

گرامیک از توابع دارد شده در بازه های تعریف شده پیوسته تکه ای هستند.

a) $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; 1 < x < 2 \end{cases}$

پیوسته تکه ای هست

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & ; -1 < x < 0 \\ \frac{1}{x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$

در $x=0$ ناپوستگی از نوع بی نهایت دارد پیوسته تکه ای نیست

c) $f(x) = \begin{cases} 2 & ; 0 < x < 1 \\ x^2 & ; 1 < x < 2 \end{cases}$

پیوسته تکه ای هست

d) $f(x) = \begin{cases} 1-x & ; -1 < x < 2 \\ \frac{x}{2-x} & ; 2 < x < 3 \end{cases}$

در $x=2$ ناپوستگی از نوع بی نهایت دارد پیوسته تکه ای نیست

۲- گرامیک از توابع زیر زوج، فرد، یا نه زوج و نه فرد هستند. فرد $f(-x) = -f(x)$ زوج $f(x) = f(-x)$

a) $x + 2x^2 + 3x^3$ $f(-x) = -x + 2(-x)^2 + 3(-x)^3 = -x + 2x^2 - 3x^3$ زوج و فرد

$f(x) = x \ln x$ $f(-x) = (-x) \ln(-x)$ دامه نظریتم (معدوم) است یعنی تابع زوج است و فرد

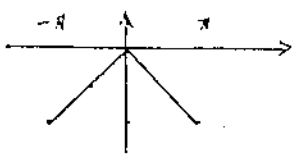
$f(x) = \frac{1}{x}$ $f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x)$ فرد است

$f(x) = \sinh x$ $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$ فرد است

$f(x) = e^x$ $f(-x) = e^{-x}$ زوج و فرد

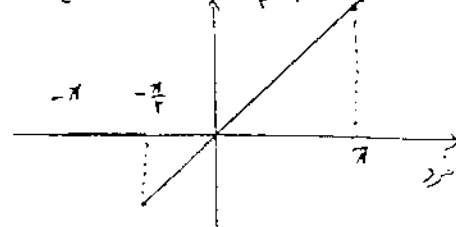
$f(x) = e^{|x|}$ $f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|}$ زوج

b) $f(x) = \begin{cases} x & ; -\pi < x < 0 \\ -x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$



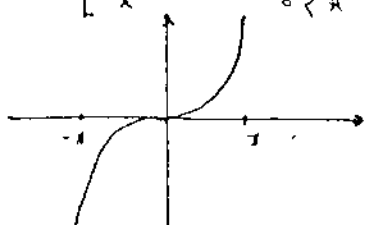
تابع زوج

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & ; -\frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$



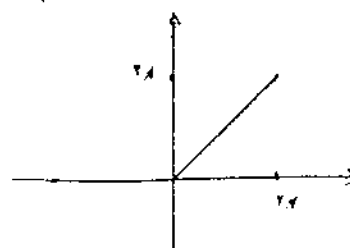
زوج و فرد

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; -\pi < x < 0 \\ x^2 & ; 0 < x < \pi \end{cases}$



تابع فرد

e) $f(x) = |x|$ $0 < x < 2\pi$ زوج و فرد



الف) $\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx$

-۳

پس می توانیم: $\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_{-p}^p f(x) dx$ ① $\int_b^{b+p} f(x) dx = \int_{-p}^p f(x) dx$ ②

①, ② $\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx \Rightarrow \int_a^{a+p} f(x) dx + \int_{a+p}^{a+2p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx + \int_{b+p}^{b+2p} f(x) dx$ *

$\int_{a+p}^{a+2p} f(x) dx = \int_{(a+p)-p}^{(a+2p)-p} f(x-p) dx = \int_a^{a+p} f(x) dx$ (پس متناهی بودن! درستی!)

$\Rightarrow \int_{a+p}^{a+2p} f(x) dx = \int_a^{a+p} f(x) dx$ پس متناهی $\Rightarrow \int_{p+b}^{p+b+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx$

* $\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx \Rightarrow \int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx$

ب) $\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^p f(x) dx + \int_p^{2p} f(x) dx + \int_{2p}^{3p} f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx +$

$\int_0^p f(x) dx + \int_{-p}^0 f(x-p) dx + \int_0^a f(x-p) dx = \int_{-p}^p f(x) dx$

الف) $f(x) = x + \sin x$ $-\pi < x < \pi$ f - سری فوریه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$f(x) = g(x) + \sin x$

$g(x) = x$ $-\pi < x < \pi$ $a_n = 0$ به علت نوبر بودن g

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \Rightarrow \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi}$

$b_n = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1}$ $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \Rightarrow f(x) = \sin x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

$$b) \begin{cases} f(x) = \sin \frac{\pi x}{L} & ; \quad 0 < x < L \\ f(x) = f(-x) & ; \quad -L < x < 0 \end{cases}$$

$b_n = 0$ f به متن زوج بودن

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{\gamma}{L} \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} dx = \frac{\xi}{\pi} \quad , \quad a_1 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{n\pi}{L} x dx \quad n \geq 1$$

$$\gamma \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \Rightarrow \gamma \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x = \sin\left(\frac{1+n}{L}\pi x\right) + \sin\left(\frac{1-n}{L}\pi x\right)$$

$$a_n = \int_0^L \left(\sin\left(\frac{1+n}{L}\pi x\right) + \sin\left(\frac{1-n}{L}\pi x\right) \right) dx = \frac{-L}{\pi(1+n)} \cos\left(\frac{1+n}{L}\pi x\right) \Big|_0^L - \frac{L}{\pi(1-n)} \cos\left(\frac{1-n}{L}\pi x\right) \Big|_0^L$$

$$a_n = \frac{-1}{\pi(1+n)} \left[(-1)^{n+1} - 1 \right] - \frac{1}{\pi(1-n)} \left[(-1)^{1-n} - 1 \right] = -\frac{1}{\pi} \left[(-1)^{n+1} - 1 \right] \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right)$$

$$a_n = \frac{\gamma \left[(-1)^n + 1 \right]}{\pi(1-n^2)} \Rightarrow f(x) = \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\gamma}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1-n^2} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$c) f(x) = \sinh x \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$a_n = 0$ f فرانت پس

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 \sinh x \sin n\pi x dx = \gamma \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{\gamma} \sin n\pi x dx = \int_0^1 e^x \sin n\pi x dx - \int_0^1 e^{-x} \sin n\pi x dx = I_1 - I_2$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) \quad * \text{ به روشی جز به جز می توانیم}$$

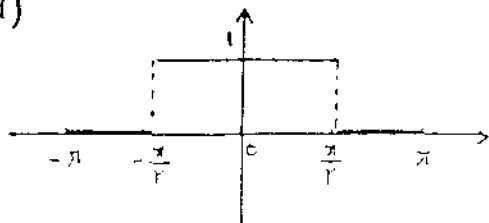
$$I_1 = \frac{e^x}{1 + (n\pi)^2} \left(\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x \right) \Big|_0^1 = \frac{n\pi}{1 + (n\pi)^2} \left(e^1 (-1)^{n+1} + 1 \right)$$

$$I_2 = \frac{e^{-x}}{1 + (n\pi)^2} \left(-\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x \right) \Big|_0^1 = \frac{n\pi}{1 + (n\pi)^2} \left(e^{-1} (-1)^{n+1} + 1 \right)$$

$$I_1 - I_2 = \frac{n\pi}{1 + (n\pi)^2} \left((e^1 - e^{-1}) (-1)^{n+1} \right) = \frac{\gamma n\pi \sinh 1}{1 + (n\pi)^2} (-1)^{n+1} \quad \sinh 1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{\gamma}$$

$$\Rightarrow f(x) = \gamma \sinh 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (-1)^{n+1}}{1 + (n\pi)^2} \sin n\pi x$$

d)



$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x \leq -\frac{\pi}{r} \\ 1 & ; -\frac{\pi}{r} < x < \frac{\pi}{r} \\ 0 & ; \frac{\pi}{r} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

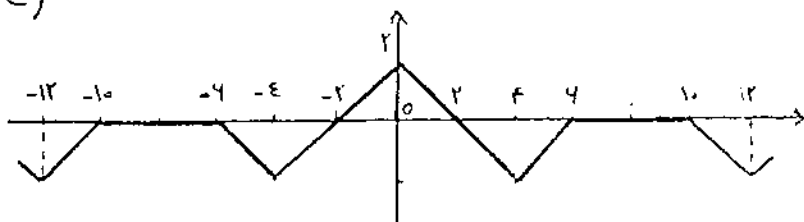
$f(x)$ زوج است
پس $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/r}^{\pi/r} dx = \frac{x}{\pi} \Big|_{-\pi/r}^{\pi/r} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/r}^{\pi/r} \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} \left[\sin nx \right]_{-\pi/r}^{\pi/r} = \frac{r}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{r}$$

$$f(x) = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{r} \cos nx = \frac{1}{r} + \frac{r}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{r} \cos 2x + \frac{1}{r} \cos 3x - \dots \right)$$

e)



$$f(x) = \begin{cases} r-x & ; 0 \leq x < r \\ -4+x & ; r \leq x < 4 \\ 0 & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

$f(x)$ زوج است پس $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{r}{8} \int_0^8 f(x) dx = \frac{r}{8} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_4^8 f(x) dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \left(-\frac{r \times r}{r} \right) + 0 = -\frac{1}{r}$$

$$a_n = \frac{r}{8} \int_0^8 f(x) \cos \frac{n\pi}{8} x dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (r-x) \cos \frac{n\pi}{8} x dx + \frac{1}{2} \int_2^4 (x-4) \cos \frac{n\pi}{8} x dx + 0$$

$$= \frac{1}{2} \left[(r-x) \frac{\lambda}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\lambda} x - \left(\frac{\lambda}{n\pi} \right)^r \cos \frac{n\pi}{\lambda} x \right]_0^2 +$$

$$\frac{1}{2} \left[(x-4) \frac{\lambda}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\lambda} x + \left(\frac{\lambda}{n\pi} \right)^r \cos \frac{n\pi}{\lambda} x \right]_2^4 = \frac{14}{(n\pi)^r} \left[1 - r \cos \frac{n\pi}{r} + \cos \frac{r\pi}{r} \right]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{14}{\pi^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \left(1 - r \cos \frac{n\pi}{r} + \cos \frac{r\pi}{r} \right) \cos \frac{n\pi}{8} x$$

$$f) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad -1 < x < 0 \\ -x & ; \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 -x dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} \cos n\pi x dx + \int_0^1 -x \cos n\pi x dx = -\left[\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2} \cos n\pi x \right]_0^1$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} \sin n\pi x dx + \int_0^1 -x \sin n\pi x dx$$

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = -\frac{1 + (-1)^n}{2\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^2} \cos n\pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n + 1}{2} \sin n\pi x$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi}{8} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

این کار بردن سری فوری

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0 dx = 1 \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos n\pi x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\pi x = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \text{طبق قضیه میرابله}$$

$$n = \pi \Rightarrow \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \pi - \frac{1}{2} \cos 2\pi + \frac{1}{3} \cos 3\pi - \dots \right) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 0$$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots \right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \frac{\pi}{8}$$

(4) سری فوریه کسینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < x < \frac{L}{r} \\ 1 & ; \quad \frac{L}{r} < x < L \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{r}{L} \int_0^L dx = \frac{r}{L} \times \frac{L}{r} = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{r}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{r}{L} \left[\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x \right]_0^L = \frac{r}{\pi} \left(\frac{-1}{n} \right) \sin \frac{n\pi}{r}$$

$$f(x) = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{r}{\pi} \times \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{r} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{r}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{r} \cos \frac{r\pi}{L} x + \dots \right)$$

$$b) \quad f(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \quad 0 < x < L$$

$$a_0 = \frac{r}{L} \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} dx = \frac{r}{\pi} \left[-\cos \frac{\pi x}{L} \right]_0^L = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{r}{L} \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \left(\frac{L}{2\pi} \cos \frac{r\pi x}{L} \right)_0^L = 0$$

$$a_n = \frac{r}{L} \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{r}{L} \int_0^L \frac{1}{r} \left[\sin(1+n) \frac{\pi x}{L} + \sin(1-n) \frac{\pi x}{L} \right] dx$$

$$= -\frac{1}{L} \left[\frac{L}{\pi(1+n)} \cos(1+n) \frac{\pi x}{L} + \frac{L}{\pi(1-n)} \cos(1-n) \frac{\pi x}{L} \right]_0^L$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right] = \frac{-r \left[(-1)^n + 1 \right]}{\pi (n^2 - 1)}$$

$$f(x) = \frac{r}{\pi} - \frac{r}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos \frac{r\pi x}{L} + \frac{1}{3 \times 5} \cos \frac{2\pi x}{L} + \dots \right)$$

c) $f(x) = \sin x \quad 0 < x < \pi$

$$a_0 = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r} [\sin(1+n)x + \sin(1-n)x] \, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{1+n} + \frac{(-1)^{n+1}}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{r}{1-n^2} [(-1)^n + 1]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{\cos 2x}{1-r^2} + \frac{\cos 4x}{1-r^4} + \dots \right)$$

d) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ r-x & ; \quad 1 < x < r \end{cases}$

$$a_0 = \frac{r}{r} \int_0^r f(x) \, dx = \int_0^1 x \, dx + \int_1^r (r-x) \, dx = 1$$

$$a_n = \frac{r}{r} \int_0^1 x \cos \frac{n\pi}{r} x \, dx + \frac{r}{r} \int_1^r (r-x) \cos \frac{n\pi}{r} x \, dx$$

$$= \left[\frac{r}{n\pi} x \sin \frac{n\pi}{r} x + \left(\frac{r}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{r} x \right]_0^1 +$$

$$\left[r x \frac{r}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{r} x - \frac{r}{n\pi} x \sin \frac{n\pi}{r} x - \left(\frac{r}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{r} x \right]_1^r$$

$$= \left[\frac{r}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{r} + \left(\frac{r}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{r} - \left(\frac{r}{n\pi} \right)^2 + \frac{r}{n\pi} \sin n\pi - \frac{r}{n\pi} \sin n\pi - \left(\frac{r}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi \right. \\ \left. - \frac{r}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{r} + \frac{r}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{r} + \left(\frac{r}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{r} \right] = \left(\frac{r}{n\pi} \right)^2 \left(2 \cos \frac{n\pi}{r} - \cos n\pi \right)$$

اگر n فرد باشد $a_n = 0$ است. همچنین اگر n مضرب ۲ باشد داریم $a_n = 0$ در غیر این دو صورت $a_n = -\frac{14}{(n\pi)^2}$

$$f(x) = \frac{1}{r} + \frac{r}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{r} - \cos n\pi - 1 \right) \cos \frac{n\pi}{r} x$$

$$f(x) = \frac{1}{r} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cos((n+1)\pi x)$$

مجموعه اول و دوم و ... را بنویسید

✓

✓ سری فوریه سینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را بدست آورید؟

a) $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < \frac{L}{r} \\ L-x & ; \frac{L}{r} < x < L \end{cases}$

برای تمام توابع این سوال $a_n = 0$ است.

$$b_n = \frac{r}{L} \int_0^{L/r} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx + \frac{r}{L} \int_{L/r}^L (L-x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$= \frac{r}{L} \left[-x \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{L} x \right]_0^{L/r} -$$

$$\frac{r}{L} \left[(L-x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{L} x \right]_{L/r}^L$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sum L}{x^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(r n - 1)^r} \sin (r n - 1) \frac{\pi}{L} x$$

b) $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 1 \\ r-x & ; 1 < x < r \end{cases}$

حالت خاص $a = 2$ $L = 1$ می باشد پس داریم:

$$f(x) = \frac{\sum x r}{x^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(r n - 1)^r} \sin (r n - 1) \frac{\pi x}{r}$$

c) $f(x) = \cos r x$ $0 < x < \pi$

$$b_n = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \cos r x \sin n x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+r)x + \sin(n-r)x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi(n+r)} \cos(n+r)x \right]_0^{\pi} + \left[-\frac{1}{\pi(n-r)} \cos(n-r)x \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+r} - 1}{\pi(n+r)} - \frac{(-1)^{n-r} - 1}{\pi(n-r)}$$

$$= \frac{r n [1 + (-1)^{n+1}]}{\pi(n^2 - r^2)}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{\pi} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^2 - r^2} x n \sin n x = \frac{r}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1-r^2} + \frac{r \sin r x}{r^2 - r^2} + \dots \right]$$

d) $f(x) = x^r$; $0 < x < \pi$

$$b_n = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} x^r \sin nx \, dx = \frac{r}{\pi} \left(-\frac{x^r}{n} \cos nx + \frac{rx}{n^2} \sin nx + \frac{r}{n^2} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \left(-\frac{\pi^r}{n} (-1)^n + \frac{r}{n^2} (-1)^n - \frac{r}{n^2} \right) \frac{r}{\pi} = \left(\frac{r^2}{n} (-1)^{n+1} + \frac{r}{n^2} ((-1)^n - 1) \right) \frac{r}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{r}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{\pi^r}{n} + \frac{r}{n^2} [(-1)^n - 1] \right] \sin nx$$

۱- هرگاه $f(x) = \cos \mu x$ در آن μ عددی غیر صحیح است. آنکاه نشان دهید:

$$f(x) = \frac{\mu}{\pi} \sin \mu x \left\{ \frac{1}{r\mu^r} + \frac{\cos x}{1-\mu^r} - \frac{\cos 2x}{r^2-\mu^r} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^r-\mu^r} + \dots \right\}$$

$$\cos \mu x = \frac{\mu}{\pi} \left\{ \frac{1}{r\mu^r} + \frac{1}{\mu^r-1} + \frac{1}{\mu^r-r^2} + \dots + \frac{1}{\mu^r-n^r} + \dots \right\}$$

(با شرط استیخ لید)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r-1} = \frac{1}{r} - \frac{\pi}{18}$$

(صحت نشان دهید)

$$a_0 = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \mu x \, dx = \frac{r}{\mu} \sin \mu x \quad b_n = 0$$

(توجه: زوج است و برابر)

$$a_n = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \mu x \cos nx \, dx = \frac{r}{\pi} \times \frac{1}{r} \int_0^{\pi} [\cos(\mu+n)x + \cos(\mu-n)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\mu+n} \sin(\mu+n)x + \frac{1}{\mu-n} \sin(\mu-n)x \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\mu+n} \sin(\mu\pi + n\pi) + \frac{1}{\mu-n} \sin(\mu\pi - n\pi) \right]$$

$$= \frac{\sin \mu\pi \cos n\pi}{\pi} \left[\frac{1}{\mu+n} + \frac{1}{\mu-n} \right] = \frac{r\mu \sin \mu\pi}{\pi(n^r-\mu^r)} (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{r\mu \sin \mu x}{\pi} \left[\frac{1}{r\mu^r} + \frac{\cos x}{1-\mu^r} - \frac{\cos 2x}{r^2-\mu^r} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^r-\mu^r} + \dots \right]$$

(ب) اگر $x = \pi$ طرف:

$$\cos \mu \pi = \frac{r \mu}{\pi} \sin \mu \pi \left[\frac{1}{r \mu^2} + \frac{\cos \mu \pi}{1 - r \mu^2} - \frac{\cos 2 \mu \pi}{1 - r \mu^2} + \dots \right]$$

$$= \frac{r \mu}{\pi} \sin \mu \pi \left[\frac{1}{r \mu^2} + \frac{-1}{1 - r \mu^2} + \frac{-1}{r \mu^2} + \dots + \frac{-1}{r \mu^2} + \dots \right]$$

$$\cot \mu \pi = \frac{\cos \mu \pi}{\sin \mu \pi} = \frac{r \mu}{\pi} \left[\frac{1}{r \mu^2} + \frac{1}{1 - r \mu^2} + \frac{1}{r \mu^2} + \dots + \frac{1}{r \mu^2} + \dots \right]$$

(ج) $\mu = \frac{1}{r} \Rightarrow$

$$\cot \frac{\pi}{r} = \frac{r}{\pi} \left[\frac{r}{r} + \frac{r}{1 - r} + \frac{r}{1 - r^2} + \dots + \frac{r}{1 - r^{2n-1}} + \dots \right]$$

$$\frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - r^{2n}} \right] \Rightarrow \frac{\sqrt{r}}{1} = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - r^{2n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2n} - 1} = \frac{1}{r} - \frac{\sqrt{r}}{1}$$

اگر ثابت کنیم برای $\pi < x < \pi - \alpha$ (الف) که در آن α خیر صیحات

$$\sin a x = \frac{r \sin a \pi}{\pi} \left(\frac{\sin a x}{r^2 - a^2} - \frac{r \sin 2 a x}{r^2 - a^2} + \frac{r \sin 3 a x}{r^2 - a^2} - \dots \right)$$

(ب)

$$x \cos a x = -\frac{1}{r} \sin a x + r \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{r^2 - 1} \sin n a x$$

(الف) فرض است $a_0 = a_n = 0$ و

$$b_n = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \sin a x \sin n x \, dx$$

$$= \frac{1}{r} \times \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (a-n)x - \cos (a+n)x \, dx = \frac{1}{r} \left[\frac{\sin (a-n)x}{a-n} - \frac{\sin (a+n)x}{a+n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{\sin \pi - n \pi}{a-n} - \frac{\sin \pi + n \pi}{a+n} \right] = \frac{\sin \pi \cos n \pi}{r} \left[\frac{1}{a-n} - \frac{1}{a+n} \right]$$

$$= \frac{r \sin a \pi}{\pi} \times \frac{n(-1)^n}{(a^2 - n^2)}$$

$$\Rightarrow \sin a x = \frac{r \sin a \pi}{\pi} \left[\frac{1}{1 - a^2} \sin a x - \frac{1 \sin 2 a x}{r^2 - a^2} + \frac{r \sin 3 a x}{r^2 - a^2} - \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \sin nx \, dx && \text{و } a_n = a_{-n} = 0 \text{؟ برای فرماتین داریم} \\
 &= \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r} [x \sin(n+1)x + x \sin(n-1)x] \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(n+1)x}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \sin(n+1)x - \frac{x \cos(n-1)x}{n-1} + \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2} \right] \\
 &= \left[\frac{(-1)^n}{n+1} + 0 + \frac{\pi(-1)^n}{n-1} + 0 + 0 - 0 + 0 - 0 \right] \frac{1}{\pi} = \frac{r_n (-1)^n}{n^2 - 1} \quad n \neq 1
 \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{\pi}$$

$$f(x) = x \cos x = -\frac{1}{\pi} \sin x + r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \sin nx$$

$$\int_{-l}^l [f(x)]^r \, dx = L \left(\frac{a_0^r}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^r + b_n^r) \right) \quad \text{۱- ثابت نیدر (فرمول پارون)}$$

در این فرمول a_n و b_n ضرایب اریتر سریا خرم تابع $f(x)$ هستند.

$$\text{پارون: } f(x) = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kn + b_n \sin kn$$

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

$$f(x)^r = \frac{a_0^r}{r} + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kn + b_n \sin kn + \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kn + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kn \right]$$

$$\int_{-l}^l f(x)^r \, dx = A + B + C \quad A = \int_{-l}^l \frac{a_0^r}{r} \, dx = \frac{a_0^r}{r} l$$

$$\begin{aligned}
 B &= \int_{-l}^l \left(a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kn + b_n \sin kn \right) \, dx = \int_{-l}^l \left(a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \, dx \\
 &= a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx + \int_{-l}^l b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \right) = 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$C = \int_{-l}^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kn + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kn \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos kn + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kn \right] \, dx$$

$$= \int_{-l}^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x \right)^r dx + r \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x dx + \int_{-l}^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x \right)^r dx$$

$$= \bar{I}_1 + \bar{I}_r + \bar{I}_r \quad \bar{I}_1 = \int_{-l}^l (a_1 \cos \frac{\pi}{l} x + a_2 \cos \frac{2\pi}{l} x + \dots) (a_1 \cos \frac{\pi}{l} x + a_2 \cos \frac{2\pi}{l} x + \dots) dx$$

عبارت زیر انتگرال \bar{I}_1 از ضرب عبارت $a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$ و $a_m \cos \frac{m\pi}{l} x$ حاصل می شود دو حالت در (اول) برابر.

