جداشدنی :

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$1)\ yx^2\,dy - 2x^2\,dy = y^3\,dx \qquad 2)\ y' = \frac{4xy}{x^2+1}$$

$$3)\ t(y-1)\,dt + y(t+1)\,dy = 0 \qquad 4)\ x^2yy' - e^y = 0$$

جواب :

$$1)\ yx^2\,dy - 2x^2\,dy = y^3\,dx \Rightarrow x^2(y-2)\,dy = y^3\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{(y-2)\,dy}{y^3} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int \frac{(y-2)}{y^3}\,dy =$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow y^2(cx-1) = x(\overset{1-y}{\cancel{y-1}})$$

$$2)\ y' = \frac{4xy}{x^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{4x\,dx}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{4x}{x^2+1}\,dx$$

$$\ln y = 2\ln(x^2+1) + \ln c \Rightarrow y = c(x^2+1)^2$$

$$3)\ t(y-1)\,dt + y(t+1)\,dy = 0 \Rightarrow \frac{t\,dt}{t+1} + \frac{y\,dy}{y-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{t+1-1}{t+1}\,dt + \frac{y-1+1}{y-1}\,dy = 0 \Rightarrow t - \ln(t+1) + y$$

$$+\ln(y-1) + \ln c = 0 \Rightarrow t + y = \ln\frac{t+1}{c(y-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{t+1}{y-1} = ce^{t+y}$$

$$4)\ x^2yy' - e^y = 0 \Rightarrow ye^{-y}\,dy = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int ye^{-y}\,dy = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow -(y+1)e^{-y} = -\frac{1}{x} + c \Rightarrow (y+1)e^{-y} = \frac{1}{x} + c$$

تغییر متغیر :

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

۱۷) $xy^{2}(xy'+y)=4,\quad xy=t$

۱۸) $(\ln x+y^{3})\,dx-3xy^{2}\,dy=0,\quad \dfrac{y^{3}}{x}=t$

۱۹) $(xy+2xy\ln^{2}y+y\ln y)\,dx+(2x^{2}\ln y+x)\,dy=0,\quad x\ln y=t$

۲۰) $y'=2x+y$ ۲۱) $y'=\cos(x-y)$ ۲۲) $y'=-2(2x+3y)^{2}$

جواب :

۱۷) $xy^{2}(xy'+y)=4,\quad xy=t,\quad y+xy'=\dfrac{dt}{dx}$

$$\Rightarrow t\frac{t}{x}\frac{dt}{dx}=4\Rightarrow t^{2}\,dt=4x\,dx$$

$$\Rightarrow t^{3}=6x^{2}+c\Rightarrow x^{3}y^{3}=6x^{2}+c$$

۱۸) $\dfrac{y^{3}}{x}=t,\qquad \dfrac{3y^{2}x\,dy-y^{3}\,dx}{x^{2}}=dt$

$$(\ln x+y^{3})\,dx-3xy^{2}\,dy=0\Rightarrow \ln x\,dx-x^{2}\,dt=0\Rightarrow \frac{\ln x}{x^{2}}\,dx=dt$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}=t+c=\frac{y^{3}}{x}+c\Rightarrow y^{3}=cx-1-\ln x$$

۱۹) $x\ln y=t\Rightarrow \ln y\,dx+\dfrac{x}{y}\,dy=dt\Rightarrow y\ln y\,dx+x\,dy=y\,dt$

$$(xy+2xy\ln^{2}y+y\ln y)\,dx+(2x^{2}\ln y+x)\,dy=0$$

$$\Rightarrow xy\,dx+(2x\ln y+1)(y\ln y\,dx+x\,dy)=0$$

$$\Rightarrow x\,dx+(2t+1)\,dt=0\Rightarrow x^{2}+2t^{2}+2t=c$$

$$\Rightarrow x^{2}+2x^{2}\ln^{2}y+2x\ln y=c\Rightarrow 2x^{2}+(2x\ln y+1)^{2}=c$$

مرتبه اول همگن :

معادلات زیر را حل کنید

$$۱)\ y' = \frac{۲x^۲ + y^۲}{-۲xy + ۳y^۲} \qquad ۲)\ x\,dy - y\,dx = \sqrt{xy}\,dx$$

$$۳)\ \left(y^۲ - ۲xy\right)\,dx + \left(۲xy - x^۲\right)\,dy = ۰ \qquad ۴)\ xy' - y = \sqrt{x^۲ - y^۲}$$

$$۵)\ \left(xe^{y/x} + y\right)\,dx - x\,dy = ۰ \qquad ۶)\ y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

جواب:

ابتدا همگن بودن معادله را بررسی کرده و سپس با استفاده از تغییر متغیر زیر معادله را به نوع تفکیک پذیر تبدیل می کنیم.

