subject: Finite Element

روش اجزاء محدود:

فصل یکم: مقدمه

- مسائل مهندسی - روش های عددی - تاریخچه مختصر اجزا محدود - مراحل اساسی روش اجزاء محدود - فرمول بندی مستقیم - فرمول بندی براساس می‌نیمم انرژی پتانسیل کل - فرمول بندی به روش مانده وزنی (روش کلی‌تر است - روش گالرکین) - تخمین خطاها با استفاده از روش اجزاء محدود

*روش مانده وزنی در تمام مسائل به صورت ODE و PDE ها قابل استفاده است.

مسائل مهندسی:

مسائل موجود در یک مهندسی در واقع مدل های ریاضی از حالات فیزیکی هستند. یعنی یک معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی اولیه و طبیعی داریم. این معادله های دیفرانسیل معمولاً دو جواب دارند: یک جواب همگن است و جواب دیگر خصوصی است.

جواب همگن شامل پارامترهای مربوط به رفتار طبیعی سیستم هستند. مانند مدول الاستیسیته، ضریب هدایت حرارتی، ویسکوزیته سیال.

جواب خصوصی شامل محرک خارجی است. مانند نیروها و ممان های خارجی، اختلاف حرارت در طول یک محیط، اختلاف فشار در یک سیال.

روش های عددی:

در اینجا بحث بوجود آمدن روش عددی مطرح می‌شود؟ در عمل بسیاری از مسائل مهندسی هستند که برای آن ها جواب دقیق یا Closeform Solution به هر دلیلی وجود ندارد. (مثلاً به علت پیچیدگی و یا هندسه شرایط مرزی معادله دیفرانسیل، متغیر بودن ضرایب معادله دیفرانسیل و ...) لذا این دسته از مسائل مهندسی تنها با روش های اجزای محدود قابل حل اند.

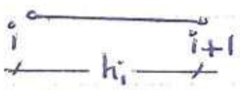
تفاوت روش دقیق با روش عددی در این است که روش دقیق مقدار تابع مورد نظر را در کل Domain به ما می‌دهد اما روش عددی به صورت گسسته و تنها در تعداد محدودی از نقاط جواب معادله را به ما می‌دهد.

روش های عددی در حل معادله دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- روش تفاضل محدود FDM ۲- روش اجزاء محدود FEM

در روش تفاضل محدود FDM معادله دیفرانسیل برای هر گره (node) نوشته می‌شود و سپس روابط تفاضلی جایگزین مشتقات می‌شود.

subject: Finite Element



$$\dot{u}_i = \frac{1}{h_i}(u_{i+1} - u_i)$$

با معادلات تفاضلی معادله دیفرانسیل را جایگزین می‌کنیم و سپس دستگاه معادله جبری با چند مجهول تشکیل و حل می‌گردد و نهایتاً مقادیر مجهول گرهی بدست می‌آید. این روش کاربری بسیار ساده دارد اما ضعف اصلی آن این بود که تنها برای مرزهای مستقیم قابل استفاده است و در مرزهای منحنی استفاده‌ای ندارد. ضعف بعدی این است که تنها مناسب مواد ایزوتروپ است.

روش اجزای محدود به نوعی از دهه 50 به بعد کلید خورد. در این روش از فرمول‌های انتگرالی به جای معادلات دیفرانسیل جهت تشکیل معادلات جبری استفاده می‌شود. در این روش یک تابع پیوسته تقریبی (تابع شکلی Shape Function) برای حل هر المان فرض می‌شود. جواب نهایی از اجتماع یکایک جواب‌ها حاصل می‌گردد. این کار با حفظ پیوستگی در مرزهای بین المانی صورت می‌گیرد.

تاریخچه مختصر روش اجزاء محدود:

روش اجزاء محدود در اوایل قرن بیستم متولد شد و مولود آنالیز ماتریسی سازه است که به محیط‌های گسترده بسط داده شده است. اولین حرکت سال 1900 بود که محقق یک محیط پیوسته Continua را با استفاده از مدل المان‌های میله‌ای الاستیک مدل شد. سپس در سال 1934 شخصی به نام Cournat یک مسئله تنش مستوی را با استفاده از المان‌های مثلثی تحلیل کرد و اولین مقاله را در Finite Element نوشت. در سال 1950 شرکت بوئینگ اولین کاربرد صنعتی اجزاء محدود را کلید زد و بال هواپیما را با استفاده از المان‌های مثلثی مدل‌سازی کرد. در سال 1960 پروفسور Clough برای اولین بار اصطلاح روش اجزاء محدود Finite Element Method را برای این مبحث به کار برد و در سال 1967 هم کتاب معروف Zienkiewicz نوشته شد و در سال 1970 نرم افزار Ansys اختراع شد و رسماً عملیاتی به خاطر ظهور Finite Element شروع شد.

مراحل اساسی روش اجزاء محدود:

شامل هفت مرحله در سه فاز است:

— فاز پیش پردازش:

۱ـ تفکیک مسئله به شکل المان‌های محدود یا به عبارتی تقسیم به گره‌ها و المان‌ها (Discretization)

۲ـ فرض یک تابع شکل که نمایانگر رفتار فیزیکی المان باشد. تعیین یک تابع پیوسته تقریبی برای حل المان.

subject: Finite Element

۳- نوشتن معادلات برای هر المان شامل ماتریس سختی و نیروی هر المان

۴- جمع بندی یکایک المان‌ها جهت نمایش کل مسئله و تشکیل ماتریس سختی (سختی) اصلی یا کلی (Global)

۵- اعمال شرایط مرزی، شرایط اولیه و بارگذاری

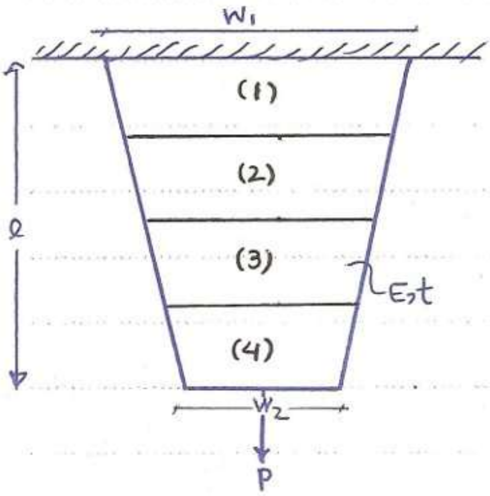
- فاز حل مسئله:

۶- حل مجموعه‌ای از معادلات خطی (غیر خطی) جبر معمولی برای یافتن مقادیر بازاء مورد نظر در هر گره.

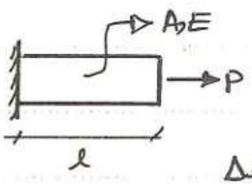
- فاز پس پردازش:

۷- یافتن اطلاعات مهم دیگر براساس مقادیر بدست آمده در هر گره مانند مقادیر تنش، کرنش، شار حرارتی.

مثال: تغییر مکان نقاط مختلف میله‌ای با مشخصات زیر را با اغماض از وزن میله، بررسی کنید.



در مقاومت مصالح دانستیم:



$$\Delta l = \frac{PL}{AE} \longrightarrow P = \frac{AE}{l}\,\Delta l$$

$$\longrightarrow F = K\Delta$$

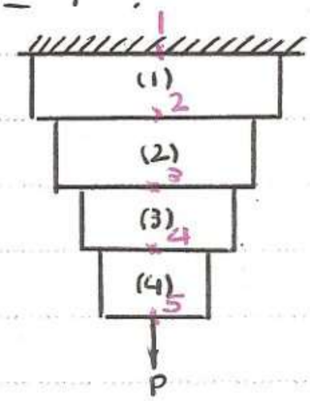
لذا می‌توانیم میله‌ی فوق را بصورت فنر زیر مدل‌سازی کنیم:

$$k = \frac{AE}{l}$$

میله مورد سوال، سطح مقطعش متغیر است.

آن را به ۴ قسمت تقسیم می‌کنیم. مشاهده می‌شود که سطح مقطع قسمت های مختلف باز هم متغیر است.

بصورت زیر این قسمت‌ها را به المان تبدیل می‌کنیم:



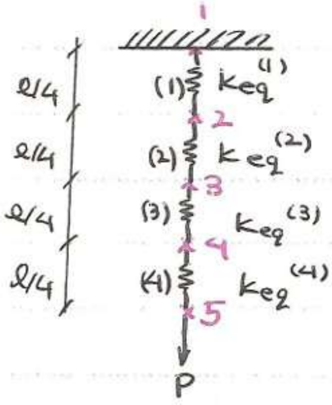
مسئله ما به ۴ المان و 5 گره discretize می‌شود.

$$A^{i}_{avg} = \frac{A_i + A_{i+1}}{2}$$

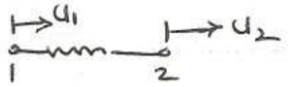
$$A_{(1)} = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

در این حالت سازه ما شکلی به صورت پله ای گرفته است که می‌توانند بصورت فنر مدل شود. مدل فنر در صفحه بعد رسم شده است.

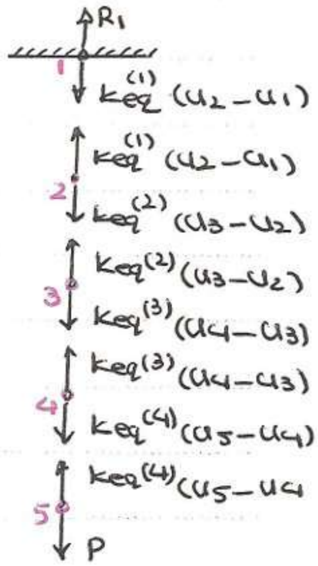
subject: Finite Element



$$k_{eq}^{(i)} = \frac{A_{avg}^{(i)} E}{\ell^{(i)}}$$



" میزان جابجایی یک متر "



روابط تعادل گره‌ای را می‌نویسیم:

گره 1 $\quad R_1 - k_{eq}^{(1)}(u_2-u_1) = 0$

گره ۲ $\quad k_{eq}^{(1)}(u_2-u_1) - k_{eq}^{(2)}(u_3-u_2) = 0$ $\quad \longrightarrow$ بصورت ماتریسی مرتب می‌کنیم

$\vdots$

گره ۵ $\quad k_{eq}^{(4)}(u_5-u_4) - P = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{eq}^{(1)} & -k_{eq}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{eq}^{(1)}+k_{eq}^{(2)} & -k_{eq}^{(2)} & 0 & 0 \\ & & k_{eq}^{(2)}+k_{eq}^{(3)} & -k_{eq}^{(3)} & 0 \\ & Sym & & k_{eq}^{(3)}+k_{eq}^{(4)} & -k_{eq}^{(4)} \\ & & & & k_{eq}^{(4)} \end{bmatrix}}_{} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}}_{}$$

$$\underline{K}\,\underline{u} = \underline{F}$$

$$\begin{bmatrix} k_{eq}^{(1)} & -k_{eq}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{eq}^{(1)}+k_{eq}^{(2)} & -k_{eq}^{(2)} & 0 & 0 \\ & & k_{eq}^{(2)}+k_{eq}^{(3)} & -k_{eq}^{(3)} & 0 \\ & Sym & & k_{eq}^{(3)}+k_{eq}^{(4)} & -k_{eq}^{(4)} \\ & & & & k_{eq}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

subject: Finite Element

$\underline{R} = \underline{k}\,\underline{u} - \underline{F}$

$$\begin{bmatrix} \text{بردار عکس العمل های} \\ \text{تکیه گاهی} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ماتریس} \\ \text{سختی} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{بردار} \\ \text{جابجایی} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{بردار} \\ \text{نیرو} \end{bmatrix}$$

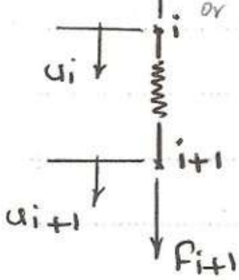
حال مرحله اعمال شرایط مرزی است.

از شرایط مرزی می دانیم $u_1 = 0$ است. روش حل در اینجا این است که بجای اینکه سطر و ستون i ام را حذف کنیم، مقدار سطر و ستون i ام (درایه ii) را برابر یک قرار داده و سایر درایه های این سطر و ستون را صفر قرار دهیم.

(در جهت پایین، جهت مثبت می گیریم)

$f_i = k_{eq}^{(i)} (u_{i+1} - u_i)$ or $f_i = k_{eq}^{(i)} (u_i - u_{i+1})$

$f_{i+1} = k_{eq}^{(i)} (u_{i+1} - u_i)$



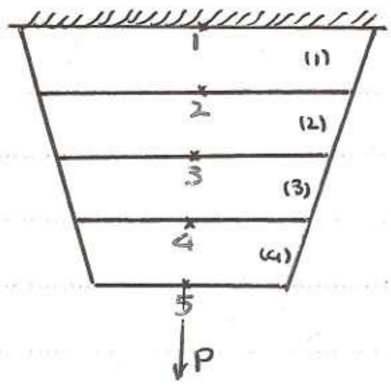
$F_i = k_{eq}^{(i)} u_i - k_{eq}^{(i)} u_{i+1}$

$F_{i+1} = -k_{eq}^{(i)} u_i + k_{eq}^{(i)} u_{i+1}$

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{eq}^{(i)} & -k_{eq}^{(i)} \\ -k_{eq}^{(i)} & k_{eq}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

Global رابطه $\underline{F} = \underline{k}\,\underline{u}$

Local رابطه $\underline{f} = \underline{k}\,\underline{u}$



المان	گره i	گره i+1
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

حالا نوبت به assemble کردن ماتریس های Local میرسد:

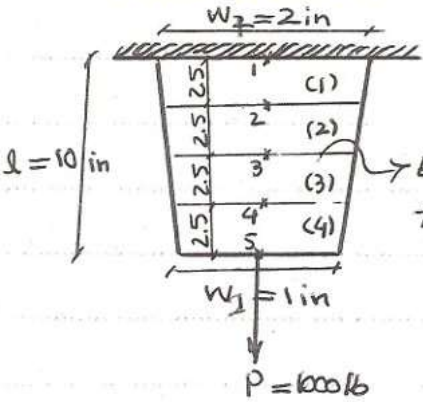
سطر i یا i+1 و ستون های مربوط را با توجه به جدول فوق در ماتریس سختی کلی قرار می دهیم. (ر.ک. تحلیل سازه II - تحلیل ماتریسی سازه ها - تالیف کسری نازاده)

$[K_G][\underline{u}] = [P]$

بار خارجی

نحوه assemble کردن توضیح داده شود

subject: Finite Element



حل با مقادیر عددی:

$E=10.4\times10^{6}\ lb/in^2$

$t=0.125\ in$

$$A(y)=\left(w_1+\left(\frac{w_2-w_1}{l}\right)y\right)t$$

$$=0.25-0.0125y\ ;\ 0\leq y\leq 10''$$

$$A_{avg}^{(i)}=\frac{1}{2}(A_i+A_{i+1})$$

المان	گره i	گره i+1	$A_{avg}\ (in^2)$	$K_{eq}\ (lb/in)$
1	1	2	0.234375	975×10^3
2	2	3	0.203125	845×10^3
3	3	4	0.17875	715×10^3
4	4	5	0.140625	585×10^3

با توجه به شرایط مرزی

$$10^3\begin{bmatrix} \cancel{975} & \cancel{-975} & 0 & 0 & 0 \\ & 1820 & -845 & 0 & 0 \\ & & 1560 & -715 & 0 \\ & \text{Symetric} & & 1300 & -585 \\ & & & & +585 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\1000\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}u_1=0\\u_2=0.001026\ in\\u_3=0.002210\ in\\u_4=0.003608\ in\\u_5=0.005317\ in\end{cases}$$

تمرین [?]: همین مسئله را با تعداد 8 المان حل کنید.

اگر مسئله فوق را با 8 المان حل نمائیم جواب بصورت زیر خواهد بود (نقاط گره):

$u_1=0$ $u_2=0.0010268$ $u_3=0.002212$ $u_4=0.0036135$

$u_5=0.005328$

فاز پس پردازش:

در این فاز از اطلاعات بدست آمده، می‌توان سایر مقادیر کمیتها را بدست آورد. در این مسئله مثلاً می‌توانیم تنش در هر المان را بدست آوریم؟

$$\sigma^{(i)}=\frac{f_i}{A_{avg}(i)}=\frac{K_{eq}^{(i)}(u_{i+1}-u_i)}{A_{avg}^{(i)}}\Rightarrow$$

subject: Finite Element

$$\sigma^{(i)} = \frac{A_{avg}^{(i)} E/\ell \,(u_{i+1} - u_i)}{A_{avg}^{(i)}} = E\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\ell}\right)$$

بصورت $\sigma^{(i)} = E\varepsilon^{(i)}$

$$\sigma^{(1)} = 10.4 \times 10^6 \left(\frac{0.001026 - 0}{2.5}\right) = 4268 \quad lb/in^2$$

$$\sigma^{(2)} = 4925 \quad lb/in^2$$

$$\sigma^{(3)} = 5816 \quad lb/in^2$$

$$\sigma^{(4)} = 7109 \quad lb/in^2$$

در محاسبه تنش با مشتق میزان جابجایی کار می‌کنیم. چون $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ است ولذا دقت تنش از دقت میزان جابجایی کمتر است. به عبارت دیگر بطور کلی چنانچه مشتق وارد محاسبات شود، باعث کاهش دقت خواهد شد.

محاسبه نیروی عکس‌العمل: اینجا سازه معین است و نیروی عکس‌العمل به راحتی قابل محاسبه است. به عنوان روش کلی هم می‌توان از معادله زیر که قبلاً بدست آورده‌ایم استفاده نماییم:

$$R = k_{eq}^{(1)} (u_2 - u_1) = 975 \times 10^3 \times (0.001026 - 0) = 1000 \ lb$$

رابطه زیر را هم به عنوان رابطه‌ای دیگر برای عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی بدست آوریم:

$$\underline{R} = \underline{k}\,\underline{u} - \underline{F}$$

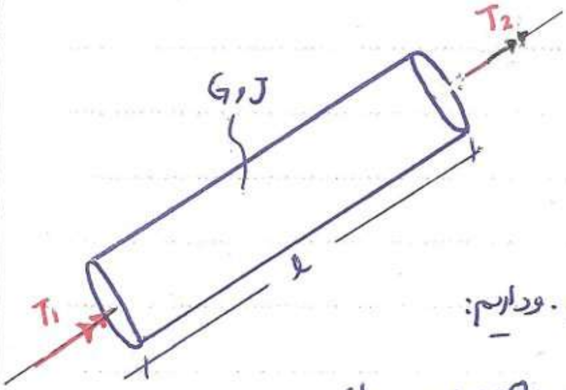
$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 975 & -975 & 0 & 0 & 0 \\ & 1820 & -845 & 0 & 0 \\ & & 1560 & -715 & 0 \\ & \text{Symetric} & & 1300 & -585 \\ & & & & 585 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001026 \\ 0.002210 \\ 0.003608 \\ 0.005317 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

پیچش مقاطع مدور

در پیچش مقاطع مدور اگر هم جنس ثابت باشد، $\Theta = \dfrac{TL}{GJ}$ خواهد بود.



$$\Theta = \frac{TL}{GJ} \Longrightarrow T = \underbrace{\left(\frac{GJ}{L}\right)}_{\text{سختی پیچشی}}\Theta$$

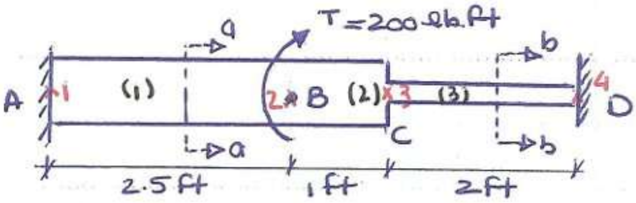
چون:

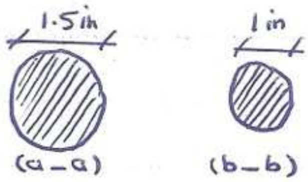
$$M = k\Theta \quad , \quad F = k\Delta$$

در این سری مسائل جهت مثبت را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. و داریم:

$$\frac{GJ}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

مثال: با استفاده از اجزای محدود مسئله زیر زاویه پیچش گره و عکس العمل های تکیه گاهی را نیز محاسبه نمایید.





$G = 3.9\times10^{6}\ lb/in^2 \qquad G = 4\times10^{6}\ lb/in^2$

مسئله را به سه المان تقسیم می‌کنیم. (سه المان و چهار گره)

$$J^{(1)} = J^{(2)} = \frac{1}{2}\pi\times(0.75)^4 = 0.497\ in^4$$

$$J^{(3)} = \frac{1}{2}\pi(0.5)^4 = 0.0982\ in^4$$

$$K^{(1)} = \frac{3.9\times10^6\times0.497}{2.5\times12}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64610 & -64610 \\ -64610 & 64610 \end{bmatrix} \ lb.in$$

$$K^{(2)} = \frac{3.9\times10^6\times0.497}{1\times12}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161525 & -161525 \\ -161525 & 161525 \end{bmatrix} \ lb.in$$

$$k^{(3)} = \frac{4.0\times10^6 \times 0.0982}{2\times12}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16367 & -16367 \\ -16367 & 16367 \end{bmatrix} \quad lb.in$$

المان	i	i+1
(1)	1	2
(2)	2	3
(3)	3	4

* nnode = 4 ; dofnode = 1

ndof = 4×1 = 4

$$\underset{\sim}{k}^{G} = \begin{bmatrix} 64610 & -64610 & 0 & 0 \\ -64610 & 226135 & -161525 & 0 \\ 0 & -161525 & 177892 & -16367 \\ 0 & 0 & -16367 & 16367 \end{bmatrix}$$

با توجه به شرط مرزی $\theta_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} \cancel{64610}^{\,1} & \cancel{-64610}^{\,0} & 0 & 0 \\ \cancel{-64610}^{\,0} & 226135 & -161525 & 0 \\ 0 & -161525 & 177892 & -1637 \\ 0 & 0 & \cancel{-1637}_{\,0} & \cancel{1637}_{\,1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -200\times12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{k}^{-1}\,\underset{\sim}{F}$$

با توجه به شرط مرزی $\theta_4 = 0$

$\Rightarrow \theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = -0.0302 \text{ rad}$

$\theta_3 = -0.02742 \text{ rad} \qquad \theta_4 = 0$

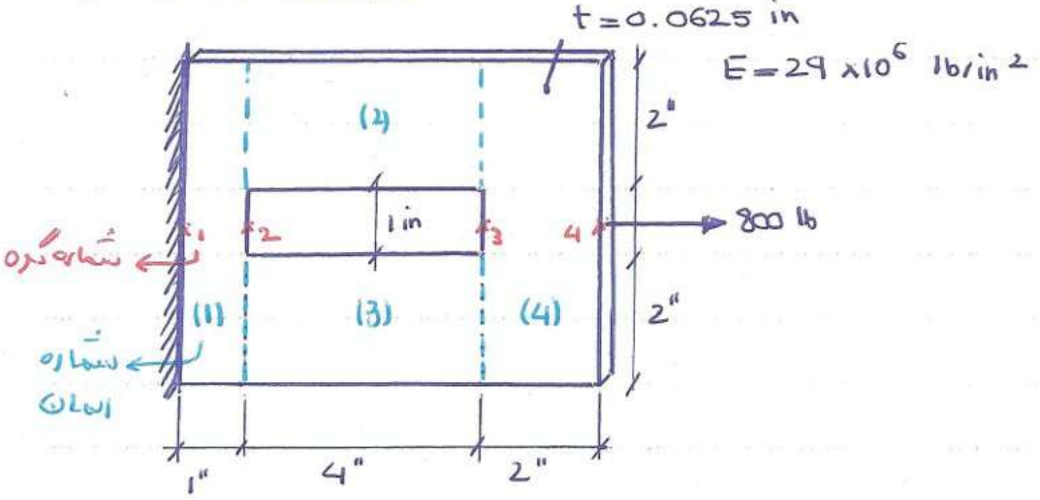
برای محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی هم از رابطه کلی زیر استفاده می کنیم:

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{k}^{(G)}\,\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{F}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = 1951 \\ R_2 = 0 \\ R_3 = 0 \\ R_4 = 4419 \end{cases} \quad lb.in$$

subject: Finite Element

شکل:



عملکرد سازه محوری است. ماتریس سختی local المان‌ها را بدست می‌آوریم:

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{5\times 0.0625\times 29\times 10^6}{1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = 9.0625\times 10^6 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\underline{k}^{(2)} = \underline{k}^{3} = \frac{2\times 0.0625\times 29\times 10^6}{4}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = 9.0625\times 10^5 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$$

$$\underline{k}^{(4)} = \frac{5\times 0.0625\times 29\times 10^6}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = 4.53125 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \times 10^6$$

المان	گره i	i+1
1	1	2
2	2	3
3	2	3
4	3	4

$$\underline{k}^{(G)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9.0625 & -9.0625 & 0 & 0 \\ -9.0625 & 10.875 & -1.8125 & 0 \\ 0 & -1.8125 & 6.34375 & -4.53125 \\ 0 & 0 & -4.53125 & 4.53125 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \times 10^6$$

شرایط مرزی

$$\underline{F} = \underline{k}^{G}\underline{u} \rightarrow 10^6 \times \begin{bmatrix} 9.0625 & -9.0625 & & \\ -9.0625 & 10.875 & -1.8125 & \\ & -1.8125 & 6.34375 & -4.53125 \\ & & -4.53125 & 4.53125 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.827\times 10^{-5} \\ 5.296\times 10^{-4} \\ 7.062\times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{in}$$

subject: Finite Element

مثلاً می‌خواهیم تنش را در هر المان محاسبه کنیم. داریم:

$$\sigma^{(1)} = E\left(\frac{u_2 - u_1}{\ell^{(1)}}\right) = 29\times10^6 \times \left(\frac{8.827\times10^{-5} - 0}{1}\right) = 2500 \ \text{lb/in}^2$$

به همین ترتیب $\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 3200 \ \text{lb/in}^2 \qquad \sigma^{(4)} = 2560 \ \text{lb/in}^2$

مقادیر نرم‌افزار Ansys برای تنش در این المان‌ها به صورت زیر است:

$\sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = (3000 - 3500)\ \text{psi}$ ← چون در لبه‌های سوراخ تمرکز تنش داریم

$\sigma^{(4)} = (2200 - 2600\ \text{psi})$

نرم‌افزار Ansys رفتار واقعی را مدل کرده است. رفتار واقعی دیگر محوری نیست. رفتار واقعی این مسئله رفتار plane stress است و باید از المان‌های دو بعدی برای تحلیل مسئله استفاده کنیم. در این حالت جابجایی دو بعدی است متغیر u نبوده، بلکه u, v است.