حالت اول $m=n \Rightarrow \int_{-l}^l a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot a_n \cos \frac{n\pi}{l} x dx = a_n^r \int_{-l}^l \cos^r \frac{n\pi}{l} x dx = a_n^r \cdot l$

حالت دوم $m \neq n \Rightarrow \int_{-l}^l a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot a_m \cos \frac{m\pi}{l} x dx = a_n a_m \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0$

با توجه به روابط فنوسی از کتاب سیدمر

$$\Rightarrow \bar{I}_1 = l \sum_{n=1}^{\infty} a_n^r$$

$$\bar{I}_r = r \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x = r \int_{-l}^l (a_1 \cos \frac{\pi}{l} x + a_2 \cos \frac{2\pi}{l} x + \dots) (b_1 \sin \frac{\pi}{l} x + \dots) dx$$

$$= r \int_{-l}^l \sum_{m,n=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi}{l} x \cdot b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = r \sum_{m,n=1}^{\infty} \int_{-l}^l a_m b_n \cos \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = r \times 0 = 0$$

$$\bar{I}_r = \int_{-l}^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x \right)^r dx = \int_{-l}^l (b_1 \sin \frac{\pi}{l} x + b_2 \sin \frac{2\pi}{l} x + \dots) (b_1 \sin \frac{\pi}{l} x + b_2 \sin \frac{2\pi}{l} x + \dots) dx$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l b_n^r \sin^r \frac{n\pi}{l} x dx}_{n=m} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n b_m \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \sum_{n=1}^{\infty} l b_n^r + 0$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^l f(x) dx = A + B + C = \frac{a_0^r}{r} l + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} l (a_n^r + b_n^r) = l \left(\frac{a_0^r}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^r + b_n^r) \right)$$

$$\ln\left(r \sin \frac{x}{r}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

نات لیدر (الف)

درجه به سبب n از زایمات صریحاً 1 دارد

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$z = -e^{ix} \rightarrow \ln(1 - e^{ix}) = -e^{ix} - \frac{(-e^{ix})^2}{2} + \frac{(-e^{ix})^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1 - e^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} (\cos nx + i \sin nx)$$

$$r \sin \frac{x}{r} = r \left(\frac{e^{i\frac{x}{r}} - e^{-i\frac{x}{r}}}{2i} \right) = i e^{-i\frac{x}{r}} (1 - e^{ix})$$

$$\ln\left(r \sin \frac{x}{r}\right) = \ln\left(i e^{-i\frac{x}{r}} (1 - e^{ix})\right)$$

$$\operatorname{Re}\left[\ln i e^{-i\frac{x}{r}} (1 - e^{ix})\right] = \operatorname{Re}\left(\ln i e^{-i\frac{x}{r}} + \ln(1 - e^{ix})\right) = \ln(1 - e^{ix})$$

$$\ln\left(r \sin \frac{x}{r}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad 0 < x < \pi$$

$$\ln\left(r \cos \frac{x}{r}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n} \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

در درجه سبب n از زایمات صریحاً 1 دارد

$$\begin{aligned} \ln(1 + e^{ix}) &= e^{ix} - \frac{(e^{ix})^2}{2} + \frac{(e^{ix})^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (ix)^n}{n} e^{ix} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\cos nx + i \sin nx) \end{aligned}$$

$$r \cos \frac{x}{r} = r \left(\frac{e^{i\frac{x}{r}} + e^{-i\frac{x}{r}}}{2} \right) = (e^{ix} + 1) e^{-i\frac{x}{r}}$$

$$\operatorname{Re}\left[\ln\left(e^{i\frac{x}{r}} (1 + e^{ix})\right)\right] = \frac{ix}{r} + \ln(1 + e^{ix}) = \ln(1 + e^{ix})$$

a) $f(x) = \begin{cases} x & ; & 0 < x < a \\ 0 & ; & x > a \end{cases}$ $f(-x) = f(x)$ (۱۴) انتگرال فوری هر یک از توابع زوج و فرد:

$B(\omega) = 0$ تابع زوج است بنابراین داریم:

$$A(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^a x \cos \omega x \, dx = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{x}{\omega} \sin \omega x + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega x \right) \Big|_0^a$$

$$= \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{a}{\omega} \sin a\omega + \frac{1}{\omega^2} \cos a\omega - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{a \sin a\omega}{\omega} + \frac{\cos a\omega - 1}{\omega^2} \right] \cos \omega x \, d\omega$$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + e^{-rx} & ; & x > 0 \\ f(-x) & ; & x < 0 \end{cases}$ $B(\omega) = 0$ تابع زوج است

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{-x} + e^{-rx}) \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \omega x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-rx} \cos \omega x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-x}}{1+\omega^2} (-\cos \omega x + \omega \sin \omega x) + \frac{e^{-rx}}{\xi + \omega^2} (-r \cos \omega x + \omega \sin \omega x) \right] \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[(0 + 0) - \left(\frac{1}{1+\omega^2} \times (-1) + \frac{1}{\xi + \omega^2} \times (-r) \right) \right] = \frac{\gamma}{\pi} \times \frac{\gamma + \omega^2}{\xi + \omega^2 + \omega^2}$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma + \omega^2}{\xi + \omega^2 + \omega^2} \cos \omega x \, d\omega$$

c) $f(x) = \begin{cases} x^r & ; & 0 < x < a \\ 0 & ; & x > a \end{cases}$ $f(x) = f(-x)$ $B(\omega) = 0$ تابع زوج است

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^a x^r \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^r}{\omega} \sin \omega x + \frac{r x \cos \omega x}{\omega^2} - \frac{r}{\omega^2} \sin \omega x \right] \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{a^r}{\omega} \sin a\omega + \frac{r a}{\omega^2} - \frac{r}{\omega^2} \sin a\omega - 0 \right]$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(a^r - \frac{r}{\omega^2} \right) \sin a\omega + \frac{r a}{\omega} \cos a\omega \right] \frac{\cos \omega x}{\omega} \, d\omega$$

a) $f(bx) = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} a\left(\frac{w}{b}\right) \cos wx \, dw$; $b > 0$ فرض کنیم $f(-x) = f(x)$ را داشته باشیم

$f(x) = \int_0^{\infty} a(w) \cos wx \, dw$, $a(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \cos wu \, du = a(w)$

$f(x) = \int_0^{\infty} a(w) \cos wx \, dw \xrightarrow{u=bx} f(bx) = \int_0^{\infty} a(w) \cos wbx \, dw$

$wb = w' \Rightarrow b \, dw = dw'$

$\Rightarrow f(bx) = \int_0^{\infty} a\left(\frac{w'}{b}\right) \cos w'x \frac{dw'}{b} = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} a\left(\frac{w'}{b}\right) \cos w'x \, dw'$

b) $x^r f(x) = \int_0^{\infty} a^*(w) \cos wx \, dw$, $a^* = -\frac{d^r a}{dw^r}$

$\int_0^{\infty} a^*(w) \cos wx \, dw = \int_0^{\infty} -\frac{d^r}{dw^r} a(w) \cos wx \, dw = -\int_0^{\infty} a''(w) \cos wx \, dw$

پس با استفاده از انتگرال جزئی داریم: $\int_0^{\infty} a''(w) \cos wx \, dw = \left[a'(w) \cos wx \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-x \sin wx) a'(w) \, dw$

* $\Rightarrow \int_0^{\infty} a^*(w) \cos wx \, dw = -\left[\left[a'(w) \cos wx \right]_0^{\infty} + a(w) x \sin wx \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x^r a(w) \cos wx \, dw$

$= \left[-a'(w) \cos wx \right]_0^{\infty} - \left[a(w) x \sin wx \right]_0^{\infty} + x^r \int_0^{\infty} a(w) \cos wx \, dw = I_1 + I_2 + x^r I$

با فرض $I_1 = I_2 = 0$ در صورتی که

$I_1 = \left[-a'(w) \cos wx \right]_0^{\infty} = 0$, $I_2 = 0$

در این صورت

$a^*(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x^r f(x) \cos wx \, dx$ *

$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx \xrightarrow{\text{تفاضل نسبت به } w} a'(w) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x f(x) \sin wx \, dx$

$a''(w) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x^2 f(x) \cos wx \, dx \xrightarrow{*} a''(w) = -a^*(w) \Rightarrow a^*(w) = -\frac{d^2 a}{dw^2}$

a) $\int_0^{\infty} \frac{w^r \sin wx}{w^2 + \varepsilon} dw = \frac{\pi}{r} e^{-\varepsilon x} \cos \varepsilon x$; $x > 0$, $f(x) = -f(-x)$; $x < 0$ ثابت است -14

if $f(-x) = -f(x) \Rightarrow a(w) = 0$, $f(x) = \int_0^{\infty} b(w) \sin wx dw$

فرض: $b(w) = \frac{w^r}{w^2 + \varepsilon}$, $\int_0^{\infty} b(w) \sin wx dw = f(x) \Rightarrow b(w) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx$

$b(w) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{r} e^{-x} \cos \varepsilon x \cdot \sin wx dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \varepsilon x \cdot \sin wx dx = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} e^{-x} (\sin(w+1)x + \sin(w-1)x)$

$\Rightarrow r b(w) = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(w+1)x dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(w-1)x dx$

$r b(w) = \frac{e^{-x}}{1+(w+1)^2} \left[-\sin(w+1)x - (w+1) \cos(w+1)x \right]_0^{\infty} +$

$\frac{e^{-x}}{1+(w-1)^2} \left[-\sin(w-1)x - (w-1) \cos(w-1)x \right]_0^{\infty}$

$\Rightarrow r b(w) = \frac{w+1}{1+(w+1)^2} + \frac{w-1}{1+(w-1)^2} = \frac{r w^r}{w^2 + \varepsilon} \Rightarrow b(w) = \frac{w^r}{w^2 + \varepsilon}$

مترجمه را بنویسید *
سنت سوال ۴ دارم؟

b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{x}{r} w) \cos wx}{1-w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{r} \cos \varepsilon x & ; |x| < \frac{\pi}{r} \\ 0 & ; |x| > \frac{\pi}{r} \end{cases}$

if $f(-x) = f(x) \Rightarrow b(w) = 0$, $f(x) = \int_0^{\infty} a(w) \cos wx dw$

$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{x}{r} w)}{1-w^2} \cos wx dw = \int_0^{\infty} a(w) \cos wx dw = f(x) \Rightarrow a(w) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx$

$a(w) = \frac{\cos \frac{x}{r} w}{1-w^2}$; $a(w)$ در اینجا برهان این است که اگر $f(x)$ است راست b باشد آنگاه $a(w)$

$a(w) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx = \frac{r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{r}} \frac{\cos \frac{x}{r} w}{1-w^2} \cos wx dx = \frac{1}{r} \int_0^{\frac{\pi}{r}} (\cos(w+1)x + \cos(w-1)x) dx$

$= \frac{1}{r(w+1)} \sin(w+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{r(w-1)} \sin(w-1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{r}} = \frac{\sin(w+1)\frac{\pi}{r}}{r(w+1)} + \frac{\sin(w-1)\frac{\pi}{r}}{r(w-1)}$

$= \frac{-r \cos w \frac{\pi}{r}}{r(w^2-1)} = \frac{\cos w \frac{\pi}{r}}{1-w^2}$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \cos w x}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < 1 \\ \frac{\pi}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$ $f(-x) = f(x)$ $-\infty < x < \infty$

$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{\pi} \cos w x dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cos w x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi x \cos w x dx = \frac{\sin w}{w}$

if $x=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \cos w}{w} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2w}{2w} dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{1} = \frac{\pi}{2}$

سری فوریه محظوظ هر یک از توابع زیر را با یکدیگر کند آن سری فوریه حتی ساطر آنرا تعیین کند

a) $f(x) = e^{rx}$ $-\pi < x < \pi$; $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{r+in}{2+n^2} (-1)^n \sinh r\pi e^{inx}$

$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{rx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(r-in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{r-in} (e^{(r-in)\pi} - e^{-(r-in)\pi})$

$e^{inx} = (-1)^n = \cos n\pi + i \sin n\pi \Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{r-in} \times \frac{r+in}{r+in} (e^{r\pi} e^{-in\pi} - e^{-r\pi} e^{in\pi})$

$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{r+in}{2+n^2} \times \pi \times (-1)^n \sinh r\pi$

$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{r+in}{2+n^2} (-1)^n \sinh r\pi e^{inx}$

$a_n = c_n + c_{-n}$

$b_n = i(c_n - c_{-n})$

b) $f(x) = x$; $-\pi < x < \pi$ $\rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx$

$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x}{in} + \frac{1}{in^2} \right) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{\pi}{in} + \frac{1}{in^2} \right) e^{-in\pi} - \left(\frac{\pi}{in} + \frac{1}{in^2} \right) e^{in\pi} \right]$

$= -\frac{\pi}{in} (e^{-in\pi} + e^{in\pi}) + \frac{1}{in^2} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) = \frac{i}{n} (-1)^n$

$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{i}{n} e^{inx}$

$$a) f(x) = \begin{cases} e^{-rx} & ; -x < x < \pi \\ 0 & ; \text{دیگر جاها} \end{cases}$$

-1A

$$c(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-rx} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-e^{-(r+iw)x}}{(r+iw)} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-(r+iw)\pi} - e^{(r+iw)\pi}}{r+iw} \right] = \frac{r-iw}{\pi(r+iw)} \left[\frac{e^{-(r+iw)\pi} - e^{(r+iw)\pi}}{r} \right]$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r-iw}{\pi(r+iw)} \left[\frac{e^{-(r+iw)\pi} - e^{(r+iw)\pi}}{r} \right] e^{iwx} dw$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sinh rx & ; 0 < x < \pi \\ 0 & ; \text{دیگر جاها} \end{cases}$$

$$c(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sinh rx e^{-iwx} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{rx} - e^{-rx}}{2} e^{-iwx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{(r-iw)x} - e^{-(r+iw)x}}{r-iw} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(r-iw)x}}{(r-iw)} - \frac{e^{-(r+iw)x}}{(r+iw)} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(r-iw)\pi} - 1}{r-iw} - \frac{e^{-(r+iw)\pi} - 1}{r+iw} \right]$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(w) e^{iwx} dw$$

۱- آیا تبدیلات لاپلاس و سینوسی سری فوریه تابع $f(x) = e^x$ موجود است.

$$\left| \int_0^{\infty} e^x dx \right| > \infty$$

خیر، زیرا e^x به طور مطلق انتگرال پذیر نیست

۲- $F_s \{ e^{-ax} \}$ را با انتگرال نیوایدست آورید: $a > 0$

$$F_s \{ e^{-ax} \} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin wx dx$$

حامل انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin wx dx$ به روش جزوه جزده قابل محاسب است. بدین ترتیب که

$$I_c = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin wx dx = UV - \int_0^{\infty} v du = \frac{-e^{-ax} \cos wx}{w} - \int_0^{\infty} \frac{a}{w} e^{-ax} \cos wx dx$$

$$u = e^{-ax} \Rightarrow du = -a e^{-ax} dx$$

$$dv = \sin wx dx \Rightarrow v = -\frac{\cos wx}{w}$$

برای I باز هم به روش جزوه جزده خواهیم داشت:

$$I = \frac{a}{w} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos wx dx = UV - \int_0^{\infty} v du = \frac{a}{w^2} e^{-ax} \sin wx + \frac{a^2}{w^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin wx dx$$

$$u = e^{-ax} \Rightarrow du = -a e^{-ax} dx$$

$$dv = \cos wx dx \Rightarrow v = \frac{\sin wx}{w}$$

$$\Rightarrow I_0 = -\frac{1}{w} e^{-ax} \cos wx - \frac{a}{w^2} e^{-ax} \sin wx - \frac{a^2}{w^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin wx dx$$

$$\Rightarrow I_0 = \left[-\frac{1}{w} \left(e^{-ax} \cos wx + \frac{a}{w} e^{-ax} \sin wx \right) \frac{w^2}{a^2 + w^2} \right]_0^{\infty} I_0$$

$$\Rightarrow I_0 = -\frac{w}{a^2 + w^2}$$

$$\Rightarrow F_s \{ e^{-ax} \} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \times \frac{-w}{a^2 + w^2}$$

$$F_c^{-1} \{f(\omega)\} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\omega x} \cos \omega x \, d\omega$$

۲۲. تبدیل کسینوسی وارون تابع $e^{-\omega}$ را بیابید.

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C \quad a = -1 \quad b = 1$$

$$F_c^{-1} \{f(\omega)\} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \left[\frac{e^{-\omega x}}{1 + \omega^2} (-\cos \omega x + x \sin \omega x) \right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \left(0 - \frac{e^0}{1 + \omega^2} (-1) \right) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{1}{1 + \omega^2}$$

$$F_s^{-1} \{\hat{f}(\omega)\} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

۲۳. تبدیل سینوسی طرز (u) را بیابید.

$$F_s^{-1} \{\hat{f}(\omega)\} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos \omega \pi}{\omega} \right) \sin \omega x \, d\omega$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} \, d\omega - \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x \cos \omega \pi}{\omega} \, d\omega$$

از اینجا به بعد $\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \, d\omega = \frac{\pi}{2}$ پس ابتدا در ω ضرب می‌کنیم تا حاصل حل است.

$$= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x \sin \omega x}{\omega x} \, d\omega - \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma \omega} (\sin(\omega + \pi)x + \sin(\omega - \pi)x) \, d\omega$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\infty} x \frac{\sin \omega x}{\omega x} \, d\omega - \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \times \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} (\omega + \pi) \frac{\sin(\omega + \pi)x}{(\omega + \pi)x} + \frac{\sin(\omega - \pi)x}{(\omega - \pi)x} (\omega - \pi) \, d\omega$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \left[x \times \frac{\pi}{\gamma} - \frac{(\omega + \pi)}{\gamma} \times \frac{\pi}{\gamma} - \frac{(\omega - \pi)}{\gamma} \times \frac{\pi}{\gamma} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} (\omega - \pi)$$

$$\Rightarrow F_s^{-1} \{\hat{f}(\omega)\} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} (\omega - \pi)$$

۲- آیا تبدیل لاپلاس خوریه تابع $\frac{\cos x}{x}$ یا $\frac{\sin x}{x}$ موجود است؟

پاسخ: $F_c \left\{ \frac{\cos x}{x} \right\}$ موجود نیست زیرا $\frac{\cos x}{x}$ به طور مطلق انتگرال پذیر نیست. چون در حسابایی راست

صفر مانند $\frac{1}{x}$ عمل می کند و $\int_0^a \frac{1}{x} dx$ $a > 0$ و الی آخر.

پس: $F_c \left\{ \frac{\sin x}{x} \right\}$ موجود است، زیرا $\frac{\sin x}{x}$ مطلقاً انتگرال پذیر و هموار است.

انتگرال متقابل در سوال ۲۸ محاسبه خواهد شد.

$$F_c \left\{ \frac{\sin x}{x} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos \omega x}{x} dx$$

۲۵- تبدیل خوریه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از جدول تبدیلات خوریه بدست آورید.

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$

$$F \{ f(x) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} e^{-(1+i\omega)x}$$

$$\left[= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} (0-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} \right]$$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x & ; x > 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$

$$F \{ f \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^x e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1-i\omega)} e^{(1-i\omega)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(1-i\omega)x}}{1-i\omega} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1-i\omega)} (0-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-i\omega)}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} e^{rix} & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F\{f\} &= \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \left(\int_{-1}^1 e^{rix} e^{-iwx} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{-1}^1 e^{i(r-w)x} dx = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \left[\frac{e^{i(r-w)x}}{i(r-w)} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{r\pi} i(r-w)} \left(e^{i(r-w)} - e^{-i(r-w)} \right) \\ &= \frac{r \sin(r-w)}{\sqrt{r\pi} (r-w)} \quad \left[\left(e^{i(r-w)} - e^{-i(r-w)} \right) = r i \sin(r-w) \right] \quad * \text{نویسید} \end{aligned}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < a \\ 0 & ; \text{بالاترین} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F\{f\} &= \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_0^a x e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \left[-\frac{x}{iw} - \frac{1}{(iw)^2} \right] e^{-iwx} \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \left[\left[-\frac{a}{iw} - \frac{1}{(iw)^2} \right] e^{-iwa} + \frac{1}{(iw)^2} \right] \end{aligned}$$

۲۴ - نشان دهید اگر $f(x)$ دارای تبدیل فوری باشد $f(x-a)$ نیز دارای تبدیل فوری است و

$$F\{f(x-a)\} = e^{-iwa} F\{f(x)\}$$

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx \quad \text{و} \quad F\{f(x-a)\} = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-iwx} dx$$

$$u = x - a \quad x = u + a \quad dx = du$$

$$F\{f(u)\} = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iwx} e^{-iwa} du = \frac{e^{-iwa}}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iwu} du$$

$$u \rightarrow x$$

$$\Rightarrow F\{f(x-a)\} = \frac{e^{-iwa}}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx = e^{-iwa} F\{f(x)\}$$

۲- نشان دهید اگر $\hat{f}(w)$ تبدیل فوری f باشد آن‌گاه $\hat{f}(w-a)$ تبدیل فوری $f(x) e^{iax}$ است.

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx \quad , \quad \hat{f}(w-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(w-a)x} dx$$

$$\Rightarrow \hat{f}(w-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} e^{iax} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) e^{iax}) e^{-iwx} dx = F \left\{ f(x) e^{iax} \right\}$$

۲-۱- انتگرال فوری تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$ را بیابید و بگردان آن انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos ax}{x} dx$ را ارزیابی کنید.

مقادیر توانی a بیابید.

