوریه مرتبه  $N$  تابع  $f$  خوانده می‌شود.

### (۲-۳۶) چند مثال

(۱-۲-۳۶) تابع زیر را در نظر می گیریم

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & (2k-1)\pi < x < 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در هر  $m \in \mathbb{Z}, x = m\pi$  مقدار  $f(x)$  را برابر مقدار ثابت دلخواهی  $c$  قرار می دهیم. این مقدار اثری بر بحث نخواهد داشت. این تابع تناوبی با دوره  $2\pi$  است و در شکل ۱ نمایش داده شده است:

?

در این مثال داریم  $T = 2\pi$  و  $\omega = 1$ . نقاط ناپیوستگی  $f$  و  $f'$  مضارب  $\pi$  هستند ( $f'$  در این نقاط تعریف نشده است). ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  را از (۸) و (۹) محاسبه می کنیم:

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

و

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین سری فوریه تابع  $f$  بدین صورت است:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

توجه کنید که هر یک از تابع های تشکیل دهنده سری بالا پیوسته (در واقع بی نهایت بار مشتق پذیر) است ولی مجموع سری در بعضی نقاط پیوسته نیست! طبق قضیه در هر نقطه  $x \neq n\pi$  مجموع سری بالا برابر ۱ یا ۰ است (بسته به این که انتهای چپ بازه مضرب زوج یا فرد  $\pi$  باشد) و در  $x = n\pi$  برابر میانگین حد راست و چپ، یعنی  $\frac{1}{2}$  می باشد. مطلب اخیر را می توان با توجه به اینکه  $\sin n\pi = 0$  مستقیماً مشاهده کرد. اینکه چگونه مجموع بالا به یک تابع ناپیوسته پله ای میل می کند می توان با رسم

تقریب‌های فوریه متوالی  $f$  مشاهده کرد (شکل ۲).

?

(۲-۲-۳۶) تابع  $\phi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت  $\phi(x) = |x|$  در نظر می‌گیریم و آن را به طور تناوبی با دوره تناوب ۲ به تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ادامه می‌دهیم (شکل ۳).

?

در اینجا  $T = 2$  و  $\omega = \pi$ . تابع  $f$  زوج است، پس برای هر  $n$   $f(x) \sin n\pi x$  فرد است و انتگرال آن روی بازه  $[-1, 1]$  برابر صفر می‌شود، پس  $b_n = 0$  برای هر  $n$ . برای محاسبه  $a_n$  ها داریم:

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 |x| \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx$$

برای  $n = 0$  داریم  $a_0 = 1$ ، برای  $n > 0$  از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos n\pi x dx &= \frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x dx \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ -\frac{2}{n^2 \pi^2} & n \text{ فرد} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین سری فوریه به شکل زیر است:

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right)$$

چون این تابع پیوسته است، مجموع سری بالا همه جا برابر  $f(x)$  است. بالاخص در  $x = 0$  داریم:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right)$$

یا

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (11)$$

۶



$$\text{تمرین. از (۱۱) نتیجه بگیرید که } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ و } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

همان طور که در مثال بالا مشاهده کردیم اگر تابع  $f$  زوج باشد همه ضرایب  $b_n$  صفر هستند. به همین ترتیب برای تابع فرد، همه ضرایب  $a_n$  صفر می‌شوند. مقصود از یک سری فوریه کسینوسی سری فوریه‌ای است که همه  $b_n$  های آن صفر باشند؛ و یک سری فوریه سینوسی، سری فوریه‌ای است که در آن  $a_n = 0$  برای هر  $n$ .

بحث ما تا این لحظه ممکن است این تصور را القاء کرده باشد که کاربرد سری فوریه فقط در مورد تابع‌های تناوبی است. در واقع اگر  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی قطعه قطعه  $C^1$  باشد، می‌توان سری فوریه را در مورد آن به کار برد. شیوه عمل این است که  $\phi$  را بیرون  $[a, b]$  به طور تناوبی ادامه می‌دهیم تا تابعی تناوبی  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  به دست آید و  $f$  را به صورت مجموع یک سری فوریه می‌نویسیم. اگر دامنه این سری به  $[a, b]$  محدود شود مجموع آن به صورت حکم قضیه (۳۶-۱) نمایش  $\phi$  است. در واقع  $\phi$  را می‌توان به شیوه‌های گوناگون به طور تناوبی ادامه داد. به عنوان مثال:

$$(۳-۳۶) \text{ سری های فوریه سینوسی و کسینوسی } \phi: [0, A] \rightarrow \mathbb{R}$$

فرض کنید  $\phi$  روی  $[0, A]$  قطعه قطعه  $C^1$  باشد. اگر برای  $x \in [-A, 0]$  تعریف کنیم

$$\phi(x) = \phi(-x) \quad (۱۲)$$

تابعی زوج روی  $[-A, A]$  به دست می‌آید. این تابع را با دوره تناوب  $T = 2A$  روی  $\mathbb{R}$  ادامه می‌دهیم و تابع حاصل را  $f$  می‌نامیم.  $f$  تابعی زوج است و دارای ضرایب فوریه زیر می‌باشد:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{A} \int_0^A \phi(x) \cos \frac{\pi}{A} nx dx \quad (۱۳)$$

سری فوریه حاصل شده در  $[0, A]$  نمایش  $\phi$  است (با منظور کردن میانگین حدهای راست و چپ در نقاط ناپوستگی).

به همین ترتیب، اگر به جای (۱۲)، تداوم  $\phi$  به  $[-A, 0]$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\phi(x) = -\phi(-x) \quad (۱۴)$$

و مقدار  $\phi$  را در  $\circ$  نادیده بگیریم (که به هر حال اثری بر مقادیر انتگرال ندارد) ما ادامه  $\phi$  با دوره تناوب  $T = 2A$  به سرتاسر  $\mathbb{R}$  یک تابع فرد به دست می آید. برای ضرایب فوریه داریم:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{A} \int_0^A \phi(x) \sin \frac{\pi}{A} n x dx \quad (15)$$

سری فوریه با این ضرایب در  $[0, A]$  نمایش  $\phi$  است (البته در مضارب  $A$ ، مجموع سری فوریه برابر صفر می شود. چرا؟). تمرین. برای  $\sin x$  یک سری فوریه کسینوسی روی  $[0, \pi]$  بنویسید و برای

$\cos x$ ، یک سری فوریه سینوسی روی  $[0, \pi]$ .

در آغاز اشاره کردیم به این که چند جمله ای های فوریه نوعی تقریب سرتاسری برای تابع ارائه می کنند. در این زمینه قضایای متعددی وجود دارد که یکی از ساده ترین آنها را ذکر می کنیم. مجموع متناهی (۱۰) را به  $\phi_N$  نمایش دهید. تحت شرایط قابل شده در قضیه (۳۶-۱) برای تابع  $f$ ، می توان ثابت کرد که:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |f(x) - \phi_N(x)|^2 dx \right) = 0 \quad (16)$$

این مطلب گویای این واقعیت است که در یک دوره تناوب، مساحت بین نمودار  $f$  و نمودار تقریب های فوریه آن به تدریج کوچکتر شده و به صفر میل می کند.