

بسمه تعالی

نام جزوه: انتقال حرارت 2

نام استاد: دکتر حسینی

دانشگاه: صنعتی امیرکبیر

۷- جابجایی طبیعی

۷-۱ صفحه قائم :

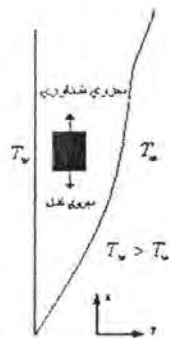
هنگامیکه حرکت سیال فقط و فقط توسط نیروی شناوری حاصل از تغییر دما نسبتاً (ناشی از اختلاف دما) صورت گیرد، جابجایی را جابجایی طبیعی یا آزاد می گویند. این تعریف در مقابل جابجایی اجباری است که حرکت سیال بوسیله یک عامل خارجی نظیر فن، پمپ یا بهمنزن و غیره فراهم می گردد (توجه شود، شفاف معمولی و فن کوئل را با هم مقایسه کنید). برای دسترسی به روابطی که چگونگی انتقال حرارت را از سطحی به یک سیال در تماس با آن نشان دهد و بتوان از نظر کمی مقدار آنرا محاسبه نمود، معادلات پیوستگی، اندازه حرکت و انرژی را نوشته و تنها نیروی شناوری را در هر جا لازم باشد اضافه می کنیم. در حرکت دوبعدی سیال و در جریان اجباری، تحت شرایطی که ذکر شده بدست آوریم که :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1-7)$$

$$\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2-7)$$

$$\rho C_p \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3-7)$$

توجه شود که در معادله ۷-۳ از کار نیروی چسبندگی با هم در مقابل خالص انتقال حرارت هدایتی در سمت راست رابطه صرف نظر کردیم و در رابطه (۷-۲) مقدار ρg که عبارتست از نیروی ثقل که روی المان تحت بررسی مطابق شکل (۷-۱) اثر می گذارد را اضافه نمودیم. با توجه به اینکه در اینجا حرکت سیال در مجاورت دیوار بسمت بالا است، و این نیرو در جهت خلاف حرکت سیال یعنی رو به پائین اثر می گذارد. اگر سیال از سطح داغ تر باشد حرکت سیال بطرف پائین بوده و این نیرو مثبت خواهد بود.



شکل ۷-۱- مختصات انتخابی برای جریان آزاد

برای اختلاف کم دما بین سطح و سیال، ρ موجود در معادله اندازه حرکت را فرض می کنیم که با درجه حرارت تغییر کند در حالیکه μ در معادله انرژی را فرض می کنیم نسبت به درجه حرارت ثابت بماند (باید توجه کرد که در اینجا حل تقریبی را ارائه و حالت ساده شده ای را مورد بررسی قرار می دهیم. در واقع در جابجایی اجباری فرض شد که خصوصیات فیزیکی سیال از تغییرات درجه حرارت تأثیر نپذیرند، در جابجایی طبیعی هم همین فرض را می کنیم به استثناء اینکه ρ را فقط در

معادله اندازه حرکت نسبت به درجه حرارت متغییر در نظر می گیریم ، چون اگر این فرض را نکنیم
 عملی برای حرکت سیال نخواهیم داشت).

در جهت x حاصل تغییر ارتفاع یا فشار استاتیکی است ، برای محاسبه گرادیان فشار ، معادله
 اندازه حرکت را نزدیک لایه مرزی بررسی می کنیم ، جایی که $\rho \rightarrow \rho_\infty$ و $U \rightarrow 0$ میل می کند. در
 واقع ماکزیمم اختلاف فشار استاتیکی مساویست با

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_\infty g \quad (4-7)$$

در این رابطه ρ_∞ عبارتست از دانسیته سیال آزاد (خارج ولی در مجاورت لایه مرزی) بنابراین
 عبارت اول سمت راست رابطه (۷-۲) را بصورت زیر می توان نوشت .

$$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g + \rho_\infty g = (\rho_\infty - \rho) g \quad (5-7)$$

با توجه به تعریف β ، ضریب انبساط حجمی (نسبت تغییرات دانسیته با دما در فشار ثابت) می توانیم
 بنویسیم:

$$\beta = \frac{-1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (6-7)$$

رابطه (۷-۶) را بصورت زیر می نویسیم (با استفاده از جایگزینی مقادیر محدود بجای مشتق)

$$\Delta \rho = -\beta \rho \Delta T$$

$$\rho_\infty - \rho = -\beta \rho (T_\infty - T)$$

لذا رابطه (۷-۵) را بدین صورت می توان نوشت :

$$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial x} = -\beta \rho (T_\infty - T) g \quad (7-7)$$

لذا سه معادله پیوستگی ، اندازه حرکت و انرژی را مجدداً می نویسیم .

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (8-7)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (9-7)$$

شرایط مرزی برای این معادلات با توجه به مختصات انتخابی در شکل (۷-۱) عبارتست از:

$$\begin{array}{llll} y = 0 & U = 0 & V = 0 & T = T_w \\ y \rightarrow \infty & U = 0 & V = 0 & T = T_\infty \end{array}$$

با استفاده از حل انتگرالی (نظیر آنچه در جابجایی اجباری انجام شد) می توانیم اطلاعاتی راجع به
 ضخامت لایه مرزی و نهایتاً ضریب جابجایی گرمایی در جابجایی طبیعی بدست آوریم. برای سادگی
 کار ، عدد پرانتل را نزدیک ۱ می گیریم . در این صورت $\delta = \delta_{th}$ (باید توجه نمود که با توجه به
 مفهوم فیزیکی عدد پرانتل که نسبت نفوذ اندازه حرکت را به نفوذ حرارت می دهد که در کئوکسیون
 طبیعی چون اختلاف دما ایجاد کننده حرکت است بنابراین در عمل عمق نفوذ اندازه حرکت در داخل
 سیال و عمق نفوذ حرارت یکسان است یعنی هر جا اختلاف دما هست اختلاف دانسیته هم هست و هر

جا اختلاف دانسیته ، حرکت . لذا فرض مساوی بودن ضخامت لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی در معادلات اندازه حرکت و انرژی حتی برای سیالات با عدد پرانتل غیر ۱ معقول بنظر می رسد).
معادله انتگرالی اندازه حرکت با توجه به روابط قبلی را بصورت زیر می توان نوشت (به عنوان تمرین و آشنایی اثبات کنید) با توجه به اینکه $U_{\infty} = 0$ است .

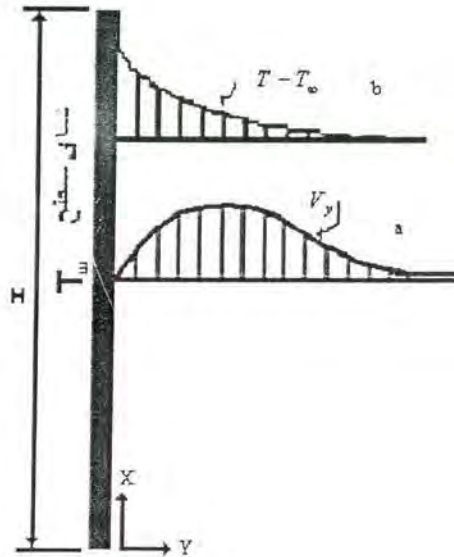
$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} (U_{\infty} - U) U dy = \nu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} + \int_0^{\delta} g\beta(T - T_{\infty}) dy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} U^2 dy = \nu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} + g\beta \int_0^{\delta} (T_{\infty} - T) dy \quad (10-7)$$

معادله انتگرالی انرژی برای لایه مرزی و با توجه به معادله پیوستگی و شرایط مرزی برای درجه حرارت بصورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_m} U (T - T_{\infty}) dy = -\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (11-7)$$

با توجه به اینکه در اینجا معادله انتگرالی اندازه حرکت وابسته به $T_{\infty} - T$ می باشد لذا باید دو معادله انرژی و اندازه حرکت را همزمان حل کنیم . دقت شود که در جابجایی اجباری با فرض ثابت بودن خصوصیات فیزیکی (نسبت به درجه حرارت) توانستیم معادله اندازه حرکت را بدون توجه به شکل توزیع دما درون لایه مرزی حل کنیم . در حالیکه در اینجا نمی توانیم چنین کاری را بکنیم . برای حل این معادلات باید یک تابع مناسبی را برای تغییرات درجه حرارت و سرعت پیشنهاد کرده معادلات در فرم انتگرالی آن را حل کنیم . سرعت و دمای پیشنهادی نظیر آن چیزی است که در شکل (۲-۷) آمده است .



شکل ۲-۷- تغییرات درجه حرارت و سرعت نسبت به y برای انتقال حرارت بوسیله جابجایی آزاد
a تغییرات سرعت b تغییرات درجه حرارت

شرایط مرزی :

$$\begin{aligned} y=0 & \quad T=T_w \\ y=\delta & \quad T=T_\infty \\ y=\delta & \quad \frac{\partial T}{\partial y}=0 \end{aligned}$$

يك چند جمله اي بصورت $T(x,y)=a_0+b_0y+c_0y^2$ براي درجه حرارت پیشنهاد مي شود. و با توجه به شرایط مرزی مقادیر ثابت محاسبه مي گردد که نتیجه بصورت زیر است .

$$\frac{T(x,y)-T_\infty}{T_w-T_\infty} = \left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (12-7)$$

براي سرعت با توجه به شکل مي دانيم که در $y=0$ و $y=\delta$ مقدار آن صفر است ولي داراي يك ماکزیمم در داخل لایه مرزی باید باشد لذا يك چند جمله اي بصورت زیر پیشنهاد مي گردد.

$$\frac{U(x,y)}{U_0} = a_1 + b_1y + c_1y^2 + d_1y^3 \quad (13-7)$$

a_1 و b_1 و c_1 و d_1 مقادیر ثابت و U_0 سرعتي است که فقط تابع x است و باید همه محاسبه گردند، با توجه به شرایط مرزی که عبارتند از :

$$\begin{aligned} y=0 & \quad U=0 \\ y=\delta & \quad U=0 \\ y=\delta & \quad \frac{\partial U}{\partial y}=0 \end{aligned}$$

شرط دیگری هم وجود دارد که با بررسی معادله دیفرانسیلی اندازه حرکت يعني معادله (۷-۲) در $y=0$ بدست مي آید . با توجه به آنکه در این موقعیت $y=0$ و $U=V=0$ است و لذا:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g\beta}{\nu}(T_w - T_\infty) \quad (14-7)$$

با اعمال شرایط مرزی چهارگانه فوق در معادله (۷-۱۳) خواهیم داشت .

$$\frac{U(x,y)}{U_0} = \left[\frac{g\beta\delta^2(T_w - T_\infty)}{4\nu} \right] \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (15-7)$$

که بصورت فشرده تر :

$$\frac{U(x,y)}{U_0} = \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (16-7)$$

در حالیکه

$$U_0 = U_0' \frac{g\beta\delta^2(T_w - T_\infty)}{4\nu} \quad (17-7)$$

U_0 به تبع U_0' يك تابع دلخواه فقط از x است با بعد سرعت . با دیفرانسیل گیری از معادله (۷-۱۶)

بر حسب y مي توان نشان داد که ماکزیمم $U(x,y)$ در $y = \frac{\delta}{3}$ اتفاق مي افتد.

معادله تغییرات سرعت (۷-۱۶) و معادله تغییرات دما (۷-۱۲) را در معادلات انتگرالی اندازه حرکت واترژي يعني (۷-۱۰) و (۷-۱۱) قرار داده و انتگرال گیری مي نمائیم که نتیجه بصورت زیر است .

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} (U_0^2 \delta) = \frac{1}{3} g \beta (T_w - T_\infty) \delta - \nu \frac{U_0}{\delta}$$

$$\frac{1}{30} (T_w - T_\infty) \frac{d}{dx} (U_0 \delta) = 2 \alpha \frac{T_w - T_\infty}{\delta}$$

این دو معادله، دو معادله دیفرانسیل معمولی هستند برای دو ناشناخته $U_0 = U_0(x)$ و $\delta = \delta(x)$ که می توان آنها را حل کرد.

$$\delta(x) = 3.93 (0.952 + Pr)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{\frac{1}{4}} Pr^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}}$$

$$U_0 = 5.17 \frac{\nu}{x} (0.952 + Pr)^{-1/2} (Gr_x)^{1/2}$$

$$\frac{\delta(x)}{x} = 3.93 Pr^{-\frac{1}{2}} [0.952 + Pr]^{\frac{1}{4}} Gr_x^{-\frac{1}{4}} \quad (18-7)$$

$$Gr_x = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) x^3}{\nu^2} \quad (19-7)$$

با توجه به آنکه فرض کردیم $\delta = \delta_{th}$ باشد، بنابراین رابطه (18-7) ضخامت لایه مرزی حرارتی را هم میدهد. عدد ناسلت محلی را بصورت زیر می توان محاسبه نمود.

$$NU_x = \frac{h_x \cdot x}{K} = \frac{q_w}{T_w - T_\infty} \cdot \frac{x}{K} = \frac{-K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{T_w - T_\infty} \cdot \frac{x}{K}$$

$$NU_x = -\frac{x}{T_w - T_\infty} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \text{یا} \quad (20-7)$$

از معادله تغییرات درجه حرارت (12-7) داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{-2(T_w - T_\infty)}{\delta} \quad (21-7)$$

یا با جایگزینی (21-7) در (20-7) به جایی داریم:

$$NU_x = \frac{2x}{\delta} \quad (22-7)$$

با جایگذاری به جایی δ از معادله (18-7)

$$NU_x = \frac{h_x \cdot x}{K} = 0.508 Pr^{\frac{1}{2}} (0.952 + Pr)^{-\frac{1}{4}} Gr_x^{\frac{1}{4}} \quad (23-7)$$

با قرار دادن مقدار Gr_x از رابطه 19-7، برای ضریب جابجایی محلی h_x خواهیم داشت.

$$h_x = 0.508 Pr^{\frac{1}{2}} (0.952 + Pr)^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{\frac{1}{4}} K x^{-\frac{1}{4}} \quad (24-7)$$

از این معادله ملاحظه می گردد که h_x متناسب با عکس ریشه چهارم x می باشد.

معمولاً آنچه مورد نیاز است به خصوص در مسایل کاربردی محاسبه مقدار متوسط h می باشد، لذا می توان مقدار متوسط را برای یک طول معین محاسبه نمود.

$$h_m = \frac{1}{L} \int_0^L h_x \cdot dx = \frac{4}{3} h_{x=L} \quad (25-7)$$

و عدد ناسلت متوسط برای طول L

$$NU_m = 0.677 Pr^{\frac{1}{2}} (0.952 + Pr)^{-\frac{1}{4}} Gr_L^{\frac{1}{4}} \quad (26-7)$$

یا:

$$Nu_m = 0.677(Ra)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{Pr}{0.952 + Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (27-7)$$

با توجه به آنکه $Gr Pr = Ra$ و $Gr_L = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2}$ و $Nu_m = \frac{h.L}{K}$ حاصلضرب عدد گراشوف در عدد پراانتل بنام عدد رایلی معروف است. رابطه (27-7) برای هر دو حالت $T_w > T_\infty$ و $T_w < T_\infty$ صادق است. برای گازهای کامل β را بصورت زیر می توان نوشت:

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad \beta = \frac{\rho_\infty - 1}{T - T_\infty} = \frac{\frac{T}{T_\infty} - 1}{T - T_\infty} = \frac{\frac{T}{T_\infty} - 1}{T_\infty \left(\frac{T}{T_\infty} - 1 \right)} = \frac{1}{T_\infty} \quad (28-7)$$

برای هوا در درجه حرارت های (۱۲۳- تا ۳۲۷ درجه سانتیگراد) $Pr = 0.69$ بوده و معادلات (27-7) و (28-7) بصورت زیر بدست می آید.

$$Nu_x = 0.372 Gr_x^{\frac{1}{4}} \quad (29-7)$$

$$Nu_m = 0.496 Gr_L^{\frac{1}{4}} \quad (30-7)$$

نتایج فوق برای T_w ثابت بوده اما برای صفحه یا q_w ثابت تنها ۵ درصد اختلاف دارد. روابط فوق با حل تقریبی بوده و نتایج با حل دقیق ارائه شده توسط اشمیت و بک من که بصورت $Nu_x = 0.360 Gr_x^{\frac{1}{4}}$ داده شده حدود ۵ درصد اختلاف دارد. نتایج برای $T_w > T_\infty$ داده شده اما برای $T_w < T_\infty$ نیز صادق است. برای استوانه قائم به شرط $D > 35L / Gr^{1/4}$ می توان از روابط مربوط به صفحه قائم استفاده نمود.

برای استوانه هایی که شرط فوق برایشان صادق نباشد میتوان از رابطه مربوط به صفحات قائم استفاده کرد به شرطیکه عدد ناسلت مربوطه را در فاکتور F ضرب نمود که در رابطه (30-7) داده شده است.

$$F = \frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{L}{D} \right)^{\frac{1}{4}}}{\left(\frac{1}{Gr_L} \right)^{\frac{1}{4}}} \right] + 1 \quad (a 30-7)$$

برای صفحه قائم با شرایط دما ثابت و جریان آرام و عدد ناسلت محلی رابطه زیر نیز داده شده است

$$Nu_x = 0.505 Pr^{1/2} (0.952 + Pr)^{-1/4} Gr_x^{1/4} \quad (31-7)$$

برای صفحه قائم با مقدار حرارت ثابت عدد ناسلت محلی از رابطه (32-7) قابل محاسبه است.

$$Nu_x = 0.547 Pr^{1/2} (0.8 + Pr)^{-1/4} Gr_x^{1/4} \quad (32-7)$$

و برحسب شار حرارتی (با توجه به این که در این گونه مسائل دمای سطح معلوم نیست):

$$Nu_x = 0.617 Pr^{2/5} (0.8 + Pr)^{-1/5} \left[g \frac{\beta q_w x^4}{k \nu^2} \right]^{1/5} \quad (33-7)$$

برای جریان مغشوش و صفحه قائم دما ثابت:

$$Nu_x = 0.0295 Pr^{7/15} (1 + 0.494 Pr^{2/3})^{-2/5} Gr_x^{2/5} \quad (34-7)$$

برای جریان مغشوش و صفحه قائم با شار حرارتی ثابت:

$$Nu_x = 0.0297 Pr^{7/15} (1 + 0.445 Pr^{2/3})^{-2/5} Gr_x^{2/5} \quad (35-7)$$

برحسب شار حرارتی:

$$Nu_x = 0.0812 Pr^{1/3} (1 + 0.445 Pr^{2/3})^{-2/7} \left[g \frac{\beta q_w x^4}{k \nu^2} \right]^{2/7} \quad (36-7)$$

برای سیم نازک عمودی با شار حرارتی ثابت:

$$Nu_D = 0.93 (Ra_D \cdot D/L)^{0.05} \quad 10^{-8} < Ra_D D/L < 10^{-1} \quad (37-7)$$

برای استوانه کوتاه با شار حرارتی ثابت:

$$Nu_D = 0.6 (Ra_D \cdot D/L)^{0.25} \quad 10^5 < Ra_D D/L < 10^8 \quad (38-7)$$

برای استوانه قائم بلند در حالت مقدار حرارت ثابت میتوان از رابطه (39-7) که رابطه ای است تجربی استفاده نمود.

$$Nu_D = 1.33 (Ra_D^* \cdot \frac{D}{L})^{0.14} \quad Ra_D^* = Gr_D^* Pr = (\frac{g \beta}{\nu^2})(q/k) D^4 Pr \quad (39-7)$$

در این رابطه عدد رایلی بر مبنای قطر استوانه بوده و L طول استوانه است. اگر بخواهیم بر مبنای متوسط اختلاف دما عدد گراف و رایلی را بنویسیم میتوانیم از رابطه زیر به جای شار حرارتی

مقدار گذاشته یعنی $\Delta \bar{T} = \frac{qL}{k}$ در این صورت معادله (39-7) به فرم زیر نوشته میشود.

$$Nu_D = 1.37 (Ra_D \cdot D/L)^{0.16} \quad 10^{-1} < Ra_D D/L < 10^5 \quad (40-7)$$

$$Ra_D = (\frac{D^3 g}{\nu^2}) \beta \Delta \bar{T} (Cp \mu / k) = Gr \cdot Pr$$

نقش عدد پرائتل:

در حل تحلیلی ارائه شده در فوق برای بدست آوردن ضخامت لایه مرزی و عدد ناسلت فرض مهمی که کردیم این بود که ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی را مساوی گرفتیم. این مسئله توسط اشخاصی مثل Sparrow برای حالت عدم تساوی این دو لایه حل شده است. نتایج نشان می دهد که حل تقریبی فوق برای $\delta = \delta_{th}$ تنها با ده درصد اختلاف با حل دقیق برای $0.01 < Pr < 1000$ صادق است.

در جدول (1-7) نتایجی برای عدد ناسلت متوسط از حل دقیق برای جابجایی طبیعی و جریان آرام برای صفحه عمودی که توسط محققان مختلف توسط Schlichting جمع آوری و نتیجه گیری شده دیده می شود. در روابط (26-7) و (27-7) و سایر روابطی که بکار برده شده خصوصیات فیزیکی باید در دمای متوسط $T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2}$ محاسبه گردد. به استثنای β برای گازها که در آنها باید β را در T_∞ محاسبه نمود. روابط ذکر شده برای جریان آرام صادق است، یعنی $10^9 < Ra_L$ و برای صفحه قائم و استوانه قائم به شرط برقراری مقداری که در بالا ذکر شد.

جدول 1-7 - نسبت عدد ناسلت متوسط به مقدار $Gr Pr^{1/4}$ در اعداد پرائتل مختلف.

Pr	نتایج حل دقیق	$\frac{Nu_m}{(Gr Pr)^{1/4}}$
	0.03	0.182
	0.08	0.228
	0.1	0.242
	0.2	0.280
	0.3	0.305
	0.72	0.516
	0.73	0.518
	1	0.535
	2	0.568

۱۰	۰/۶۲۰
۱۰۰	۰/۶۵۳
۱۰۰۰	۰/۶۶۵
∞	۰/۶۷۰
$NU_m = \frac{h_m L}{K}$	$Gr_L = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2}$

حل تحلیلی کنوکسیون طبیعی و در جریان مغشوش بسیار پیچیده بوده و در اینجا فرصت طرح آن نیست لذا به ذکر مقادیر تجربی اکتفا می کنیم. متوسط عدد ناسلت برای کنوکسیون طبیعی از یک صفحه یا استوانه عمودی (در صورتیکه قطر استوانه بزرگتر (از ضخامت لایه مرزی باشد) توسط Macadam's بصورت زیر پیشنهاد شده است.

$$NU_m = C(Gr_L Pr)^n \quad (۴۱-۷)$$

$$NU_m = \frac{h_m L}{K} \quad Gr_L = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

L عبارتست از ارتفاع صفحه یا استوانه و خصوصیات فیزیکی در متوسط درجه حرارت سیال و سطح محاسبه می گردد. مقادیر C و n در جدول (۲-۷) داده شده اند.

۲-۷- مقادیر ضرایب c و n در رابطه (۳۱-۷)

نوع جریان	محدوده عدد رایلی	C	n
آرام	$۱۰^۴ - ۱۰^۹$	۰/۵۹	۱/۴
مغشوش	$۱۰^۹ - ۱۰^{۱۳}$	۰/۱۰	۱/۳

۷-۲- کنوکسیون طبیعی از صفحه افقی

کنوکسیون طبیعی از صفحه افقی به مقدار زیاد وابسته به شرایط سطح است به این معنی که صفحه افقی طرف سردش بطرف بالا است یا طرف گرمش. عدد ناسلت متوسط برای صفحه افقی توسط McAdams بصورت زیر پیشنهاد شده است.

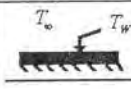
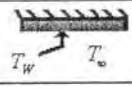

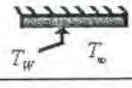
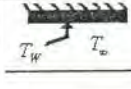
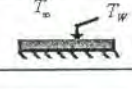
$$NU_m = C(Gr_L Pr)^n \quad (۷-۴۳)$$

$$NU_m = \frac{h_m L}{K}$$

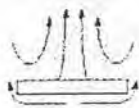
$$Gr_L = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

مقدار L برای صفحه چهارگوش طول يك ضلع و برای مستطیل متوسط عرض و طول و برای دیسك $0.9 D$ (قطر دیسك می باشد). ضرایب c و n بر حسب شرایط و در وضعیت سطح داغ و آرام یا مغشوش بودن جریان در جدول (۷-۳) دیده می شود.

جدول (۷-۳) - ضرایب c و n برای رابطه (۷-۴۳)

نوع جریان	وضعیت صفحه	$Gr Pr$	C	n	$T_w > T_\infty$	$T_w < T_\infty$
آرام	سطح بالاداغ یا سطح زیرین سرد باشد.	$10^5 - 2 \times 10^7$	0.54	$\frac{1}{4}$		
مغشوش	سطح بالاداغ یا سطح زیرین سرد باشد.	$2 \times 10^7 - 3 \times 10^{10}$	0.14	$\frac{1}{3}$		
آرام	سطح بالا خنک باشد یا سطح زیرین داغ باشد	$3 \times 10^5 - 3 \times 10^{10}$	0.27	$\frac{1}{4}$		

در شکل (۷-۳) بصورت نمایشی چگونگی حرکت سیال در وضعیت های مختلف دیده می شود.



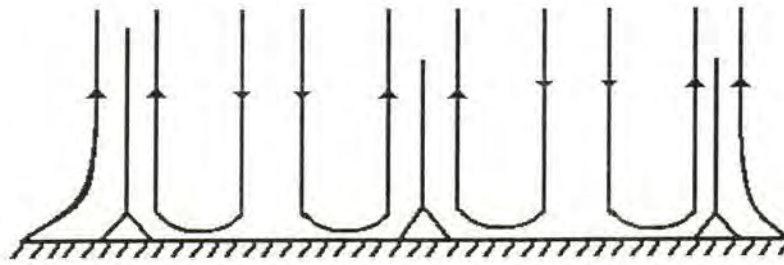
$T_w > T_\infty$



$T_w < T_\infty$



$T_w > T_\infty$



شکل ۳-۷ نمایش حرکت سیال روی یک سطح $T_w < T_\infty$ در زیر و بالای صفحه $b - T_w > T_\infty$ در زیر و بالای صفحه C - صفحه ای بزرگ $T_w > T_\infty$ در بالا.

اگر اندازه سطح خیلی زیاد باشد حرکت سیال درکناره ها و وسط کاملا متفاوت است و تقریبا پیچیده که در شکل ۳-۷ (وضعیّت C) بصورت نمایشی دیده می شود.

استوانه افقی

برای استوانه افقی در شرایط $T_w = cte$ رابطه عمومی زیر داده شده است

$$NU_m = C(Gr_D Pr)^n$$

$$Gr_D = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)D^3}{\nu^2} \quad NU_m = \frac{hD}{K}$$

مقادیر C و n در جدول ۴-۷ ارائه شده اند.

جدول (۴-۷) ضرایب c و n برای استوانه افقی

نوع جریان	GrPr	C	N
آرام	$10^4 - 10^9$	0.53	$\frac{1}{4}$
مغشوش	$10^9 - 10^{12}$	0.13	$\frac{1}{3}$

برای استوانه افقی همچنین رابطه (۴۴-۷) داده شده است، برای محدوده $10^{-5} < Ra < 10^{12}$. در این رابطه طول مشخصه در عدد گراشوف (ریلی) وناسلت قطر استوانه است.

$$\overline{NU} = \left\{ 0.6 + \frac{0.387 Ra^{\frac{1}{6}}}{[1 + (0.559/Pr)^{\frac{9}{16}}]^{27}} \right\}^2 \quad (44-7)$$

برای استوانه های افقی با شرایط مقدار حرارت ثابت رابطه (A۴۴-۷) توسط حسینی و پور
اسد پس از انجام تعدادی آزمایش روی استوانه هایی با قطر ۱۰۴، ۶۹، ۷۹، ۸۹ و ۱۰۴ میلیمتر و طول
یکسان ۳۱۰ میلیمتر و در شارهای حرارتی ۱۲۵، ۱۰۰، ۷۵، ۵۰ و ۱۵۰ وات بدست آمده است.
(A۴۴-۷)
$$Nu = 0.1044 Ra^{0.3683}$$

مخروط ساکن عمودی :

انتقال حرارت (جابجایی طبیعی) از مخروط با زاویه راس ۳ تا ۱۲ درجه عمودی از رابطه (۷-۷)
(B۴۴) قابل محاسبه است :

$$Nu_L = 0.63(1 + 0.72\varepsilon) Gr_L^{\frac{1}{4}} \quad (B۴۴-۷)$$

دراین رابطه $\varepsilon = \frac{2}{Gr_L^{1/4} \tan \phi / 2}$ و ϕ زاویه راس مخروط است. L عبارتست از طول یال
مخروط.

۳-۷- انتقال حرارت از يك میله استوانه ای و یا سیم افقی نازک :

در کئوکسیون طبیعی شرایط انتقال حرارت از يك میله یا سیم نازک خیلی متفاوت با لوله یا میله
استوانه ای با قطر زیاد است. وقتی $D = 0.2 - 1 mm$ می باشد مقدار حرارت انتقالی از میله ناچیز
است چون سطح انتقال حرارت کوچک است و لذا جریان حول میله یا سیم نازک آرام باقی می ماند و
مغشوش نمی شود حتی اگر اختلاف دما زیاد باشد. در اختلاف دمایی کم، يك لایه نازک و ساکن از
سیال حول سیم بوجود می آید که عملاً از انتقال حرارت به لایه های دورتر سیال جلوگیری می کند و
نرخ انتقال حرارت فوق العاده کم می شود.

۷-۴- ضریب جابجایی گرمایی برای صفحات زاویه دار

برای محاسبه ضریب جابجایی گرمایی بین صفحه زاویه دار با سیال موارد زیر را باید مد نظر قرار
داد.

اولاً برای زوایای θ کوچک و اعداد گراشوف بزرگ رابطه مربوط به صفحه قائم را می توان بکاربرد
به شرطی که در محاسبه عدد گراشوف بجای g مقدار $g \cos \theta$ را قرار دهیم.

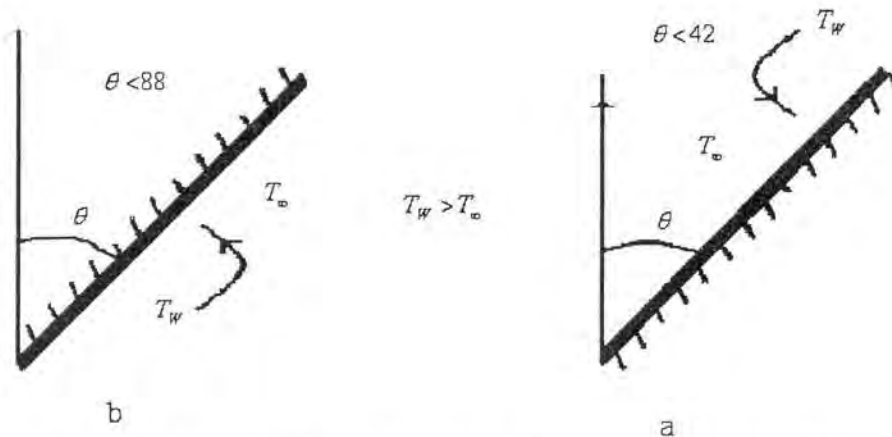
$$Gr_L = \frac{g \beta \Delta T \cos \theta L^3}{\nu^2}$$

ثانیاً برای محاسبه عدد ناسلت محلی و ناسلت متوسط در جریان آرام روابط زیر پیشنهاد شده اند.

$$Nu_x = 0.508 \left(\frac{Pr^2}{0.952 + Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{g \beta \Delta T \cos \theta x^3}{\nu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (۴۵-۷)$$

$$Nu_m = 0.677 \left[\frac{Pr^2}{0.952 + Pr} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g \beta \Delta T \cos \theta L^3}{\nu^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (۴۶-۷)$$

شرایط کاربرد روابط (۴۵-۷) و (۴۶-۷) در شکل های (۷-۴) و a و b نشان داده شده است.



شکل (۴-۷) - a: سطح داغ به طرف بالا $T_w > T_\infty$ b: سطح داغ بطرف پایین

برای سطح شیبدار روابط ساده تری نیز ارائه شده است. مثلاً برای (a) در شکل (۴-۷) و برای هوا رابطه ساده زیر داده شده است.

$$\bar{h} = 1.42 \left(\frac{\Delta T \sin \theta}{L} \right)^{1/4} \quad (۴۷-۷)$$

در این رابطه L طول سطح شیبدار و $\Delta T = T_w - T_\infty$ میباشد. این رابطه در محدوده $10^4 < Gr_L < 10^9$ صادق است. برای $Gr_L > 10^{10}$ مقدار h از رابطه $\bar{h} = 0.95 (\Delta T \sin \theta)^{1/3}$ قابل محاسبه است که نشان میدهد \bar{h} در جریان مغشوش مستقل از طول میباشد.

برای صفحات شیبدار در شرایط مقدار حرارت ثابت وقتی که سطح داغ به طرف پائین است میتوان از رابطه (۴۷-۷ a) استفاده کرد.

$$Nu_e = 0.56 (Gr_e Pr_e \cos \theta)^{1/4} \quad \theta < 88 \quad (۴۷-۷ a)$$

در این رابطه زیر نویس e اشاره به این دارد که خصوصیات فیزیکی در اعداد بی بعد دردمای مرجع باید منظور گردد که به صورت $T_e = T_w - 0.25(T_w - T_\infty)$ تعریف میگردد. مقدار T_w دمای متوسط سطح است (با توجه به شار حرارتی ثابت). مقدار β بایستی در $T_\infty + 0.5(T_w - T_\infty)$ ارزیابی گردد. برای شرایط صفحه شیب دار بسیار نزدیک به افقی (وقتی سطح داغ به طرف پائین است میتوان از رابطه (۴۷-۷ b) در محدوده $10^6 < Gr_e Pr_e < 10^{11}$ و $88 < \theta < 90$ بهره گرفت.

$$Nu_e = 0.58 (Gr_e Pr_e)^{1/5} \quad (۴۷-۷ b)$$

برای سطح شیبدار وقتی سطح داغ بطرف بالا است برای محدوده $10^5 < Gr_e Pr_e \cos \theta < 10^{11}$

و $-75 < \theta < -15$ میتوان از رابطه مفصل (۴۷-۷ c) بهره گرفت.

$$Nu_e = 0.14 \left[(Gr_e Pr_e)^{1/3} - (Gr_e Pr_e)^{1/3} \right] + 0.56 (Gr_e Pr_e \cos \theta)^{1/4} \quad (۴۷-۷ c)$$

مقدار Gr_e از جدول (۵-۷) اخذ میشود.

جدول (۵-۷) مقادیر گرافش بحرانی برای رابطه (۴۷-۷ c) .

θ (درجه)	Gr_c
-15	5×10^9
-30	2×10^9
-60	10^8
-75	10^6

زاویه در شکل (۴-۷ a) از سمت قائم به راست نشان داده شده است. در این شکل از حالت قائم به چپ مثبت و از حالت قائم به راست منفی تلقی می‌گردد.

برای منطقه مغشوش جریان و برای شرایط شار حرارتی ثابت (سطح داغ به طرف بالا یا پائین) در محدوده $10^{15} < Gr_c^* Pr < 10^{10}$ میتوان از رابطه (۴۷-۷ d) استفاده کرد.

$$Nu = 0.17 (Gr_c^* Pr)^{1/4} \quad (۴۷-۷ d)$$

در این رابطه Gr_c^* نظیر صفحه قائم است وقتی که سطح داغ به طرف بالا است و معادل است با $Gr_c \cos^2 \theta$ وقتی که سطح داغ به طرف پائین است.

برای استوانه شیب دار در شرایط مقدار حرارت ثابت و در جریان آرام میتوان از رابطه (۴۷-۷ e) استفاده کرد.

$$Nu_L = [0.6 - 0.488 (\sin \theta)^{1.03}] (Gr_L Pr)^{(1/4) + (1/12)(\sin \theta)^{1.75}} \quad (۴۷-۷ e)$$

محدوده کاربرد این رابطه $Gr_L Pr < 2 \times 10^8$ میباشد. در این رابطه همه خصوصیات فیزیکی در نمای متوسط سطح وسیال حساب میشود به استثناء β که در نمای سیال آزاد ارزیابی میشود.

اطلاعات جمع آوری شده توسط Mikheyev که عمدتاً بوسیله تجربه با هوا، CO_2 ، آب، اتیلین، گلیسرین، کربن تتراکلراید و انواع روغن‌ها و غیره روی سطوح مختلفی مثل سیم افقی و عمودی، صفحات عمودی و افقی و کره‌هایی با اندازه‌های مختلف، سیم و لوله‌هایی با قطرهای مختلف از 0.15 mm تا 245 mm و کره‌هایی از 30 mm تا 16 m قطر و همچنین صفحه و لوله‌هایی با طول متغیر از $6-25 \text{ m}$ و فشارهای گاز بین 0.3 تا 70 at انجام شده در شکل (۵-۷) دیده می‌شود. در این شکل مقدار $\log(Gr Pr)_m$ در محور افقی، و $\log NU_m$ در محور عمودی رسم شده است. ابعاد خطی به عنوان مرجع هندسی ابعاد در محاسبه مقادیر بدون بعد بکار برده شده اند، مثل قطر d برای لوله و کره و h برای صفحه. درجه حرارت متوسط $T_m = \frac{1}{2}(T_w + T_\infty)$ برای خصوصیات فیزیکی بکار برده شده است. این شکل نشان می‌دهد که تمام اطلاعات خیلی خوب در یک منحنی صدق می‌کند. منحنی را می‌توان به سه خط مستقیم تبدیل کرد با دقت قابل قبول. این بدان معنی است که رابطه بین گروه‌های بی بعد را می‌توان بصورت زیر نوشت:

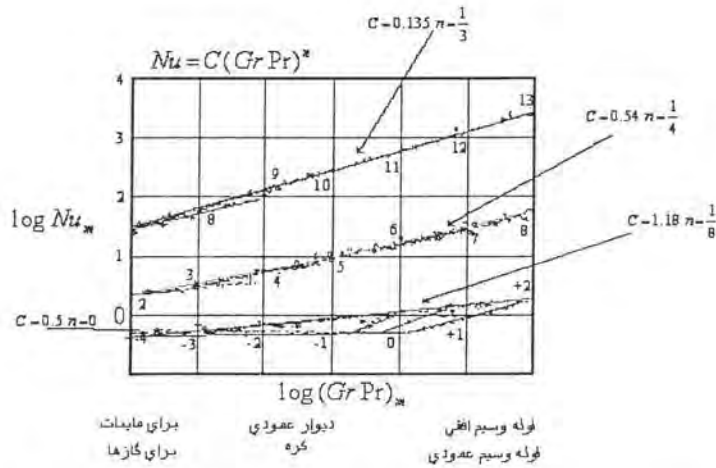
$$NU_m = C (Gr Pr)_m^n \quad (۴۸-۷)$$

مقادیر C و n در معادله متفاوتند و برای قسمتهای مختلف منحنی تابعی هستند از مقادیر توابع متغیر مستقل از هم $Gr Pr$ که در جدول (۶-۷) دیده می‌شود.

جدول (۶-۷) - مقادیر ضرایب ثابت رابطه (۳۷-۷)

نوع جریان	GrPr	C	n
فیلمی	$1 \times 10^{-3} - 5 \times 10^2$	1.18	$\frac{1}{8}$
آرام	$5 \times 10^2 - 2 \times 10^7$	0.54	$\frac{1}{4}$
مغشوش	$2 \times 10^7 - 1 \times 10^{13}$	0.135	$\frac{1}{3}$

برای $(GrPr)_m < 1$ عدد ناسلت متوسط مساوی 0.5 می باشد ($NU_m = 0.5$) و مقدار آن ثابت باقی می ماند که نتیجه اش این است که $h = 0.5 \frac{K}{d}$ و این بدان معنی است که فرآیند گرم کردن و یا سرد کردن سیال اطراف جسم بوسیله هدایت است. این شرایط دقیقاً برای انتقال حرارت در لایه ویژه Special Film که معمولاً در سیم های نازک پیش می آید صادق است.