$$y = vx, \quad dy = v\,dx + x\,dv, \quad \text{یا} \quad y' = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$۱)\ (۲x^۲ + y^۲)\,dx = (-۲xy + ۳y^۲)\,dy \Rightarrow (۲x^۲ + v^۲x^۲)\,dx =$$

$$(-۲xvx + ۳v^۲x^۲)(v\,dx + x\,dv) \Rightarrow$$

$$(۲ + v^۲)\,dx = (-۲v + ۳v^۲)(v\,dx + x\,dv)$$

$$\Rightarrow (۲ + ۳v^۲ - ۳v^۳)\,dx = (-۲v + ۳v^۲)x\,dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-۲v + ۳v^۲}{۲ + ۳v^۲ - ۳v^۳}\,dv$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{-۲v + ۳v^۲}{۲ + ۳v^۲ - ۳v^۳}\,dv \Rightarrow \ln x = -\frac{۱}{۳}\ln(۳v^۳ - ۳v^۲ - ۲) + \ln c$$

$$\Rightarrow x^{-۳} = c^{-۱}(۳v^۳ - ۳v^۲ - ۲) = c^{-۱}\left(۳\frac{y^۳}{x^۳} - ۳\frac{y^۲}{x^۲} - ۲\right)$$

$$\Rightarrow c = ۳y^۳ - ۳y^۲x - ۲x^۳ \Rightarrow c = -y^۳ - xy^۲ + \frac{۲}{۳}x^۳$$

$$۲)\ x\,dy - y\,dx = \sqrt{xy}\,dx \Rightarrow x(v\,dx + x\,dv) = (vx + \sqrt{vx^۲})\,dx$$

$$\Rightarrow (v\,dx + x\,dv) = (v + \sqrt{v})\,dx \Rightarrow x\,dv = \sqrt{v}\,dx \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{v} = \ln x + c \Rightarrow ۲\sqrt{y/x} = \ln x + c$$

$$۳)\ \left(y^۲ - ۲xy\right)\,dx + \left(۲xy - x^۲\right)\,dy = ۰$$

$$\Rightarrow \left(v^۲x^۲ - ۲x^۲v\right)dx + \left(۲x^۲v - x^۲\right)(v\,dx + x\,dv) = ۰$$

$$\Rightarrow \left(v^۲ - ۲v\right)\,dx + (۲v - ۱)(v\,dx + x\,dv) = ۰ \Rightarrow$$

$$\left(۳v^۲ - ۳v\right)\,dx + (۲v - ۱)x\,dv = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{2v-1}{3v^2-3v}\,dv + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\ln(v^2-v) = -\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow v^2 - v = cx^{-3} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} = cx^{-3}$$

$$\Rightarrow xy^2 - x^2y = c \Rightarrow xy(y-x) = c$$

4) $xy' - y = \sqrt{x^2-y^2} \Rightarrow x\left(v + x\dfrac{dv}{dx}\right) - vx = \sqrt{x^2 - x^2v^2}$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1-v^2} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} v = \ln x + c \Rightarrow y = x\sin(\ln x + c)$$

5) $\left(xe^{y/x} + y\right)\,dx - x\,dy = 0 \Rightarrow$

$$\left(xe^{vx/x} + vx\right)\,dx - x(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$\Rightarrow e^v\,dx - x\,dv = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = e^{-v}\,dv \Rightarrow$$

$$\ln x + c = -e^{-v} \Rightarrow e^{-y/x} + \ln x + c = 0$$

6) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} \Rightarrow v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{vx}{x} + \dfrac{x}{vx} \Rightarrow v + x\dfrac{dv}{dx} = v + \dfrac{1}{v}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = v\,dv \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}v^2 + c \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}(y/x)^2 + c$$

$$\Rightarrow x^2\ln x = \frac{1}{2}y^2 + cx^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2(\ln x + c)$$

معادلات همگن با تغییر متغیر :

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیر زیر حل کنید.

$$y = t^{\alpha}, \quad dy = \alpha t^{\alpha-1}\,dt$$

۲۲) $y^{3}\,dx + 2(x^{2} - xy^{2})\,dy = 0$

۲۳) $y\left(1 + \sqrt{x^{2}y^{4} + 1}\right)\,dx + 2x\,dy = 0$

جواب :

برای همگن بودن معادله باید $2\alpha + 1 = 2$ و همچنین $3\alpha = 2 + \alpha - 1$ باشد.

$$\begin{cases} 1 + 2\alpha = 2 \\ 1 + \alpha = 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$t^{3/2}dx + (x^{2} - xt)t^{-1/2}dt = 0 \Rightarrow t^{2}dx + (x^{2} - xt)dt = 0$$

$$t = vx,\ vx^{2}dx + (x^{2} - vx^{2})xdv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 - v}{v}dv = 0 \Rightarrow \ln x + \ln v + \ln c = v \Rightarrow y^{2} = x \ln cy^{2}$$

۲۳) $y\left(1 + \sqrt{x^{2}y^{4} + 1}\right)\,dx + 2x\,dy = 0$

$$\Rightarrow t^{\alpha}\left(1 + \sqrt{x^{2}t^{4\alpha} + 1}\right)\,dx + 2\alpha t^{\alpha-1}x\,dt = 0$$