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow b(w) = 0$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(w) \cos wx dw \quad , \quad a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx$$

$$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos wx dx + 0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin wx}{w} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{\pi w} \sin w$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w} \cos wx dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w} dx = \frac{\pi}{2} f(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(a) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; |a| < 1 \\ 0 & ; |a| > 1 \end{cases}$$

if $|a|=1 \Rightarrow$ 1) $a=1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x} dx = \frac{\pi}{2}$

2) $a=-1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos(-x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin xw}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad x > 0 \quad \int_0^{\infty} b(w) \sin xw dw = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{2} e^{-x} \sin xw dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{e^{iwx} - e^{-iwx}}{2i} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \left(e^{-x(1-iw)} - e^{-x(1+iw)} \right) dx = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{iw-1} e^{-x(1-iw)} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1+iw} e^{-x(1+iw)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{iw-1} - \frac{1}{1+iw} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{-1}{iw-1} + \frac{-1}{iw+1} \right) = \frac{-2iw}{2i(i^2w^2-1)} = \frac{w}{1+w^2} = b(w)$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad a \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xw}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

$$a(w) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos xw dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{e^{iwx} + e^{-iwx}}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(e^{-x(1-iw)} + e^{-x(1+iw)} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{iw-1} e^{-x(1-iw)} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+iw} e^{-x(1+iw)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-iw} - \frac{1}{1+iw} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+w^2} = \frac{1}{1+w^2}$$

$$a) F(\omega) = \begin{cases} 1 & ; |\alpha| \leq \pi \\ 0 & ; |\alpha| > \pi \end{cases}$$

۱- تبدیلات فوریه جریب از توابع زیر را بیابید

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i\omega\pi} - e^{-i\omega\pi}}{i\omega} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin \omega\pi}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \omega\pi}{\omega}$$

$$b) F(\omega) = \begin{cases} \alpha^\pi & ; |\alpha| < \alpha_0 \\ 0 & ; |\alpha| > \alpha_0 \end{cases}$$

$$F\{F\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \alpha^\pi e^{-i\omega\alpha} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-\alpha^\pi e^{-i\omega\alpha}}{i\omega} + \frac{\pi \alpha^{\pi-1} e^{-i\omega\alpha}}{i\omega} + \frac{\pi e^{-i\omega\alpha}}{i\omega^2} \right]_{-\alpha_0}^{\alpha_0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-\alpha_0^\pi e^{-i\omega\alpha_0}}{i\omega} + \frac{\pi \alpha_0^{\pi-1} e^{-i\omega\alpha_0}}{i\omega} + \frac{\pi e^{-i\omega\alpha_0}}{i\omega^2} + \frac{\alpha_0^\pi e^{i\omega\alpha_0}}{i\omega} + \frac{\pi \alpha_0^{\pi-1} e^{i\omega\alpha_0}}{i\omega} - \frac{\pi e^{i\omega\alpha_0}}{i\omega^2} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\pi}{\omega} \left[\alpha_0^\pi - \frac{\pi}{\omega^\pi} \right] \sin \omega\alpha_0 + \frac{2\alpha_0}{\omega^\pi} \cos \omega\alpha_0 \right]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^\pi} dx \quad \text{رابطه استاورید و در حد آن} \quad F(\omega) = \begin{cases} 1-x^\pi & ; |\alpha| < 1 \\ 0 & ; |\alpha| > 1 \end{cases}$$

۳- تبدیل فوریه تابع

را محاسبه کنید

$$\sqrt{2\pi} F\{f\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^1 (1-x^\pi) e^{-i\omega x} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi} F\{F\} = \left[\left(-\frac{1}{i\omega} (1-x^\pi) + \frac{\pi x}{(i\omega)^\pi} + \frac{\pi}{(i\omega)^{\pi+1}} \right) e^{-i\omega x} \right]_{-1}^1 \quad (\text{از رابطه استاورید})$$

$$= \left(\frac{r}{(iw)^r} + \frac{r}{(iw)^r} \right) e^{-iw} - \left(\frac{r}{(iw)^r} - \frac{r}{(iw)^r} \right) e^{iw}$$

۲۱ جواب اول

$$= \frac{r}{(iw)^r} (e^{-iw} + e^{iw}) - \frac{r}{(iw)^r} (e^{iw} - e^{-iw}) = \frac{1}{(iw)^r} \cos w - \frac{1}{(iw)^r} i \sin w = -\frac{\cos w}{w^r} + \frac{1}{w^r} \sin w$$

$$\Rightarrow \hat{F}(w) = -\frac{1}{\sqrt{r\pi}} \frac{w \cos w - \sin w}{w^r}$$

$$\text{و } f(x) = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(w) e^{iwx} dw = \frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \cos w - \sin w}{w^r} e^{iwx} dw$$

$$\Rightarrow f(0) = -\frac{1}{\sqrt{r\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \cos w - \sin w}{w^r} dw = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \cos w - \sin w}{w^r} dw = -\sqrt{r\pi}$$

$$g(w) = \frac{w \cos w - \sin w}{w^r} \quad \text{و } g(-w) = \frac{-w \cos(-w) - \sin(-w)}{(-w)^r} = g(w)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(w) dw = -\sqrt{r\pi} \Rightarrow \int_0^{\infty} g(w) dw = \frac{1}{\sqrt{r}} (-\sqrt{r\pi}) = -\pi$$

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

۲۲ تبدیل فوری کسینوس و سینوسی هور از جابج زیر را بنویسید.

$$F_c \{f\} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^1 (1 \times \cos wx) dx = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \times \frac{1}{w} [\sin wx]_0^1 = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \frac{\sin w}{w}$$

$$F_s \{f\} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^1 \sin wx dx = -\frac{1}{w} \sqrt{\frac{r}{\pi}} [\cos wx]_0^1 = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \frac{1 - \cos w}{w}$$

$$b) f(x) = e^{-ax} \quad (a > 0) \quad F_c \{f\} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos wx dx = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \frac{e^{-ax}}{a^2 + w^2} (-a \cos wx + w \sin wx) \Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow F_c \{f\} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \frac{a}{a^2 + w^2}$$

$$F_s \{f\} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin wx dx = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \times \frac{e^{-ax}}{a^2 + w^2} (-a \sin wx - w \cos wx) \Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow F_s \{f\} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \left(0 - \frac{1}{a^2 + w^2} (-a \cos w) \right) = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \left(\frac{w}{a^2 + w^2} \right)$$

۲۲- تبدیل فوریه سینوسی تابع $e^{-|x|}$ را به دست آورید و به کمک آن رابطه زیر را نیز

$$F_s \{ f(x) \} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-|x|} \sin \omega x dx \quad 0 < x < \infty \Rightarrow |x| = x \Rightarrow F_s \{ f \} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x dx$$

$$r \sin \omega x = e^{i\omega x} - e^{-i\omega x} \Rightarrow e^{-x} \sin \omega x = \frac{1}{ri} \left(e^{(i\omega-1)x} - e^{-(i\omega+1)x} \right)$$

$$F_s \{ f \} = \frac{1}{ri} \sqrt{\frac{r}{\pi}} \left[\frac{-1}{(1-i\omega)} e^{-(1-i\omega)x} + \frac{1}{(i\omega+1)} e^{-(i\omega+1)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{ri} \sqrt{\frac{r}{\pi}} \left[0 - \left(\frac{-1}{1-i\omega} + \frac{1}{i\omega+1} \right) \right]$$

$$\Rightarrow F_s \{ f \} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$F_s^{-1} \{ F \} = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega x d\omega = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{r}{\pi}} \frac{\omega}{1+\omega^2} \sin \omega x d\omega = e^{-|x|}$$

یا به عبارتی از ω به x تغییر حاصل می شود و

$$x=m \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin m\omega}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|m|}$$

۳۴- چنانچه $f(x)$ تابعی پیوسته و در $[-\pi, \pi]$ و متناوب با دوره تناوب 2π نیز باشد، آن را به صورت زیر

توابع زیر نیز دارای چنین خاصیتی هستند.

$$g_n(x) = f(x) \frac{\sin \left\{ (n + \frac{1}{r}) x \right\}}{r \sin \frac{x}{r}} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

برهان:

$$\frac{\sin \left((n + \frac{1}{r}) x \right)}{\sin \frac{x}{r}} = \frac{r \sin \left((n + \frac{1}{r}) x \right)}{r \sin \frac{x}{r}} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{r})x} - e^{-i(n+\frac{1}{r})x}}{e^{i\frac{x}{r}} - e^{-i\frac{x}{r}}} =$$

$$\frac{e^{-i\frac{x}{r}} (e^{i(n+1)x} - e^{-inx})}{e^{-i\frac{x}{r}} (e^{ix} - 1)} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{\sum_{k=-n}^n e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{e^{ix} - 1}$$

$$= \frac{\sum_{k=-n}^n e^{ikx} (e^{ix} - 1)}{e^{ix} - 1} = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n e^{ikx} + e^{-ikx} = 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos kx$$

$D_n(x)$ تابعی پیوسته و متناوب است.

$$\Rightarrow D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx$$

$$g(x) = f(x+w) D_n(x+w) \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{r \sin \frac{w}{r}}$$

* در این مرحله اینشان صحیح است (1) و پیوسته است. (2) مقارب است.

$$1) g(x) = f(x+w) D_n(x+w) \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{r \sin \frac{w}{r}} \quad , \quad g(x-w) = f(x) \cdot D_n(x) \frac{\sin \frac{2x}{r}}{r \sin \frac{w}{r}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0^-} g(x) - g(x-w) &= \lim_{w \rightarrow 0^-} f(x+w) D_n(x+w) \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{r \sin \frac{w}{r}} - f(x) D_n(x) \frac{\sin \frac{2x}{r}}{r \sin \frac{w}{r}} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0^-} \left[f(x+w) D_n(x+w) \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{r \sin \frac{w}{r}} - f(x) D_n(x) \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{r \sin \frac{w}{r}} + f(x) D_n(x) \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{r \sin \frac{w}{r}} \right. \\ &\quad \left. - D_n(x) f(x) \frac{\sin \frac{2x}{r}}{r \sin \frac{w}{r}} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{w \rightarrow 0^-} (f(x+w) D_n(x+w) - f(x) D_n(x)) \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{r \sin \frac{w}{r}} + \lim_{w \rightarrow 0^-} f(x) D_n(x) \frac{\sin \frac{w}{r} \cos \frac{w}{r} - \sin \frac{2x}{r}}{r \sin \frac{w}{r}}$$

$$= \lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{f(x+w) D_n(x+w) - f(x) D_n(x)}{w} \cdot \frac{w}{r \sin \frac{w}{r}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{\cos \frac{w}{r}} + f(x) D_n(x) \lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{\sin \frac{w}{r} \cos \frac{w}{r} - \sin \frac{2x}{r}}{r \sin \frac{w}{r}}$$

①

1- $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{f(x+w) - f(x)}{w}$ با پیوستگی از پیوسته ثابت ندارد پس f پیوسته است پس هیچ قسم از آن

2- $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{f(x+w) - f(x)}{w}$ وجود دارد در ① و ② وجود دارند در هر دو از جیب مضاعف است

تربیب حد است و حد $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{f(x+w) - f(x)}{w}$ و پیوسته ای است از جهت بر در صورت سوال که ای هر دو در آن ذکر شده است.

② $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{f(x+w) - f(x)}{w}$ است پس و $\frac{w}{r \sin \frac{w}{r}}$ $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{w}{r \sin \frac{w}{r}} = \frac{1}{r}$ $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{\cos \frac{w}{r}} = \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{1}$ $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{\sin \frac{w}{r} \cos \frac{w}{r} - \sin \frac{2x}{r}}{r \sin \frac{w}{r}} = \frac{\sin \frac{w}{r} \cos \frac{w}{r} - \sin \frac{2x}{r}}{r \sin \frac{w}{r}}$

ت(اما) $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{w}{r \sin \frac{w}{r}} = \frac{1}{r}$ است پس و $\lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{\cos \frac{w}{r}} = \frac{\sin \frac{1}{r}(w+x)}{1}$

تابع f در فضای α در شرط لیب نیز از مرتبه α صاف و در راه اعداد است M و S موجود باشند

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^\alpha$$

مستویه اند $|x - x_0| < \delta$ ثابت است اگر f پیوسته باشد و در

شرط لیب نیز در x_0 صدق کند $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ و ثابت است f در x_0 و ثابت است $f(x_0)$ و ثابت است $f(x_0)$

بیشتر $x - x_0 = t \Rightarrow x = x_0 + t$ بیجان

$$|t| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq M|t|^\alpha$$

if $\alpha = 1 \Rightarrow |f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq M|t|$ (H.L)

$$f \text{ مجبور جری نامستویه } = S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt$$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

$$u = x - t \rightarrow t = x - u \quad du = -dt$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u) (-du) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u) du$$

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_{-p}^p f(x) dx \Rightarrow S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) D_n(t) dt$$

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin \frac{t}{2}} \sin((n+\frac{1}{2})t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin \frac{t}{2}} (\sin nt \cos \frac{t}{2} + \cos nt \sin \frac{t}{2}) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t) - f(x)}{\tan \frac{t}{2}} \sin nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \cos nt dt = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

$$|I_1| \leq \frac{1}{rN} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(\pi-t) - f(\pi)}{r \cos t} \sin nt \right| dt \leq \frac{1}{rN} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \leq -\pi \text{ قابل}$$

$$\frac{1}{rN} \int_{-\pi}^{\pi} M |\sin nt| dt \leq \frac{MN}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt$$

$$|I_r| \leq \frac{1}{rN} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\pi-t) - f(\pi)| |\cos nt| dt \leq \frac{1}{rN} \int_{-\pi}^{\pi} M|t| |\cos nt| dt \quad (t = \frac{M}{rN}) \int_{-\pi}^{\pi} |t \cos nt| dt$$

$$= \frac{M}{rN} \left[\int_{-\pi}^0 -t |\cos nt| dt + \int_0^{\pi} t |\cos nt| dt \right]$$

$$|I_r| \leq \frac{M}{rN} \left[\int_0^{\pi} t |\cos nt| dt - \int_{-\pi}^0 t |\cos nt| dt \right] = \frac{M}{rN} \left[rN \int_0^{\frac{\pi}{rN}} t \cos nt dt - rN \int_{-\frac{\pi}{rN}}^0 t \cos nt dt \right]$$

$$= \frac{MN}{r} \left[\left[\left(\frac{t}{n} \sin nt + \frac{1}{n^2} \cos nt \right) \right]_0^{\frac{\pi}{rN}} - \left[\left(\frac{t}{n} \sin nt + \frac{1}{n^2} \cos nt \right) \right]_{-\frac{\pi}{rN}}^0 \right]$$

$$= \frac{MN}{r} \left(\frac{\pi}{rN^2} + \frac{\pi}{rN^2} \right) = \frac{M}{rN}$$

$$|\bar{I}_1 + \bar{I}_r| \leq |\bar{I}_1| + |\bar{I}_r| = \frac{M}{n} + \frac{M}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{n} dt = P(n) \text{ in } f \rightarrow \infty \Rightarrow P(n) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x) - f(x)| = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

* تمرینات فصل دوم (معادلات با مشتقات جزئی)

شماره ۵.۲ صفحه ۹۱۱
مسئله ارتعاش را در حالتی حل کنید که اندامها در روی مرز ناحیه صفر و سرعت اولیه آن به صورت داده شده باشد.

a. $u(x,0) = x(1-x)$ $0 \leq x \leq 1$
 $u_t(x,0) = 0$

در این مثال $\lambda_n = c n \pi$ و $L=1$

$$a_n = \int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x dx$$

$$a_n = \int_0^1 \left[(x-x^2) \left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi} \right) - (1-2x) \left(\frac{-\sin n\pi x}{(n\pi)^2} \right) + (-2) \frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^3} \right] dx$$

$a_n = \frac{2}{(n\pi)^3} [1 + (-1)^{n+1}]$ $u_t(x,0) = 0 \rightarrow b_n = 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^3} [1 + (-1)^{n+1}] \cos c n \pi t \sin n \pi x$$

b. $u(x,0) = 2 \sin x$, $u_t(x,0) = 0$ $0 \leq x \leq \pi$

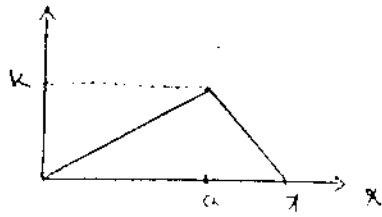
با توجه به $u(x,0) = 2 \sin x$ نتیجه می‌گیریم سیمونی فوریه این تابع در برابر a_n خواهد بود. نتایج قابل جدای اول سیمونی ضرباً $a_1 = 2$ می‌باشد پس سایر ضرایب صفر داشته و داریم:

$$\lambda_1 = \frac{c\pi}{\pi} = c$$

$$\Rightarrow u(x,t) = a_1 \sin x \cos ct = 2 \cos ct \sin x$$

۲- مسئله ارتعاش نخ را در حالتی حل کنید که اندامها اولیه ارتعاش را در این ترتیب زیر و سرعت اولیه آن صفر باشد. وضعیت ارتعاش را در حین ناله که خواستگاه خواهد نمود به کمک جواب حاصل از روش دالامبر رسم کنید. ($c=1$)

الف)



$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{k}{a} x & 0 \leq x \leq a \\ \frac{k}{a-l} (x-l) & a < x \leq l \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \quad u(a,t) = 0$$

$$c = 1$$

$$L = l$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{l} = n$$

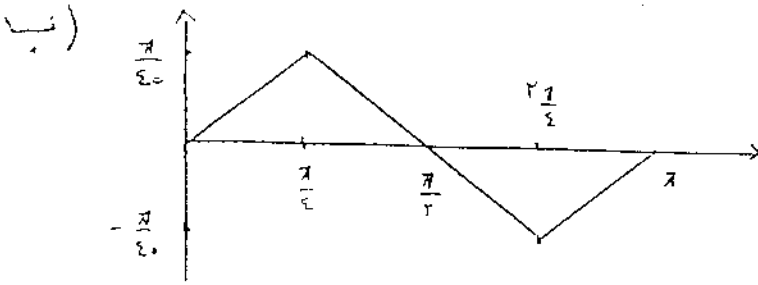
$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^a \frac{k}{a} x \sin nx \, dx + \frac{2}{l} \int_a^l \frac{k}{a-l} (x-l) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{l} \left[\frac{k}{a} x \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) - \frac{k}{a} \left(\frac{-\sin nx}{n^2} \right) \right]_0^a + \frac{2}{l} \left[\frac{k(x-l)}{a-l} \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) - \frac{k(-\sin nx)}{(a-l)n^2} \right]_a^l$$

$$= \frac{2k}{a(a-l)} \left[-x \frac{\sin na}{n^2} \right] = \frac{2k}{a(a-l)} \frac{\sin na}{n^2} \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{2k}{a(a-l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2} \cos nt \sin nx$$



$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{l} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{l} (x - \frac{\pi}{2}) & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{l} (x - \pi) & \frac{3\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{l} x \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\frac{1}{l} (x - \frac{\pi}{2}) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{l} (x - \pi) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{l} x \frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{l} \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{l} (x - \frac{\pi}{2}) \frac{\cos nx}{n} - \frac{1}{l} \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$+ \left[-\frac{1}{l} (x - \pi) \frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{l} \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{l \cdot \pi} \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{\sin \frac{3n\pi}{2}}{n^2} \right]$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{2}{\pi l} \times \frac{1}{2} \quad a_3 = 0 \quad a_4 = \frac{2}{\pi l} \times 0 = 0 \quad a_5 = 0 \quad a_6 = \frac{2}{\pi l} \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$a_7 = 0 \quad a_8 = 0 \quad a_9 = 0 \quad a_{10} = \frac{2}{\pi l} \times \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow u = \frac{2}{\pi l} \left(\frac{1}{2} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 4t \sin 4x + \frac{1}{10} \cos 10t \sin 10x + \dots \right)$$

۳- جبراسمیک ارسالانف زیر با روش متغیر c دست آورده

a. $u_x + u_y = 0$

$u = g(x) f(y)$

$u_x = f(y) g'(x)$ $u_y = g(x) f'(y)$

$u_x + u_y = g'(x) f(y) + g(x) f'(y) = 0 \Rightarrow g'(x) f(y) = -g(x) f'(y) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)} = k$

$f(y) + c_0 f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = A e^{-\frac{1}{c_0} y}$

تا به برابر اعداد است باشد

$g(x) - c_0 g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = A' e^{\frac{1}{c_0} x}$

$\Rightarrow u = g(x) f(y) = AA' e^{\frac{1}{c_0} (x-y)}$ $\frac{AA'}{c_0} = k$ $c_0(x-y)$
 $\frac{1}{c_0} = c$ ke

b. $y u_x = \alpha u_y$

$u = f(x) g(y)$

$u_x = f'(x) g(y)$ و $u_y = g'(y) f(x)$

$y g(y) f'(x) = \alpha f(x) g'(y)$

$\frac{y g(y)}{g'(y)} = \frac{\alpha f(x)}{f'(x)} = k$

$\Rightarrow y(g(y)) - k g'(y) = 0$ (1) $\alpha f(x) - k f'(x) = 0$ (2)

(1) $\Rightarrow \frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{y}{k} \Rightarrow \ln g(y) = \frac{1}{rk} y^r \Rightarrow g(y) = e^{\frac{y^r}{rk}}$

(2) $\Rightarrow \alpha f(x) = k f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{k} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{\alpha^r}{rk} x^r \Rightarrow f(x) = e^{\frac{\alpha^r}{rk} x^r}$

$u = e^{\frac{1}{rk} (\alpha^r x^r + y^r)}$ $k(\alpha^r x^r)$
 $u = e^{\dots}$

c. $xyu_x = yu_y$

$u_x = f'(x) g(y) \quad u_y = g'(y) f(x)$

$\Rightarrow x \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{y g'(y)}{g(y)} = k \Rightarrow x f'(x) - k f(x) = 0 \quad (1)$

$y g'(y) - k g(y) = 0 \quad (2)$

$(1) \Rightarrow x f'(x) = k f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \int \frac{k}{x} \Rightarrow \ln f(x) = k \ln x + \ln c_0$

$\Rightarrow f(x) = c_0 x^k \quad (1')$

$(2) \Rightarrow y g'(y) = k g(y) \Rightarrow \frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{k}{y} \Rightarrow \ln g(y) = k \ln y + \ln c_1$

$g(y) = c_1 y^k \quad (2')$

$(1'), (2') \Rightarrow u = c_0 c_1 x^k y^k$

d. $u_{xy} = u$

$u_x = f'(x) g(y) \quad u_{xy} = g'(y) f'(x)$

$\Rightarrow f'(x) g'(y) = f(x) g(y) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g(y)}{g'(y)} = k$

$f'(x) = k f(x) \Rightarrow f(x) = e^{kx}$

$\Rightarrow u = e^{k(x+y)}$

$g'(y) = k g(y) \Rightarrow g(y) = e^{\frac{y}{k}}$

e. $u_{xx} + u_x - \tau u = 0$

$D = \frac{du}{dx} \Rightarrow (D^2 + D - \tau) u = 0 \Rightarrow D = 1, D = -\tau$

$u = A e^x + B e^{-\tau x} \quad (1)$

در (1) A و B توابعی از y هستند درستی

$u = f(y) e^x + g(y) e^{-\tau x}$

خواهیم داشت :

۳- هر یک از عبارات زیر را بررسی کنید و در صورتی که درست است، آن را اثبات کنید.

a) $u_{xx} + u_{yy} = 1$, $v = x + y$, $z = 2x - y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + 2 \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial v} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial v} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial v} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial v} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

با این روش درستی ثابت می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = 0 = \frac{\partial u}{\partial v} = h(z)$$

$$\Rightarrow u = \int h(z) dz + \phi(v) \Rightarrow$$

$$u = \phi(z) + \psi(v) = \phi(2x - y) + \psi(x + y)$$

b) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ $v = y$ $z = x + y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}$$

با این فرضیات:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial v} = h(z) \Rightarrow u = \int h(z) dv + \Phi(z)$$

$$u = v h(z) + \Phi(z) = y h(x+y) + \Phi(x+y)$$

C) $u_{xy} = x u_{xz} + u_x$ $v = y$ $z = xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} + y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial z} + y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}$$

$$y \frac{\partial u}{\partial z} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + y \frac{\partial u}{\partial z}$$

: $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0$

$$\Rightarrow y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = h(z)$$

$$u = \int h(z) dz + \Phi(v) = \varphi(z) + \Phi(v) = \varphi(xy) + \Phi(y)$$

درجه حرارت در طول یک میله به طول ۱.۰ cm با یک درجه سانتیگراد در هر سانتیگراد در هر طرف از مرکز میله برابر می‌باشد (C=۱.۷۵۲)

a) $u(x,0) = \sin \frac{\pi}{l} x$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi}{l} x$$

$$\Rightarrow b_1 = 1, b_n = 0 \quad (n > 1)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\lambda_n^2 t} = \sin \frac{\pi}{l} x e^{-\frac{1.752^2 \pi^2}{l^2} t}$$

b) $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1-x & ; \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ $\lambda_n = \frac{1.752 n \pi}{l}$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$= \frac{2}{l} \left[-x \left(\frac{l}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi}{l} x + \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x \right]_0^{\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{2}{l} \left[-(1-x) \cos \frac{n\pi}{l} x \left(\frac{l}{n\pi} \right) - \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2}{l} \frac{\sin \frac{n\pi}{l}}{n^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \frac{\sin \frac{n\pi}{l}}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-c^2/(l^2 n^2) t}$$

c) $f(x) = \begin{cases} x & ; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - x & ; \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases}$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (\frac{1}{2} - x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

* ادامه در تفسیر سوال است (به نحوه پاسخ)

۲- هر یک از مسائل زیر را حل کنید

a)

$$u_f - \sum u_{n\pi} = \pi t \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad - \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = t \quad ; \quad u(1, t) = t^2 \quad t > 0$$

$$u = v + w \quad w = a + b \rightarrow \begin{cases} u(0, t) = t = b \Rightarrow b = t \\ u(1, t) = a + b = t^2 \Rightarrow a = t^2 - t \end{cases}$$

$$v(0, t) = 0$$

$$v(1, t) = 0$$

$$v(x, 0) = \sin \pi x \quad w = (t^2 - t)u + t$$

$$u = v + w \Rightarrow v_f - \sum v_{n\pi} = \pi - \pi t - 1 \quad (*)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t) \sin n\pi x \quad | \quad * \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[G(t) + \varepsilon n^2 \pi^2 G(t)]}_{\gamma(t)} \sin n\pi x = \pi - \pi t - 1$$

$$\gamma(t) = \int_0^1 (\pi - \pi t - 1) \sin n\pi x \, dx = \gamma \left[(1-t) \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right]$$

$$= \gamma \left[\frac{\pi(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] = \varepsilon \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n\pi} t - \frac{\gamma}{n\pi}$$

$$\gamma(t) = G(t) + \varepsilon n^2 \pi^2 G(t) \quad G_k = c_k e^{-\varepsilon n^2 \pi^2 t}$$

$$D + \varepsilon n^2 \pi^2 = 0 \Rightarrow D = -\varepsilon n^2 \pi^2 \quad G_p = c_p t + c_q$$

$$\rightarrow c_p + \varepsilon n^2 \pi^2 (c_p t + c_q) = \frac{\varepsilon(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \pi t - \frac{\gamma}{n\pi}$$

$$\Rightarrow \varepsilon n^2 \pi^2 c_p = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n\pi} \Rightarrow c_p = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{\varepsilon n^2 \pi^2}$$

$$c_p + \varepsilon n^2 \pi^2 c_q = \frac{\varepsilon(-1)^n}{n\pi} - \frac{\gamma}{n\pi} \Rightarrow c_q = \frac{1}{\varepsilon n^2 \pi^2} \left[\frac{\varepsilon(-1)^n}{n\pi} - \frac{\gamma}{n\pi} + \frac{\pi(-1)^{n+1}}{\varepsilon n^2 \pi^2} \right]$$

$$G(t) = c_p e^{-\varepsilon n^2 \pi^2 t} + c_q t + c_r \Rightarrow v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_p e^{-\varepsilon n^2 \pi^2 t} + c_q t + c_r] \sin n\pi x$$