شکل (۵-۷) - اطلاعات داده شده برای عدد ناسلت تحت شرایط مختلف سطح و سیال توسط Mikheyev

چون جابجایی لایه ای فیلمی خیلی غیر پایدار است رابطه داده شده تغییر در مقدار C را نشان می دهد. حتی در $10^{-3} < GrPr < 5 \times 10^2$ این شرایط انتقال است که پس از آن $n = \frac{1}{8}$ و $C = 1.18$ می

- شود. در $5 \times 10^2 < Gr \cdot Pr < 2 \times 10^7$ جریان آرام است و $n = 0.25$ و $C = 0.54$ و در $Gr \cdot Pr > 2 \times 10^7$ مغشوش می گردد با $n = \frac{1}{3}$ و $C = 0.135$. این واقعیت که نتایج تجربی برای سیالات مختلف و شکلهای مختلف روی یک منحنی منطبق شده اند. بما نشان می دهد:
- ۱- گروه بی بعد اصلی تعیین کننده در کنوکسیون طبیعی برای سیالات با $Pr > 0.7$ عدد $Gr \cdot Pr$ می باشد.
 - ۲- شکل جسم در مرحله دوم اهمیت است. یعنی اینکه شکل جریان و انتقال حرارت بوسیله شکل هندسی سطح تعیین نمی شود بلکه عمدتاً بوسیله شرایط درجه حرارت سیال، درجه حرارت سطح و اختلاف درجه حرارت و مقدار حرارت انتقالی برای واحد سطح (q) تعیین می شود.
 - ۳- چون طول به عنوان یک مشخصه هندسی در عدد ناسلت، با مرتبه یک و در عدد گراشوف با مرتبه ۳ مطرح می گردد، لذا فرآیند انتقال حرارت وابسته به اندازه طولی در محدوده نمای $\frac{1}{3}$ (یعنی جریان مغشوش) نمی باشد، به عبارت دیگر با توجه به آنکه:

در این محدوده $h \propto \left(\frac{1}{L}\right) Gr^{\frac{1}{3}}$ می باشد، مفهوم این ارتباط این است که در جریان

- مغشوش ضریب جابجایی مستقل از طول است. این مسئله به ما اجازه می دهد که پروسه جابجایی طبیعی را با مدل کوچکتر بتوانیم بررسی کنیم. آنچه لازم است اینکه مقدار عدد رایلی ($Gr \cdot Pr$) در مدل بزرگتر از 2×10^7 باشد. امکان بررسی فرآیند انتقال حرارت در جریان جابجایی آزاد برای سیال با مدل با اندازه کوچکتر در عمل نقش اصلی و مهمی را ایفا می کند. رابطه داده شده با توجه به مقادیر جدول برای هر سیالی اعم از گاز یا مایع یا روغنها که $Pr > 0.7$ باشد با هر شکلی از سطح و اندازه آن قابل قبول است.
- رابطه یکسانی رامیتوان بکار برد برای سطح افقی. در این حالت بعد طولی مرجع، ارتفاع نمی باشد بلکه پهلوئی با طول کمتر صفحه مورد نظر قرار می گیرد و ضریب جابجایی گرمایی محاسبه شده از رابطه (۷-۳۷) باید ۳۰٪ افزایش پیدا کند اگر سطح داغ بطرف بالا باشد و برعکس اگر طرف داغ پایین باشد ۳۰٪ کاهش یابد.
- برای لوله های افقی، برای مایعات و گازها با توجه به آنکه عدد پرائنل در دمایی سطح و سیال متفاوت است و مخصوصاً برای بعضی از سیالات که عدد پرائنل آنها شدیداً نسبت به درجه حرارت متغیر است رابطه (۷-۴۹) بهتر است از رابطه (۷-۴۸)

$$NU_f = 0.51 Gr_m^{\frac{1}{4}} Pr_m^{\frac{1}{4}} \left(\frac{Pr_m}{Pr_w}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (۷-۴۹)$$

که برای هوا این رابطه بصورت زیر بدست می آید.

$$NU_f = 0.47 Gr_m^{\frac{1}{4}} \quad (۷-۵۰)$$

زیر نویس ∞ نشان می دهد که خصوصیات فیزیکی سیال را باید در دمایی سیال آزاد پیدا نمود به استثناء Pr_w که باید در درجه حرارت دیواره محاسبه گردد. بدیهی است که مرجع طول در لوله ها قطر آنها خواهد بود.

کره: متوسط عدد ناسلت برای جابجایی آزاد در کره در درجه حرارت ثابت به هوا رami توان از رابطه پیشنهادی Yange بدست آورد.

$$NU_m = \frac{h_m D}{K} = 2 + 0.392 Gr_D^{\frac{1}{4}} \quad 1 < Gr_D < 10^8 \quad (۷-۵۱)$$

خصوصیات فیزیکی سیال در متوسط T_w و T_m محاسبه می گردد. رابطه فوق برای هوا است، برای عمومی کردن رابطه برای سیالاتی با عدد پرانتل غیر ۱ ترم $Gr_D Pr$ را با $Gr_D Pr$ جایگزین باید کرد ضریب ثابت 0.392 را با قرار دادن عدد پرانتل 0.7 تصحیح می کنیم بصورت

$$0.392 \times \frac{1}{Pr^{1/4}} = 0.43$$

$$Nu_m = 2 + 0.43(Gr_D Pr)^{1/4} \quad (52-7)$$

رابطه عمومی تری توسط چرچیل ارائه شده است که برای سیالات با عدد پرانتل بزرگتر از 0.7 و برای عدد ریلی $10^{11} < Ra_d$ قابل کاربرد است.

$$Nu = 2 + \frac{0.589 Ra^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.469}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} \quad (52-2 a)$$

۵-۷- جابجایی طبیعی با مقدار حرارت ثابت :

اطلاعات جمع آوری شده برای جابجایی طبیعی از یک صفحه عمودی با مقدار حرارت ثابت نشان می دهد که عدد ناسلت محلی را می توان از روابط زیر پیدا نمود. برای جریان آرام

$$Nu_x = 0.6(\dot{Gr}_x Pr)^{1/5} \quad 10^5 < \dot{Gr}_x Pr < 10^{11} \quad (53-7)$$

برای جریان مغشوش

$$Nu_x = 0.568(\dot{Gr}_x Pr)^{0.22} \quad 10^{13} < \dot{Gr}_x Pr < 10^{16} \quad (54-7)$$

در این روابط $NU_x = \frac{h_x \times x}{K}$ و \dot{Gr}_x (عدد گراشوف تصحیح شده) بصورت :

$$\dot{Gr}_x = Gr_x Nu_x = \frac{g \beta (T_w - T_m)}{\nu^2} x^3 \times \frac{q_w \cdot K}{T_w - T_m} = \frac{g \beta q_w x^4}{K \nu^2} \quad (55-7)$$

تعریف میشود. خصوصیات فیزیکی باید در متوسط درجه حرارت سیال و سطح محاسبه گردد. صفحه افقی با مقدار حرارت ثابت :

$$\left\{ \begin{array}{l} Gr_L Pr < 2 \times 10^8 \\ Nu_x = 0.13 (Gr_L Pr)^{1/3} \end{array} \right. \quad (56-7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \times 10^8 < Gr_L Pr < 10^{11} \\ Nu_m = 0.16 (Gr_L Pr)^{1/3} \end{array} \right. \quad (57-7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^6 < Gr_L Pr < 10^{11} \\ Nu_m = 0.58 (Gr_L Pr)^{1/5} \end{array} \right. \quad (58-7)$$

Churchill و Chu نشان داده اند که نتایج آنها برای صفحه عمودی با دما ثابت بسیار عالی برای شرایط q_w ثابت در محدوده عدد $1 < Ra_L$ صدق می کند در صورتیکه $1 < Ra_L$ بر مبنای اختلاف دمایی وسط صفحه ΔT محاسبه گردد.

رابطه آنها برای صفحه عمودی با دمای ثابت در جریان آرام بصورت زیر داده شده است .

$$\overline{NU}_L = 0.68 + \frac{0.670 Ra_L^{\frac{1}{4}}}{[1 + (\frac{0.492}{Pr})^{\frac{9}{16}}]^{\frac{4}{9}}} \quad 0 < Ra_L < 10^9 \quad (59-7)$$

که نسبت به سایر روابط داده شده دارای دقت بیشتری است .
چون برای محاسبه عدد گراشوف ویا عدد Ra_L نیاز به اختلاف دما داریم و اینکار برای صفحه با مقدار حرارت ثابت میسر نیست لذا در سمت راست رابطه فوق عدد Ra_L را با $\frac{Ra_L^*}{\overline{NU}}$ جایگزین

می کنیم (یعنی $Ra_L^* = Ra_L \cdot \overline{NU}_L$ تعریف می شود) در این صورت :

$$\overline{NU}_L = 0.68 + \frac{0.67 (\frac{Ra_L^*}{\overline{NU}_L})^{\frac{1}{4}}}{[1 + (\frac{0.492}{Pr})^{\frac{9}{16}}]^{\frac{4}{9}}}$$

$$\overline{NU}_L = 0.68 + \frac{0.67 (Ra_L^*)^{\frac{1}{4}}}{(\overline{NU}_L)^{\frac{1}{4}} [1 + (\frac{0.492}{Pr})^{\frac{9}{16}}]^{\frac{4}{9}}}$$

ویا

$$\overline{NU}_L (\overline{NU}_L)^{\frac{1}{4}} = 0.68 (\overline{NU}_L)^{\frac{1}{4}} + \frac{0.67 (Ra_L^*)^{\frac{1}{4}}}{[1 + (\frac{0.492}{Pr})^{\frac{9}{16}}]^{\frac{4}{9}}}$$

$$\overline{NU}_L^{\frac{5}{4}} - 0.68 (\overline{NU}_L)^{\frac{1}{4}} = \frac{0.67 (Ra_L^*)^{\frac{1}{4}}}{[1 + (\frac{0.492}{Pr})^{\frac{9}{16}}]^{\frac{4}{9}}} \quad (60-7)$$

در این رابطه : $\overline{NU}_L = \frac{q_w L}{K \Delta T}$ می باشد. می توان نشان داد که اختلاف دما در وسط صفحه

عمودی در حالت q_w ثابت بسیار نزدیک به اختلاف دمایی متوسط است لذا پس از این هر جا نیاز باشد از دمایی وسط صفحه استفاده می شود.

نکته جالب توجه اینکه در محاسبات مربوط به عدد Ra_L و Gr_L و غیره نیاز داریم تا خصوصیات فیزیکی سیال را بدانیم و برای پیدا کردن این خصوصیات معمولاً نیاز به متوسط اختلاف دما داریم . برای عبور از این مشکل ، ابتدا خصوصیات فیزیکی را در دمایی سیال آزاد

پیدا نموده سپس عدد ناسلت متوسط را بدست می آوریم . پس از آن از رابطه $\Delta T = \frac{q_w L}{K \overline{NU}_L}$

اختلاف دمایی متوسط را می یابیم. چون معمول است که باید خصوصیات فیزیکی را در دمایی متوسط سطح و سیال محاسبه کرد لذا.

$$\Delta T = T_w - T_\infty \quad T_m = \frac{(\Delta T + T_\infty) + T_\infty}{2} = T_\infty + \frac{\Delta T}{2}$$

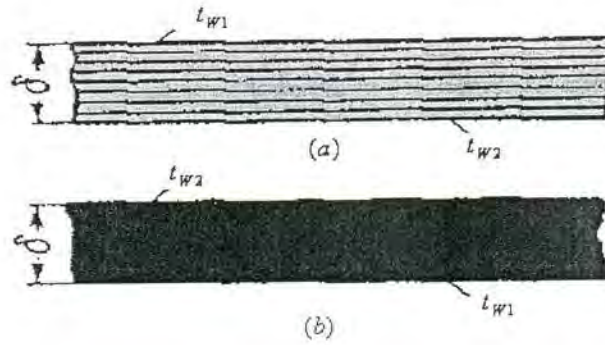
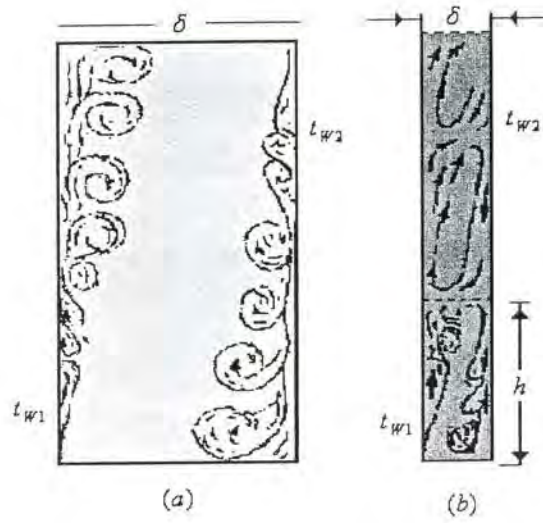
یعنی پس از محاسبه $\overline{\Delta T}$ از رابطه $T_m = T_\infty + \frac{\Delta T}{2}$ دمای متوسط سطح و سیال را پیدا کرده مجدداً خصوصیات فیزیکی را بر مبنای این درجه حرارت پیدا می‌کنیم و محاسبه را تکرار می‌کنیم تا اینکه مقادیر مربوطه تغییر قابل توجهی ننماید. روش مشابهی را می‌توان برای صفحه افقی و استوانه افقی نیز بکار برد اگر چه نتایج تجربی برای مقادیر کوچک Ra_L تأیید نشده است.

۶-۷- جابجایی طبیعی در فضای بسته

در بخش‌های قبل، انتقال حرارت را در فضای باز بررسی کردیم، که تنها یک فرآیند اتفاق می‌افتاد. وقتی یک سیال در تماس با یک سطح داغ است حرارت از سطح داغ به سیال داده می‌شود، انتقال حرارت از سیال گرم (در تماس با سطح) در فاصله دورتر از صفحه یک فرآیند جداگانه‌ای است که روی انتقال حرارت از سطح به سیال تأثیر نمی‌گذارد. در یک فضای مسدود، سرد شدن و گرم شدن در نزدیکی هم اتفاق می‌افتد و لذا امکان پذیر نیست که این دو را از هم جدا کنیم و لذا دو پدیده با هم و همزمان مورد بررسی قرار می‌گیرد. بالا و پایین رفتن سیال درون فضای بسته و اثر آنها روی هم کاملاً پیچیده است. هر دو جریان وابسته به شکل هندسی فضای بسته و اندازه و نوع سیال درون فضای بسته و علاوه بر آن به شدت انتقال حرارت هستند.

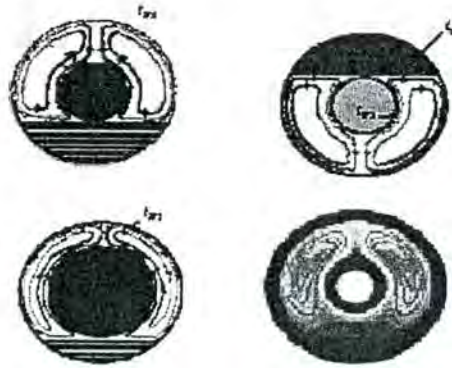
در یک فضای عمودی و بسته، سیال ممکن است بنویط طریق گردش کند، که وابسته به ضخامت δ از این فضای بسته است. اگر δ باتدازه کافی بزرگ باشد در این صورت بالا و پایین رفتن سیال در دو طرف فضای بسته روی هم اثر نمی‌گذارند همچنانکه در شکل (۶-۷) (a) ملاحظه می‌شود. شرایط برای هر دو وجه صفحه همانست که در جابجایی طبیعی از سطح گرم‌تر یا سردتر از محیط بررسی شد. اگر δ کوچک باشد در این صورت تداخل دو جریان بوجود خواهد آمد همچنانکه در شکل (۶-۷) (b) دیده می‌شود، یک جریان چرخشی محلی ایجاد می‌شود، ارتفاع h که این تداخل بوجود می‌آید وابسته به δ و نوع سیال و شدت فرآیند انتقال حرارت است.

مثلاً اگر $\delta = 5$ سانتیمتر باشد برای ارتفاع ۲۵ Cm از هوا معمولاً تداخل به وجود می‌آید. ولی اگر این فاصله بیشتر باشد ارتفاع نیز متناسباً بیشتر می‌شود. در یک فضای بسته افقی، پدیده انتقال حرارت بوسیله وضعیت قرار گرفتن سطوح سرد و گرم نسبت بهم و فاصله شان وابسته است. در صورتیکه سطح داغ بطرف بالا باشد هیچگونه چرخشی وجود نخواهد داشت. اگر سطح داغ پایین باشد و سطح سرد بالا باشد در این صورت بطور متناوب بالا و پایین رفتن سیال بصورت چرخشی بوجود می‌آید چنانکه در شکل (۶-۷) (c) دیده می‌شود.



شکل (۷-۷) - جابجایی طبیعی بین دو صفحه افقی a: صفحه بالایی از صفحه پائینی گرمتر است
b: صفحه بالایی خنک تر از صفحه پائینی است

در فضایی بسته استوانه‌ای و کروی، مایعات موجود در اینگونه فضاها مطابق آنچه در شکل (۷-۸) نشان داده شده گردش خواهند کرد و بسته به ضخامت فضایی مسدود (یا نسبت قطرها) نوع چرخش متفاوت خواهد بود.



شکل (۸-۷) - جابجایی طبیعی در فضاهاهی مسدود استوانه ای

با توجه به اشکال فوق ملاحظه می گردد که جابجایی طبیعی در یک فضای بسته بمراتب پیچیده تر از جابجایی در فضای باز است. این موضوع باعث خواهد شد که نتوان یک تجزیه و تحلیل کلی و عمومی و مورد قبول برای تغییرات ضریب جابجایی گرمایی ارائه داد. برای سادگی کار در بررسی نتایج و محاسبه این حالت پیچیده معمول است که این پدیده را مربوط کنند به انتقال حرارت بوسیله هدایت و برای هر حالتی یک ضریب هدایت حرارتی معادل را تعریف کنند.

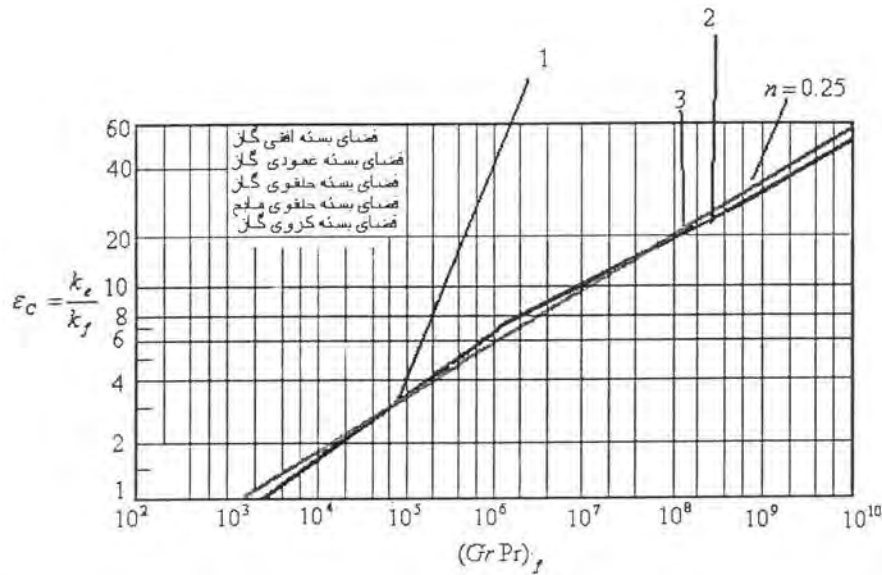
تعریف و معرفی ضریب هدایت حرارتی معادل دارای مزایای زیادی است بدین صورت که ما را بی نیاز می کند از محاسبه h_1 و h_2 (ضریب جابجایی گرمایی برای صفحه ۱ و ۲). در حالیکه ضریب هدایت حرارتی معادل (K_{eq}) بوسیله تجربه پیدا می شود. اگر ضریب هدایت حرارتی معادل را بر ضریب هدایت واقعی سیال در درجه حرارت متوسط تقسیم کنیم یک پارامتر جدیدی را بدست می آوریم

بصورت $\epsilon_c = \frac{K_{eq}}{K}$ که بنوعی نمایشی از خصوصیات جابجایی خواهد بود.

ϵ_c یک مقدار بدون بعد است که بنام ضریب جابجایی معادل در جابجایی طبیعی محیط بسته نامیده می شود. با توجه به آنکه چرخش سیال بواسطه اختلاف دانسیته سیال گرم و سرد بوجود میآید و مشخصه آن عدد بدون بعد $GrPr$ می باشد لذا ϵ_c باید تابعی از همین عدد باشد یعنی $\epsilon_c = f(GrPr)$.

این ارتباط بکاربرده شده برای رسم تمام اطلاعات مربوط به انتقال حرارت در فضای بسته چنانکه در شکل (۹-۷) دیده می شود. در محاسبه عدد بدون بعد $GrPr$ ضخامت فضای بسته δ (فاصله صفحات یا اختلاف شعاعها در لوله ها یا کره) و درجه حرارت متوسط سیال $T_f = \frac{1}{2}(T_{w_1} - T_{w_2})$ باید

انتخاب گردد که بترتیب به عنوان مرجع طولی و درجه حرارت مرتبط می باشند. صرفنظر از شکل فضای بسته، تمام اطلاعات تجربی برای سیال واقع بین صفحات افقی و عمودی، فضاهاهی استوانه ای و کروی، همه در یک منحنی صدق می کنند.



شکل (۹-۷) - تغییرات ضریب هدایت حرارتی معادل برحسب عدد رایلی در فضای بسته

در مقادیر کوچک $(Gr Pr)_f$ یعنی کوچکتر از ۱۰۰۰ یا $\log(Gr Pr) < 3$ ملاحظه می‌گردد که $\log \varepsilon_c = 0$ یا $\varepsilon_c = 1$ و این بدان معنی است که در مقادیر کوچک $(Gr Pr)_f$ انتقال حرارت از دیواره گرم به دیواره سرد از درون سیال محبوس در یک فضای بسته مسدود تنها ضریب هدایت حرارت سیال مهم است. نتایج شکل (۹-۷) را به فرم ریاضی میتوان در محدوده های تعیین شده به صورت زیر نوشت:

$$10^3 < Gr Pr < 10^6 \quad \varepsilon_c = 0.105(Gr Pr)_f^{0.3} \quad (۶۱-۷)$$

$$10^6 < (Gr Pr)_f < 10^{10} \quad \varepsilon_c = 0.40(Gr Pr)_f^{0.2} \quad (۶۲-۷)$$

کاهش در نمای $Gr Pr$ برای هدایت در مقادیر بزرگ $Gr Pr$ را می‌توان اثر متقابل بالا و پائین رفتن سیال گرم و سرد روی جریان دانست.

در محاسبات تقریبی می‌توان رابطه زیر را برای تمام اعداد $Gr Pr > 10^3$ جایگزین کرد.

$$\varepsilon_c = 0.18(Gr Pr)_f^{0.25} \quad (۶۳-۷)$$

این رابطه را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_c = A \sqrt[4]{\delta^3 \Delta T} = A \delta^4 \sqrt{\frac{\Delta T}{\delta}} \quad (۶۴-۷)$$

$$A = 0.18 \frac{(\beta g Pr)^{0.25}}{\nu^{0.5}} \quad \text{در حالیکه:}$$

$$\delta = m, \nu = m^2 / Sec \quad g = m / Sec^2 \quad \beta = \frac{1}{T_m}$$

روابط دیگری نیز برای جابجایی طبیعی در فضای محدود ارائه شده است که باختصار ذکر می شوند.

$$Nu = 1$$

$Ra < 2000$ $0.5 < Pr < 2$ مایع یا گاز

$$Nu = 0.197 Ra^{\frac{1}{4}} \left(\frac{H}{\delta}\right)^{-\frac{1}{9}} \quad 2 \times 10^3 < Ra < 2 \times 10^5 \quad \text{گاز (۶۵-۷)}$$

$$Nu = 0.42 Pr^{0.012} Ra^{\frac{1}{4}} \left(\frac{H}{\delta}\right)^{-0.3} \quad 10^4 < Ra < 10^7 \quad \text{مایع (۶۶-۷)}$$

$$Nu = 0.11 Ra^{0.29} \quad 1 < Pr < 5000 \quad 6.3 \times 10^3 < Ra < 10^6 \quad \text{گاز یا مایع (۶۷-۷)}$$

$$Nu = 0.228 Ra^{0.226} \quad 0.7 < Pr < 4000 \quad 10^3 < Ra < 10^6 \quad \text{گاز یا مایع (۶۸-۷)}$$

در روابط بالا δ فاصله دوسطح از یکدیگر بوده و H ارتفاع است. برای فضای محدود بین دو صفحه قائم رابطه زیر نیز پیشنهاد شده است، شکل (۱۰-۷)

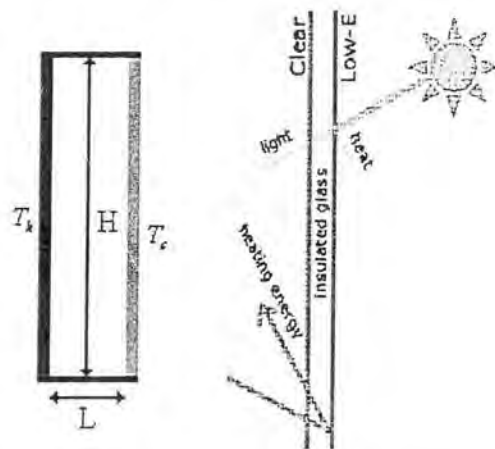
$$Nu = \frac{qL}{k(T_h - T_c)} = [Nu_1, Nu_2, Nu_3] \quad (۶۹-۷)$$

$$Nu_1 = 0.0605 Ra^{\frac{1}{2}} \quad (۷۰-۷)$$

$$Nu_2 = \left\{ 1 + \left[\frac{0.104 Ra^{0.293}}{1 + \left(\frac{6310}{Ra}\right)^{1.36}} \right]^3 \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (۷۱-۷)$$

$$Nu_3 = 0.242 \left(\frac{Ra}{\delta}\right)^{0.272} \quad (۷۲-۷)$$

$\delta = \frac{H}{L}$ بوده و هرکدام از سه رابطه فوق که بیشترین مقدار را بدهد انتخاب میشود.



شکل (۱۰-۷) فضای بسته محدود به دو صفحه قائم

برای فضای بسته عمودی در حالت مقدار حرارت ثابت و برای مایعات و عدد پرانتل بین ۱ تا ۲۰۰۰۰ رابطه (۶۹-۷a) پیشنهاد شده است.

$$Nu_{\delta} = 0.42 (Gr_{\delta} Pr)^{1/4} Pr^{0.012} (L/\delta)^{-0.3} \quad (۶۹-۷a)$$

این رابطه برای محدوده $10^4 < Gr_{\delta} Pr < 10^7$ و $10 < L/\delta < 40$ برقرار است. برای محدوده اعداد پرانتل ۱ تا ۲۰ و $10^6 < Gr_{\delta} Pr < 10^9$ رابطه زیر نیز قابل کاربرد است.

$$Nu_{\delta} = 0.46(Gr_{\delta} Pr)^{1/3} \quad (۶۹-۷)$$

باید توجه کرد که محدودیت ابعادی $1 < L/\delta < 40$ برای این رابطه باید رعایت شود. در دو رابطه اخیر δ فاصله سطوح از هم و L طول آنها است. برای فضای محدود به دو صفحه شیبدار (فضای بین شیشه و صفحه جاذب در کلکتور های خورشیدی به عنوان مثال) شکل (۱۱-۷) میتوان از روابط زیر استفاده نمود. رابطه Nu_{90} برای فضای بین دو صفحه قائم ، رابطه (۵۸-۷)

$$Nu_{\phi} = \frac{(90 - \phi)Nu_{60} + (\phi - 60)Nu_{90}}{30} \quad (۷۳-۷)$$

$$Nu_{60} = [Nu_1, Nu_2]_{\max} \quad (۷۴-۷)$$

$$Nu_1 = \left[1 + \left(\frac{0.093 Ra^{0.314}}{1 + G} \right)^7 \right]^{1/7} \quad (۷۵-۷)$$

$$Nu_2 = (0.104 + \frac{0.175}{\delta}) Ra^{0.283} \quad (۷۶-۷)$$

$$G = \frac{0.5}{\left[1 + \left(\frac{Ra}{3160} \right)^{20.6} \right]^{0.1}} \quad (۷۷-۷)$$

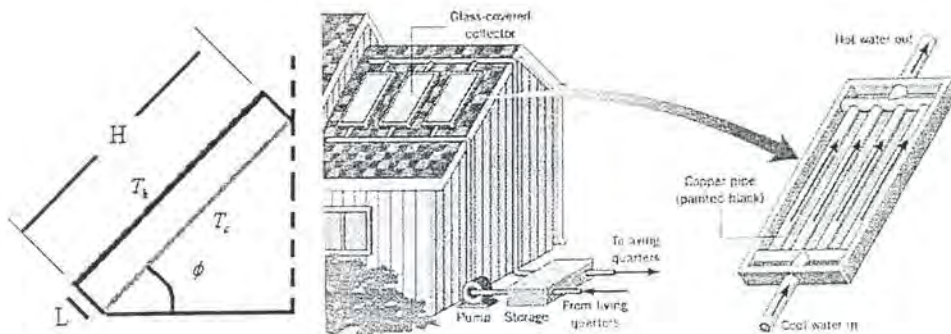
برای $0 < \phi < 60$

$$Nu_{\phi} = 1 + 1.44 \left[1 - \frac{1708}{Ra \cos \phi} \right]^+ \left[1 - \frac{1708 (\sin 1.8 \phi)^{1.6}}{Ra \cos \phi} \right]^+ + \left[\left(\frac{Ra \cos \phi}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right]^+ \quad (۷۸-۷)$$

علامت * برای این است که اگر مقدار داخل کروشه منفی شد مثبت اختیار شود

$$Nu_{\phi} = \frac{q \delta}{k(T_h - T_c)} \quad (۷۹-۷)$$

$$\delta = \frac{H}{L} \text{ میباشد.}$$



شکل (۱۱-۷) فضای محدود به دو سطح شیبدار

۷-۷ ترکیب جابجایی آزاد و اجباری

در صورتیکه جابجایی طبیعی و اجباری هر دو بصورت همزمان وجود داشته باشند و نتوان از یکی در برابر دیگری صرفنظر کرد باید هر دو را منظور نمود. برای اینکه بدانیم کدامیک بر دیگری ارجح است گروه بی بعد

$$\frac{g \beta (T_w - T_\infty) L}{U_\infty^2} = \frac{Gr}{Re^2} \quad (۸۰-۷)$$

$$\frac{g \beta (T_w - T_\infty) L^3 / \nu^2}{\left(\frac{U_\infty L}{\nu}\right)^2}$$

را تشکیل می‌دهیم که نمایشی از نسبت نیروهای شناوری به اینرسی است. هنگامیکه عدد گراشوف در حد یا بزرگتر از مجذور عدد رینولدز است، جابجایی طبیعی را نمی‌توان نادیده گرفت (جدول ۷-۷)، برعکس در جابجایی طبیعی تأثیر کنوکسیون اجباری قابل توجه است و قتیکه مجذور عدد رینولدز در حد یا بزرگتر از عدد گراشوف است. طبق اطلاعات داده شده توسط Sparrow, Lloyd برای یک صفحه عمودی در شرایط دما ثابت و $T_w > T_\infty$ و قتیکه U_∞ رو ببالاست و یا $T_w < T_\infty$ بوده و U_∞ بطرف پایین است.

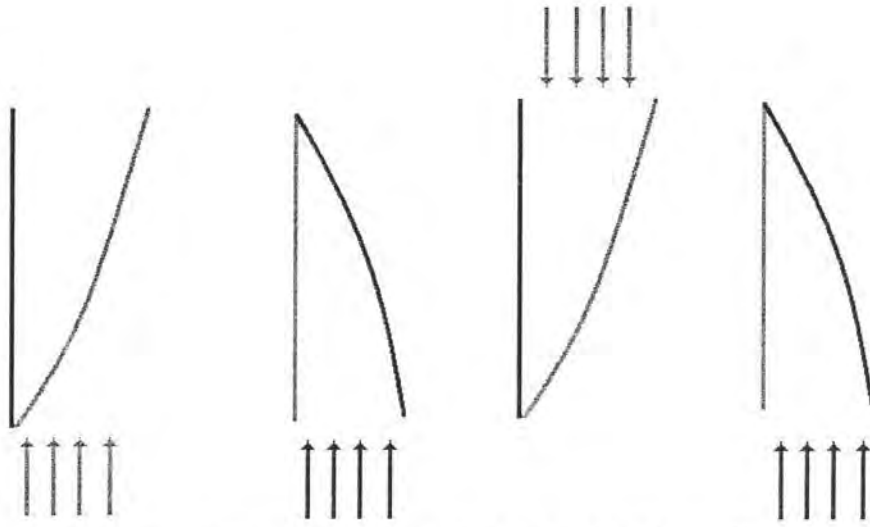
جدول (۷-۷) نسبت نیروی شناوری به اینرسی در اعداد پرانتل مختلف

Pr	۱۰۰	۱۰	۰/۷۲	۰/۰۳-۰/۰۰۳
Gr_x/Re_x^2	۰/۲۴	۰/۱۳	۰/۰۸	۰/۰۵۶-۰/۰۵

از $Gr/Re_x^2 < 0.1$ کنوکسیون طبیعی در مقابل اجباری صرفنظر می‌کنیم. $Gr/Re_x^2 > 10$ از اجباری در مقابل طبیعی صرفنظر می‌کنیم. اگر در اینحالت از کنوکسیون طبیعی در مقابل کنوکسیون اجباری صرفنظر کنیم ۵٪ خطا مرتکب می‌شویم. در صورتیکه $0.1 < Gr/Re_x^2 < 10$ باشد هر دو را باید منظور کرد و از رابطه زیرین استفاده می‌شود.

$$NU^n = NU_{Forced}^n \pm NU_{Natural}^n \quad (۸۱-۷)$$

بهترین نتایج برای $n=3$ حاصل شده و \pm برای وقتی است که دو جریان در جهت مستقیم یا عکس باشد، شکل (۱۲-۷).

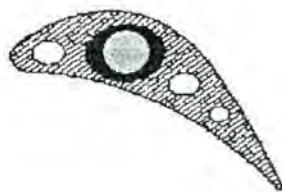
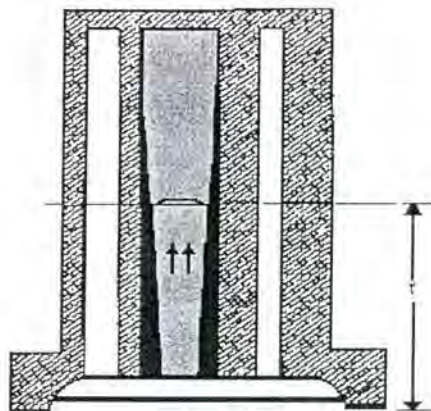


شکل (۷-۱۲) ترکیب جابجایی آزاد و اجباری و نمایش حالات هم سو و مخالف

۸-۷ کتوکسیون آزاد حاصل از نیروی گریز از مرکز

در مسائلی که تا کنون بررسی کردیم نیرویی که باعث جابجایی می‌شد حاصل تغییر دانسیته سیال با دما تحت تأثیر نیروی جاذبه بود. کتوکسیون آزاد نظیر آنچه که تاکنون بحث کرده‌ایم امکان دارد تحت نیروی گریز از مرکز نیز ایجاد شود. بعنوان مثال در اجزاء در حال دوران توربین، کمپرسورها و وسایل رانش بوسیله جت (Jet-Propulsion device) میدان حاصل از نیروی گریز از مرکز ممکن است چندین برابر بزرگتر از نیروی جاذبه باشد. لذا سرعت قابل توجهی برای جریان کتوکسیون طبیعی و ضریب جابجایی گرمایی مؤثر بدون یک پمپ و یا فن نیز ایجاد گردد. یکی از کاربردهای مهم کتوکسیون طبیعی در این حالت خنک شدن پره‌های توربین گاز می‌باشد. راندمان توربین گاز را می‌توان به مقدار قابل توجهی افزایش داد در صورتیکه دمای گاز ورودی به توربین را افزایش دهیم، ماکزیمم دمای ورودی در حال حاضر محدود است به حداکثر دمای مجاز برای پره‌های توربین. خنک کردن داخلی پره، درجه حرارت فلز را کاهش داده و بنابراین باعث خواهد شد تا فلز بتواند تنش بیشتری را در دمای بالاتر تحمل نماید.

خنک شدن پره توربین بوسیله کتوکسیون طبیعی اولین بار توسط Schmidt مطرح گردید و شکل (۷-۱۳) سیستم خنک‌شوندگی و پیشنهاد شده توسط وی را نشان می‌دهد. مسیر سیال خنک‌کن درون تیغه توربین از طریق حفره ای است که در تیغه ایجاد گردیده و از پایه تیغه تا نزدیکی سر امتداد می‌یابد و در نزدیکی سر تیغه مسدود می‌شود. مسیر باز تیغه به منبع سیال سرد متصل می‌گردد و مایع خنک‌کننده تمام حفره را پر می‌کند.



شکل ۷-۱۳ مجاری خنک کاری پره توربین و حکت سیال درون آن

و قتیکه تیغه‌ها توسط گاز حاصل از احتراق داغ می‌شوند. لایه‌ای از سیال خنک‌کننده نزدیک سطح حفره‌های ایجاد شده گرم شده و دانسیته آن کمتر از آن بخش از سیال که در وسط حفره قرار دارد می‌شود. در حالیکه توربین دوران می‌کند مایع واقع در حفره تحت تأثیر نیروی گریز از مرکز قرار می‌گیرد که شتاب حاصل از آن مساوی $r\omega^2$ می‌باشد که ω عبارتست از سرعت زاویه‌ای و r شعاع.

با توجه به اینکه نیروی گریز از مرکز بر حسب واحد حجم یعنی $\rho r \omega^2$ کمتر است در لایه گرم شده (که در آن دانسیته کمتر از مرکز است) ، برای سیال در وسط مجرا برعکس است یعنی سیال در وسط ، سردتر از کناره است لذا نیروی گریز از مرکز بیشتر است . لذا سیال در وسط به سمت سر تیغه رانده میشود و در کناره مجرا به سمت ته پره . این حرکت شبیه حرکت هوا است که در مجاورت یک سطح قائم داغ ایجاد می شود. در تیغه توربین این پدیده، چرخش پیوسته سیال را ایجاد می کند چرا که سیال گرم از ته تیغه خارج شده و جای آن را سیال خنک می گیرد. با حرکت سیال خنک به سمت سر پره. پروفیل سرعت در مقطع حفزه نظیر آن چیزی است که در شکل (۷-۱۳) نشان داده شده است. تا آنجایی که مقطع عبور سیال خنک کننده در قیاس با سطح اشغال شده بوسیله لایه مرزی گرم شده به اندازه کافی بزرگ باشد این عمل انجام می گیرد. تحت این شرایط ضریب متوسط جابجایی گرمایی را از معادله (۷-۷) یا (۷-۲) می توان بدست آورد.

در صورتیکه عدد گراشوف بر مبنای شتاب گریز از مرکز $r \omega^2$ محاسبه شود به جای شتاب ثقل g . که در این رابطه L طول مسیر سیال خنک شونده است.

$$Gr = \frac{r \omega^2 \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

برای جریان مغشوش

$$\overline{NU}_L = 0.0246 \left(\frac{Pr^{1.17}}{1 + 0.494 Pr^{0.5}} Gr \right)^{0.5} \quad Gr > 10^{10} \quad (7-7)$$

$$\frac{\bar{h}L}{k} = 0.13 (Gr_L Pr)^{0.5} \quad Gr_L > 10^9 \quad (7-2)$$

تحت شرایط کاری عادی عدد گراشوف بیش از 10^{12} خواهد بود لذا جریان به طور کامل مغشوش است .

مثال : یک تیغه توربین توسط کئوکسیون طبیعی بوسیله آب خنک می شود. مسیر عبور حفزه ای است به قطر 0.25 اینچ و $2/5$ اینچ طول، سرعت دورانی در شعاع متوسط 8 اینچ 700 فوت در ثانیه است. $V_{cr} = 700 \text{ ft/sec}$ آب خنک کن در 150 (فارنهایت) قابل دسترسی است. ضریب جابجایی گرمایی متوسط را تخمین بزنید. دمای مسیر سیال در تیغه 325 (فارنهایت) فرض می شود.

حل- شتاب متوسط گریز از مرکز $r_m \omega^2$ ارزیابی شده در شعاع متوسط r_m مساویست با:

$$r_m \omega^2 = \frac{V_{cr}^2}{r_m} = \frac{700^2}{\frac{1}{2}} = 735000 \text{ ft/sec}^2$$

با ارزیابی خصوصیات فیزیکی در متوسط دمای فیلم 250 فارنهایت ، عدد پرانتل $4/51$ و $Gr = 7.6 \times 10^{13}$ اگر $\Delta T \cong 175 F$ باشد رابطه بطور تقریب صدق می کند و داریم:

$$\overline{NU}_L = 0.0246 \left(\frac{Pr^{1.17}}{1 + 0.494 Pr^{0.5}} Gr \right)^{0.5} = 0.0246 (7.6 \times 10^{13})^{0.5} = 8600$$

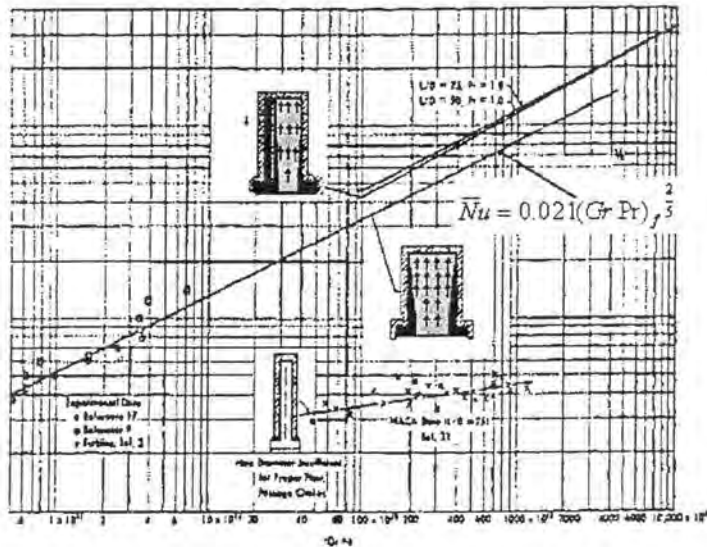
$$h = \frac{k}{L} \times 8600 = \frac{0.393 \text{ Btu/hr ft}^2 \cdot F}{2.5} \times 8600 = 16200 \text{ Btu/hr ft}^2 \cdot F$$

12

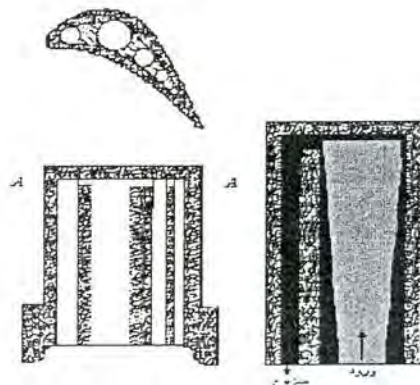
همچنانکه در مثال فوق دیده می شود ضریب جابجایی گرمایی درون مسیر سیال خنک کن تحت تاثیر نیروی گریز از مرکز که باعث عدد گراشوف بزرگی می شود خیلی زیاد است. ضریب جابجایی

گرمایی در سطح خارجی تیغه در حدود $80 \frac{Btu}{hr ft^2 F}$ خواهد بود. در نتیجه افت درجه حرارت بین گاز

داغ و سطح تیغه توربین در حدود ۱۰۰ برابر بزرگتر از اختلاف دمایی بین مسیر عبور سیال خنک‌شونده و سیال خنک‌کننده خواهد بود. بنابراین تیغه بطریقه مؤثری خنک‌می‌شود. در صورتیکه مقاومت حرارتی فلز تیغه بین سطح خارجی تیغه و سطح داخلی آن که در تماس با سیال خنک‌کن است چندان زیاد نباشد که باعث افت دمایی زیاد می‌شود. مشکل وقتی به وجود خواهد آمد که قطر عبور سیال خنک‌کن نسبت به طول آن کوچک است، در این صورت لایه مرزی عمده مسیر را پر می‌کند و مخروط سیال خنک خیلی کوچک می‌شود و در نتیجه عمل خنک‌شوندگی بطور مؤثر انجام نمی‌شود. این اثر در شکل (۱۴-۷) نشان داده شده که نتایج تجربی برای کتوکسیون طبیعی برای تیغه توربین با مسیر خنک‌شوندگی به قطر ۰/۰۶ تا ۰/۱۲۶ اینچ با رابطه (۷۱-۷) مقایسه می‌شود. خط پررنگ از معادله (۷۱-۷) محاسبه شده و ترسیم گردیده با $Pr = 0.72$ در حالیکه خط نقطه چین، متوسط تجربی به دست آمده بوسیله NACA توسط فرچی و دیگولیا برای تیغه ای با قطر ۱۴ اینچ توربین گاز با آب خنک‌شونده بدست آمده است. وقتیکه حفره کوچکی بکار برده می‌شود تا ضخامت را کاهش دهیم برای ماده جامد تا حرارت از آن عبور کند قبل از آنکه به سیال خنک‌کن برسد. چرخش سیال را می‌توان بهبود بخشید با اتصال حفره کوچک به یک حفره بزرگ نظیر آنچه در شکل (۱۴-۷) نشان داده شده است. در این صورت حرکت سیال درون حفره کوچک در یک جهت خواهد بود. نظیر حرکت سیال درون لوله در کتوکسیون اجباری.