فرمول‌بندی اجزای محدود به روش مینیمم انرژی پتانسیل کل:

در حالت یک بعدی

انرژی کرنشی $U = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon\, dV = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon^2 dV$

(e) انرژی کرنشی المان محوری $U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{V^{(e)}} E\varepsilon^{2(e)}\, dV^{(e)} \qquad dV^{(e)} = A_{avg}^{(e)}\, dx$

$$U^{(e)} = \frac{A_{avg}E}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\ell}\right)^2 dx = \frac{A_{avg}E}{2\ell}\left(u_{i+1}^2 + u_i^2 - 2u_iu_{i+1}\right)$$

المان (e) مابین گره‌های i و $i+1$ قرار دارد.

$= F_iu_i$ کار خارجی انجام شده توسط نیروی F_i که از گره i اثر می‌کند

$$\Pi = \sum_{e=1}^{n \leftarrow \text{تعداد المان‌ها}} U^{(e)} - \sum_{i=1}^{m \leftarrow \text{تعداد گره‌ها}} F_iu_i$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial u_i} = \underbrace{\sum_{e=1}^{n}\frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_i}}_{\to\ \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{u}} - \sum_{i=1}^{m}F_i\frac{\partial u_i}{\partial u_i} = 0 \quad , \quad i = 1,2,3,\dots,m$$

subject: Finite Element

$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_i} = \frac{A_{avg} E}{l}(u_i - u_{i+1})$$

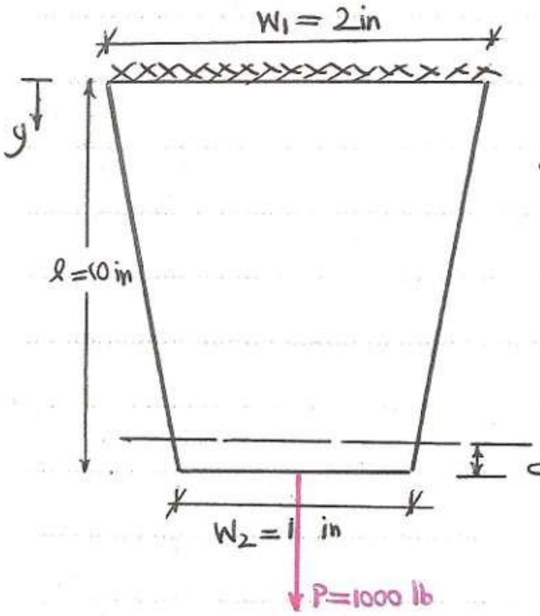
$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_{i+1}} = \frac{A_{avg} E}{l}(u_{i+1} - u_i)$$

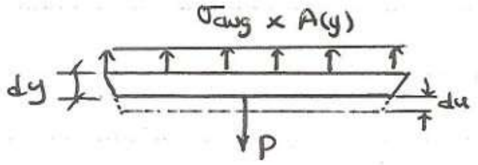
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U^{(e)}}{\partial u_i} \\ \\ \dfrac{\partial U^{(e)}}{\partial u_{i+1}} \end{bmatrix} = \frac{A_{avg} E}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

در اکثر مسائل Finite Element از این پس از روش مینیموم انرژی کرنشی استفاده می کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(F_i u_i) = F_i \qquad \frac{\partial}{\partial u_{i+1}}(F_{i+1} u_{i+1}) = F_{i+1}$$

دوباره سراغ همان سئوال میله با مقطع متغیر می رویم. این بار می خواهیم جواب دقیق را بدست آوریم:





$$\varepsilon = \frac{du}{dy}$$

$$P - \sigma_{avg} A(y) = 0$$

$$P - E\varepsilon A(y) = 0$$

$$\longrightarrow E A(y) \frac{du}{dy} = P$$

$$\int_0^u du = \int_0^y \frac{P}{EA(y)} dy \longrightarrow u(y) = \frac{Pl}{Et(W_2 - W_1)}\left[\ln\left(W_1 + \left(\frac{W_2 - W_1}{l}\right)y\right) - \ln W_1\right]$$

با ۴ المان دوگره ای

y	جواب دقیق	جواب اجزاکرور	با ۸ المان
0	0	0	0
2.5"	0.001027	0.001026	0.001027
5"	0.002213	0.002210	0.002212
7.5"	0.003615	0.003608	0.003614
10.0"	0.005333	0.005317	0.005329

subject: Finite Element

فرمول بندی به روش مانده وزنی:

$$EA(y)\frac{du}{dy} - P = 0 \;;\; u(0) = 0$$

برای حل این مسئله یک تابع آزمایشی $\bar{u}(y)$ (trial function) را فرض می‌کنیم به گونه‌ای که شرایط مرزی‌مان را هم این تابع می‌بایست ارضا نماید. به عنوان یک فرض داریم:

$$\bar{u}(y) = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3$$

$$\Rightarrow EA(y)\frac{d\bar{u}}{dy} - P = R$$

حل ما شامل مینیمم کردن مانده یعنی مانده در سمت راست رابطه فوق است.

$$\int_D \omega R \, dD = 0 \rightarrow$$

دامنه مسئله

اینکه تابع W چه تابعی در انتگرال فوق شود، هر نوع روش Method ایجاد می‌کند.

۱- روش تطبیقی (Collocation Method):

$$W = \delta(y - y_i)$$

تابع دیراک

در سیستم مورد نظر: $\int_0^l \delta(y - y_i) R(y)\, dy = R(y_i) = 0$

خاصیت: $\int f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0)$

روش فوق این معنی را میدهد که انتگرال را روی نقاط مختلف مورد نظرمان صفر می‌کنیم.

در تابع حدس زده شده قبل سه مجهول c_1، c_2 و c_3 را داریم. لذا باید سه نقطه را انتخاب کرده خطا را در آن سه نقطه صفر کنیم تا مجهولاتمان بدست آیند. این که این سه نقطه کدام نقاط باشند به انتخاب خودمان و شرایط مسئله است. مثلاً فرض می‌کنیم:

$$R(l/3) = R(2l/3) = R(l) = 0$$

$$\rightarrow c_1 = 423.0776 \times 10^{-6}$$

$$c_2 = 21.65 \times 10^{-15}$$

$$c_3 = 1.153848 \times 10^{-6}$$

از اینکه $c_2 = 0$ است، می‌توان استنباط کرد که تابع مورد نظرمان یک تابع درجه 3 است و نکته مهم آنکه تابع همان یک تابع فرد است.

۲- روش زیر دامنه Sub-Domain Method:

در روش زیر دامنه، انتگرال خطا را در چند بازه صفر می‌کنیم. مثلاً برای مثال قبل به جای صفر کردن خطا در سه نقطه، خطا را در سه بازه صفر می‌کنیم.

$$W_i = \Delta H_i(x) = H(x - x_i) - H(x - x_{i+1})$$

subject: Finite Element

دستگاه مقابل: $\int_0^{l/3} R\,dy = 0 \qquad \int_{l/3}^{2l/3} R\,dy = 0 \qquad \int_{2l/3}^{l} R\,dy = 0$

با محاسبه از روابط بالا داریم:

$$\Rightarrow \tilde{u}(y) = 391.35088 \times 10^{-6}\, y + 6.075 \times 10^{-6}\, y^2 + 0.80961092 \times 10^{-6}\, y^3$$

۳- روش گالرکین : Galerkin's method

در این روش هم باید $\int_0^l w_i R\,dy = 0$ شود.

$$\tilde{u}(y) = C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3$$

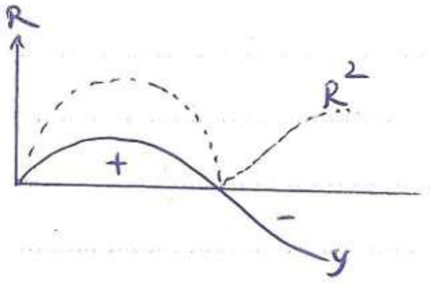
در این روش: $w_i = \varphi_i \quad ; \quad \varphi_1 = y \quad \varphi_2 = y^2 \quad \varphi_3 = y^3$

$$\rightarrow \int_0^l yR\,dy = 0 \qquad \int_0^l y^2 R\,dy = 0 \qquad \int_0^l y^3 R\,dy = 0$$

با انجام همین محاسبات:

$$\tilde{u}(y) = 400.642 \times 10^{-6}\, y + 4.006 \times 10^{-6}\, y^2 + 0.935 \times 10^{-6}\, y^3$$

۴- روش مینیمم کردن مجموع مربعات : Least squares method



باید تابع $\int_a^b R^2\,dy$ ، مینیمم شود.

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\partial R}{\partial C_i} R\,dy = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

بنوعی مستقیماً در این روش نیست : $W_i = \dfrac{\partial R}{\partial C_i}$

دستگاه معادله داریم: $\int_0^l \frac{\partial R}{\partial C_1} R\,dy = 0 \qquad \int_0^l \frac{\partial R}{\partial C_2} R\,dy = 0 \qquad \int_0^l \frac{\partial R}{\partial C_3} R\,dy = 0$

$$\Rightarrow \tilde{u}(y) = 389.773 \times 10^{-6}\, y + 6.412 \times 10^{-6}\, y^2 + 0.789 \times 10^{-6}\, y^3$$

جواب حاصل از ۴ روش فوق را مقایسه می‌کنیم تا ببینیم کدام یک بهتر است.

subject: Finite Element

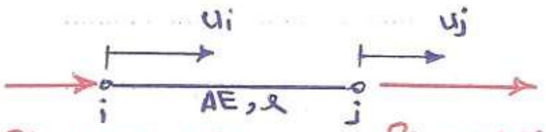
مقایسه جواب حاصل از روش های مانده وزنی :

روش ←	دقیق	تلفیقی	زیردامنه	گالرکین	مینیمم مربعات
$y=0$	0	0	0	0	0
$y=2.5''$	0.001027	4 0.001076	2 0.001029	3 0.001041	1 0.001027
$y=5''$	0.002213	0.002259	0.002209	0.002220	0.002208
$y=7.5''$	0.003615	0.003660	0.003618	0.003624	0.003618
$y=10''$	0.005333	0.005384	0.005330	0.005342	0.005331

تحلیل خرپاها با استفاده از روش اجزاء محدود :

خرپا متشکل از اعضای میله‌ای دو سر مفصل است

که بار و کار انتقال نیرو در اعضا محوری است :



$$f_i = k(u_i - u_j) \qquad f_j = k(u_j - u_i)$$

$$k = \frac{AE}{\ell}$$

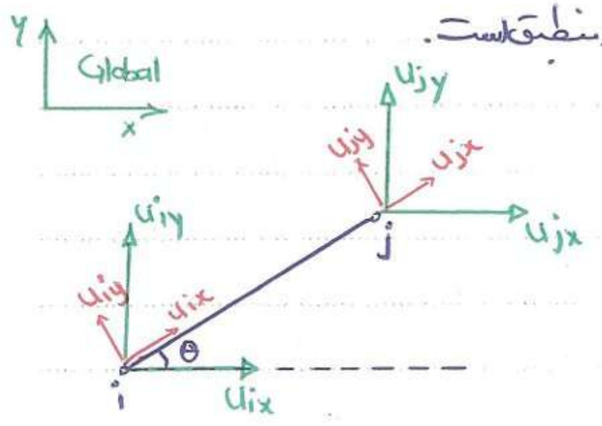
در مورد چنین المانی داریم :

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

در خرپاها همه اعضا لزوماً افقی نیستند و اعضای مایل هم داریم. برای چنین اعضایی می‌توان نوشت:

دو محور مختصات در اجزای محدود داریم : local و Global.

همواره مختصات local، محور x اش بر محور عضو منطبق است.



در گره i :

$$U_{ix} = U_{ix}\cos\theta - U_{iy}\sin\theta$$

$$U_{iy} = U_{ix}\sin\theta + U_{iy}\cos\theta$$

در گره j :

$$U_{jx} = U_{jx}\cos\theta - U_{jy}\sin\theta$$

$$U_{jy} = U_{jx}\sin\theta + U_{jy}\cos\theta$$

Created in Master PDF Editor - Demo Version

subject: Finite Element

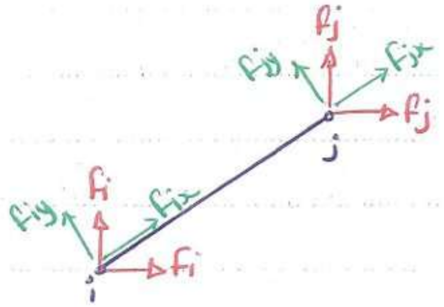
روابط صفحه قبل را در قالب برداری ـ ماتریسی می‌نویسیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix}$$

یا به عبارتی : $\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{u}$ → local بردار جابجایی

Global بردار جابجایی

مشابه همین روابط برای نیروها هم برقرار است. به عبارتی:



$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{f} \qquad \underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{bmatrix}$$

هدف نهایی بدست آوردن ماتریس سختی یک المان خرپایی در مختصات Global است:

در مختصات محلی المان $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{u}$

$$\begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix} , \quad k = \frac{AE}{l}$$

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{u} \longrightarrow \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{T}^{-1}\underset{\sim}{U}$$

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{u} \longrightarrow \underset{\sim}{T}^{-1}\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{T}^{-1}\underset{\sim}{U} \xrightarrow[\underset{\sim}{T}]{\text{طرفین } \times} \underset{\sim}{F} = \underbrace{\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{T}^{-1}}_{\underset{\sim}{k}^{(e)}}\underset{\sim}{U}$$

یادآوری : $\underset{\sim}{T}^{-1} = \underset{\sim}{T}^{T}$

ولذا ماتریس سختی Global المان بصورت زیر بدست می‌آید:

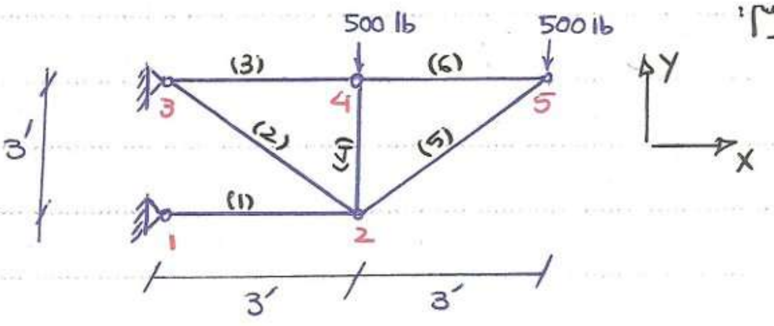
subject: Finite Element

$$\underset{\sim}{k}^{(e)} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ & s^2 & -sc & -s^2 \\ & & c^2 & sc \\ \text{Symmetric} & & & s^2 \end{bmatrix}$$

مثال: خرپای سازه‌ی نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش اجزای محدود به طور کامل تحلیل نمایید.

برای تمامی اعضا هم داریم: $E = 1.9 \times 10^6 \ lb/in^2$ $\quad A = 8 \ in^2$

گره‌ها و المان‌ها را ابتدا شماره گذاری می‌کنیم:



درجه آزادی برای هر گره: $dofnode = 2$ $\quad$ تعداد گره‌ها: $nnode = 5$

کل درجات آزادی: $ndof = 5 \times 2 = 10$

برای المان‌های (1)، (3)، (4) و (6): $k = \frac{AE}{l} = \frac{8 \times 1.9 \times 10^6}{3 \times 12} = 4.22 \times 10^5 \ lb/in$

برای المان‌های (2) و (5): $k = \frac{AE}{l} = \frac{8 \times 1.9 \times 10^6}{3\sqrt{2} \times 12} = 2.98 \times 10^5 \ lb/in$

المان (1): $\theta = 0$

$$\underset{\sim}{k}^{(1)} = 4.22 \times 10^5 \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{array}$$

المان (2): $\theta = 135°$

$$\underset{\sim}{k}^{(2)} = 1.49 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

المان (3): $\theta = 0°$

المان (4): $\theta = 90°$

المان (5): $\theta = 45°$

المان (6): $\theta = 0°$

subject: Finite Element

$$
K = 10^5 \times \begin{bmatrix}
4.22 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4.22 & 0 & 7.2 & 0 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & -1.49 & -1.49 \\
0 & 0 & 0 & 7.2 & 1.49 & -1.49 & 0 & -4.22 & -1.49 & -1.49 \\
0 & 0 & -1.49 & 1.49 & 5.71 & -1.49 & -4.22 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.49 & -1.49 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 8.44 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 4.22 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 5.71 & 1.49 \\
0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.49 & 1.49
\end{bmatrix}
$$

صرف نظر از شرایط مرزی

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \end{bmatrix}
= 10^5 \times \begin{bmatrix}
\cancel{4.22}\,1 & \cancel{0} & \cancel{-4.22} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
\cancel{0} & \cancel{0}\,1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
\cancel{-4.22} & \cancel{0} & 7.2 & 0 & \cancel{-1.49} & \cancel{1.49} & 0 & 0 & -1.49 & -1.49 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 7.2 & \cancel{1.49} & \cancel{-1.49} & 0 & -4.22 & -1.49 & -1.49 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1.49} & \cancel{1.49} & \cancel{5.71}\,1 & \cancel{-1.49} & \cancel{-4.22} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1.49} & \cancel{-1.49} & \cancel{-1.49} & \cancel{1.49}\,1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
\cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 0 & \cancel{-4.22} & \cancel{0} & 8.44 & 0 & 0 & 0 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & 0 & -4.22 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 4.22 & 0 & 0 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & -1.49 & -1.49 & \cancel{0} & \cancel{0} & -4.22 & 0 & 5.71 & 1.49 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & -1.49 & -1.49 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & 0 & 1.49 & 1.49
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \end{bmatrix}
$$

شرایط مرزی: $u_{1x} = 0$ $u_{1y} = 0$ $u_{3x} = 0$ $u_{3y} = 0$

درهم آن را سطر ① ② ⑤ ⑥

$\rightarrow$ $u_{1x} = 0$ $u_{1y} = 0$ $u_{2x} = -0.00355$ $u_{2y} = -0.01026$ $u_{3x} = 0$ $u_{3y} = 0$ $u_{4x} = 0.00118$

$u_{4y} = -0.0114$ $u_{5x} = 0.00240$ $u_{5y} = -0.0195$ (برحسب in)

subject: Finite Element

عکس العمل های تکیه گاهی را هم بدست آوریم:

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{K}^{(G)} \underset{\sim}{U} - \underset{\sim}{F}$$

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1500 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{lb}$$

بدست آوردن نیروهای هر المان:

برای هر المان

$$f_{ix} = k(u_{ix} - u_{jx})$$

$$k = \frac{AE}{l}$$

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{u} \longrightarrow \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{T}^{-1} U$$

به عنوان مثال یکی هم تعیین نیروی المان (5) را بدست بیاوریم:

$$\begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ -\sin 45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{T}^{-1}} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -0.00355 \\ -0.001026 \\ 0.00240 \\ -0.0195 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow U \\ U \\ U \\ U \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_{2x} = -0.00976 \\ u_{2y} = -0.00474 \\ u_{5x} = -0.01209 \\ u_{5y} = -0.01549 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow f = 2.98 \times 10^5 \times (u_{2x} - u_{5x}) = 696 \text{ lb} \quad (c)$$

برای بدست آوردن تنش هر عضو داریم:

$$\sigma^{(i)} = k(u_{ix} - u_{jx}) = \frac{E}{l}(u_{ix} - u_{jx})$$

$$\sigma^{(5)} = 87 \text{ psi}$$

Created in Master PDF Editor - Demo Version

المان‌های یک بعدی:

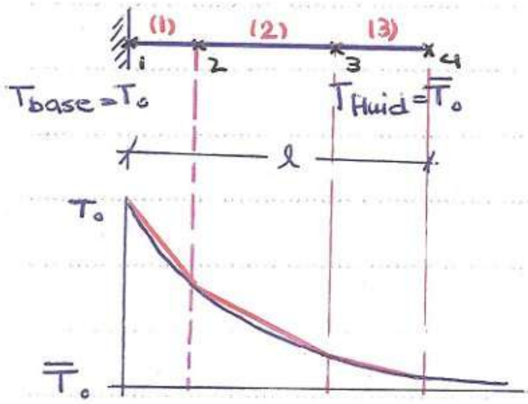
المان‌های یک بعدی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی ODE استفاده می‌شوند. به عبارتی هر مسئله‌ای که به صورت یک ODE مدل شود، با استفاده از المان‌های یک بعدی تحلیل می‌شود. پرکاربردترین گروه المان‌های یک بعدی، المان‌های خطی هستند.

المان‌های خطی:

معادله‌ای شامل $EA\dfrac{d^2u}{dx^2} - P(x) = 0$ همراه با دو شرط مرزی، یک المان خطی است.

فرض می‌کنیم میله‌ای مثل شکل زیر با مقادیر حرارتی مشخص داریم. دمای ابتدای میله را T_{base} و دمای انتهای میله را T_{fluid} فرض می‌کنیم.

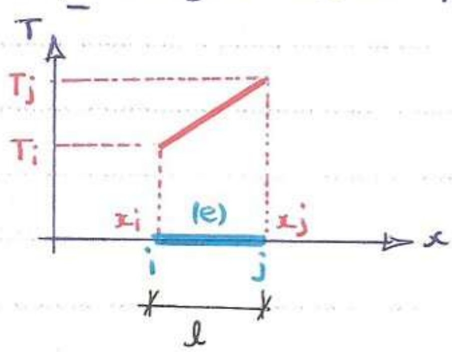
توزیع حرارت دمی مطابق نمودار زیر است.



در فصل قبل به روش‌های باقیمانده‌ی وزنی عمل کردیم و $T(x)$ را یک تابع چند جمله‌ای مرتبه n در نظر می‌گرفتیم و ضرایب را تعیین می‌کردیم. در اینجا برای یافتن T، تابع را به صورت n تابع خطی در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که تغییرات تابع در طول یک المان، به صورت خطی است.