۱۔ مسئلہ کو ماورایہ قیاسی راجح لیکر درج ذیلہ درمیانہ برابرینی ازتراجع زیر باشد

$$a) f(x) = \begin{cases} x & ; -r < x < r \\ 0 & ; x > r \end{cases}, f(-x) = f(x)$$

$$A(\omega) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \frac{r}{\pi} \int_0^r x \cos \omega x dx$$

$$= \frac{r}{\pi} \left[\frac{x}{\omega} \sin \omega x + \frac{\cos \omega x}{\omega^2} \right]_0^r = \frac{r}{\pi} \left[\frac{r}{\omega} \sin r\omega + \frac{\cos r\omega}{\omega^2} - \frac{\cos 0}{\omega^2} \right]$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{r}{\pi \omega} \left[r \sin r\omega + \frac{\cos r\omega - 1}{\omega} \right]$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{r}{\pi \omega} \left[r \sin r\omega + \frac{\cos r\omega - 1}{\omega} \right] \cos \omega x d\omega$$

(تشریح)

$$B(\omega) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = \frac{r}{\pi} \int_0^r x \sin \omega x dx + \frac{r}{\pi} \int_r^{\infty} r \sin \omega x dx$$

$$= \frac{r}{\pi} \left[-\frac{rx}{\omega} \cos \omega x + \frac{r}{\omega^2} \sin \omega x \right]_0^r + \frac{r}{\pi} \left[-\frac{rx}{\omega} \cos \omega x + \frac{rx}{\omega^2} \sin \omega x + \frac{r}{\omega^2} \cos \omega x \right]_r^{\infty}$$

$$= \frac{r}{\pi} \left[-\frac{r}{\omega} \cos r\omega + \frac{r}{\omega^2} \sin r\omega \right] + \frac{r}{\pi} \left[-\frac{1}{\omega} \cos r\omega + \frac{1}{\omega^2} \sin r\omega - \frac{2}{\omega^2} \cos r\omega + \frac{r}{\omega} \cos r\omega - \frac{r}{\omega^2} \sin r\omega + \frac{2}{\omega^2} \cos r\omega \right]$$

$$= \frac{r}{\pi} \left[-\frac{r}{\omega^2} \sin r\omega - \frac{1}{\omega} \cos r\omega + \frac{1}{\omega^2} \sin r\omega - \frac{2}{\omega^2} \cos r\omega + \frac{r}{\omega^2} \cos r\omega \right]$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega$$

" کوفی "

تمرین صفحه ۱۵۲

اشان رسید

$$a) \frac{||z_1| - |z_2||}{A} \leq \frac{B}{|z_1 - z_2|} \leq |z_1| + |z_2|$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow A: |\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

باز کردن

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \leq$$

$$\leq x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$$

$$\rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\rightarrow x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_2^2x_1^2 \geq x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2$$

$$\rightarrow (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \geq 0 \quad \text{بی شک}$$

$$b) \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y| : z = x + iy$$

$$A: \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{\text{باز کردن}} x^2 + y^2 + 2|x||y| \leq 2x^2 + 2y^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2|x||y| \geq 0 \rightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0 \quad \text{بی شک}$$

$$B: \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \xrightarrow{\text{باز کردن}} x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| \rightarrow |xy| \geq 0$$

$$B: \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \xrightarrow{\text{باز کردن}}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 \leq x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$-(x_1x_2 + y_1y_2) \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \rightarrow \text{این هم بی شک است}$$

توان دو
 $\Rightarrow x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$ *آرگنمنت باشد*
 $\Rightarrow (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \geq 0$

c) $\left| \frac{z_1}{z_2 + z_1} \right| \leq \frac{|z_1|}{||z_1| - |z_2||} \Rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2 + z_1|} \leq \frac{|z_1|}{||z_1| - |z_2||} \Rightarrow$ *تقسیم بر |z1|*

$\frac{1}{|z_2 + z_1|} \leq \frac{1}{||z_1| - |z_2||}$ *طرفین درجه* $\Rightarrow ||z_1| - |z_2|| \leq |z_2 + z_1|$ *درجه*

$\Rightarrow \left| \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right| \leq \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$ $\begin{cases} z_2 = x_2 + iy_2 \\ z_1 = x_1 + iy_1 \end{cases}$

توان دو
 $\Rightarrow -\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq x_2 x_1 + y_2 y_1$ *آرگنمنت باشد*

توان دو
 $\Rightarrow (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geq (x_2 x_1 + y_2 y_1)^2 \Rightarrow (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 \geq 0$

d) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

$\frac{a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab}{\rightarrow} |z_1 + z_2 + z_1 - z_2|^2 - 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

$4|z_1|^2 - 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

مقدار داده را در حدمات اول نیز می توان رسید

a) $\sqrt{-i}$

۲. مقدار حرکت از عبارات زیر را محاسبه کنید؟

←
 ادامه

$$\sqrt{-i} = z \Rightarrow z^r = -i = e^{-\pi/4 i} \quad z = e^{i \left(\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{r} \right)}$$

$$z_1 = e^{i \left(\frac{-\pi/4}{r} \right)} \quad z_r = e^{i \left(\frac{-\pi/4 + \pi}{r} \right)} = e^{i \pi/4} \quad k=0,1$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{r}}{r} - i \frac{\sqrt{r}}{r} \quad z_r = -\frac{\sqrt{r}}{r} + \frac{\sqrt{r}}{r} i$$

b) $\sqrt{1 - i\sqrt{r}} = z \quad z^r = 1 - i\sqrt{r} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{r}}{1} = \frac{2\pi}{4}$

$$z^r = r e^{i\pi/4} \Rightarrow z = \sqrt{r} e^{i \left(\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{r} \right)} \quad k=0,1$$

$$z_1 = \sqrt{r} \left(\frac{\sqrt{r}}{r} - \frac{i}{r} \right) \quad z_r = \sqrt{r} \left(\frac{\sqrt{r}}{r} - \frac{i}{r} \right)$$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{r} e^{i\pi/4} \\ z_r = \sqrt{r} e^{+i2\pi/4} \end{cases}$$

c) $\sqrt[r]{-1} = z \quad z^r = -1 = e^{i\pi} \quad z = e^{i \left(\frac{\pi + 2k\pi}{r} \right)} \quad k=0,1,2, \dots$

$$z_1 = e^{i\pi/r}, \quad z_r = e^{i \frac{2\pi}{r}}, \quad z_{r-1} = e^{i \frac{\Delta\pi}{r}}, \quad z_r = e^{i \frac{2\pi}{r}}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{r}}{r} + i \frac{\sqrt{r}}{r} \quad z_r = -\frac{\sqrt{r}}{r} + i \frac{\sqrt{r}}{r} \quad z_{r-1} = \dots \quad z_r = \dots$$

d) $\sqrt[r]{1+i} = z \quad z^r = 1+i = \sqrt{r} e^{i\pi/4}$

$$z = \sqrt[r]{r} e^{i \left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{r} \right)} \quad k=0,1,2$$

$$z_1 = \sqrt[r]{r} e^{i\pi/4r} \quad z_r = \sqrt[r]{r} e^{i \frac{2\pi}{r}} \quad z_{r-1} = \sqrt[r]{r} e^{i \frac{14\pi}{r}}$$

۱۳۹۷

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{r} + \frac{\sin[(n+1)r\theta]}{r \sin(\theta/r)} ; \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$Z = \cos\theta + i\sin\theta \quad 1 + \cos\theta + i\sin\theta + \cos 2\theta + i\sin 2\theta + \dots + \cos n\theta + i\sin n\theta = \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta}$$

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta} \right\}$$

صورت و مخرج را ضریب می‌کنیم

$$= \frac{(1 - \cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta) \cdot (1 - \cos\theta + i\sin\theta)}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \Rightarrow \textcircled{I}$$

$$\operatorname{Re}\{I\} = \frac{r \sin \frac{n+1}{r} \theta \sin \frac{\theta}{r} + \overbrace{\sin \theta \sin(n+1)\theta}^{\sin \theta \sin \frac{n+1}{r} \theta \cos \frac{n+1}{r} \theta}}{1 + \cos^2 \theta - r \cos \theta + \sin^2 \theta} = \frac{r \sin \frac{n+1}{r} \theta \sin \frac{\theta}{r}}{r (\sin^2 \theta / r)}$$

$$= \frac{(r \sin \frac{n+1}{r} \theta \sin \frac{\theta}{r}) (\sin \frac{n+1}{r} \theta \sin \frac{\theta}{r} + \cos \frac{\theta}{r} \cos \frac{n+1}{r} \theta)}{r (\sin \frac{n+1}{r} \theta) (\cos \frac{n+1}{r} \theta - \cos \frac{\theta}{r})} = \frac{\sin(\frac{n+1}{r} \theta + \frac{\theta}{r}) + \sin(\frac{n+1}{r} \theta - \frac{\theta}{r})}{r \sin \frac{\theta}{r}}$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\sin(n+1/r)\theta}{r \sin \theta / r}$$

رسانه هندسه در Z به ازای n را حد بگیرد ، $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \neq 1$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$$

$$z^n = 1 \Rightarrow z = \exp\left(\frac{i r k \pi}{n}\right)$$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 1 + \exp\left(\frac{i r \pi}{n}\right) + \exp\left(\frac{i 2 r \pi}{n}\right) + \dots + \exp\left(\frac{i r (n-1) \pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1(1 - \exp(i \frac{r \pi}{n} n))}{1 - \exp(i \frac{r \pi}{n})} = \frac{1 - \exp(i r \pi)}{1 - \exp(i \frac{r \pi}{n})} = 0$$

۱- با توجه به تعریف مشتق نقاطی را که حریف از توابع زیر دارای مشتق هستند یاداری مشتق

نمیستند مشخص کنید؟

$$a) f(z) = z|z|^r$$

$$z = x + iy \Rightarrow f(z) = x(x^r + y^r) + iy(x^r + y^r)$$

$$u = x(x^r + y^r) \quad , \quad v = y(x^r + y^r)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \quad , \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\textcircled{1} \quad x^r + y^r + rx^r = x^r + y^r + ry^r \Rightarrow x = y$$

$$\textcircled{2} \quad 2xy = -2xy \Rightarrow x = y = 0$$

در نقطه صفر مشتق دارد.

$$b) f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$$

$$z = x + iy$$

$$f(z) = x + y$$

$$u = x + y$$

$$v = 0$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \Rightarrow 1 = 0$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x} \Rightarrow 1 = 0$$

۲- نقاطی را که حریف از توابع زیر مشتق بدرد تحلیل ریا غیر تکاملی هستند را مشخص کنید؟

$$a) f(z) = z^r \Rightarrow f(z) = (x + iy)^r = x^r + i^r 2^r y + r x (iy)^{r-1} + (iy)^r =$$

$$x^r - 2^r xy^{r-1} + i(3^r x^2 y - y^r)$$

$$u = x^r - rxy^r, \quad v = rx^r y - y^r$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \Rightarrow rx^r - ry^r = rx^r - ry^r$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x} \Rightarrow -rxy = -rxy$$

در تمام نقاط مشتق پذیر و تحلیل است

$$b) f(z) = i|z|^2 = i(x^2 + y^2) = i(x^2 + y^2 + 2xy^r)$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \varepsilon x^r + \varepsilon xy^r \Rightarrow \frac{\delta u}{\delta x} = 0 \Rightarrow \varepsilon x^r + \varepsilon xy^r = 0 \quad x = 0$$

$$\frac{\delta v}{\delta y} = \varepsilon y^r + \varepsilon yx^r \Rightarrow \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \Rightarrow \varepsilon y^r + \varepsilon yx^r = 0 \quad y = 0$$

پس $f(z)$ در نقطه $(0,0)$ تحلیل است

$$c) f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{-x}{y^2}, \quad \frac{\delta v}{\delta x} = 0 \Rightarrow \frac{-x}{y^2} = 0 \Rightarrow x = 0, y \neq 0$$

$$d) f(z) = (1+i)(x-y)^r = \underbrace{(x-y)^r}_u + i \underbrace{(x-y)^r}_v$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \Rightarrow r(x-y)^{r-1} = -r(x-y)^{r-1} \Rightarrow x=y \text{ تحلیل است}$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x} \Rightarrow -r(x-y)^{r-1} = -r(x-y)^{r-1}$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad f(z) &= \frac{z}{\bar{z}} = \frac{x+iy}{x-iy} \times \frac{x+iy}{x+iy} = \frac{x^2 + 2ixy + i^2 y^2}{x^2 + y^2} = \\
 &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2xyi}{x^2 + y^2} \Rightarrow u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{2xy^2 - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \\
 -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-2y(x^2 + y^2) + 2x(2xy)}{(x^2 + y^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(z) = \operatorname{Arg} z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$u = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1 + y^2/x^2} = \frac{-y/x^2}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + y^2/x^2} = \frac{1/x \cdot x^2}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

✓

۳- آیا توابع زیر همساز هستند؟ در صورت همساز بودن، توابع مزدوج همساز آن‌ها را بیابید.

توابع کنیجلی متناظر آن‌ها را هم صورت تابعی از z بنویسید؟

a) $u = e^x \cos y$

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos y & u_{xx} = e^x \cos y \\ v_y = -e^x \sin y & v_{yy} = -e^x \cos y \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + v_{yy} = 0$$

همساز است

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

b) $u = (x^2 - y^2)^2$

شماره مورد بالا

c) $u = x^2 - 3xy^2$

شماره مورد (a) حل می‌شود.

$$d \Rightarrow u = x^r - y^r - rx + ry$$

$$\begin{cases} u_x = r x - r & u_{xx} = r & u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u_y = -r y + r & u_{yy} = -r & \Rightarrow r - r = 0 \end{cases}$$

در معادله $u_{xx} + u_{yy} = 0$ شرط $u_{xx} = -u_{yy}$ را داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = r x - r$$

$$\phi(x) = -r x$$

$$\phi'(x) = -r$$

$$v = r x y - r y + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = r y + \phi'(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -r y + r \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = r y - r$$

$$v = r x y - r y - r x$$

$$e \Rightarrow u = \frac{x}{x^r + y^r} \Rightarrow u_x = \frac{x^r + y^r - r x^r}{(x^r + y^r)^2} = \frac{y^r - x^r}{(x^r + y^r)^2}$$

$$u_{xx} = \frac{-r x (x^r + y^r)^{-2} - (\varepsilon x (x^r + y^r)) (y^r - x^r)}{(x^r + y^r)^4}$$

$$u_{xx} = \frac{-r x (x^2 + y^2 + r x^r y^r) - (\varepsilon x^r + \varepsilon x y^r) (y^r - x^r)}{(x^r + y^r)^4}$$

$$u_y = \frac{-r y x}{(x^r + y^r)^2} \Rightarrow u_{yy} = \frac{-r x (x^r + y^r)^{-2} - \varepsilon y (x^r + y^r) - r x y}{(x^r + y^r)^4}$$

$$u_{yy} = \frac{-r x (x^2 + y^2 + r x^r y^r) + r x y^r (x^r + y^r)}{x^r + y^r} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} \neq 0$$

$$f \Rightarrow u = r x y \Rightarrow u_x = r y, u_{xx} = 0 \Rightarrow u_y = r x, u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = r x \quad v = y^r + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\phi'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = r x \Rightarrow -r x = \phi'(x) \Rightarrow \phi(x) = -x^r \Rightarrow v = y^r - x^r$$

۴- a, b را طوری بیابید که هر یک از توابع زیر همساز باشند و در دو حصار آن حصار بیابید؟

a) $u = e^{ax} \cos by$

$$u_{xx} = a^2 e^{ax} \cos by \quad u_{yy} = -b^2 e^{ax} \cos by$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow a^2 e^{ax} \cos by - b^2 e^{ax} \cos by = 0$$

$$\Rightarrow e^{ax} \cos by (a^2 - b^2) = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$$

شرط مساز بودن a, b, همساز است

$$u = e^{ax} \cos ay \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = a e^{ax} \cos ay = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -a e^{ax} \sin ay$$

$$v(y) = e^{ax} \sin ay + \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = a e^{ax} \cos ay - \phi'(x)$$

$$\phi(x) = -x \quad -\phi'(x) = 1 \Rightarrow \phi'(x) = -1$$

$$\Rightarrow v(y) = e^{ax} \sin ay - x$$

b) $v = \cos ax \cosh by$

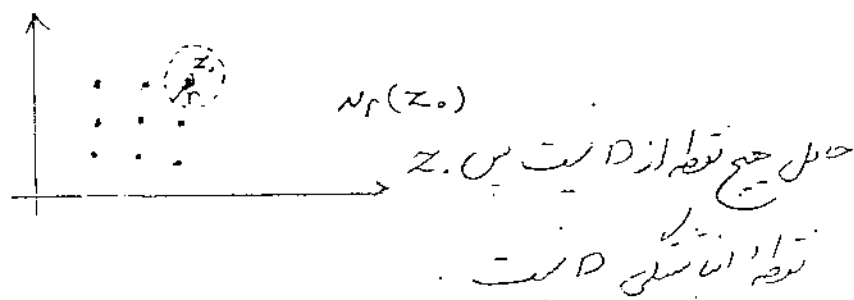
$$u_{xx} = -a^2 \cos ax \cosh by \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_{yy} = b^2 \cos ax \cosh by \Rightarrow \cos ax \cosh by (b^2 - a^2) = 0$$

$$b^2 = a^2 \Rightarrow b = \pm a \text{ همساز است}$$

ارائه سوال مانند قسمت الف می باشد

یک نقطه از لگاریسم هم از کرد چون تعداد انکاف متناهی اند پس قطعاً وجود دارد این همی
از z_0 که شامل هیچ نقطه از D نباشد مثلاً فرض کنید ناحیه D صورت زیر باشد:



۷- تابع $f(z) = |z|^2$ در تمام صفحه مختلط پیوسته است

حل: تابع $f(z)$ یک تابع چند جمله‌ای است و چون

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

توابع چند جمله‌ای در تمامی نقاط پیوسته هستند پس $f(z)$ در تمامی صفحه مختلط پیوسته است

۸- هرگاه تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته بوده و $f(z_0) \neq 0$ آن گاه این محاسباتی از z_0

موجود است که برای هر z از این محاسباتی $f(z) \neq 0$ است.

حل: $f(z)$ در z_0 پیوسته است پس $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ پس داریم:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{if } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

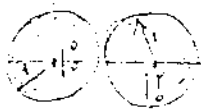
و چون $f(z_0) \neq 0$ پس می‌توان شعاعی r را تعیین کرد که برای هر z در این شعاع $|f(z)| > r$ باشد.

انتخاب کردیم $r = \frac{1}{4} |f(z_0)|$ و چون پیوسته است پس محدود است:

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \text{if } |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < r \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \frac{1}{4} |f(z_0)|$$

پس این محاسباتی $N_{\delta_1}(z_0)$ در بخش آن $f(z)$ در دایره شعاع r و مرکز $f(z_0)$ پیوسته و چون $f(z) \neq 0$ است در $N_{\delta_1}(z_0)$ پیوسته

۵- برهه D مجموعه همه z های باشد که $|z| < 1$ یا $|z-2| < 1$ یا $D \cap \{z \mid |z-2| < 1\} = \emptyset$ است.
 حل: ناحیه D اجتماع دو دایره شعاع ۱ در مرکزهای $(0,0)$ و $(2,0)$ است. مانند شکل زیر. چون نقاط روی ناحیه D را شامل نمی شوند پس دو نقطه a و b وجود دارند که بتوان آن جا را مابین جدا کرد. (تعریف همبند) - هم وصل کرد، پس همبند است.



۶- نقطه z را این نقطه استانی مجموعه D مانند هرگاه هر حسابی از z شامل نقطه ای از

D باشد با توجه به این تعریف نشان دهید:

این هر یک از نقاط این مجموعه باز و همبند نقطه استانی آن است.

حل: (۱) ناحیه D را این مجموعه باز کنید هرگاه $\exists \epsilon > 0 \Rightarrow N_\epsilon(z) \subset D$

یعنی در مجموعه باز همواره بتوانیم تمام نقاط آن یک حسابی به شعاع ϵ موجود است پس هر نقطه

مجموعه D باز است نقطه استانی آن است.

(۲) ناحیه D را همبند کنید هرگاه بتوان هر دو دایره را با ناحیه D همبند کرد.

پس در ناحیه D هیچ نقطه ای ندارد (ایزوله) یا آن می شود در ناحیه D شامل حاد است.

نقطه استانی z یا نقطه استانی آن است.

ب این مجموعه متناهی می تواند شامل نقطه استانی آن باشد.