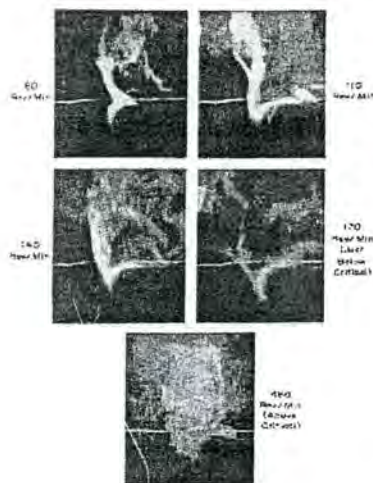


شکل (۱۴-۷) مقایسه نتایج تئوری و تجربی برای خنک‌شوندگی پره توربین



شکل (۷- ۱۵) مقایسه نتایج تئوری و تجربی برای خنک شونده‌ی پره توربین

۹-۷ جابجایی طبیعی از استوانه، دیسکگردان، مخروط و کره
 یک استوانه افقی گرم که در هوا در حال دوران است بر مبنای تجربه و عکسبرداری، دیده شده است که در سرعت دورانی پایین، جریان سیال ضمن چسبیدگی به سطح از پایین به بالا حرکت می‌کند و به صورت یک دودکش باریک.



شکل (۷-۱۶) نمایش حرکت سیال حول استوانه گرم افقی در سرعت‌های دورانی مختلف

وقتی که سرعت دوران افزایش می‌یابد نقطه حرکت سیال گرم شده بسمت پایین و پهلوی استوانه حرکت می‌کند (در جهت دوران).
 وقتی که سرعت دورانی به نقطه‌ای می‌رسد که جریان مغشوش می‌شود در مجاورت سیلندر، در اینجا است که ذرات هوا به صورت تصادفی از روی سطح پرت می‌شوند به علت نیروی گریز از مرکز

و بوسیله ذراتی که به سمت پایین رانده می‌شوند جایگزین می‌شوند. در یک جریان ایروترم اغتشاش تقریباً در عدد رینولدز دورانی حدود ۵۰ شروع می‌شود.

$$Re_{\omega} = \frac{\omega \pi D^2}{\nu} \approx 50$$

در انتقال حرارت، سرعت بحرانی نقطه‌ای است که سرعت دورانی سطح استوانه تقریباً مساوی می‌شود با سرعت جابجایی سیال در کنوکسیون طبیعی یک استوانه ساکن داغ. شکل (۷-۱۶) حرکت سیال در سرعت های مختلف دورانی استوانه دوار داغ را در هوا نشان می‌دهد.

زیر سرعت بحرانی کنوکسیون طبیعی بوسیله عدد گراشوف قطری $\beta g (t_w - t_{or}) D^3 / \nu^2$ جریان انتقال حرارت را کنترل می‌کند. در سرعت‌های بالای سرعت بحرانی ($Re_{\omega} > 8000$ برای هوا) عدد رینولدز بحرانی قطری $\pi D^2 \omega / \nu$ حاکمیت پیدا می‌کند. اثر کمیت‌های رینولدز-پرانتل و گراشوف روی عدد ناسلت متوسط برای یک سیلندر افقی گردان در هوا بالای سرعت بحرانی به صورت رابطه تجربی زیر داده شده است.

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{K} = 0.11 \left[(0.5 Re_{\omega}^2 + Gr) Pr \right]^{0.35} \quad (7-73)$$

روابط دیگری برای سیلندر افقی گردان پیشنهاد شده است که بر اساس تجربیات محققین مختلف می‌باشد نیلا تعدادی از این روابط را ذکر می‌کنیم. رابطه باریش

$$\overline{Nu} = 0.318 Re^{0.571} \quad (7-74)$$

رابطه اعتماد و برای $Re > 8000$

$$Nu = 0.076 Re^{0.7} \quad (7-75)$$

رابطه کندوش

$$\overline{Nu} = 0.533 Re^{\frac{1}{2}} \quad (7-76)$$

رابطه اندرسون

$$Nu = 0.1 Re^{\frac{2}{3}} \quad (7-77)$$

رابطه مهانتی و همکارانش

$$Nu = 0.38 Re^{0.58} \quad 400 < Re < 10^5 \quad (7-78)$$

رابطه ابوحجله و هیلن

$$Nu_D = 1.586 + 0.05189 Re_D^{0.7072} \left[-0.4497 + 2.254 \sigma^{0.6729} \right]^{0.5978} \quad \sigma = \frac{Gr_D}{Re_D^2} \quad (7-79)$$

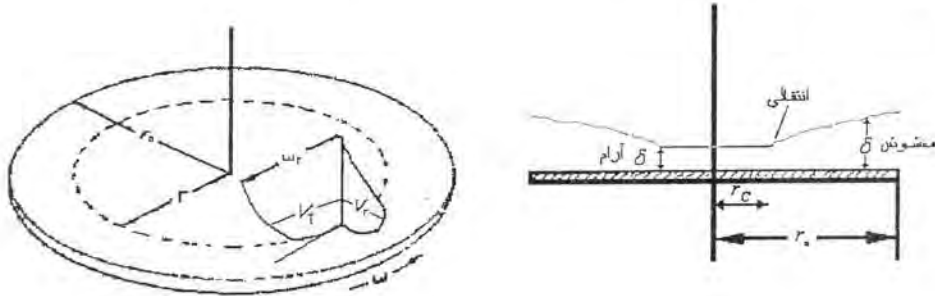
رابطه حسینی و پوراسد

$$\overline{Nu} = 0.236 Re^{0.594} \quad (7-80)$$

در محدوده آزمایش‌های انجام شده (۳۶۰ تا ۸۰۰ دور در دقیقه) مقدار عدد ناسلت مستقل از عدد رایلی می‌باشد. آزمایش‌ها برای استوانه‌های با شار حرارتی ثابت انجام شده است. استوانه‌ها با قطر ۶۹، ۷۹، ۸۹، ۱۰۴ و ۱۰۴ میلی‌متر و طول همه آنها یکسان و معادل ۳۱۰ میلی‌متر بوده است. توان حرارتی ۱۲۵، ۱۰۰، ۷۵، ۵۰ و ۱۵۰ وات مورد آزمایش قرار گرفته است.

انتقال حرارت از دیسک گردان

انتقال حرارت از يك ديسك گردان بوسيله اشخاص مختلفي مورد بررسي قرار گرفته است. در شكل (۱۷-۷) چگونگي جريان لايه مرزي حرارتي يك ديسك افقي داغ كه در يك فضاي باز دوران ميكند به صورت نمايشي ديده مي شود. نيروي اصطكاك و نيروي گريز از مركز حاصل از دوران (كه تمايل دارد كه سيال را به بيرون پرتاب كند به صورت شعاعي) در اين فرآيند مداخله دارند. لايه مرزي روي ديسك، آرام، يكنواخت و با ضخامت ثابت است در عدد رينولدز دوراني $\frac{\omega D^2}{\nu} < 10^6$. در عدد رينولدز بالاتر جريان مغشوش مي شود و ضخامت لايه مرزي با شعاع افزايش مي يابد.



شكل (۱۷-۷) انتقال حرارت از يك ديسك گردان به سيال در تماس با آن

پديده كنوكسيون طبيعي نظير آنچه براي صفحه افقي ساكن وجود دارد در عدد رينولدز 3×10^4 تقريباً قابل صرف نظر كردن است. در عدد رينولدز بزرگتر، حرارت منتقل شده از ديسك به سيال بوسيله مؤلفه سرعت شعاعي ديسك و به صورت انرژي ذخيره شده در ω مي باشد. حرارت منتقل شده از ديسك به سيال را مي توان با استفاده از شكل (۱۷-۷) به صورت زير بدست آورد.

$$q_c \pi r_c^2 = 2\pi r_0 \int_0^{\infty} [V_r(y) C_p \rho T(y)] dy \quad (۸۱-۷)$$

كه حد بالاي انتگرال مي تواند به وسيله δ ضخامت لايه مرزي جايگزين شود. براي يك ديسك كه در هوا و به طور افقي دوران مي كند (در زير سرعت بحراني) و اكثر رابطه بالا را ارزيابي کرده و مقدار زير را به دست آورده است:

$$\overline{Nu}_{r_0} = \frac{\bar{h}_c r_0}{k} = C \left(\frac{\omega r_0^2}{\nu} \right)^{1/2} \quad (۸۲-۷)$$

مقدار $C = 0.335$ براي عدد پرانتل 0.74 مي باشد. حل دقيق معادله انتگرالي ضريب 0.35 را بجاي 0.335 پيشنهاد مي نمايد. ضرايب C براي اعداد پرانتل ديگر در جدول (۷-۷) داده شده است.

جدول (۷-۷) ضرايب ثابت برای اعداد پرانتل در رابطه (۸۲-۷)

Pr	۰/۷	۱	۲	۵	۱۰
C	۰/۳۵	۰/۳۸	۰/۵	۰/۸	۱/۱

در بخش مغشوش و برای يك دیسك كه در هوا دوران می‌کند (افقی)، عدد ناسلت محلی در شعاع r به طور تقریبی به صورت:

$$NU_r = \frac{h_c r}{k} = 0.0195 \left(\frac{\omega r^2}{\nu} \right)^{0.8} \quad (83-7)$$

داده شده است. مقدار متوسط عدد ناسلت برای قسمت آرام سیال بین $r=0$ و $r=r_c$ و قسمت بیرونی (مغشوش) از r_c تا r_o به صورت تقریبی زیر داده شده است:

$$\overline{NU}_o = \frac{\overline{h_c} r_o}{k} = 0.015 \left(\frac{\omega r_o^2}{\nu} \right)^{0.8} - 100 \left(\frac{r_c}{r_o} \right)^2 \quad (84-7)$$

برای دیسکی افقی که در داخل یک سیال با عدد پرانتل بزرگتر از یک دوران می‌کند، عدد ناسلت محلی را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$Nu = \frac{Re_r \Pr \left(\sqrt{\frac{C_{Dr}}{2}} \right)}{5 \Pr + 5 \ln(5 \Pr + 1) + \left(\sqrt{\frac{2}{C_{Dr}}} - 14 \right)} \quad (85-7)$$

C_{Dr} عبارتست از ضریب درگ محلی در شعاع r ، مقدار آن به صورت رابطه زیر داده می‌شود.

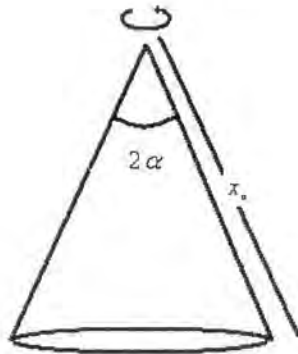
$$\frac{1}{\sqrt{C_{Dr}}} = -2.05 + 4.07 \log_{10} Re_r \sqrt{C_{Dr}} \quad (86-7)$$

مخروط دوار:

برای يك مخروط با زاویه رأس 2α که در يك محیط باز دوران می‌کند در جریان آرام می‌توان از رابطه

$$\overline{NU}_o = \frac{h_c r_o}{k} = C \left(\frac{\omega r_o^2}{\nu} \right)^{1/2} \quad (87-7)$$

استفاده کرد، اگر $\left(\frac{\omega x_o^2 \sin \alpha}{\nu} \right)$ جایگزین $\frac{\omega r_o^2}{\nu}$ شود. در حالیکه x_o عبارتست از فاصله رأس مخروط تا مقطع آن، انداز مگیری شده در امتداد مخروط.



شکل (۸۷-۷) مخروط دوار در محیط ساکن

مقدار $C = 0.335$ برای هوا داده شده است. برای سایر مقادیر عدد پرانتل میتوان از جدول (۷-۷) استفاده نمود.

کره دوار:

برای کره با قطر D_s که در فضای باز درون سیال با عدد پرانتل بزرگتر از 0.7 دوران می کند
 Kreith نشان داده است که در جریان آرام $Re = \omega \frac{D_s^2}{\nu} < 5 \times 10^4$ عدد نامسلت متوسط $\overline{Nu} = \frac{h_c D_s}{K}$

از رابطه زیر بدست می آید.

$$\overline{Nu} = 0.43 Re^{0.5} Pr^{0.4} \quad (۸۸-۷)$$

در حالیکه در محدوده عدد رینولدز 5×10^4 و 7×10^5 رابطه $\overline{Nu} = 0.066 Re^{0.67} Pr^{0.4}$ اطلاعات تجربی موجود است.

مسائل

۱: نسبت عدد ناسلت متوسط و نرخ حرارت منتقل شده از یک طرف دیسک به قطر 1 ft و همچنین یک مخروط با زاویه رأس 12° و با قطر مقطع 1 ft را بدست آورید. اگر هر دو سطح دارای دمای 200°F بوده و با سرعت 1000 rpm در آب 100°F دوران کنند.

۲: نرخ حرارت منتقل شده از یک کره را که با سیم نازکی آویزان شده (قطر 10 inch) در داخل هوای 70°F و با 2000 rpm دوران می کند و دمای آن 300°F می باشد پیدا کنید.

۳: درجه حرارت مرکز یک استوانه افقی از Brass با قطر مقطع $\frac{1}{4} \text{ inch}$ و طول 4 inch را بدست آورید. یک سر استوانه در دمای 100°F قرار دارد و سر دیگر آزاد و در هوای 60°F قرار دارد. ضریب جابجایی گرمایی کل حاصل از تشعشع و جابجایی طبیعی را می توان فرض کرد که در تمام طول میله یکسان است و ضریب تشعشع 0.9 می باشد.

$$K = 58 \frac{\text{Btu}}{\text{hr ft}^2 \text{ }^\circ \text{F}}$$

۴: ماکزیمم درجه حرارت مجاز در مرکز یک صفحه الکتریکی عمودی با 6 inch ارتفاع و 4 inch عرض 270°F می باشد.

ماکزیمم حرارت قابل انتقال از هر دو طرف صفحه را در هوای 70°F پیدا کنید. اگر ضریب جابجایی گرمایی معادل برای تشعشع $1.5 \frac{\text{Btu}}{\text{hr ft}^2 \text{ }^\circ \text{F}}$ در ماکزیمم درجه حرارت مشخص شده باشد.

۵: تخمین بزنید حرارت انتقالی از یک طرف دیسک به قطر 6 ft را که با سرعت 600 rpm و در هوای 70°F در حال دوران می باشد. دمای دیسک 120°F می باشد.

۶: یک محور فولادی با قطر خارجی یک اینچ با سرعت 2000 دور در دقیقه دوران میکند (در هوای 70°F درجه فانهایت) اگر دمای دو طرف (در یاتاقانها که به فاصله 2 فوت از هم قرار دارند) 200 درجه فانهایت باشد. توزیع دما را در طول محور بدست آورید. (راهنمایی: میتوانید ثابت کنید که در

سرعتهای بالا رابطه (۷-۷۶) به مقدار $Nu_D = 0.076 \left(\frac{\pi D^2 \omega}{\nu} \right)^{0.7}$ میل میکند). ضریب هدایت

حرارتی از جدول بدست آورده شود.

۷: یک محور ساخته شده از کرم استیل بین دو بوش قرار گرفته (مطابق شکل)، قطر 12 mm می باشد در سرتهای بالا، اصطکاک در محل بوشها، باعث می شود که درجه حرارت در بوشها به 175°C برسد، محور در یک اتاق گرم قرار دارد که دمای هوا 35°C می باشد. ضریب هدایت حرارتی از جدول بدست آورده شود.

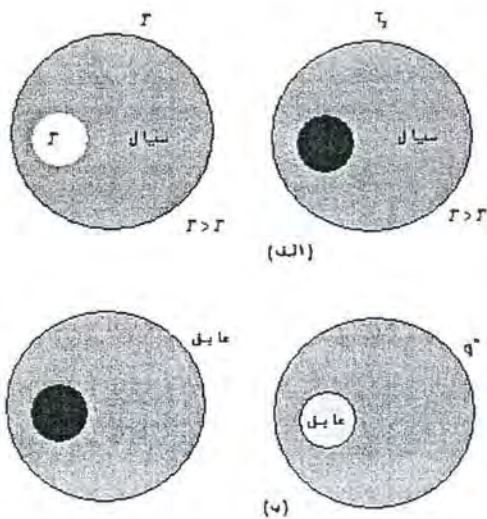
یک پولی قرار است در وسط محور قرار گیرد (وسط دوش) و برای عمر طولانی تسمه، نبایستی درجه حرارت آن از 100°C تجاوز کند. می‌نیمم فاصله بین دو بوش چقدر باشد تا شرایط صدق کند. فرض کنید که محور تا 3000 دور در دقیقه دوران خواهد کرد.

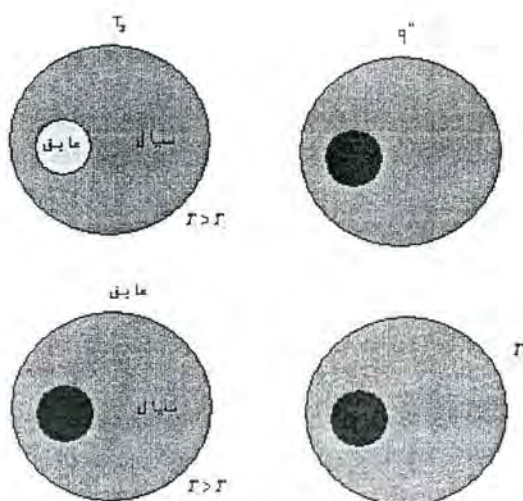


۷-۱۰ جابجایی طبیعی در کانال های حلقوی هم مرکز و خارج از مرکز :

جابجایی طبیعی با جریان آرام با لایه مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی در حال توسعه در کانال های حلقوی تودر تو و خارج از مرکز قائم ، با دو انتهای باز ، در بسیاری از کاربردهای عملی وجود دارد. یکی از مهمترین کاربردهای این روش خنک کاری در راکتورهای اتمی می باشد که حرارت توسط یک واکنش هسته ای در میله سوختی تولید می شود . سیال خنک کننده بین فاصله حلقوی المان سوختی و دیواره کانال قائم قرار دارد. در هنگام توقف جریان خنک کننده، انتقال حرارت از طریق جابجایی آزاد انجام می شود.

از دیگر کاربردهای این روش انتقال حرارت می توان به موتورهای الکتریکی قائم ، سیستم های گرمایش خورشیدی ، مبدل های دو لوله ای ، خنک کاری مته های حفاری و ... اشاره کرد. برای ارائه روابطی که با استفاده از آنها بتوان مقدار ونرخ حرارت منتقل شده را در شرایط هندسی مختلف بدست آورد کارهای بسیاری تا کنون انجام شده است . یکی از مهمترین کارهای تحلیلی انجام شده توسط رنولدز و همکارانش نشان می دهد که با حل مساله برای چهار شرط مرزی بنیادین و بر هم نهی این حل ها میتوان تمامی مسائل مطرح شده در این زمینه را حل نمود. چهار جفت شرط مرزی در شکل (۷-۱۹) الف تا د) نشان داده شده اند .





(شکل ۷-۲۰) شرایط مرزی ممکن برای لوله های هم مرکز و خارج از مرکز

که در آن T_1 و T_2 دماهای ثابت می باشند و q'' شار حرارتی ثابت می باشد. شرح کامل کارهایی که در زمینه حل این گونه مسائل انجام شده خارج از حد این درس است، تنها می توان اشاره کرد که افرادی چون: اشنایدر، گلدشتاین، ترومیتا، فلدمن، العربی، الشاروی، النمیر و... نتایج قابل قبولی با استفاده از روش های تحلیلی، عددی و بعضاً تجربی برای این مساله بدست آورده اند. در اینجا بعنوان نمونه نتیجه یک کار تجربی برای حل این مساله در شرایط توسعه یافته و در حال توسعه و مرزهای شار ثابت و عایق (به ترتیب برای داخل و خارج) که در دانشگاه صنعتی امیرکبیر توسط (حسینی - حیرانی نویری و حاتم) انجام شده ارائه می شود. روابط حاکم بر این مساله مشابه حالت جابجایی آزاد از روی دیواره های قائم شامل روابط پیوستگی، مومنتوم در راستای شتاب ثقل و انرژی می باشد که در بخش (۷-۱) در مختصات دکارتی بیان گشت. همچنین با فرض اینکه سیال جز بر اثر تغییر دما تراکم پذیر نیست لذا می توان در معادله مومنتوم، رابطه ۷-۷ را استفاده نمود. برای بررسی مساله جابجایی در استوانه های غیر هم مرکز از سیستم مختصات دوقطبی استفاده می شود که جهت آشنایی تعریف آن در اینجا ذکر می شود: سه مولفه (ξ, η, Z) در آن بصورت زیر تعریف می گردد.

$$x + iy = a \cot g \left(\frac{\xi + i\eta}{2} \right) \quad (۸۸-۷)$$

$$Z = z \quad (۸۵-۷)$$

که i ریشه عدد -۱ و a عدد ثابت می باشد. (در روابط، Z درجهت شتاب ثقل فرض می شود) تبدیل روابط از مختصات دکارتی به دوقطبی نیازمند عملیات نسبتاً پیچیده ای است که در اینجا تنها جهت آشنایی نتایج آن ذکر می شود:

اگر در مختصات دوقطبی u مولفه سرعت در جهت Z ، v مولفه سرعت در جهت η و w مولفه سرعت در جهت ξ باشد:

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial hV}{\partial \eta} + \frac{\partial hW}{\partial \xi} + h^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (۸۶-۷)$$

$$h = \frac{a}{\cosh \eta - \cosh \xi} \quad (۸۷-۷)$$

معادله اندازه حرکت در جهت Z :

$$\frac{V}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{W}{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{v}{h^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + g\beta(T - T_s) \quad (۸۸-۷)$$

معادله انرژی:

$$\frac{v}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{w}{h} \frac{\partial T}{\partial \xi} + u \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) \quad (۸۹-۷)$$

در بررسی تجربی پدیده انتقال حرارت در کانال حلقوی از آنجا که دمای توده سیال برای ما نامعین می باشد، برای تعریف ضریب انتقال حرارت از دمای سیال ورودی $T_s(T_s)$ و دمای سطح لوله T_s استفاده می کنیم.

$$h_m = \frac{q}{T_s - T_a} \quad (۹۰-۷)$$

$$T_s = \frac{1}{L} \int_0^L T_{si} dx \quad (۹۱-۷)$$

لازم به ذکر است که وقتی دمای سطح ما نتیجه چند اندازه گیری آزمایشگاهی باشد، دمای متوسط از رابطه: (۹۲-۷) بدست می آید.

$$T_s = \frac{\sum T_{si}}{n} \quad (۹۲-۷)$$

همچنین اعداد بی بعد گراشف و ناسلت نیز به فرم زیر در می آید:

$$Nu = \frac{h_m D}{k_f} \quad (۹۳-۷)$$

$$Gr_m = \frac{g \beta (T_s - T_a) D_h^3}{\nu^2} \quad (۹۴-۷)$$

که D_h همان قطر هیدرولیکی است.

$$D_h = 2(r_i - r_o) \quad (۹۵-۷)$$

(r_i و r_o به ترتیب شعاع خارجی لوله داخلی و شعاع داخلی لوله خارجی می باشند)

برای لحاظ نمودن اثر طول لوله ، عدد گراشف اصلاح شده را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$Gr^* = Gr_m \frac{D_h}{l} \quad (96-7)$$

نتایج تجربی نشان می دهد که عدد ناسلت متوسط برای کانال های حلقوی تابعی است از $Gr^* Pr$ که رابطه بدست آمده بصورت زیر است :

$$Nu_D = \frac{A}{f'} (Gr_D^* Pr)^n \quad (97-7)$$

و

$$f' = 1 + 0.05 \frac{T_s + T_o}{T_o} \quad (98-7)$$

مقادیر A و n برای خارج از مرکزیت های مختلف در جدول زیر داده شده است : مقدار خارج از مرکزیت بصورت رابطه (99-7) تعریف میشود .

n	A	حالت
۰,۴۴۸۶	$۹,۱ \times ۱۰^{-۳}$	تک استوانه
۱,۰۴۷	$۴,۸ \times ۱۰^{-۳}$	E=۰
۱,۰۸۳	$۶,۲۷ \times ۱۰^{-۳}$	E=۰,۳۱
۰,۸۳۳۱	$۶,۲۳ \times ۱۰^{-۳}$	E=۰,۵
۰,۸۱۴۹	$۴,۴ \times ۱۰^{-۳}$	E=۰,۷
۱,۰۱۴۳	$۱,۱۴ \times ۱۰^{-۳}$	E=۱

$$E = \frac{e}{r_i - r_o} \quad (99-7)$$

که در رابطه فوق e طول خط المکزین دو دایره می باشد .

تحلیل نتایج بدست آمده نشان می دهد که ضریب انتقال حرارت با افزایش خارج از مرکزیت تا ۰/۵ افزایش می یابد. در فاصله ۰/۵ تا ۰/۷ تغییر مهمی در آن رخ نمی دهد و با افزایش E تا ۱، عدد ناسلت مجددا کاهش یافته اما باز هم مقدار آن بیشتر از حالت هم مرکز است .

انتقال حرارت با فرآیند تشعشع

مقدمه

انتقال حرارت از یک سطح به یک سطح دیگر و یا از یک جسم به جسم دیگر به طریق تشعشع موضوع مورد بررسی در این فصل است. اگر چه ممکن است در بخشهایی اشاره به منبع و عامل صدور گرما بشود، اما تکیه روی آن نخواهد بود، چرا که از دیدگاه انتقال حرارت، حاصل و نتیجه و اندازه حرارت انتقال یافته و درجه حرارت در اندازه های ماکروسکوپی مد نظر است و اینکه در مقیاسهای اتمی، مولکولی و ذره چه اتفاقی انجام می گیرد چندان مورد عنایت نیست اگر چه در جای خود این بحث بسیار مهم و شیرین و با اهمیت و دقیق است.

برای بررسی انتقال گرما از یک جسم به یک جسم دیگر یا از سطحی به سطح دیگر مشخصاً سه بخش متمایز اما مرتبط با هم وجود دارند این سه بخش عبارتند از:

- خصوصیات تشعشعی منبع یا سطح تشعشع کننده و خصوصیات تشعشعی سطح و یا جسم دریافت کننده تشعشع

- وضعیت هندسی دو سطح و یا دو جسم نسبت به یکدیگر

- خصوصیات و نقش محیط واسط بین دو جسم یا دو سطح در هنگام عبور تشعشع

برای روشن بیان کردن مطلب، دو سطح را در نظر می گیریم، برای آنکه بدانیم چه میزان انرژی تشعشعی ساطع شده توسط یکی به دیگری میرسد، ابتدا لازم است دانسته شود که این جسم چه میزان انرژی تشعشعی صادر می کند، مسئله ای که به شدت وابسته است به خصوصیات تشعشعی سطح، مانند ضریب تشعشع، ضریب جذب، ضریب انعکاس و ضریب عبور. البته درجه حرارت و اندازه سطح عوامل مهمی هستند که مد نظرند، اما ضرایب نامبرده برای اجسام یا سطوح با درجه حرارت مساوی و اندازه سطح یکسان، تعیین کننده میزان انرژی صادر شده از سطح اند (نسبت به جسم معیار، سیاه) پس از آنکه دانسته شد چه میزان انرژی از جسم ساطع می گردد، مشخص باید گردد که از این انرژی ساطع شده چه بخشی به سطح دریافت کننده خواهد رسید. به استثناء زمانیکه سطح دریافت کننده بصورت کامل سطح تشعشع کننده را احاطه کرده باشد تنها بخشی از این انرژی تشعشع شده به سطح دریافت کننده خواهد رسید که این میزان وابسته به وضعیت هندسی دو سطح نسبت بهم می باشد، زمانیکه انرژی (حرارت) به جسم گیرنده اصابت می کند ممکن است تمامی آن جذب نگردد، که میزان جذب نیز بستگی به خصوصیات تشعشعی سطح دریافت کننده خواهد داشت.

در صورتیکه بین دو سطح خلاء باشد یا ماده ای غیر فعال و خنثی نسبت به تشعشع در این صورت نقشی در تشعشع بین دو سطح ایفا نخواهد کرد، در حالیکه اگر بین دو سطح یک ماده وجود داشته باشد که عبور تشعشع از درون آن با مداخله این ماده همراه گردد (نظیر گازهای حاصل احتراق و انفجار و بخار آب) در این صورت باید نقش این ماده در محاسبات منظور گردد.

نفت و توجه به تمامی عوامل و عناصر و پارامترها که دربرگیرنده تمامی خصوصیات دو سطح و ماده واسط باشد عملاً در محاسبات فوق العاده دشوار و شاید بتوان گفت ناشدنی است. لذا در هر مرحله ممکن است بعضی از خصوصیات و پارامترها

حذف کردند و حالات ساده تر و ضرایبی ثابت نسبت به درجه حرارت، جهت و طول موج در محاسبات معمول کردند. نتیجه آن در مقیاس ماکروسکوپی ممکن است خیلی خطا ایجاد نکند اگر چه هر مسئله در جای خود باید ارزیابی گردد، اما تا آنجا که عمومیت مسئله و آنهم به عنوان یک موضوع درسی مطرح است این ساده انگاری ها باید معمول کردند تا متد و روش کار مشخص گردد. البته کاربرد آنها به مقدار قابل توجه وابسته به تجربه و میزان دقت مورد نیاز شخصی است که این روشها و متدها را بکار می گیرد. این ساده انگاریها هر جا لازم باشد هم در خصوصیات تشعشی سطوح و هم خصوصیات ماده واسط اعمال می کردند.

۱- تشعشع رد و بدل شده بین دو سطح معیار (سیاه) در حالیکه بین آنها خلاء می باشد

۱-۱ تعریف زاویه فضایی

زاویه ای حجمی که از یک نقطه، سطح و یا جسمی نظاره می شود زاویه فضایی نامیده می شود. واحد زاویه فضایی یک استرادیان است و آن زاویه ای است که سطحی واحد روی کره ای به شعاع واحد از مرکز کره نظاره می گردد، با توجه به آنکه سطح چنین کره ای 4π می باشد لذا زاویه حجمی (فضایی) نظاره تمامی سطح کره از مرکز آن 4π استرادیان می باشد.

بطور عام اگر A_n اندازه سطح روی کره ای به شعاع R باشد زاویه حجمی (فضایی) مربوط به این سطح $d\omega$ با توجه به تعریف زاویه فضایی برابر A_n/R^2 خواهد بود یعنی:

$$d\omega = \frac{A_n}{R^2} \quad (1-1)$$

در شکل (۱-۱) زاویه فضایی مربوط به A_n ملاحظه می گردد.

با توجه به آنکه A_n سطح روی کره در مختصات کروی مساوی است با $R^2 \sin\beta \, d\theta \, d\beta$ لذا:

$$d\omega = \frac{R^2 \sin\beta \, d\theta \, d\beta}{R^2}$$

یا

$$d\omega = \sin\beta \, d\theta \, d\beta \quad (2-1)$$

در شکل (۲-۱) چگونگی محاسبه اندازه زاویه فضایی از روی مقدار سطح A_n نشان داده شده است.

۲-۱- شدت تشعشع و قدرت تشعشع

با مشخص شدن زاویه فضایی و واحد آن اکنون می توانیم شدت تشعشع را تعریف کنیم. میزان انرژی ساطع شده در واحد زمان درون زاویه فضایی واحد و واحد سطح (واحد سطح عمود بر جهت انتشار) و برای واحد فاصله طول موج $d\lambda$ ، شدت تشعشع طیفی نامیده می شود. بر اساس این تعریف اگر dQ_λ انرژی ساطع شده درون زاویه فضایی $d\omega$ و از سطح dA_1 و فاصله $d\lambda$ در واحد زمان باشد شدت تشعشع طیفی عبارتست از:

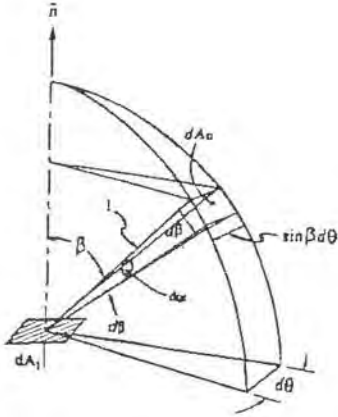
$$I'_{\lambda b} = \frac{dQ_\lambda}{d\omega \, dA_1 \, \cos\beta \, d\lambda} \quad (3-1)$$

و شدت تشعشع کلی (برای تمام طول موجها) عبارتست از:

$$I'_b = \frac{dQ}{d\omega \, dA_1 \, \cos\beta} \quad (4-1)$$

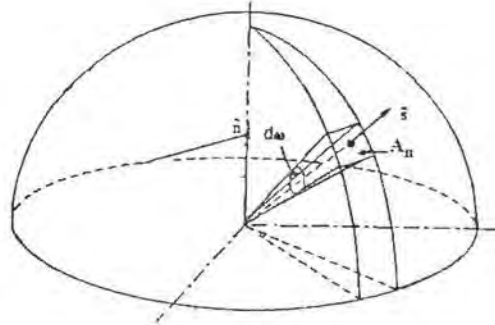
زیر نویس b در $I'_{\lambda b}$ و I'_b نمایش شدت تشعشع جسم سیاه است.

در صورتیکه شدت بر مبنای واحد سطح حقیقی ونه بر مبنای واحد سطح تصویر شده در جهت عمود بر سمت انتشار تعریف گردد در این صورت به آن قدرت تشعشع می گوئیم (برای تفکیک، ودر واقع این دو مقدار با هم اندازه \cos زاویه β اختلاف دارند که در شکل (۳-۱) نشانه داده شده است).



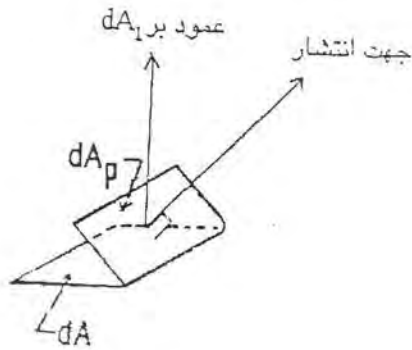
شکل ۲-۱ چگونگی محاسبه $d\omega$

اندازه زاویه فضایی از روی سطح $d\omega$



شکل ۱-۱ چگونگی مشاهده A_n

از مرکز نیمکره و تحت زاویه فضایی $d\omega$



شکل ۳-۱ تصویر سطح حقیقی dA_1

در جهت عمود بر جهت انتشار

لذا قدرت انتشار طیفی :

$$(۵-۱)$$

$$e'_{\lambda b} = \frac{dQ_{\lambda}}{d\omega dA_1 d\lambda}$$

وقدرت انتشار کلی

$$e'_b = \frac{dQ}{d\omega dA_1} \quad (۶-۱)$$

از مقایسه رابطه (۳-۱) با (۵-۱) و رابطه (۴-۱) با (۶-۱) واضح است که:

$$e'_{\lambda b} = I'_{\lambda b} \cos \beta \quad (۷-۱)$$

$$e'_b = I'_b \cos \beta \quad (۸-۱)$$

در صورتیکه تشعشع عمود بر سطح واقعی باشد.

$$e'_{\lambda b} = I_{\lambda b n} \quad (۹-۱)$$

$$e'_b = I'_{bn} \quad (۱۰-۱)$$

زیر نویس n حتماً باید نوشته شود زیرا رابطه (۹-۱) و (۱۰-۱) فقط در حالت خاصی که انتشار از سطح بطور قائم (عمود بر سطح باشد صحت دارد).

اجسامی که تشعشع آنها از روابط (۷-۱) و (۸-۱) تبعیت می کنند اجسام پخش کننده کامل نامیده شده و روابط (۷-۱) و (۸-۱) بنام قانون کوسینوسهای لمبرت نامیده می شود.

۱-۳- قانون پلانک و تشعشع جسم سیاه

پلانک با استفاده از تئوری کوانتم مکانیک خود ثابت نمود که انرژی ساطع شده از جسم سیاه که در درجه حرارت T قرار دارد در واحد زمان و واحد سطح و در تمام فضای محاط بر سطح و واحد فاصله طول موج حول λ عبارتست از:

$$e_{\lambda b} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1} \quad (۱۱-۱)$$

(واین ماکزیمم انرژی است که در طبیعت جسمی در درجه حرارت T و طول موج λ می تواند تشعشع نماید که به عنوان سطح معیار و یا سیاه تعریف شده است). مقادیر C_1 و C_2 در رابطه (۱۱-۱) ثابتهای اول و دوم پلانک بوده و مقدار آنها مساویست با:

$$C_1 = 3.743 \times 10^8 \frac{w\mu^4}{m^2}$$

$$C_2 = 1.4387 \times 10^4 \mu k$$

باید توجه نمود که در رابطه (۱۱-۱) $e_{\lambda b}$ انرژی ساطع شده از جسم سیاه است در واحد زمان و سطح و در طول موج λ به تمام فضایی که جسم را احاطه نموده است، البته برای واحد فاصله طول موج، در حالیکه رابطه (۵-۱) همین انرژی است برای واحد زاویه فضایی. لذا رابطه بین $e_{\lambda b}$ و $I'_{\lambda b}$ و I'_b به صورت زیر خواهد بود (ضمیمه ۱ ملاحظه شود).

$$e_{\lambda b} = \pi I'_{\lambda b} \quad (۱۲-۱)$$

$$e_b = \pi I'_b \quad \text{بطریق مشابه}$$

مفهوم روابط (۱۲-۱) این است که انرژی تشعشعی سطح سیاه در واحد زمان و واحد سطح در تمام فضای نیمکره محاط بر سطح تشعشع کننده مساویست با π برابر شدت تشعشع. با توجه به قانون کوسینوسهای لمبرت و رابطه بین قدرت تشعشع و شدت تشعشع خواهیم داشت.

$$e_{\lambda b} = \pi \frac{e'_{\lambda b}}{\cos \beta} \quad (13-1)$$

$$e_b = \pi \frac{e'_b}{\cos \beta}$$

اگر قدرت تشعشع عمود بر سطح مد نظر قرار گیرد.

$$e'_{\lambda b} = \frac{e_{\lambda b}}{\pi}, \quad e'_{\lambda b n} = I_{\lambda b} \quad (14-1)$$

یعنی قدرت تشعشع عمود بر سطح با شدت تشعشع مساوی است.

رابطه (۱۲-۱) از انتگرال روی سطح نیمکره بدست آمد، اگر مقصود محاسبه مقدار انرژی تشعشع شده درون یک زاویه فضایی محدود (بخشی از کره) باشد انتگرال را بین دو مقدار زاویه θ و دو مقدار زاویه β می توان گرفت که نتیجه به صورت زیر خواهد بود. ضمیمه (۲) را ملاحظه کنید.

$$e_{\lambda b}(\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2) = I'_{\lambda} \frac{\sin^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_1}{2} (\theta_1 - \theta_2) \quad (15-1)$$

توجه شود که روابط (۱۲-۱)، (۱۳-۱) و (۱۴-۱) و (۱۵-۱) که برای یک طول موج تعریف شدند برای تمام طول موجها یا بخشی از طول موج (باند موج) صادقند.

رابطه مهم دیگری که باید بدان توجه نمود رابطه انرژی ساطع شده در واحد سطح و واحد زمان و واحد طول موج در تمامی فضای نیمکره محاط بر سطح تشعشع کننده است با انرژی ساطع شده در واحد سطح و واحد زمان و در تمامی طول موجها یعنی رابطه e_b و $e_{\lambda b}$ بصورت:

$$\int_0^{\infty} e_{\lambda b} d\lambda = e_b = \sigma T^4 \quad (16-1)$$

با توجه به رابطه توزیع طیفی پلانک برای جسم سیاه، رابطه (۱۱-۱) داریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1} d\lambda = \sigma T^4 \quad (17-1)$$

$$\sigma = \frac{2}{15} \frac{C_1}{C_2^4} \pi^5 \quad (18-1)$$

می باشد. رابطه (۱۶-۱) یعنی $e_b = \sigma T^4$ به عنوان قانون استفن-بولتزمن شناخته می شود. مقدار عددی σ

در محاسبات $5.669 \times 10^{-8} \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}^4$ منظور می گردد و واحد آن $\text{w/m}^2 \cdot \text{k}^4$ می باشد.