طول المان‌ها می‌توانند برای قسمت‌هایی که تغییرات حرارتی شدید است کوچک‌تر شده و در جاهایی که تغییرات محسوس نیست، بزرگ‌تر شود. در مثال فوق، تابع دقیق T را با سه خط تقریب زدیم.

در جاهایی که تغییرات تابع شدید است، هر چه المان را کوچک‌تر کنیم، به منحنی واقعی نزدیک‌تر می‌شویم.



$$T^{(e)} = C_1 + C_2 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_i = C_1 + C_2 x_i \\ T_j = C_1 + C_2 x_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{T_i x_j - T_j x_i}{x_j - x_i} \\[2ex] C_2 = \dfrac{T_j - T_i}{x_j - x_i} \end{cases}$$

subject: Finite Element

با جایگذاری و مرتب کردن داریم:

$$T^{(e)} = \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i}\right) T_i + \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right) T_j$$

به عبارتی : $T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j$

که S_i و S_j توابع شکلی یا shape function هستند. S_i و S_j به ترتیب توابع شکل تغییر گره‌های i و j هستند. قابل دقت است که هر گره، تابع شکل نظیر خودش را دارد.

وظیفه‌ی تابع شکل این است که ارتباط بین مقادیر گره‌ای تابع را با خود تابع در طول المان تعیین کند. به تابع شکل می‌توان بطور کلی توابع انترپلاسیون هم گفت.

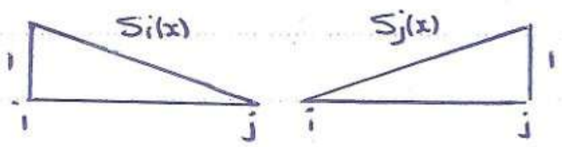
$$u^{(e)} = S_i u_i + S_j u_j = [S_i \quad S_j]\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{S}^T \underline{u}$$ میدان تغییر شکل

در حالت کلی هر پارامتر دلخواهی مثل $\psi^{(e)}$:

$$\psi^{(e)} = [S_i \quad S_j]\begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \end{bmatrix}$$

خواص توابع شکل خطی:

۱- مقدار تابع شکل در گره تعریف شده برابر با مقدار واحد (۱) و در سایر گره‌ها مقدار برابر با صفر می‌باشد.



۲- به عنوان دومین خاصیت برای توابع شکل داریم: $S_i + S_j = 1$ (همواره)

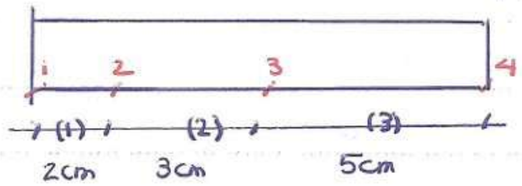
۳- این خاصیت فقط در المان‌های خطی برقرار است:
مجموع مشتقات مکانی برابر صفر است.

$$\frac{d}{dx}(S_i) + \frac{d}{dx}(S_j) = 0$$

مثال: جهت تعیین توزیع دما در طول یک پره از المان‌های یک بعدی خطی استفاده شده است. دماهای گرهی و موقعیت آن‌ها در شکل نشان داده شده است. دمای پره در:
الف) $x = 4\,cm$ ب) $x = 8\,cm$ چقدر می‌باشد؟

subject: Finite Element

$T_{base} = 50\,^\circ c$ $\qquad$ $T_{fluid} = 18\,^\circ c$



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 41 \\ 34 \\ 20 \end{bmatrix} \,^\circ c$$

در حل مسئله فوق یک معادله دیفرانسیل درجه 2 داشته‌ایم و به 2 شرط مرزی نیاز داشته‌ایم. از آنجایی که $T_f = 18$ و $T_4 = 20$ با هم برابر نیستند می‌توان این استدلال را نمود که مقدار T_f به عنوان شرط مرزی انتخاب شده است. چهار حالت می‌توان برای شرایط مرزی متصور شد:

۱- T_b و T_f $\qquad$ ۲- مشتق T_b و T_f $\qquad$ ۳- مشتق T_b و مشتق T_f

٤- T_b و مشتق T_f

و مسلماً شرایط مرزی انتخاب شده برای این مسئله یکی از حالت های 3 یا 4 است.

x_i المان $\qquad$ محل ← مختصاتی که دمایش را می‌خواهیم بدست آوریم

$$T^{(2)} = S_2^{(2)} T_2 + S_3^{(2)} T_3 = \left(\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}\right) T_2 + \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right) T_3 = \left(\frac{5-4}{3}\right) 41 + \left(\frac{4-2}{3}\right) 34$$

x_j المان $\qquad$ طول المان

دمای حرارت در $x = 4^{cm}$ $= 36.3\,^\circ c$

$x = 8cm$ در المان سوم قرار می‌گیرد. لذا المان سوم را انتخاب کرده و باید معادلات را با توابع شکل گره‌های 3 و 4 نوشت:

$$T^{(3)} = S_3^{(3)} T_3 + S_4^{(3)} T_4$$
$$= \left(\frac{x_4 - x}{x_4 - x_3}\right) T_3 + \left(\frac{x - x_3}{x_4 - x_3}\right) T_4$$
$$= \left(\frac{10-8}{5}\right) 34 + \left(\frac{8-5}{5}\right) 20 = 25.6\,^\circ c$$

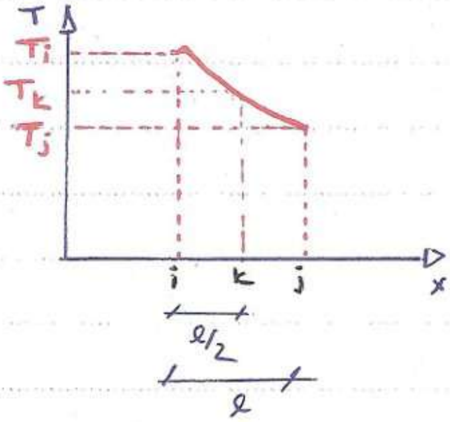
درجه حرارت در $x = 8^{cm}$:

بیان شده بود که توابع شکل هر گره یکتا هستند. اما در مثال فوق فرضاً $S_3^{(2)}$ و $S_3^{(3)}$ داریم. این اشکال به خاطر مختصات Global است که وارد می‌شود. اگر هر المان را در مختصات local بررسی کنیم، این مشکل مرتفع می‌گردد.

استفاده از المان‌های خطی یک مشکل دارد و آن این است که اکثر جواب‌های معادلات دیفرانسیل به صورت منحنی بوده و خط هیچگاه نمی‌تواند به خوبی یک curve را مدل کند. می‌توان تعداد المان‌ها

subject: Finite Element

دا را زیاد کرد اما این کار حجم محاسبات را به شدت افزایش می دهد.
می توان به جای فرض تغییر خطی، تابع را به صورت سهمی در نظر گرفت و این مشکل را تا حدی حل نمود.
در این حالت برای المان به گره سوم k هم نیاز داریم. این گره در وسط المان در نظر گرفته می شود (طبق فرض)
به چنین المانی، المان سه گره ای یک بعدی یا المان درجه 2 یا المان رسته بالاتر Higher Order
می گویند.



$$T^{(e)} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$$

$$\begin{cases} T_i = C_1 + C_2 x_i + C_3 x_i^2 \\ T_k = C_1 + C_2 x_k + C_3 x_k^2 \\ T_j = C_1 + C_2 x_j + C_3 x_j^2 \end{cases}$$

با جایگذاری و مرتب کردن داریم:

مشابه حالت خطی : $\quad T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_k T_k$

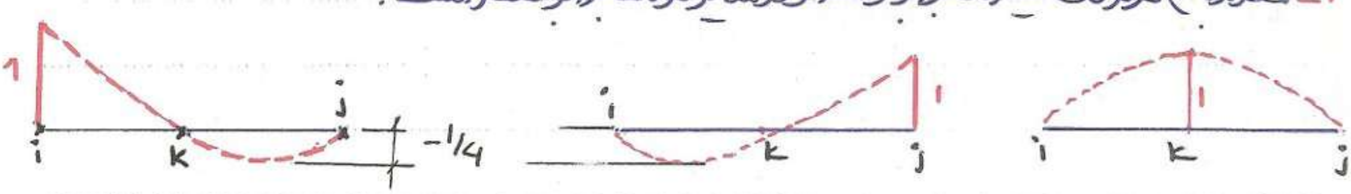
$$\begin{cases} S_i = \dfrac{2}{\ell^2}(x - x_j)(x - x_k) \\ S_j = \dfrac{2}{\ell^2}(x - x_i)(x - x_k) \\ S_k = \dfrac{-4}{\ell^2}(x - x_i)(x - x_j) \end{cases}$$

به عنوان یادآوری ذکر می شود که درجه حرارت در اینجا یک مثال بود و هر تابعی مثل φ را می توان با استفاده از توابع شکلی، اینترپلاسیون شود:

$$\varphi^{(e)} = \begin{bmatrix} S_i & S_j & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

خواص توابع شکل درجه دوم:

۱ـ مقدار تابع در گره ی نظیرش برابر واحد و در سایر گره ها برابر صفر است.



۲ـ مجموع توابع شکل برابر واحد است: $\quad S_i + S_j + S_k = 1$

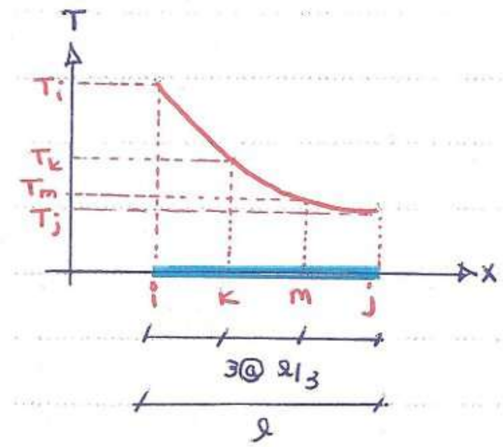
subject: Finite Element

یادآوری می شود که رابطه خاصیت سوم در توابع المان های خطی اینجا برقرار نیست. یعنی:

$$\frac{d}{dx}(S_i) + \frac{d}{dx}(S_j) + \frac{d}{dx}(S_k) \neq 0$$

المان های یک بعدی درجه سوم:

order 3 به عنوان یک order خوب و با دقت کافی شناخته شده است. در این حالت تغییرات تابع در طول المان، به عنوان یک تابع مرتبه سوم خواهد بود.



$$T^{(e)} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

در اینجا جای گذاری مقادیر گرهی و حل کردن چند معادله چند مجهول حاصل انرژی دشوار است و هرچه ثابت های بیشتر شوند، کار سخت تر می شود. می خواهیم تابع شکل را بدون حل کردن چهار معادله چهار مجهول حل کنیم. داریم:

با استفاده از خواص تابع شکل:

$$S_i = \alpha (x - x_k)(x - x_m)(x - x_k)$$

$$S_i(x = x_i) = 1 \Rightarrow 1 = \alpha(-l/3)(-2l/3)(-l) \rightarrow \alpha = \frac{-9}{2l^3}$$

$$\Rightarrow S_i(x) = -9/2l^3 \; (x - x_k)(x - x_m)(x - x_j)$$

$$S_j(x) = +9/2l^3 \; (x - x_i)(x - x_k)(x - x_m)$$

$$S_k(x) = \beta(x - x_i)(x - x_m)(x - x_j)$$

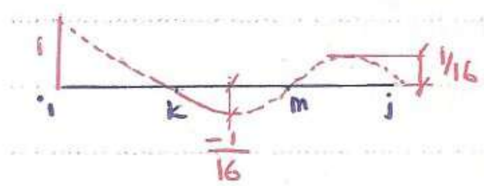
$$S_k(x = x_k) = 1 = \beta \times \frac{2l^3}{27} \rightarrow \beta = \frac{27}{2l^3}$$

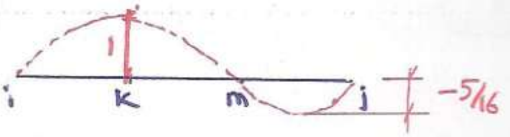
$$\rightarrow S_k(x) = \frac{27}{2l^3}(x - x_i)(x - x_m)(x - x_j)$$

$$S_m(x) = -\frac{27}{2l^3}(x - x_i)(x - x_k)(x - x_j)$$

خواص این توابع مشابه خواص توابع شکل درجه دوم است.

subject: Finite Element





تعیین توابع شکل المان های لاگرانژی در حالت کلی: (برای مرتبه n ام)

$$S_K(x) = \prod_{M=1}^{N} \frac{x - x_M \quad \text{omitting} \quad x - x_K}{x_K - x_M \quad \text{omitting} \quad x_K - x_K}$$

برای بررسی رابطه فوق المان سه گرهی زیر را در نظر می گیریم:

i ——— k ——— j

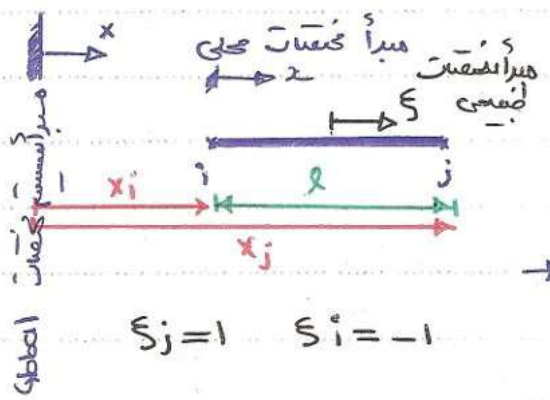
$N = 2$ با استفاده از رابطه فوق:

$$S_i(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_j)}{(x_i - x_k)(x_i - x_j)}$$

$$\rightarrow S_i(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_j)}{-\ell/2 \ast -\ell} = \frac{2}{\ell^2}(x - x_k)(x - x_j)$$

local, Global and Natural Cordinate — مختصات اصلی، محلی و طبیعی:

در مختصات Global: $S_i(X) = \frac{X_j - X}{X_j - X_i}$ $\quad S_j(X) = \frac{X - X_i}{X_j - X_i}$



از روی شکل واضح است: $X = X_i + x$

$$\rightarrow S_i(x) = \frac{\overbrace{X_j - X_i}^{\ell} - x}{\ell} = 1 - \frac{x}{\ell}$$

$\xi_j = 1 \quad \xi_i = -1$ $\qquad 0 \leq x \leq \ell$

$$S_j(x) = \frac{X_i + x - X_i}{\ell} = \frac{x}{\ell}$$

نمایش تابع شکل در مختصات محلی خیلی کار را ساده تر کرده و توابع شکلی در این نمایش همواره یکسان است.

از آنجایی که $dx = dX$ است می توان انتگرال های به صورت زیر را ساده سازی کرد:

$$\int_{X_i}^{X_j} S_i(X)\,dX = \int_0^{\ell} S_i(x)\,dx$$

subject: Finite Element

نگرش جدیدی مطرح شد که انتگرال های تغییر فوق را بازهم ساده‌تر کرده و به سمت روش‌های عددی برد.
در این نگرش برای بیان آن، مختصات طبیعی با مبدأیی در وسط المان تعریف می‌شود.

تعریف می‌شود: $0 \leq x \leq l$ $\quad \xi = \frac{2x}{l} - 1$ در مختصات طبیعی

or

$$x = \frac{l}{2}(1+\xi) \quad \Rightarrow \begin{cases} S_i(\xi) = \dfrac{1-\xi}{2} \\ S_j(\xi) = \dfrac{1+\xi}{2} \end{cases} \quad -1 \leq \xi \leq +1$$

تابع زیر انتگرال: $dx = \frac{l}{2} d\xi$

همچنین بر واضح است که توابع شکل در نوشتار فوق، باز هم خواص خود را حفظ کرده اند.

$$T^{(e)} = \frac{1}{2}(1-\xi)T_i + \frac{1}{2}(1+\xi)T_j$$

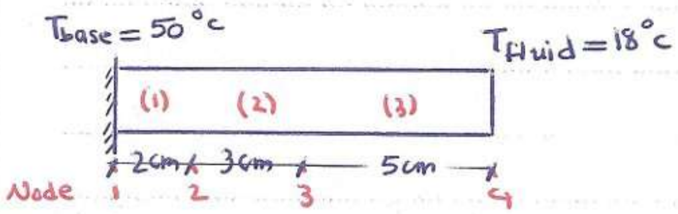
$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_j$$

$$X = \frac{1}{2}(1-\xi)X_i + \frac{1}{2}(1+\xi)X_j$$

درصورتی که برای بیان شکل هندسی مسئله (مختصات نقاط) از توابع شکل استفاده شود، المان در نظر گرفته شده المان ایزوپارامتری نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم یک المان مستطیلی با مقادیر مشخص داریم.

مثال: دمای پره را در مثال قبل در موقعیت اصلی $X = 8cm$ با استفاده از مختصات محلی تعیین کنید.
همچنین دمای پره را در موقعیت اصلی $X = 7.5^{cm}$ با استفاده از مختصات طبیعی تعیین نمایید.



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 41 \\ 34 \\ 18 \end{bmatrix} {}^{\circ}C$$

$$T^{(3)} = S_3 T_3 + S_4 T_4$$
$$= (1-\frac{x}{\ell})T_3 + (\frac{x}{\ell})T_4 = (1-\frac{3}{5})\times 34 + (\frac{3}{5})\times 20 = 25.6\ ^\circ c$$

ب) $x = 7.5\ cm$

مختصات داده شده ی فوق ، دقیقاً وسط المان سوم است . با استفاده از مختصات طبیعی داریم :

$$\bar{T}^{(3)} = S_3(\xi)T_3 + S_4(\xi)T_4$$
$$= \frac{1}{2}(1-\xi)T_3 + \frac{1}{2}(1+\xi)T_4 = \frac{1}{2}(T_3+T_4) = 27\ ^\circ c$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{x_i}^{x_j} S_j^2\, dx$ با استفاده از :

الف) دستگاه مختصات اصلی یا کلی (Global) .

ب) مختصات محلی و

ج) مختصات طبیعی . طول المان $x_j - x_i = \ell$: نقش پراساس

زیرا تابع شکل مربوط به یک المان خطی است .

الف) دستگاه مختصات اصلی یا کلی

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2\, dx = \int_{x_i}^{x_j} \left(\frac{x-x_i}{\ell}\right)^2 dx = \frac{(x-x_i)^3}{3\ell^2}\Bigg|_{x_i}^{x_j} = \frac{\ell}{3}$$

ب) مختصات محلی

مختصات اصلی $x_i \leq x \leq x_j \rightarrow$ مختصات محلی $0 \leq x \leq \ell\ ;\ dx = dx$

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2\, dx = \int_0^{\ell} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{x^3}{3\ell^2}\Bigg|_0^{\ell} = \frac{\ell}{3}$$

ج) دستگاه مختصات طبیعی

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}(1+\xi)^2 \frac{\ell}{2}\, d\xi = \frac{\ell}{8}(1+\xi)^3 \times \frac{1}{3}\Bigg|_{-1}^{+1} = \frac{\ell}{3}$$

انتگرال عددی : معادلات تربیع گوس - لژاندر

در اینجا در حقیقت هدف پیدا کردن انتگرال هایی به صورت $\int_a^b f(x)dx$ به صورت عددی است . روش گوس لژاندر بهترین روش عددی برای یافتن حاصل انتگرال های به صورت فوق است . این معادله بیان می دارد :

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i)$$

در این روش نقاط خاصی در دامنه مورد انتگرال گیری پیدا کرده و به هر کدام از نقاط وزنی می دهیم (W) که

subject: Finite Element

مجموع حاصلضرب تابع وزن در مقدار تابع در آن نقاط خاص برابر انتگرال است.

در این روش x را به صورت زیر تغییر متغیر می‌دهیم:

$$x = c_0 + c_1 \lambda \quad , \quad a \leq x \leq b \xrightarrow{\text{نظیر کنیم}} -1 \leq \lambda \leq +1$$

$$\begin{cases} a = c_0 + c_1(-1) \\ b = c_0 + c_1(+1) \end{cases} \Rightarrow \quad c_0 = \frac{b+a}{2} \quad , \quad c_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b+a}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)\lambda \xrightarrow[\text{در نظر می‌گیریم}]{\text{این انتگرال را}} \int_{-1}^{+1} f(\lambda)\, d\lambda \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(\lambda_i)$$

$$dx = \frac{b-a}{2}\, d\lambda$$

فرمول فوق، فرمول n نقطه‌ای گوس لژاندر موسوم است که معمولاً در سخت‌ترین حالات $n=10$ کافی است. اما در کتب مختلف مراجع را برای $n=20$ هم بدست آورده‌اند.

[از چند جمله‌ای های لژاندر استفاده کرده‌ایم] $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$ برای حالت $n=2$

$$f(\lambda) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} (1)\, d\lambda = 2 = w_1(1) + w_2(1)$$

$$f(\lambda) = \lambda \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda\, d\lambda = 0 = w_1(\lambda_1) + w_2(\lambda_2)$$

$$f(\lambda) = \lambda^2 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda^2\, d\lambda = \frac{2}{3} = w_1(\lambda_1)^2 + w_2(\lambda_2)^2$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda^3\, d\lambda = 0 = w_1(\lambda_1)^3 + w_2(\lambda_2)^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 = 1.0000000 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 = 0.577350269^{*} \end{cases}$$

* مقدار فوق همان $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

تعداد نقاط	عامل وزنی (w_i)	نقاط نمونه (λ_i)
2	$w_1 = 1.0000000$ $w_2 = 1.0000000$	$\lambda_1 = -\lambda_2 = 0.577350269$
3	$w_1 = 0.55555556$ $w_2 = 0.88888889$ $w_3 = w_1$	$\lambda_1 = -\lambda_3 = 0.774596669$ $\lambda_2 = 0$

subject: Finite Element

مثال: حاصل انتگرال زیر را با روش گوس ـ لژاندر بدست بیاورید.

$$\int_2^6 (x^2+5x+3)\,dx = 161.3333333$$

تغییر متغیر هم $\quad n=2 \;,\; b=6 \;;\; a=2 \qquad x = \frac{6+2}{2} + \frac{6-2}{2}\lambda = 4+2\lambda$

$$\int_2^6 (x^2+5x+3)\,dx = \int_{-1}^{+1} \underbrace{2\left[(4+2\lambda)^2+5(4+2\lambda)+3\right]}_{f(\lambda)} d\lambda \cong W_1 f(\lambda_1) + W_2 f(\lambda_2)$$

$W_1 = W_2 = 1 \qquad \longrightarrow I = 50.6444526769 + 110.688880653$

$\lambda_1 = -\lambda_2 = 0.577350269 \qquad = 161.3333333$

نکته: اگر تابع $f(x)$ تحت انتگرال گیری یک چندجمله‌ای (polynomial) باشد، انتگرال n نقطه‌ای گوس ـ لژاندر برای تابع polynomial تا درجه $2n-1$ دارای دقت کامل است.

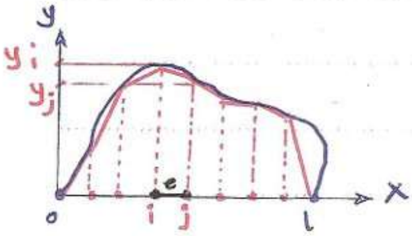
برای انتگرال مثال قبل هم می‌توان مستقیم نوشت:

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2\,dx = \frac{l}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{(1+\xi)^2}{4}\,d\xi = \frac{l}{8}\left[W_1 f(\xi_1) + W_2 f(\xi_2)\right] = 0.3333333\,l$$

حل یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه 2 با شرایط مرزی دلخواه به کمک روش اجزای محدود:

معادله دیفرانسیل مرتبه 2 در حالت کلی: $\quad C_1\frac{d^2y}{dx^2} + C_2\frac{dy}{dx} + C_3 y + C_4 = f(x) \;,\; 0 \le x \le L$

فرض می‌کنیم شرایط مرزی هم مشخص باشد.



محدوده‌ی محور x را المان بندی کرده ایم و برای المان ij، مشخصات مورد نظر را نوشته ایم.

$$y^{(e)} = S_i y_i + S_j y_j \;,\; x_i \le x \le x_j$$

فرض می‌کنیم المان ها، طول برابر دارند.

$$\begin{cases} S_i = \dfrac{x_j - x}{l} \\ S_j = \dfrac{x - x_i}{l} \end{cases}$$

subject: Finite Element

در اصل مسئله می‌خواهیم معادله دیفرانسیل order 2 را حل کنیم.