همه برای نشان است که $\exists \epsilon > 0 \Rightarrow D \cap N_\epsilon(z) \neq \emptyset$ یعنی توان آن مجموعه را

۹- هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی باشد آن گاه f تابع ثابت است اگر:

- الف، $\bar{f}(z)$ نیز در D تحلیلی باشد
- ب، $|f|$ در D ثابت باشد
- ج، برای هر z از D مقدار حقیقی باشد
- د، $\operatorname{Re} f(z)$ عددی ثابت باشد

حل: الف) راه اول

$$f(z) \text{ تحلیلی} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ -u_y = v_x \end{cases}$$

$$f(z) = u + iv \Rightarrow \bar{f}(z) = u - iv \xrightarrow{\text{دارد تحلیلی بودن}} \begin{cases} u_x = -v_y \\ v_y = +v_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_y = -v_y \Rightarrow v_y = 0 \\ v_x = -v_x \Rightarrow v_x = 0 \end{cases} \text{ و ثابت است} \quad \begin{cases} u_x = -u_x \Rightarrow u_x = 0 \\ u_y = -u_y \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \text{ ثابت است}$$

در تابع f اگر u و v ثابت باشند f تابع نیز ثابت است

راه دوم

$$\begin{cases} u_x = v_y & (1) \\ v_x = -u_y & (2) \end{cases} \Rightarrow \bar{f}(z) = u - iv \text{ تحلیلی است} \Rightarrow \begin{cases} u_x = (-v)_y = -v_y & (1') \\ u_y = -(-v)_x = +v_x & (2') \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \& (1') \Rightarrow u_x = 0 \\ (2) \& (2') \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = c_1, v(x,y) = c_2 \Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2$$

تابعی ثابت است

حل ب) $|f| = c$ پس $u^2 + v^2 = c$ از طرفین را به x و y نسبت می دهیم و مشتق می گیریم:

$$\begin{cases} u_x + v_x = 0 & \text{چون تحلیلی است} \\ u_y + v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y - u_x = 0 \\ v_x + u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_y = 0 & (1) \\ v_y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x + v_x = 0 \\ -v_x + u_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 0 \\ v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,1) : u(x,y) = c_1 \\ (2,2) : v(x,y) = c_2 \end{cases} \Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2$$

تابعی ثابت است

حل ج) $\forall z \in D \Rightarrow f(z) = \operatorname{Re} u = k, f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = k + ic$

$$\Rightarrow v(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 \\ v_y = 0 \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = c \Rightarrow f(z) = c$$

تابعی ثابت است

$$\operatorname{Re} f(z) = k \Rightarrow u(x, y) = k \Rightarrow \begin{cases} u_x = 0 \Rightarrow v_y = 0 \\ u_y = 0 \Rightarrow v_x = 0 \end{cases} \quad (\text{حل})$$

$$\Rightarrow v(x, y) = c' \Rightarrow f(z) = k + ic' = c \quad \text{تابع ثابت است}$$

۱۰- هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی بود و همواره $f'(z) = 0$ باشد آن گاه $f(z)$ تابع ثابت است

حل: $f(z)$ در D تحلیلی است پس توابع u و v پیوسته و دارای مشتق‌های جزئی پیوسته هستند و در شرایط کوشی-ریمان صدق می‌کنند

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0$$

$$\begin{cases} u_x = 0 \Rightarrow v_y = 0 \\ v_x = 0 \Rightarrow u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (1) : u(x, y) = c_1 \\ (2) : v(x, y) = c_2 \end{matrix} \Rightarrow f(z) = c_1 + ic_2 = c$$

تابع ثابت است

۱۱- مشتق هر یک از توابع زیر را در نقاطی که دارای مشتق هستند بیابید و نقاطی را که تحلیلی نیستند مشخص کنید.

a) $f(z) = \underbrace{|x|}_u + i \underbrace{|y|}_v$ برای تحلیلی بودن $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ $u_x = \frac{x}{|x|}$ و $u_y = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|} \Rightarrow xy > 0$
در ناحیه اول و سوم تحلیلی است.

$$v_x = 0 \text{ و } v_y = \frac{y}{|y|} \Rightarrow |x| = \frac{x|y|}{y} = |x| \Rightarrow f(z) = \frac{x|y|}{y} + i|y|$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = \frac{|y|}{y} + i \frac{y}{|y|} = \frac{y}{|y|} (1+i)$$

$$b) f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy \Rightarrow f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$u_x = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$v_y = \frac{-\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$\Rightarrow y^2 = -x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$
 رابطه ای به ششاع صفر
 به مرکز مبدأ مختصات در آن تحلیل است
 در مورد مشتق صفر است

$$c) f(z) = (\operatorname{Re} z)^2 - i (\operatorname{Im} z)^2 \Rightarrow f(z) = x^2 + iy^2$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{Re}\{z + \Delta z\}^2 - i \operatorname{Im}\{z + \Delta z\}^2 - x^2 + iy^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - iy^2 - i\Delta y^2 - i2y\Delta y - x^2 + iy^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 : \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y(\Delta y + 2y)}{i\Delta y} = -2y \\ \Delta y \rightarrow 0 : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - x^2}{\Delta x} = 2x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 2x = -2y \Rightarrow x = -y$$

دری همبازنا حد در آن تحلیل است

$$x = -y \Rightarrow f(z) = y^2 - iy^2 \Rightarrow \begin{cases} u = y^2 \\ v = -y^2 \end{cases} \Rightarrow f(z) = u_y - iv_y$$

$$\Rightarrow f'(z) = 2y + i2y \quad x = -y$$

$$d) f(z) = \frac{|y|}{|x|} - i \frac{|x|}{|y|} \rightarrow u_x = \frac{y}{|y|}, \quad u_y = \frac{y}{|y|}, \quad v_x = \frac{-x}{|x|}$$

$$v_y = -v_x \Rightarrow \frac{y}{|y|} = \frac{x}{|x|} \Rightarrow x = y$$

$$|x| = \frac{x|y|}{y} \Rightarrow f(z) = |y| - i \frac{x|y|}{y}$$

$$f'(z) = u_y - iv_y \Rightarrow f'(z) = \frac{y}{|y|} + i \frac{|y|}{y} = \frac{|y|}{y} (1 + i)$$

e) $f'(z) = \frac{\cos(x+y)}{u} + i \frac{\cos(x-y)}{v} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y \\ v_y = -v_x \end{array} \right.$

$$\begin{cases} u_x = -\sin(x+y) \\ v_y = \sin(x-y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_x = v_y \Rightarrow -\sin(x+y) = \sin(x-y) \Rightarrow$$

$$\sin(x-y) + \sin(x+y) = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos y = 0$$

$$\begin{cases} v_y = -\sin(x+y) \\ -v_x = \sin(x-y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & x = k\pi \\ \cos y = 0 & y = 2k\pi \pm \pi/2 \end{cases}$$

حاصل شده است

در محل وجود این دسته خطوط تحلیل است

در خود این خطوط نیز تحلیل می باشد در مقدار مشتق در نقاط وجود خطوط است

$x = k\pi \Rightarrow f(z) = \cos(k\pi + y) + i \cos(k\pi - y) \Rightarrow f'(z) = -\sin(k\pi + y)$

$-i \sin(k\pi - y) \quad | \quad y = 2k\pi \pm \pi/2 \Rightarrow f'(z) = 0$

f) $f(z) = \frac{\cos x}{u} + i \frac{\cos y}{v}$

$$\begin{cases} u_x = -\sin x \\ v_y = -\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \sin y \\ x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi + \pi - y \end{cases}$$

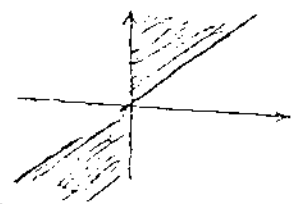
$f(z) = \cos(2k\pi + y) + i \cos y$

$f(z) = \cos y + i \cos y \Rightarrow f'(z) = -\sin y + i \sin y$

g) $f(z) = |x-y| + i|x+y| : u_x = v_y \Rightarrow \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x+y}{|x+y|} \Rightarrow$

$(x-y)(x+y) > 0 \Rightarrow \frac{x > y}{x < -y} \quad f(z) = x-y + i(x+y) \rightarrow u_x = 1$

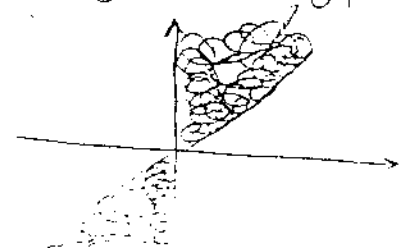
$f'(z) = 1+i$



h) $f(z) = |x^r - y^r| + ri|x^r y^r| \quad u_x = v_y \Rightarrow \frac{rx(x^r - y^r)}{|x^r - y^r|} = \frac{rx^r y^r}{|x^r y^r|}$

$\frac{x^r - y^r}{|x^r - y^r|} = \frac{x^r y^r}{|x^r y^r|} \rightarrow xy(x^r - y^r) > 0$

در این ناحیه



۱۰.۳. تمرینات: صفحات (۱۸۸ تا ۱۹۲)

۱. نقش هر یک از منحنی های زیر را با تابلو $w = z^2$ بیابید.

a) $y = -x$

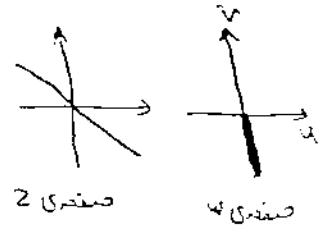
$$w = x^2 - y^2 + 2xyj$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

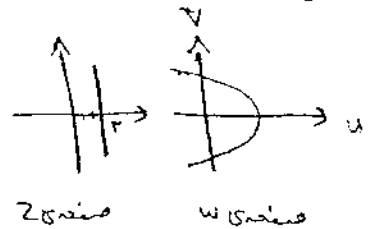
$$y = -x \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -2x^2 \end{cases}$$

$$w = -2x^2j$$



b) $x = 2$ $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 4y \end{cases}$

$$\rightarrow u = 4 - \frac{v^2}{16} \rightarrow u + \frac{v^2}{16} = 4$$

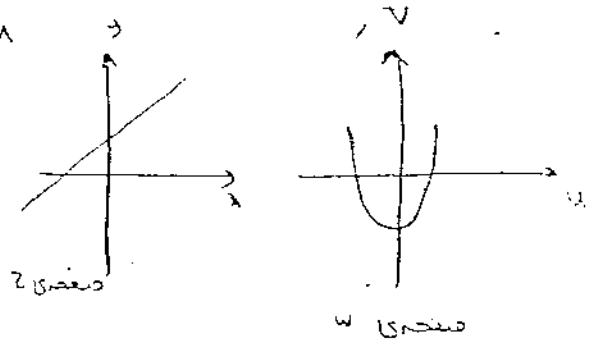


c) $y = 1 + x$

$$\begin{cases} u = x^2 - (1+x)^2 \\ v = 2x(1+x) \end{cases} \Rightarrow$$

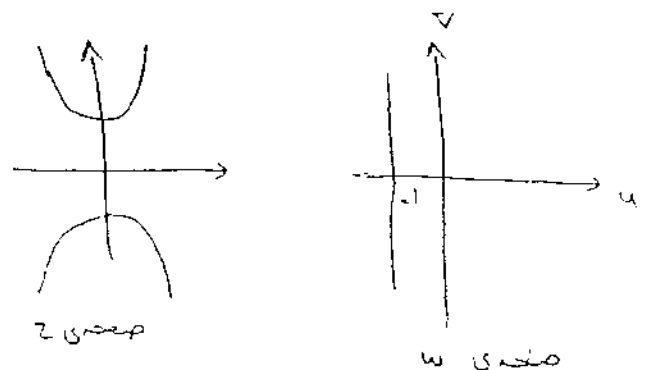
$$\begin{cases} u = 2x + 1 \\ v = 2x^2 + 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{u-1}{2} \Rightarrow v = \frac{u^2-1}{2}$$



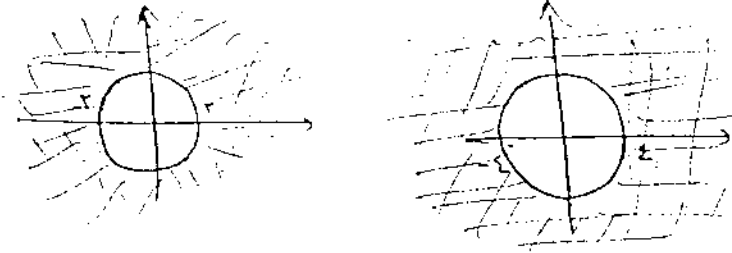
d) $y^2 = x^2 + 1$

$$\begin{cases} u = x^2 - x^2 - 1 \Rightarrow u = -1 \\ v = 2x\sqrt{x^2+1} \end{cases}$$



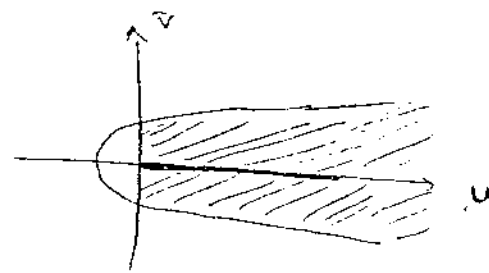
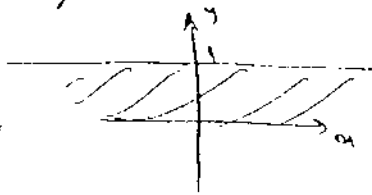
۲- نقش مریب از روی زیری آن است $w = z^2$ یا برعکس.

a) $|z| > r \rightarrow |w| = |z^2| = |z|^2 > r^2 \rightarrow |w| > r^2$



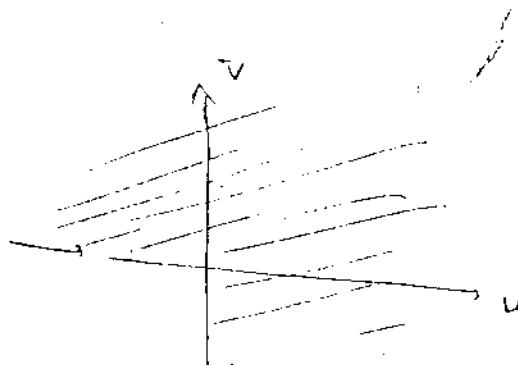
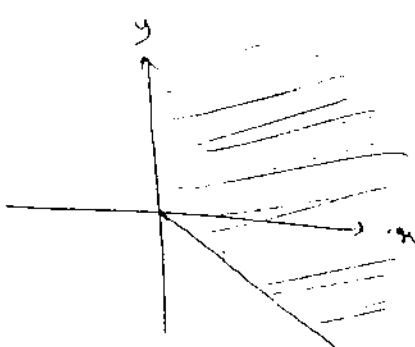
b) $0 < y < 1$ $z^2 = \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ if $y=0 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ v = 0 \end{cases}$

if $y=1 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow u = \frac{v^2}{4} - 1$



c) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow z = r e^{i\theta} \rightarrow z^2 = r^2 e^{2i\theta}$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{4} \rightarrow -\pi < 2\theta < \frac{\pi}{2}$



۳- نفس هر دو از سمتی همان زیر را بنویسید
 $w = \frac{1}{z}$ با $w = \frac{1}{z}$

a) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \arg z = -\arg w \\ |w| = \frac{1}{|z|} \end{cases}$$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg w < 0$

b) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{\pi}{2}$

c) $0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$

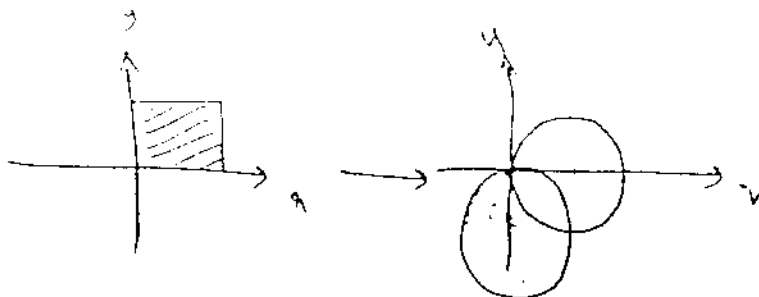
$$w = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{w} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = -\frac{v}{u^2 + v^2} \end{array} \right.$$

$x = 0 \rightarrow u = 0$

$x = 1 \Rightarrow u^2 + v^2 = u \rightarrow (u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4} \rightarrow |u - \frac{1}{2} + iv| = \frac{1}{2}$
 $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$y = 0 \rightarrow v = 0$

$y = 1 \rightarrow 1 = -\frac{v}{u^2 + v^2} \rightarrow u^2 + v^2 + v = 0 \rightarrow u^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
 $|u + iv + \frac{1}{2}i| = \frac{1}{2} = |w + \frac{1}{2}i|$



۴- نشان دهید از نوع زیر باطل است $w = \frac{1}{z}$ با $z = u + iv$

$$a) |z+1| = 1 \rightarrow \left| \frac{1}{w} + 1 \right| = 1 \rightarrow \frac{|1+w|}{|w|} = 1 \rightarrow |1+w| = |w|$$

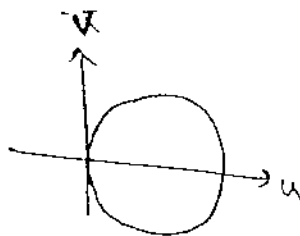
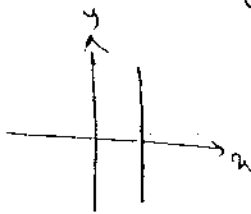
$$|(u+1+iv)|^2 = |u+iv|^2 \rightarrow (u+1)^2 + v^2 = u^2 + v^2 \rightarrow u = -\frac{1}{2}$$

$$b) y = x - 1 \quad z = \frac{1}{w} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases} \rightarrow y = x - 1$$

$$\Rightarrow \frac{u}{u^2+v^2} + \frac{v}{u^2+v^2} = 1 \Rightarrow u+v = u^2+v^2$$

$$\Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$c) \dot{x} = \tau \Rightarrow 1 = \frac{u}{u^2+v^2} \rightarrow u^2+v^2 = u \Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$



$$d) |z - ri| = r \quad \left| \frac{1}{w} - ri \right| = r$$

$$\frac{|1 - riw|}{|w|} = r \rightarrow |1 - ri(u + iv)| = r|w|$$

$$\rightarrow (1 + rv)^2 + (ru)^2 = r^2(u^2 + v^2) \rightarrow u^2 = -\frac{1}{r} \Rightarrow u = \pm \frac{1}{r}i$$

د- نفس ناحیه $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ را با هم از یک است عملی زیاده:

a) $w = iz \rightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2}} r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{3\pi}{2}$

b) $w = z^r \rightarrow w = r^r e^{ri\theta} \rightarrow 0 < \arg w < \frac{\pi}{r}$

c) $w = iz^r \rightarrow w = e^{i\frac{\pi}{2}} r^r e^{ri\theta} \rightarrow \frac{\pi}{r} < \arg w < \pi$

d) $w = -iz^r \rightarrow w = r^r e^{ri\theta} e^{-\frac{\pi}{2}i} \rightarrow -\frac{\pi}{r} < \arg w < 0$

e) $w = r^r e^{r\theta} = z \rightarrow 0 < \arg w < \frac{r\pi}{2}$

4- جمله یونی با سید

$$\frac{w-1}{w-\frac{1}{r}} \times \frac{\frac{1}{r}-1}{\frac{1}{r}-1} = \frac{z-0}{z-r} \times \frac{1-r}{1}$$

w_1, w_2, w_3 z_1, z_2, z_3
 f-a به معنی هر دو از هر دو از $\frac{1}{r}$ و $\frac{1}{r}$ بگذرد

$$\frac{w-0}{w-\infty} \times \frac{-1-\infty}{-1-0} = \frac{z+i}{z-i} \times \frac{0-i}{0+i}$$

(b) -i-ره در از هر دو در اوج بگذرد.

$$\rightarrow \left(\frac{w-\infty}{-1-\infty} \right) - \frac{1}{w} = -\frac{z+i}{z-i} \Rightarrow (1) \left(\frac{1}{w} \right) = \frac{z+i}{z-i} \Rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$$

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = z_1$$

(c) $z=0$ نقطه ای است آن باشد

if $(z_1=0) \Rightarrow \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} = 0 \Rightarrow \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b=0$

$$\Rightarrow w = \frac{az}{cz+d}$$

(d) نامی $|z| < 1$ روی $|w| \leq 1$ دوری نگارنده $z = \frac{1}{2}$ روی $w = 0$ نگاشته شود

$$\frac{w-1}{w-0} \times \frac{-1-0}{-1-1} = \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}} \times \frac{1-\frac{i}{2}}{1+1} = \frac{(z-1)i}{z-i}$$

(e) نامی $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$ - را روی حرفه $|w|=1$ انبار.

مانند مثال حل شده در صفحه ۱۷۶ کتاب ریاضیات مهندسی:

نامی $\Im_m(z) > 0$ تبدیل شود $w_1 = z^2$

$$w = e^{id} \frac{z^2 - z_0}{z^2 - \bar{z}_0} \quad \Im_m(z_0) > 0$$

(f) نقاط i و $-i$ نقاط استخوان باشد.

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

حل *

$$z_1 = i \Rightarrow ai + b = i(ci + d) = -c + id \quad \text{HX 1}$$

$$z_2 = -i \Rightarrow -ai + b = -i(-ci + d) = -c - di \quad \text{XH 2}$$

$$\text{HX 1} + \text{XH 2} \Rightarrow b = -c \Rightarrow c = -b$$

$$\text{HX 1} - \text{XH 2} \Rightarrow ai = di \Rightarrow d = a$$

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{-bz+a} = \frac{b+az}{a-bz} \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

۱- ثابت w را در هر دو سمت نقطه ثابت w در دو طرف z باشد. آن تبدیل را می توان به صورت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ نوشت.

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad * \text{ اثبات:}$$

$$f(z) = z \xrightarrow{z=0} \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow w = \frac{az}{cz+d}$$

$$a \neq 0 \Rightarrow w = \frac{z}{\frac{c}{a}z + \frac{d}{a}} = \frac{z}{c'z+d'}$$

۱۱- نشان دهید که این $w = \frac{z-1}{z}$ که $|z-1| < 1$ یعنی $\text{Re } w > 0$ نگاشته شود.

$$w = \frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z} \quad * \text{ اثبات:}$$

نگاشته w ابتدا $|z-1| < 1$ را تصحیح نگاشته $\frac{1}{z}$ تصویر نرود در سمت راست z باشد $2e^{ix}$ دورتر از z باشد.

رادیان دوران z در w را $1+0i$ باشد.

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \quad x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

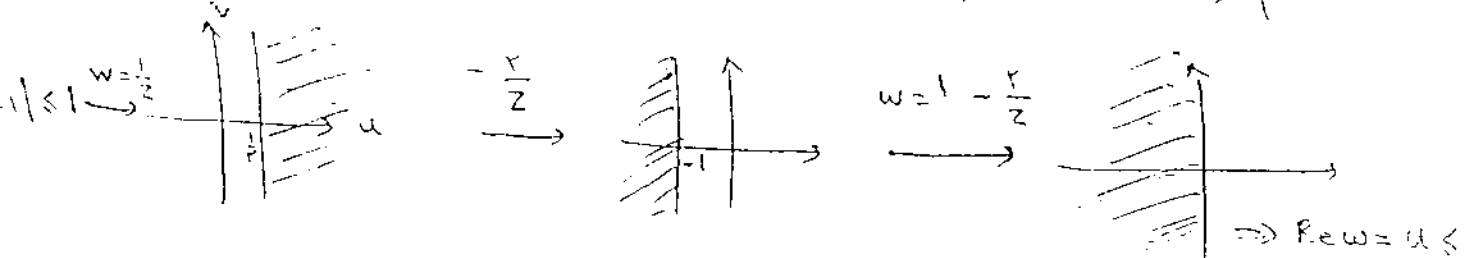
$$|z-1| < 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 < 1$$

$$(x-1) = \frac{u-u^2-v^2}{u^2+v^2} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{u-u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2 + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} < 1$$

$$\Rightarrow (u-u^2-v^2)^2 + v^2 < (u^2+v^2)^2$$

$$\Rightarrow u^2 - 2u^2 - 2uv^2 + v^2 < 0 \Rightarrow u^2(1-2u) + v^2(1-2u) < 0$$

$$\Rightarrow (u^2+v^2)(1-2u) < 0 \Rightarrow (1-2u) < 0 \Rightarrow u > \frac{1}{2}$$



۱۲- نقش در مبانی زیر را بسطید $w = e^z$

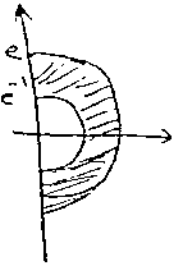
a) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$-1 < x < 1$

$w = e^x e^{iy}$

$\rho = e^x$, $-1 < x < 1 \rightarrow e^{-1} < \rho < e$

$\varphi = y$ $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

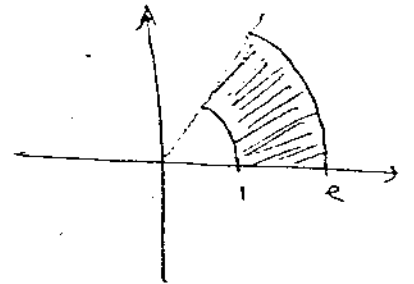


b) $0 < x < 2 \Rightarrow$

$1 < \rho < e^2$

$0 < y < 1 \Rightarrow$

$0 < \varphi < 1$

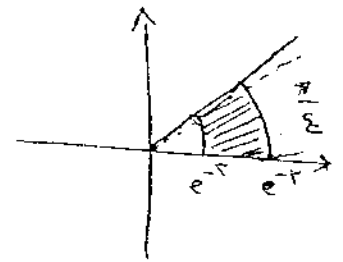


c) $-2 < x < -2 \Rightarrow$

$e^{-2} < \rho < e^{-2}$

$0 < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

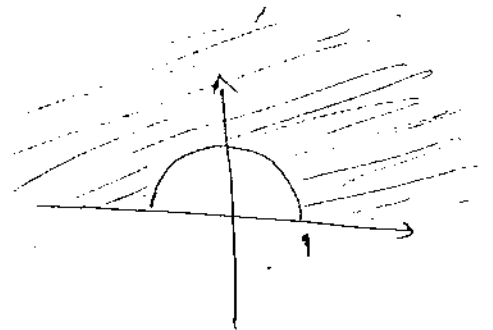


d) $x \geq 0 \Rightarrow$

$\rho \geq 1$

$0 < y < \pi \Rightarrow$

$0 < \varphi < \pi$

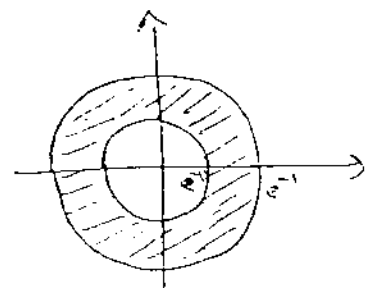


e) $-1 < x < 2 \Rightarrow$

$e^{-1} < \rho < e^2$

$-\pi < y < \pi \Rightarrow$

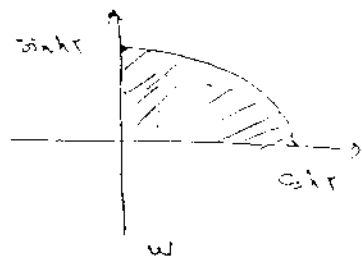
$-\pi < \varphi < \pi$



۱۳- فضای صرف از روی زیر را بنویسید

$$w = \sin z \rightarrow w = \sin x \cosh y + i \sin y \cos x$$

$$u = \sin x \cosh y \quad v = \sin y \cos x$$



$$y=0, 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < u < 1, v=0$$

$$y=\pi, 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u^r}{\cosh^2 r} + \frac{v^r}{\sinh^2 r} = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2}, 0 < y < \pi \Rightarrow 0 < u < \cosh y, v=0$$

$$x=0, 0 < y < \pi \Rightarrow u=0, v = \sin y \Rightarrow 0 < v < \sinh r$$

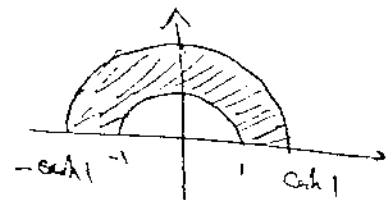
د) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 1$

$$y=0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < u < 1, v=0$$

$$y=1, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \sin x \cosh 1, v = \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{u^r}{\cosh^2 1} + \frac{v^r}{\sinh^2 1} = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2}, 0 < y < 1 \Rightarrow 1 < u < \cosh 1, v=0$$



$$x = -\frac{\pi}{2}, 0 < y < 1 \Rightarrow -1 < u < -\cosh 1, v=0$$

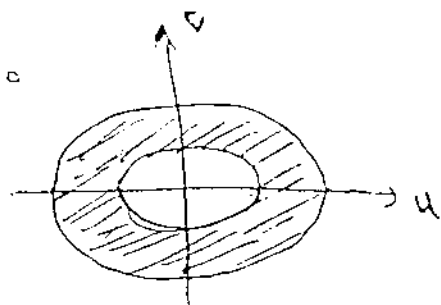
د) $0 < x < \pi, 1 < y < \pi$

$$y=\pi, 0 < x < \pi \Rightarrow u = \sin x \cosh \pi, v = \sin x \cos x \Rightarrow \frac{u^r}{\cosh^2 \pi} + \frac{v^r}{\sinh^2 \pi} = 1$$

$$y=1, 0 < x < \pi \Rightarrow u = \sin x \cosh 1, v = \sin x \cos x \Rightarrow \frac{u^r}{\cosh^2 1} + \frac{v^r}{\sinh^2 1} = 1$$

$$x=0, 1 < y < \pi \Rightarrow u=0, \sinh 1 < v < \sinh \pi$$

$$x=\pi, 1 < y < \pi \Rightarrow \sinh 1 < v < \sinh \pi, u=0$$



۱۴- میان دھیم $w = \sin z$ جو $\lambda = c$ ($0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$) د پورې د u د بیا لیکلو

$$u = \sin \lambda \cosh y \quad v = \cos \lambda \sinh y$$

نشان دھیم
* اثبات :

$$\lambda = c \Rightarrow u = \sin c \cosh y, \quad v = \cos c \sinh y$$

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

چون $\sin(c) > 0$ د $\cosh y > 0$ د $\cos(c) > 0$ د $\sinh y > 0$ د $\lambda = c$ د پورې د بیا لیکلو