۴-۱- قانون وین

تابع توزیع طیفی پلانک برای جسم سیاه را می توان به گونه دیگری نوشت:

$$e_{\lambda b} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1}$$

$$\frac{e_{\lambda b}}{T^5} = \frac{C_1 (\lambda T)^{-5}}{\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1} \quad (19-1)$$

ملاحظه می گردد که $e_{\lambda b}/T^5$ تابعی است از λT و نه λ و T جداگانه، رسم تابع $e_{\lambda b}/T^5$ بر حسب λT دارای یک ماکزیمم است که در عین سادگی نتیجه شگفتی می دهد. با محاسبه ریاضی مقدار $e_{\lambda b}/T^5$ دیده می شود که بازاء $\lambda T = 2897/6 \mu k$ ماکزیمم است.

یعنی:

$$(\lambda T)_{\max} = 2897/6 \mu k \approx 3000 \mu k \quad (20-1)$$

رابطه (۲۰-۱) بنام قانون «وین» نامیده می شود. یک بیان از این قانون این است که وقتی درجه حرارت جسمی افزایش می یابد طول موجی که در آن ماکزیمم تشعشع انجام می شود کاهش پیدا می کند و برعکس، یک تعبیر دیگر از قانون وین با قرار دادن $\lambda T = (\lambda T)_{\max} = 2897/6 \mu k$ در رابطه

$$\frac{e_{\lambda b}}{T^5} = \frac{C_1}{(2897.6)^5 [\exp \frac{C_2}{2897.6} - 1]} = 1.287 \times 10^{-11} \frac{W}{m^2 \cdot \mu k^5} \quad (19-1) \text{ بدست می آید.}$$

$$(e_{\lambda b})_{\max} = 1.287 \times 10^{-11} \times T^5 \frac{W}{m^2 \mu} \quad (21-1)$$

لذا بیان دیگری از قانون وین این است که ماکزیمم تشعشع متناسب با T^5 می باشد. با توجه به آنکه بازاء مقادیر T_2 مقدار $e_{\lambda b}/T^5$ ثابت باقی می ماند لذا ماکزیمم تشعشع در تغییر از درجه حرارت T_2 و طول موج λ_2 (که حاصلضرب آنها ثابت است) متناسب با T^5 خواهد بود و یا تشعشع ماکزیمم وقتی درجه حرارت از T_1 به T_2 تغییر می کند از طول موج λ_1 به سمت طول موج λ_2 میل می کند که اگر T_1 کمتر از T_2 باشد در اینصورت λ_1 بیشتر از λ_2 خواهد بود و این تعبیر از رابطه (۲۰-۱) بدست آمد.

همچنانکه در مقدمه ذکر گردید ما ابتدا تشعشع ردیویدل شده بین دو سطح معیار (سیاه) را بررسی می کنیم. تا اینجا تشعشع ساطع شده در واحد سطح و زمان و واحد زاویه فضایی و واحد فاصله طول موج را تعریف کردیم که اگر بر مبنای واحد سطح تصویر شده در امتداد عمود بر جهت تشعشع بود شدت تشعشع طیفی $I_{\lambda b}$ و اگر بر مبنای واحد سطح واقعی قدرت تشعشع طیفی $e'_{\lambda b}$. انرژی ساطع شده در تمامی طول موجها در واحد سطح و واحد زمان و واحد زاویه فضایی (شدت کلی) I'_b و اگر بر مبنای واحد سطح عمود بر جهت تشعشع و قدرت کلی بر مبنای واحد سطح واقعی e'_b . از سوی انرژی ساطع شده در تمامی طول موجها و در تمامی فضای نیمکره برای واحد سطح و واحد زمان را بصورت e_b

نمایش دادیم، مجدداً و بطور خلاصه روابط بین این کمیت ها را ذکر می کنیم. انرژی ساطع شده در یک طول موج در تمام فضای نیمکره در واحد زمان و سطح و واحد فاصله طول موج حول λ .

$$e_{\lambda b} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1}$$

انرژی ساطع شده در یک طول موج برای واحد سطح در جهت معین و واحد زاویه فضایی و واحد فاصله طول موج حول λ .

$$e'_{\lambda b} = \frac{e_{\lambda b} \cos \beta}{\pi}$$

$$I'_{\lambda b} = \frac{e_{\lambda b} \cos \beta}{\pi}$$

شدت تشعشع طیفی

$$e'_b = I_b \cos \beta$$

قدرت تشعشع کلی جهت دار

$$I_b = \frac{1}{\pi} e_b$$

شدت کلی جهت دار

$$I'_{\lambda bn} = e'_{\lambda b}$$

شدت تشعشع طیفی عمودی

انرژی ساطع شده در تمام طول موجها و فضای نیمکره در واحد سطح و زمان.

$$e_b = \int_0^{\infty} e_{\lambda b} d\lambda = \sigma T^4$$

$$I'_b = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

شدت انرژی ساطع شده کلی

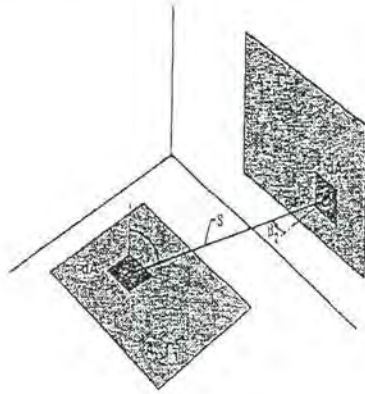
باید آشنایی کافی با تعاریف کمیت های فوق داشته و تصویر روشنی از هر یک از آنها در ذهن فراهم نمود.

اکنون که دانسته شد جسم سیاه چه میزان تشعشع دارد روابط بین دو سطح سیاه را که به یکدیگر تشعشع می کنند مورد بررسی قرار می دهیم.

۱-۵- مفهوم ضریب شکلی

تا اینجا بحث روی تشعشع ساطع شده از یک سطح بود در یک طول موج یا در تمامی طول موجها در یک جهت معین و یا در تمامی جهات، اما گفته نشد که از این انرژی ساطع شده چقدر به سطحی دیگر که در یک موقعیت هندسی معین نسبت به سطح تشعشع کننده قرار دارد برخورد می کند، اکنون در موقعیتی هستیم که این مسئله را بررسی کنیم. دو سطح A_1 و A_2 را که در درجه حرارت T_1 و T_2 قرار دارند در فضا نسبت بهم در نظر می گیریم، فعلاً تصور ما این است که این دو سطح سیاه هستند و از قوانین ذکر شده تبعیت می کنند. کل انرژی ساطع شده از سطح A_1 (هم مشخص کننده سطح است هم اندازه سطح را میدهد) مساوی است با $\sigma A_1 T_1^4$ و کل انرژی ساطع شده از سطح A_2 مساوی است با

این مقدار انرژی از دو سطح در تمامی طول موج ها و در فضای نیمکره اطراف هر کدام منتشر می شود، شکل (۴-۱).



شکل ۴-۱ تشعشع A_1 و A_2 نسبت به هم

اگر Q_{1-2} بخشی از انرژی سطح A_1 باشد که به سطح A_2 برخورد می کند و Q_1 کل انرژی ساطع شده سطح A_1 ،

طبق تعریف:

$$F_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{Q_1} \quad (22-1)$$

نسبت F_{1-2} این دو انرژی ضریب شکلی تشعشعی A_1 به A_2 (Radiation Shape Factor) می باشد.

ولذا $Q_{1-2} = F_{1-2} Q_1$

از سوی $Q_1 = E_{b1} = A_1 e_{b1} = \sigma A_1 T_1^4$

لذا $Q_{1-2} = F_{1-2} \sigma A_1 T_1^4$

از طرف دیگر و بطریق مشابه برای سطح A_2 که به سطح A_1 تشعشع می کند خواهیم

داشت: $Q_{2-1} = F_{2-1} \sigma A_2 T_2^4$

خالص تشعشع رد و بدل شده بین دو سطح A_1 و A_2

$$Q_{1-2} = F_{1-2} \sigma A_1 T_1^4 - F_{2-1} \sigma A_2 T_2^4 \quad (23-1)$$

F_{1-2} و F_{2-1} به ترتیب ضریب شکلی تشعشعی یا ضریب نظاره ۱ به ۲ و یا ۲ به ۱ نامیده می شوند.

متعاقباً خواهیم دید که:

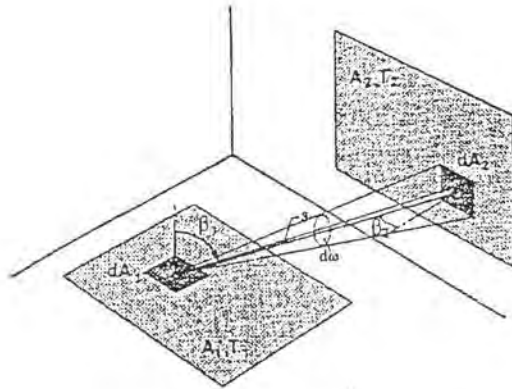
$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \quad (24-1)$$

رابطه (۲۴-۱) بعنوان رابطه تقابل شناخته می شود و بسیار مهم است.

اکنون به ارزیابی و محاسبه F_{1-2} و F_{2-1} می پردازیم.

قطعه کوچک dA_1 را روی سطح A_1 و dA_2 را روی سطح A_2 در شکل (۵-۱) و فاصله S از هم در نظر می گیریم،

در حالیکه سطح dA_2 از dA_1 با زاویه $d\omega_1$ نظاره می شود.



شکل ۵-۱. تشعشع دو المان dA_1 و dA_2 به هم

اگر شدت تشعشع سطح A_1 برابر I_{b1} و برای سطح A_2 برابر I_{b2} باشد، طبق تعریف، انرژی رسیده از dA_1 به dA_2 (با توجه به رابطه (۶-۱)) عبارت است از:

$$dQ_{1-2} = I_{b1} \cdot dA_1 \cos \beta_1 d\omega_1 \quad (۲۵-۱)$$

با توجه به اینکه

$$d\omega_1 = \frac{dA_2 \cos \beta_2}{S^2} \quad (۲۶-۱)$$

$$dQ_{1-2} = I_{b1} \cdot dA_1 \cos \beta_1 \cdot \frac{dA_2 \cos \beta_2}{S^2} \quad (۲۷-۱)$$

به طریق مشابه انرژی رسیده از dA_2 به dA_1 عبارت است از:

$$dQ_{2-1} = I_{b2} \cdot dA_2 \cos \beta_2 \cdot \frac{dA_1 \cos \beta_1}{S^2} \quad (۲۸-۱)$$

ضریب شکلی المان dA_1 و dA_2 طبق تعریف:

$$F_{dA_1-dA_2} = \frac{dQ_{1-2}}{dQ_1} = \frac{I_{b1} \cdot dA_1 \cos \beta_1 \cdot \frac{dA_2 \cos \beta_2}{S^2}}{e_{b1} \cdot dA_1}$$

با توجه به اینکه $I_{b1} = e_{b1} / \pi$ لذا:

$$F_{dA_1-dA_2} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_2}{\pi S^2} \quad (۲۹-۱)$$

به طریق مشابه:

$$F_{dA_2-dA_1} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_1}{\pi S^2} \quad (30-1)$$

از تقسیم دو رابطه بر هم:

$$dA_1 F_{dA_1-dA_2} = dA_2 F_{dA_2-dA_1} \quad (31-1)$$

رابطه (31-1) رابطه تقابل دو المان سطحی است نسبت به هم.

با توجه به روابط (27-1) و (28-1) خالص انرژی رد و بدل شده بین دو المان dA_1 و dA_2 عبارتست از:

$$dQ_{1-2} = dQ_{1-2} - dQ_{2-1} = (I_{b_1} - I_{b_2}) \frac{dA_1 dA_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2}{S^2}$$

با توجه به آنکه $e_{b_1} = \pi I_{b_1}$ و $e_{b_2} = \pi I_{b_2}$ می باشد خواهیم داشت:

$$dQ_{1-2} = (e_{b_1} - e_{b_2}) \frac{dA_1 dA_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi S^2} \quad (32-1)$$

و انرژی خالص رد و بدل شده بین دو سطح A_1 و A_2

$$Q_{1-2} = \int_{A_1} \int_{A_2} (e_{b_1} - e_{b_2}) \frac{dA_1 dA_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi S^2} \quad (33-1)$$

و چون e_{b_1} و e_{b_2} مستقل از شرایط هندسی سطوح هستند خواهیم داشت:

$$Q_{1-2} = (e_{b_1} - e_{b_2}) \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{dA_1 dA_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi S^2} \quad (34-1)$$

از مقایسه این رابطه و رابطه (23-1) و با توجه به رابطه عمومی تقابل $A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$ خواهیم داشت:

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{dA_1 dA_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi S^2} \quad (35-1)$$

بطور عمومی و کلی رابطه (35-1) بصورت زیر نوشته می شود.

$$A_n F_{n-m} = A_m F_{m-n} = \int_{A_n} \int_{A_m} \frac{dA_n dA_m \cos \beta_n \cos \beta_m}{\pi S^2} \quad (36-1)$$

همچنین انرژی خالص رد و بدل شده بین دو سطح n و m عبارتست از:

$$Q_{n-m} = A_n F_{n-m} (e_{bn} - e_{bm}) = \frac{e_{bn} - e_{bm}}{1} A_n F_{n-m} \quad (37-1)$$

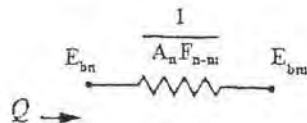
رابطه (37-1) دارای یک مشابه الکتریکی است در مدار ساده قانون اهم $I = V/R$ بدین صورت که در شکل (6-1)

نشان داده شده است.

$1/A_n F_{n-m}$ به عنوان مقاومت فضایی (Space resistance) شناخته می شود. رابطه (37-1) و مقاومت الکتریکی شکل

(6-1) راه ساده ای را برای محاسبات تشعشی سطوح سیاه و غیر سیاه پیشنهاد می کند که استفاده از آنها در بعضی مسائل

توصیه می گردند.



شکل ۶-۱ معادل الکتریکی رابطه ۳۷-۱

۶-۱- محاسبه حرارت رد ویدل شده

برای یک سطح بسته شامل N سطح بدیهی است که:

$$\sum_{k=1}^N F_{i-k} = 1 \quad (38-1)$$

این رابطه برای یک سطح بسته شامل سطوح منحنی و مسطح و ترکیب آنها صادق است به شرطی که جمله $i=k$ را نیز برای سطوح منحنی در نظر بگیریم. اگر همه سطوح مسطح باشند واضح است که $F_{i-i} = 0$ است.

برای تبادل حرارت بین سطوح مختلفی که با هم یک سطح بسته را تشکیل می دهند، حرارتی را که باید به هر کدام از سطوح داد ویا گرفت تا در درجه حرارت مورد نظر باقی بمانند از رابطه (۳۹-۱) بدست می آید.

$$Q_i = \sigma T_i^4 A_i - \sum_{k=1}^N \sigma T_k^4 A_i F_{k-i} \quad (39-1)$$

بخش اول سمت راست انرژی ساطع شده از سطح است و بخش دوم مجموعه انرژی است که از سطوح دیگر به سطح i می رسد، با استفاده از رابطه تقابل ویا توجه به اینکه $\sum F_{i-k} = 1$ می باشد می توان نوشت:

$$Q_i = \sigma T_i^4 A_i - \sum_{k=1}^N \sigma T_k^4 A_i F_{i-k}$$

و

$$Q_i = \sigma T_i^4 A_i \sum_{k=1}^N F_{i-k} - \sum_{k=1}^N \sigma T_k^4 A_i F_{i-k}$$

وینابراین

$$Q_i = \sigma A_i \sum_{k=1}^N (T_i^4 - T_k^4) F_{i-k} \quad (40-1)$$

باتوجه به رابطه (۴۰-۱) ملاحظه می گردند که به ازاء هر سطح یک معادله خواهیم داشت، و اگر مجموعاً N سطح داشته باشیم که سطح بسته ای را تشکیل دهند N معادله داریم که شامل N درجه حرارت (T) و N مقدار حرارت (Q) خواهند بود، اگر از مجموعه $2N$ مجهول (پارامتر) نصف آنها معلوم باشند می توان سایر پارامترها را با N معادله N مجهولی بدست آورد. اگر $N-m$ درجه حرارت و m مقدار حرارت معلوم باشند می توان m درجه حرارت مجهول و $N-m$ مقدار حرارت مجهول را پیدا نمود.

۷-۱- روشهای پیدا کردن ضرایب شکلی

با توجه به آنکه ضرایب شکلی بین سطوح، مستقل از جنس و ضرایب تشعشعی آنها و همچنین درجه حرارت و مقدار

حرارت سطوح می باشند، در همین بخش به آنها می پردازیم و ضرورتی برای تکرار در بخش های دیگر که تأثیر ضرایب تشعشعی در میزان حرارت ساطع شده و یا رد و بدل شده مد نظر قرار می گیرد نخواهد بود.

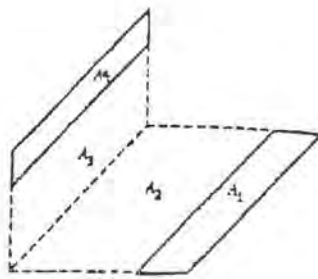
برای پیدا کردن ضرایب شکلی سطوح نسبت به هم روشهای مختلفی وجود دارد و بسته به تجربه و وضعیت هندسی سطوح نسبت به هم و اطلاعات و امکانات موجود تفاوت خواهند کرد. هدف از طرح موضوع روشهای محاسبه، دادن اطلاعات پایه ای راجع به این روشها است. برای کسانی که بطور متناوب و یا پیوسته با این نوع مسائل سرو کار دارند تهیه آرشیوی از منحنی ها و گرافها و یا روابط برای اشکال و سطوح مختلف و به منظور تسترسی سریع پیشنهاد می گردد. در هر حال اغلب منحنی ها و گرافها و روابط برای یک شکل قبلا محاسبه شده باید بهره برد تا یک شکل و یا سطح مجهول بدست آید، این موضوع را در دسته بندی جداگانه ای تحت عنوان روشهای جبری مشاهده می کنید. سعی شده است که برای هر روش یکی دو نمونه مثال حل شود.

۱-۷-۱- روشهای جبری

تعداد زیادی از اشکال هندسی وجود دارد که ضرایب شکلی آنها یا به صورت منحنی یا روابط ریاضی به راحتی با توجه به ابعاد سطوح قابل دستیابی هستند، با استفاده از این اطلاعات می توان ضرایب شکلی حالت مجهول ولی قابل تبدیل به حالتی که ضرایب شکلی معلوم است را محاسبه نمود. بعنوان مثال دو نمونه را نشان می دهیم.

مثال نمونه ۱- محاسبه ضریب شکلی دو سطح عمود بر هم بدون فصل مشترک

ضریب شکلی دو سطح عمود بر هم دارای فصل مشترک به صورت منحنی و یا روابط ریاضی داده شده اند می خواهیم ضریب شکلی سطح ۱ به ۴ را با استفاده از این اطلاعات محاسبه کنیم. صورت مسئله مطابق شکل (۷-۱) می باشد.



شکل ۷-۱ محاسبه ضرایب شکلی A_1 به A_4

بر حسب مقادیر معلوم

می دانیم که ضریب شکلی $2+1$ یا $3+4$ و یا 2 یا $3+4$ و بالعکس قابل دستیابی هستند، می خواهیم با استفاده از این

اطلاعات ضریب شکلی سطح ۴ به ۱ را محاسبه کنیم.

بر اساس رابطه تقابل داریم:

$$A_{1+2}F_{(1+2)-(3+4)} = A_{3+4}F_{(3+4)-(1+2)}$$

$$A_{1+2}F_{(1+2)-(3+4)} = A_{3+4}[F_{(3+4)-1} + F_{(3+4)-2}]$$

با استفاده از جمع پذیری می توان نوشت:

یا

$$A_{1+2}F_{(1+2)-(3+4)} = A_{3+4}[F_{(3+4)-2} + F_{(3+4)-1}] \quad (1)$$

ابتدا $F_{(3+4)-1}$ را محاسبه می کنیم، برای محاسبه داریم:

$$A_{3+4}F_{(3+4)-1} = A_1F_{1-(3+4)} = A_1[F_{(1-3)} + F_{(1-4)}]$$

$$F_{(3+4)-1} = \frac{A_1}{A_{3+4}}[F_{(1-3)} + F_{(1-4)}]$$

و

$$A_1F_{1-3} = A_3[F_{3-(2-1)} - F_{3-2}]$$

با توجه به $A_1F_{1-3} = A_3F_{3-1}$ ویا

$$F_{1-3} = A_3[F_{3-(2+1)} - F_{3-2}] / A_1$$

یا

$$F_{(3+4)-1} = \frac{A_{11}}{A_{3+4}} \left(\frac{A_3}{A_1} (F_{3-(2+1)} - F_{3-2}) + F_{1-4} \right)$$

خواهیم داشت:

در رابطه (۱) بجای $F_{(3+4)-1}$ مقدار می گذاریم:

$$A_{1+2}F_{(1+2)-(3+4)} = A_{3+4} \left[F_{(3+4)-2} + \frac{A_1}{A_{3+4}} \left(\frac{A_3}{A_1} (F_{3-(2+1)} - F_{3-2}) + F_{1-4} \right) \right]$$

$$A_{1+2}F_{(1+2)-(3+4)} = A_{3+4}F_{(3+4)-2} + A_3F_{3-(2+1)} - A_3F_{3-2} + A_1F_{1-4}$$

$$A_{1+2}F_{(1+2)-(3+4)} - A_{3+4}F_{(3+4)-2} - A_3F_{3-(2+1)} + A_3F_{3-2} = A_1F_{1-4}$$

با استفاده از رابطه تقابل و محاسبه F_{1-4} خواهیم داشت:

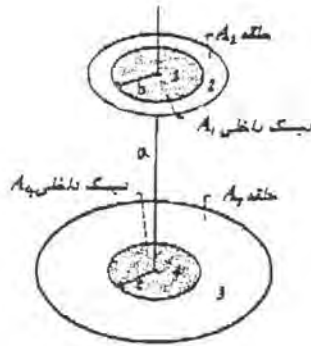
$$F_{1-4} = \frac{1}{A_1} (A_{(1+2)}F_{(1+2)-(3+4)} - A_{3+4}F_{(3+4)-2} - A_3F_{3-(2+1)} + A_3F_{3-2})$$

$$F_{1-4} = \frac{1}{A_1} (A_{(1+2)}F_{(1+2)-(3+4)} - A_2F_{2-(3+4)} - A_{1+2}F_{(1+2)-3} + A_2F_{2-3})$$

ملاحظه می گردد که تمامی مقادیر داخل کروشه از اطلاعات مربوط به صفحات عمود بر هم با فصل مشترک قابل

محاسبه می باشد.

مثال نمونه ۲- محاسبه ضریب شکلی دو حلقه با استفاده از ضرایب شکلی دو دیسک می خواهیم ضریب شکلی رینگ ۳ به ۲ را پیدا کنیم. صورت مسئله بصورت شکل (۸-۱) می باشد.



شکل ۸-۱ محاسبه ضریب شکلی در حلقه A_1 به A_2

نسبت به هم بر حسب مقادیر معلوم

برای دو دیسک موازی ضریب شکلی مطابق رابطه زیرین داده شده است.

$$F_{1-1} = \frac{(1 + B^2 + C^2) - \sqrt{(1 + B^2 + C^2)^2 - 4B^2C^2}}{2B^2}$$

در حالیکه $C = c/a$ و $B = b/a$ می باشد. بدیهی است که رابطه فوق قابل کاربرد خواهد بود برای محاسبه ضرایب

شکلی بین ۱ و ۴ و یا ۱ و ۳+۴ و یا ۱+۲ و ۳+۴، با توجه به جمع پذیری می توان نوشت:

$$F_{(1+2)-(3+4)} = F_{(1+2)-3} + F_{(1+2)-4} \quad (1)$$

$$F_{(1+2)-(3+4)} = F_{(1+2)-3} + F_{(1+2)-4} \quad (2)$$

با توجه به رابطه تقابل و جمع پذیری می توان نوشت:

$$A_{1+2} F_{(1+2)-3} = A_3 F_{3-(1+2)} = A_3 (F_{3-1} = F_{3-2})$$

$$A_{1+2} F_{(1+2)-3} = A_3 F_{3-1} + A_3 F_{3-2} \quad \text{یا}$$

$$A_{1+2} F_{(1+2)-3} - A_3 F_{3-1} = A_3 F_{3-2}$$

$$F_{3-2} = \frac{1}{A_3} (A_{1+2} F_{(1+2)-3} - A_3 F_{3-1}) \quad (3)$$

با جایگزینی $F_{(1+2)-3}$ از رابطه (۲) در رابطه (۳) داریم:

$$F_{3-2} = \frac{1}{A_3} (A_{1+2} (F_{(1+2)-(3+4)} - F_{(1+2)-4}) - A_3 F_{3-1})$$

از رابطه اخیر ملاحظه می گردد که تنها F_{3-1} هنوز قابل محاسبه از طریق دیسک به دیسک نمی باشد و برای انجام

$$F_{1-(3+4)} = F_{1-3} + F_{1-4} \quad \cdot \quad A_1 F_{1-3} = A_3 F_{3-1} \quad \cdot \quad F_{1-3} = \frac{A_3 F_{3-1}}{A_1} \quad \text{پنیری آن داریم:}$$

$$F_{1-(3+4)} - F_{1-4} = \frac{A_3 F_{3-1}}{A_1} \quad \text{و در نتیجه:}$$

$$F_{3-1} = \frac{A_1}{A_3} (F_{1-(3+4)} - F_{1-4}) \quad \text{حالا } F_{3-1} \text{ را استخراج می کنیم و خواهیم داشت:}$$

اکنون ملاحظه می شود که F_{3-1} نیز قابل محاسبه می باشد و با جایگزینی آن داریم:

$$F_{3-2} = \frac{1}{A_3} [A_{(1+2)} (F_{(1+2)-(3+4)} - F_{(1+2)-4}) - A_1 (F_{1-(3+4)} - F_{1-4})]$$

بدیده می شود که در این رابطه تمامی مقادیر قابل محاسبه از روابط دیسک به دیسک می باشد.

۲-۷-۱ انتگرال گیری مستقیم

ملاحظه شد که ضریب شکلی دو سطح نسبت به هم در فرم کلی انتگرالی به صورت زیر است:

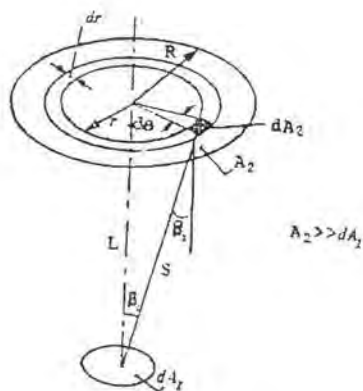
$$(۳۵-۱)$$

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} = \int_{A_1} \int_{A_2} dA_1 dA_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 / \pi S^2$$

اکنون انتگرال بالا را برای دو نمونه حل می کنیم.

مثال نمونه ۱- محاسبه ضریب شکلی یک المان به دیسکی به شعاع R که درست در بالای آن قرار دارد. شکل مسئله به

صورت زیر است:



شکل ۹-۱ محاسبه ضریب شکلی المان dA_2 به سطح A_2

دیسک را A_2 و المان هاشور خورده از آن را dA_2 می نامیم. برای المان dA_1 احتیاج به انتگرال گیری نداریم. لذا:

$$F_{dA_1-A_2} = \int_{A_2} dA_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 / \pi S^2$$

از روی شکل واضح است که $B_1 = B_2$ و $dA_2 = r dr d\theta$ و $S^2 = L^2 = r^2$ و همچنین:

$$\cos \beta_1 = L / \sqrt{L^2 + r^2}$$

لذا:

$$F_{dA_1-A_2} = \int_{A_2} r dr d\theta L^2 / (L^2 + r^2) / \pi (L^2 + r^2)$$

و

$$F_{dA_1-A_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta L^2 / \pi (L^2 + r^2)^2 = 2 \int_0^R L^2 r dr / (L^2 + r^2)^2 = R^2 / (R^2 + L^2)$$

اگر قطر دیسک را D بنامیم داریم:

$$F_{dA_1-A_2} = D^2 / (D^2 + 4L^2)$$

مثال نمونه ۲ - محاسبه ضریب شکلی یک المان به دیسکی مسطح که بر صفحه المان عمود است شکل مسئله بصورت

شکل (۱-۱) می باشد.

از روی شکل ملاحظه می گردد که $dA_2 = r dr d\theta$ (دیسک را A_2 و المان کوچکی از آنرا dA_2

نامیده ایم). یادآوری می شود که برای المان dA_1 احتیاج به انتگرال گیری نداریم و لذا:

$$F_{dA_1-A_2} = \int_{A_2} \cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_2 / \pi S^2$$

با توجه به مختصات انتخابی در شکل (۱-۱) داریم.

و همچنین: $S^2 = B^2 + h^2$ و $\cos \beta_2 = h/s$ و $\cos \beta_1 = (L + r \cos \theta) / S$

و لذا: $B^2 = L^2 + r^2 + 2Lr \cos \theta$ یا $B^2 = L^2 + r^2 - 2Lr \cos(180 - \theta)$

$$F_{dA_1-A_2} = \int [(L + r \cos \theta) / S] \times r dr d\theta / \pi S^2$$

و

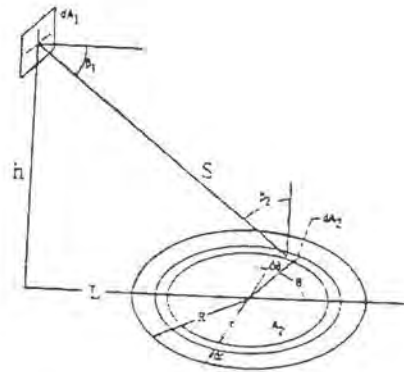
$$F_{dA_1-A_2} = \int h(L + r \cos \theta) r dr d\theta / \pi S^4$$

$$F_{dA_1-A_2} = h / \pi \int_0^R \int_0^{2\pi} r(L + r \cos \theta) dr d\theta / (L^2 + r^2 + 2Lr \cos \theta + h^2)^2$$

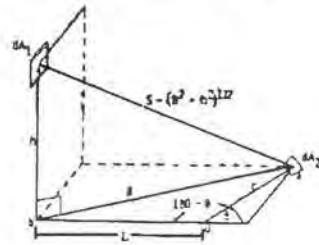
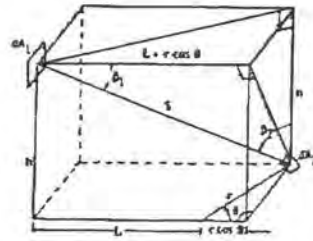
و

با قرار دادن $H = h/L$ و $p = R/L$ و $X = r/L$ و محاسبات انتگرالی بدست می آوریم:

$$F_{dA_1-A_2} = H/2 \left\{ (H^2 + P^2 + 1) / [(H^2 + P^2 + 1)^2 - 4P^2]^{1/2} - 1 \right\}$$



شکل ۱۰-۱ محاسبه ضریب شکلی المان dA_1 به دیسک A_2



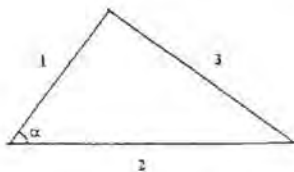
شکل ۱۱-۱ مختصات انتخابی برای

محاسبه ضریب شکلی المان dA_1 به دیسک A_2

۳-۷-۱ روش ریسمانهای متقاطع^۱

در این روش فرض می شود که عمق سطح در جهت عمود بر صفحه کاغذ بی نهایت است. با حل دو مثال این روش را تجزیه و تحلیل می کنیم.

مثال نمونه ۱- ضریب شکلی اضلاع یک مثلث نسبت به هم، شکل مسئله بصورت شکل (۱۲-۱) می باشد.



شکل ۱۲-۱ محاسبه ضریب شکلی اضلاع یک مثلث
نسبت بهم (طول در جهت عمود بر سطح بی نهایت است)

فرض بر این است که سطوح ۱ و ۲ و ۳ در جهت عمود بر صفحه کاغذ دارای بعد بی نهایت هستند. برای سطح (۱) می توان نوشت: $F_{1-2} + F_{1-3} = 1$

عین این رابطه را برای سطوح (۲) و (۳) می نویسیم. $F_{2-1} + F_{2-3} = 1$ و $F_{3-1} + F_{3-2} = 1$

با ضرب نمودن طرفین روابط فوق در سطح متناظر آنها یعنی A_1 ، A_2 و A_3 به ترتیب وبا اعمال رابطه تقابل در مورد

سطوح (۱) و (۳) بدست می آوریم. $A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3} = A_1 \implies A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3} = A_1$

$$A_2 F_{2-1} + A_2 F_{2-3} = A_2 \implies A_1 F_{1-2} + A_2 F_{2-3} = A_2$$

$$A_3 F_{3-1} + A_3 F_{3-2} = A_3 \implies A_1 F_{1-3} + A_2 F_{2-3} = A_3$$

با محاسبه F_{1-2} و F_{1-3} و F_{2-3} از سه معادله فوق خواهیم داشت:

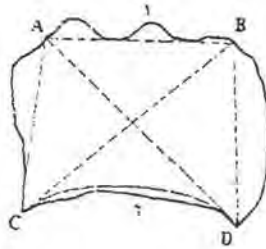
$$F_{1-2} = (A_1 + A_2 + A_3) / 2A_1 \quad F_{1-3} = (A_1 + A_3 - A_2) / 2A_1 \quad F_{2-3} = (A_2 + A_3 - A_1) / 2A_2$$

با توجه به آنکه عمق در جهت عمود بر صفحه کاغذ بی نهایت است و می توان آن را از صورت ومخرج حذف نمود داریم:

$$F_{1-2} = (L_1 + L_2 + L_3) / 2L_1 \quad F_{1-3} = (L_1 + L_3 - L_2) / 2L_1 \quad F_{2-3} = (L_2 + L_3 - L_1) / 2L_2$$

^۱ - Cross String method

در حالت خاصی که $L_1 = L_2$ باشد $F_{1-2} = (2L_1 - L_3) / 2L_1 = 1 - L_3 / 2L_1$ که می توان آن را به صورت زیر نوشت: $F_{1-2} = \sin \alpha / 2$ که α زاویه بین سطوح (۱) و (۲) می باشد.



شکل ۱۳-۱ حالت عمومی برای محاسبه ضریب شکلی یا استفاده از ریسمانهای متقاطع

مثال نمونه ۲- حالت عمومی در روش ریسمانهای متقاطع می خواهیم ضریب شکلی سطح ۲ را به ۱ پیدا کنیم (عمق جهت عمود بر صفحه بی نهایت است). شکل مسئله بصورت شکل (۱۳-۱) می باشد.

در مثلث ABC داریم:
(۱)

$$F_{AB-AC} = (\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}) / 2\overline{AB}$$

و در مثلث ADB داریم:

$$F_{AB-BD} = (\overline{AB} + \overline{BD} - \overline{AD}) / 2\overline{AB} \quad (۲)$$

در حالت کلی می توان نوشت:

$$F_{AB-BD} + F_{AB-DC} + F_{AB-AC} = 1 \quad (۳)$$

ضریب شکلی خط AB به خط AC با ضریب شکلی خط AB به قوس AC مساویست چون زاویه نظاره یکسان دارند. با جایگزینی از روابط (۱) و (۲) در (۳) داریم:

$$(AB + BD - AD) / 2AB + F_{AB-DC} + (AB + AC - BC) / 2AB = 1$$

پس از ساده سازی $[(AD + BC) - (BD + AC)] / 2$ از سوی $AB \times F_{AB-DC} = DC$ اما ضریب شکلی قوسی DC به AB با ضریب شکلی این قوس به قوس AB یعنی سطح (۱) یکی است زیرا که زاویه فضایی یکسانی دارند لذا:

$$DCF_{DC-AB} = [(AD + BC) - (BD + AC)] \frac{1}{2}$$

اگر بصورت کسر نگاه کنیم ملاحظه می شود با تصویر ریسمانهای کشیده شده بین چهار گوشه C, B, A و D مجموع طول دو ریسمان متقاطع منهای مجموع طول دو ریسمان غیر متقاطعی است که بین گوشه ها می توان کشید. روش فوق روش بسیار جالب و سهلی است که تنها محدودیت آن این است که عمق در جهت عمود بر صفحه کاغذ بی نهایت باشد یا عمق را بتوان بی نهایت فرض نمود و یا میزان تشعشع به سطح پشتی و جلو ناچیز باشد. نظیر یک کانال یا تونل خیلی طولانی.

۱-۷-۴- روش مونت کارلو

این روش یک روش آماری است که در مسائل مختلف و تقریباً بدون محدودیت می تواند مورد استفاده قرار بگیرد، منتهی مثل سایر مسائل آماری دقت آن باید در محدوده توان و قابلیت این مسائل مد نظر باشد. اساس این روش بر این اصل استوار است که تشعشع بطور اتفاقی در تمام جهات از سطح تحت بررسی به بیرون ساطع می شود. احتمال برخورد تعداد زیادی از این شعاع ها به یک سطح مورد نظر یعنی نسبت تعداد شعاعهایی که به سطح مورد نظر اصابت کرده است به کل شعاعهای خارج شده و یا ساطع شده از سطح محاسبه خواهد شد. لذا برای هر مسئله شکل هندسی خاصی لازم است تا روابط لازم را برای تهیه این نسبت فراهم آورد. اغلب دشواری از همین مسئله ناشی می شود که پیدا کردن شکل هندسی لازم در بعضی از موارد بسیار پیچیده و گاهی تقریباً غیر ممکن است. ضمن آنکه لازم است برای هر مسئله تعداد قابل توجهی نمونه آماری مورد محاسبه قرار گیرد. هر چند از یک تعداد بیشتر پاسخهایی بسیار نزدیک بنسبت می آید. با حل دو نمونه مسئله کاربرد این روش نشان داده می شود.

مثال نمونه ۱- محاسبه ضریب تشعشع یک المان به دیسکی در بالای آن. در شکل (۱-۱۴)

تصور می شود که از المان بطور دائم و تصادفی شعاعهایی ساطع می گردند. بدیهی است که تعدادی از این شعاعها به دیسک برخورد می کند و بقیه به خارج دیسک. اگر نسبت شعاعهای اصابت کرده به دیسک به کل شعاعهای ساطع شده را از المان حساب کنیم، ضریب شکلی المان به دیسک را خواهد داد (نگاه کنید به ضمیمه ۳). در شکل فرض می شود که نقطه ای اتفاقی روی دیسک مورد اصابت قرار بگیرد که حاصل تابش شعاعی با زاویه α از المان می باشد.

$$\tan \alpha = OP/OA = r/h$$

$$r = h \tan \alpha$$

در صورتیکه $r < R$ باشد تابش به دیسک برخورد می نماید. در صورتیکه $r > R$ باشد شعاع به دیسک برخورد می نماید. تعداد دفعاتی که شعاع برخورد نموده یعنی تعداد دفعاتی که $r < R$ می باشد به کل دفعاتی که شعاع ساطع شده (یا تولید شده) ضریب شکلی را به ما می دهد.

بنابر این یک عدد اتفاقی بین ۰ و ۱ تولید می شود و این عدد برابر توان دوم $\cos \alpha$ قرار داده می شود و مقدار α به صورت

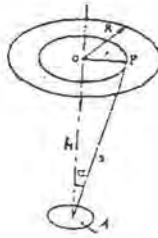
زیر محاسبه می گردند.

$$\cos^2 \alpha = RAN$$

$$\tan^2 \alpha = (1/\cos^2 \alpha - 1) = (1/RAN) - 1$$

$$\tan \alpha = \sqrt{(1/RAN) - 1}$$

$$r = h\sqrt{(1/RAN) - 1}$$



۱-۱۴ محاسبه ضریب شکلی المان A به دیسک

با استفاده از روش مونت کارلو

مثال عددی، اگر دیسکی به شعاع ۱ متر را به فاصله ۲ متر بالای المان در نظر بگیریم اگر عدد اتفاقی تولید شده ۰/۵۶۲

باشد خواهیم داشت:

$$RAN = 0.562$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\left(\frac{1}{RAN}\right) - 1} = \sqrt{\frac{1}{0.562} - 1} = 0.886$$

$$r = h \tan \alpha = 2 \times 0.886$$

ملاحظه می گردند که $r > R$ می باشد لذا این شعاع برخورد نمی کند. یک جدول باید تشکیل داد و با یک دستور العمل تعداد

۱۰۰ یا ۲۰۰ یا ۵۰۰ عدد اتفاقی بین ۰ و ۱ تولید و نسبت دفعات اصابت کرده را به کل تعداد اعداد تولید شده محاسبه نمود.

جدول (۱-۱) نتایج تولید ۲۰ عدد اتفاقی را نشان می دهد.

مثال نمونه ۲- محاسبه ضریب شکلی دو دیسک نسبت به هم در شکل (۱۵-۱)

دو دیسک به فاصله D از هم قرار دارند. فرض می شود از نقطه A تشعشع اتفاقی صادر شود و به نقطه مثل B برخورد

کند پس اولین عدد اتفاقی نقطه A را مشخص می کند. از این نقطه تشعشعی با زاویه Φ ساطع می شود که به نقطه B

برخورد می کند. اعداد اتفاقی بین صفر و یک R_1, R_2, R_3 هستند. موقعیت Θ روی سطح دوم تعیین می کند که نقطه B

کجاست:

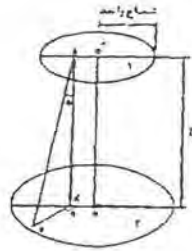
$$O'A^2 = R^1 \quad \cos \Phi = R_2^{1/2} \quad \Theta = 2\pi R_3$$

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{A'B}{D} \quad A'B = D \operatorname{tg}\Phi$$

$$(OB)^2 = (OA')^2 + (A'B)^2 + 2(OA')(A'B) \cos\theta = R_1^2 + D^2 \operatorname{tg}^2\Phi + 2R_1^{\frac{1}{2}} D \operatorname{tg}\Phi \cos\theta$$

اگر OB کمتر از شعاع دیسک دوم باشد اشعه به دیسک برخورد می کند. اگر OB بزرگتر باشد مفهومی این است که این اشعه برخورد نمی کند یا تولید تعداد زیادی اعداد و محاسبه تعداد دفعات برخورد کرده به کل دفعات، می شود ضریب شکلی ۱ به ۲ را بدست آورد.