$S = a + bX$: برای توابع شکل در حالت کلی داریم

در این روش با استفاده از روش گالرکین جملات آمده و خطای وزنی را برای گره های i و j صفر می کنیم. یعنی به جای تابع وزنی فرمول گالرکین از تابع شکل استفاده می کنیم.

$$R_i = \int_D W_i \bar{R}\, dD = 0$$

: با استفاده از روش گالرکین

$$R_i^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} S_i \left[C_1 \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + C_2 \frac{dy^{(e)}}{dx} + C_3 y^{(e)} + C_4 - F(x) \right] dx = 0$$

$$R_j^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} S_j \left[C_1 \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + C_2 \frac{dy^{(e)}}{dx} + C_3 y^{(e)} + C_4 - f(x) \right] dx = 0$$

برای سادگی، انتگرال های فوق را تفکیک می کنیم:

$$R_i^{(e)} = C_1 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx + C_2 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{dy^{(e)}}{dx} dx + C_3 \int_{x_i}^{x_j} S_i y^{(e)} dx + C_4 \int_{x_i}^{x_j} S_i dx - \int_{x_i}^{x_j} F(x) dx = 0$$

$$R_i^{(e)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \xrightarrow{\text{به طور مشابه}} R_j^{(e)} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$$

$$\underbrace{I_1 = C_1 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx}_{\text{Strong Formulation}}$$

مشکل محاسبه انتگرال فوق این است که چون y را خطی در نظر گرفتیم مشتق دوم برابر صفر خواهد شد لذا انتگرال فوق قابل محاسبه نیست.

$$\underbrace{I_1 = C_1 S_i \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - C_1 \int_{x_i}^{x_j} \frac{dS_i}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx}_{\text{Weak Formulation}} = -C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{C_1}{\ell} y^{(e)} \Big|_{x_i}^{x_j}$$

$$= -C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{C_1}{\ell} (y_j - y_i)$$

$$\frac{dy^{(e)}}{dx} = \frac{dS_i}{dx} y_i + \frac{dS_j}{dx} y_j = \frac{1}{\ell} (y_j - y_i)$$

subject: Finite Element

$$I_2 = c_2 \int_{x_i}^{x_j} s_i \frac{dy^{(e)}}{dx}\, dx = \frac{c_2}{\ell}(y_j - y_i)\int_{x_i}^{x_j} s_i\, dx = +\frac{c_2}{2}(y_j - y_i)$$

$$I_3 = c_3 \int_{x_i}^{x_j} s_i (s_i y_i + s_j y_j)\, dx = c_3 y_i \int_{x_i}^{x_j} s_i^2\, dx + c_3 y_j \int_{x_i}^{x_j} s_i s_j\, dx$$

$$= c_3 \frac{\ell}{3} y_i + c_3 \frac{\ell}{6} y_j$$

$$I_4 = c_4 \int_{x_i}^{x_j} s_i\, dx = c_4 \frac{\ell}{2}$$

$$I_5 = -\int_{x_i}^{x_j} s_i f(x)\, dx$$

I_5 هم بسته به تابع $f(x)$، مقدار معلومی دارد و تعیین میشود.

بطور مشابه: $J_1 = c_1 \frac{dy^{(e)}}{dx}\Big|_{x=x_j} = \frac{c_1}{\ell}(y_j - y_i)$

$$J_2 = -\frac{c_2}{2}(y_i - y_j) \quad ; \quad J_3 = c_3 \frac{\ell}{6} y_i + c_3 \frac{\ell}{3} y_j$$

$$J_4 = c_4 \frac{\ell}{2} \quad ; \quad J_5 = -\int_{x_i}^{x_j} s_j f(x)\, dx$$

میدانیم: $\begin{bmatrix} R_i^{(e)} \\ R_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} c_1 \frac{dy^{(e)}}{dx}\Big|_{x=x_i} \\ -c_1 \frac{dy^{(e)}}{dx}\Big|_{x=x_j} \end{bmatrix} + \frac{c_1}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix} + \frac{c_2}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix} - \frac{c_3 \ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{c_4 \ell}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_5 \\ J_5 \end{bmatrix}}_{\text{که بردار نیرو}}$$

با نوشتن این دستگاه معادلات فوق برای تمامی المان ها و جمع کردن منتظم (assembling) آنها، شرایط مرزی را اعمال داده و با حل دستگاه چند معادله چند مجهول، مجهولات گرهی بدست می آید.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را در محدوده‌ی $0 \leq x \leq 1$ با فرض سه المان خطی مساوی بصورت عددی

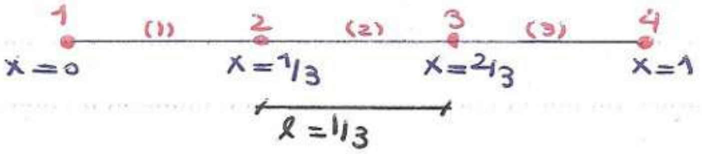
Created in Master PDF Editor - Demo Version

subject: Finite Element.

حل مسائل.

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad u(0) = u(1) = 0$$

اینجا:



$C_1 = 1 \; , \; C_2 = 0 \; , \; C_3 = -1$

$C_4 = 0 \; , \; f(x) = -x$

(1) برای المان شماره: $\quad i = 1 \quad j = 2$

$$\begin{bmatrix} \left.\dfrac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=0} \\ \left.-\dfrac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=\frac{1}{3}} \end{bmatrix} + \frac{1}{1/3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \left(-1 \times \frac{1/3}{6}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\int_0^{1/3} S_1^{(1)} f(x)\,dx = -\int_0^{1/3}\left(\frac{1/3 - x}{1/3}\right)(-x)\,dx = 0.01852 \\ -\int_0^{1/3} S_2^{(1)} f(x)\,dx = -\int_0^{1/3}\left(\frac{x - 0}{1/3}\right)(-x)\,dx = 0.03704 \end{bmatrix}$$

(2) برای المان شماره: $\quad i = 2 \quad j = 3$

$$\begin{bmatrix} \left.\dfrac{du^{(2)}}{dx}\right|_{x=\frac{1}{3}} \\ \left.-\dfrac{du^{(2)}}{dx}\right|_{x=\frac{2}{3}} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\int_{1/3}^{2/3} S_2^{(2)} f(x)\,dx = -\int_{1/3}^{2/3}\left(\frac{2/3 - x}{1/3}\right)(-x)\,dx = 0.07407 \\ -\int_{1/3}^{2/3} S_3^{(2)} f(x)\,dx = -\int_{1/3}^{2/3}\left(\frac{x - 1/3}{1/3}\right)(-x)\,dx = 0.09259 \end{bmatrix}$$

(3) برای المان شماره: $\quad i = 3 \quad , \quad j = 4$

$$\begin{bmatrix} \left.\dfrac{du^{(3)}}{dx}\right|_{x=\frac{2}{3}} \\ \left.-\dfrac{du^{(3)}}{dx}\right|_{x=1} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12963 \\ 0.14815 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

شرایط تکیه‌گاهی

$$\begin{bmatrix} u'(0) \\ -\dfrac{du^{(1)}}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{3}} + \dfrac{du^{(2)}}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{3}} \\ -\dfrac{du^{(2)}}{dx}\Big|_{x=\frac{2}{3}} + \dfrac{du^{(3)}}{dx}\Big|_{x=\frac{2}{3}} \\ -u'(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.111 & -2.944 & 0 & 0 \\ -2.944 & 3.111+3.111 & -2.944 & 0 \\ 0 & -2.944 & 3.111+3.111 & -2.944 \\ 0 & 0 & -2.944 & 3.111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

انتقال به آنطرف

انتقال به آنطرف

$u_1 = 0$, $u_4 = 0$

$$= \begin{bmatrix} 0.01852 - u'(0) \\ 0.03704 + 0.07407 = 0.1111 \\ 0.09259 + 0.12963 = 0.2222 \\ 0.14815 + u'(1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04478 \\ 0.0569 \\ 0 \end{bmatrix}$$

صفرمی‌کنیم

صفرمی‌کنیم

$$u^{(1)} = S_1^{(1)} u_1 + S_2^{(1)} u_2 = 0.1343\, x \qquad 0 \le x \le \tfrac{1}{3}$$

$$u^{(2)} = S_2^{(2)} u_2 + S_3^{(2)} u_3 = 0.03266 + 0.03636\, x \qquad \tfrac{1}{3} \le x \le \tfrac{2}{3}$$

$$u^{(3)} = S_3^{(3)} u_3 + S_4^{(3)} u_4 = 0.1707 - 0.1707\, x \qquad \tfrac{2}{3} \le x \le 1$$

مثلاً در $x = \frac{1}{2}$:

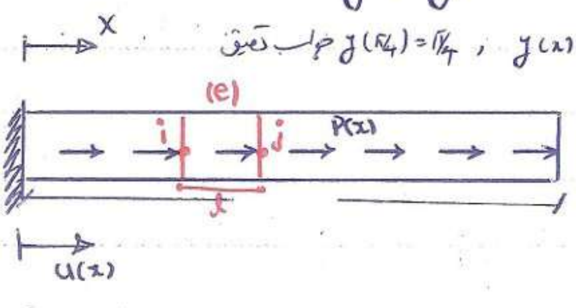
از اجزاء محدود: $u(x=\frac{1}{2}) = 0.03266 + 0.03636 \times \frac{1}{2} = 0.05084$

راه حل دقیق: $u(x) = \dfrac{2e\sinh x}{1-e^2} + x \Rightarrow u(x=\frac{1}{2}) = 0.05659$

تمرین: با استفاده از المان لاگرانژی مرتبه دوم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را به صورت پارامتریک حل نمایید. با کمک نتایج بدست آمده مسئله فوق را برای سه المان مرتبه دو تکرار نموده و نتایج را با نتایج حاصل از المان خطی مقایسه کنید.

$$y'' + 4y = 4\cos 2x, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

جواب دقیق $y(\pi/4) = \pi/4$, $y(x) = \cos 2x + x\sin 2x$



مثال سازه‌ای:

تغییر شکل الاستیک سازه محوری را بدست آورید.

subject: Finite Element

معادله حاکم بر یک سازه محوری الاستیک با شکل زیر قابل نمایش است:

$$\begin{cases} EA\dfrac{d^2u}{dx^2} - P(x) = 0 \\ u(x=0)=0 \end{cases}$$ [شرط مرزی]

نیروی محوری $N = EA\dfrac{du}{dx}$

$EA\dfrac{du}{dx}(x=L)=0$ [شرط مرزی]

نیروی محوری در انتهای تیر صفر است، چرا $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{du}{dx}$; $N = \sigma A = EA\dfrac{du}{dx}$

از یک المان دو نودی ساده برای حل معادله فوق استفاده می‌کنیم. طول المان l است.

$$\begin{cases} C_1 = EA, \quad C_2 = C_3 = C_4 = 0 \\ f(x) = P(x) \end{cases}$$

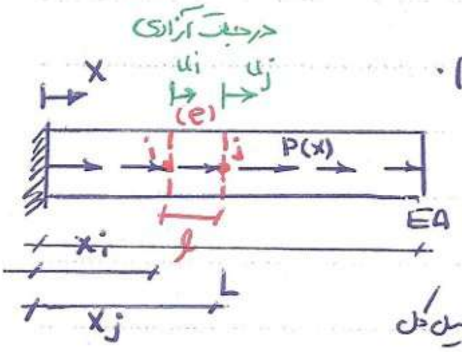
با توجه به رابطه‌ای که برای المان دو گره‌ای بدست آورده‌ایم (در طول درس)، برای المان دو گره‌ای فوق دستگاه معادلات به صورت زیر می‌شود:

برای المان (e):

ماتریس سختی یک المان دو گره‌ای
یا خرپایی

$$\begin{bmatrix} EA\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=x_i} \\ -EA\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=x_j} \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{K^{(e)}}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\int_{x_i}^{x_j} S_i P(x)\,dx \\ -\int_{x_i}^{x_j} S_j P(x)\,dx \end{bmatrix}}_{f^{(e)}}$$

فرمول‌بندی مسئله با روش می‌نیمم انرژی پتانسیل کل:



همان مسئله‌ی قبل را تحت بارگذاری دلخواه P(x) در نظر می‌گیریم.

برای حل مسئله، انرژی پتانسیل المان (e) را می‌نویسیم:

$$\Pi^{(e)} = U^{(e)} - W^{(e)}$$

انرژی پتانسیل کل — انرژی کرنشی داخلی — انرژی ناشی از بارهای خارجی

انرژی کرنشی داخلی همیشه از رابطه کلی زیر حساب می‌شود:

$U = \dfrac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon \, dV$ در حالت کلی

در حالت یک بعدی $\sigma = E\varepsilon \rightarrow U = \dfrac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon \, dV = \dfrac{1}{2}\int_V E\varepsilon^2 \, dV$

V حجم المان است.

subject: Finite Element

اعضای محوری و تیرها را یک بعدی در نظر گرفته و انرژی کرنشی داخلی شان را از رابطه فوق بدست می آوریم:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{V^{(e)}} E\varepsilon^{2(e)}\, dV^{(e)}$$

از طرفی در مسائل سازه های با عناصر محوری: $\varepsilon^{(e)} = \dfrac{du^{(e)}}{dx}$

هر اجزای محوری تبدیل میدان پیوسته به مجموع وزنی توابع شکل است. بعبارتی:

$$u^{(e)} = S_i u_i + S_j u_j = [S_i \quad S_j]\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{\bar{u}} = \underset{\sim}{\bar{u}}^T \underset{\sim}{S}$$

$$\frac{du^{(e)}}{dx} = \left[\frac{dS_i}{dx} \quad \frac{dS_j}{dx}\right]\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{u}}$$

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{V^{(e)}} E\varepsilon^{2(e)}\, dV^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{V^{(e)}} E\varepsilon^{2(e)} A\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} \varepsilon^{(e)} EA\, \varepsilon^{(e)}\, dx \quad (*)$$

$$\varepsilon^{(e)} = \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{u}} \rightarrow (\varepsilon^{(e)})^2 = \underset{\sim}{\bar{u}}^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{u}}$$

$$* \rightarrow U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} (\varepsilon^{(e)})^T EA\, \varepsilon^{(e)}\, dx = \boxed{\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} \underset{\sim}{\bar{u}}^T \underset{\sim}{B}^T EA \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{u}}\, dx}$$

حال به محاسبه $W^{(e)}$ می پردازیم. کاری که نیروهای خارجی انجام میدهد کاری است که نیروی $P(x)$ انجام میدهد:

$$W^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} P(x)\, u^{(e)}\, dx = \int_{x_i}^{x_j} \underset{\sim}{\bar{u}}^T \underset{\sim}{S}\, P(x)\, dx$$

$$\pi^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} \underset{\sim}{\bar{u}}^T \underset{\sim}{B}^T EA \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{u}}\, dx - \int_{x_i}^{x_j} \underset{\sim}{\bar{u}}^T \underset{\sim}{S}\, P(x)\, dx$$

شرط پایداری سازه ← می نیمم شدن انرژی پتانسیل کل ← $\dfrac{\partial \pi^{(e)}}{\partial \underset{\sim}{\bar{u}}^T} = 0 \Rightarrow$

$$\left(\int_{x_i}^{x_j} \underset{\sim}{B}^T EA \underset{\sim}{B}\, dx\right)\underset{\sim}{\bar{u}} - \int_{x_i}^{x_j} \underset{\sim}{S}\, P(x)\, dx = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\int_{x_i}^{x_j} \underset{\sim}{B}^T EA \underset{\sim}{B}\, dx\right)}_{\underset{\sim}{k}^{(e)}}\underset{\sim}{\bar{u}} = \underbrace{\int_{x_i}^{x_j} \underset{\sim}{S}\, P(x)\, dx}_{\underset{\sim}{f}^{(e)}}$$

همواره در حالت کلی: $\dfrac{\partial U^{(e)}}{\partial \underset{\sim}{\bar{u}}^T} = \underset{\sim}{k}^{(e)}$

subject: Finite Element

همواره در حالت کلی:

$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{u}^T} = \underset{\sim}{k}^{(e)} \qquad \int_D \underset{\sim}{S} P(D)\, dD = \underset{\sim}{f}^{(e)}$$

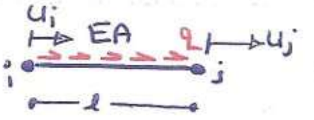
و داشتیم:

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} \bar{\underset{\sim}{u}}^T \underset{\sim}{B}^T EA \underset{\sim}{B}\, \bar{\underset{\sim}{u}}\, dx - \int_{x_i}^{x_j} \bar{u}^T \underset{\sim}{S} P(x)\, dx$$

جزء $dx = dx$ ← برای راحتی کار از مختصات محلی استفاده میکنیم ← $S_i = S_i(x) \quad S_j = S_j(x)$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \frac{dS_i}{dx} & \frac{dS_j}{dx} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{k}^{(e)} = \int_0^{\ell} \underset{\sim}{B}^T EA \underset{\sim}{B}\, dx$$

برای یک المان دو گره ای یک بعدی :



$$\begin{cases} S_i = 1 - \frac{x}{\ell} \\ S_j = \frac{x}{\ell} \end{cases}$$

برای بدست آوردن ماتریس سختی المان، باید بردار B را بدست آوریم:

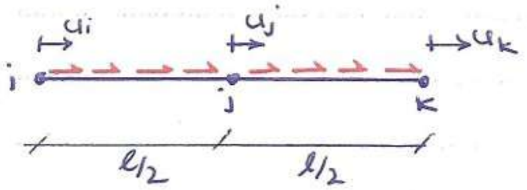
$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{k}^{(e)} = EA\int_0^{\ell} \begin{bmatrix} -1/\ell \\ 1/\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} dx = EA\int_0^{\ell} \begin{bmatrix} 1/\ell^2 & -1/\ell^2 \\ -1/\ell^2 & 1/\ell^2 \end{bmatrix} dx$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{k}^{(e)} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{f}^{(e)} = \int_0^{\ell} \begin{bmatrix} S_i \\ S_j \end{bmatrix} q\, dx = q\int_0^{\ell} \begin{bmatrix} 1 - x/\ell \\ x/\ell \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} q\ell/2 \\ q\ell/2 \end{bmatrix}$$

تعیین ماتریس سختی و بردار نیروی المان یک بعدی 3 گره ای:



از قبل می دانیم که توابع شکل یک المان 3 گره ای به صورت زیرند:

$$S_i = \left(\frac{x}{\ell} - 1\right)\left(\frac{2x}{\ell} - 1\right)$$

$$S_k = 4\left(\frac{x}{\ell}\right)\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

$$S_j = \frac{x}{\ell}\left(2\frac{x}{\ell} - 1\right)$$

$$\bar{\underset{\sim}{u}} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \\ u_j \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \frac{dS_i}{dx} & \frac{dS_k}{dx} & \frac{dS_j}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4x}{\ell} - 3 & 4 - \frac{8x}{\ell} & \frac{4x}{\ell} - 1 \end{bmatrix} \times 1/\ell$$

برای ماتریس سختی المان داریم:

subject: Finite Element

$$\underset{\sim}{k}^{(e)}=\frac{EA}{\ell^2}\int_0^{\ell}\begin{bmatrix}4x/\ell-3\\4-8x/\ell\\4x/\ell-1\end{bmatrix}\left[\frac{4x}{\ell}-3 \quad 4-\frac{8x}{\ell} \quad \frac{4x}{\ell}-1\right]dx \Rightarrow$$

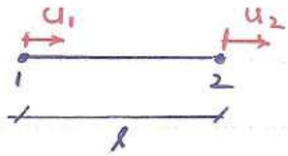
برای محاسبه‌ی انتگرال های مسئله فوق، تغییر متغیری مثل زیر می‌دهیم:

$$\frac{x}{\ell}=u \rightarrow x=\ell u \rightarrow dx=\ell\, du$$

$$\underset{\sim}{K}^{(e)}=\frac{EA}{3\ell}\begin{bmatrix}7&-8&1\\ \text{sym}&16&-8\\ & &7\end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{f}^{(e)}=q\ell\int_0^1\begin{bmatrix}(u-1)(2u-1)\\4u(1-u)\\u(2u-1)\end{bmatrix}du=\frac{q\ell}{6}\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$$

تعیین توابع شکل به روش کلی:

$$u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$
$$=\langle 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \rangle\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\ \vdots\end{bmatrix}=\underset{\sim}{P}(x)\,\underset{\sim}{a} \quad ①$$



در المان فوق $\quad u(x)=a_0+a_1x$

یا به عبارتی $\quad u(x)=\underbrace{\langle 1 \quad x\rangle}_{\underset{\sim}{P}(x)}\underbrace{\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{a}}$

و شرایط مرزی برای المان فوق $\quad \begin{cases}u(x=0)=u_1\\u(x=\ell)=u_2\end{cases}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\1&\ell\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{C}}\underbrace{\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{a}}=\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{u}} \Rightarrow \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{a}=\bar{\underset{\sim}{u}} \rightarrow \underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{C}^{-1}\bar{\underset{\sim}{u}} \quad ②$$

رابطه ② را در رابطه ① جایگذاری می‌کنیم $\quad u(x)=\underset{\sim}{P}(x)\,\underset{\sim}{C}^{-1}\,\bar{\underset{\sim}{u}}$

و از طرفی $\quad u=\underset{\sim}{S}^T\,\bar{\underset{\sim}{u}}$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{S}^T=\underset{\sim}{P}(x)\,\underset{\sim}{C}^{-1}$$

مثلاً در مثال فوق:

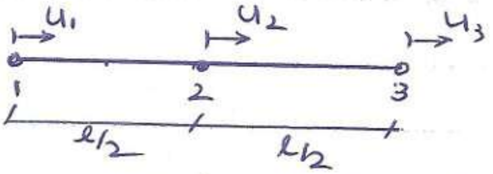
$$\underset{\sim}{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{1}{\ell}&\frac{1}{\ell}\end{bmatrix} \rightarrow \underset{\sim}{S}^T=\langle 1 \quad x\rangle\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{1}{\ell}&\frac{1}{\ell}\end{bmatrix}=\left\langle 1-\frac{x}{\ell} \quad \frac{x}{\ell}\right\rangle$$

$$\hookrightarrow \underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}1-\frac{x}{\ell}\\ \frac{x}{\ell}\end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

حالا فرض می‌کنیم که می‌خواهیم توابع شکل گره‌های $\underline{1}$ ، $\underline{2}$ ، $\underline{3}$ را برای یک المان 3 گره‌ای بدست آوریم. با توجه به تعداد درجات آزادی، میدان شکل این المان حداقل باید با یک تابع درجه 2 تقریب زده شود.

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \\ 1 & l & l^2 \end{bmatrix}$$

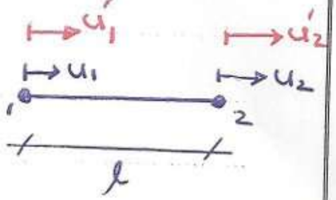
$$\Rightarrow \underset{\sim}{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l} & \frac{4}{l} & \frac{-1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{-4}{l^2} & \frac{2}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{S}^T = \langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l} & \frac{4}{l} & \frac{-1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{-4}{l^2} & \frac{2}{l^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{S} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ 4\left(\frac{x}{l}\right) - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ -\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}$$

بحثی که مطرح می‌شود، پیوسته کردن تابع شکل المان به گونه‌ای است که مشتق در مرز المان‌ها پیوسته باشد. در این حالت باید به جای اینکه در حالت C^0 حل کنیم، در حالت C^1 حل کرده و توابع شکل برای هر گره به این صورت است که یک تابع شکل مربوط به u_1 و دیگری مربوط به u'_1 است. یعنی هر گره دو تابع شکل دارد. فرضاً برای یک المان دو گرهی داریم:

$$P(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad u'(x) = \langle 0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u'_1 \\ u_2 \\ u'_2 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}_{4\times4}$$



subject: Finite Element

$$\underset{\sim}{S}^T = \underset{\sim}{P}(x)\underset{\sim}{C}^{-1} \Rightarrow \underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} 1-3(\frac{x}{\ell})^2+2(\frac{x}{\ell})^3 \\ x(\frac{x}{\ell}-1)^2 \\ 3(\frac{x}{\ell})^2-2(\frac{x}{\ell})^3 \\ \frac{x^2}{\ell}(\frac{x}{\ell}-1) \end{bmatrix}$$

چنانچه تابع شکل یک المان ۴ گرهی را از نوع C^0 بدست بیاوریم مشاهده می‌شود که توابع شکل با حالت فوق کاملاً متفاوت است.