۱۵- میان دھیم د تبدیل $w = \sin z$ د $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ د $0 < y < 1$ د پرمطمان AE' و

د ED' لیکلو د ED' د بیا لیکلو.

$$u = \sin \lambda \cosh y, \quad v = \cos \lambda \sinh y$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow u = \sin 0, \quad v = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u = 0, \quad v = 0 \\ u = 1, \quad v = 0 \end{array}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow u = 0, \quad v = \sinh y$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u = 0, \quad v = 0 \\ u = 0, \quad v = \sinh 1 \end{array}$$

$$y = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u = 0, \quad v = \sinh 1 \\ u = \cosh 1, \quad v = 0 \end{array}$$

د ED' د بیا لیکلو د ED' د بیا لیکلو

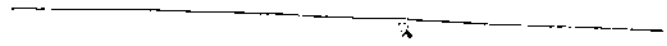
۱۴- نشان دهید که نگاشت $w = \cosh z$ از $z = iy$ ($0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$) را به $0 \leq u \leq 1$ و $v = 0$ می‌برد.

$$w = \cosh z = \cosh iy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y$$

* جوابی:

$$w = \cos y + i0 \Rightarrow u = \cos y, v = 0$$

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$$



* معیار درست سوال چهارم تریب است:

۱۷. نشان دهید که تبدیل $w = \sin^2 z$ ناحیه $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \leq 0$ را به روی ناحیه $v \leq 0$ نگاشته است.

$w_1 = \sin^2 z$ و $w_2 = w_1^2$

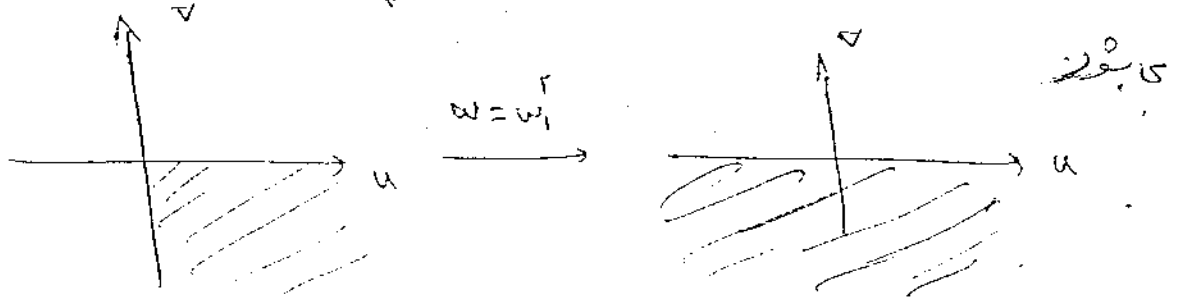
* این نقاط از یک رزده است قابل ملاحظه:

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \leq 0 \Rightarrow w_1 = \sin^2 z \Rightarrow u = \sin^2 x \cosh^2 y$
 $v = \cos^2 x \sinh^2 y$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \leq 0 \Rightarrow \sin^2 x \geq 0$ و $\cosh^2 y > 0 \Rightarrow u \geq 0$ و $v \leq 0$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \leq 0 \xrightarrow{w_1 = \sin^2 z} \frac{u^2}{\sin^4 c} - \frac{v^2}{\cos^4 c} = 1$

خطی که با جواب $v = \pm \cos^2 c u$ و $u \geq 0$ را می بینیم درخت $w = w_1$ را به $w = w_2$ نگاشته است.

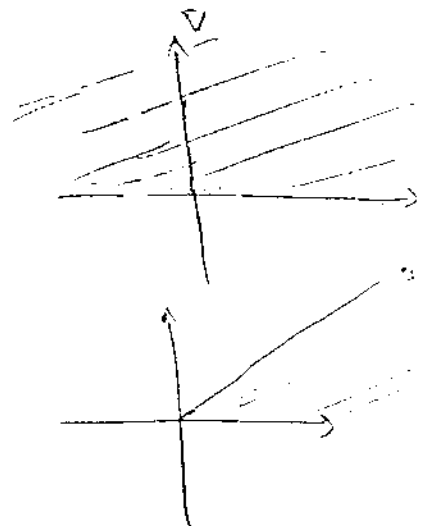


۱۸. نشان دهید که تحت تبدیل $w = (\sin z)^{\frac{1}{2}}$ نوار $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \geq 0$ به روی ناحیه $v \geq 0$ نگاشته است.

در هر خط $u = v$ واقع است. نوار $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \geq 0$ را به $w = w_1^{\frac{1}{2}}$ نگاشته است.

$w_1 = \sin z$ و $w_2 = w = w_1^{\frac{1}{2}}$
 $u = \sin^{\frac{1}{2}} x \cosh^{\frac{1}{2}} y$ و $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \geq 0 \Rightarrow \cos u \leq +\infty$
 $v = \cos^{\frac{1}{2}} x \sinh^{\frac{1}{2}} y$ و $v \geq 0$

$w = w_1^{\frac{1}{2}} \rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$



۱۹- نفساً هر یک از ضلع‌های زیر را با تبدیل $w = \cos z$ مابین.

a) $y \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$

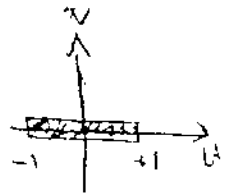
$z = \cos(\pi + iy) = \cos \pi \cosh y + i \sin \pi \sinh y = u + iv$

$y \geq 0 \Rightarrow \cosh y \geq 1$, $\sinh y \geq 0$

$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$, $0 \leq \sin x \leq 1$

$u = \cos x \cosh y$

if $y = 0 \Rightarrow u = \cos x$, $v = 0$



$v = \sin x \sinh y$

if $y \neq 0 \Rightarrow y = c > 0 \Rightarrow u = \cos x \cosh c$

$v = \sin x \sinh c$

$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \quad \forall x \in [0, \pi]$

* نفساً حاصل یک بعضی از خروج از زیر $e = \frac{1}{\cosh c}$ است. در باقر این c در هر یک از دو جهت $\frac{1}{c}$ متقابل می شود.

b) $\frac{1}{c} \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq \pi$

$u = \cos x \cosh y$

$y = c$

$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$

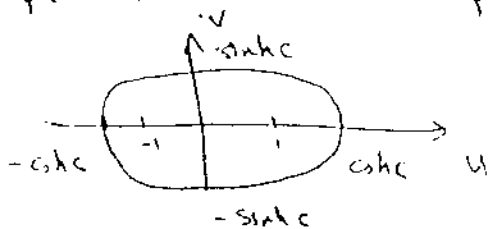
$v = \sin x \sinh y$

$\frac{1}{c} \leq c < 1$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{\cosh c}$

$\frac{1}{c} \leq c \leq 1 \Rightarrow \cosh \frac{1}{c} \leq \cosh c \leq \cosh 1 \Rightarrow \cosh 1 \leq \frac{1}{\cosh c} \leq \cosh \frac{1}{c}$

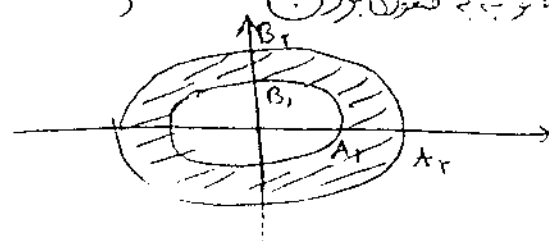
$\forall c \in [\frac{1}{c}, 1]$



با $\frac{1}{c}$ و c معادل بودن \cosh و \sinh

$A_1 = \cosh \frac{1}{c}$
 $A_2 = \cosh 1$

$B_1 = \sinh \frac{1}{c}$
 $B_2 = \sinh 1$



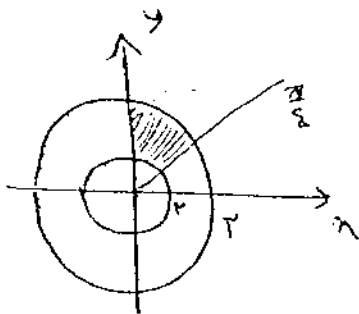
۲۰- مسأله‌ی زیر را حل کنید: $w = \ln z$ ، $r \leq |z| \leq R$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

* جواب: $w = \ln z = \ln |z| + i\theta$ h L اضافه

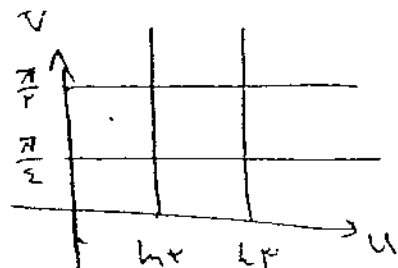
$$r \leq |z| \leq R \Rightarrow \ln r \leq \ln |z| \leq \ln R$$

$$Lr \leq u \leq LR$$

$$v = \theta \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$



$w = \ln z$
→



۲۱- $w = z + \frac{1}{z}$ هر دو نیمه‌ای که در دایره $|z|=1$ قرار دارند

۲۱- با استفاده از صورت کلی z نشان دهید که تبدیل
راشده‌ی پارابول $-2 \leq u \leq 2$ و $v=0$ را نگاشت

$$z = e^{i\theta}$$

* جواب: $|z|=1$ نقاط دایره

$$w = z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos \theta + i \sin \theta + \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta + \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{1} = 2 \cos \theta = u + i v$$

$$v = 0$$

$$u = 2 \cos \theta \Rightarrow -2 \leq u \leq 2$$

a) $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$

مقدار حقیقی - r

$$\cos \bar{z} = \cos(x-iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$$

$$\overline{\cos z} = \overline{w} \quad , \quad w = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\overline{w} = \overline{\cos z} = \cosh y \cos x + i \sinh y \sin x = \cos \bar{z}$$

$$\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$$

$$\sin \bar{z} = \sin(x-iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

$$= \overline{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y} = \overline{\sin z}$$

b) $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \leq \cosh^2 y \cos^2 x + \sinh^2 x \sinh^2 y$$

$$\leq \cosh^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cosh^2 y \quad (\sinh y \leq \cosh y \text{ پاره اول})$$

$$|\cos z| \leq |\cosh y| = \cosh y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \geq \cosh^2 x \sinh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \sinh^2 y$$

$$|\cos z| \geq \sinh y \Rightarrow |\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$$

c) $|\cosh z| \leq \cosh x$

$$|\cosh z| = \frac{1}{r} |e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}| \leq \frac{1}{r} |e^x e^{iy}| + \frac{1}{r} |e^{-x} e^{-iy}|$$

$$|e^{iy}| \leq 1 \Rightarrow |\cosh z| \leq \frac{e^x}{r} + \frac{e^{-x}}{r} = \cosh x$$

d) $\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$

$\sin^{-1} z = w \Rightarrow z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{r^{iw} - 1}{rie^{iw}}$

$e^{r iw} - 1 = r i z e^{iw}, e^{iw} = a$

$a^r - 1 = r i z a \Rightarrow a^r - r i z a - 1 = 0 \quad a = iz + \sqrt{1-z^2} \Rightarrow a = iz + \sqrt{1-z^2} = e^{iw}$

چون e^{iw} مقدار لایه اول در سری توانی $\sin w$ است.

$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \Rightarrow iw = \ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \Rightarrow w = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$

e) $\cos^{-1} z = w \Rightarrow z = \cos w = \frac{e^{iw} + 1}{rie^{iw}}$

$e^{r iw} + 1 - r z e^{iw} = a^r + 1 - r z a = 0 \Rightarrow a = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = e^{iw}$

$\Rightarrow w = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

f) $\cosh^{-1} z = w \Rightarrow z = \cosh w = \frac{e^{rw} + 1}{re^w}$

$a^r + 1 - r a z = 0 \Rightarrow a = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

g) $\tan^{-1} z = w \Rightarrow z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{(e^{iw} - e^{-iw})/ri}{(e^{iw} + e^{-iw})/r}$

$\Rightarrow z = \frac{1}{i} \frac{e^{r iw} - 1}{e^{iw} + 1} = -i \frac{(e^{iw})^r - 1}{(e^{iw})^r + 1} \Rightarrow \frac{1 - a^r}{1 + a^r} = \frac{z}{i} = -iz$

$a^r = \frac{1+iz}{1-iz} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1-iz}{1+iz}} = e^{iw}$

$iw = \ln \left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \ln \frac{1-iz}{1+iz}$

(نابالایه اول در سری توانی)

۱۴ - $\sin z = \sinh \epsilon$ (مقدار حقیقی) و $\cosh \epsilon$ (مقدار تخیلی)

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x = \cosh \epsilon + i 0$$

$$\cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{or} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin x \cdot \cosh y = \cosh \epsilon$$

$$\text{if } y = 0 \Rightarrow \sin x = \cosh \epsilon \quad \times \Rightarrow y \neq 0$$

$$\text{if } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{چون} \Rightarrow -\sinh y = \sinh \epsilon \quad \times$$

$$\text{if } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{چون} \Rightarrow \sinh y = \cosh \epsilon$$

$$y = -\epsilon, \epsilon \Rightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{چون} \\ y = -\epsilon, \epsilon \end{cases} \quad \text{این دو مورد در واقع یکی است: } \cosh y = \sinh y$$

۲۴ - $\cos z = 2$ (مقدار حقیقی) و $\sinh \epsilon$ (مقدار تخیلی)

$$\cos z = 2 \quad \cos(x+iy)$$

$$\cos x \cosh y - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y = 2$$

۱۴ *

$$\sin x \sinh y = 0$$

$$\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \quad \text{I}$$

$$\sinh y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \cos x = 2 \quad \text{غیرممکن}$$

$$\cos x \cosh y = 2$$

I

$$x = 2n\pi \rightarrow \cosh y = 2 \quad \text{غیرممکن}$$

$$x = (2n-1)\pi \rightarrow \cosh y = -2 \quad y = \cosh^{-1} 2$$

$$x = (2n-1)\pi$$

$$y = \cosh^{-1} 2 \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{صورت اول = صورت دوم}$$

۲۳ - نشان دهید $\cos(iz) = \cosh(z)$ اگر $z = n\pi i$

① $\cos iz = \cos i(x+iy) = \cos(-y+ix) = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$ * جواب

② $\cos iz = \cos(-y+ix) = \cos(-y-ix) = \cos y \cosh x - i \sin y \sinh x$

از ① و ② مساوی حاصل می شود.

* نکته: $\cosh x$, $\cos x$ (توانی زوج) و $\sinh x$, $\sin x$ (توانی فرد) هستند.

۲۴ - کنگر نشان دهید $\sinh z = i$ را باید

$\sinh z = i$

* جواب:

$\sinh(x+iy) = \sinh x \cosh iy + \sinh iy \cosh x = \sinh x \cos y + i \sin y \cosh x = i$

$\sinh x \cdot \cos y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{or} \\ y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\sin y \cdot \cosh x = 1$

if $x=0 \Rightarrow \sin y = 1 \Rightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\cosh x$

if $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\cosh x \Rightarrow \cosh x = -1$ ✗

if $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\cosh x \Rightarrow \cosh x = 1 \Rightarrow x = -1, 1$

$$z = r e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad r > 0$$

۲۷- ثابت کنید در

$$\ln z^2 = 2 \ln z$$

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta} \Rightarrow -\pi < 2\theta < \pi$$

* جواب

$$\ln z^2 = \ln |z|^2 + i 2\theta = 2 (\ln |z| + i\theta) = 2 \ln z$$

نشان اصلی

* تحت شرایط $w = z^2$ و $r > 0$ و $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ برای منصفه مشخصه، ابروس

مقادیر، حال اگر $-\pi < \theta < \pi$ باشد منصفه مشخصه در برابر پوشیده می شود.

آب بودن طایفه می باشد.

۲۸- نشان دهید تابع $\frac{\ln(z-i)}{z^2+i}$ در مجرای بیخ حد $y=1$ و $x < 0$ قطعی است.

راه حل اول: z را لزوم کافی برای تحلیلی بودن مستقیم بررسی است.

$$z = x + iy \Rightarrow z - i = x + i(y-1)$$

$$z^2 + i = (x^2 - y^2) + i(2xy + 1)$$

$$\ln(z-i) = \ln|z-i| + i \tan^{-1} \frac{y-1}{x} = \left[x^2 + (y-1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + i \tan^{-1} \frac{y-1}{x}$$

$$\frac{\ln(z-i)}{z^2+i} = P(x,y) + i Q(x,y)$$

حال از شرایط کوشی - رعایت استفاده می کنیم

را محاسبه می کنیم تا بفهمیم تحلیلی بودن تابع را بررسی می کنیم.

$$f(z) = \frac{\ln(z-i)}{z^2+i} \quad \text{و} \quad f'(z) = \frac{z^2(z-i)\ln(z-i) - \ln(z-i)^2(z^2+i)}{(z^2+i)^2}$$

نشان می دهیم $f(z)$ وجود ندارد:

$$1) \text{ if } y=1, x < 0 \Rightarrow z-i = x + i(y-1) = x$$

آنگاه \ln صاف خواهد بود پس در این ناحیه $f(z)$ وجود

دارد و تحلیلی می باشد.

۲) حال در سطح مجرای بیخ حد

$$z^2 + i = 0 \Rightarrow z^2 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow r=1$$

$$\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

حالا روی این قسمت! واقع است که z_1 و z_2 سطح بیخ حد است

$$R^2 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

۲۹- هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید

a. $(1+i)^i \rightarrow 1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ * حل *

$\rightarrow \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{i \ln \sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} (\cos \ln \sqrt{2} + i \sin \ln \sqrt{2})$

b. $(1-i)^{\varepsilon i} \rightarrow 1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$(1-i)^{\varepsilon i} = \varepsilon e^{i\pi} = e^{i \ln \varepsilon} e^{\pi} = e^{\pi} (\cos \ln \varepsilon + i \sin \ln \varepsilon)$

۳۰- نسیب z را بیابید $w = (1-i)z$ باید

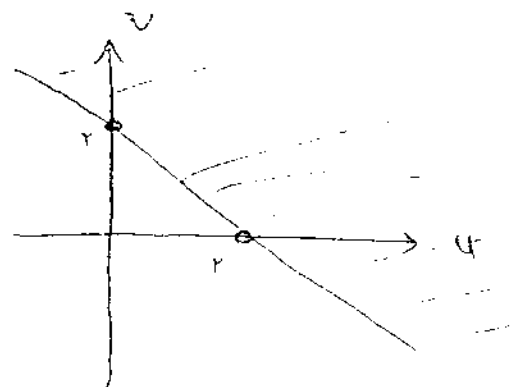
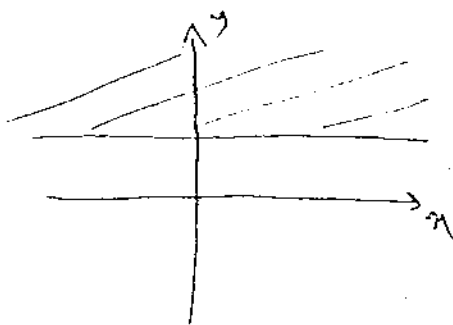
$w = (1-i)(x+iy) = x+y + i(-x+y)$

$u = x+y$

$v = -x+y$

$\rightarrow y = \frac{u+v}{2} \xrightarrow{y > 1}$

$\frac{u+v}{2} > 1 \rightarrow u+v > 2$



۳۱- نفس هذلیک $x^2 - y^2 = 1$ را تبدیل $w = \frac{1}{z}$ با $z = u + iv$ بیانید.

$$f(z) = w = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow z = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$\rightarrow x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{و} \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

$$x^2 - y^2 = 1 : u^2 - v^2 = (u^2 + v^2)^2$$

۳۲- نشان دهید که ترکیب دو تبدیل خطی یک تبدیل خطی است.

* حل: تابع تبدیل هر تبدیل خطی به صورت $w = a_k z + b_k$ است. در آن a_k و b_k اعدادی

$$w_1 = a_1 z + b_1$$

$$w_2 = a_2 z + b_2$$

ترکیب

$$w = w_1 + w_2 = (a_1 + a_2)z + b_1 + b_2 = az + b$$

تبدیل خطی

۳۴. حساب کنید $w = \cosh z$ را بر حسب زلاستهای زیر بنیان نشد.

$$z = e^z, \quad w = \frac{1}{r} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$w = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{r} \left(e^z + \frac{1}{e^z} \right)$$

حل:

$$= \frac{1}{r} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{r} w = \frac{w}{r} ;$$

* ۱- مطابقت محاسبه $\int_C f(z) dz$ در زمان

$z = 1+i$ $\bar{z} = 0$ $y = x^r$ C مسیر $f(z) = \operatorname{Re} z$ (a)

$z = x + iy$ $f(z) = \operatorname{Re} z = x \Rightarrow u = x \quad y = 0$: حل *
 $y = x^r \Rightarrow dy = r x^{r-1} dx$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 x dx - 0 \times dy + i \int_0^1 x dy + 0 \times dx =$$

$$\int_0^1 x dx + i \int_0^1 x^r dx = \frac{1}{r} + \frac{r}{r} i$$

(b) $f(z) = |z|^r$ C دایره واحد

$f(z) = x^r + y^r$ $z = e^{i\theta}$ $dz = i e^{i\theta} d\theta$: حل *

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} 1 \times i e^{i\theta} d\theta = i \left[\frac{e^{i\theta}}{i} \right]_0^{2\pi} = \left[\frac{e^{2\pi i} - e^{0i}}{i} \right] i = 0$$

(c) $f(z) = \cos z$ C دایره $|z| = 1$

تابع تحلیلی پس انتگرال مسطح از صفر به صفر است.

$$\int_{1-i}^{1+i} \cos z dz = \left[\sin z \right]_{1-i}^{1+i} = \sin(1+i) - \sin(1-i)$$

$$= \frac{e^{1+i} - e^{-1-i}}{ri} - \frac{e^{1-i} - e^{-1+i}}{ri} = \frac{e^i (e^1 + e^{-1})}{ri} - \frac{e^{-i} (e^1 + e^{-1})}{ri}$$

$$= (e^{-1} + e^1) \left(\frac{e^i - e^{-i}}{ri} \right) = r \sinh(1) \sin(1)$$

از معرنا $f(z) = \ln(z^r)$ (د) $r + \varepsilon i$ در طول C در نظر بگیرید.