می توان با یک برنامه تعداد زیادی عدد تولید کرد و مطابق جدول (۱-۱) تعدادی موارد که OB کمتر از شعاع دیسک دوم بدست می آید شمرده و آنها را به تعداد کل دفعاتی که اعداد اتفاقی ایجاد شده اند تقسیم نمود تا ضریب شکلی بدست آید. با توجه به آنکه در بعضی از موارد می توان از روشهای مختلف یک ضریب شکلی را محاسبه نمود برای کسب تجربه ویا ارزیابی روشهای آماری خوبست چند مورد با هم مقایسه گردند.



شکل ۱-۱۵ محاسبه ضریب شکلی دیسک ۱ به ۲

با استفاده از روش مونت کارلو

جدول (۱-۱) نتایج تولید به عدد اتفاقی برای محاسبه ضریب شکلی

المان به دیسک بالای آن از روش مونت کارلو

	$\text{Cos}^2 \alpha = RAN$	$\frac{1}{RAN} - 1$	h	$h \times \tan \alpha$	$r \rangle R$	$r \langle R$
۱	۰/۵۶۲	۰/۷۷۹	۰/۸۸۲	۱/۷۷۲	×	
۲	۰/۸۲۲	۰/۲۱۵۰	۰/۴۶۳	۰/۹۲۷		×
۳	۰/۰۰۱	۹۹۹	۳۱/۶۰	۶۳/۲۱	×	
۴	۰/۵۳۵	۰/۸۶۹	۰/۹۳۲	۱/۸۶۴	×	
۵	۰/۱۷۵	۴/۷۱۴	۲/۱۷۱	۴/۳۴	×	
۶	۰/۴۷۹	۱/۰۸۷	۱/۰۴۲	۲/۰۸۵	×	
۷	۰/۶۰۳	۰/۶۵۸	۰/۸۱۱	۱/۶۲۲	×	
۸	۰/۷۷۸	۰/۲۸۵	۰/۵۳۴	۱/۰۶۸	×	
۹	۰/۳۰۳	۲/۳۰۰	۱/۵۱۶	۳/۰۳۳	×	
۱۰	۰/۰۰۳	۳/۳۲۳	۱۸/۲	۳۶/۴۶	×	
۱۱	۰/۱۷۵	۴/۷۱	۲/۱۷	۴/۳۴	×	
۱۲	۰/۷۵۵	۰/۳۲۴	۰/۵۶۹	۱/۱۳۹	×	
۱۳	۰/۲۵	۳	۱/۷۳	۳/۴۶	×	
۱۴	۰/۵۲۰	۰/۹۲۳	۰/۹۶۰	۱/۹۲۱	×	
۱۵	۰/۲۹۰	۲/۴۴۸	۱/۵۶۴	۳/۱۲۹	×	
۱۶	۰/۷۴۹	۰/۳۳۵	۰/۵۷۸	۱/۱۵۷	×	
۱۷	۰/۲۲۸	۳/۳۸۵	۱/۸۴	۳/۶۸۰	×	
۱۸	۰/۸۶۸	۰/۱۵۲	۰/۳۸۹۹	۰/۷۷۹۹		×
۱۹	۰/۰۳۸	۲۵/۳۱	۵/۰۳۱	۱۰/۰۶	×	
۲۰	۰/۴۵۱	۱/۲۱۷	۱/۱۰۳	۲/۲۰۶	×	

$$F_{1-2} = 2 \div 20 = 0.1$$

۲ - تشعشع سطوح غیر سیاه

جسم سیاه علاوه بر آنکه در هر درجه حرارت، طول موج وجهتی ماکزیمم تشعشع ممکن را نسبت به هر جسم دیگری در شرایط مساوی دارد جسمی است که در تمام موجها و جهات هر انرژی تابشی به خود را صد در صد جذب می کند. سطوح حقیقی اینچنین نیستند و قدرت جذب صد در صد تشعشعات تابنده به خود را نداشته و از نظر قدرت تشعشع نیز کمتر از جسم سیاه تشعشع می کنند.

ضریب تشعشع یا صدور، نسبت انرژی تشعشعی جسم حقیقی به جسم سیاه در درجه حرارت T ، طول موج λ و جهت یکسان را ضریب تشعشع طیفی جهت دار سطح میگوئیم و بصورت زیر تعریف میشود:

$$\varepsilon_{\lambda}(T, \lambda, \beta) = \frac{e'_{\lambda}(T, \lambda, \beta)}{e'_{b\lambda}(T, \lambda, \beta)} \quad (1-2)$$

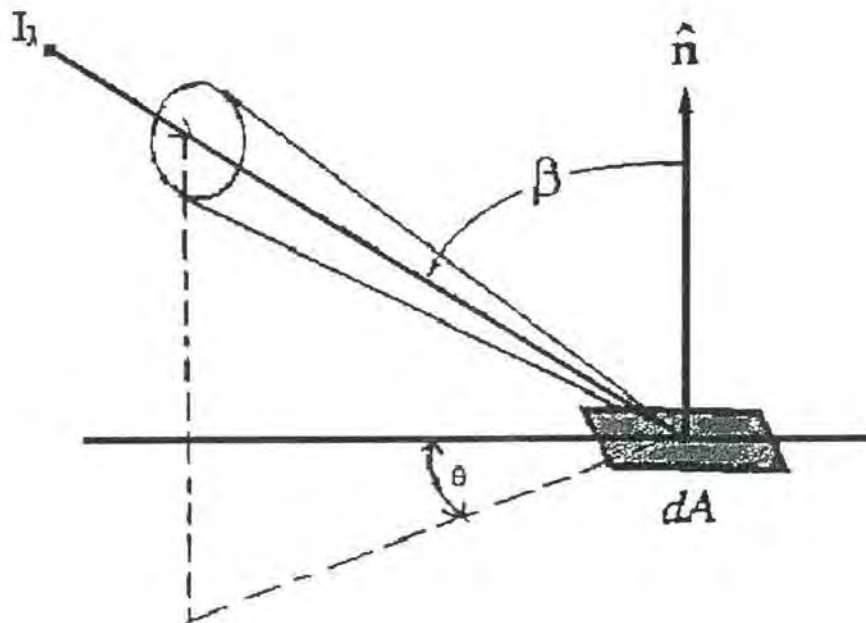
ضریب تشعشع یا صدور کل جسم، نسبت انرژی تشعشعی جسم به جسم سیاه در تمام طول موجها و در تمام فضای نیمکره به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varepsilon(T) = \frac{e(T)}{e_b(T)} \quad (2-2)$$

در صورتیکه وابستگی ضریب تشعشع طیفی جهت دار به طول موج و جهت مشخص باشد می توان از روی آن ضریب تشعشع کلی را پیدا نمود.

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(T, \lambda, \beta) e'_{\lambda}(T, \lambda, \beta) d\omega d\lambda}{\sigma T^4} \quad (3-2)$$

البته به شرط آنکه ε وابستگی به زاویه θ نداشته باشد. زاویه θ زاویه ایست که تصویر جهت تشعشع روی سطح جسم با یک راستای اختیاری انتخابی می سازد که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است.



شکل ۱-۲ نمایش زوایای θ و β

در صورتیکه ضریب تشعشع طیفی نسبت به زاویه θ نیز متغیر باشد باید رابطه (۲-۱) را بصورت زیر تصحیح نمود.

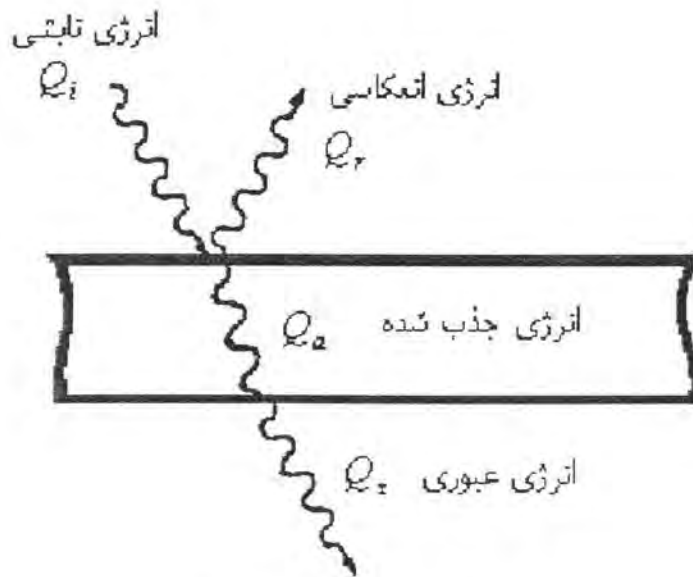
$$\varepsilon_{\lambda}(T, \lambda, \beta, \theta) = \frac{e'_{\lambda}(T, \lambda, \beta, \theta)}{e'_{b\lambda}(T, \lambda, \beta, \theta)} \quad (۴-۲)$$

وقتی اجسام حقیقی تحت تابش قرار می گیرند، ممکن است آنرا منعکس یا جذب و یا عبور دهند، انرژی تابیده بر سطح را با Q_i ، میزانی را که منعکس می شود با Q_r و آنچه را که جذب شده یا از جسم عبور می کند به ترتیب با Q_a و Q_t نشان می دهیم (شکل ۲-۲) بدیهی است که:

$$Q_i = Q_r + Q_a + Q_t \quad (۵-۲)$$

با تقسیم طرفین این رابطه بر Q_i داریم:

$$1 = \frac{Q_r}{Q_i} + \frac{Q_a}{Q_i} + \frac{Q_t}{Q_i}$$



شکل (۲-۲) انعکاس، جذب و عبور

نسبت Q_r/Q_i را ضریب انعکاس ρ و Q_a/Q_i را ضریب جذب α و Q_t/Q_i را ضریب عبور τ مینامیم و خواهیم داشت:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (۴-۲)$$

برای اجسامی که تشعشع را از خود عبور نمی دهند $\tau = 0$ بوده و لذا:

$$\rho + \alpha = 1 \quad (۷-۲)$$

این رابطه بسیار دارای اهمیت است و مبنایی است برای پیدا کردن α از روی اندازه گیری‌هایی که می توان برای ρ انجام داد. رابطه (۵-۲) را که به صورت عمومی نوشتیم می توان در یک طول موج و راستای معین نوشت، در این صورت باید در تعریف ضرایب انعکاس و جذب و عبور دقت شود و محدودیتها و مشخصات آنها را ذکر کرد. بدیهی است که روابطی بین ضرایب انعکاس طیفی و کلی و در جهت معین و یا تمامی جهات وجود دارد که در نوشتار حاضر قصد ورود به آنها نیست. رابطه دیگری که باید به آن توجه نمود برابری ضریب جذب و تشعشع است. بر اساس قانون کریشف برای جسم سیاه $\varepsilon = \alpha$ می باشد و چون ε و α برای جسم سیاه مستقل از طول موج و جهت اند و مقدار آنها مساوی یک است لذا این تساوی بدون قید و شرط برای ضریب تشعشع کلی و جزئی و یا مؤلفه های جهت دار و طیفی آنها صادق بوده و همواره برابر یک است.

برای سطوح دیگر این تساوی برای مؤلفه های طیفی جهت دار یعنی $\varepsilon(\lambda, T, \beta, \theta) = \alpha(\lambda, T, \beta, \theta)$

برقرار است اما برای مولفه های کلی از نظر طیفی و یا جهت بستگی به تغییرات مولفه های جزئی دارد. برای سطوح خاکستری که سطوحی هستند با ضریب تشعشع ثابت نسبت به طول موج (والبنه کوچکتر از ۱) ضریب تشعشع کلی با ضریب جذب کلی و طیفی مساویست. در صورتیکه ضریب تشعشع طیفی جهت دار یک سطح نسبت به جسم سیاه ضریب ثابتی داشته باشد باز هم می توان ضریب تشعشع کلی نیم کروی را با ضریب جذب مساوی گرفت.

در هر حال و در شرایط عملی و کاربردی ضرایب تشعشع و جذب را مانند جسم خاکستری و یا طیفی نزدیک به آن می گیریم چون در نظر گرفتن تغییرات طول موج و جهت در مسایل عمومی مهندسی کار بسیار دشواری است مگر اینکه در موضوع تحت بررسی اساساً وجود همین تغییرات و اثرات آن مهم باشد نظیر آنچه در سطوح انتخابی یا ویژه دیده می شود که برای طراحی و یا نشان دادن یک رفتار از پیش تعیین شده بکار میروند.

بطور خلاصه اگر:

$$e_{\lambda b} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1}$$

انرژی تشعشعی جسم سیاه در طول موج λ و در تمام فضای نیمکره باشد برای جسمی با ضریب تشعشع طیفی نیمکروی $\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T)$ این مقدار:

$$e_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda} e_{\lambda b} = \frac{\varepsilon_{\lambda} C_1 \lambda^{-5}}{\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1} \quad (۸-۲)$$

می باشد و اگر $e_b = \sigma T^4$ انرژی تشعشعی جسم سیاه در تمام طول موجها و در تمام فضای نیمکره باشد برای جسمی با ضریب تشعشع کلی نیمکروی $\varepsilon(T)$ این مقدار از رابطه (۹-۲) بدست خواهد آمد.

$$e = \varepsilon(T) e_b = \varepsilon \sigma T^4$$

۱-۲- تشعشع بین سطوح غیر سیاه

سطح k ام را از مجموعه ای که با هم سطح بسته ای را تشکیل می دهند در نظر می گیریم که اندازه این سطح A_k می باشد q_{ok} و q_{ik} بترتیب تشعشع تابیده شده به این سطح و خروجی از آن فرض می شوند، البته برای واحد سطح. کمیت q_k مقدار حرارتی است بر واحد سطح که باید بوسیله یک منبع خارجی به سطح k ام داد (یا گرفت) تا این سطح در درجه حرارت T_k باقی بماند، توازن انرژی روی این سطح عبارتست از:

$$Q_k = A_k q_k = (q_{ok} - q_{ik}) A_k \quad (۱۰-۲)$$

رابطه بعدی که در اینجا بدست می آوریم ناشی از این واقعیت است که انرژی خروجی از سطح k ام

یعنی q_{0k} شامل دو بخش است، انرژی تشعشعی ذاتی از این سطح به اضافه انعکاس انرژی تابشی روی این سطح از سطوح دیگر یعنی:

$$q_{0k} = \epsilon_k \sigma T_k^4 + \rho_k q_{ik} = \epsilon_k \sigma T_k^4 + (1 - \epsilon_k) q_{ik} \quad (11-2)$$

توجه شود که در اینجا بدون اینکه ذکر کنیم جسم را خاکستری در نظر گرفته ایم. اگر نخواهیم که سطح خاکستری در نظر گرفته شود باید روابط فوق را برای هر طول موجی بنویسیم که در حد فعلی سطح درس مد نظر نیست که وارد این پیچیدگی شویم. در واقع فرض کرده ایم که $\rho_k + \epsilon_k = 1$ از رابطه (11-2) مقدار q_{ik} را استخراج می کنیم.

$$q_{ik} = \frac{q_{0k} - \epsilon_k \sigma T_k^4}{1 - \epsilon_k} \quad (11a-2)$$

انرژی تابشی روی سطح k ام عبارتست از مجموعه انرژیهای خروجی از سطوح دیگر که به سطح k ام می رسند. اگر سطح k ام معقر باشد از انرژی خروجی خودش نیز چیزی به خودش اصابت خواهد کرد. لذا:

$$A_k q_{ik} = A_1 q_{o1} F_{1-k} + A_2 q_{o2} F_{2-k} + \dots + A_j q_{oj} F_{j-k} + \dots + A_k q_{ok} F_{k-k} + \dots \quad (12-2)$$

$$A_N q_{oN} F_{N-k}$$

فرض کرده ایم که مجموعاً N سطح با هم یک سطح بسته را تشکیل داده اند که سطح k یکی از آنهاست. با توجه به رابطه تقابلی:

$$A_k F_{k-1} = A_1 F_{1-k} \quad A_k F_{k-2} = A_2 F_{2-k}, \dots$$

$$A_k q_{ik} = A_k F_{k-1} q_{o1} + A_k F_{k-2} q_{o2} + \dots + A_k F_{k-j} q_{oj} + \dots + A_k F_{k-k} q_{ok} + \dots \quad (13-2)$$

$$\dots + A_k F_{k-N} q_{oN}$$

و بصورت مجموعه:

$$q_{ik} = \sum_{j=1}^N F_{k-j} q_{oj} \quad (14-2)$$

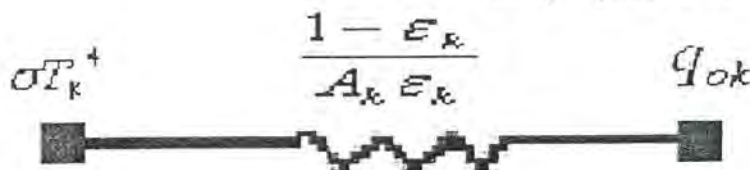
رابطه (11a-2) و (14-2) دو عبارت مختلف را برای q_{ik} می دهند با جایگزینی هر کدام از این دو رابطه بطور جداگانه در رابطه (10-2) دو عبارت پایه را برای توازن انرژی q_k بر حسب q_{0k} میدهند.

$$Q_k = \frac{A_k \epsilon_k}{1 - \epsilon_k} (\sigma T_k^4 - q_{0k}) = \frac{\sigma T_k^4 - q_{0k}}{\frac{1 - \epsilon_k}{A_k \epsilon_k}} \quad (15-2)$$

$$Q_k = A_k \sum_{j=1}^N F_{k-j} (q_{ik} - q_{oj}) \quad (16-2)$$

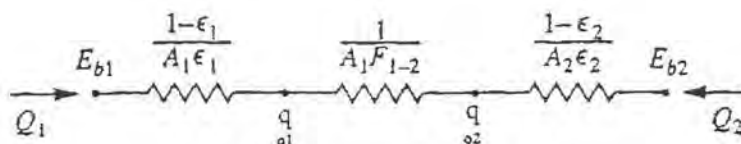
q_{ok} بنام Radiosity (تَشَعُّع) نامیده می شود. مطابق رابطه (۲-۱۵) ملاحظه می شود که بین تَشَعُّع جسم سیاه با درجه حرارت معین و تَشَعُّع یک جسم غیر سیاه (در اینجا خاکستری) یک مقاومت تَشَعُّعی که وابسته به خصوصیات تَشَعُّعی سطح تَشَعُّع کننده می باشد وجود دارد که به عنوان مقاومت سطحی Surface Resistance نامیده می شود.

در مقابل $1/A_k F_{k-m}$ که قبلاً دیدیم و به عنوان Space Resistance نامیده شد که صرفاً به موقعیت هندسی سطوح نسبت بهم وابسته است و به خصوصیات تَشَعُّعی سطح ربطی ندارد. نمایش الکتریکی رابطه (۲-۱۵) بصورت شکل (۲-۲) است.



شکل ۲-۲ معادل الکتریکی رابطه ۲-۱۵

حال اگر دو سطح خاکستری را در نظر بگیریم در اینصورت تَشَعُّع آنها را بهم می توان با توجه به q_{oi} آنها بررسی کرد که در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.



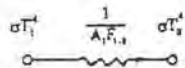
شکل ۲-۳ معادل الکتریکی

برای تَشَعُّع دو سطح نسبت بهم

در قیاس با تَشَعُّع دو جسم سیاه نسبت بهم ملاحظه می گردد که همان رابطه را می توان بکار برد بشرطی که بجای انرژی جسم سیاه با درجه حرارت یکسان Radiosity آنها را به کار بگیریم که طبیعتاً مقدار آنها کمتر از تَشَعُّع جسم سیاه است. در واقع با قرار دادن $\epsilon_k = 1$ مقاومت سطحی به سمت صفر میل می کند. $e_k = q_{ok} = \sigma T_k^4$ می شود، لذا می توان گفت که جسم سیاه دارای مقاومت سطحی صفر

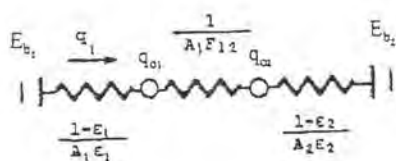
است.

برای دو سطح سیاه

$$\sigma T_1^4 \quad \frac{1}{A_1 F_{1,2}} \quad \sigma T_2^4$$


شکل ۴-۲ تشعشع دو سطح سیاه نسبت به هم با
مقاومت حرارتی تشعشعی سطحی صفر

برای دو سطح خاکستری



شکل ۵-۲ تشعشع دو سطح خاکستری به هم
با مقاومت تشعشعی سطحی $\frac{1-\epsilon_1}{A_1 \epsilon_1}$ و $\frac{1-\epsilon_2}{A_2 \epsilon_2}$

با توجه به رابطه (۱۶-۲)

$$Q_k = \sum_{j=1}^N A_k F_{k-j} (q_{o,k} - q_{o,j})$$

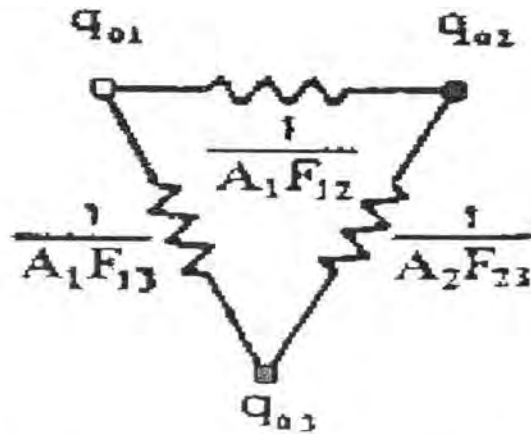
می توان چنین بیان نمود که Q_k عبارتست از حرارتی که باید به سطح k ام (از مجموعه N سطح که با هم سطح بسته ای را تشکیل می دهند) داد یا گرفت تا در درجه حرارت T_k باقی بماند. برای یک سطح بسته شامل سه سطح خاکستری:

$$Q_1 = A_1 F_{1-2} (q_{o1} - q_{o2}) + A_1 F_{1-3} (q_{o1} - q_{o3})$$

$$Q_2 = A_2 F_{2-1} (q_{o2} - q_{o1}) + A_2 F_{2-3} (q_{o2} - q_{o3})$$

$$Q_3 = A_3 F_{3-1} (q_{o3} - q_{o1}) + A_3 F_{3-2} (q_{o3} - q_{o2})$$

مدار الکتریکی معادل برای سه رابطه فوق بصورت شکل (۶-۲) می باشد.

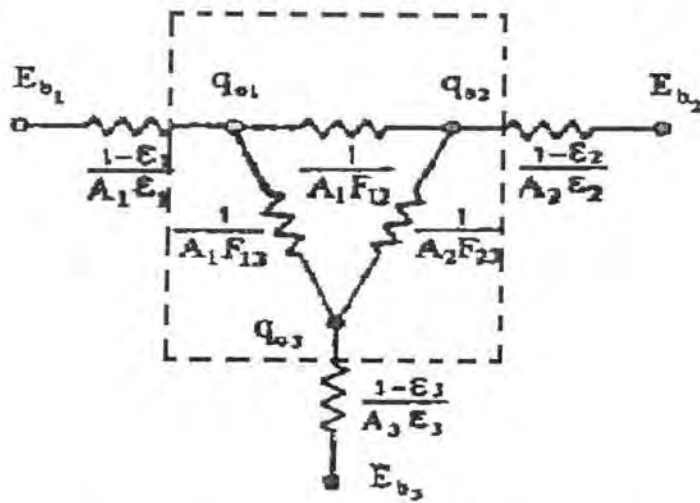


شکل ۶-۲ تشعشع سه سطح خاکستری به هم وقتی فقط

Radiosity ها مد نظر قرار گیرند

و ارتباط این مدار الکتریکی به سطوح سیاهی با درجه حرارت T_3, T_2, T_1 بصورت شکل (۷-۲)

خواهد بود.



شکل ۷-۲ تشعشع سه سطح خاکستری به هم و ارتباط آنها

با تشعشع سطوح سیاه همدمای با آنها

مجدداً روابط (۱۵-۲) و (۱۶-۲) را می نویسیم.

$$Q_k = \frac{\sigma T_k^4 - q_{0k}}{1 - \varepsilon_k} \quad (15-2)$$

$$Q_k = A_k \sum_{j=1}^N F_{k-j} (q_{0k} - q_{0j}) \quad (16-2)$$

ملاحظه می شود که روابط (۱۵-۲) و (۱۶-۲) را می توان برای هر یک از سطوح نوشت و چون سطحی بسته شامل N سطح در نظر بگیریم ۲N معادله خواهیم داشت شامل ۳N ناشناخته. q_{0j} ها عبارتند از N ناشناخته و Qها و Tها هر کدام N ناشناخته دیگر را تشکیل می دهند (وابسته به اطلاعات موجود، مثلاً اگر درجه حرارت N سطح معلوم باشد در اینصورت تمامی N ناشناخته دوم Qها هستند و برعکس). اگر درجه حرارت تعداد N-m سطح و مقدار حرارت m سطح نیز معلوم باشد. می توان معادلات را حل نمود. در هر حال بایستی از درجه حرارت ها (Tها) و یا مقدار حرارت ها (Qها) مجموعاً N تعداد داده شده باشند تا بتوان معادلات را حل و سایر ۲N مجهول را محاسبه کرد.

برای آشنایی بیشتر با مسئله فوق، دو سطح موازی با ابعاد بی نهایت را با درجه حرارت T_1 ، T_2 ($T_1 > T_2$) در نظر گرفته و حرارت رد و بدل شده بین آنها را پیدا می کنیم، سطوح خاکستری و با ضرایب تشعشع ε_1 و ε_2 می باشند.

$$\frac{Q_1}{A_1} = q_1 = \frac{\sigma T_1^4 - q_{01}}{1 - \varepsilon_1} \quad (1)$$

$$\frac{Q_1}{A_1} = q_1 = (q_{01} - q_{02}) F_{1-2} \quad (2)$$

$$\frac{Q_2}{A_2} = q_2 = \frac{\sigma T_2^4 - q_{02}}{1 - \varepsilon_2} \quad (3)$$

$$\frac{Q_2}{A_2} = q_2 = (q_{02} - q_{01}) F_{2-1} \quad (4)$$

با مقایسه روابطه (۲) و (۴) فوق ملاحظه می گردد که $q_1 = -q_2$ بنابراین حرارتی که به سطح A_1 داده می شود تا درجه حرارت T_1 بماند معادل حرارتی است که باید از سطح A_2 گرفت تا در T_2 باقی بماند q_1 عبارتست از خالص حرارت تشعشعی رد و بدل شده بین سطح (۱) و سطح (۲) که مورد محاسبه می باشد.

از رابطه (۱) q_{01} را محاسبه می کنیم.

$$q_{01} = \sigma T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1$$

و از رابطه (۳) q_{02} را محاسبه می‌کنیم

$$q_{02} = \sigma T_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_2 = \sigma T_2^4 + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_1$$

با جایگزینی q_{01} و q_{02} از روابط اخیر در رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$q_1 = \sigma T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 - \sigma T_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_1$$

$$q_1 + \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1 + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_1 = \sigma T_1^4 - \sigma T_2^4$$

$$q_1 \left[1 + \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \right] = \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

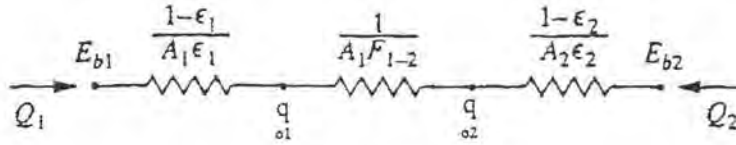
$$q_1 = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1 + \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

و یا

$$q_1 = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (۱۷-۲)$$

۲-۲- محافظ‌های تشعشعی

با توجه به موقعیت فعلی بهتر است توضیحی در همین جا راجع به محافظ‌های تشعشعی داده شود. ملاحظه شد که برای دو سطح خیلی بزرگ که در درجه حرارت T_1 و T_2 قرار دارند اگر ضرایب تشعشعی آنها ε_1 و ε_2 باشد تشعشع خالص رد و بدل شده بین آنها از رابطه (۱۷-۲) بدست می‌آید. که معادل الکتریکی آن بصورت شکل (۸-۲) خواهد بود.



شکل ۲-۸ معادل الکتریکی

برای تشعشع دو سطح نسبت به هم

اگر صفحه سومی بین صفحه اول و دوم قرار دهیم با همان ابعاد و این صفحه دارای ضریب تشعشع ϵ_3 باشد در حالت تعادل حرارتی می توان نوشت:

$$\left(\frac{Q}{A}\right)_{1-3} = \left(\frac{Q}{A}\right)_{3-2} = \frac{Q}{A}$$

$$\frac{Q}{A} = \frac{e_{b1} - e_{b3}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{e_{b3} - e_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (18-2)$$

از این رابطه با معلوم بودن ضرایب تشعشع صفحات و درجه حرارت صفحه ۱ و ۲ می توان درجه حرارت صفحه ۳ را بدست آورد. اگر صفحات کاملاً مشابه باشند از نظر خصوصیات تشعشعی یعنی $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ ملاحظه می گردد که:

$$T_3^4 = \frac{1}{2}(T_1^4 + T_2^4) \quad (19-2)$$

در نتیجه تشعشع رسیده به سطح (۲) در این حالت خاص:

$$\left(\frac{Q}{A}\right) = \frac{\frac{1}{2} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} \quad (20-2)$$

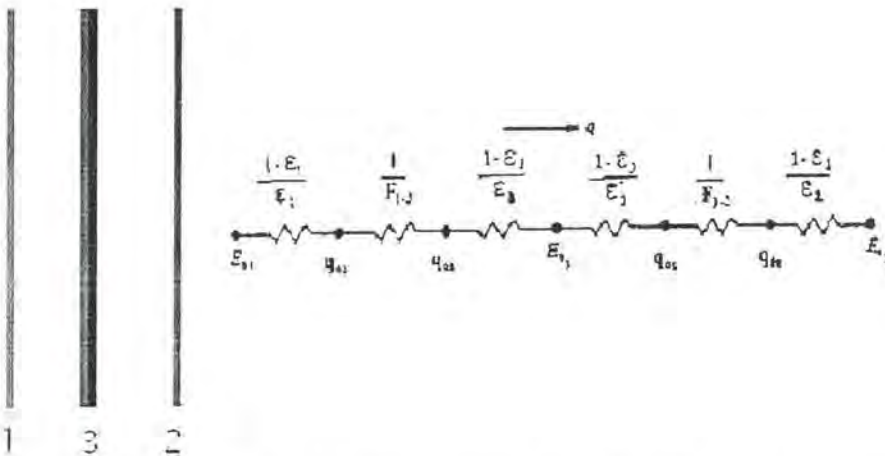
با مقایسه روابط (۱۸-۲) و (۲۰-۲) مشاهده می گردد که با قرار دادن یک صفحه مشابه بین صفحات ۱ و ۲ میزان تشعشع حرارتی به نیم (1/2) کاهش پیدا می کند.

در حالت عمومی ممکن است که صفحه سوم که بین صفحه ۱ و ۲ قرار می گیرد دارای ضریب تشعشع متفاوتی باشد و حتی در دو طرف آن اندازه ضریب تشعشع متفاوت باشد در اینصورت:

$$\frac{Q}{A} = \frac{e_{b1} - e_{b3}}{\frac{1}{\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_1} - 1} = \frac{e_{b3} - e_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_3'} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (21-2)$$

که ϵ_3 و ϵ_3' عبارتند از ضرایب تشعشع صفحه سوم بترتیب در جهت صفحه ۱ و در جهت صفحه ۲

در واقع وجود صفحه سوم بعنوان یک محافظ تشعشعی تلقی می گردد و نقش آن این است که مانند یک مقاومت سری در مسیر انتقال حرارت تشعشعی در مدار الکتریکی معادل عمل می نماید که در شکل (۲-۹) نشان داده شده است



شکل (۲-۹) مقاومت‌های الکتریکی معادل برای تشعشع بین دو سطح با یک محافظ تشعشعی

در صورتیکه N صفحه مشابه که دارای ضرایب تشعشع یکسان در طرفین باشند بین دو صفحه ابتدایی و انتهایی قرار گیرند هر کدام از صفحات دو مقاومت حرارتی را در مسیر عبور تشعشع ایجاد می نمایند و در همین حال $n + 1$ مقاومت حرارتی فضایی (Space Resistance) نیز وجود خواهد داشت. در مسئله خاص تحت بررسی که ابعاد صفحات بی نهایت می باشد تمامی ضرایب شکلی برابر واحدند و $1/F_{1,2} = 1/F_{2,3} = 1$ و لذا برای n محافظ حرارتی:

$$R = (2n + 2) \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} + (n + 1) \times 1 \quad (22-2)$$

Space Resistance : $(n + 1)$

$(2n + 2)$: مقاومت حرارتی سطحی (هر صفحه ۲ مقاومت و صفحات اول و آخر هم هر کدام یکی) اگر ۲ محافظه داشته باشیم.

$$2 \times 2 \left(\frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \right) + 2 \left(\frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \right) + (2 + 1) \times 1$$

(مقاومت فضایی) (دو صفحه جانبی) (برای ۲ محافظ)

$(2 + 1) \times 1$: مقاومت فضایی

$$2 \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right] \text{ : دو صفحه اول و آخر}$$

$$2 \times 2 \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) \text{ : برای دو محافظ}$$

$$R = (n+1) \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right) \quad (23-2)$$

در صورتیکه بین صفحات محافظ نباشد و هر دو صفحه دارای یک ضریب تشعشع باشند.

$$R = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{2}{\varepsilon} - 1 \quad (24-2)$$

با مقایسه روابطه (23-2) و (24-2) دیده می شود که مقاومت حرارتی تشعشعی با وجود n محافظ n+1 برابر زمانی است که این محافظ ها نباشند و لذا:

$$\left(\frac{Q}{A} \right)_{Guard} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{Q}{A} \right)_{(nguard)} \quad (25-2)$$

مثال: دو صفحه موازی به ابعاد بی نهایت را در نظر بگیرید، با ضرایب تشعشع 0.4 و 0.9، 0 درصد کاهش را وقتی بین دو صفحه، صفحه دیگری با همین ابعاد از آلومینیوم براق با ضریب تشعشع 0.5 قرار دهیم بدست آورید.

$$\frac{Q}{A} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.9} + \frac{1}{0.4} - 1} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{2.61}$$

در صورتیکه محافظ قرار دهیم:

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{1-0.4}{0.4} = 1.5$$

$$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = \frac{1-0.9}{0.9} = 0.111$$

$$\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3} = \frac{1-0.05}{0.05} = 19$$

ولذا مقاومت حرارت کلی:

$$1.5 + 0.111 + 19 + 19 + 2 = 41.61$$

$$\left(\frac{Q'}{A}\right) = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{41.61}, \quad \frac{Q'}{A} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{2.61}$$

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{2.61}{41.61} = 0.0627$$

ملاحظه می گردد که حرارت تبادل شده تقریباً به ۳/۸ درصد حالت بدون محافظ تنزل می کند یا حرارت ۰/۹۴ کاهش می یابد.

۳-۲ سیستم نسبت بین Q و T

اگر از معادله (۱۵-۲) مقدار q_{ok} را محاسبه کنیم:

$$q_{ok} = \sigma T_k^4 - \frac{Q_k}{A_k} \left(\frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} \right) \quad (26-2)$$

و این مقدار q_{ok} را در رابطه (۱۶-۲) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$Q_k = A_k \sum_{j=1}^N F_{k-j} \left[\sigma T_k^4 - \frac{Q_k}{A_k} \left(\frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} \right) - \sigma T_j^4 + \frac{Q_j}{A_j} \left(\frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} \right) \right] (q_{ok} - q_{oj}) \quad (27-2)$$

ملاحظه می شود که بجای q_{oj} فقط جای k و z را در معادله (۲۶-۲) تغییر داده ایم.

اگر رابطه (۲۷-۲) را بصورت بسط سری بنویسیم و سپس مرتب کنیم برای سطح k ام رابطه بین Q_k با T_j و T_z ها بصورت زیر در خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & -\frac{Q_1}{A_1} F_{k-1} \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} - \frac{Q_2}{A_2} F_{k-2} \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \dots + \frac{Q_k}{A_k} (F_{k-k} \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k}) \dots - \frac{Q_N}{A_N} F_{k-N} \frac{1 - \varepsilon_N}{\varepsilon_N} \\ & = -F_{k-1} \sigma T_1^4 - F_{k-2} \sigma T_2^4 - \dots + (1 - F_{k-k}) \sigma T_k^4 - \dots - F_{k,N} \sigma T_N^4 \end{aligned} \quad (28-2)$$

این رابطه را بصورت جمع و جور چنین می نویسیم.

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta_{kj}}{\varepsilon_j} - F_{k-j} \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} \right) \frac{Q_j}{A_j} = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} - F_{k-j}) \sigma T_j^4 \quad (29-2)$$

که مقادیر k عبارتست از ۱ و ۲ و ... N که در واقع برای سطح بسته شامل N سطح باید N مرتبه این معادله را نوشت.

Kron eker delta بصورت زیر تعریف می شود.

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad (30-2)$$

زمانی که درجه حرارت ها تماماً داده شده باشند در معادله (۲۹-۲) تمام مقادیر سمت راست مشخص اند و سمت چپ N معادله داریم با Q ها که شامل N تا بوده و باید همزمان حل شوند. در حالت عمومی ممکن است بعضی از سطوح درجه حرارتشان داده شده باشد و بعضی ها مقدار حرارتشان در این صورت باز هم مجموع T ها و Q ها N هستند که معادله (۲۹-۲) معادلات لازم بین آنها را به ما میدهد. با توجه به آنکه مقادیر ϵ برای اجسام غیر خاکستری معمولاً وابسته به درجه حرارت و طول موج هستند و برای سطوح خاکستری فقط وابسته به درجه حرارت، لازم است که ابتدا T ها شناخته شده باشند و تحت این شرایط ϵ ها هم قابل محاسبه بوده و معادلات قابل حل اند.

در صورتیکه درجه حرارت نامشخص باشد باید آن را حدس زد و از روی آن ϵ را پیدا نمود و از نتیجه حل، درجه حرارت های حدس زده شده را پیدا نمود. می توان اطلاعات جدید را برای درجه حرارت بکار برد برای محاسبه ϵ ها و اینکار را آنقدر باید ادامه داد تا T ها و ϵ ها دیگر تغییر نکنند. یک راه دیگر برای محاسبه این است که ابتدا معادلات را برای q_0 ها حل کنیم برای هر کدام از سطوح، و سپس Q ها و T ها را پیدا کنیم.

ملاحظه شد که در بخش قبلی با استفاده از معادله (۲۶-۲) با معلوم بودن Q_k و T_k می توان q_{ok} را محاسبه نمود.

وقتی درجه حرارت تمام سطحها داده شده باشند یکدسته از معادلات برای q_0 ها را می توان با حذف Q_k از معادلات (۱۵-۲) و (۱۶-۲) بصورت زیر بدست آورد.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_k = \frac{\sigma T_k^4 - q_{ok}}{1 - \epsilon_k} \\ \epsilon_k A_k \\ Q_k = A_k \sum_{j=1}^N F_{k-j} (q_{ok} - q_{oj}) \end{array} \right.$$

$$Q_k = \frac{\sigma T_k^4 - q_{0k}}{1 - \varepsilon_k} = A_k \sum_{j=1}^N F_{k-j} (q_{0k} - q_{0j})$$

$$q_{0k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + (1 - \varepsilon_k) \sum_{j=1}^N F_{k-j} q_{0j} \quad (31-2)$$

به عنوان مثال برای مجموعه ای از دو سطح که سطح بسته ای را تشکیل دهند (مانند سطح یک نیمکره و سطح مقطع آن) رابطه (۳۱-۲) را می توان نوشت:

$$q_{01} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) F_{1-1} q_{01} + (1 - \varepsilon_1) F_{1-2} q_{02}$$

$$q_{02} = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) F_{2-1} q_{01} + (1 - \varepsilon_2) F_{2-2} q_{02}$$

رابطه (۳۱-۲) را به فرم عمومی زیر می توان نوشت:

$$\sum_{j=1}^N [(\delta_{kj} - (1 - \varepsilon_k) F_{k-j})] q_{0j} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 \quad (32-2)$$

اگر درجه حرارتها همه داده شده باشند از معادله (۳۲-۲) با N معادله N مجهول می توان q_0 ها را محاسبه نمود سپس از رابطه (۱۵-۲) یا (۱۶-۲) مقادیر Q مربوط به هر سطح را پیدا کرد. اگر تعدادی از درجه حرارتها (Tها) و تعدادی از مقدار حرارتها (Qها) معلوم باشند می توان از رابطه (۲-۲۹)، Tها و Qهای مجهول را محاسبه نمود و سپس از رابطه (۳۲-۲) مقادیر q_0 را بدست آورد. راه دیگر این است که برای آنهایی که درجه حرارت معلوم است از رابطه (۳۲-۲)، q_0 مربوط به این سطوح را پیدا کرد و سپس برای سطوحی که Q مربوط به آنها معلوم است از رابطه (۱۶-۲) استفاده نمود. بدین طریق q_0 ها محاسبه می شود و با بکار بردن معادله (۱۶-۲) آنهایی را که Q آنها مجهول است می توان محاسبه کرد و با بکار بردن معادله (۱۵-۲) درجه حرارت سطوحی را که درجه حرارتشان مجهول است می توان یافت.