الف) تیر دو گرهی:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$= \underbrace{\langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle}_{P(x)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = \langle 0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{S}^T = \underset{\sim}{P}(x)\underset{\sim}{C}^{-1}$$

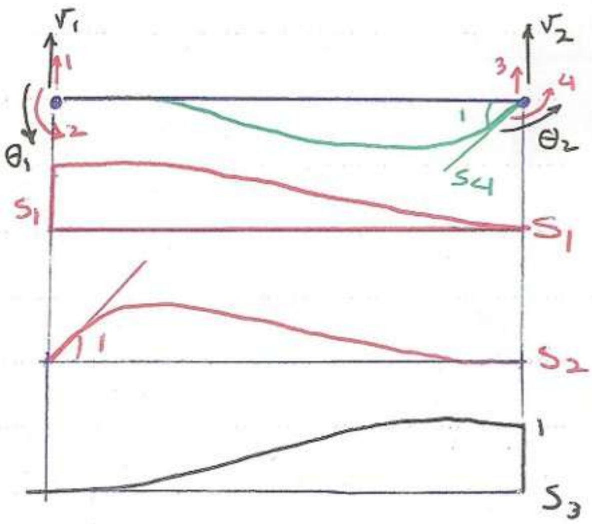
توابع شکل هرمیت:

$$S_1 = 1-3(\frac{x}{\ell})^2+2(\frac{x}{\ell})^3$$

$$S_2 = x(\frac{x}{\ell}-1)^2$$

$$S_3 = 3(\frac{x}{\ell})^2-2(\frac{x}{\ell})^3$$

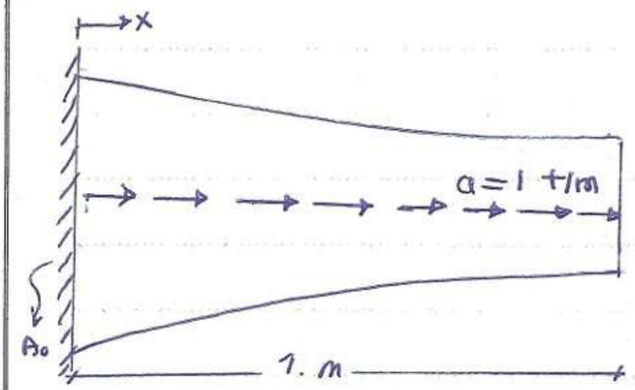
$$S_4 = \frac{x^2}{\ell}(\frac{x}{\ell}-1)$$



subject: Finite Element.

تمرین: (سری چهارم): میله‌ی غیرمنشوری نشان داده شده در شکل تحت بار گسترده‌ی محوری یکنواخت مفروض می‌باشد.

مطلوبست:

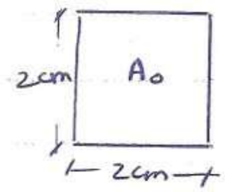


الف) تعیین تغییر مکان دقیق انتهای آزاد میله.

ب) تهیه‌ی برنامه‌ی کامپیوتری جهت تعیین تغییر مکان انتهای آزاد میله با درنظر گرفتن المان‌های نوع (I)، (II)، (III)، (IV)، (V). برای المان‌های ذیل مسئله را حل کنید.

تعداد المان‌ها از 1 تا 50 المان با گام 1 المان درنظر گرفته می‌شود.

$A_0 = 4\,cm^2$

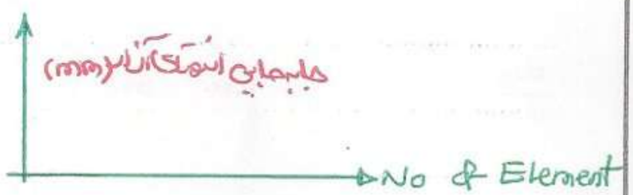


$E = 2.04 \times 10^6\ kg/cm^2$

نتایج را در قالب یک جدول و یک نمودار به شرح زیر وارد کرده و بررسی نتایج به دست آمده، بحث نمایید.

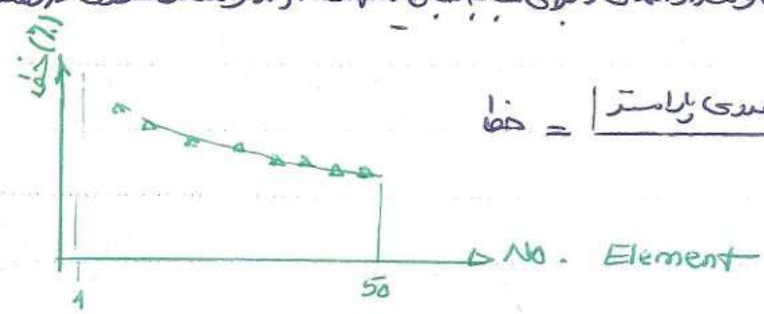
$A(x) = A_0\, e^{-x}$

تعداد المان ↓ / نوع المان ←	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
1					
2					
⋮					
49					
50					



ج) رسم تغییرات تنش محوری در طول میله با درنظر گرفتن 50 المان و مقایسه آن با مقدار دقیق (نمودار دقیق) در قالب یک نمودار برای هر 5 نوع المان. و بررسی نتایج به دست آمده بحث نمایید. (مقدار تنش در گره‌های ابتدای و انتهای هر المان درنظر گرفته شود.) [* مقدار تنش با توجه به گره‌های ابتدایی و انتهایی کالیبره شود.]

د) نمودار خطای روش عددی برحسب نوع المان و تعداد المان را برای جابجایی انتهای آزاد و تنش محوری در وسط میله رسم نمایید.



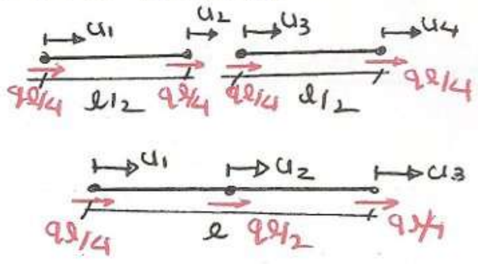
$$\text{خطا} = \frac{\left|\text{مقدار دقیق پارامتر} - \text{مقدار عددی پارامتر}\right|}{\text{مقدار دقیق پارامتر}} \times 100\%$$

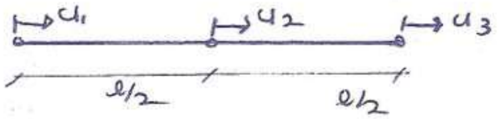
"المان‌ها"

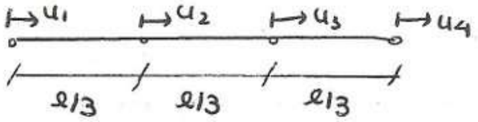
(I)

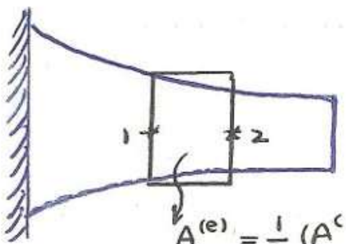
$$k^{(e)} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f^{(e)} = \frac{ql}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

(II)  (ترکیبی از دو المان خطی)

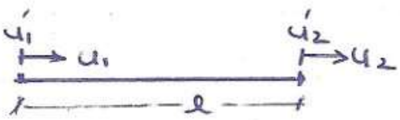
(III)  (المان سه گرهی) $\underset{\sim}{F}^{(e)} = \frac{q\ell}{6}\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$

(IV) 



$A^{(e)} = \frac{1}{2}(A^{(1)} + A^{(2)})$

برای مساحت المان داریم

(V) 

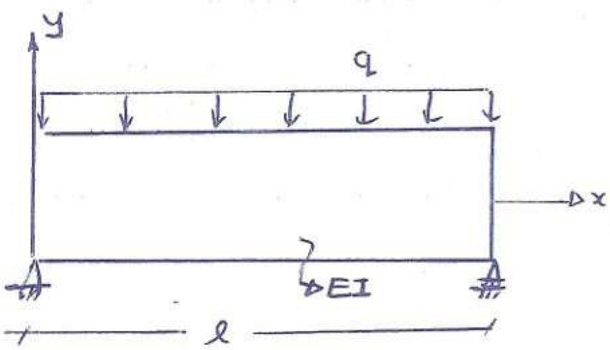
نوع C^1

در المان C^1، تنش در نقطه ابتدای المان Eu'_1 و در نقطه دوم Eu'_2 است. تنش المان e می‌شود

$$\sigma^{(e)} = \frac{1}{2}(\sigma_1^{(e)} + \sigma_2^{(e)})$$

البته بهتر است که از همان فرمول $\frac{E}{\ell}(u_2 - u_1)$ استفاده نماییم.

المان تیر در تحلیل عددی تیرها:



$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x)$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -q(x)$$

با فرض رفتار الاستیک - برنولی و صرف‌نظر از تغییر شکل‌های محوری

در تیرها: $\varepsilon = -\frac{y}{r}$

گفته شد در یک مسائل یک بعدی: $U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon^{2(e)}\, dv^{(e)}$

$$k = \frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \simeq y'' \rightarrow U^{(e)} = \frac{1}{2}\int E\left(y^{(e)}/r\right)^2 dv^{(e)}$$

subject: Finite Element

$$\text{در تیرها} \longrightarrow U^{(e)} = \frac{E}{2}\underbrace{\left(\int_{A^{(e)}} y^{2(e)}\, dA^{(e)}\right)}_{I^{(e)}}\int_0^l y^{(e)''^2}\, dx = \frac{EI}{2}\int_0^l \bar{u}^T B^T B \bar{u}\, dx$$

$$y^{(e)} = S_1 v_1 + S_2\theta_1 + S_3 v_2 + S_4\theta_2 = \langle S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4\rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = S^T u$$

$$y''^{(e)} = \left\langle \frac{d^2S_1}{dx^2} \quad \frac{d^2S_2}{dx^2} \quad \frac{d^2S_3}{dx^2} \quad \frac{d^2S_4}{dx^2}\right\rangle \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = B u$$

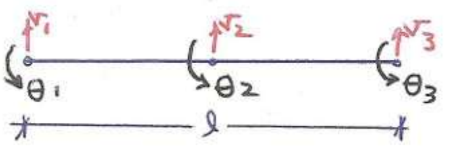
درایه‌های کلی هستند $\quad k_{\bar{u}}^{(e)} = \dfrac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{u}^T} \longrightarrow \quad K^{(e)} = EI\displaystyle\int_0^l B^T B\, dx$

$$k^{(e)} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad k_{ij}^{(e)} = EI\int_0^l S_i'' S_j''\, dx$$

بدست آوردن بردار نیرو:

$$f^{(e)} = q\int_0^l \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{bmatrix}$$

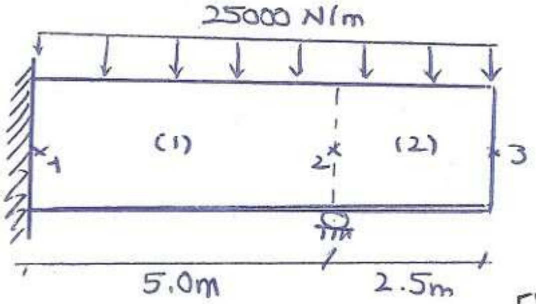
می‌توانستیم به صورت Advance و نیز برای دو تیر، المان تیر را دقیقش را با ترسیم کنیم:



مثال: تیر نشان داده شده در شکل تحت بارگذاری یکنواخت را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن دو المان تیر مطابق شکل، مطلوب است تعیین: الف) تغییر مکان قائم در گره ۳ و دوران در گره های ۲ و ۳. ب) عکس العمل ها

subject: Finite Element

- تکلیف



$I = 118.6 \times 10^6\ mm^4$

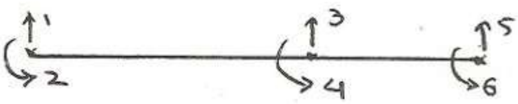
$E = 200\ GPa$

$$\underset{\sim}{K}^{(1)} = \frac{200\times10^9 \times 118.6\times10^6\times10^{-12}}{5^3}\begin{bmatrix} 12 & 6(5) & -12 & 6(5) \\ & 4(5)^2 & -6(5) & 2(5)^2 \\ & & 12 & -6(5) \\ & & & 4(5)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2277120 & 5692800 & -2277120 & 5692800 \\ & 18976000 & -5692800 & 9488000 \\ & & 2277120 & -5692800 \\ & & & 18976000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} -25000\times\frac{5}{2} = -62500 \\ -25000\times\frac{5^2}{12} = -52083.33 \\ -25000\times\frac{5}{2} = -62500 \\ 25000\times\frac{5^2}{12} = 52083.33 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \qquad \underset{\sim}{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} -31250 \\ -13020.833 \\ -31250 \\ 13020.833 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 18216960 & 22771200 & -18216960 & 22771200 \\ & 37952000 & -22771200 & 18976000 \\ & & 18216960 & -22771200 \\ & & & 37952000 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}$$



المان \ گره	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

$$\underset{\sim}{K}^{(G)} = \underset{\sim}{\bar{K}}^{(1)}_{6\times6} + \underset{\sim}{\bar{K}}^{(2)}_{6\times6} \quad ; \quad \underset{\sim}{f}^{(G)} = \underset{\sim}{\bar{f}}^{(1)} + \underset{\sim}{\bar{f}}^{(2)}$$

شرایط مرزی : $v_1 = v_2 = 0 \quad ; \quad \theta_1 = 0$

$\theta_2 = -0.0013724\ (rad)$

$\Rightarrow$ مجهولات بدست می‌آیند $v_3 = -0.0085772\ (mm)$

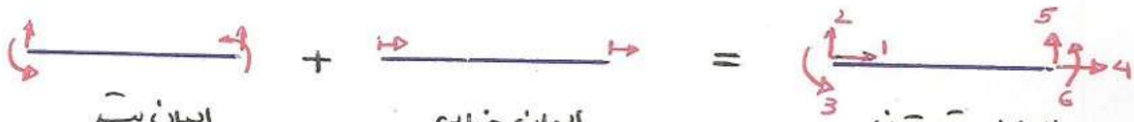
$\theta_3 = -0.00411704\ (rad)$

subject: Finite Element

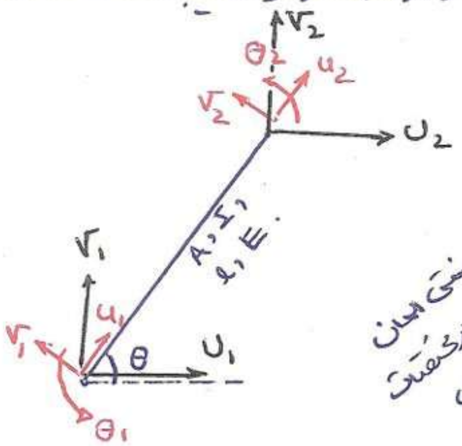
$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{K}^{(G)} u - \underset{\sim}{f}^{(G)} \longrightarrow \underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} R_1 = 54687 \, (N) \\ M_1 = +39062.5 \; (N.m) \\ R_2 = 132814 \; (N.m) \\ M_2 = 0 \\ R_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{bmatrix}$$

المان تیرستون ـ تحلیل قاب ها :

المان تیرستون ترکیبی از المان تیر و المان خرپا است . به عبارتی :



المان تیرستون در حالت کلی می تواند با یک زاویه ی θ در نظر گرفته شود و در اینجا مختصات محلی و کلی (local و Global) تعریف می کنیم .



ماتریس سختی المان تیرستون در مختصات محلی

$$\underset{\sim}{K}^{(e)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l^2} \\ -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

θ^* در مختصات محلی و کلی تفاوتی نمی کند .

$$\begin{cases} U_1 = u_1 \cos\theta - v_1 \sin\theta \\ V_1 = u_1 \sin\theta + v_1 \cos\theta \\ \Theta_1 = \theta_1 \end{cases}$$

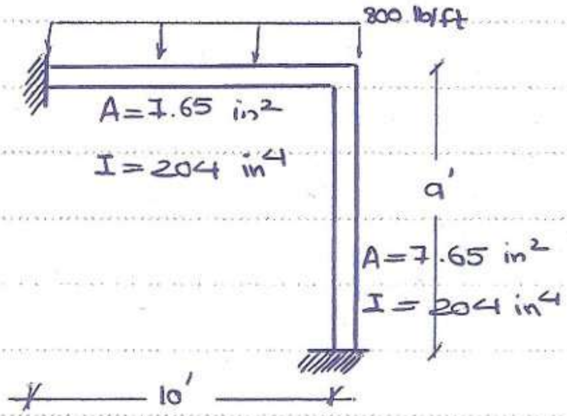
$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{T} \, \underset{\sim}{u} \; ; \; \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \Theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} \; ; \; \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{K}^{(e)} = \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{k}^{(e)}\, \underset{\sim}{T}^{T}$$

$F^{(e)} = \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{f}^{(e)}$ بردار نیروی المان در مختصات کلی

تمرین سری ششم: قاب خمشی محوری نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین تغییر مکان های افقی و قائم و دوران محل اتصال تیر و ستون و عکس العمل های تکیه گاهی.



المان های دوبعدی:

المان های دوبعدی از نظر کلی دو شکل بیشتر ندارند: ۱- المان های مستطیلی ۲- المان های مثلثی
هر المان دوبعدی دیگری ترکیبی از المان های فوق است. به عنوان مثال المان ذوزنقه ای از روی المان های فوق ساخته شده است. به عبارتی همه ی المان های دوبعدی از المان های بالا تولید شده اند.

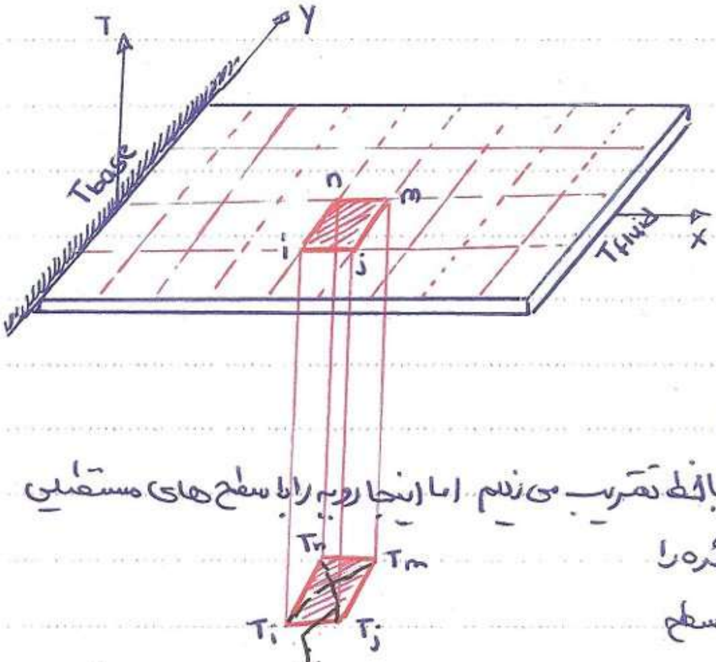
المان مستطیلی هم بر دو نوع است: ۱- المان مستطیلی دوخطی چهارگره ای
۲- المان مستطیلی درجه دو هشت گره ای

المان مثلثی هم بر دو نوع است: ۱- المان مثلثی خطی سه گره ای
۲- المان مثلثی درجه دو شش گره ای.

بحث المان های دوبعدی را با نوع اول المان های مستطیلی شروع می کنیم.

Created in Master PDF Editor - Demo Version

subject: Finite Element

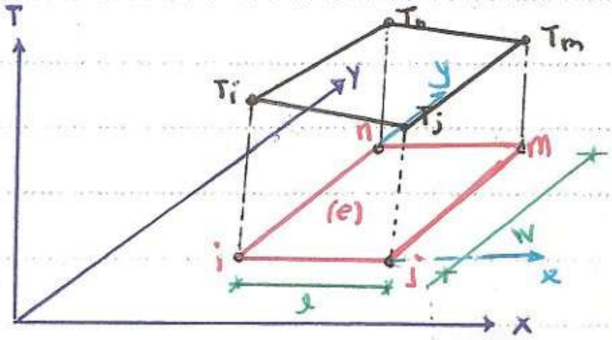


حالت دقیق رویه است که به صورت سطح تقریب زده است.

المان‌های مستطیلی دو خطی (چهارگره‌ای):

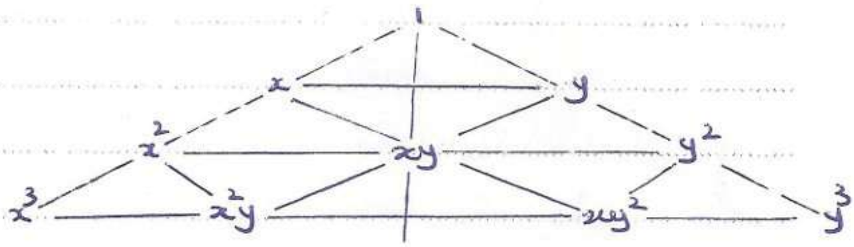
برای شرح المان‌های مستطیلی دو خطی چهارگره‌ای همان مثال انتقال درجه حرارت در یک تیغه را این بار در هر دو جهت x و y در نظر می‌گیریم. یعنی این بار تغییرات درجه حرارت هم در جهت x است و هم در جهت y.