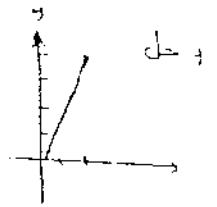
$$f(z) = \ln(z^r) = \ln[x^r - y^r + rxyi] = rxy$$

$$u = rxy$$

$$v = 0$$

$$y = rx$$

$$\Rightarrow dy = r dx$$



$$\int_C f(z) dz = \int_0^r rxy dx - 0 \cdot x dy + i \int_0^r rxy dy + 0 \cdot x dx$$

$$= \int_0^r \sum_{k=1}^r x^k dx + i \int_0^r \sum_{k=1}^r x^k dx = \left[\frac{\sum_{k=1}^r x^k}{r} \right]_0^r + i \left[\frac{\sum_{k=1}^r x^k}{r} \right]_0^r = \frac{r^2}{r} + i \frac{r^2}{r}$$

$$\int_C f(z) dz \leq ML \quad \text{اگر } |f(z)| \leq M \quad \text{و } \int_C dz = L$$

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k$$

اثبات

$$\Delta z_k = \frac{L}{n} \quad k=1, 2, \dots, n$$

طول هر یک از n قسمت مساوی $\frac{L}{n}$ است.

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| \leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(z_k)| \Delta z_k$$

$$\Rightarrow \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n M \frac{L}{n} = ML$$

۳. فرض کنید C توی از دایره $|z|=2$ است که جهت مثبت است. $z=2i$ باشد در ربع اول است انگاه بدون آنکه

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

اینها: $|z|=2 \quad z=2e^{i\theta} \Rightarrow z^2 = 4e^{2i\theta} \quad z^2+1 = 4e^{2i\theta} + 1$

پس $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ $f(z)$ را استخراج کنیم:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|}$$

$$|z^2+1| = |1+4e^{2i\theta}| = |1+4\cos 2\theta + i4\sin 2\theta|$$

$$= \sqrt{(1+4\cos 2\theta)^2 + (4\sin 2\theta)^2} = \sqrt{17+8\cos 2\theta}$$

$$9 \leq \sqrt{17+8\cos 2\theta} \leq 25 \Rightarrow 3 < |z^2+1| < 25$$

$$\frac{1}{25} < \frac{1}{|z^2+1|} < \frac{1}{3}$$

پس $M = \frac{1}{3}$ - سوال قبل - سوال بعد داریم:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

طول L از $z=2$ تا $z=2i$ محیط دایره $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\Rightarrow \left| \int_C \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2}$$

* در پایان بر این توجه فرمایید در سوال ناسید در جواب با این استیلا $\frac{\pi}{3}$ نوشته شده است *

ع- جوابه \leq دایره $|z|=R > 1$ باشد نقطه نشان دهیم

$$\left| \oint_C \frac{\ln z}{z^r} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \ln R}{R}$$

مانند سوال قبل داریم:

$$f(z) = \frac{\ln z}{z^r} \quad z = R e^{i\theta}$$

$$|f(z)| = \frac{|\ln z|}{|z|^r} \quad \ln z = \ln R + i\theta$$

$$|f(z)| = \frac{\sqrt{\ln^2 R + \theta^2}}{R^r}$$

$$R > 1 \Rightarrow \ln R > 0 \Rightarrow \sqrt{\ln^2 R + \theta^2} \leq \theta + \ln R$$

$$|f(z)| \leq \frac{\theta + \ln R}{R^r} \leq \frac{2\pi + \ln R}{R^r}$$

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq ML = \frac{2\pi + \ln R}{R^r} \times 2\pi R = 2\pi \frac{2\pi + \ln R}{R}$$

* اطمینان سوال: دایره $R \rightarrow \infty$ آنگاه نشان دهد $\oint_C \frac{\ln z}{z^r} dz$ به سمت صفر میل کند.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{\ln z}{z^r} dz = 0$$

تقریبی فشرقی را در حد.

ن- کتاب سوال ۵ ندارد.

۴- با نوشتن $\int_a^b dz$ بر حسب انتگرال‌ها، تابع حقیقی متناهی دهیم مقدار انتگرال برابر $b-a$ است.

* اثبات: a و b در عدد مختلط باشند.

$$a = a_1 + a_1 i \quad b = b_1 + b_1 i$$

$$dz = dx + i dy$$

$$\int_a^b dx + i dy = \int_a^b dx + i \int_a^b dy$$

* باید توجه داشت که a و b مختلطی باشند و dx و dy حقیقی و باید در آن انتگرال را به دو انتگرال حقیقی تبدیل کرد.

$$\int_a^b dz = \int_{a_1}^{b_1} dx + i \int_{a_1}^{b_1} dy = b_1 - a_1 + i(b_1 - a_1) = b_1 + i b_1 - (a_1 + i a_1) = b - a$$

— v

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n; \quad a_n \neq 0$$

۱- نشان دهید که

یک چندجمله‌ای از درجه n باشد به ازای $n \geq 1$ آنکه عدد مثبتی R موجود است به طوری که برای هر z با $|z| > R$

$$|P(z)| > \frac{|a_n| |z|^n}{2}$$

$|z| > R$ داریم:

$$q(z) = \frac{a_n}{2} z^n$$

ادوات:

$$\forall R \ni |P(z)| > |q(z)| \Rightarrow |P(z)| < |q(z)| = \frac{a_n}{2} |z|^n$$

نقض می‌کنیم:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = H(z) + a_n z^n$$

$$\Rightarrow |H(z) + a_n z^n| < \frac{|a_n|}{2} |z|^n$$

$\exists z_1 \in \mathbb{C} \ni H(z_1) = 0$ $H(z)$ یک چندجمله‌ای است بر مبنای قضیه اساسی جبری داریم:

$$\text{if } H(z_1) = 0 \Rightarrow |a_n| |z_1|^n < \frac{|a_n|}{2} |z_1|^n \quad \times$$

در نتیجه R وجود دارد.

4- نشان دهید که در صورتی که f در درون C و در سطح C تحلیلی باشد و z_0 در C نباشد، آنگاه:

$$\int_C \frac{f'(z) dz}{z-z_0} = \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^2}$$

* اثبات: مطابق قضیه انترال کشی در f در C تحلیلی باشد آنگاه f نیز در آن نقطه تحلیلی است پس طبق:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z-z_0}$$

تقریباً فوقی برای تابع تحلیلی $f(z)$ در $z=z_0$ به کار می بریم.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z) dz}{z-z_0} \quad \text{I}$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^2} \quad \text{II}$$

از طرفی مطابق قضیه ۲ در صفحه ۲۰۵

$$\text{I}, \text{II} \Rightarrow \oint_C \frac{f'(z) dz}{z-z_0} = \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^2}$$

۵-۱- فرض کنید f در ناحیه R و در افق R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیر ثابت باشد. با فرض اینکه f در R جازر $f(z) \neq 0$:

تابع $\frac{1}{f(z)}$ را در نظر بگیرید ثابت کنید $|f(z)|$ جزی R دارای مقدار حینیم M است و برای هر N در R داریم $|f(z)| > N$

* اثبات: چون $f(z) \neq 0$ آن گاه $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ و $g'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$

$g(z)$ در ناحیه R تحلیلی است از طرفی چون $f(z)$ غیر ثابت است پس $g(z)$ نیز غیر ثابت است. چون شرایط قضیه

امله ماکزیمم برای $g(z)$ برقرار است پس:

$$\exists z_0 \in R \Rightarrow g(z_0) = \max g(z) \quad (R \text{ ماز } C \text{ است})$$

$$g(z_0) = M \quad |g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \ll M \Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} \ll M \Rightarrow |f(z)| \gg \frac{1}{M} = N$$

$$\forall z \in R : |f(z)| \geq N$$

$$|f(z)| > N$$

مانند در این نامساوی در مورد نقطه z_0 در R حاصل می شود ولی برای نقاط داخلی R (همان چیز که در سوال مطرح شد)

۱۱- فرض کنید f تابعی باشد به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| \leq A|z|$ در آن A عددی ثابت است

است. نشان دهید یا از آن مرز، $f(z) = 0$ و یا برای هر z $f(z) = a_1 z$ و $a_1 \neq 0$

* اثبات: ابتدا باید نشان دهیم اگر f و g در ناحیه حسیب ساره در آن D تعلق داشته و:

$$\text{if } \forall z : |f(z)| \leq |g(z)| \quad \xrightarrow{\text{نقطه}} \quad |f'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^2} \quad \text{*(روی مرز حسیب ساره)}$$

$$|f(z)| \leq |g(z)| \Rightarrow \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^2|} \leq \frac{|g(z)|}{|(z-z_0)^2|} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{|f(z)| dz}{|(z-z_0)^2|} \leq \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{|g(z)| dz}{|(z-z_0)^2|}$$

$$|f'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$$

$$|f(z)| \leq A|z| = |Az|$$

حالا سوال برین موزم :-

$$|f'(z)| \leq |A| = A$$

چون f تمام است پس f' نیز تمام است، از طرفی نشان دادیم $f'(z)$ در آن در راستای شرایط قضیه تا لیورویل

$$f'(z) = c$$

برآورده شد. در نتیجه، نتیجه قضیه نیز تعلق می شود یعنی:

$$\text{if } c = 0 \Rightarrow f(z) = 0$$

$$\text{if } c \neq 0 \Rightarrow f(z) = cz = a_1 z \quad \text{و} \quad a_1 \neq 0$$

a) $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) (z+1)^n \quad ; |z+1| < 1$

* ۱۳۰ - سان دهم

$z_0 = -1$

شرایط همبستگی بیلور را دارد

$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n$

$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad c_0 = \frac{f(-1)}{0!} = 1 \quad c_1 = \frac{f'(-1)}{1!} = 2 \quad c_2 = \frac{f''(-1)}{2!} = 3 \dots$

$\Rightarrow \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) (z+1)^n$

b) $\frac{1}{z^2} = f(z) \quad |z-2| < 2 \quad z_0 = 2$

$c_0 = \frac{f(z)}{0!} = \frac{1}{2} \quad c_1 = \frac{f'(z)}{1!} = \frac{-2}{1!} = -\frac{1}{2}$ باز هم شرایط همبستگی بیلور را دارد

$c_2 = \frac{f''(z)}{2!} = \frac{4}{2!} = \frac{2}{1} = 2 \quad c_3 = \frac{f'''(z)}{3!} = \frac{-12}{3!} = -\frac{2}{1}$

$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^n} (n+1)$

c) $\frac{1}{z(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{z^{n+1}}$

$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2z} \times \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

با توجه به بسط

$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots$ (I) برای $\frac{1}{1-z}$ خالص راست

$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{z^2} + \frac{z}{z^3} + \dots$ (I) ضرب کنیم حال داشته

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{z^{n+1}}$

۱۴- سری تیلور مرتبه ۳ از تابع زیر را حول نقطه داده شده بدست آورید.

a) $f(z) = \cos z$; $z = \frac{\pi}{4}$

$$f(z) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)(z - \frac{\pi}{4}) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}(z - \frac{\pi}{4})^2 + \dots$$

$$= -\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!}(z - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{4!}(z - \frac{\pi}{4})^3 + \dots$$

b) $f(z) = \sinh z$; $z = \pi i$ $f'(z) = \cosh z$, $f''(z) = \sinh z$

$$f(z) = f(\pi i) + f'(\pi i)(z - \pi i) + \frac{f''(\pi i)}{2!}(z - \pi i)^2 + \dots$$

$$= \sinh \pi i + \cosh \pi i (z - \pi i) + \frac{\sinh(\pi i)}{2!}(z - \pi i)^2 + \dots$$

$$= i \sin \pi + \cos \pi (z - \pi i) + \frac{i \sin \pi}{2!}(z - \pi i)^2 + \dots$$

$$= -(z - \pi i) - \frac{1}{2!}(z - \pi i)^2 - \frac{1}{4!}(z - \pi i)^3 - \dots$$

c) $f(z) = z^3$, $z = -1$ $f'(z) = 3z^2$, $f''(z) = 6z$, $f'''(z) = 6$, $f^{(4)}(z) = 0$, $f^{(5)}(z) = 0$, $f^{(6)}(z) = 0$, ...

$$f(z) = -1 + 3(z+1) - 1 \cdot (z+1)^2 + \dots + \frac{6}{3!}(z+1)^3 + 0 + \dots$$

d) $f(z) = (z+1)^4$ $z = ri$ $f'(z) = 4(z+1)^3$, ... $f''(z) = 12(z+1)^2$, $f'''(z) = 24(z+1)$, $f^{(4)}(z) = 24$, $f^{(5)}(z) = 0$, ...

$$f(z) = (1+ri)^4 + 4(1+ri)^3(z-ri) + 6(1+ri)^2(z-ri)^2 + 4(1+ri)(z-ri)^3 + 0 + \dots$$

e) $f(z) = \sin z^2$ $z = 0$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \Rightarrow \sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots$$

f) $f(z) = \ln z$; $z = 1$ $f'(z) = \frac{1}{z}$ $f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{z^n}$ $n \geq 2$

$$f(z) = f(1) + f'(1)(z-1) + \frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2 + \dots$$

$$= (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3 - \dots$$

۱۵. در بیان تئوری ضرب زنجیره‌ای در سری توانی

c) $f(z) = e^z \sin z$

$$z^2 = 1 + z + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^3}{2!} + \dots = \sum a_n z^n, \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum b_n z^n$$

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

if $\forall z: |z| < R : \sum a_n z^n \rightarrow$ *سری اول*

$\forall z: |z| < R : \sum b_n z^n \rightarrow$ *سری دوم*

در صورتی که سری اول و دوم

$$\left(\sum a_n z^n \right) \left(\sum b_n z^n \right) = \sum c_n z^n \quad \text{و} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$\Rightarrow c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$

$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 + \dots$

$f(z) = z + z^2 + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) z^3 + \dots$

b) $f(z) = z \cot z$

$$g(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) \dots$$

$$= \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) z + \dots$$

$$\left(-\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \right) z^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \right) z^4 + \dots$$

$$\left[\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) z^1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) z^3 + \dots \right]$$

$$\left[\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \right) + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) \right] z^2 + \dots$$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) z + \dots$$

$$z \cot z = 1 + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) z^2 + \dots$$

c) $f(z) = z \sin z^2$

المسئله 15 سور 3

$\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots$ و $z = 0 + 1z + 0z^2 + 0z^3 + \dots$

مبتدایه‌ی ضرب سری همانه سور 3 توضیح داده شد داریم:

$$f(z) = z^3 - \frac{z^7}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

14. هرید از انواع زیر احوال مبراهتات به صورت سری توان بسازید

a) $\frac{e^{rz}}{z^3}$: $e^{rz} = 1 + rz + \frac{(rz)^2}{2!} + \frac{(rz)^3}{3!} + \frac{(rz)^4}{4!} + \dots$

$\Rightarrow \frac{e^{rz}}{z^3} = z^{-3} + rz^{-2} + \frac{r^2}{2} z^{-1} + \frac{r^3}{6} z + \dots$

b) $z \cos \frac{1}{z} = z \left(1 - \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{4! z^4} - \frac{1}{6! z^6} + \dots \right)$
 $= z - \frac{1}{2! z} + \frac{1}{4! z^3} - \frac{1}{6! z^5} + \dots$

c) $\frac{\sinh \pi z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left(\pi z + \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} + \dots \right) = \pi z^{-2} + \frac{\pi^3}{3!} z^0 + \frac{\pi^5}{5!} z^2 + \dots$

d) $\frac{1}{z^2 + z^4} = \frac{1}{z^2(1+z^2)} = \frac{1}{z^2} \left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \right)$ $|z| < 1$
 $= z^{-2} - 1 + z^2 - z^4 + \dots$ $|z| < 1$

توجه شود سری دایره سطح حلقه‌ای است و در عمق شور 145 باشد

e) $\frac{z-1}{z^2-z^3} = \frac{-(z-1)}{z^2(z-1)(1+z)} = \frac{-1}{z^2(1+z)} = \frac{-1}{z^2} \left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots \right)$

f) $z^2 \cosh \frac{1}{z} = z^2 \left(1 + \frac{(\frac{1}{z})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{z})^4}{4!} + \dots \right) = z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{24} z^{-2} + \dots$

۱۷- بسط انشان حرب از واقع زیر در نقاط داده شده درست آید.

a) $\frac{e^z}{(z-1)^2}$; $z_0 = 1$

$e^z = 1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \dots$ انباشتی تیلور $z_0 = 1$ را در نظر بگیرید.

$f(z) = (z-1)^{-2} e^z = (z-1)^{-2} + (z-1)^{-1} + \frac{1}{2!} (z-1)^0 + \frac{(z-1)}{3!} + \dots$

b) $\frac{1}{z^2+1}$; $z_0 = i$

$\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z+i} = \frac{P(z)}{z-i}$, $P(z) = \frac{1}{z+i}$, $P(z) = \frac{(-1)^n n!}{(z+i)^{n+1}}$

$\frac{P(i)}{1!} = \frac{(-1)^n}{(1!)^{n+1}} \Rightarrow P(z) = \frac{1}{2!} + \frac{(z-i)}{3! \times 1} + \frac{(z-i)^2}{4! \times i^2} + \frac{(z-i)^3}{5! \times 1} + \dots$

$\Rightarrow P(z) = -\frac{i}{2} + \frac{(z-i)}{3} + \frac{i}{8} (z-i)^2 + \frac{1}{14} (z-i)^3 + \dots$

$\frac{1}{z^2+1} = \frac{P(z)}{z-i} = -\frac{i}{2} (z-i)^{-1} + \frac{1}{3} + \frac{i}{8} (z-i) + \frac{1}{14} (z-i)^2 + \dots$

c) $\frac{z+i+1}{(z+i)^2}$; $z_0 = -i$

چون $P(z)$ چند جمله ای است پس سری تیلورش با انوشن می آید.

$P(z) = 1 + (z+i) + 0 (z+i)^2 + \dots$

$(z+i)^{-2} P(z) = (z+i)^{-2} + (z+i)^{-1} + 0 + 0 + 0 + \dots$

d) $\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}$; $z_0 = \frac{\pi}{2}$

$f(z) = \sin z = (z-\frac{\pi}{2}) - \frac{(z-\frac{\pi}{2})^3}{3!} + \frac{(z-\frac{\pi}{2})^5}{5!} - \dots$

$f(z) = (z-\frac{\pi}{2})^{-3} P(z) = (z-\frac{\pi}{2})^{-3} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} (z-\frac{\pi}{2})^2 + \dots$

۱۸- با استفاده از سری مللرون $\frac{1}{1-z}$ نشان دهید

a) $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$ (I)

$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$

$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$

مشتق نسبت به z از رابطه (I) ←

$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$

b) $\frac{z^2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$

$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$

مشتق از طرف راست نسبت به z بگیریم:

۱۹- با استفاده از سری مللرون $\frac{1}{1+s}$ و رابطه $s = z^{-1}$ در داخل رابطه $\ln(z+1)$ نشان دهید

$\ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} ; |z| < 1$

$\frac{1}{1+s} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots ; |s| < 1$

$\int \frac{ds}{1+s} = \int (1 - s + s^2 - s^3 + \dots) ds$

این عملیات در هر دو طرف انجام می‌دهیم و آن زمان هم به جملات نشان می‌دهیم

$\ln(1+s) = \left[s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \dots \right]$

$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} ; |z| < 1$

۲-۱-۲. انتگرال لورانه $f(z) = z^{-1} \ln(z+1)$ را در پهنای $|z| < 1$ حساب کنید.

در این پهنای $\ln(z+1)$ را به صورت $\ln(1+z)$ می‌نویسند.

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad ; \quad |z| < 1$$

$$f(z) = z^{-1} \ln(1+z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots + \frac{(-1)^n z^n}{n+1} + \dots$$

عبارت از حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ و $a_n = \frac{(-1)^n z^n}{n+1}$ است.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{|z|}{1} < 1 \Rightarrow |z| < 1$$

از طرف دیگر چون $f(z)$ را به صورت $\ln(1+z)$ می‌نویسیم پس در پهنای $|z| < 1$ تعریف می‌شود.

پس تابع $f(z)$ در پهنای $|z| < 1$ تعریف است.

۲-۱-۳. انتگرال لورانه $f(z)$ را در z_0 تا $f^{(m)}(z_0)$ بسازید.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z-z_0)^{m+1}} f(z) & ; z \neq z_0 \\ \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(z_0) & ; z = z_0 \end{cases}$$

درجه تعریف است.

* اثبات: $f(z)$ در z_0 تا $f^{(m)}(z_0)$ بسازید.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z-z_0)^m + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n + \dots$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z-z_0)^m + \dots$$

$$f(z) = \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z-z_0)^{m+1} + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!} (z-z_0)^{m+2} + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n + \dots$$

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} = \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!} (z-z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-m-1} + \dots$$

این تابع در z_0 تعریف می‌شود. $z = z_0$ را بیرون از پهنای $|z| < 1$ می‌نویسیم.

تعریف $f(z)$ در z_0 را به صورت $f^{(m+1)}(z_0)$ می‌نویسیم.

* ۱۲ - مطلوب است محاسبی مانند هر یک از توابع زیر در نقاط مشخص شده:

a) $\frac{1}{1-e^z}$ $z=0, 2\pi i, 4\pi i, \dots$

$\text{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} (z) \frac{1}{1-e^z} \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{-e^z} = -1$

* برای تعیین نقاط تفریب توان مقادیر را در نقاط حساب کرد

b) $\frac{z}{z^2-1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)}$ $z = \pm i, \pm 1$

$\text{Res}_{z=1} \frac{z}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z+i)(z-i)(z+1)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$

* برای تعیین نقاط تفریب در این صورت عمل کنید

c) $\frac{4-2z}{z^2(z+2)}$ $z=0, 0, z=-2$

$\text{Res}_{z=0} [f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{4-2z}{z^2(z+2)} z^2 \right) = -2$

* برای $z=-2$ به صورت مثال قبل مورد عمل کنید

d) $\frac{1}{(z^2-1)^2}$ $z^2=1$ $z = \pm 1$ $z = \pm 1$ $z = \pm 1$ $z = \pm 1$ $z = \pm 1$ $z = \pm 1$ $z = \pm 1$

$\text{Res}_{z=1} [f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z-1)^2 (z+1)^2 (z-i)^2 (z+i)^2} \right) = \dots$

* برای تعیین درجه تفریب در این صورت عمل کنید

e) $\frac{z+2}{(z+1)(z-2-i)(z+2+i)}$ $z = -1, 2-i, 2+i$

* برای تعیین درجه تفریب در این صورت عمل کنید

f) $\frac{-z^2+8-12z}{z(z-1)(z-2)}$ $z = 0, 1, 2$

* مثال مورد b

۲۳. مطلوب است حاصل انتگرال را بیابید:

a) $\oint_{|z|=1} z \cos z \, dz = 0$

$|z|=1$ در دایره یکبار دور می‌ماند پس در این دایره هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که در آنجا تابع مشتق پذیر نباشد.

b) $\oint_{|z|=1} \tan z \, dz = 0$

تبدیلی نیست

c) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)_{z=0} = 2\pi i C_{-1}$

$\sin \pi z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

$\frac{\sin \pi z}{z^2} = z^{-2} - \frac{z^{-1}}{3!} + \frac{z}{5!} - \dots \Rightarrow C_{-1} = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \oint_{|z|=1} f(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}$

d) $\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^2 - rz} = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)_{z=0}$

$z=0$ تنها نقطه‌ای است که در دایره قرار دارد.