در حالت عمومی فرض می کنیم در یک فضای بسته N وجهی سطوح ۱، ۲، ۳ و ... m درجه حرارتشان معلوم باشد و بقیه سطوح یعنی ۱، m + 1، m + 2 و ... N مقدار حرارتشان مشخص باشد در این صورت سیستم معادلات را برای q_0 ها از رابطه (۳۲-۲) می نویسیم (برای آنها که درجه حرارتشان معلوم است).

$$\sum_{j=1}^N [\delta_{kj} - (1 - \varepsilon_k) F_{kj}] q_{0j} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 \quad 1 \leq K \leq m \quad (32-2)$$

و همچنین برای بقیه سطوح که مقدار حرارتشان معلوم است از رابطه (۱۶-۲) می توانیم بنویسیم:

$$Q_k = A_k \sum_{j=1}^N F_{kj} (q_{ok} - q_{oj}) \quad m+1 \leq k \leq N \quad (34-2)$$

ملاحظه می شود که برای سطوح سیاه که درجه حرارتشان معلوم باشد رابطه (۳۲-۲) بصورت $q_{ok} = \sigma T_k^4$ بدست می آید و چون شناخته شده است بنابراین معادلات را می توان یکی کاهش داد.

مثال: یک مخروط ناقص که سطح مقطع بالای آن در 600 K و سیاه، سطح جانبی آن عایق است و سطح مقطع پایین خاکستری و پخش کنند کامل است را در نظر بگیرید. درجه حرارت سطح مقطع پایین را پیدا کنید. مشخص کنید که ϵ_2 چقدر دارای اهمیت است. در این مسئله اگر سطح جانبی عایق نبوده و در 300 K ثابت نگهداشته شود مقدار حرارت سطح جانبی و سطح مقطع بالا و درجه حرارت سطح مقطع پایین چقدر خواهد بود؟

۴-۲- ماتریس معکوس

وقتی تعداد سطوح زیادند تعداد زیادی معادله داریم که حل همزمان آنها به سادگی امکان پذیر نیست. معادلات (۳۲-۲) و (۳۴-۲) را بصورت متر اکم تری می توان نوشت.

فرض شود که مقادیر معلوم در طرف راست معادلات فوق C_k باشد و مقادیر داخل کروشه در سمت چپ بصورت a_{kj} لذا معادله مربوط به سطح K را می توان نوشت:

$$\sum_{j=1}^N a_{kj} q_{oj} = C_k \quad (35-2)$$

$$a_{kj} = \begin{cases} \delta_{kj} - (1 - \epsilon_k) F_{k-j} \\ \delta_{kj} - F_{kj} \end{cases} \quad (36-2)$$

$$C_k = \begin{cases} \epsilon_k \sigma T_k^4 \\ \frac{Q_k}{A_k} \end{cases} \quad (37-2)$$

تعریف δ_{kj} همان است که در رابطه (۳۰-۲) بیان شد.

ردیف اول معادلات (۳۶-۲) و (۳۷-۲) برای آنهایی نوشته می شود که درجه حرارتشان معلوم است $1 < k < m$ و ردیف دوم برای سطوحی نوشته می شود که مقدار حرارت آنها معلوم است $m+1 < k < N$ لذا برای فضای بسته ای با N سطح متمایز داریم:

$$a_{11} q_{o1} + a_{12} q_{o2} + \dots + a_{1j} q_{oj} + \dots + a_{1N} q_{oN} = C_1 \quad (38-2)$$

$$a_{21} q_{o1} + a_{22} q_{o2} + \dots + a_{2j} q_{oj} + \dots + a_{2N} q_{oN} = C_2$$

$$a_{k1} q_{o1} + a_{k2} q_{o2} + \dots + a_{kj} q_{oj} + \dots + a_{kN} q_{oN} = C_k$$

$$a_{N1} q_{01} + a_{N2} q_{02} + \dots + a_{Nj} q_{0j} + \dots + a_{NN} q_{0N} = C_N$$

ضرایب a_{kj} را بصورت ماتریسی می نویسیم:

$$\text{Matrix } a = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nj} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (39-2)$$

یک طریقه برای حل معادلات (36-2) پیدا کردن ماتریس معکوس یعنی a^{-1} می باشد که عبارتست از:

$$a^{-1} = [A_{kj}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kj} & \dots & A_{kN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{Nj} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \quad (40-2)$$

که با مشخص شدن اجزاء ماتریس معکوس می توان نوشت:

$$q_{01} = A_{11} C_1 + A_{12} C_2 + A_{13} C_3 + \dots + A_{1j} C_j + \dots + A_{1N} C_N \quad (41-2)$$

$$q_{01} = A_{21} C_1 + A_{22} C_2 + \dots + A_{2j} C_j + \dots + A_{2N} C_N$$

.....

$$q_{0k} = A_{k1} C_1 + A_{k2} C_2 + \dots + A_{kj} C_j + \dots + A_{kN} C_N$$

.....

$$q_{0N} = A_{N1} C_1 + A_{N2} C_2 + \dots + A_{Nj} C_j + \dots + A_{NN} C_N$$

وبطور عمومی:

$$q_{0k} = \sum_{j=1}^N A_{kj} C_j \quad (42-2)$$

مسئله: برای یک مکعب مستطیل به ابعاد $20 \times 30 \times 40 \text{ cm}^3$ ضرایب تشعشع $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.8$ و

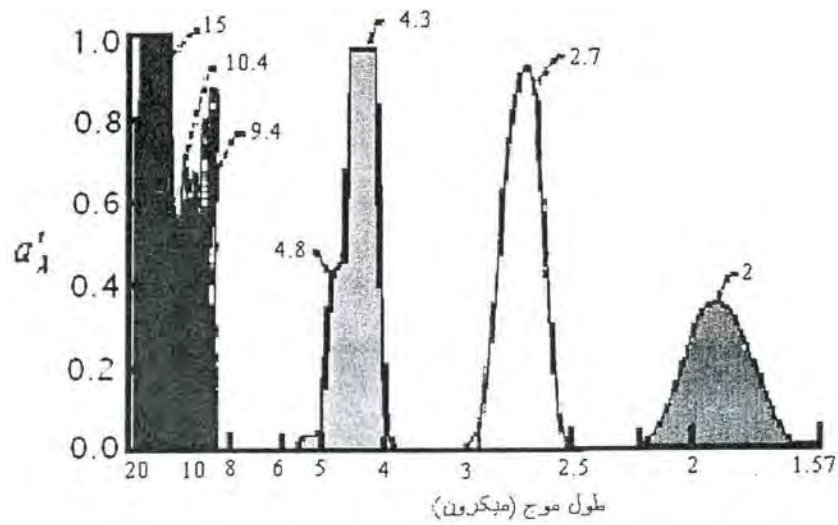
$q_4 = 10^4 \text{ w/m}^2$ و $T_3 = 2000 \text{ K}$, $T_2 = 1500 \text{ K}$ و $T_1 = 1000 \text{ K}$ و $\epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 0.9$
و $q_6 = 8000 \text{ w/m}^2$, $q_5 = 10^5 \text{ w/m}^2$ و مقادیر $Q_3, Q_2, Q_1, T_6, T_5, T_4$ و q_0 ها را پیدا کنید. مدار
الکتریکی معادل را نیز رسم کنید.

۳ - تشعشع گاز

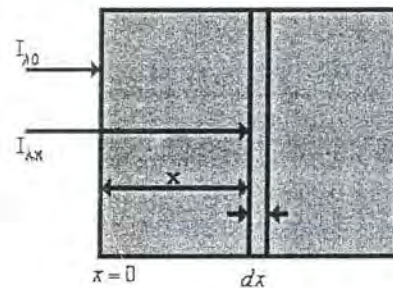
با توجه به مقدمه ابتدای تشعشع، بخشهای اول و دوم به سرانجام رسید یعنی خصوصیات تشعشعی سطوحی که به آنها برای محاسبه مقدار حرارت ساطع شده و یا جذب شده نیاز مند بودیم تعریف شدند و جایگاه آنها تبیین شد (هر چند صحبتی در مورد چگونگی محاسبه و یا اندازه گیری آنها نشد). بخش دوم که چگونگی دریافت تشعشع از سطح دیگر بود، نیز با تعریف ضرایب شکلی مشخص گردید که چه میزان از انرژی تشعشع شده یک سطح به سطح دیگری که با فاصله نسبت به سطح اول قرار دارد میرسد. اکنون در مقطعی هستیم که نقش محیط واسطه را که بین دو سطح قرار دارد مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم. تاکنون فرض بر این بود که محیط واسطه خلاء است یا محیطی است که نقشی در تشعشع رد و بدل شده بین دو سطح ایفا نمی کند. اما اگر بین دو سطح را ماده ای پر کرده باشد که نسبت به تشعشع رد و بدل شده خواصی از خود نشان دهد بدیهی است که باید مورد بررسی قرار گیرد. عناصر گازی نظیر O_2 , H_2 و N_2 و هوای خشک نسبت به تشعشع حرارتی و در درجه حرارت هایی که در مهندسی با آن سروکار داریم غیر فعال اند. حالت استثناء وجود دارد وقتی که درجه حرارت همین گازها خیلی زیاد باشد که بصورت یونیزه در آیند در این صورت نمی توان آنها را غیر فعال دانست.

از طرف دیگر گازهایی نظیر CO_2 و بخار آب و اکسید کربن، SO_2 ، آمونیم، HCl ، الکل و هیدروکربنها تشعشع حرارتی را جذب و خود نیز صادر می کنند، البته در طول موجهای معین و به مقدار نسبتاً قابل توجه به عنوان مثال اگر تشعشع حرارتی از درون یک توده گازی نظیر CO_2 عبور کند، جذب در یک منطقه معین از طول موجها انجام خواهد شد. مثلاً در فشار ۱۰ اتمسفر و در 830 K چهار باند طول موج وجود دارد که جذب در آنها اتفاق می افتد و اگر چه میزان یا شدت جذب یکسان نیست اما به هر حال قابل ملاحظه است، این باندها همچنان که در شکل (۱-۳) ملاحظه می شود $1/67$ تا $2/1$ و $2/5$ تا 3 و 4 تا 5 و 8 تا 20 میکرون می باشد.

هنگامیکه گاز CO_2 داغ شود در همین طول موجها هم تشعشع خواهد نمود. یعنی تشعشع را جذب مینماید هنگام عبور تشعشع از داخل گاز، و اگر درجه حرارتش هم زیاد شود باز در همین مناطق تشعشع خواهد داشت. در این قسمت بحث راجع به گازهای غیر نورانی است و شامل گازهایی که از خود نور ساطع می کنند و یا ذرات کربن جامد نورانی نمی باشد.



شکل ۳-۱ باندهای جذب گاز CO_2 در 830 کلوین و 10 اتمسفر فشار برای گازی با ضخامت عبوری $38/8$ سانتیمتر



شکل ۳-۲ نمایش چگونگی تغییرات شدت تابش طیفی درون یک لایه dx

برای آنکه اطلاعات پایه ای در این مورد ارائه کنیم، جذب تشعشع توسط یک لایه گاز را می توان به صورت ریاضی و مطابق مدل زیر بررسی نمود. یک لایه گاز را در شکل (۳-۲) در نظر می گیریم یک اشعه تک موج با شدت I_λ روی این لایه گازی به ضخامت dx می تابد، کاهش در شدت در نتیجه

جذب در داخل این لایه بطور تجربی متناسب با ضخامت لایه و شدت تشعشع در آن نقطه معین می باشد یعنی:

$$dI_{\lambda} = -a_{\lambda} I_{\lambda} dx \quad (1-3)$$

که ضریب تناسب a_{λ} بنام ضریب جذب کنندگی طیفی نامیده می شود، با انتگرال گیری از این رابطه:

$$\int_{I_{\lambda 0}}^{I_{\lambda x}} \frac{dI_{\lambda}}{I_{\lambda}} = \int_0^x -a_{\lambda} dx \quad \frac{I_{\lambda x}}{I_{\lambda 0}} = e^{-a_{\lambda} x} \quad I_{\lambda x} = I_{\lambda 0} e^{-a_{\lambda} x} \quad (2-3)$$

رابطه (۲-۳) بنام قانون بیر (Beer) نامیده می شود و نشان میدهد که شدت تشعشع بصورت نمایی کاهش می یابد که رابطه آشنایی است در تشعشع. با توجه به تعریف ضریب جذب و ضریب عبور و همچنین انعکاس (که معمولاً برای گازها تقریباً انعکاس صفر است) می توان نوشت:

$$\alpha_{\lambda} + \tau_{\lambda} = 1$$

$$\tau = \frac{I_{\lambda x}}{I_{\lambda 0}} = e^{-\alpha_{\lambda} x} \quad (3-3)$$

$$\alpha_{\lambda} = 1 - e^{-\alpha_{\lambda} x} \quad (4-3)$$

در صورتیکه قانون کریشف صادق باشد (برابری ضریب تشعشع و جذب) در این صورت می توان نوشت که: $\alpha_{g\lambda} = \epsilon_{g\lambda}$ یا بطور عمومی $\alpha_g = \epsilon_g$.

در مسایل عملی ضریب جذب کلی گاز (α_g) یا ضریب تشعشع کلی گاز ϵ_g برای تمام طول موجها مورد نیاز است. کوششهای زیادی شده است تا ضریب تشعشع یا ضریب جذب را برای تمام طول موجها (یا تمامی باند طول موج) بوسیله انتگرال گیری از رابطه (۲-۳) پیدا کنند، اما این تجزیه و تحلیل کاملاً پیچیده است چون مقدار α_g برای گازها تغییرات پیچیده ای نسبت به طول موج دارد و محاسبه آن از طریق تئوری بسیار دشوار است. علاقمندان باید به مراجع دیگری برای چگونگی پیدا کردن ϵ_g از روی اطلاعات اندازه گیری شده و یا تئوری مراجعه نمایند. روشهای تجربی برای اندازه گیری ضریب جذب یا تشعشع قابل استفاده ترند.

Hottle ضرایب تشعشع گازها ϵ_g را اندازه گیری کرده و منحنی هایی را برای CO, H_2O, CO_2 و آمونیم و SO_2 و غیره داده است. مقادیر ϵ_g بصورت توابعی از درجه حرارت و حاصلضرب P_l که در آن P_l عبارتست از فشار جزیی گاز (برحسب اتمسفر) و L_e عبارتست از متوسط طول تشعشع (Mean beam Length). نامبرده تشعشع گازی را درون یک فضای نیمکره ای به المانی سیاه واقع در مقطع نیمکره محاسبه نموده است. تشعشع گاز در این شرایط با σT_g^4 نشان داده شده است. عمده تجربیات در فشار کلی یک اتمسفر انجام شده است.

وقتی که فشار کل افزایش می یابد خطوط جذب پهن تر می شوند و لذا ضریب تشعشع از آن متأثر خواهد شد. لذا ضریب تصحیح تقریبی بکار برده می شود تا فشار کلی را که بیش از یک اتمسفر است تصحیح نماید.

برای بکارگیری عمومی منحنی های ذکر شده توسط Hottle و پیدا کردن ضریب تشعشع گاز برای محفظه های گازی غیر از نیمکره نیز باید ضرایب تصحیح را با معرفی طول شعاع معادل Equivalent Mean beam Length که بوسیله روشهای عددی و یا ریاضی بدست می آید نیز بکار برد. فهم فیزیکی طول شعاع معادل بسیار مهم است. وقتی یک گاز در درجه حرارت معین درون یک نیمکره قرار می گیرد. المان کوچکی که در مرکز مقطع نیمکره قرار گرفته از نقاط مختلف درون نیمکره تشعشع را دریافت می کند از نقاط بسیار نزدیک به خود المان تا نقاطی که در مجاورت سطح خارج نیمکره قرار گرفته اند که معادل شعاع نیمکره است. هدف پیدا کردن یک طول متوسطی است که جایگزین تمامی این فواصل کوچک و بزرگ شود. تصور کنید اگر بخواهیم یک توده گازی را که محدود به یک مکعب مستطیل شده است به المان کوچکی در مرکز یکی از سطوح جانبی محاسبه کنیم در این صورت ملاحظه خواهیم کرد که پیدا کردن طول متوسط چقدر اهمیت دارد. در همه جا اشکال هندسی دیگر نسبت به تشعشع توده گازی نیمکره ای به المانی در مرکز نیمکره سنجش می شود.

شکل (۳-۳) ضریب تشعشع ϵ_g را برای گاز در توده گاز با فشار کلی ۱ اتمسفر میدهد که به صورت تابعی از T_g و برای چندین مقدار $P_g L_g$ رسم شده است. P_g عبارتست از فشار جزئی CO_2 از توده گاز با فشار کلی ۱ اتمسفر و L_g عبارتست از شعاع بر حسب فوت نیمکره معادل (یا متر). شکل (۳-۴) ضریب تصحیح تقریبی را برای ضریب تشعشع با گاز با فشار غیر یک اتمسفر میدهد.

شکل (۳-۵) منحنی های مشابهی را برای بخار آب در یک اتمسفر برای محاسبه ϵ_w و در درجه حرارت های مختلف و $P_w L_w$ متفاوت میدهد. شکل (۳-۶) ضریب تصحیح تقریبی برای تبدیل ضریب تشعشع بخار آب در فشار P_w به مقادیر غیر صفر و برای فشار کلی غیر ۱ اتمسفر را می دهد.

هنگامیکه هم بخار آب و هم CO_2 با هم در مخلوط گاز وجود دارند مخلوط دارای یک ضریب تشعشع مختلف است که به اندازه $\Delta\epsilon$ کمتر از مجموع ۲ مقدار ϵ_g و ϵ_w است که از شکلهای (۳-۷) و (۳-۸) بدست می آید.

این اختلاف به این خاطر است که گاز CO_2 و بخار آب H_2O در قسمتی از باند طول موج تداخل دارند (Overlap) برای حذف این تداخل و محاسبه ϵ_m (ضریب تشعشع مخلوط گاز CO_2 و H_2O) از رابطه:

$$\epsilon_m = \epsilon_{CO_2} + \epsilon_w - \Delta\epsilon \quad (۳-۵)$$

$\Delta\varepsilon$ را نیاز داریم.

در تجزیه و تحلیل فوق استفاده از منحنی های ذکر شده مسئله مربوط می شد به چگونگی تشعشع یک جرم گاز واقع در یک نیمکره به مرکز نیمکره با شعاع L_e . برای کاربرد عمومی منحنی های فوق الذکر برای یک جرم گازی غیر از نیمکره یک طول معادلی را می توان بکار برد. جدول (۳-۱) نشان می دهد که به جای L_e چه مقداری را باید قرار داد. در دنباله این بحث چگونگی محاسبه L_e مؤثر را نشان می دهیم.

بطور تقریبی در صورتیکه روابطی در اختیار نباشد می توان از رابطه $L_e = 3.6V/A$ استفاده نمود که در این رابطه V حجم گاز و A سطح احاطه کننده آن است. تشعشع به تمام سطح A احاطه کننده (گاز) مدنظر است. چون معمولاً درجه حرارت دیواره گاز یا خود گاز متفاوت است α_g متفاوت خواهد بود یا ε_g در درجه حرارت T_w . برای منظور کردن این تغییر و برای ارزیابی ε_g در T_w ، ابتدا مقدار ε_g را در درجه حرارت T_w و برای $P_e L_e (T_w/T_g)$ پیدا می کنیم سپس آن را در $0.65 (T_g/T_w)$ ضرب می کنیم تا α_g بدست آید (برای CO_2). و در $0.45 (T_g/T_w)$ ضرب می کنیم برای H_2O . بطور عمومی و خلاصه روابط مربوط به محاسبه ε و α را می توان چنین نوشت:

$$\varepsilon = C_{CO_2} \cdot \varepsilon_{CO_2} + C_{H_2O} \cdot \varepsilon_{H_2O} - \Delta\varepsilon \quad (۶-۳)$$

$$\alpha_g = \alpha(CO_2) + \alpha(H_2O) - \Delta\alpha \quad (۷-۳)$$

$$\alpha(CO_2) = C_{CO_2} \varepsilon_{CO_2}^* \left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0.65} \quad (۸-۳)$$

$$\alpha(H_2O) = C_{H_2O} \varepsilon_{H_2O}^* \left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0.45} \quad (۹-۳)$$

$$\varepsilon_{CO_2}^* = \varepsilon_{CO_2} (T_w \cdot P_{CO_2} L_e \cdot \frac{T_w}{T_g}) \quad (۱۰-۳)$$

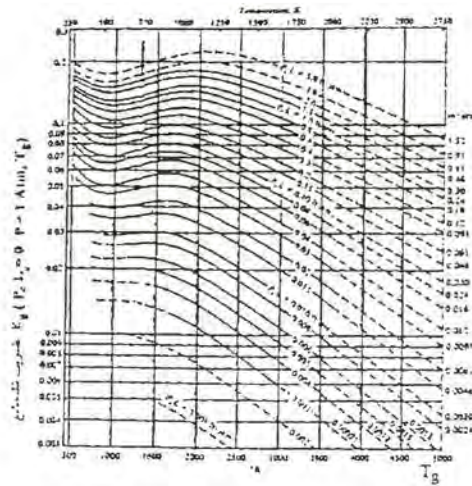
$$\varepsilon_{H_2O}^* = \varepsilon_{H_2O} (T_w \cdot P_{H_2O} L_e \cdot \frac{T_w}{T_g}) \quad (۱۱-۳)$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\alpha \quad (۱۲-۳)$$

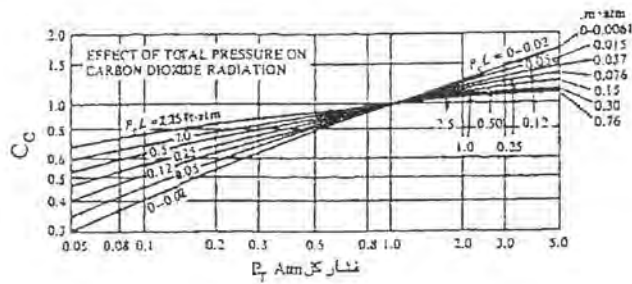
در این روابط C_{CO_2} و C_{H_2O} ضرایب تصحیح اند برای گازها در فشار غیر یک اتمسفر و $\Delta\varepsilon$ تصحیح تداخل باندها می باشد.

جدول (۱-۳) - طول معادل برای چند شکل هندسی معین

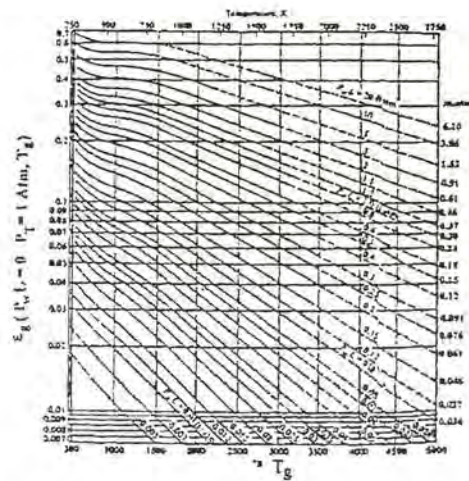
شکل هندسی کره	L_e قطر ۰/۶۵	سطح دریافت کننده تشعشع تشعشع جرم کروی گاز به سطح داخلی کره تشعشع
استوانه نامحدود دو صفحه موازی بی نهایت	قطر ۰/۹۵ فاصله بین دو صفحه ۱/۸	تشعشع به امان واقع روی یکی از سطوح
مجموعه ای از لوله ها با مرکز لوله ها روی رؤس مثلث متساوی الاضلاع	فاصله بین لوله ها ۲/۸ (S=D)	تشعشع به یک لوله
نظیر فوق - فاصله لوله ها دو برابر قطر	فاصله بین لوله ها ۳/۸ (S=2D)	تشعشع به یک لوله
نظیر فوق - لوله ها در رأس یک مربع	فاصله بین لوله ها ۳/۵ (S=D)	تشعشع به یک لوله
مکعب با ضلع L استوانه با ارتفاع H	۲L/3 H=D	تشعشع به یک وجه تشعشع به تمام سطح داخل استوانه



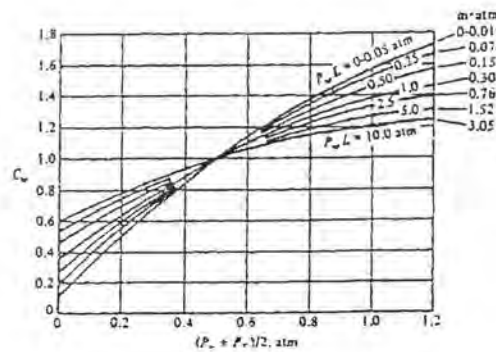
شکل ۳-۳ ضریب تضعیف کلی CO_2 در فشار کلی یک اتمسفر و فشار جزئی صفر اندازه گیری شده تقریبی



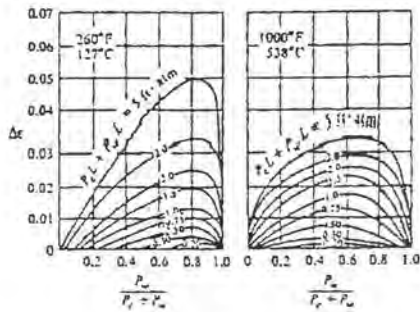
شکل ۳-۴ ضریب تصحیح برای گاز CO_2 وقتی فشار کل متفاوت است از آنچه در شکل ۳-۳ داده شده است



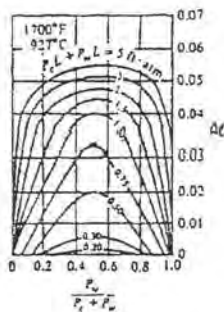
شکل ۳-۵ ضریب تشعشع بخار آب بر حسب درجه حرارت
برای مقادیر مختلف $P_w L$ در فشار کلی ۱ اتمسفر و حالت
ایده آل $P_w \rightarrow 0$



شکل ۳-۶ ضریب تصحیح برای محاسبه ضریب تشعشع بخار
آب موقعی که فشار کلی غیر از یک اتمسفر است



شکل ۷-۳ تصحیح ضریب تشعشع و قتیکه مخلوط گاز شامل بخار آب و CO₂ می باشد در دمای 127 C و 538 C



شکل ۸-۳ تصحیح ضریب تشعشع و قتیکه مخلوط گاز شامل بخار آب و CO₂ می باشد در دمای ۹۲۷ C

۱-۳ محاسبه I_e¹

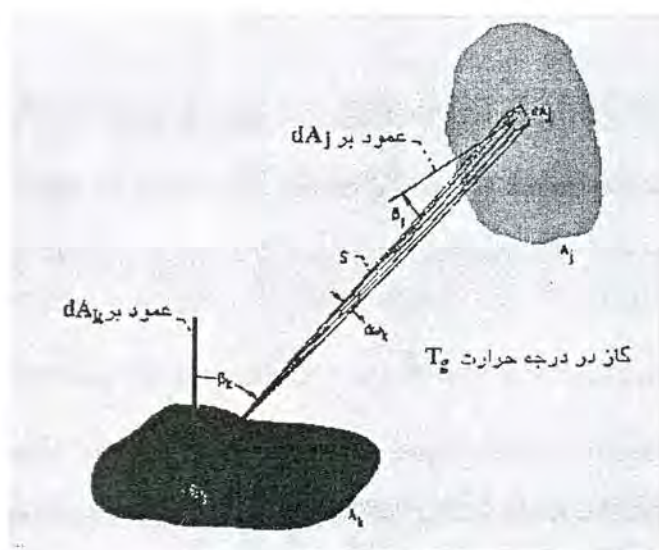
برای یک سطح بسته که درون آن گاز فعال وجود دارد یک ضریب جذب یا ضریب عبور متوسطی را مطابق روابط زیر تعریف می کنیم. برای تشعشع بین سطح K و J:

$$A_j F_{j-k} \tau_{\lambda j-k} = \int_{A_k} \int_{A_j} \frac{\exp(-a_\lambda S) \cos \beta_k \cos \beta_j}{\pi S^2} dA_j \cdot dA_k \quad (13-3)$$

$$A_j F_{j-k} \alpha_{\lambda j-k} = \int_{A_k} \int_{A_j} \frac{[1 - \exp(-a_\lambda S)] \cos \beta_k \cos \beta_j}{\pi S^2} dA_j \cdot dA_k = A_j F_{j-k} (1 - \tau_{\lambda j-k}) \quad (14-3)$$

Mean Beam Length - ¹

بدیهی است که این انتگرال دویل برای جهات مختلف و برای شکل‌های هندسی مختلف باید محاسبه گردد. برای توضیح بیشتر تعاریف انجام شده در روابط (۱۳-۳) و (۱۴-۳) با توجه به شکل (۹-۳) فرض می‌شود که بین دو سطح A_k و A_j یک گاز فعال وجود داشته باشد. در طول موج λ ضریب جذبیت گاز a_λ می‌باشد بنابراین در عبور یک شعاع معین در امتداد β_k از سطح dA_k به سمت dA_j این شعاع متأثر از وجود گاز خواهد شد و با در نظر گرفتن ضریب عبور برای این جهت خاص و این طول موج معین، شعاع رسیده به dA_j معرفی می‌گردد. با انتگرال گیری برای تمام مسیرهای ممکن تشعشع بین دو سطح A_k و A_j و برای یک طول موج، ضریب عبور متوسط برای همان طول موج بدست می‌آید.



شکل ۹-۳ تشعشع بین دو سطح وقتی بین آنها

یک گاز در دمای ثابت T_g وجود دارد

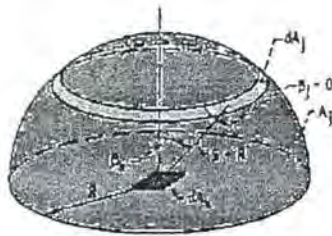
اگر a_λ برای طول موجها و جهات مختلف متفاوت باشد باید این اختلاف را در روابط (۱۳-۳) و (۱۴-۳) وارد نمود و یکبار برای جهت و بار دیگر برای طول موجهای مختلف انتگرال گیری نمود تا ضریب عبور متوسط و کلی بدست آید. ذیلاً به منظور آشنایی و پیدا کردن یک مفهوم فیزیکی قابل لمس نمونه هایی را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. اگر در روابط (۱۳-۳) و (۱۴-۳) $a_\lambda = 0$ قرار داده شود به این معنی که گاز غیر فعال است، مثلاً در طول موج λ می‌تواند خارج از باندهای جذب گاز مورد نظر باشد در این صورت $\tau = 1$ خواهد بود.

در نتیجه روابط (۱۳-۳) و (۱۴-۳) ساده شده و همان ضریب شکلی بین دو سطح A_k و A_j را می دهد بصورت:

$$A_j F_{j \rightarrow k} = \int_{A_k} \int_{A_j} \frac{\cos \beta_k \cos \beta_j}{\pi S^2} dA_j \cdot dA_k$$

مثال نمونه ۱: اکنون می خواهیم $\tau_{k,j \rightarrow k}$ را برای تشعشع یک گاز محبوس در یک نیمکره به المانی واقع در مرکز نیمکره پیدا کنیم مطابق شکل (۱۰-۳). در نظر می گیریم که A_j سطح نیمکره به شعاع R باشد و dA_k یک المان سطحی واقع در مرکز نیمکره، رابطه (۱۳-۳) با قرار دادن $S = R$ و $\beta_j = 0$ بصورت زیر در می آید.

$$A_j \cdot dF_{j \rightarrow dA_k} \bar{\tau}_{k,j \rightarrow dA_k} = dA_k \int_{A_j} \frac{\exp(-a_k S) \cos \beta_k \cos(0)}{\pi R^2} dA_j$$



شکل ۱۰-۳ چگونگی محاسبه طول معادل برای گاز واقع در نیمکره به شعاع R

اگر یک نوار را روی نیمکره انتخاب کنیم به عنوان dA_j در این صورت:

$$dA_j = 2\pi R^2 \sin \beta_k d\beta_k \quad (۱۵-۳)$$

با توجه به اینکه در این حالت R ثابت باقی می ماند آنرا از انتگرال خارج می کنیم و لذا:

$$A_j \cdot dF_{j \rightarrow dA_k} \bar{\tau}_{k,j \rightarrow dA_k} = \frac{dA_k [\exp(-a_k R)] \times 2\pi R}{\pi R^2} \int_{\beta_{k, \min}}^{\pi} \cos \beta_k \sin \beta_k d\beta_k = \exp(-a_k R)$$

با توجه به اینکه معمولاً a_k کمیته است مستقل از وضعیت هندسی (البته اگر گاز همگن باشد و در جهات مختلف a_k تغییر نکند) می باشد آنرا از انتگرال خارج کردیم.

$$A_j dF_{j-d_k} \bar{r}_{k_j-d_k} = dA_k \exp(-a_k R)$$

با اعمال رابطه تقابل و توجه به آنکه $dF_{d_k-j} = 1$

$$dA_k dF_{d_k-j} \bar{r}_{k_j-d_k} = dA_k \exp(-a_k R)$$

$$\bar{r}_{k_j-d_k} = \exp(-a_k R) \quad (۱۶-۳)$$

یعنی ضریب عبور متوسط بین سطح نیمکره و المانی واقع در مرکز نیمکره وقتی گازی با ضریب جاذبیت a_k درون نیمکره را پر کرده باشد مساویست با $\exp(-a_k R)$. یعنی L_0 یا طول متوسط در این مثال خاص با شعاع نیمکره مساویست توجه شود که این مفهوم را بعنوان پایه بکار خواهیم برد و برای تعریف شعاع متوسط برای اشکال هندسی دیگر، به این معنی که هر شکل هندسی دیگر تبدیل می شود به یک نیمکره معادل که شکل هندسی مورد بحث همان ضریب عبوری را خواهیم داشت که سطح نیمکره معادل به المانی در مرکز آن خواهد داشت.

مثال نمونه ۲: τ را برای کره ای به شعاع R به المان واقع در سطح داخل کره پیدا کنید. داخل کره از گازی با ضریب جاذبیت a_k پر شده است.

مطابق شکل (۱۱-۳):

$$\sin \beta d\beta = \frac{dS}{2R}, \quad \cos \beta = \frac{S}{2R}, \quad S = 2R \cos \beta \quad \beta_k = \beta_j$$

$$A_j dF_{j-d_k} \bar{r}_{k_j-d_k} = dA_k \int_{A_j} \frac{\exp(-a_k S) \cos^2 \beta_k dA_j}{\pi S^2}$$

زاویه حجمی که از dA_k به dA_j نظاره می شود مساویست با:

$$d\omega = \frac{\cos \beta dA_j}{S^2} \quad (۱۷-۳)$$

این زاویه حجمی مساویست با $2\pi \sin \beta d\beta$. با جایگزین کردن این مقدار در رابطه (۱۷-۳) به

جای:

$$\frac{\cos \beta dA_j}{S^2}$$

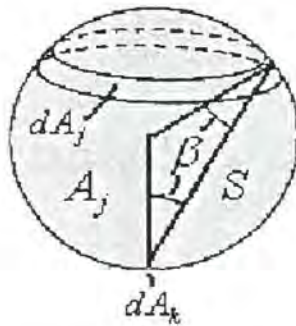
خواهیم داشت:

$$A_j dF_{j-d_k} \bar{r}_{k_j-d_k} = dA_k \int_{A_j} \frac{\exp(-a_k S)}{\pi} \cos \beta \cdot 2\pi \sin \beta d\beta$$

$$A_j dF_{j-d_k} \bar{r}_{k_j-d_k} = 2dA_k \int_{A_j} \exp(-a_k S) \cdot \frac{S}{2R} \cdot \frac{dS}{2R}$$

$$A_j dF_{j-d_k} \bar{r}_{k_j-d_k} = 2dA_k \int_{A_j} \exp(-a_k S) \cdot \frac{S dS}{4R^2} = \frac{2dA_k}{4R^2} \int_{S=0}^{2R} \exp(-a_k S) S dS$$

$$A_j dF_{j-d_k} \bar{r}_{k_j-d_k} = \frac{2dA_k}{(2a_k R)^2} [1 - (2a_k R + 1) \exp(-2a_k R)]$$



شکل ۱۱-۳ چگونگی محاسبه L_e گاز واقع در کره

به المانی روی سطح داخل کره dA_k

با اعمال رابطه تقابل: $A_j dF_{j-dk} = dA_k F_{dk-j}$ و توجه به آنکه $F_{dk-j} = 1$ در این صورت:

$$\bar{\tau}_{\lambda_j-dk} = \frac{2}{(2a_\lambda R)^2} [1 - (2a_\lambda R + 1) \exp(-2a_\lambda R)] \quad (11-3)$$

اگر قرار دهیم: $\bar{\tau}_{\lambda_j-dk} = \exp(-a_\lambda L_e)$

باید L_e را بگونه ای انتخاب و مقایسه کنیم که تساوی برقرار باشد.

این رابطه برای تمام سطح کره به المانی واقع روی سطح و همچنین تمام کره به سطحی روی کره و همچنین تمام کره به نصف کره صادق است. برای کره ای به شعاع 10 Cm و $a_\lambda = 0.1 \text{ Cm}^{-1}$ خواهیم داشت:

$$\bar{\tau} = \exp(-a_\lambda L_e) = \frac{2}{(2 \times 0.1 \times 10)^2} [1 - (2 \times 0.1 \times 10 + 1) \exp(-2 \times 0.1 \times 10)]$$

$$\exp(-a_\lambda L_e) = 0.5 [1 - 3 \exp(-2)] = 0.297$$

$$\exp(-0.1 L_e) = 0.297 \quad L_e = 12.14$$

در جدول مقدار L_e در این حالت 0.65 قطر است یعنی $13 \text{ Cm} = 0.65 \times 20$ که پاسخی نزدیک به حل دقیق است بطور عمومی و کلی اگر رابطه (۱۴-۳) را مساوی $\exp(-a_\lambda L_e)$ قرار دهیم با سعی و خطا می توان محاسبه نمود که L_e چقدر باشد تا به ازای یک مقدار معین a_λ تساوی برقرار باشد. همین روش را می توان بکار برد برای پیدا کردن L_e در شرایط هندسی دیگر:

۲-۳- تشعشع بین گاز و سطح محدود کننده آن

ملاحظه گردید که برای N سطح که مجموعاً سطح بسته ای را تشکیل می دهند وقتی تمام سطوح

سیاه باشند و گاز فعالی بین آنها نباشد حرارتی که باید به سطح K داد تا در درجه حرارت T_k باقی بماند عبارتست از:

$$Q_k = \sum_{j=1}^N A_k F_{k-j} \sigma (T_k^4 - T_j^4)$$

در حالیکه سطوح سیاه باشند و گاز بین این سطوح فعال باشد در این صورت نیز می توان نوشت:

$$\frac{Q_k}{A_k} = \sum_{j=1}^N F_{k-j} \bar{\epsilon}_{k-j} \sigma (T_k^4 - T_j^4) - \epsilon_g \sigma T_g^4 \quad (19-3)$$

که اگر $\bar{\epsilon}_{kj}$ معلوم باشد در اینصورت معادله فوق را برای هر کدام از سطوح می توان نوشت و لذا برای N سطح N معادله خواهیم داشت که در آنها N درجه حرارت (T) و N مقدار حرارت (Q) داریم و اگر از این 2N مجهول مقدار N پارامتر معلوم باشد مثلاً تمام درجه حرارت ها معلوم باشند یا تمام Q ها معلوم باشند یا m سطح درجه حرارتشان معلوم باشد و N-m مقدار حرارتشان، می توان این معادلات را حل نمود و پارامترهای مجهول را بدست آورد. البته فرض بر آن است که درجه حرارت گاز T_g معلوم است.

اگر سطوح سیاه نباشند همان رابطه (19-3) را می توان نوشت فقط بجای σT^4 باید رادیوسیتی ها یعنی q_{ij} ها را نوشت: بطور کلی برای یک سطح که مشتمل بر N سطح خاکستری با دمای ثابت است و گازی با دمای یکسان T_g در درون آن قرار دارد انرژی تابشی روی هر سطح مانند A_k مساویست با جمع انرژی هایی که از تمام سطوح دیگر به A_k می رسد به اضافه انرژی تشعشعی از گاز بین سطح A_k و هر سطح دیگر یعنی:

$$Q_k = A_k q_{ik} = \sum_{j=1}^N (q_{ij} A_j F_{j-k} \bar{\epsilon}_{j-k} + e_{bg} A_j F_{j-k} \bar{\alpha}_{j-k}) \quad (20-3)$$

اگر از رابطه تقابل یعنی $A_j F_{j-k} = A_k F_{kj}$ جایگزین کنیم و A_k را حذف کنیم.

$$q_{ik} = \sum_{j=1}^N (q_{ij} F_{k-j} \bar{\epsilon}_{k-j} + e_{bg} F_{k-j} \bar{\alpha}_{k-j}) \quad (21-3)$$

قبلاً داشتیم:

$$Q_k = A_k q_k = (q_{ik} - q_{ik}) A_k \quad (22-3)$$

$$q_{ik} = \epsilon_k e_{bk} - \rho_k q_{ik} \quad (23-3)$$

رابطه های (21-3)، (22-3) و (23-3) تشکیل سه دسته معادله می دهند برای هر سطح و برای سه ناشناخته q_i ، q_k ، q_{ik} اگر q_i را حذف کنیم بین (21-3) و (22-3) در اینصورت به دو دسته معادله برای هر سطح خواهیم رسید بصورت:

$$q_k = \frac{\epsilon_k}{1 - \epsilon_k} (e_{ok} - q_{ok}) \quad (24-3)$$

$$q_k = q_{ok} - \sum_{j=1}^N (q_{oj} F_{k-j} \bar{\tau}_{j-k} + e_{hj} F_{k-j} \bar{\alpha}_{j-k}) \quad (25-3)$$

رابطه (24-3) همان رابطه ای است که برای سطح بسته بدون گاز فعال در درون آن قبلاً داشتیم. بطور کلی رابطه (24-3) و (25-3) شبیه همان معادلاتی هستند که برای سطح بسته بدون گاز فعال در درون آن نوشتیم. با توجه به تقارن و رابطه تقابل براحتی قابل فهم است که:

$$\bar{\tau}_{j-k} = \bar{\tau}_{k-j} \quad (26-3)$$

$$\bar{\alpha}_{j-k} = \bar{\alpha}_{k-j} \quad (27-3)$$

بنابراین رابطه (25-3) را می توان نوشت:

$$q_k = q_{ok} - \sum_{j=1}^N (q_{oj} F_{k-j} \bar{\tau}_{k-j} + e_{hj} F_{k-j} \bar{\alpha}_{k-j}) \quad (28-3)$$

روابط (24-3) و (28-3) را می توان هنوز هم خلاصه تر نوشت همچنانکه قبلاً انجام دادیم. با حل معادله (24-3) برای بدست آوردن q_{ok} و جایگزینی آن در (28-3) خواهیم داشت.