در حالت یک بعدی، تغییرات درجه حرارت یک منحنی بود اما در اینجا یک رویه است. در قبل، منحنی را با خط تقریب می‌زدیم اما اینجا رویه را با سطح‌های مستطیلی تقریب می‌زنیم. در هر سطح مستطیلی هم چهارگره را در نظر می‌گیریم که این چهارگره، ماهیت و وضعیت سطح مورد نظر در تیغه را به ما نشان می‌دهند.



$$T^{(e)} = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy$$

مثلث پاسکال



$$\begin{cases} x=0,\ y=0 \rightarrow T^{(e)} = T_i \\ \vdots \\ x=0,\ y=W \rightarrow T^{(e)} = T_n \end{cases}$$

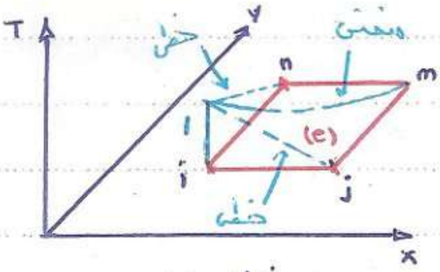
$$\rightarrow b_1 = T_i \qquad b_2 = \frac{1}{l}(T_j - T_i) \qquad b_3 = \frac{1}{W}(T_n - T_m)$$

$$b_4 = \frac{1}{lW}(T_i - T_j + T_m - T_n)$$

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_m T_m + S_n T_n = \langle S_i \quad S_j \quad S_m \quad S_n \rangle \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_n \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$\begin{cases} S_i = \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\left(1-\frac{y}{w}\right) \\ S_j = \frac{x}{\ell}\left(1-\frac{y}{w}\right) \\ S_m = \frac{xy}{\ell w} \\ S_n = \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\frac{y}{w} \end{cases}$$

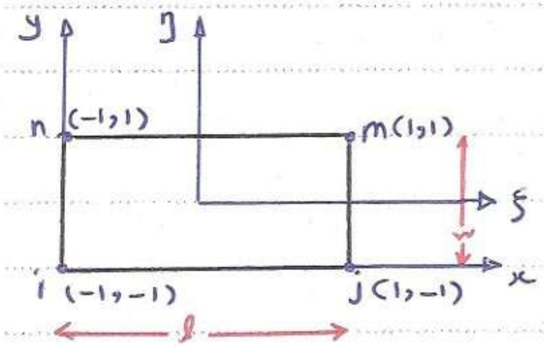


" تابع شکل S_i "

سایر تابع شکل ها هم مشابه فوق رسم می شوند. در حالت کلی:

$$\psi^{(e)} = \langle S_i \quad S_j \quad S_m \quad S_n \rangle \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_m \\ \psi_n \end{bmatrix}$$

میتوان مسئله را در مختصات طبیعی هم بررسی نموده و کار را برای انتگرال گیری های عددی ساده نمود. داریم:



$$\xi = \frac{2x}{\ell} - 1$$

$$\eta = \frac{2y}{w} - 1$$

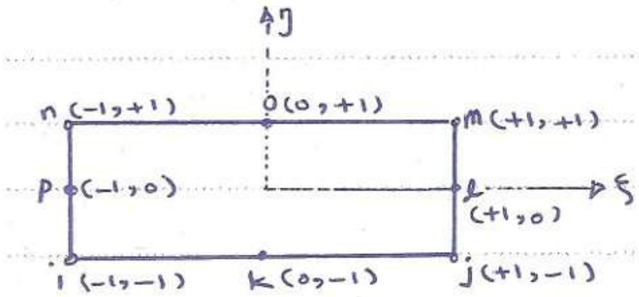
رابطه کلی توابع شکل برای المان های مستطیلی چهارگره ای بصورت زیر است:

$$S_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

$$S_i = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad S_j = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$S_m = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad S_n = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

المان های مستطیلی درجه 2:



ممکن است برای تأکید بر درجه 2 بودن المان، المان را به صورت فوق هم رسم کنند.

subject: Finite Element

در المان چهار گره‌ای $\varphi^{(e)} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta$

در اینجا $\varphi^{(e)} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\xi^2 + b_6\eta^2 + b_7\xi^2\eta + b_8\xi\eta^2$

برای بدست آوردن b_1 تا b_8 باید مقادیر پارامتر φ در هر هشت گره با استفاده از مختصات ξ و η صدق داده شود. این کار زمان‌بر و وقت‌گیر است. لذا از ترفندی استفاده کرده و با مد نظر قرار دادن خواص تابع شکل داریم:

$S = F_1(\xi,\eta)\, F_2(\xi,\eta)$

تابع F_1 تابعی است که مقدار تابع شکل را در اضلاع غیر مجاور گره، صفر می‌نماید. تابع F_2 هم تابعی است که مقدارش در خود گره باید یک شده و در گره‌های مجاور صفر شود. مثلاً برای S_i داریم:

$$S_i = \underbrace{(1-\xi)(1-\eta)}_{F_1\ \text{تابع}}\overbrace{(a_1 + a_2\xi + a_3\eta)}^{F_2\ \text{تابع}} = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

تابع F_1 هستند

$$\text{گره } K:\ S_i(0,-1)=0 \rightarrow \begin{cases} 1(+2)(a_1-a_3)=0 \\ 2(1)(a_1-a_2)=0 \\ 2(2)(a_1-a_2-a_3)=1 \end{cases} \rightarrow a_1=a_2=a_3=\frac{-1}{4}$$

$$S_i(-1,0)=0 \rightarrow \qquad S_i(-1,-1)=1 \rightarrow$$

به طور مشابه: $S_j = \frac{-1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$

$$S_m = \frac{-1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$S_n = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1+\xi)(1+\xi-\eta)$$

در حالت کلی هم داریم: $S_i = \frac{-1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1-\xi_i\xi-\eta_i\eta)$

روابط فوق برای گره‌های گوشه‌ای بودند. برای گره‌های میانی (مثلاً گره O) داریم:

$S_o = F_1(\xi,\eta)\, F_2(\xi,\eta)$

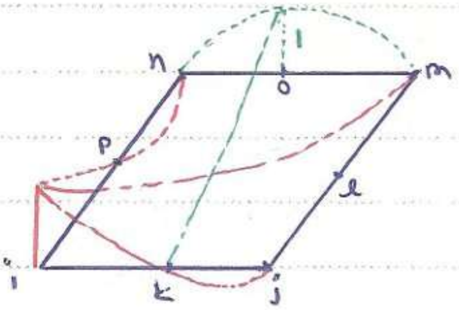
در گره‌های میانی، F_1 باید در اضلاع غیر مجاور، تابع شکل را صفر نماید:

$$S_o = (1-\xi)(1+\xi)(1+\eta)\alpha \rightarrow S_o(0,1)=1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

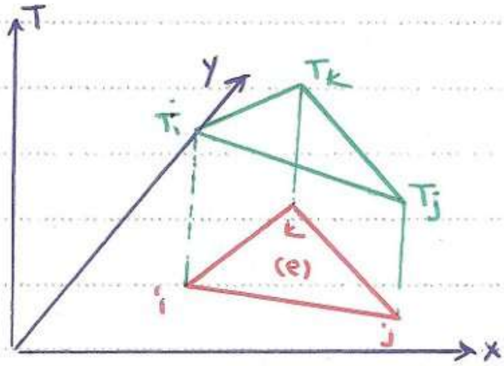
$$S_o = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

به طور مشابه: $S_k = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$

$S_\ell = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$ $\qquad$ $S_p = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$



المان مثلثی خطی ـ سه گره ای:



$$T^{(e)} = b_1 + b_2 X + b_3 Y$$

$$\begin{cases} X = X_i \,,\, Y = Y_i \rightarrow T^{(e)} = T_i \\ X = X_j \,;\, Y = Y_j \rightarrow T^{(e)} = T_j \\ X = X_k \,,\, Y = Y_k \rightarrow T^{(e)} = T_k \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{2A}\left\{(x_j y_k - x_k y_j)T_i + (x_k y_i - x_i y_k)T_j + (x_i y_j - x_j y_i)T_k\right\}$$

$$\hookrightarrow b_2 = \frac{1}{2A}\left[(y_j - y_k)T_i + (y_k - y_i)T_j + (y_i - y_j)T_k\right]$$

$$b_3 = \frac{1}{2A}\left[(x_k - x_j)T_i + (x_i - x_k)T_j + (x_j - x_i)T_k\right]$$

$$;\ 2A = x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j)$$

در شماره گذاری المان های مثلثی معمولاً جهت مخالف عقربه های ساعت در نظر گرفته می شود. در این حالت مساحت هم مثبت در می آید. شماره گذاری در جهت عقربه های ساعت هم مشکل خاصی ایجاد نمی کند و علامت ها با هم خنثی می شوند.

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_k T_k$$

$S_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)$ همچنین: $\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$

$S_j = \frac{1}{2A}(\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j x)$ $\beta_i = y_j - y_k$

$S_k = \frac{1}{2A}(\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y)$ $\gamma_i = x_k - x_j$

به طور مشابه:

$\alpha_j = x_k y_i - x_i y_k$ $\alpha_k = x_i y_j - x_j y_i$

$\beta_j = y_k - y_i$ $\beta_k = y_i - y_j$

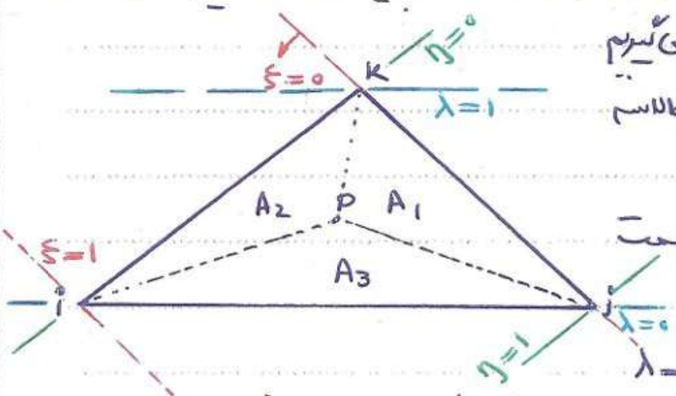
$\gamma_j = x_i - x_k$ $\gamma_k = x_j - x_i$

دقت این نوع المان پایین است. علت سخت شدن المان مثلثی دانستن توابع شکل خطی است.

~~المان مثلثی شش گره‌ای - درجه 2:~~

مختصات طبیعی (سطحی) در المان‌های مثلثی:

توابع شکل المان‌های مثلثی ثقیل است و برای راحتی نوشتن کار از مختصات طبیعی استفاده می‌کنیم. اگر داشته باشیم مثلث ijk را داریم. نقطه‌ای درون مثلث در نظر می‌گیریم و این نقطه را به هر سه رأس مثلث اولیه وصل می‌کنیم. حال سه مثلث با سطح‌های A_1، A_2 و A_3 داریم.



اگر نقطه P فرضاً به سمت i حرکت کند، A_2 و A_3 به سمت صفر و سطح A_1 به سطح A کل مثلث اولیه میل می‌کند.

اگر تعریف کنیم $\xi=\frac{A_1}{A}$ ؛ $\eta=\frac{A_2}{A}$ و $\lambda=\frac{A_3}{A}$

ξ، η و λ پارامترهای بی‌بعد هستند و بیرون شکل همان طور که مشخص نیز می‌باشد. این پارامترها از یکدیگر جدا نیستند و داریم:

$$\xi+\eta+\lambda=\frac{A_1+A_2+A_3}{A}=1$$

$$\Rightarrow \lambda=1-\xi-\eta$$

مختصات ξ طوری انتخاب می‌شود که ضلع jk متناظر محور $\xi=0$ انتخاب شده و خطی که به موازات ضلع jk از گره i می‌گذرد، متناظر محور $\xi=1$ است. برای مختصات‌های η و λ هم همین نحو را داریم. خاصیت انتخاب چنین مختصاتی این است که روابط زیر را داریم:

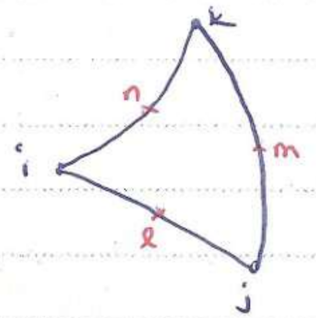
$$\xi=S_i \qquad \eta=S_j \qquad \lambda=S_k$$

به بیان ریاضی هم داریم:

$$\xi=S_i=\frac{A_1}{A}=\frac{\frac{1}{2}\left[\overbrace{(x_jy_k-x_ky_j)}^{\alpha_i}+x\overbrace{(x_j-y_k)}^{\beta_i}+y\overbrace{(x_k-x_j)}^{\gamma_i}\right]}{\frac{1}{2}\underbrace{\left[x_i(y_j-y_k)+x_j(y_k-y_j)+x_k(y_i-y_j)\right]}_{2A}}$$

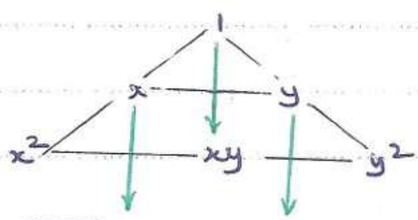
المان مثلثی شش گره‌ای - درجه 2:

از آنجا که دقت المان‌های خطی زیاد مطلوب نیست، یک راه افزایش دقت، افزایش order یا همان درجه المان است.



[نمایش اضلاع به صورت انحنادار فقط جهت تأکید بر درجه 2 بودن المان است]

بیان شد که order المان‌ها از روی مثلث خیام پاسکال نوشته می‌شود.

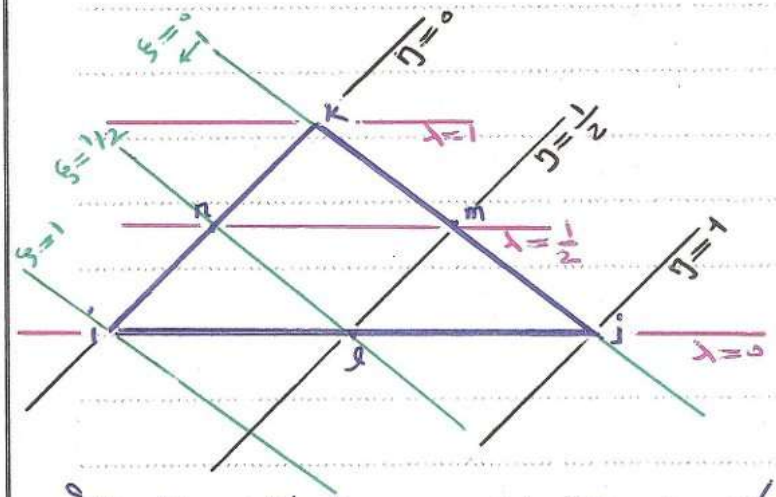


subject: Finite Element

باتوجه به مثلث خیام یا پاسکال برای المان‌ها داریم:

در المان سه گره‌ای: $\psi^{(e)} = a_1 + a_2 x + a_3 y$

در المان شش گره‌ای: $\psi^{(e)} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy$



فرض کنیم که می‌خواهیم تابع شکل گره i را محاسبه کنیم. خاصیت تابع شکل این است که در گره مورد نظر مقدارش 1 و در سایر گره‌ها مقدارش صفر است. تابع شکل باید هم روی خط $\xi = 1/2$ و هم روی خط $\xi = 0$ برابر صفر بوده و روی خط $\xi = 1$ هم باید یک باشد. داریم:

$$S_i = \alpha \xi (\xi - \tfrac{1}{2}) \rightarrow S_i(\xi = 1) = 1 \Rightarrow \alpha \times 1 \times (1 - \tfrac{1}{2}) = 1 \Rightarrow \alpha = 2$$

ضریب Scale

$$\rightarrow S_i = 2\xi(\xi - \tfrac{1}{2}) = \xi(2\xi - 1)$$

به طور مشابه $S_j = \eta(2\eta - 1)$

$$; \; S_k = \lambda(2\lambda - 1) = 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2$$

تابع شکل گره l باید به گونه‌ای انتخاب شود که روی خط $\xi = 0$ و $\eta = 0$ مقدارش صفر شود.

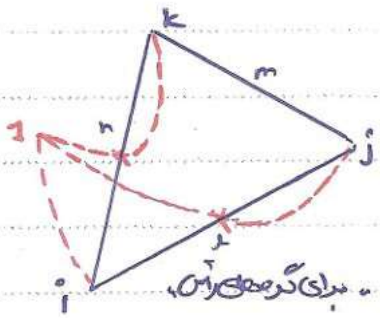
ولذا داریم:

$$S_l = \alpha_1 \xi \eta \rightarrow S_l(\xi = \tfrac{1}{2}, \eta = \tfrac{1}{2}) = 1 \rightarrow \alpha_1 = 4 \rightarrow S_l = 4\xi\eta$$

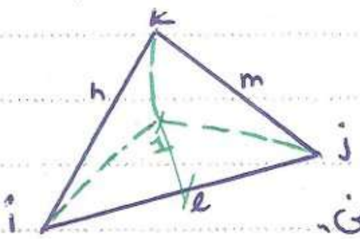
$$S_m = 4\eta\lambda = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

$$S_n = 4\xi\lambda = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

توابع شکل هم به صورت شماتیک به صورت زیر رسم می‌شوند:



برای گره‌های رأس



برای گره‌های میانی

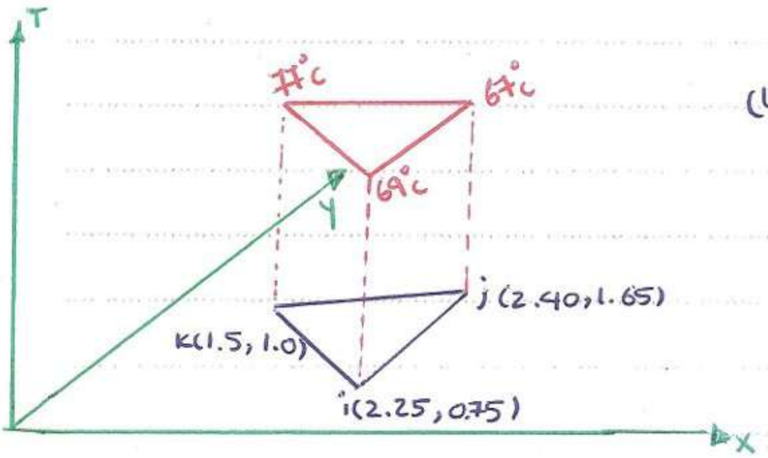
subject: Finite Element

مثال ۳: برای مدل سازی توزیع دما در یک میله از المان های دو بعدی مثلثی سه گره‌ای استفاده شده است. دماهای گره‌ای و موقعیت آن‌ها در المان نشان داده شده است. مطلوب است تعیین:

الف) مقدار دما در $x=2.15\,cm$ و $y=1.1\,cm$

ب) مؤلفه‌های گرادیان دما برای این المان

ج) موقعیت ایزوترم $70^\circ C$. (ایزوترم = هم‌دما)



الف)

$$S_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)$$

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j = 2.40 \times 1 - 1.5 \times 1.65 = -0.75$$

بطور مشابه: $\alpha_j = -1.125 \ ; \ \alpha_k = 1.9125$

$\beta_i = y_j - y_k = 1.65 - 1.0 = 0.65$ بطور مشابه: $\beta_j = 0.25 \ ; \ \beta_k = -0.9$

$\gamma_i = x_k - x_j = 1.5 - 2.4 = -0.9$ بطور مشابه: $\gamma_j = 0.75 \ ; \ \gamma_k = 0.15$

مساحت مثلث $2A = x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j) = 0.7125$

$$S_i = \frac{1}{0.7125}(-0.075 + 0.65x - 0.9y)$$

$$S_j = \frac{1}{0.7125}(-1.125 + 0.25x + 0.75y)$$

$$S_k = \frac{1}{0.7125}(1.9125 - 0.9x + 0.15y)$$

خاصیت تابع شکل $T^{(e)} = S_i \underset{69^\circ c}{T_i} + S_j \underset{67^\circ c}{T_j} + S_k \underset{77^\circ c}{T_k}$

$$T^{(e)}(x=2.15,\ y=1.1) = 69.93\ ^\circ c$$

ب) کلاً دما یا هر جریان دیگری که باشد، مشتق اول مکانی در همان راستا خواهد بود:

$$\text{بردار گرادیان حرارتی} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.808 \\ -0.421 \end{bmatrix} {}^\circ c/cm$$

Created in Master PDF Editor - Demo Version

subject: Finite Element

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} S_i & S_j & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_i}{\partial x} & \frac{\partial S_j}{\partial x} & \frac{\partial S_k}{\partial x} \\ \frac{\partial S_i}{\partial y} & \frac{\partial S_j}{\partial y} & \frac{\partial S_k}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \rightarrow$$

ثابت

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \delta_i & \delta_j & \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که گرادیان همواره مقدار ثابتی است و این نقطه ضعف المان‌های مثلثی است که مشتق را روی میدان جابه‌جایی ثابت در نظر می‌گیرد.

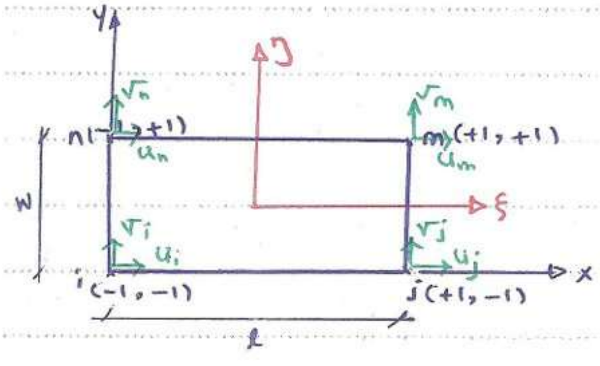
بعداً نشان می‌دهیم که مشتق روی میدان جابه‌جایی برابر کرنش است و المان‌های مثلثی مشکل‌شان ثابت در نظر گرفتن این کرنش‌هاست.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{0.7125} \begin{bmatrix} 1.65 & 0.25 & -0.9 \\ -0.9 & 0.75 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 69 \\ 67 \\ 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.808 \\ -0.421 \end{bmatrix} {}^\circ c/cm$$

ج) در این قسمت مکان هندسی نقاطی را می‌خواهد که درجه حرارت‌شان $70^\circ c$ است. قبلاً بدست آورده‌ایم:

$$\left.\begin{aligned} T^{(e)} &= 93.632 - 10.808x - 0.421y \\ T^{(e)} &= 70^\circ c \end{aligned}\right\} \rightarrow 10.808x - 0.421y = 23.632$$

هرگاه از یک مجموعه پارامتر (مجموعه‌ای از توابع شکل) برای تعریف متغیر مجهول φ استفاده کرده و از همان مجموعه پارامتر (توابع شکل) برای بیان هندسه‌ی مسئله نیز استفاده شود از فرمول‌بندی ایزوپارامتری بهره گرفته‌ایم. المانی که به این شکل بیان می‌گردد المان ایزوپارامتری نامیده می‌شود.



[u و v میزان‌های جابه‌جایی در راستای x و y هستند.]

$$S_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

از FE داریم:

$$\begin{cases} u = S_i u_i + S_j u_j + S_m u_m + S_n u_n \\ v = S_i v_i + S_j v_j + S_m v_m + S_n v_n \end{cases}$$

subject: Finite Element

یا به عبارتی
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & 0 & S_j & 0 & S_m & 0 & S_n & 0 \\ 0 & S_i & 0 & S_j & 0 & S_m & 0 & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

میدانیم
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

برای x و y داریم:

$$\begin{cases} x = S_i x_i + S_j x_j + S_m x_m + S_n x_n \\ y = S_i y_i + S_j y_j + S_m y_m + S_n y_n \end{cases}$$

به فرمول بندی فوق، فرمول بندی ایزوپارامتریک می‌گویند.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underline{J}\ \text{ماتریس ژاکوبین}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

انتگرال‌گیری عددی دوبعدی به روش گوس ـ لژاندر:

$$I = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\det(\underline{J})\,d\xi\,d\eta$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j f(\xi_i,\eta_j)$$

بعنوان مثال
$$I = \int_0^2\int_0^2 (3y^2 + 2x)\,dx\,dy$$

$$x = \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}\xi \rightarrow x = \frac{2-0}{2} + \frac{2+0}{2}\xi = 1+\xi \qquad \begin{aligned} x = 0 &\rightarrow \xi = -1 \\ x = 2 &\rightarrow \xi = +1 \end{aligned}$$

subject: Finite Element

$$y = \frac{2-0}{2} + \frac{2+0}{2}\eta = 1+\eta$$

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad |\underset{\sim}{J}| = 1$$

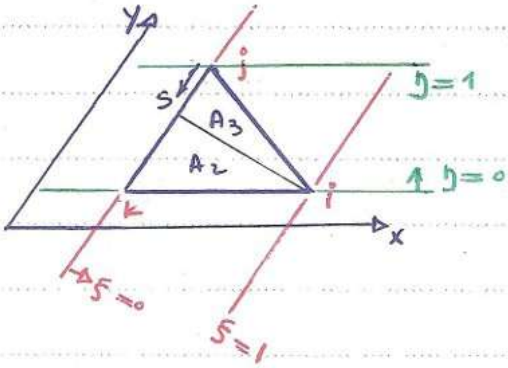
$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left(3(1+\eta)^2 + 2(1+\xi)\right)(1)\, d\xi\, d\eta = \Big[(1)(1) f\left(\tfrac{-1}{\sqrt3}, \tfrac{-1}{\sqrt3}\right) + (1)(1) f\left(\tfrac{-1}{\sqrt3}, \tfrac{+1}{\sqrt3}\right) +$$

$$(1)(1) f\left(\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{-1}{\sqrt3}\right) + (1)(1) f\left(\tfrac{1}{\sqrt3}, \tfrac{1}{\sqrt3}\right)\Big] = 24.00000$$

روابط مهم در انتگرال گیری از توابع شکل المان های مثلثی :

با فرض مختصات سطحی ξ ، η و λ :

$$\int_A \xi^a \eta^b \lambda^c \, dA = \frac{a!\, b!\, c!}{(a+b+c+2)!} 2A$$



$$\eta = 1 - \frac{S}{l_{jk}} = \frac{A_2}{A}$$

$$\lambda = \frac{S}{l_{jk}} = \frac{A_3}{A}$$

میتوان نشان داد : $\displaystyle\int_0^{l_{jk}} \eta^a \lambda^b \, ds = l_{jk} \int_0^1 \left(1 - \frac{S}{l_{jk}}\right)^a \left(\frac{S}{l_{jk}}\right)^b d\left(\frac{S}{l_{jk}}\right)$

$$\Rightarrow \int_0^{l_{jk}} \eta^a \lambda^b \, ds = l_{jk} \frac{a!\, b!}{(a+b+1)!}$$

حل معادلهٔ پواسون (لاپلاس) به کمک روش اجزای محدود ← فصل جدید

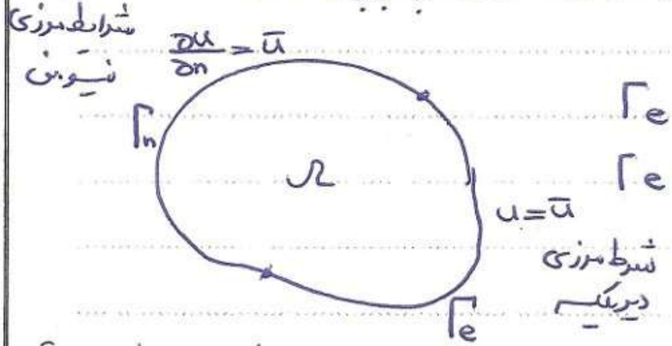
subject: Finite Element

فصل ششم - حل معادله‌ی پوآسون (لاپلاس) به کمک روش اجزاء محدود:

$$\nabla^2 u = g(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,y) \quad \text{in } \Omega$$

معادله فوق در ریاضیات مهندسی بصورت close form solution حل شد. اما در حالت کلی معادله پوآسون روی سطوح مستوی تعریف می‌شود و در حالت کلی دامنه مسئله یا همان Ω سطح دلخواهی می‌تواند باشد و شرایط مرزی هم معمولاً خیلی ساده تعریف می‌شوند و مشکل را چندبرابر می‌کنند.