$C_{-1} = \operatorname{Res} f(z)_{z=0} = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} z^r f(z)$

$= \frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^r}{dz^r} \left(\frac{z+1}{z-r} \right) = \frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{r}{(z-r)^2} = -\frac{r}{r}$

$\oint_{|z|=1} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{r}{r}\right) = -2\pi i$

$$e) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \Delta z^r + z^r} = r\pi i \operatorname{Res} f(z)_{z=0}$$

$$z^2 + \Delta z^r + z^r = z^r (z^r + \Delta z + 4) = z^r (z+r)(z+r) = 0$$

$$z=0 \quad \text{نقطه صفر}$$

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^r \frac{1}{z^r(z+r)(z+r)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^r + \Delta z + 4} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-rz + \Delta}{(z^r + \Delta z + 4)^r} = \frac{\Delta}{r4} \end{aligned}$$

$$\oint f(z) dz = r\pi i \frac{\Delta}{r4} = \frac{r\pi i}{1A}$$

$$f) \oint_{|z|=1} \frac{4z^r - \varepsilon z + 1}{(z-r)(1+\varepsilon z^r)} dz$$

$$|z|=1$$

$$1 + \varepsilon z^r = 0 \Rightarrow z^r = i^r \frac{1}{\varepsilon} \quad z = \pm \frac{1}{r}$$

$$\oint f(z) dz = r\pi i \left[\operatorname{Res} f(z)_{z=-\frac{1}{r}} + \operatorname{Res} f(z)_{z=\frac{1}{r}} \right]$$

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=\frac{1}{r}} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{r}} \left(z - \frac{1}{r} \right) \frac{4z^r - \varepsilon z + 1}{\varepsilon(z-r)(z-\frac{1}{r})(z+\frac{1}{r})} = \frac{-\frac{r}{r} - ri + 1}{\varepsilon i (-r + \frac{1}{r})} = \alpha$$

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=-\frac{1}{r}} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{r}} \left(z + \frac{1}{r} \right) \frac{4z^r - \varepsilon z + 1}{\varepsilon(z-r)(z-\frac{1}{r})(z+\frac{1}{r})} = \frac{1 + ri - \frac{r}{r}}{\varepsilon i (r + \frac{1}{r})} = \beta$$

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = r\pi i (\alpha + \beta)$$

$$g) \oint_{|z|=1} \frac{z^r - rz^{r+1}}{(rz+1)(z^r+\varepsilon)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z+1/\varepsilon} dz = \frac{1}{r} \oint_C \frac{f(z)}{z+1/\varepsilon} dz = \frac{1}{r} r\pi i \lim_{z \rightarrow -1/\varepsilon} f(z) =$$

$$= r\pi i \lim_{z \rightarrow -1/\varepsilon} \frac{z^r - rz^{r+1}}{z^r + \varepsilon} = r\pi i \cdot \frac{1/\varepsilon^r + r/\varepsilon^{r+1}}{\varepsilon + 1/\varepsilon} = r\pi i / \varepsilon$$

$$h) \oint_{|z|=1} \frac{e^{(z-i)\pi/4}}{\sin z} dz = \oint_C f(z) dz = r\pi i \operatorname{Res} f(z) = r\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{(z-i)\pi/4}}{\cos z}$$

$$= r\pi i \cdot \frac{e^{-i\pi/4}}{1} = -r\pi i$$

∴ obd. $q(z_0) = 0, p(z_0) \neq 0 \Rightarrow F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$

$$\operatorname{Res} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)-0}{z-z_0}}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{b(z)}{q(z)-q(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

$$i) \int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2 - r^2 i} dz = \oint_C \frac{(\cosh z)/z^2 - r^2 i}{z} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z} dz$$

$$= r\pi i \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{f(z)}{z} = r\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cosh z}{z^2 - r^2 i} = r\pi i \cdot \frac{1}{-r^2 i} = \frac{-r\pi}{r}$$

$$j) \int_{|z|=1} \frac{r_0 z^r - rz + \delta}{(rz-1)^r (rz-1)} dz = r\pi i [\operatorname{Res} F(z) + \operatorname{Res} F(z)]$$

$$\operatorname{Res} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1/r} \frac{1}{r} \frac{d}{dz} (z - 1/r)^r \cdot \frac{r_0 z^r - rz + \delta}{(rz-1)(z-1/r)^r} =$$

$$\frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow 1/r} \frac{d}{dz} \frac{r_0 z^r - rz + \delta}{rz-1} = \frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow 1/r} p(z) = \frac{1}{r} p(1/r)$$

$$\operatorname{Res} F(z) = \frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow 1/r} \frac{r_0 z^r - rz + \delta}{(rz-1)^r} = \frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow 1/r} q(z) = \frac{1}{r} q(1/r)$$

$$\oint_C f(z) dz = r\pi i \left[\frac{1}{r} p(1/r) + \frac{1}{r} q(1/r) \right]$$

$$k) \int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z(z^r+1)} dz = r\pi i \operatorname{Res} F(z) = r\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cosh z}{1+z^r} = r\pi i$$

$$l) \int_{|z|=1} \frac{e^z \cosh z}{\cosh z} dz = 0$$

$$m) \int_{|z|=r} \frac{-z^2 - 12z + 11}{z^2 - 6z + 11} dz = z(z^2 - 6z + 11) = z(z-1)(z-11)$$

$$I = \oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res } f(z)_{z=0} + \text{Res } f(z)_{z=1}]$$

$$\text{Res } f(z)_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z^2 - 12z + 11}{z^2 - 6z + 11} = \frac{11}{11} = 1$$

$$\text{Res } f(z)_{z=1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-z^2 - 12z + 11}{z^2 - 6z + 11} = \frac{-1 - 12 + 11}{-5} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} \quad I = 14\pi i$$

* (۲۴) مطلوب است محاسبه کمریک از انتگرال‌های زیر

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r + \cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(r + \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \right)} = \oint \frac{r dz}{i(z^2 + iz^2 + 1)}$$

$$z_1 = \frac{-4i + i\sqrt{12}}{2i} \quad z_2 = \frac{-4i - i\sqrt{12}}{2i}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{12} - 4}{2} = \sqrt{3} - 2$$

$$z_2 = -2 - \sqrt{3}$$

در داخل دایره محاطه

در خارج دایره محاطه

$$I = 2\pi i \text{Res} \left[\frac{1}{z + 2 + \sqrt{3}} \right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow \sqrt{3} - 2} \frac{1}{z + 2 + \sqrt{3}} = 2\pi i \times \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{3}\cos\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{1 + \frac{z^2+1}{6z}} = -4i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}$$

$$= (-4i)(2\pi i) \text{Res } f(z)_{z=-2+2\sqrt{2}} = 12\pi \lim_{z \rightarrow -2+2\sqrt{2}} \frac{1}{z+4} = 12\pi \alpha$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - \lambda \cos \theta} d\theta \Rightarrow I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{r} (z + \frac{1}{z})}{1 - \frac{\lambda}{r} (z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{r} (z^r + 1)}{iz (1 - \frac{\lambda}{r} z^r - \frac{\lambda}{r} z^{-r})} dz \quad z=0$$

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{-\lambda} = 1, 4 \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \lambda^2}}{-\lambda} = 2, 4$$

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} [f(z)] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{r} (z^r + 1)}{1 - \frac{\lambda}{r} z^r - \frac{\lambda}{r} z^{-r}} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{-\lambda}$$

$$\times 2\pi i = \frac{\pi}{r}$$

$$d) I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{1 - 4 \cos \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{r} (z + \frac{1}{z})}{1 - 4 \times \frac{1}{r} (z + \frac{1}{z})} \times \frac{dz}{iz}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^r + 1}{r z^r (1 - 4z^r - \frac{4}{z^r})} \times \frac{dz}{i} \quad z=0 \text{ (شماره 3 مختلف)}$$

$$\oint \frac{z^r + z^{-r}}{i r z^r (1 - 4z^r - 4z^{-r})} = \oint \frac{z^r + z^{-r}}{i r (1 - 4z^r - 4z^{-r}) z^r} dz$$

$$z^r = 1/4 \quad z = \pm \sqrt[4]{1/4} \quad z^r = r/4 \quad z = \pm \sqrt[r]{r/4}$$

$$I = \oint \frac{z^r + z^{-r}}{r z^r i (z - \sqrt[4]{1/4})(z + \sqrt[4]{1/4})(z - \sqrt[r]{r/4})(z + \sqrt[r]{r/4})} dz =$$

$$2\pi i \sum \operatorname{Res} [f(z)]$$

$$z = \sqrt[4]{1/4}, -\sqrt[4]{1/4}, -\sqrt[r]{r/4}, \sqrt[r]{r/4}, \dots$$

$$e) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r + \cos \theta} d\theta$$

$$\int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{r}(z + \frac{1}{z})}{r + \frac{1}{r}(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{z^r + 1}{iz(z^r + rz + 1)} dz$$

نقطه بحرانی

$z_r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ نقطه بحرانی

$z_r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

نقطه بحرانی

$$I = 2\pi i \sum_{z=0, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i} \text{Res} [F(z)]$$

$$f) I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^r \theta}{\Delta - \epsilon \cos^r \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{r^r} (z - \frac{1}{z})^r}{\Delta - \epsilon [\frac{1}{r} (z^r + \frac{1}{z^r})]} \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint \frac{-\frac{1}{r} (z^r - r + \frac{1}{z^r})}{\Delta z - r z^r - \frac{r}{z}} = \oint \frac{-\frac{1}{r} (z^r - r z^r + 1)}{(\Delta z^r - r z^{\Delta} - r z)} \frac{dz}{i}$$

$$= \oint \frac{-\frac{1}{r} (z^r - 1)^r}{z(\Delta z^r - r z^{\Delta} - r)} \frac{dz}{i}$$

$$I = 2\pi i \left[\lim_{z \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{-\frac{1}{r} (z^r - 1)^r}{z(z - r)} + \lim_{z \rightarrow r} \frac{-\frac{1}{r} (z^r - 1)^r}{z(z - \frac{1}{r})} + \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{r} (z^r - 1)^r}{(z - \frac{1}{r})(z - r)} \right]$$

$$g) I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^r \theta}{r^r - 10 \cos^r \theta} d\theta = \oint \frac{\frac{1}{r} (z + \frac{1}{z})^r}{r^r - 10 (\frac{1}{r} (z^r + \frac{1}{z^r}))} \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint \frac{\frac{1}{r} (z^r + 1)^r}{i(r^r z^r - \Delta z^{\Delta} - \Delta z)} = \oint \frac{\frac{1}{r} (z^r + 1)^r}{iz(r^r z^r - \Delta z^{\Delta} - \Delta)}$$

$$z^r = \frac{-r^r \pm r^r}{-10} \rightarrow \Delta$$

$$z_{\Delta} = 0$$

$$z_{\Delta} = \sqrt{\frac{r^r}{10}}$$

$$z_r = -\sqrt{\frac{r^r}{10}}$$

$$z_r = -\sqrt{\frac{r^r}{10}}$$

$$z_{10} = \sqrt{\frac{r^r}{10}}$$

$$h) I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^r \theta}{a - r \cos^r \theta} d\theta$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{r} (z^r + \frac{1}{z^r})^r}{(a - r \times \frac{1}{r} (z^r + \frac{1}{z^r}))} \frac{dz}{iz} = \oint \frac{\frac{1}{r} (z^r + 1)^r}{z^r (a - r z^r - \frac{r}{z^r})} \frac{dz}{i}$$

$$= \oint \frac{1}{r z^{\Delta}} \frac{(z^r + 1)^r}{(\Delta z^r - r z^r - r)} dz \quad z=0 \quad z_1=0 \quad z^r = r \quad z^r = 1/r$$

$$z_r = -\sqrt[r]{r} \quad z_r = \sqrt[r]{r} \quad z_e = -\sqrt[r]{1/r} \quad z_d = \sqrt[r]{1/r}$$

$$I = 2\pi i \left[\lim_{z \rightarrow -\sqrt[r]{r}} \frac{(z^r + 1)^r}{r z^{\Delta} (z - \sqrt[r]{r})(z + \sqrt[r]{1/r})(z - \sqrt[r]{1/2})} + \lim_{z \rightarrow \dots} z^r + 1 \dots \dots \right]$$

$$j) I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r + \frac{r}{r} \sin^r \theta} d\theta \quad \cos \theta = \frac{1}{r} (z + \frac{1}{z})$$

$$\sin^r \theta = \frac{1}{r^i} (z^r - \frac{1}{z^r}) \quad db = \frac{dz}{iz}$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{r} (z + \frac{1}{z})}{r + \frac{r}{r} \times \frac{1}{r^i} (z^r - \frac{1}{z^r})} \frac{dz}{iz} = \oint \frac{\frac{1}{r} (z^r + 1)}{i (r z^r + \frac{r}{r^i} z^e - \frac{r}{r^i})} dz$$

$$= \oint \frac{\frac{1}{r} (z^r + 1)}{r z^e + r^i z^r - r} dz \quad z^r = \frac{-r^i \pm 11/r^i}{r}$$

$$z^r = -r^i / r^i$$

$$z^r = -0.1/r^i$$

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^r \theta} = \pi \sqrt{r}$

$$1 + \sin^r \theta = 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \cos 2\theta = \frac{r}{r} - \frac{1}{r} \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{r + r \tan^2 \theta - 1 + \tan^2 \theta}{r(1 + \tan^2 \theta)} = \frac{r + r \tan^2 \theta}{r(1 + \tan^2 \theta)} = \frac{1 + r \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{1 + (r \tan^2 \theta)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 + ru^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1} u + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1} \theta \tan \theta + C = \frac{\theta}{\sqrt{r}} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{r\pi}{\sqrt{r}} = \pi \sqrt{r}$$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{dn}{1 + a \cos n} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \quad -1 < a < 1$

$$r \cos n = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} \quad z = e^{i\theta} \quad dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \Rightarrow \oint \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{az^2 + rz + a}{rz}} = \frac{z}{i} \oint \frac{dz}{az^2 + rz + a}$$

$$az^2 + rz + a = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$$

$$\oint_{|z|=1} F(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} F(z)$$

$$|z| < 1 \quad z = \frac{-1 + \sqrt{1-a^2}}{a} = z_0$$

$$\operatorname{Res} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{az + r} = \frac{1}{r - r + r\sqrt{1-a^2}}$$

$$\int \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = \frac{r}{i} \times 2\pi i \times \frac{1}{r\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

c) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^r} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^r} \quad ; a > 1$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} + \frac{1}{rz} = \frac{z^2 + 1}{rz} \quad a + \cos \theta = a + \frac{z^2 + 1}{rz} = \frac{z^2 + raz + 1}{rz}$$

$$\int_0^{\pi} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 + raz + 1)^r} = \left(\frac{\pi}{i} \sum_{|z| < 1} \operatorname{Res} F(z) \right) 2\pi i = 2\pi \operatorname{Res} F(z)$$

$$z = z_0$$

$$z^2 + raz + 1 = 0 \Rightarrow z = -ra \pm \sqrt{r^2 a^2 - r} \quad z = -ra \pm r\sqrt{a^2 - 1}$$

$|z| = r$ در دایره $z_0 = -ra + r\sqrt{a^2-1}$

$Res F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z-z_0)^r f(z)$

$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{r/2}}$ با ضرب در سن لری تبدیل کنیم

d) $\int_0^{2\pi} \sin^n \theta d\theta = \frac{(2n)!}{r^n (n!)^2} \pi$; $n=1, 2, \dots$

$(\sin^r \theta)^n \Rightarrow \sin \theta = \left((z - \frac{1}{z}) \frac{1}{2i} \right)^r = -\frac{1}{r} (z^r + \frac{1}{z^r} - 2) = \frac{-z^r + 1 + rz^r}{r z^r}$

$d\theta = \frac{dz}{iz} \Rightarrow \frac{(-z^r + 1 + rz^r)^n}{r^n z^{rn}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{ri} \frac{(-z^r + 1 + rz^r)^n}{z^{rn+1}}$

$\frac{1}{ri} \oint_{|z|=1} \frac{(-z^r + 1 + rz^r)^n}{z^{rn+1}} dz = \frac{1}{ri} \cdot 2\pi i \frac{d^{rn}}{dz^{rn}} \frac{(-z^r + 1 + rz^r)^n}{z^{rn+1}}$

$\frac{\pi}{r} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{rn}}{dz^{rn}} (-z^r + 1 + rz^r) = \frac{(2n)!}{r^n (n!)^2} \frac{z^{rn+1}}{\pi}$

(۲۴) * انتگرال با سه مجرای از انتگرال زیر

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = I$

$I = 2\pi i \sum Res F(z)$, $F(z) = \frac{1}{1+z^4}$

$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = e^{i\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i\pi/2} = i$, $z_3 = e^{i3\pi/4}$

این سه مجرای داخل نیمی از دایره در ناحیه $Im(z) > 0$ واقع اند.

$Res F(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{z^4} = \frac{1}{4z_1^3} = \alpha$ حایه اول

$Res F(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{4z^3} = \beta$ $Res F(z) = \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{1}{4z^3} = \gamma$

$I = 2\pi i (\alpha + \beta + \gamma)$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^r - rx + r)^r} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } F(z)$$

$$F(z) = \frac{z}{(z^r - rz + r)^r} \quad z^r - rz + r = 0 \Rightarrow z = 1 \pm i$$

$$(z^r - rz + r)^r = (z - 1 - i)^r (z - 1 + i)^r \quad \text{Im}(z) > 0 \Rightarrow z = 1 + i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 2\pi i \text{Res } F(z)_{z=1+i}$$

$$\text{Res } F(z) = \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{d}{dz} (z - 1 - i)^r \frac{z}{(z - 1 - i)^r (z - 1 + i)^r}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - 1 + i)^r} = \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{(z - 1 + i) - rz}{(z - 1 + i)^r} = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 2\pi i \alpha$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^r)^r} = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^r)^r} = \pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } F(z)$$

$$F(z) = \frac{1}{(1+z^r)^r} = \frac{1}{((z-i)(z+i))^r} = \frac{1}{(z-i)^r (z+i)^r}$$

$z = i$ قابل قبول: یک قطب مرتبه r است

$$\int_0^{\infty} F(x) dx = \pi i \text{Res } F(z)_{z=i} = \pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^r} = -\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)^{r+1}}$$

$$= -\pi i \cdot \frac{1}{8i^3} = \frac{\pi}{8}$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^r+1)(x^r+9)} = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } F(z) \quad z^r + 1 = 0 \quad z = \pm i$$

$$z^r + 9 = 0 \quad z = \pm 3i$$

$$\Rightarrow z_0 = i, z_1 = 3i$$

$$\text{Res } F(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) F(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)(z^r+9)}$$

$f_{z=3i}$

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{z+i} = \beta \quad I = \gamma \pi i (\alpha + \beta)$$

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} \Rightarrow 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } f(z)$$

$(z+i)^2(z^2+4)^2 = (z-i)(z+i)(z-2i)^2(z+2i)^2$ $z_0 = i$, $z_1 = 2i$ نقطه سیم چپ
نقطه سیم راست

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)^2} = \alpha$$

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \gamma \pi i (\alpha + \beta)$$

f)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \gamma \pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } f(z)$$

$f(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4}$ $1+z^4 = 0 \Rightarrow z = e^{i \frac{\pi}{4}}$, $k=0,1,2,3,4$

$z_0 = e^{i \frac{\pi}{4}}$, $z_1 = i$, $z_3 = e^{i \frac{3\pi}{4}}$

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1+z^2}{4z^3} = \frac{1+e^{i \frac{\pi}{2}}}{4e^{i \frac{3\pi}{4}}} = \alpha$$

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1+z^2}{4z^3} = \frac{1+i^2}{4i^3} = 0$$

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{1+z^2}{4z^3} = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \gamma \pi i (\alpha + 0 + \beta)$$

g)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \left[\gamma \pi i \text{Res } f(z) e^{iz} \right]_{\text{Im}(z) > 0}$$

$$\int_C f(z) e^{iz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx \Rightarrow$$

$$\int_C f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } f(z) e^{iz} = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } g(z)$$

$$g(z) = \frac{z^i}{(z^r+1)(z^r+c)}, \quad z = \pm i, \quad z = \pm ri$$

$$\text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^i}{(z+i)(z^r+c)} = \alpha, \quad \text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow ri} \frac{z^i}{(z^r+1)(z+ri)} = \beta$$

$$\int_C f(z) e^{iz} dz = 2\pi i (\alpha + \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^r+1)(x^r+c)} dx = \text{Im} (2\pi i (\alpha + \beta))$$

$$h = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x+a)^r + b^r} dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = \int_C f(z) e^{iz} dz \Rightarrow \int \frac{e^{iz} dz}{(z+a)^r + b^r} = 2\pi i \text{Res } g(z)_{\text{Im}(z) > 0}$$

$$z_1 = -a - ib \quad , \quad z_2 = -a + ib \quad \text{دو قطب در نیمه است.} \quad (z+a)^r + b^r \quad e^{iz}$$

نه حقیقی نام در $\text{Im}(z) > 0$ پس هیچ $f(z)$ در $\text{Im}(z) > 0$ قطبی ندارد

$$\int_{\text{Im}(z) > 0} f(z) e^{iz} dz = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x+a)^r + b^r} dx = 0$$

$$i = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)^r} dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+9)^r} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = \int_{\text{Im}(z) > 0} f(z) e^{iz} dz$$

$$\int \frac{e^{iz}}{(z^2+9)^r} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } g(z)$$

$$z^2 + 9 = 0 \Rightarrow z = \pm 3i \Rightarrow z_0 = 3i$$

$$\text{Res } g(z)_{z=3i} = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z+3i)^r} \right) = \text{میدانیم عبارت بدون مخرج را در صورت مخرج قرار دهیم} = \alpha$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)^r} dx = \text{Re} [2\pi i \alpha]$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 17x^2 + 14} dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 17x^2 + 14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = \int_{\text{Im}(z) > 0} f(z) e^{iz} dz$$

$$\int f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } g(z)$$

$$z^2 + 17z^2 + 14 = 0 \Rightarrow z^2 = \pm 1, \pm 4i \Rightarrow z = \pm 1, \pm 2i$$

$$z_0 = 1, z_1 = 2i$$

$$\text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{fz^2 + 14z} = \alpha$$

$$\text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{z^2 + 14z} = \beta$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx = \text{Re} [2\pi i (\alpha + \beta)]$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = \int_{\text{Im}(z) > 0} f(z) e^{iz} dz = \int \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$$

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i \quad z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}, z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Im(z) > 0

$$\int f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z) > 0} \text{Res } g(z)$$

$$\left\{ \text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \alpha, \text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \beta \right\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx = \text{Re} [2\pi i (\alpha + \beta)]$$

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos rx}{\epsilon x^2 + 17x + 4} dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixr} dx = \Gamma$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixr} dx = \int_{\text{Im}(z) > 0} f(z) e^{iz} dz = \int_{\text{Im}(z) > 0} g(z) dz$$

$$\epsilon z^2 + 17z + 4 = 0 \Rightarrow z^r = -\frac{17}{r} \pm \frac{a}{r} i = r e^{\pm i\theta}$$

$$z^r = r e^{i\theta} \Rightarrow z_0 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{r}}, z_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{2\theta}{r}}$$

$$z^r = r e^{-i\theta} \Rightarrow z_r = \sqrt{r} e^{-i\frac{\theta}{r}}, z_p = \sqrt{r} e^{-i\frac{2\theta}{r}}$$

نقطه قابل قبول z_1 و z_0

$$\text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{14z^r + 17z} = \alpha$$

$$\text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{14z^r + 17z} = \beta$$

$$\Rightarrow \Gamma = \text{Re} [r \alpha (1 + \beta)]$$

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \epsilon x}{(x^2+1)(x^2+2)} dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixr} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixr} dx = \int_{\text{Im}(z) > 0} f(z) e^{iz} dz = \int_{\text{Im}(z) > 0} g(z) dz$$

$$(z^r+1)(z^r+2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} z_0 = i \\ z_1 = -i \end{matrix} \quad \text{نقطه قابل قبول}$$

$$\text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{(z+i)(z^r+2)} = \beta$$

$$\text{Res } g(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z^r+2)} = \alpha$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \epsilon x dx = \text{Re} [r \alpha (1 + \beta)]$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x^2+x+1} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{inx} dz$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{inx} dz = \int_{\text{Im}(z) > 0} f(z) e^{inz} dz = \int_{\text{Im}(z) > 0} e^{inz} dz = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x^2+x+1} dx$$

$$z^2+z+1=0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

هیچکدام از دو ریشه دایره‌ای $\text{Im}(z) > 0$ قرار ندارند، بنابراین دایره‌ای $\text{Im}(z) > 0$

تخلی است. بر طبق قضیه اشترال، اشترال نمی‌تواند آن در این ناحیه صفر است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0$$