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta_{kj}}{\epsilon_j} - F_{k-j} \frac{1 - \epsilon_j}{\epsilon_j} \bar{\tau}_{k-j} \right) q_j = \sum_{j=1}^N [(\delta_{kj} - F_{k-j} \bar{\tau}_{k-j}) e_{hj} - F_{k-j} \bar{\alpha}_{k-j} e_{hj}] \quad (29-3)$$

توجه شود که دلتای (کرونکر) همان مقادیری را دارد که قبلاً تعریف کردیم:

$$\begin{cases} k=j, & \delta=1 \\ k \neq j, & \delta=0 \end{cases}$$

قبل از آنکه معادله (29-3) را حل کنیم یادآوری می کنیم که برای نگهداشتن گاز در دمای T_g باید بطور مرتب حرارت به آن داد مثل مکانیسم احتراق، در این صورت حرارتی که بدین طریق تولید میشود، توسط دیوارهای احاطه کننده می گیریم. لذا تمام حرارتی که توسط دیوارها گرفته می شود، توسط گاز تأمین می شود. یعنی:

$$Q_g = - \sum_{k=1}^N A_k q_k \quad (30-3)$$

این مقدار را می توانیم پس از آنکه q_k را ارزیابی کردیم بدست آوریم.

بعنوان یک مثال اگر نیم کره ای به شعاع ۱ متر در نظر گرفته شود که فضای بین مقطع نیمکره و سطح نیمکره را گازی با دمای T_g پر کرده باشد و سطح نیمکره در دمای T_1 و سطح مقطع در دمای

T_2 باشد $T_1 > T_2$ رابطه (29-3) را می توان نوشت:

توجه شود که:

$$F_{1-1} = \frac{1}{2} \quad F_{1-2} = \frac{1}{2} \quad F_{2-1} = 1 \quad F_{2-2} = 0$$

برای $K=1$

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta_{1j}}{\epsilon_j} - F_{1-j} \frac{1-\epsilon_j}{\epsilon_j} \bar{\tau}_{1-j} \right) q_j = \sum_{j=1}^N [(\delta_{1j} - F_{1-j} \bar{\tau}_{1-j}) e_{bj} - F_{1-j} \bar{\alpha}_{1-j} e_{bg}]$$

یا

$$\left(\frac{\delta_{11}}{\epsilon_1} - F_{1-1} \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} \bar{\tau}_{1-1} \right) q_1 + \left(\frac{\delta_{12}}{\epsilon_2} - F_{1-2} \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \bar{\tau}_{1-2} \right) q_2$$

(۱)

$$= (\delta_{11} - F_{1-1} \bar{\tau}_{1-1}) e_{b1} - F_{1-1} \bar{\alpha}_{1-1} e_{bg} + (\delta_{12} - F_{1-2} \bar{\tau}_{1-2}) e_{b2} - F_{1-2} \bar{\alpha}_{1-2} e_{bg}]$$

برای $K=2$

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta_{2j}}{\epsilon_j} - F_{2-j} \frac{1-\epsilon_j}{\epsilon_j} \bar{\tau}_{2-j} \right) q_j = \sum_{j=1}^N [(\delta_{2j} - F_{2-j} \bar{\tau}_{2-j}) e_{bj} - F_{2-j} \bar{\alpha}_{2-j} e_{bg}]$$

یا

$$\left(\frac{\delta_{21}}{\epsilon_1} - F_{2-1} \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} \bar{\tau}_{2-1} \right) q_1 + \left(\frac{\delta_{22}}{\epsilon_2} - F_{2-2} \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \bar{\tau}_{2-2} \right) q_2 =$$

(۲)

$$(\delta_{21} - F_{2-1} \bar{\tau}_{2-1}) e_{b1} - F_{2-1} \bar{\alpha}_{2-1} e_{bg} + (\delta_{22} - F_{2-2} \bar{\tau}_{2-2}) e_{b2} - F_{2-2} \bar{\alpha}_{2-2} e_{bg}$$

با مقدار گذاری برای δ در رابطه (۱):

$$\left(\frac{1}{\epsilon_1} - F_{1-1} \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} \bar{\tau}_{1-1} \right) q_1 + \left(0 - F_{1-2} \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \bar{\tau}_{1-2} \right) q_2 =$$

$$1 - F_{1-1} \bar{\tau}_{1-1}) e_{b1} - F_{1-1} \bar{\alpha}_{1-1} e_{bg} + (0 - F_{1-2} \bar{\tau}_{1-2}) e_{b2} - F_{1-2} \bar{\alpha}_{1-2} e_{bg}$$

و یا

$$\left(\frac{1}{\epsilon_1} - F_{1-1} \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} \bar{\tau}_{1-1} \right) q_1 - F_{1-2} \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \bar{\tau}_{1-2} q_2 =$$

(۳)

$$= 1 - F_{1-1} \bar{\tau}_{1-1}) e_{b1} - F_{1-1} \bar{\alpha}_{1-1} e_{bg} - F_{1-2} \bar{\tau}_{1-2} e_{b2} - F_{1-2} \bar{\alpha}_{1-2} e_{bg}$$

و همچنین با مقدار گذاری برای δ در رابطه (۲):

(۴)

$$0 - F_{2-1} \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} \bar{\tau}_{2-1} q_1 + \left(\frac{1}{\epsilon_2}\right) q_2 = -F_{2-1} \bar{\tau}_{2-1} e_{b_1} - F_{2-1} \bar{\alpha}_{2-1} e_{bg} + e_{b_2}$$

با مقدار گذاری برای ضرایب شکلی و مرتب کردن:

$$\left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{2} \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} \bar{\tau}_{1-1}\right) q_1 - \frac{1}{2} \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \bar{\tau}_{1-2} q_2 = (1 - \frac{1}{2} \bar{\tau}_{1-1}) e_{b_1} - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1-1} e_{bg}$$

$$-\frac{1}{2} \bar{\tau}_{1-2} e_{b_1} - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1-2} e_{bg}$$

و

$$-\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} \bar{\tau}_{2-1} q_1 + \frac{1}{\epsilon_2} q_2 = -\bar{\tau}_{2-1} e_{b_1} - \bar{\alpha}_{2-1} e_{bg} + e_{b_2}$$

فرض بر این است که درجه حرارت گاز مشخص باشد در اینصورت e_{bg} معلوم است. لذا دو معادله داریم که در آنها چهار پارامتر موجود است q_1 , q_2 , e_{b_1} و e_{b_2} اگر درجه حرارتها مشخص باشد در اینصورت e_{b_1} و e_{b_2} مشخص اند و از روی آنها می توان q_1 و q_2 را محاسبه نمود. اگر مقدار حرارتها معلوم باشند در این صورت می توان درجه حرارت سطوح را پیدا کرد. مانند حالتی قبل بایستی نصف پارامترها معلوم باشند تا بتوان بقیه را محاسبه نمود. پس از آنکه q ها محاسبه شدند از رابطه (۳-۳۰) می توان Q_g را محاسبه نمود. یعنی:

$$Q_g = -(A_1 q_1 + A_2 q_2) \quad (31-3)$$

باید توجه نمود که در روابط فوق ضمن آنکه ضرایب تشعشع معلوم اند، (سطوح خاکستری فرض شده اند) باید بتوان τ و α را برای جفت سطوح پیدا کرد. واضح است که:

$$\bar{\tau}_{k-j} = e^{-\alpha L_{k,j}} \quad (32-3)$$

$$\bar{\alpha}_{k-j} = 1 - e^{-\alpha L_{k,j}} \quad (33-3)$$

که $L_{k,j}$ همان طول متوسط یا شعاع معادل است که باید مقدار آنرا برای دو سطح از روابط ریاضی

و یا جداول محاسبه کرد و α ضریب جاذبیت گاز است.

گاهی اوقات یک مقدار ثابت $L_{k,j}$ برای تمام سطوح در نظر گرفته می شود. اگر دقت زیاد لازم باشد بایستی مقدار $L_{k,j}$ را برای هر دو سطح بطور مجزا محاسبه نمود.

مسئله: L_c را (τ_{2-j-k}) را برای یک استوانه پیدا کنید (۱- سطح مقطع بالایی به المانی در مرکز

سطح قاعده پائینی ۲- سطح جانبی استوانه به المانی واقع در مرکز یکی از قاعده ها)

مسئله: کوره ای به ابعاد $4 \times 5 \times 11$ (متر) را که همه سطوح سیاه فرض می شوند در نظر بگیرید اگر $T_1 = T_2 = 800K$ و $T_3 = T_4 = 700K$ و $T_5 = T_6 = 900K$ باشند حرارتی را که هر کدام از سطوح دریافت می کنند بدست آورید. فرض می شود گاز داخل کوره در $1200K$ باشد و شامل 0.10 بخار

آب و ۰/۱۵ CO₂ در فشار یک اتمسفر.

Blackbody radiation functions

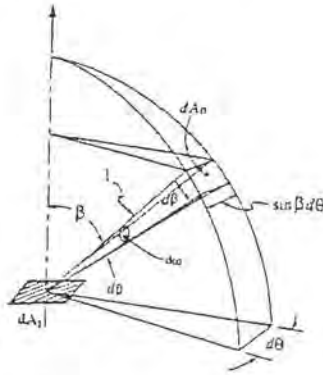
$\lambda T,$ $\mu\text{m.k}$	f_{λ}	$\lambda T,$ $\mu\text{m.k}$	f_{λ}
200	0.000000	6200	0.754140
400	0.000000	6400	0.769234
600	0.000000	6600	0.783199
800	0.000016	6800	0.796129
1000	0.000321	7000	0.808109
1200	0.002134	7200	0.819217
1400	0.007790	7400	0.829527
1600	0.019718	7600	0.839102
1800	0.039341	7800	0.848005
2000	0.066728	8000	0.856288
2200	0.100888	8500	0.874608
2400	0.140256	9000	0.890029
2600	0.183120	9500	0.903085
2800	0.227897	10,000	0.914199
3000	0.273232	10,500	0.923710
3200	0.318102	11,000	0.931890
3400	0.361735	11,500	0.939959
3600	0.403607	12,000	0.945098
3800	0.443382	13,000	0.955139
4000	0.480877	14,000	0.962898
4200	0.516014	15,000	0.969981
4400	0.548796	16,000	0.973814
4600	0.579280	18,000	0.980860
4800	0.607559	20,000	0.985602
5000	0.633747	25,000	0.992215
5200	0.658970	30,000	0.995340
5400	0.680360	40,000	0.997667
5600	0.701046	50,000	0.998953
5800	0.720158	75,000	0.999713
6000	0.737818	100,000	0.999905

107

ضمیمه ۱ : اثبات رابطه

$$e_{\lambda b} = \pi I'_{\lambda b}$$

همچنانکه دیدیم، زاویه فضایی که سطح dA_n از مرکز نیمکره نظاره می شود مساوی است با :
 $d\omega = \sin\beta \, d\beta \, d\theta$ (شکل زیرین)



بنابراین انرژی تابشی از سطح dA_1 برای واحد سطح و زمان که از المان dA_n عبور خواهد کرد برابر است با:
 با توجه به رابطه

$$e'_{\lambda b} = \sin\beta \, d\beta \, d\theta$$

$$e'_{\lambda b} = I'_{\lambda b} \cos\beta$$

لذا انرژی مورد بحث مساوی است با:
 (۱)

$$I'_{\lambda b} \cos\beta \sin\beta \, d\beta \, d\theta$$

برای پیدا کردن همین انرژی طیفی که توسط تمام سطح نیمکره دریافت می شود رابطه (۱) را برای تمام زاویه فضایی که از مرکز نیمکره سطح آن نظاره می شود انتگرال می گیریم یعنی:

$$I'_{\lambda b} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \cos\beta \sin\beta \, d\beta \, d\theta$$

یا

$$e_{\lambda b} = 2\pi I'_{\lambda b} \int_0^{\pi/2} \sin\beta \, (d\sin\beta) = \pi I'_{\lambda b}$$

یا

$$e_{\lambda b} = \pi I'_{\lambda b}$$

یعنی تشعشع طیفی در تمام فضای نیمکره، π برابر شدت تشعشع طیفی است و به همین طریق می توان نشان داد که:

$$e_b = \pi I'_b$$

ضمیمه ۲: اثبات رابطه

$$e_{\lambda b}(\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2) = I'_{\lambda} \frac{\sin^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_1}{2} (\theta_2 - \theta_1)$$

چنانکه در رابطه (۱) ضمیمه ۱ دیده شده، انرژی طیفی عبور کرده از المان dA_n روی سطح نیمکره مساوی است

با:

$$I'_{\lambda b} \cos \beta \sin \beta d\beta d\theta$$

در صورتیکه از این مقدار برای تمام فضای نیمکره انتگرال گرفته شود نتیجه همان است که در ضمیمه ۱ دیده شد. در حالیکه تنها بخشی از نیمکره مدنظر باشد که بین زاویه θ_1, θ_2 و β_1, β_2 قرار می گیرد، در این صورت:

$$e_{\lambda b}(\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2) = I'_{\lambda b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta \sin \beta d\beta d\theta$$

$$= I'_{\lambda} \frac{\sin^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_1}{2} (\theta_2 - \theta_1)$$

ضمیمه ۳

مثال نمونه ۳- دو سطح نیمه استوانه ای به شعاع R به فاصله D از یکدیگر قرار دارند. ضریب شکل F_{1-2} را در این حالت با استفاده از روش ریسمانهای متقاطع بدست آورید.

طول ریسمان متقاطع abcde را L_1 و طول ریسمان غیر متقاطع ef را L_2 فرض می کنیم. با توجه به تنوری روش مورد نظر داریم:

$$F_{1-2} = \frac{2L_1 - 2L_2}{2A_1} = \frac{L_1 - L_2}{\pi R^2}$$

$$L_2 = D + 2R$$

درضمن طول L_1 دو برابر طول cde است. قطعه c تا d از L_1 از مثلث ocd بدست می آید:

$$(L_1)_{c-d} = \left[\left(\frac{D}{2} + R \right)^2 - R^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[D \left(\frac{D}{4} + R \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(L_1)_{d-e} = R\theta$$

از مثلث ocd زاویه θ بصورت مقابل بدست می آید:

$$\theta = \text{Sin}^{-1} \frac{R}{\frac{D}{2} + R}$$

با ترکیب روابط فوق داریم:

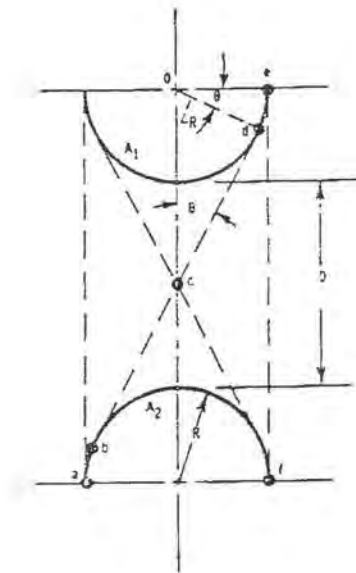
$$F_{1-2} = \frac{L_1 - L_2}{\pi R^2} = \frac{(L_1)_{c-d} + (L_1)_{d-e} - L_2}{\pi R^2}$$

$$= \frac{[4d(d/4 + R)]^{\frac{1}{2}} + 2R \text{Sin}^{-1}[R/(D/2 + R)] - d - 2R}{\pi R^2}$$

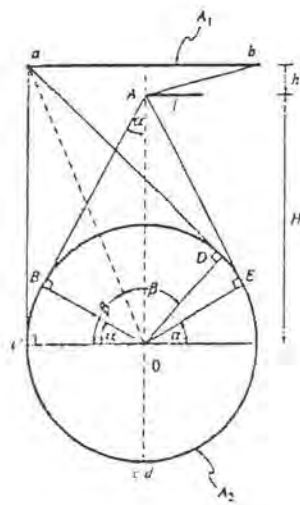
با تغییر متغیر $X = 1 + D/2R$

$$F_{1-2} = \frac{2}{\pi} \left[(X^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \text{Sin}^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) - X \right]$$

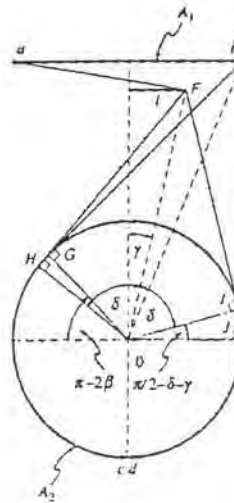
$$\Rightarrow F_{1-2} = \frac{2}{\pi} \left[(X^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} - \text{Cos}^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) - X \right]$$



مثال نمونه ۴- برای حالتی که یک مانع بطول L بین یک سطح و یک استوانه واقع است: ضریب شکل را به روش ریسمانهای متقاطع برای سطح A_1 به A_2 بدست آورید:



شکل (الف)



شکل (ب)

در شکل فوق نقاط انتهایی سطوح A_1 و A_2 بصورت b, a و c و سایر نقاط بصورت حروف بزرگ نشان داده شده اند. یک سطح بسته استوانه ای می تواند با جایگیری دو نقطه در دو سمت محور آن مثل شود و می توان از آن نقطه دو مماس بر استوانه رسم کرد. با توجه به دیدن سطح A_2 پس از سطح A مقدار F_{1-2} فقط بوسیله یک دسته ریسمان نمی تواند تعیین شود. با استفاده از ضریب شکل جبری داریم:

$$F_{1-2} = F_{1-2}^L + F_{1-2}^r$$

L = چپ و r = راست

بطوریکه F_{1-2}^L و F_{1-2}^r ضریب شکل های بین سطوح A_1 و A_2 در سمت چپ و راست هستند. قرار گیری ریسمانها برای F_{1-2}^L در شکل (الف) و برای F_{1-2}^r در شکل (ب) نشان داده شده است. در ابتدا با توجه به قطرهای و خطوط کناری بصورت زیر مشخص می شوند.

$$d_1 = aD + DE + Ed \quad , \quad d_2 = bA + AB + BC + Cc$$

$$S_1 = aC + Cc \quad , \quad S_2 = bA + AE + Ed$$

با استفاده از رابطه موجود برای ریسمانهای متقاطع داریم:

$$F_{1-2}^L = \frac{aD + DE + AB + BC - (aC + AE)}{2ab}$$

در شکل (الف) $aC = aD$ و $AB = AE$ بنابراین:

$$F_{1-2}^L = \frac{BC + DE}{2ab} = \frac{\alpha R + (\pi - 2\beta - \alpha)R}{2 \times 2R} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$\cot \beta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{R}{h + H}$$

$$\Rightarrow F_{1-2}^L = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{R}{h + H}$$

به روش مشابه برای شکل (ب) برای F_{1-2}^R داریم:

$$d_1 = aF + FI + IJ + Jd \quad , \quad d_2 = bG + GH + HC$$

$$S_1 = aF + FH + HC \quad , \quad S_2 = bJ + Jd$$

$$F_{1-2}^R = \frac{FI + IJ + bG + GH - (FH + bJ)}{2ab} \quad , \quad bG = bJ \quad , \quad FI = FH$$

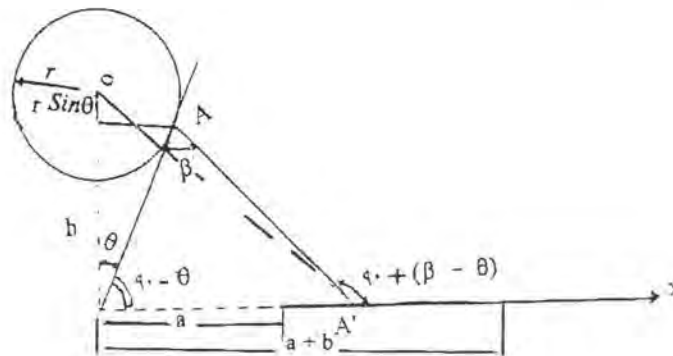
$$\Rightarrow F_{1-2}^R = \frac{IJ + GH}{2ab} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \delta - \gamma \right)R + \left(\pi - 2\beta + \delta - \frac{\pi}{2} - \gamma \right)R}{2 \times 2R}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma \right) = \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \frac{R}{h + H} - \tan^{-1} \frac{L}{h} \right)$$

ضمیمه ۴

مثال نمونه ۳- ضریب شکل یک صفحه با طول بینهایت نسبت به یک استوانه با طول بی نهایت را به روش مونت

کارلو بدمست آورید.



دز

ابتدا معادله خط AA' را می نویسیم: ضریب زاویه خط فوق $\tan(90 - (\beta - \theta))$ می باشد و از نقطه A که مشخصات آن نسبت به X و y معلوم است.

$$X_A = r \cos \theta$$

$$y_A = h + r(1 - \sin \theta)$$

معادله خط AA' : $(y - y_A) = \tan(90 - (\beta - \theta))(X - X_A)$

$$y - h - r(1 - \sin \theta) = \frac{1}{\tan(\theta - \beta)}(X - r \cos \theta)$$

$$y = \frac{X}{\tan(\theta - \beta)} + h + r(1 - \sin \theta) - \frac{r \cos \theta}{\tan(\theta - \beta)}$$

تقاطع این خط با محور X ها را می یابیم:

$$\frac{X}{\tan(\theta - \beta)} + h + r(1 - \sin \theta) - \frac{r \cos \theta}{\tan(\theta - \beta)} = 0$$

$$X = r \cos \theta - (h + r(1 - \sin \theta)) \tan(\theta - \beta)$$

حال شرط مقدار را می گذاریم:

شعاع برخورد میکند ok $\iff X < a + b$ و $X > a$

برای جواب $R=1$, $h=2$, $a=3$, $b=4$

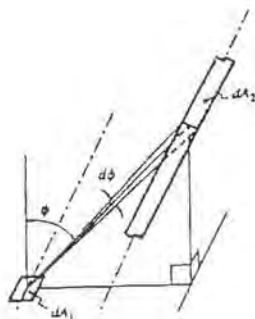
تحلیلی: ۰/۱۲۷

عددی: ۰/۱۲۲۵

ضمیمه ۵

المان باریک با هر طول به نوار باریک با طول خیلی زیاد به موازات المان، صفحه شامل المان با نوار تقاطع ندارد

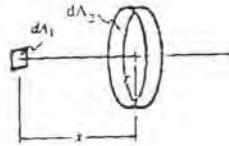
$$dF_{d_1-d_2} = \frac{\cos \Phi d\Phi}{2}$$



المان صفحه ای به حلقه استوانه ای، عمود بر المان از مرکز حلقه می گذرد

$$dF_{d_1-d_2} = \frac{2X}{(X^2+1)^2}$$

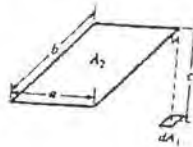
$$X = x/r$$



المان صفحه ای به صفحه موازی چهار ضلعی قائم، عمود بر المان از یک گوشه چهار ضلعی می گذرد

$$F_{d_1-2} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} \tan^{-1} \frac{B}{\sqrt{1+A^2}} + \frac{B}{\sqrt{1+B^2}} \tan^{-1} \frac{A}{\sqrt{1+B^2}} \right\}$$

$$A = a/c, \quad B = b/c$$

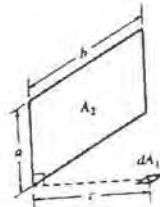


المان صفحه ای به چهار ضلعی قائم، صفحه المان عمود بر چهار ضلعی است

$$F_{d_1-2} = \frac{1}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{1}{Y} - \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}} \right)$$

$$X = \frac{a}{b}$$

$$Y = \frac{c}{b}$$



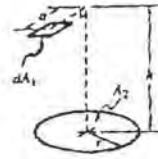
المان صفحه ای به دیسک صفحه دیسک موازی صفحه المان

$$F_{d_1-2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{Z - 2R^2}{\sqrt{Z^2 - 4R^2}} \right]$$

$$H = \frac{h}{a}$$

$$R = \frac{r}{a}$$

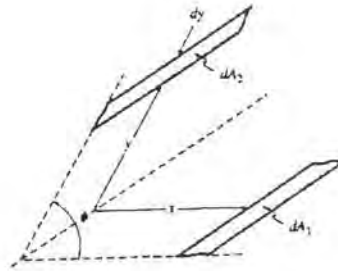
$$Z = 1 + H^2 + R^2$$



نو المان نواری باریک موازی به هم صفحات دو نوار با هم زاویه دارند

$$dF_{d_1-d_2} = \frac{Y \sin^2 \Phi dY}{2(1+Y^2 - 2Y \cos \Phi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Y = \frac{y}{x}$$



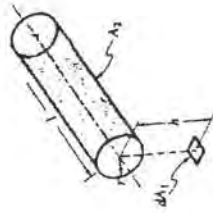
المان صفحه ای با طول محدود عمود بر المان از یک انتهای استوانه می گذرد و بر محور آن عمود است.

$$F_{d_1-2} = \frac{L}{\pi H} \left[\frac{1}{L} \tan^{-1} \frac{L}{\sqrt{H^2-1}} + \frac{X-2H}{\sqrt{XY}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{X(H-1)}{Y(H+1)}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{H-1}{H+1}} \right]$$

$$L = \frac{l}{r} \quad H = \frac{h}{r}$$

$$X = (1+H)^2 + L^2$$

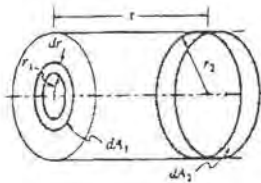
$$Y = (1-H)^2 + L^2$$



نوار حلقوی روی دیسک به نوار حلقوی واقع در سطح جانبی

$$dF_{d_1-d_2} = \frac{2X(X^2 + R^2 - 1)dX}{[(X^2 + R^2 + 1)^2 - 4R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$X = x/r_2 \quad R = r_1/r_2$$



صفحه بی نهایت به ردیف لوله

$$F_{1-2} = \frac{1}{\pi} \left(\cos^{-1} \frac{D}{s} + \frac{s}{D} - \sqrt{\left(\frac{s}{D}\right)^2 - 1} \right)$$

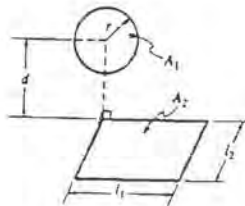


کره به صفحه چهار گوش زیر آن

$$F_{1-2} = \frac{1}{4\pi} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1}{D_1^2 + D_2^2 + D_1^2 D_2^2}}$$

$$D_1 = d/l_1, \quad D_2 = d/l_2$$

$$r < d$$

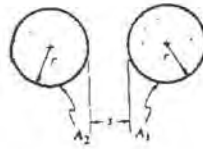


دو لوله با شعاع مساوی و طول بی نهایت

$$F_{1-2} = \frac{1}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{1}{X} + \sqrt{X^2 - 1} - X \right)$$

$$X = 1 + \frac{s}{2r}$$

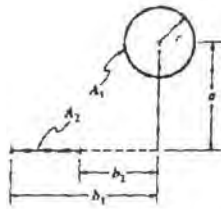
$$r \leq a$$



لوله به المان صفحه ای طول المان و استوانه بی نهایت

$$F_{1-2} = \frac{1}{2\pi} (\tan^{-1} B - \tan^{-1} B_2)$$

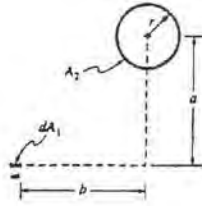
$$B_1 = b_1/a, B_2 = b_2/a$$



المان نواری باریک با هر طولی به استوان موازی با طول زیاد

$$F_{1-2} = \frac{A}{A^2 + B^2}$$

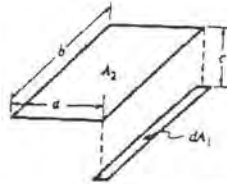
$$A = \frac{a}{r} \quad B = \frac{b}{r}$$



المان نواری باریک به صفحه چهار گوش موازی نوار، نوار زیر یک ضلع چهار گوش قرار دارد.

$$F_{d_1-2} = \frac{1}{\pi Y} \left(\sqrt{1+Y^2} - \tan^{-1} X + \frac{XY}{\sqrt{1+X^2}} \tan^{-1} \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} \right)$$

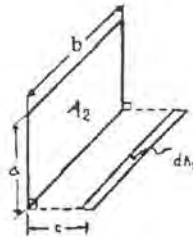
$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{b}{c}$$



المان نواری باریک به صفحه قائم بر صفحه نوار

$$F_{d_1-2} = \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{1}{Y} + \frac{Y}{2} \operatorname{Ln} \frac{Y^2(X^2+Y^2+1)}{(Y^2+1)(X^2+Y^2)} - \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}} \right]$$

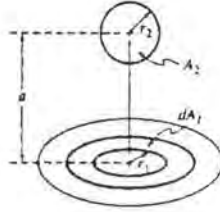
$$X = a/b, \quad Y = c/b$$



نوار حلقوی روی یک دیسک به کره ای با محور قائم مشترک

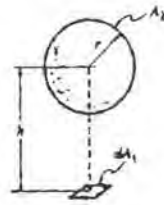
$$F_{d_1-2} = \frac{R_2^2}{(1 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$R_1 = \frac{r_1}{a} \quad R_2 = \frac{r_2}{a}$$



المان صفحه ای به کره، عمود بر صفحه از مرکز کره می گذرد

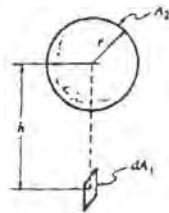
$$F_{d_1-2} = \left(\frac{r}{h}\right)^2$$



المان صفحه ای به کره، مماس بر صفحه از مرکز کره می گذرد

$$F_{d_1-2} = \frac{L}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{H^2 - 1}} - \frac{\sqrt{H^2 - 1}}{H^2} \right]$$

$$H = \frac{h}{r}$$



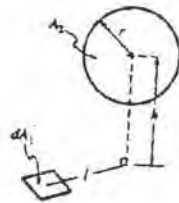
المان صفحه ای به کره

$$F_{d_1-2} = \frac{H}{(L^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$H \geq 1 \quad L = \frac{l}{r} \quad H = \frac{h}{r}$$

$$F_{d_1-2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{H}{(L^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}} \cos^{-1} \frac{-H}{L\sqrt{L^2 - H^2 - 1}} - \frac{\sqrt{(L^2 + H^2 - 1)(1 - H^2)}}{L^2 + H^2} - \sin^{-1} \frac{\sqrt{H^2 + L^2 - 1}}{L^2} + \frac{\pi}{2} \right]$$

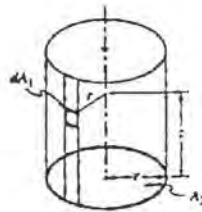
$$-1 < H < 1$$



المان واقع روی یک نوار طولی داخل استوانه به مقطع استوانه

$$F_{d_1-2} = \frac{Z^2 + 2}{2\sqrt{Z^2 + 4}} - \frac{Z}{2}$$

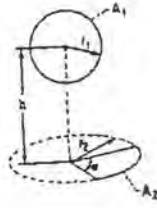
$$Z = \frac{z}{r}$$



کره به بخشی از یک دیسک، عمود بر دیسک در مرکز از مرکز کره می گذرد

$$F_{1-2} = \frac{\alpha}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R_2^2}} \right)$$

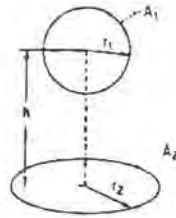
$$R_2 = \frac{r_2}{h}$$



کره به دیسک، عمود بر دیسک در مرکز از مرکز کره می گذرد

$$F_{1-2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+R_2^2}} \right)$$

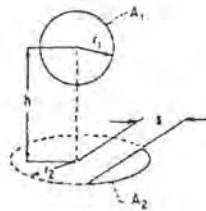
$$R_2 = \frac{r_2}{h}$$



کره به بخشی از یک دیسک

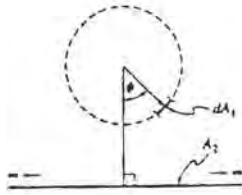
$$F_{1-2} = \frac{1}{8} - \frac{\cos^{-1}(S/R_2)}{2\pi\sqrt{1+R_2^2}} + \frac{1}{4\pi} \sin^{-1} \frac{(1-S^2)R_2^2 - 2S^2}{(1+S^2)R_2^2}$$

$$R_2 = \frac{r_2}{h} \quad S = \frac{s}{h}$$



المان نواری واقع روی سطح جانبی خارجی استوان به صفحه با عرض و عمق بی نهایت

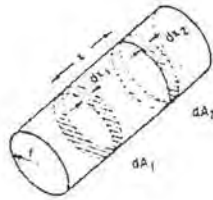
$$F_{d_1-2} = \frac{1}{2} (1 + \cos\Phi)$$



نو نوار حلقوی در سطح داخل استوانه نسبت به هم

$$dF_{d_1-d_2} = \left[1 - \frac{2X^3 + 3X}{2(X^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right] dX_2$$

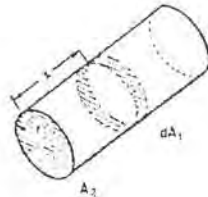
$$X = \frac{x}{2r}$$

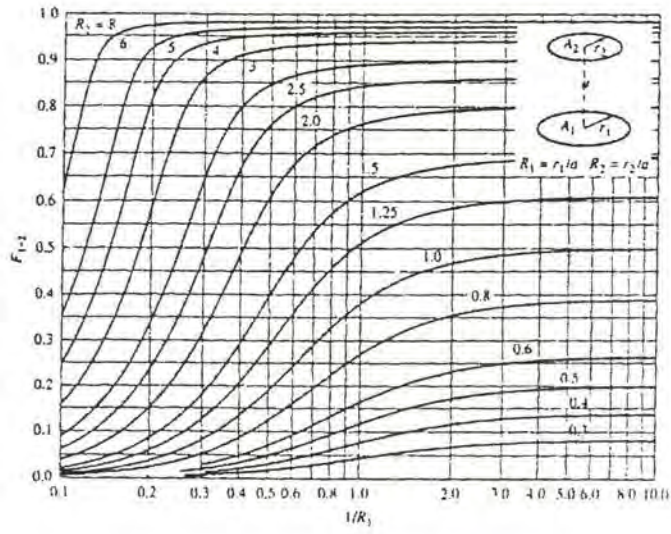


نوار حلقوی روی سطح داخلی استوانه به سطح مقطع استوانه

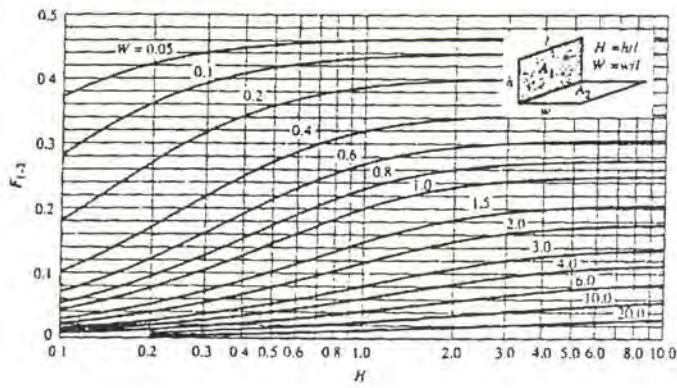
$$F_{d_1-2} = \frac{X^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{X^2 + 1}} - X$$

$$X = \frac{x}{2r}$$

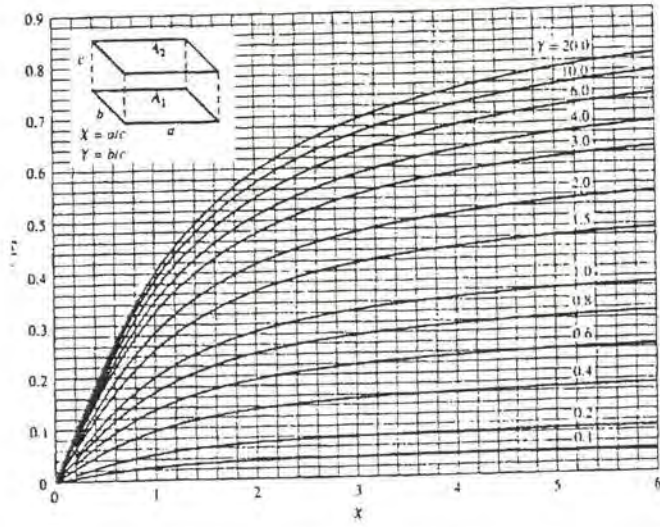




ضریب شکلی دو دیسک با محور مشترک



ضریب شکلی دو صفحه عمود بر هم با فصل مشترک

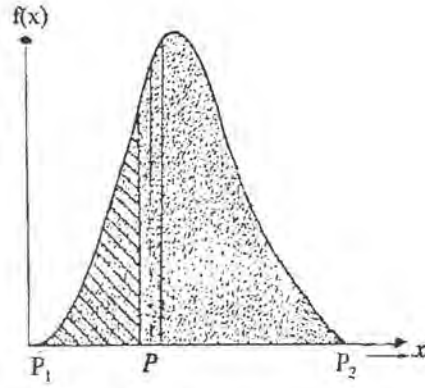


ضریب شکلی دو صفحه هم اندازه و به موازات هم

ضمیمه ۶:

احتمال اینکه متغیری مثل Z مقداری مساوی یا کمتر از P داشته باشد بصورت زیر تعریف می گردد.

$$Z \leq P = \frac{\int_{P_1}^P f(x) dx}{\int_{P_1}^{P_2} f(x) dx}$$



که در واقع احتمال، نسبت بر سطح زیر منحنی است از P_1 تا P به سطح زیر منحنی از P_1 تا P_2

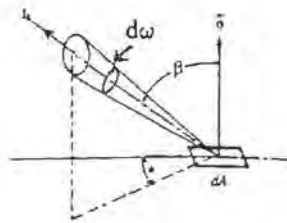
۱- انتخاب یک نقطه روی یک سطح از جمله یک دیسک با توجه به آنکه نقطه اختیاری از مساحت سطح با دیسک است و نه طول یا قطر لذا، عدد اتفاقی بین صفر و یک (R_1) مساوی $\cos^2 \alpha$ قرار می گیرد نه $\cos \alpha$.

۲- در خصوص زاویه β و θ مطابق شکل و با توجه به تعریف شدت تشعشع مقدار حرارتی که از واحد سطح dA عمود بر جهت تشعشع و واحد زمان درون زاویه $d\omega$ منتشر می شود عبارت خواهد بود از:
برای شدت طیفی:

$$I_\lambda \cdot d\omega \cdot \cos \beta$$

یا

$$I \cdot d\omega \cdot \cos \beta$$



اگر شدت کلی را مد نظر قرار دهیم. با توجه به مقدار $d\omega$ که مساویست با $\sin\beta \, d\theta \, d\beta$ داریم (فقط برای شدت کلی محاسبه می کنیم، طبیعی است که برای شدت طیفی می توان همین روش را دنبال کرد).

$$q = I \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta \cdot d\theta \, d\beta$$

این انرژی است که در امتداد β و θ و درون زاویه $d\omega$ منتشر می شود. با توجه به اینکه سطح dA به تمام نیمکره اطرافش تشعشع می کند لذا برای زاویه θ تغییرات 2π می باشد و برای زاویه β احتمال اینکه تشعشع در این امتداد باشد را می توان چنین نوشت:

$$[Z < \beta] = \frac{\int_0^\beta I \cos\beta \sin\beta \, d\beta \, d\theta}{\int_0^\pi I \cos\beta \sin\beta \, d\beta \, d\theta} = \sin^2 \beta$$

لذا:

$$[Z < \beta] = \sin^2 \beta = R_2$$

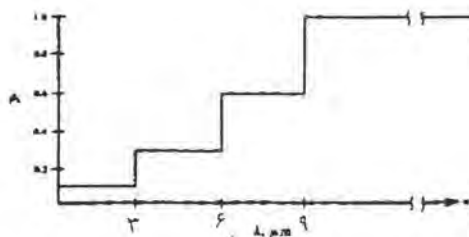
مسائل بخش ۱

۱- شار تابشی خورشید در شعاع میانگین مدار زمین $G = 1400 \text{ W/m}^2$ می باشد. با بکار گیری این حقیقت، شار خورشید را برای (الف) سیاره تیر که شعاع میانگین مدار آن $m \times 10^{10} \times 5/78$ است، (ب) سیاره پلوتون که دارای شعاع میانگین $m \times 10^{12} \times 5/89$ متر است بدست آورید. شعاع میانگین مدار زمین را $m \times 10^{11} \times 1/496$ در نظر بگیرید.

۲- توان پخش کلی یک جسم سیاه را در (الف) 1000°F و (ب) 1000°C بدست آورید.

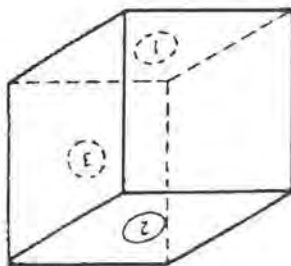
۳- قانون وین (۲۰-۱) را از قانون پلانک (۱۱-۱) بدست آورید.

۴- اندازه گیری بازتاب که به نسبت آسان است اغلب با بدست آوردن ویژگیهای سطح تابش بدست می آید. اندازه های پخش یک رویه جسم جامد در 560 K در شکل زیر کشیده شده است. توان پخش کلی را در این دما بدست آورید.

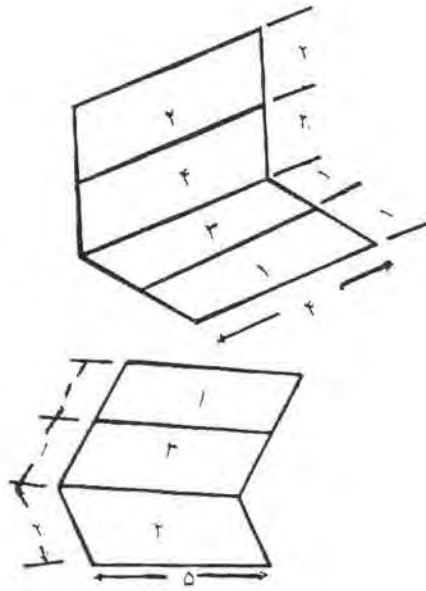


۵- با بکارگیری تعاریف توان پخش کلی و جاذبیت کل نشان دهید که ϵ و α لزوماً در بازتاب سطحی در دمای T از جسم با دمای متفاوت T^* برابر نیستند.