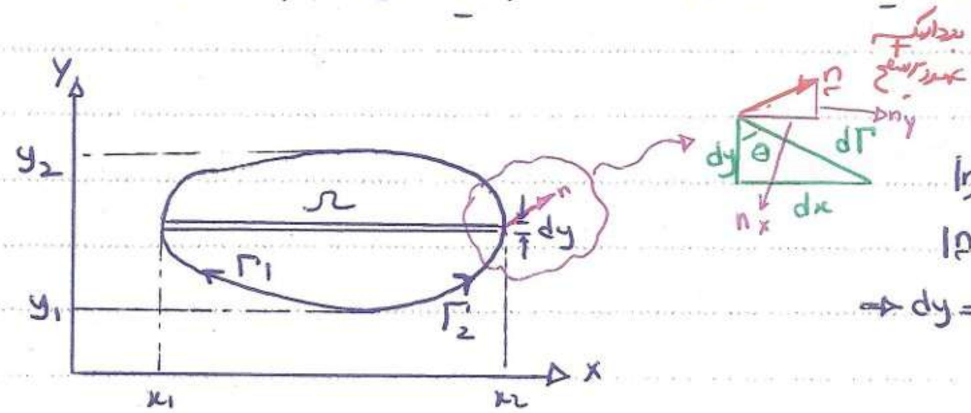
$$\Gamma_e \cup \Gamma_n = \Gamma$$

$$\Gamma_e \cap \Gamma_n = \phi$$

یعنی دامنه‌ی مسئله یک خط است و نیز شرایط مرزی هم کاملاً دلخواه هستند. در حالتی که این سطح بصورت مستطیل و نیم دایره و ... باشد، می‌توان بصورت close form حل کرد ولی در حالت کلی قطعاً باید از روش عددی استفاده شود.

$$I=\int_\Omega w\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-g(x,y)\right]d\Omega-\int_{\Gamma_e} w\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma=0$$

در رابطه فوق u یک تابع آزمایشی است و در اصل $\tilde{u}$ است که به دلیل شلوغ نشدن به همین صورت نشان داده شده است.



$$dy = d\Gamma\cos\theta$$

$$|n_x| = |n\cos\theta|$$

$$|n_x| = n_x = \cos\theta$$

$$\Rightarrow dy = n_x\, d\Gamma$$

$$\int_\Omega w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d\Omega=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\,dy=\left(\int_{y_1}^{y_2}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{y_1}^{y_2}dy\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x\,d\Gamma\,\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\int_{\Gamma_2}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x\,d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x\,d\Gamma=\int_{\Gamma}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x\,d\Gamma$$

جهت Γ_1 که عکس می‌شود و هم جهت Γ_2 می‌شود علامت منفی اینجا (می‌شود) را
در منفی پشت انتگرال ضرب شده و مجموع دو انتگرال فوق هم انتگرال روی
Γ را می‌دهد.

subject: Finite Element

بدست آوریم: $\int_\Omega w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d\Omega = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy + \oint_\Gamma \left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x\,d\Gamma$

بطور مشابه: $\int_\Omega \omega\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}d\Omega = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy + \oint_\Gamma \left[w\frac{\partial u}{\partial y}\right]n_y\,d\Gamma$

$$\int_\Omega w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)d\Omega = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dx\,dy + \oint_\Gamma\left[\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y\right]d\Gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}n_x + \frac{\partial u}{\partial y}n_y$$

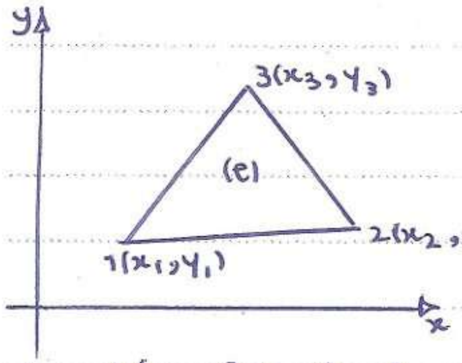
قضیه گرین

$$= -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dx\,dy + \oint_\Gamma w\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma$$

$$\Rightarrow I = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dx\,dy - \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} w\,g(x,y)\,dx\,dy + \oint_{\Gamma_n} w\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma = 0$$

شرط داده شده: if $\nabla^2 u = g(x,y) \Rightarrow \int_\Omega\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]d\Omega$

$$-\int_\Omega w\,g(x,y)\,d\Omega + \int_{\Gamma_n} w\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma = 0$$



فرمولبندی با استفاده از المان مثلثی سه گرهی:

$$u = S_1u_1 + S_2u_2 + S_3u_3$$

$$= \langle S_1 \quad S_2 \quad S_3\rangle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{\bar{u}}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2A}\left[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right] \\ S_2 = \frac{1}{2A}\left[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right] \\ S_3 = \frac{1}{2A}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right] \end{cases}$$

براساس روش گالرکین داریم:

$W_i = S_i$ or $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{S}^T$

Created in Master PDF Editor - Demo Version

subject: Finite Element

$$\int_{\Omega^{(e)}}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]d\Omega^{(e)}=$$

$$\underbrace{\left\{\int_{\Omega^{(e)}}\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial x}\\ \frac{\partial S_2}{\partial x}\\ \frac{\partial S_3}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial x} & \frac{\partial S_2}{\partial x} & \frac{\partial S_3}{\partial x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial y}\\ \frac{\partial S_2}{\partial y}\\ \frac{\partial S_3}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial y} & \frac{\partial S_2}{\partial y} & \frac{\partial S_3}{\partial y}\end{bmatrix}\right)d\Omega^{(e)}\right\}}_{\underset{\sim}{K}^{(e)}_{3\times3}}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$$

و $\int_{\Omega^{(e)}} d\Omega^{(e)} = A$

$$\underset{\sim}{K}^{(e)}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ & k_{22} & k_{23}\\ Sym & & k_{33}\end{bmatrix}$$

$$k_{11}=\frac{1}{4A}\left[(x_3-x_2)^2+(y_2-y_3)^2\right]$$

$$k_{12}=\frac{1}{4A}\left[(x_3-x_2)(x_1-x_3)+(y_2-y_3)(y_3-y_1)\right]$$

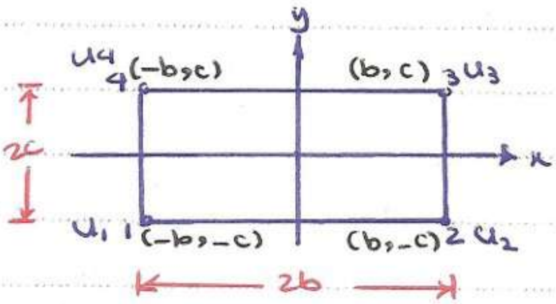
$$k_{13}=\frac{1}{4A}\left[(x_3-x_2)(x_2-x_1)+(y_2-y_3)(y_1-y_2)\right]$$

$$k_{22}=\frac{1}{4A}\left[(x_1-x_3)^2+(y_3-y_1)^2\right]$$

$$k_{23}=\frac{1}{4A}\left[(x_1-x_3)(x_2-x_1)+(y_3-y_1)(y_1-y_2)\right]$$

بردار نیروی خارجی : $-\int_{\Omega^{(e)}} W g(x,y)\, d\Omega^{(e)} = -\int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix}S_1\\ S_2\\ S_3\end{bmatrix} g(x,y)\, d\Omega^{(e)}$

فرمولبندی با استفاده از المان مستطیلی چهارگرهی دوخطی :



$$u=\langle S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4\rangle\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}$$

$$S_1=\frac{1}{4bc}(b-x)(c-y) \qquad S_2=\frac{1}{4bc}(b+x)(c-y)$$

$$S_3=\frac{1}{4bc}(b+x)(c+y) \qquad S_4=\frac{1}{4bc}(b-x)(c+y)$$

subject: Finite Element

بطورخلاصه:

$$\underline{K}^{(e)}_{4\times4}=\int_{\Omega^{(e)}}\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial x}\\ \frac{\partial S_2}{\partial x}\\ \frac{\partial S_3}{\partial x}\\ \frac{\partial S_4}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial x} & \frac{\partial S_2}{\partial x} & \frac{\partial S_3}{\partial x} & \frac{\partial S_4}{\partial x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial y}\\ \frac{\partial S_2}{\partial y}\\ \frac{\partial S_3}{\partial y}\\ \frac{\partial S_4}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial S_1}{\partial y} & \frac{\partial S_2}{\partial y} & \frac{\partial S_3}{\partial y} & \frac{\partial S_4}{\partial y}\end{bmatrix}\right)d\Omega$$

بعنوان نمونه:

$$K_{11}=\int_{\Omega^{(e)}}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2\right)d\Omega^{(e)}=\frac{1}{(4bc)^2}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left[(c-y)^2+(b-x)^2\right]dx\,dy=\frac{b^2+c^2}{3bc}$$

$$\underline{K}^{(e)}_{4\times4}=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14}\\ & K_{22} & K_{23} & K_{24}\\ \text{Sym} & & K_{33} & K_{34}\\ & & & K_{44}\end{bmatrix}$$

$$K_{12}=\frac{b^2-2c^2}{6bc}\qquad K_{13}=-\frac{b^2+c^2}{6bc}$$

$$K_{14}=\frac{c^2-2b^2}{6bc}\qquad K_{11}=K_{22}=K_{33}=K_{44}$$

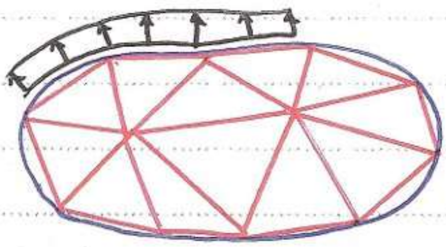
$$K_{34}=K_{12}\;;\quad K_{23}=K_{14}\;;\quad K_{24}=K_{13}$$

بردار نیروی خارجی:

$$-\int_{\Omega^{(e)}}Wg(x,y)\,d\Omega^{(e)}=-\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\end{bmatrix}g(x,y)\,dx\,dy=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{bmatrix}$$

$\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}$ شرط مرزی طبیعی

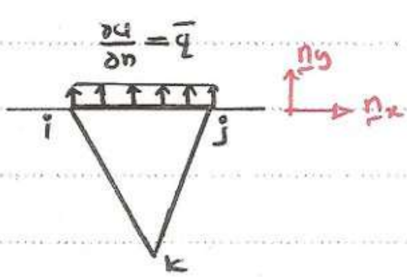
محاسبه‌ی انتگرال مرزی:



$$\int_{\Gamma_n}W\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma=\sum_e\int_{\Gamma_n^{(e)}}W\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma$$

المان های مرزی که دارای شرط طبیعی باشند مد نظر است.

در یک حالت خاص و ساده:



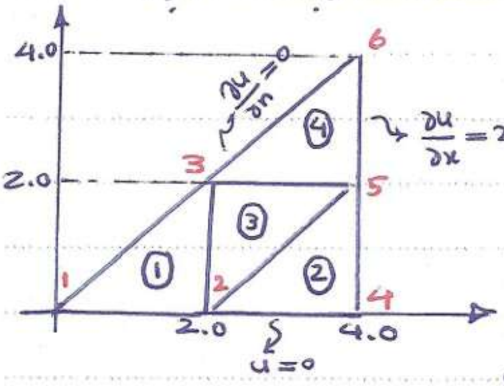
$$\int W\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma=\int_y W\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}dy+\int_x W\frac{\partial u}{\partial y}dx=\int_{x_i}^{x_j}W\frac{\partial u}{\partial y}dx=\bar{q}\int_{x_i}^{x_j}\begin{bmatrix}S_i\\S_j\end{bmatrix}dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}n_x+\frac{\partial u}{\partial y}n_y \qquad n_x = dy,\quad n_y = dx$$

$$=\bar{q}\int_0^{h_{ij}}\begin{bmatrix}S_i\\S_j\end{bmatrix}dx=\bar{q}\,h_{ij}\begin{bmatrix}\frac{1!\,0!}{(1+0+1)!}\\ \frac{1!\,0!}{(1+0+1)!}\end{bmatrix}=\frac{\bar{q}h_{ij}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

مثال: مطلوب است حل عددی معادله‌ی لاپلاس برای دامنه‌ی مثلثی نشان داده شده در شکل. (با استفاده از تابع المان مثلثی خطی 3 گرهی).



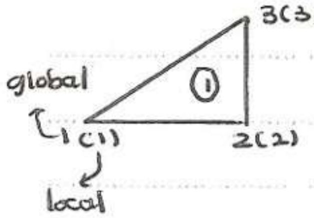
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad u(x,0)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(4,y)=2.0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=0 \text{ روی قطر}$$

المان 1:

$1(0,0)$; $2(2,0)$; $3(2,2)$

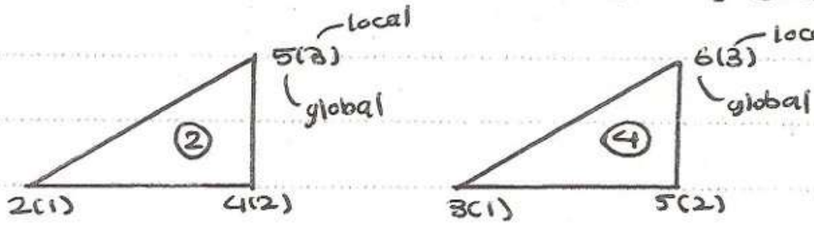


$$k_{11}=\frac{1}{4A}\left[(x_3-x_2)^2+(y_2-y_3)^2\right] \Rightarrow$$

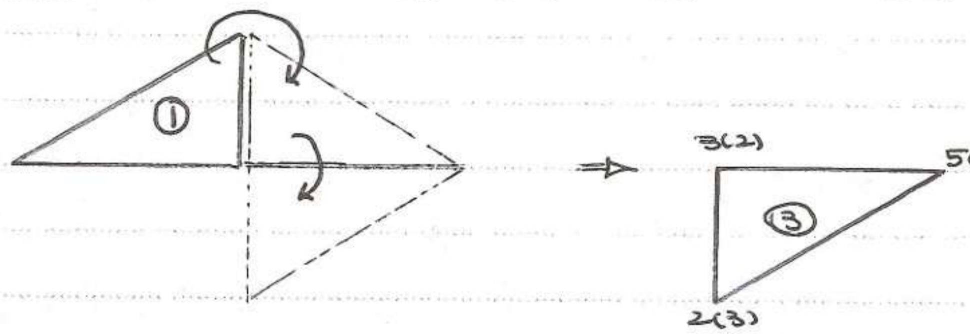
$$k_{11}=\frac{1}{4\times\frac{1}{2}\times2\times2}\left[(2-2)^2+(0-2)^2\right]=0.5$$

$$k^{(e)}_{3\times3}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.5 & 0\\ & 1.0 & -0.5\\ \text{Sym} & & 0.5\end{bmatrix}$$

المان‌های 2 و 4 کاملاً مشابه المان 1 هستند.



از المان 1 به المان 3 می‌رسیم. به این شکل که ابتدا حول ضلع قائم المان 1 به اندازه‌ی 180° دوران داده، و سپس حول ضلع افقی به همین میزان دوران می‌دهیم. باید تشخیص صحیح شماره‌ی local گره‌ها بعد از تغییرات دقت شود.



subject: Finite Element

assembling: طبق آنچه گفته شد واضح است که ماتریس سختی المان در مختصات global و یک ماتریس 6x6 است:

المان (e)	گره local (1)	(2)	(3)
1	1	2	3
2	2	4	5
3	5	3	2
4	3	5	6

برای assembling ابتدا لازم است $\bar{K}_G^{(i)}$ که متناظر به المان i ام است را برای هر المان بدست آورده و سپس از جمع کردن آن ها ماتریس سختی کلی K_G را می رسیم. به عنوان نمونه زیر $K_G^{(1)}$ را نوشته ام و سپس K_G را نوشته ام.

$$
\bar{K}_G^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & - & - & - \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 & - & - & - \\ 0 & -0.5 & 0.5 & - & - & - \\ | & | & | & & & \\ | & | & | & & & \end{bmatrix}
$$

سایر درایه ها صفر هستند.

به همین ترتیب $\bar{K}_G^{(2)}$ ، $\bar{K}_G^{(3)}$ و $\bar{K}_G^{(4)}$ را هم حساب می کنیم.

$$
\bar{K}_G = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2.0 & -1.0 & -0.5 & 0 & 0 \\ & & 2.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ & \text{Sym} & & 1.0 & -0.5 & 0 \\ & & & & 2.0 & -0.5 \\ & & & & & 0.5 \end{bmatrix}_{6\times6}
$$

$$
-\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\Omega - \int_e w\,\cancel{g(x,y)}^{0}\,d\Omega + \int_{\Gamma_n} w\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma = 0 \Rightarrow -\bar{K}_G\bar{u} + \bar{f} = 0
$$

در این مسئله $g(x,y)$ صفر است. به عبارت دیگر معادله که مورد تحلیل در اینجا لاپلاس است نه پواسون و لذا تولید حرارتی نداریم. بنابراین فقط شرایط مرزی طبیعی باعث تولید نیرو می شوند. با توجه به شرایط مرزی داده شده در ابتدای مسئله، مشاهده می شود تنها مرز قائم (6-5-4) باعث تولید نیرو می شود لذا داریم:

المان ② : $\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \frac{2\times2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ المان ④ : $\begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \frac{2\times2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

subject: Finite Element

$$F^T = \langle F_1 \quad F_2 \quad 0 \quad F_4 \quad 4 \quad 2 \rangle$$
$$\bar{u}^T = \langle 0 \quad 0 \quad u_3 \quad 0 \quad u_5 \quad u_6 \rangle$$

باتوجه به صفر بودن u_1 ، u_2 و u_4 و با استفاده از روش قبل برای ماتریس سختی سطر و ستون های ۱، ۲ و ۴ را صفر کرده و اعضای قطری را ۱ عنوان در نظر هم داشت:

$$\begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 2.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 6.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}$$

تحلیل مسائل مکانیک جامدات دو بعدی:

۱) پیچش اعضا با مقاطع دلخواه (غیر مدور)

۲) مسائل الاستیسیته دو بعدی (تنش مستوی - کرنش مستوی)

۳) مسائل الاستیسیته متقارن محوری

۱- پیچش اعضا با مقاطع دلخواه:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0$$: فرمول بندی پرانتل

Φ : تابع تنش

G : مدول الاستیسیته برشی

θ : زاویه پیچش در واحد طول میله

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \tau_{zy} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \end{cases}$$ ← به طوری که

⇐ ممان پیچشی اعمال شده : $T = 2\int_A \Phi \, dA$

A ← سطح مقطع میله

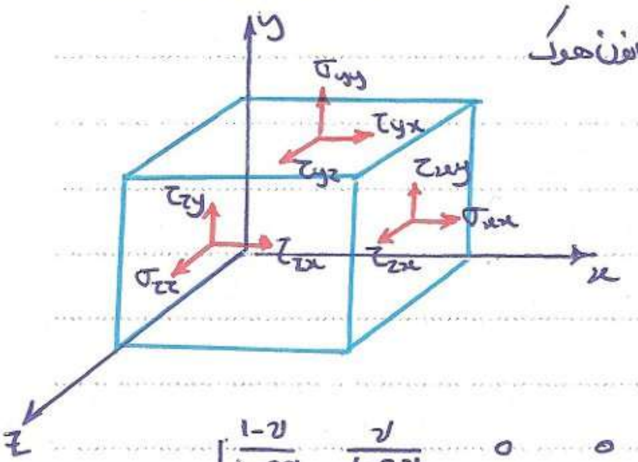
در صورت داشتن مقدار زاویه ی θ (زاویه ی دوران)، مسئله به حل معادله ی پواسون تبدیل می شود که در آن:

$$g(x,y) = -2G\theta$$

۲- مسائل الاستیسیته دو بعدی (تنش مسطح - کرنش مسطح):

$$\sigma^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]$$
$$\epsilon^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}]$$ (شکل در صفحه بعد رسم شده است)

subject: Finite Element



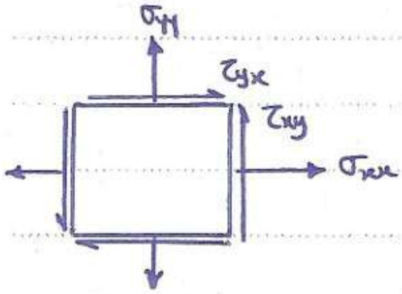
$\underset{\sim}{\sigma}_{6\times1} = \underset{\sim}{D}_{6\times6}\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{6\times1}$ ، بر اساس قانون هوک

(قانون عمومی هوک برای مواد همگن و همسانگرد)

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

با فرض کوچک بودن ضخامت و صرف نظر از پارامترهای تنش در راستای z داریم:

a) تنش مسطح $\sigma_{zz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$



$$\underset{\sim}{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}]$$

$$\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{\sigma}_{3\times1} = \underset{\sim}{D}_{3\times3}\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{3\times1} \quad ;$$

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

b) کرنش مسطح $\varepsilon_{zz} = \gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0 \quad ; \quad \underset{\sim}{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right] = 0 \quad ; \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

Created in Master PDF Editor - Demo Version

subject: Finite Element

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}_{3\times1} = \underset{\sim}{D}_{3\times3}\, \underset{\sim}{\varepsilon}_{3\times1} \;;\quad \underset{\sim}{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}$$

جابه‌جایی‌ها : u , v , w

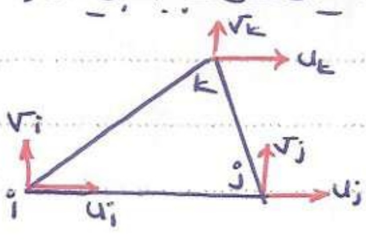
$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

$$\underset{\text{انرژی کرنشی ذخیره شده در المان}}{U^{(e)}} = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV \;;\quad \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\varepsilon} \Rightarrow \underset{\sim}{\sigma}^T = \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}^T \;;\quad \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}^T \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}^T = \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}$$

$$\Rightarrow U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV$$

در حالت دوبعدی میدان‌های جابه‌جایی u و v هستند. حال اگر از المان مثلثی سه گرهی استفاده کنیم، داریم:



$$\begin{cases} u = S_i u_i + S_j u_j + S_k u_k \\ v = S_i v_i + S_j v_j + S_k v_k \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & 0 & S_j & 0 & S_k & 0 \\ 0 & S_i & 0 & S_j & 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{\bar{u}}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial S_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial S_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial S_k}{\partial x} u_k = \frac{1}{2A}(\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_k u_k)$$

به طور مشابه $\quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}(\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_k v_k)$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A}(\gamma_i u_i + \beta_i v_i + \gamma_j u_j + \beta_j v_j + \gamma_k u_k + \beta_k v_k)$$

subject: Finite Element

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix}}^{cte}}_{\underset{\sim}{B}} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}\,\bar{\underset{\sim}{u}}$$

برای المان مثلثی ماتریس B ثابت است.

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \bar{\underset{\sim}{u}}^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, \bar{\underset{\sim}{u}}\, dV$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{\underset{\sim}{u}}^T} = \underset{\sim}{k}^{(e)} \bar{\underset{\sim}{u}} \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{k}^{(e)} = \int_V \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, dV$$

این رابطه برای تمام المان‌های سازه‌ای عمومیت دارد.