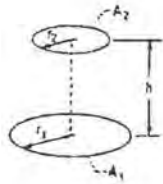
۶- شکل زیر را در نظر بگیرید صفحه ۱ در 260°C و صفحه ۲ در 177°C و دیگر صفحات عمودی ۳ و در C 204° هستند (الف) نرخ خالص گنر گرمای q_{1-2} ، (ب) نرخ خالص گنر گرمای q_{1-3} را بیابید.



۷- ضریب شکل F_{1-2} را در شکل روبرو بدست آورید.



۸- ضریب شکل F_{1-2} را در شکل زیر بدست آورید.



۹- در شکل زیر دو دیسک موازی هم مرکز 90 cm از هم فاصله دارند. دیسک ۲ به شعاع 30 cm و در 93°C است و دیسک ۱ به شعاع 45 cm در $4/5^\circ\text{C}$ است. q_1 و q_2 را برای شرایط زیر بدست آورید. (الف) هر دو دیسک جسم سیاه اند. (ب) هر دو دیسک جسم سیاه باشند و سطح جانبی مخروط ناقصی که در دو دیسک با هم می سازند هم در نظر بگیرید که این سطح جانبی یک رویه بازتابنده باشد. (پ) هر دو دیسک جسم سیاه باشند و سطح جانبی مخروط ناقص نیز یک رویه سیاه در 0°C است.

۱۰- دو جسم سیاه چهار گوش $0.5 \times 1/2 \text{ m}$ موازی و با فاصله قرار دارند. چهار گوش پایینی در $T_1 = 500 \text{ K}$ و بالایی در $T_2 = 900 \text{ K}$ است. دو چهار گوش به فاصله $1/2 \text{ m}$ از هم قرار دارند. نرخ انتقال گرمای تابشی میان دو صفحه را محاسبه کنید.

۱۱- به لحاظ توزیع جهتی تشعشع خورشید که به سطح زمین برخورد می کند. این تشعشع را می توان به دو مولفه تقسیم کرد. مولفه مستقیم از پرتوهای موازی تشکیل شده که با زاویه عمودی و ثابت θ به زمین می رسند در حالی که مولفه پخش در یک سطح کروی، نسبت این دو را بدست آورید.

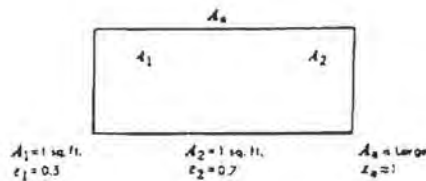
۱۲- توان پخش تکرنگ در $2/3 \mu\text{m}$ جسم سیاهی با دمای 1370°C را بیابید.

۱۳- λ_{max} و اندازه پیشینه توان پخشی تکرنگ جسم سیاهی در (الف) 1688°C و (ب) 1410°C (پ) 1371°C و (ت) 855°C را بیابید.

۱۴- دو جسم سیاه چهار گوش، هر کدام دارای اندازه های $1/8 \times 3/6 \text{ m}^2$ موازی و به فاصله $3/6 \text{ m}$ از یکدیگر قرار دارند یکی از آنها در $T_1 = 93^\circ \text{C}$ و دیگری در $T_2 = 315^\circ \text{C}$ نگهداشته می شود. (الف) نرخ انتقال گرمای تابشی q_{1-2} ، (ب) نرخ افت انرژی در جایی که چهار گوش در 93°C است هرگاه پیرامون در 0°C باشد. (ج) نرخ افت انرژی در جایی که چهار گوش در 93°C است هرگاه پیرامون همانند یک جسم سیاه در 21°C باشد را محاسبه کنید.

مسائل بخش ۲

- ۱- یک جسم خاکستری با مساحت 0.36 m^2 دارای ضریب تشعشع $\epsilon_1 = 0.35$ و درجه حرارت $T_1 = 404/5^\circ \text{ C}$ است. این جسم توسط سطح دیگری با مساحت $2/24 \text{ m}^2$ و $\epsilon_2 = 0.75$ و دمای $T_2 = 37/8^\circ \text{ C}$ دربر گرفته شده است. نرخ خالص انتقال گرمای q_{1-2} میان دو سطح را بیابید.
- ۲- دیوار فلزی فر اجاق گاز در داخل و خارج در دمای $T_1 = 232^\circ \text{ C}$ و $T_2 = 27^\circ \text{ C}$ قرار دارند. ضریب تشعشع در داخل و خارج دیوار 0.3 است. فضای میان دیوار را عایق پشم شیشه پر کرده است. نرخ انتقال گرمای تابشی در واحد سطح از دیوار (الف) بصورت تابش و هدایت و (ب) با یک سطح تابشی آلومینیومی دارای $\epsilon_{Al} = 0.09$ حاصل شده باشد بیابید. ضریب هدایت پشم شیشه $K = 0.038 \text{ W/m}^\circ \text{ C}$ است.
- ۳- نسبت بین مجموع ضریب تشعشع کروی را به ضریب تشعشع عمودی برای سطح غیر پخش کننده کامل در صورتی که تشعشع نسبت به کسینوس زاویه α از حالت قائم تغییر کند بیابید.
- ۴- معادله انتقال حرارت تابشی از سطح ۱ را در شکل زیر بدست آورید. با فرض اینکه دمای سطوح یکنواخت و ضریب شکل F_{1-2} نیز مقدار 0.1 باشد.



- ۵- دو صفحه مربعی به ابعاد $1/5 \text{ m}$ موازی با یکدیگر در فاصله 30 cm قرار دارند. صفحات A_1 و A_2 به ترتیب در دماهای 838° C و 238° C هستند و ضریب پخش آنها هم به ترتیب 0.5 و 0.8 است. محیط اطراف را سیاه در دمای 0° K در نظر بگیرید. تعیین کنید (الف) تشعشع خالص مبادله شده را (ب) مقدار گرمایی که باید به صفحه A_1 داده شود تا دمای آن ثابت بماند.
- ۶- دمای حالت پایدار دو صفحه را که در محیط خلاء بین دو سطح نامحدود که دمای آنها 283° C و $4/5^\circ \text{ C}$ است قرار گرفته بیابید. ضریب پخش همه سطوح را 0.8 در نظر بگیرید.
- ۷- رابطه ای برای انتقال حرارت تابشی خالص بین یک کره کوچک خاکستری با مساحت A_1 و ضریب پخش ϵ_1 و دمای T_1 و یک صفحه کوچک که هر دو طرف آن تشعشع می کند و سطح آن A_2 و ضریب پخش ϵ_2 و دمای آن T_2 است بیابید. دو جسم در فاصله دور از هم فضای دربرگیرنده آنها سیاه فرض می شود.
- ۸- انتقال حرارت تابشی خالص بین دو صفحه موازی $30 \times 30 \text{ cm}^2$ با فاصله 5 cm را که توسط صفحات بازتابنده بهم متصل اند بیابید. صفحه A در دمای 1116° C و صفحه B در دمای 282° C قرار دارد. (الف) ضریب تشعشع

صفحه A ، ۰/۹ و ضریب تشعشع صفحه B هم ۰/۱ است. (ب) صفحه A ضریب تشعشع ۰/۱ برای طول موجهای ۰ تا $2/5\mu\text{m}$ و ضریب تشعشع ۰/۹ در طول موجهای بالاتر از $2/5\mu\text{m}$ دارد. صفحه B ضریب تشعشع ۰/۱ برای همه طول موجها دارد. (ت) ضریب تشعشع صفحه A همانند حالت ب و ضریب تشعشع صفحه B مقدار ۰/۹ برای طول موجهای ۰ تا $4\mu\text{m}$ و برای طول موجهای بالاتر از $4\mu\text{m}$ ضریب تشعشع ۰/۱ است.

۹- نرخ انتقال حرارت تشعشعی برای تشعشع حفره ای موجود در یک صفحه در دمای 283°C بطوریکه دمای فضای اطراف 0K است را بیابید. ضریب تشعشع صفحه $0/2$ و شعاع حفره برابر $2/5\text{Cm}$ است.

۱۰- یک بسته تجهیزات الکترونیکی که سطح آن $0/09\text{m}^2$ و ارتفاع آن 15Cm است را در نظر بگیرید. تجهیزات الکترونیکی احتیاج به توان الکتریکی 1200W داشته و در کف اتاق بزرگی قرار داده شده اند. ضریب پخش دیواره های بسته $0/8$ و دمای هوای اطراف 21°C است. با پذیرش ثابت بودن دمای دیواره ها آن را به دست آورید.

۱۱- حفره مخروطی به شعاع قاعده r_0 و عمق L را در نظر بگیرید که داخل یک ماده کدر، خاکستری و دیفیوز با ضریب صنوره ϵ و دمای T تعبیه شده است. عبارتی را برای توان تشعشعی خارج شده از دهانه حفره بر حسب T ، r_0 ، ϵ ، L به دست آورید.

۱۲- یک ماهواره فضایی کروی که حول خورشید می چرخد باید درجه حرارتش در 14°C کنترل شود. ماهواره بطور مرتب حول خودش نیز دوران می کند. قرار است بخشی از سطح خارجی این ماهواره توسط سلولهای خورشیدی پوشیده شود، سلولهای خورشیدی را می توان سطوحی خاکستری با ضریب جنب $0/9$ در نظر گرفت. بقیه سطح ماهواره بوسیله پوشش مخصوصی با ضریب جنب $0/2$ برای تابشهای خورشیدی و $0/8$ برای طول موجهای بلند ($\lambda > 2/5\mu$) پوشانده می شود. بخشی از سطح ماهواره را که می توان سلولهای خورشیدی پوشاند پیدا کنید. میزان تابش خورشیدی روی سطح ماهواره بطور عمودی 1500W/m^2 می باشد. خورشید را جسمی سیاه در 5770K در نظر بگیرید.

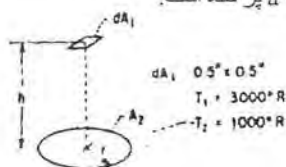
۱۳- روی یک صفحه مربعی بطول ضلع 5Cm یک منبع تشعشعی گرما با همان ابعاد قرار دارد. منبع گرما خاکستری و پخش کننده کامل بوده و توان ورودی به آن 75KW است. سطح بالایی گرمکن و سطح پائینی صفحه کاملا عایق کاری شده و مجموعه این دو در اتاق بزرگی به دمای 25°C قرار دارد. سطح پوشش خاکستری و دیفیوز با ضریب صنوره $0/3$ و حد بالایی دمای آن 400K است. از اثرات جابجایی صرف نظر کرده و کمترین فاصله بین

گرمکن و صفحه را طوری محاسبه کنید که نمای صفحه از 400K تجاوز نکند. اگر اثرات جابجایی روی سطح پوشش دار ملحوظ شوند، کمترین فاصله مزبور چقدر خواهد شد؟

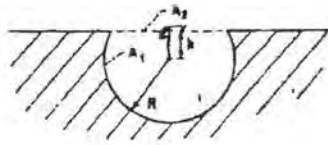
۱۴- یک میله یکنواخت و طولی به قطر 50mm و ضریب هدایت $W/m^2.K$ مفروض است. گرمایش داخلی این میله توسط تولید انرژی حجمی برابر 20KW/m^3 صورت می گیرد. میله داخل یک لوله با مقطع منور بزرگ به قطر 60mm و در نمای سطح 500°C قرار دارد. ناحیه حلقوی بین میله و لوله تخلیه شده و سطوح آنها خاکستری و پخش کنند کامل، با ضریب تشعشع 0.2 در نظر گرفته می شود. نمای مرکز و سطح میله را بدست آورید.

مسائل بخش ۳

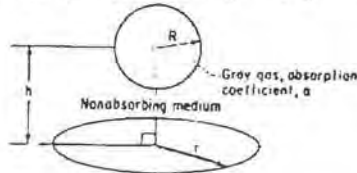
- ۱- ضریب تشعشع مؤثر گاز CO_2 را در استوانه ای دراز با قطر 60 cm بدست آورید: فشار جزئی گاز CO_2 ، 0.2 atm و فشار کل 0.3 atm است.
- ۲- گاز خروجی آگروز در نمای 1389°K و فشار جزئی گاز CO_2 را در آن 0.08 atm و بخار آب 0.16 atm و فشار کل گاز 0.2 atm می باشد. ضریب تشعشع مؤثر گاز مخلوط را در استوانه بلند آگروز با قطر 90 cm برآورد نمایید. گازهای اصلی دیگر O_2 و N_2 می باشند.
- ۳- گاز دی اکسید کربن در فشار 1 atm و 2222°K بین دو صفحه موازی به فاصله 15 cm قرار دارد. شار حرارتی ناشی از تابش گاز مورد نظر را بدست آورید.
- ۴- یک کوره مکعب مستطیل با ابعاد $1/2 \times 0.3 \times 0.3 \text{ m}^3$ که با توجه به پوشش داخلی دیواره ها می توان آنها را سطح سیاه در نظر گرفت مفروض است. کوره توسط محصولات احتراق با نمای یکنواخت 1945°K شامل ترکیبات 40% حجمی CO_2 و 30% حجمی بخار آب و بقیه N_2 گرم می شود. فشار کل 2 atm است انرژی تابیده شده به دیواره ها توسط مخلوط گاز را محاسبه کنید.
- ۵- از داخل یک لوله با قطر داخلی 10 cm بخار داغ با فشار $1/2 \text{ atm}$ و نمای یکنواخت 1111°K عبور می کند. شار حرارتی تابیده شده از بخار به سطح داخلی لوله بر واحد سطح چقدر است؟
- ۶- یک کوره با فشار 1 atm و ظرفیت 0.054 m^3 شامل 50% گاز CO_2 و 50% گاز N_2 است. نمای گاز بطور یکنواخت برابر 1667°K است. دیواره های کوره تا 1111°K خنک می شود شار حرارتی برای ثابت بودن دماها را با فرض سیاه بودن دیواره ها پیدا کنید؟
- ۷- گاز دی اکسید کربن در فشار 1 atm و نمای 1667°K بین صفحات موازی غیر خاکستری به فاصله 5 cm قرار دارد. هر دو صفحه در نمای 1111°K قرار دارند. گرمای تابیده شده از گاز به صفحات را محاسبه کنید.
- ۸- ضریب عبور متوسط $\tau_{1,2}$ از المان d_{A1} به سطح A_2 بدست آورید. فضای بین دو سطح با یک گاز خاکستری در نمای یکنواخت و ضریب جذب $a = 0.1 \text{ cm}^{-1}$ پر شده است.



- ۹- یک حفره کروی شکل شامل گاز یکنواخت دما ثابت با ضریب جذب a در شکل نشان داده شده است. رابطه ای را بدست آورید که نشان دهنده ضریب عبور متوسط $\tau_{1,2}$ باشد. (سطح حفره A_1 و المان A_2 بفاصله h از مرکز کره قرار دارد).



۱۰- يك کره شامل گاز خاکستری با نمای یکنواخت بالای یک دیسک قرار دارد. مابین کره و دیسک فضای بدون جنب است. رابطه ای برای انرژی تابیده شده به سطح دیسک پیدا کنید. ضریب جذب گاز خاکستری a فرض می شود.



۱۱- در مسأله ۱۰ رابطه ای محلی را برای شار حرارتی تابیده شده به سطح دیسک بر حسب r پیدا کنید.

۱۲- یک کوره از دو صفحه طولی موازی به فاصله $0.75m$ تشکیل شده است. یک مخلوط گاز متشکل از O_2 و N_2 و CO_2 و بخار آب با کسرهای مولی به ترتیبی 0.2 ، 0.5 ، 0.15 و 0.1 با فشار کل $2atm$ و دمای $1300K$ بین صفحه ها جریان دارد. اگر صفحه ها نظیر جسم سیاه رفتار کنند و دمای ثابت آنها $500K$ باشد، شار خالص تشعشعی به صفحه چقدر خواهد بود؟

۱۳- در یک فرآیند صنعتی محصولات احتراق با دمای $2000K$ و فشار $1atm$ داخل لوله ای طویل به قطر $0.25m$ که سطح داخلی آن سیاه است جریان دارد. گاز حاصل از احتراق از CO_2 و بخار آب که فشار جزئی هر کدام $0.1atm$ است تشکیل شده است. فرض می شود که گاز دارای خواص ترموفیزیکی هوا بوده و جریان با نرخ $m = 0.25kg/S$ کاملاً توسعه یافته است. لوله توسط جریان عمودی آب روی سطح خارجی آن خنک می شود. سرعت و دمای آب در بالا دست جریان بترتیب $0.3m/S$ و $300K$ است. دمای جداره لوله و شار را محاسبه کنید.

۱۴- یک کره به شعاع $60cm$ با دمای سطح $528^\circ C$ توسط یک مخلوط گازی در دمای $260^\circ C$ و فشار $2atm$ شامل $6/47$ درصد گاز CO_2 و 0.5 درصد بخار آب پر شده است. ضرایب عبور و جنب گاز و همچنین میزان حرارت تابشی را محاسبه کنید؟

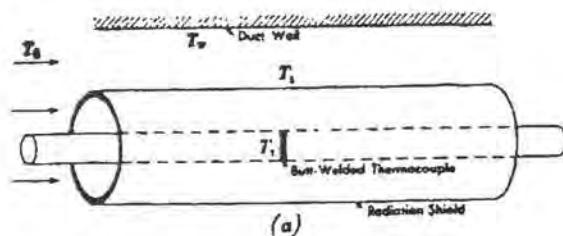
مسئله تکمیلی

۱- فاصله بین دو صفحه موازی با یک ماده خاکستری ساکن پر شده است. دمای صفحات 1000K و 500K و فاصله بین آنها 5cm و ضریب جذب ماده 0.2cm^{-1} است. اگر ضریب هدایت ماده $0.11\text{W}/(\text{m})(\text{K})$ باشد شار حرارتی انتقال یافته بین صفحات موازی چقدر خواهد بود؟

۲- یک کانال هوای داغ با قطر خارجی $22/8\text{cm}$ و دمای سطح 93°C درون اتاقی که دمای دیواره های آن 20°C است قرار گرفته است. دمای هوای اتاق 27°C و ضریب انتقال حرارت جابجایی بین هوا و کانال $6\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{C}$ است. نرخ انتقال حرارت را در حالت های زیر حساب کنید. (الف) کانال با پوشش قلع ($\epsilon = 0.1$) و (ب) کانال توسط لاک الکل رنگ زده شده است. ($\epsilon = 0.9$)

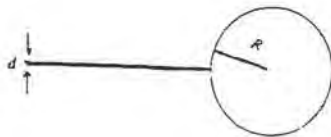
۳- یک ترموکوپل دارای ضریب تشعشع 0.8 است برای اندازه گیری دمای گاز شفاف جریان یافته درون یک کانال به کار می رود. دمای نیواره های کانال 22°C است. دمای نشان داده شده توسط ترموکوپل 504°C است. اگر ضریب انتقال حرارت جابجایی بین ترموکوپل و گاز $h_c = 142\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{C}$ باشد. دمای حقیقی گاز را محاسبه کنید.

۴- مسئله ۳ را وقتی ترموکوپل بوسیله یک حافظ استوانه ای تشعشعی بطوریکه قطر درونی آن چهار برابر قطر خارجی ترموکوپل است و ضریب انتقال حرارت جابجایی حافظ $114\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{C}$ در هر دو طرف سطح محافظ و ضریب تشعشعی آن 0.3 در دمای 538°C است را حل کنید.



۵- یک ماهواره بشکل کره ($R=1\text{m}$) که سطح آن توسط یک لایه خاکستری و دیفیوز ($\epsilon_s = 0.3$) پوشیده شده است. به یک آنتن بلند بشکل استوانه مجهز است که در شکل زیر نشان داده شده است. آنتن در شرایط $\epsilon_a = 0.1$ و $100\text{W}/\text{mK}$ و $K_a =$ و $d = 1\text{cm}$ بازتاب می کند. ماهواره و آنتن آن در معرض تابش انرژی خورشیدی به مقدار $q_{\text{sol}} = 1300\text{W}/\text{m}^2$

در جهت عمود قرار می گیرند. با فرض اینکه ماهواره نرخ گرمای 4 kW را تولید می کند و بواسطه انتقال حرارت هدایتی به سطح خارجی آن نیاز است که نمای آن ثابت باشد. معادله توزیع نما در طول آنتن را تعیین کنید.



۶- ضریب جنب طیفی یک صفحه دیفیوز بزرگ برابر $a_\lambda = 0.9$ (برای $\lambda > 1\mu\text{m}$) و $a_\lambda = 0.3$ (برای $\lambda < 1\mu\text{m}$) است. زیر این صفحه کاملاً عایق کاری شده و روی آن در معرض یکی از دو حالت زیر قرار می گیرد.

الف- صفحه در معرض شدت تشعشع ورودی از خورشید برابر $G_s = 1200\text{ W/m}^2$ و جریان هوا با نمای $T_\infty = 300\text{ K}$ قرار دارد اگر نمای صفحه $T_s = 320\text{ K}$ باشد. ضریب جابجایی جریان هوا را محاسبه کنید.

ب- یک حفاظ تشعشعی بزرگ روی صفحه قرار می گیرد و هوا بین صفحه و حفاظ جریان دارد. سطح حفاظ خاکستری و دیفیوز با ضریب جنب $\epsilon_p = 0.8$ است. اگر $T_\infty = 300\text{ K}$ و ضریب جابجایی برابر با نتیجه بنسبت آمده از قسمت (الف) باشد، دماز مورد نیاز حفاظ T_p ، برای ثابت نگهداشتن نمای صفحه در $T_s = 300\text{ K}$ چقدر است؟

۷- به منظور بررسی در مصرف انرژی بجای پنجره یک جداره، پنجره دو جداره به ابعاد $0.6 \times 0.6\text{ m}^2$ بکار گرفته می شود سطح داخلی پنجره در معرض هو و دیواره های اتاق با نمای ثابت T_1 و سطح خارجی آن در معرض هوا به نمای T_∞ و محیط (آسمان، زمین و غیره) با نمای مؤثر T_{sur} قرار دارد. ضریب جابجایی سطح خارجی و هوای محیط با h_0 نشان داده شده می شود. پنجره از شیشه ساخته شده است که در برابر تشعشع با طول موج بلند، کدر بوده و ضریب صدور آن ϵ است. ضخامت شیشه ها d_1 (ضخامت هر کدام از شیشه های پنجره دو جداره) و ضخامت فاصله هوایی بین این دو d_2 است.

الف- شرایط دائم، شب هنگام و گردایان نمایی را ناچیز در نظر گرفته، منلی برای تعیین نرخ انتقال گرما از پنجره و نماهای شیشه در دو حالت دو جداره و تک جداره بنسبت آورید $T_1 = 18^\circ\text{C}$ و $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ ، $T_{sur} = 30^\circ\text{C}$ ، $d_1 = 15\text{ mm}$ ، $\epsilon_g = 0.9$ ، $h_0 = 25\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ محاسبه کنید.

۸- یک بمب هیدروژنی را می توان به یک گوی آتشین در هنگام انفجار تشبیه کرد که نمایی در حد یک جسم سیاه 7200 K دارد.

الف- کل انرژی تشعشعی لحظه ای این گوی آتشین را پیدا کنید بر حسب watt. با فرض آنکه قطر آن 1600 متر باشد.

ب- اگر اتمسفر اطراف محل انفجار تمام تشعشعات زیر 0.3 میکرون را جذب کند، حساب کنید چه درصدی از کل تشعشع توسط اتمسفر جذب می شود.

ج- میزان تشعشع دریافتی توسط یک سطح یک متر مربعی از یک خانه که بفاصله ۴۰ کیلومتری از مرکز انفجار قرار دارد را محاسبه کنید. فرض کنید که انفجار در ارتفاع ۱۶ کیلومتری از سطح زمین انجام شود و سطح مورد بحث رو به سوی محل انفجار داشته باشد.

د- اگر انفجار فقط ۱۰ ثانیه طول بکشد، کل انرژی جنب شده توسط دیوار مورد بحث در فرض ج چقدر است. ضریب جنب دیوار را در ۰/۹ در نظر بگیرید.

ه- اگر جنس دیوار از چوب فشرده باشد که نقطه اشتعالش 370°C می باشد و دارای ۳ سانتیمتر ضخامت، آیا دیوار مشتعل خواهد شد. پاسخ خودتان را بر مبنای علم انتقال حرارت و مستدل بدهید. هر فرض منطقی را که لازم است بنمائید.

۹- سطح مقطع یک لوله طویل دایره ای توسط یک دیوار نازک به دو مجرای نیم استوانه ای تقسیم شده است. طرفهای ۱ و ۲ در نماهای ثابت $T_1 = 600\text{K}$ و $T_2 = 900\text{K}$ قرار دارند و نمای میانه گاز در مجراهای ۱ و ۲ به ترتیب 517K و $T_{g,2} = 449\text{K}$ و $T_{g,1} = 449\text{K}$ است. نماهای فوق در جهت محوری تغییر نمی کنند، ضرایب جابجایی جریان گازها برابر بوده و سطوح مجزا نظیر جسم سیاه عمل می کنند ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_w = 1$). نمای جداره مجرا، T_w را محاسبه کنید. با انجام موازنه انرژی روی گاز طرف ۱، تحقیق کنید که $T_{g,1}$ برابر با مقدار فوق است.

۱۰- ضریب هدایت حرارتی یک گاز را در دستگاهی که در زیر توضیح داده شده اندازه گیری می کنند. گاز در فضای بین دو استوانه قرار می گیرد. استوانه داخلی تا نمای ثابتی توسط گرمکن الکتریکی حرارت داده می شود بطوریکه استوانه خارجی توسط جریان آب که آن را احاطه کرده خنک شده و در نمای ثابتی می ماند. در این حالت جابجایی بخاطر اختلاف ناچیز نمای دو دیواره کمترین مقدار خواهد بود. استوانه داخلی 30 cm طول و قطر آن $1/25\text{ cm}$ و استوانه خارجی نیز قطرش $1/7\text{ cm}$ است. در حالت پایدار گرمایی که به استوانه داخلی می رسد $1/17\text{ W}$ و نمای استوانه داخلی 93°C و نمای استوانه خارجی در حدود 88°C ثابت باقی می ماند. ضریب تشعشع هر دو سطح $0/2$ است. با فرض صرف نظر کردن از جابجایی، ضریب هدایت حرارتی را در متوسط نمای 90°C پیدا کنید.

مسائل مربوط به بخشهای اول درس تشعشع

۱- یک جسم سیاه چنان تشعشع میکند که ماکزیمم تشعشع را در طول موج $1/5$ میکرون دارد. چه بخشی از تشعشع این جسم سیاه در فاصله طول موج ۱ تا ۴ میکرون است؟

$$1) \quad e_{\lambda_{\max}} \Rightarrow \lambda = 1.5 \mu m$$

$$\lambda T)_{\max} = 5216 \mu m R \Rightarrow T = 3477.33 R$$

$$\lambda = 1 \mu m \rightarrow \lambda T = 3477.33 \mu m R \Rightarrow f_{(0-1)} = .056614007$$

$$\lambda = 4 \mu m \rightarrow \lambda T = 13909.32 \mu m R \Rightarrow f_{(0-4)} = .844795544$$

$$\int e_{\lambda} d\lambda / \sigma T^4 = f_{(0-4)} - f_{(0-1)} = .7881$$

۲- برای آنکه جسمی سیاه، ۲۵ درصد تشعشع را در فاصله طول موج مری (۰/۷ - ۰/۴ میکرون) داشته باشد دمایش چقدر باید باشد؟

$$2) \quad T = ? \rightarrow f(0-.7) - f(0-.4) = .25$$

نمی توان از یک رابطه صریح ساده استفاده نمود بنابراین با سعی و خطا مقدار T بدست می آید. طبق نمودارهای موجود دماهای پایین 1500R تشعشعی در محدوده طیف مرئی ندارند. بنابراین ابتدا دمای 2000R در نظر گرفته می شود.

$$T = 2000R \Rightarrow \lambda = .7 \mu m \rightarrow \lambda T = 1400 \mu m R \Rightarrow f(0-.7) = .106 \times 10^{-4}$$

$$\lambda = .4 \mu m \rightarrow \lambda T = 800 \mu m R \Rightarrow f(0-.4) = 0$$

$$\Rightarrow f(.4-.7) = .106 \times 10^{-4}$$

پس از آن دمای بسیار بالایی در نظر گرفته می شود.

$$T = 10000R \Rightarrow \lambda = .7 \mu m \rightarrow \lambda T = 7000 \mu m R \Rightarrow f(0-.7) = .46031$$

$$\lambda = .4 \mu m \rightarrow \lambda T = 4000 \mu m R \Rightarrow f(0-.4) = .10503$$

$$\Rightarrow f(.4-.7) = .35528$$

با استفاده از دو دمای فوق و $f(.4-.7)$ های بدست آمده، مقدار دمایی که $f(.4-.7) = .25$ را

تولید می کند با میان یابی خطی محاسبه می شود $T = 7629.29R \leftarrow$

$$T = 7629.29R \Rightarrow \lambda = .7 \mu m \rightarrow \lambda T = 5340.5 \mu m R \Rightarrow f(0-.7) = .26573$$

$$\lambda = .4 \mu m \rightarrow \lambda T = 3051.71 \mu m R \Rightarrow f(0-.4) = .0281575$$

$$\Rightarrow f(.4-.7) = .2375$$

مقدار بدست آمده برابر 25. نیست بنابراین میان یابی بین دو دمای 7629.29R و 10000R انجام

$$T = 7880.9 R \leftarrow$$

می شود

$$T = 77880.9 R \Rightarrow \lambda = .7 \mu m \rightarrow \lambda T = 5516.6 \mu m R \Rightarrow f(0-.7) = .287836$$

$$\lambda = .4 \mu m \rightarrow \lambda T = 3152.35 \mu m R \Rightarrow f(0-.4) = .033906$$

$$\Rightarrow f(.4-.7) = .2539$$

باردیگر میان یابی بین $T=7880.9 R$ و $T=7629.29 R$ انجام می شود

$$T=7821.06 R \leftarrow$$

$$T = 7821.06 R \Rightarrow \lambda = .7 \mu m \rightarrow \lambda T = 5474.7 \mu m R \Rightarrow f(0-.7) = .282593$$

$$\lambda = .4 \mu m \rightarrow \lambda T = 3128.42 \mu m R \Rightarrow f(0-.4) = .032468$$

$$\Rightarrow f(.4-.7) = .2501$$

به جواب مورد نظر دست یافتیم، بنابراین دما برابر $7821.06 R$ یا $4345.03 K$ میباشد.

۳- یک شیشه سیلیکا ۹۲ درصد از تشعشع را در فاصله طول موج $2/7 - 0/35$ میکرون عبور میدهد و در طول موجهای بلندتر و کوتاه تر اساساً کدر است. تخمین بزنید که چه درصدی از تشعشعات خورشید از این شیشه عبور میکند. دمای موثر خورشید را 10400 رنکین (5780 کلوین) در نظر بگیرید. اگر گلخانه یک باغ مثل یک جسم سیاه در 100 درجه فارنهایت (38 درجه سانتیگراد) باشد، چه درصدی از تشعشع از شیشه عبور میکند؟

حل قسمت دوم مساله

$$T = 100^\circ F = 559.67 R$$

$$\Rightarrow \lambda = .35 \mu m \rightarrow \lambda T = 195.88 \Rightarrow f(0-.35) = 0$$

$$\lambda = 2.7 \mu m \rightarrow \lambda T = 1511.109 \mu m R \Rightarrow f(0-2.7) = .000034954$$

$$\Rightarrow f(.35-2.7) = .000034954$$

$$92 \times f(.35-2.7) = .0034\% = \text{درصد انرژی مورد نظر}$$

۴- یک جسم سیاه را در 1000 کلوین در هوا در نظر بگیرید.

الف - شدت تشعشع طیفی در طول موج سه میکرون و عمود بر سطح چقدر است؟

ب- شدت تشعشع طیفی در راستای 60 درجه نسبت به قائم و در طول موج سه میکرون

چقدر است؟

ج- قدرت تشعشع طیفی در راستای 60 درجه نسبت به قائم و در طول موج سه میکرون

چقدر است؟

د- در چه طول موجی ماکزیمم شدت تشعشع طیفی صادر میشود و مقدار آن چقدر است؟

ه - قدرت تشعشع کلی نیمگروی این جسم چقدر است؟

Black Body , T=1000 k

(۴)

$$a) \quad \lambda = 3 \mu m , \beta = 0^\circ \rightarrow I'_{\lambda b} = ?$$

$$e'_{\lambda b} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\pi(\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1)} = \frac{c_1 \times 3^{-5}}{\pi(\exp(\frac{c_2}{3 \times 1000}) - 1)} = 4086.36 \frac{W}{m^2(\mu m)}$$

$$c_2 = 1.4387 \times 10^4 (\mu m) k , c_1 = 3.743 \times 10^8 \frac{W(\mu m)^4}{m^2}$$

$$I'_{\lambda b} = e'_{\lambda b} / \cos \beta = e'_{\lambda b} = 4086.36 \frac{W}{m^2(\mu m)} = .408 \frac{W}{cm^2(\mu m)}$$

$$b) \quad \lambda = 3 \mu m , \beta = 60^\circ \rightarrow I'_{\lambda b} = ?$$

$$(a) \rightarrow I'_{\lambda b} = .408 \frac{W}{cm^2(\mu m)} \quad \leftarrow \text{در جسم سیاه مقدار } I'_{\lambda b} \text{ در تمام جهتها یکی است}$$

$$c) \quad \lambda = 3 \mu m , \beta = 60^\circ \rightarrow I'_{\lambda b} = ?$$

$$e'_{\lambda b} = I'_{\lambda b} \cos \beta \Rightarrow e'_{\lambda b} = (b) \Rightarrow .408 \cos 60 = .204 \frac{W}{cm^2(\mu m)}$$

$$d) \quad (\lambda T)_{\max} = 2898 (\mu m) k , T = 1000 k \Rightarrow \lambda = 2.898 \mu m$$

$$@ \beta = 90^\circ \rightarrow I'_{\lambda b} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\pi(\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1)} = \frac{c_1 \times 2.898^{-5}}{\pi(\exp(\frac{c_2}{2898}) - 1)} = 4098 \frac{W}{m^2(\mu m)} = .409 \frac{W}{cm^2(\mu m)}$$

از آنجا که در جسم سیاه مقدار $I'_{\lambda b}$ در تمام جهتها یکسان است، این مقدار ثابت است و به β بستگی ندارد.

$$e) \quad e_o = \sigma T^4 = \sigma \times 1000^4 = 5.6697 \times 10^4 \frac{W}{m^2} = 5.6697 \frac{W}{cm^2}$$

$$\sigma = 5.6697 \times 10^{-8} Wk^{-4} / m^2$$

(۵) جسم سیاهی را در ۲۰۰۰ رنکین (۱۱۱۱ کلوین) در نظر بگیرید که در خلاء تشعشع

میکند.

الف - نسبت شدت تشعشع طیفی در طول موج ۱ میکرون به شدت تشعشع طیفی در طول موج ۵

میکرون چقدر است؟

ب - چه بخشی از تشعشع در فاصله طول موج ۱ تا ۵ میکرون ساطع میشود؟

ج - در چه طول موجی ماکزیم تشعشع برای این جسم اتفاق می افتد؟

د - مقدار انرژی ساطع شده از جسم در فاصله طول موج ۱ تا ۵ میکرون چقدر است ؟

$$T = 2000 R$$

$$I''_{\lambda b} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\pi (\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1)} \Rightarrow \frac{(I''_{\lambda b})_1}{(I''_{\lambda b})_2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-5} \left(\frac{\exp \frac{c_2}{\lambda_2 \times 2000} - 1}{\exp \frac{c_2}{\lambda_1 \times 2000} - 1} \right)$$

$$c_2 = 2.5897 \times 10^4 \mu m R \Rightarrow \frac{(I''_{\lambda b})_1}{(I''_{\lambda b})_2} = .09166$$

$$(b) \quad \lambda = 1 \mu m \Rightarrow \lambda T = 2000 \mu m R \rightarrow f(0-1) = .0009$$

$$\lambda = 5 \mu m \Rightarrow \lambda T = 10000 \mu m R \rightarrow f(0-5) = .6966$$

$$F_{(1-5)} = f_{(0-5)} - f_{(0-1)} = .6957$$

$$c) \quad (\lambda T)_{\max} = 5215.6 \mu m.R$$

$$T = 2000 R \Rightarrow \lambda = \frac{5215.6}{2000} = 2.6078 \mu m$$

$$d) \quad \int e_{\lambda b} d\lambda = f(1-5) \sigma T^4 = .6957 \times \sigma \times 2000^4 = 19079 \text{ BTU/hr.ft}^2$$

$$\sigma = .1714 \times 10^{-8} \text{ BTU/hr.ft}^2.R^4$$

مسئله ۶ - دمای موثر سطح خورشید ۱۰۰۰۰ رنکین (۵۷۸۰ کلوین) است. چه درصدی

از تشعشع خورشید در فاصله طول موج مرئی (۰/۷ - ۰/۴ میکرون) ساطع می شود ؟ چه

درصدی در محدوده ماوراء بنفش ساطع میشود ؟ در چه طول موج و فرکانسی ماکزیمم تشعشع

بر واحد فاصله طول موج انجام میشود؟ ماکزیم قدرت تشعشع طیفی چقدر است؟

$$T = 10000 R$$

$$\lambda = .4 \rightarrow \lambda T = 4160(\mu m)R \rightarrow f(0-.4) = .12238$$

$$\lambda = .7 \rightarrow \lambda T = 7280(\mu m)R \rightarrow f(0-.7) = .48882$$

$$F(.4-.7) = 48882 - .12238 = .36644 \rightarrow 36.64\%$$

$$\text{ultraviolet} : \lambda = 10^{-2} \rightarrow .4 \mu m$$

$$\lambda = 10^{-2} \mu m \rightarrow \lambda T = 104 \mu m R \rightarrow F(0-10^{-2}) = 0$$

$$\lambda = .4 \mu m \rightarrow \lambda T = 4160 \mu m R \rightarrow F(0-.4) = .12238$$

$$F(.10^{-2}-.4) = .12238 - 0 = .12238 \rightarrow 12.24\%$$

$$(\lambda T)_{\max} = 5215.6 \mu m \cdot R, T = 10400 R \Rightarrow \lambda = .5015 \mu m$$

$$v = \frac{c}{\lambda} = 2.998 \times 10^8 / (.5015 \times 10^{-6}) = 5.948 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$e_{\lambda b} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} = \frac{c_1 \times .5015^{-5}}{\exp\left(\frac{c_2}{10400 \times .5015}\right) - 1} = 2.628 \times 10^7 \text{ BTU} / \mu m \text{ hrft}^2$$

$$c_1 = 10187 \times 10^8 \text{ BTU} \cdot (\mu m)^4 / \text{hrft}^2, c_2 = 2.5897 \times 10^4 (\mu m)R$$

(۷) - نشان دهید که شدت تشعشع طیفی در یک طول موج ثابت نسبت به دما افزایش می یابد.

$$i'_{\lambda b} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\pi \left(\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right)} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\pi \left(\exp\left(\frac{c_2}{\lambda}\right) + \exp\left(\frac{1}{T}\right) - 1 \right)}$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$i'_{\lambda b} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\pi \left(\exp\left(\frac{c_2}{\lambda}\right) + \frac{1}{T} + \frac{1}{2T^2} + \frac{1}{3T^3} + \dots \right)}$$

با ثابت بودن مقدار λ ، مقدار $i'_{\lambda b}$ تنها به T بستگی دارد. با افزایش مقدار T ،

مقادیر $\frac{1}{T}$ ، $\frac{1}{2T^2}$ ، $\frac{1}{3T^3}$ و بقیه عباراتی که دارای T می باشند و در مخرج معادله هستند (و همه آنها

به صورت $\frac{1}{nT^n}$ می باشند)، کاهش می یابند. چون این مقادیر مثبت هستند با کاهش آنها مخرج

معادله $i'_{\lambda b}$ کاهش می یابد و در نتیجه، مقدار $i'_{\lambda b}$ افزایش می یابد. بنابراین با افزایش T ، در صورت ثابت بودن λ ، مقدار $i'_{\lambda b}$ افزایش می یابد.

(۸) تشعشع از روزه موجود در دیوار یک کوره سیاه 1400 کلون خارج می شود. چه درصدی از این تشعشع به دیسک بالای این روزه برخورد می کند؟ چه بخشی از حفره موجود در دیسک (مطابق شکل) عبور میکند؟

$$\frac{dQ_{\text{حلقه}}}{dQ_{\text{نیمکره}}} = \frac{\int_{\text{حلقه}} I'_b d\omega \cos\beta dA_1}{\int_{\text{نیمکره}} I'_b d\omega \cos\beta dA_1} = \frac{I'_b dA_1 \int_0^{2\pi} \int_{r^{-1}(0.5/2)}^{r^{-1}(1.5/2)} \sin\theta \cos\theta dv d\varphi}{I'_b dA_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta dv d\varphi}$$

$$d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi \uparrow$$

$$\frac{dQ_{\text{حلقه}}}{dQ_{\text{نیمکره}}} = \frac{[\varphi]_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_{r^{-1}(1/4)}^{r^{-1}(3/4)}}{[\varphi]_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2}} = \frac{0.88235 - 0.28}{1+1} = 0.301$$

$$\frac{dQ_{\text{حفره}}}{dQ_{\text{نیمکره}}} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r^{-1}(0.5/2)} \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi} = \frac{[\varphi]_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{r^{-1}(1/4)}}{[\varphi]_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2}} = \frac{1 - 0.88235}{2} = 0.0588$$