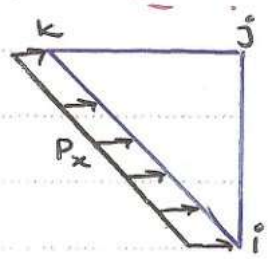
برای المان مثلثی D و B ثابت بوده و از انتگرال بیرون می‌آیند. لذا داریم:

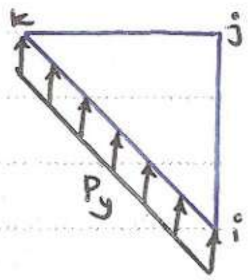
$$\underset{\sim}{k}^{(e)} = \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, V$$

حجم المان V: $V = tA =$ ضخامت $\times$ سطح مقطع

بردار نیروهای گرهی:

$$\underset{\sim}{F}^{(e)} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix} \quad ; \quad F^{(e)} = \int_A \underset{\sim}{S}\, \underset{\sim}{P}(x,y)\, dA$$





ادامه روابط در صفحه بعدی

subject: Finite Element

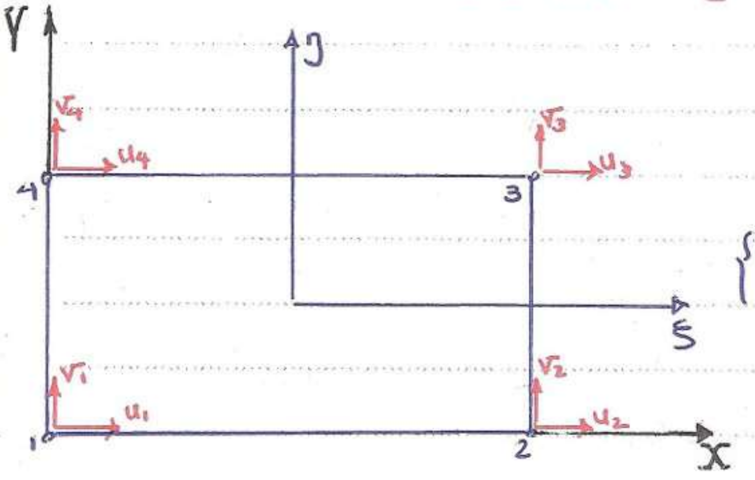
$$F^{(e)} = \int_A \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \\ S_j & 0 \\ 0 & S_j \\ S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \underbrace{dA}_{t\,ds\ \text{ضخامت}} = t \int_0^{l_{ik}} \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \\ S_j & 0 \\ 0 & S_j \\ S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} ds$$

$$F^{(e)} = \frac{t\, l_{ik}}{2} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix}$$

اگر روی اضلاع دیگر هم به همین شکل بار داشتیم، مثل همین حالت فوق جداگانه محاسبه کرده و در نهایت همه را با هم جمع (assemble) می‌کنیم.

subject: Finite Element

فرمول‌بندی ایزوپارامتریک با استفاده از المان مستطیلی ۴ گره‌ای دوبعدی:



$$S_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

$$\begin{cases} x = S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + S_4x_4 \\ y = S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3 + S_4y_4 \end{cases}$$

با استفاده از روابط فوق، دستگاه مختصات یا جابجایی‌ها هندسه شکل را هم به صورت ترکیبی از توابع شکل بیان می‌کنیم به فرمول‌بندی ایزوپارامتریک می‌رسیم. از طرفی داریم:

$$\begin{cases} u = S_1u_1 + S_2u_2 + S_3u_3 + S_4u_4 \\ v = S_1v_1 + S_2v_2 + S_3v_3 + S_4v_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

قبلاً نشان داده شده است که:

if $f = f(x,y)$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}(S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + S_4x_4) & \frac{\partial}{\partial \xi}(S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3 + S_4y_4) \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + S_4x_4) & \frac{\partial}{\partial \eta}(S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3 + S_4y_4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & -(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 \\ -(1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 & -(1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$\Rightarrow \underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \underset{\sim}{J}^{-1} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}}_{J^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\det \underset{\sim}{J} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21}$$

بطور مشابه :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix}}_{(\underset{\sim}{A}_1)_{3\times 4}} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}\, \bar{\underset{\sim}{u}}$$

$$u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3 + S_4 u_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = S_{1,\xi}\, u_1 + S_{2,\xi}\, u_2 + S_{3,\xi}\, u_3 + S_{4,\xi}\, u_4$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix}}_{(\underset{\sim}{A}_2)_{4\times 8}} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}\, \bar{\underset{\sim}{u}} \quad , \quad (\underset{\sim}{B})_{3\times 8} = (\underset{\sim}{A}_1)_{3\times 4} \times (\underset{\sim}{A}_2)_{4\times 8}$$

subject: Finite Element

قبلاً نشان دادیم که : $U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\varepsilon}\, \overset{t_e dA}{\widehat{dV}} = \frac{t_e}{2}\int_A \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\varepsilon}\, dA$

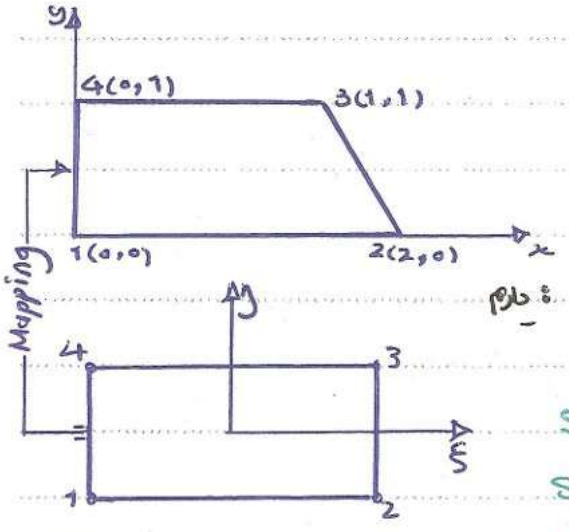
$$\rightarrow U^{(e)} = \frac{t_e}{2}\int_A \underset{\sim}{\bar{u}}^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, \underset{\sim}{\bar{u}}\, \overset{dx\,dy}{dA} \quad , \quad \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \underset{\sim}{\bar{u}}^T} = \underset{\sim}{K}^{(e)} \underset{\sim}{\bar{u}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{K}^{(e)}_{8\times 8} = t_e \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, \det J\, d\xi\, d\eta}$$

$$\underset{\sim}{f}^{(e)} = \int_A \underset{\sim}{S}\, \underset{\sim}{P}(x,y)\, dA$$

المان‌های ایزوپارامتریک ـ نگاشت : Mapping

در این بحث به دنبال پیدا کردن ماتریس سختی المان‌هایی هستیم که لزوماً مستطیل و مربع و ... نیستند و بعضاً دارای لبه‌های گرد و یا غیرموازی اند. برای این کار باید از المان‌های پایه استفاده کرده و با روش‌های نگاشت ماتریس سختی المان مورد نظر را بدست آورد. به عنوان مثال می‌خواهیم ماتریس سختی المان ذوزنقه‌ای شکل زیر را با مختصات گره‌ای داده شده بدست آوریم. برای این کار یک المان مستطیلی را روی المان ذوزنقه‌ای مورد نظر map می‌کنیم.



$$\begin{cases} x = S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + S_4x_4 \\ y = S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3 + S_4y_4 \end{cases}$$

داریم : $x = S_1\times 0 + S_2\times 2 + S_3\times 1 + S_4\times 0 = 2S_2 + S_3$

$y = S_1\times 0 + S_2\times 0 + S_3\times 1 + S_4\times 1 = S_3 + S_4$

$S_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$

$S_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$

$S_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

$S_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$

در نتیجه داریم $\begin{cases} x = \frac{1}{4}(1+\xi)(3-\eta) \\ y = \frac{1}{2}(1+\eta) \end{cases}$

کنترل جواب در گره 2

$\xi = +1 \quad \eta = -1 \rightarrow \begin{cases} x = 2 & \checkmark \\ y = 0 & \checkmark \end{cases}$

خوب است

Created in Master PDF Editor - Demo Version

subject: Finite Element

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3-\eta) & 0 \\ -\frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{J}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{8}(3-\eta) - 0} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(3-\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3-\eta} & 0 \\ \frac{2(1+\xi)}{3(1-\eta)} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{3-\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\xi)}{3-\eta} & 2 \\ \frac{2(1+\xi)}{3-\eta} & 2 & \frac{4}{3-\eta} & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \underbrace{\begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{k}^{(e)} = t_e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \left(\frac{1}{8}(3-\eta)\right) d\xi \, d\eta$$

در امتحان ممکن است ترم $k^{(e)}_{22}$ را بخواهند فرضاً. از روابط $k'_{ij} = B_{im} B_{jn} D_{mn}$ استفاده کرده و می‌نویسیم:

$$k'_{22} = B_{2m} B_{2n} D_{mn}$$

با فرض تنش مسطح

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$k'_{22} = B_{2m} B_{2n} D_{mn} = B_{21}^2 D_{11} + 2 B_{21} B_{22} D_{12} + B_{22}^2 D_{22} + B_{33}^2 D_{33}$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A_1} \times \underset{\sim}{A_2} \quad , \quad A_{ij} = (A_1)_{im} (A_2)_{mj}$$

$$B_{21} = (A_1)_{2m} (A_2)_{m1} = \cancel{(A_1)_{21}}(A_2)_{11} + \cancel{(A_1)_{22}}(A_2)_{21} + \cancel{(A_1)_{23}}(A_2)_{31} = 0$$

به طور مشابه $B_{22} = -(1+\xi)\dfrac{(1-\eta)}{2(3-\eta)}$

$$B_{33} = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(3-\eta)} - \frac{1+\xi}{2}$$

$$k'_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{(1-\eta)^2(1+\xi)^2}{4(3-\eta)^2} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(3-\eta)} - \frac{1+\xi}{2}\right)^2\right)$$

$$f(\xi,\eta) = t_e \, k'_{22} \, \frac{(3-\eta)}{8}$$

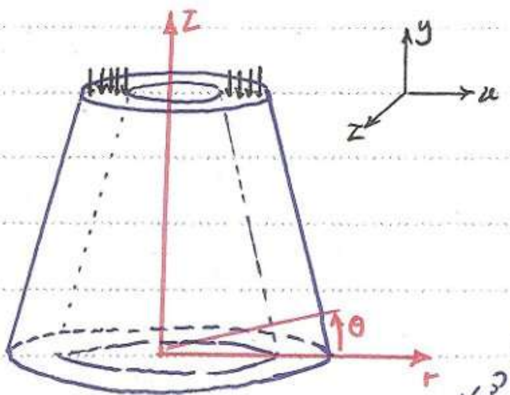
که رابطه فوق هم با استفاده از فرمول چند نقطه‌ای گاوس به جواب می‌رسد؛ یعنی:

$$K_{22} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{t_e \, k'_{22} \, \frac{(3-\eta)}{8}}_{f(\xi,\eta)} \, d\xi \, d\eta$$

مسائل الاستیسیته متقارن محوری:

فرض می‌شود که جسمی متقارن با شرایط زیر داریم.

بردار کرنش در دستگاه مختصات کارتزین بصورت زیر است:



دستگاه کارتزین

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix}$$

با فرض جابجایی‌های u، v، w در راستاهای x، y و z داریم:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \qquad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

Created in Master PDF Editor - Demo Version

subject: Finite Element

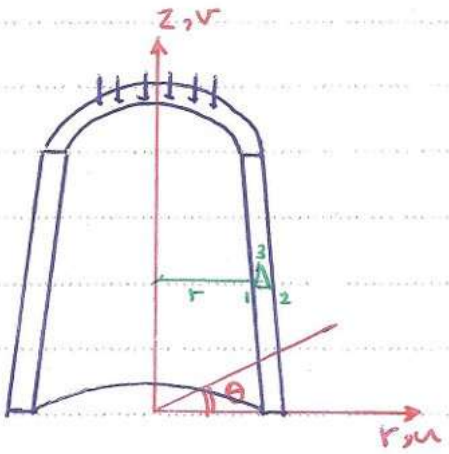
بیان شده است که مسئله متقارن محوری است. لذا به دلیل صفر شدن دو مؤلفه کرنشی $\gamma_{r\theta}$ و $\gamma_{z\theta}$ و همچنین ثابت بودن مقدار $\varepsilon_{\theta\theta}$، مسئله می‌تواند به یک مسئله دو بعدی تبدیل شده، و به راحتی حل شود. یک بعد از تغییر شکل به صورت زیر در می‌آید

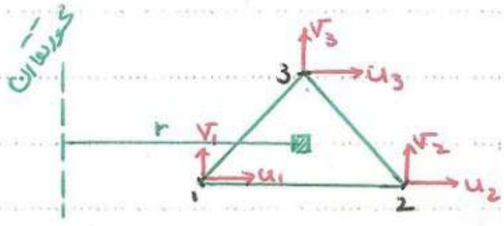
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

ولذا بردار کرنش از 6×1 به 4×1 تبدیل می‌شود و تنها 4 مؤلفه خواهد داشت.

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{1,r} & 0 & S_{2,r} & 0 & S_{3,r} & 0 \\ S_1/r & 0 & S_2/r & 0 & S_3/r & 0 \\ 0 & S_{1,z} & 0 & S_{2,z} & 0 & S_{3,z} \\ S_{1,z} & S_{1,r} & S_{2,z} & S_{2,r} & S_{3,z} & S_{3,r} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{U}} \Rightarrow \underset{\sim}{\varepsilon}_{4\times1} = \underset{\sim}{B}_{4\times6}\,\underset{\sim}{U}_{6\times1}$$

با مقطع زدن داریم:





$$\begin{cases} u = S_1u_1 + S_2u_2 + S_3u_3 \\ v = S_1v_1 + S_2v_2 + S_3v_3 \end{cases}$$

توابع شکلی همان توابع حالت دو بعدی هستند با این تفاوت x و y به ترتیب به r و z تغییر یافته‌اند. داریم:

$$S_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i r + \gamma_i z)$$

$$\alpha_i = r_j z_k - r_k z_j \quad ; \quad \beta_i = z_j - z_k \quad ; \quad \gamma_i = r_k - r_j$$

$$\underset{\sim}{k}^{(e)}_{6\times6} = \int_V \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, dV \quad ; \quad dV = 2\pi r\, dr\, dz$$

یک حلقه به جای المان $dr\,dz$ داریم که حول یک محور به شعاع r دوران می‌کند

با توجه به درجات آزادی، ماتریس سختی یک ماتریس 6×6 خواهد بود.

subject: Finite Element

صفحه ۳۷۱ کتاب [illegible]

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\varepsilon}_{4\times1} = \underset{\sim}{B}_{4\times6}\, \underset{\sim}{\nu}_{6\times1}$$

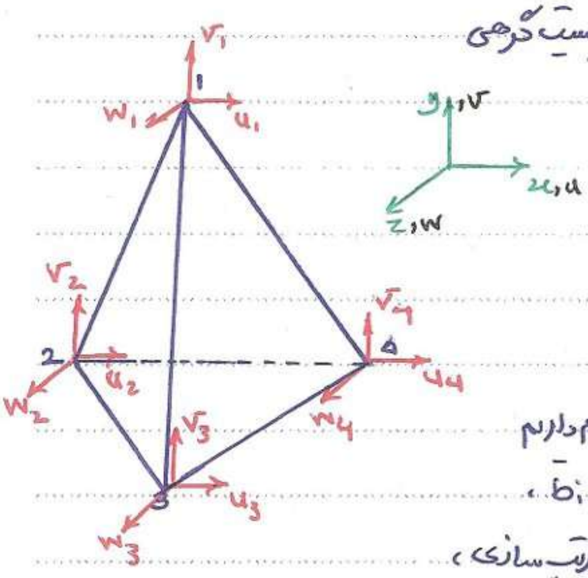
المان‌های سه‌بعدی:

المان‌های سه‌بعدی هم به نوعی همان سه‌بعدی شدن المان‌های دوبعدی اند. المان‌های سه‌بعدی شامل دو دسته‌ی کلی هستند: ۱- المان‌های هرمی ۲- المان‌های آجری (=مکعبی)

در اینجا هم المان‌های سه‌بعدی حرارتی داریم و المان‌های سه‌بعدی سازه‌ای.

در المان‌های حرارتی، برای هر گره یک درجه آزادی، و در المان‌های سازه‌ای سه درجه آزادی u، v و w در هر گره داریم.

* المان‌های هرمی: ۱- ۴ گره‌ای ۲- ۱۰ گرهی
* المان‌های آجری: ۱- هشت گرهی ۲- بیست گرهی



$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$
$$v = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z$$
$$w = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

در اینجا هم 12 تا ضریب داریم که مجهول‌اند و 12 مقدار معلوم هم داریم (u، v و w برای هر گره معلوم‌اند). با جایگذاری، a_i، b_i، c_i بدست می‌آیند و بعد از بدست آوردن این ضرایب و مرتب‌سازی، توابع شکل بدست می‌آیند:

$$N_i = \frac{1}{6V}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \delta_i z)$$ توابع شکل المان‌های هرمی ۴ گرهی

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad \beta_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

subject: Finite Element

$$\gamma_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} \qquad \delta_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

$i \to j \to k \to l$

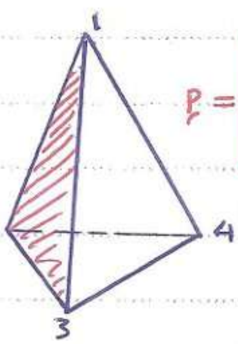
$$\begin{cases} u = S_1u_1 + S_2u_2 + S_3u_3 + S_4u_4 \\ v = S_1v_1 + S_2v_2 + S_3v_3 + S_4v_4 \quad \Rightarrow \\ w = S_1w_1 + S_2w_2 + S_3w_3 + S_4w_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} S_i & 0 & 0 \\ 0 & S_i & 0 \\ 0 & 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \underbrace{\begin{bmatrix} S_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & S_{i,z} \\ S_{i,y} & S_{i,x} & 0 \\ 0 & S_{i,z} & S_{i,y} \\ S_{i,z} & 0 & S_{i,x} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{B}_i} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B}_i = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & \delta_i \\ \gamma_i & \beta_i & 0 \\ 0 & \delta_i & \gamma_i \\ \delta_i & 0 & \beta_i \end{bmatrix} = cte$$

$$\underset{\sim}{k}^{(e)}_{12\times12} = \int_V \underset{\sim}{B}^T_{12\times6}\, \underset{\sim}{D}_{6\times6}\, \underset{\sim}{B}_{6\times12}\, dV = \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, V$$



$$\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

روی سطح هاشورزده نیرو وارد می‌شود. داریم:

$$\underset{\sim}{F}^{(e)} = \int_A \underset{\sim}{S}\, P\, dA \quad ;$$

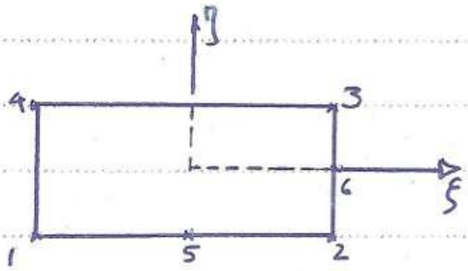
subject: Finite Element

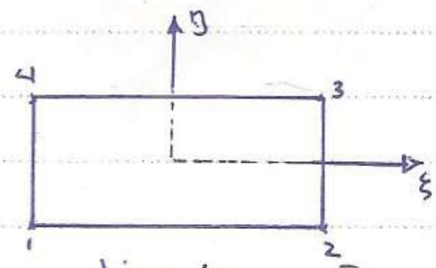
$$\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \rightarrow F_1 = \frac{A_{1-2-3}}{3} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{F} = \frac{A_{1-2-3}}{3} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ \vdots \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}_{12\times 1}$$

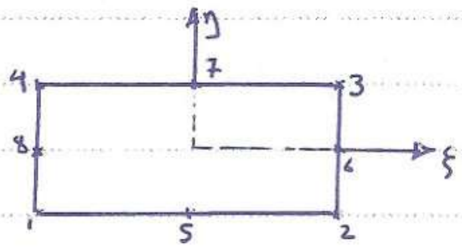
در المان سه بعدی هرمی چهارگرهی، مختصات Global دیگر مناسب نبوده و از مختصات بی بعد حجمی (مشابه بی بعد سطحی) استفاده می‌شود.

Transitional Degrading Finite Element

المان های محدود انتقالی - تنزلی:







این المان‌ها حالتی بین المان‌های خطی و درجه 2 می‌باشند. هدف محاسبه‌ی توابع شکل برای چنین المان‌هایی است.

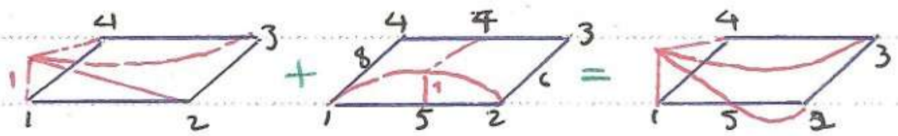
$S_4 = \hat{S}_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$ ، المان 4 گرهای

$S_2 = \bar{S}_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$ المان هشت گرهای

$S_5 = \bar{S}_5 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$

$S_6 = \bar{S}_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$

حال برای گره‌های 1 و 2 هم از سوپرپوزیشن استفاده کرده و تغییر شکل واحدی در گره 1 میدهیم و از سوپرپوزیشن به نحوی استفاده می‌کنیم در سایر گره‌ها مقدار تابع شکل صفر شود:



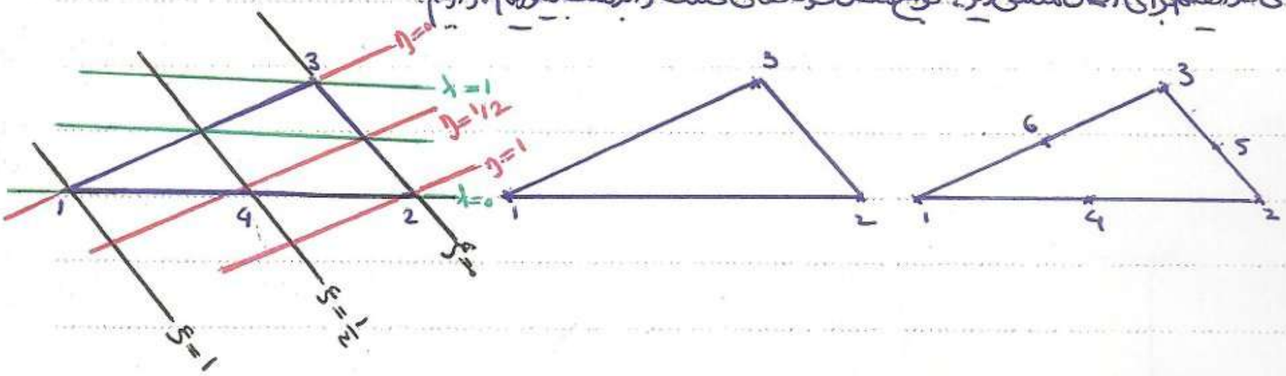
subject: Finite Element

$$S_1 = \hat{S}_1 - \frac{1}{2}\hat{S}_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$
$$= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-1-\xi) = -\xi/4(1-\xi)(1-\eta)$$

حالا برای کاهش S_3 داریم:

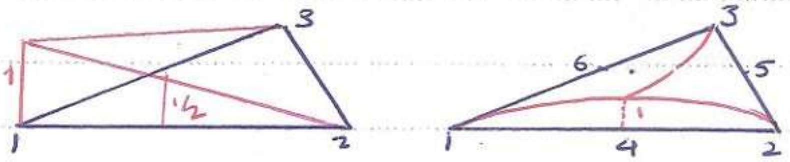
$$S_3 = \hat{S}_3 - \frac{1}{2}\hat{S}_6 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)$$
$$= \frac{\eta}{4}(1+\eta)(1+\xi)$$

حالا می‌خواهیم برای المان مثلثی زیر، توابع شکل گره‌های مختلف را بدست بیاوریم. داریم:



$$S_3 = \hat{S}_3 = \lambda = 1-\xi-\eta$$
$$S_4 = \hat{S}_4 = 4\xi\eta$$

برای گره ۱، داریم:



$$S_2 = \hat{S}_2 - \frac{1}{2}\hat{S}_4 = \eta - 2\xi\eta = \eta(1-2\xi)$$