شرط همگن شدن این معادله آنست که $2 + 4\alpha = 0$ باشد بنابراین با تغییر متغیر $y = t^{-1/2}$ معادله تبدیل به نوع همگن می شود.

$$t^{-1/2}\left(1 + \sqrt{x^{2}t^{-2} + 1}\right)\,dx - xt^{-3/2} = 0$$

طرفین معادله را در $t^{3/2}$ ضرب و از تغییر متغیر $t = vx$ استفاده می کنیم.

$$v(1 + \sqrt{v^{-2} + 1})\,dx = v\,dx + x\,dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1 + v^{2}}}$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln c = \ln(v + \sqrt{1 + v^{2}}) \Rightarrow \sqrt{1 + x^{2}y^{2}} = cx^{2}y^{2} - 1$$

معادلات کامل :

نشان دهید معادلات دیفرانسیل زیر کامل هستند و جواب عمومی را به‌دست آورید.

$$1)\ (x^2+y)\,dx+(x-2y)\,dy$$

$$2)\ (6x^5y^3+4x^3y^5)\,dx+(3x^6y^2+5x^4y^4)\,dy=0$$

$$3)\ x(1-y^2)\,dx+y(8-x^2)\,dy=0$$

$$4)\ 2x\sin 3y\,dy+3x^2\cos 3y\,dy=0$$

جواب :

ابتدا باید کامل بودن معادله را بررسی کرده و سپس آنرا حل کرد. چون این معادلات کامل هستند ما فقط به حل آنها می پردازیم.

$$1)\ P=x^2+y,\quad Q=x-2y \Rightarrow u(x,y)=u=\int(x^2+y)\,dx+f(y)$$

$$\Rightarrow u=\frac{x^3}{3}+xy+f(y)\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{df}{dy}=x-2y$$

$$\Rightarrow f(y)=-\int 2y\,dy=-y^2\Rightarrow u=\frac{x^3}{3}+xy-y^2=c$$

$$2)\ P=6x^5y^3+4x^3y^5,\quad Q=3x^6y^2+5x^4y^4$$

$$u=\int P\,dx+f(y)=x^6y^3+x^4y^5+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=3x^6y^2+5x^4y^4+\frac{df}{dy}=Q\Rightarrow \frac{df}{dy}=0$$

$$\Rightarrow f(y)=c_1\Rightarrow u=x^6y^3+x^4y^5=c$$

$$3)\ P=x(1-y^2),\quad Q=y(8-x^2)$$

$$u=\int P\,dx+f(y)=\frac{1}{2}x^2(1-y^2)+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-yx^2+f'(y)=y(8-x^2)$$

$$\Rightarrow f(y)=4y^2\Rightarrow u=x^2(1-y^2)+8y^2=c$$

$$4)\ P=2x\sin 3y,\quad Q=3x^2\cos 3y$$

$$u=\int P\,dx+f(y)=x^2\sin 3y+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2\cos 3y+f'(y)=3x^2\cos 3y$$

$$\Rightarrow f'(y)=0,\quad f(y)=c_1\Rightarrow u=x^2\sin 3y=c$$

معادلات کامل با اعمال شرایط اولیه :

۱۵) $\cos q\, dr - (r \sin q + 1)\, dq = 0, \quad r = 2,$ وقتی $q = 0$

۱۶) $(2 - xy^2)\, dx - x^2 y\, dy = 0, \quad x = 2,$ وقتی $y = 1$

جواب:

۱۵) $P = \cos q, \quad Q = -(r \sin q + 1)$

$$u = \int P\, dr + f(q) = r \cos q + f(q)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial q} = -r \sin q + f'(q) = -r \sin q - 1$$

$$\Rightarrow f'(q) = -1, \quad f(q) = -q \Rightarrow u = r \cos q - q = c$$

$$r = 2, \quad q = 0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow u = r \cos q - q = 2$$

۱۶) $P = 2 - xy^2, \quad Q = -x^2 y$

$$u = \int P\, dx + f(y) = 2x - \frac{1}{2} x^2 y^2 + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 y + f'(y) = -x^2 y$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0, \quad f(y) = c_1 \Rightarrow u = 4x - x^2 y^2 = c$$

$$x = 2, \quad y = 1 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow u = 4x - x^2 y^2 = 4$$

فاکتور انتگرال :

با پیدا کردن فاکتور انتگرال، معادله های زیر را حل کنید.

۱) $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$

۲) $(x^4y^2 - y)\,dx + (x^2y^4 - x)\,dy = 0$

۳) $y(2x + y^3)\,dx - x(2x - y^3)\,dy = 0$

۴) $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$

۵) $e^x(x+1)\,dx + (ye^y - xe^x)\,dy = 0$

جواب:

۱) $P = x\sin y + y\cos y, \quad Q = x\cos y - y\sin y$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{x\cos y + \cos y - y\sin y - \cos y}{x\cos y - y\sin y} = 1$$

$$\Rightarrow F = e^{\int dx} = e^x$$

طرفین معادله را در e^x ضرب کرده و معادله کامل بدست آمده را حل می کنیم.

$$P^* = e^x(x\sin y + y\cos y), \quad Q^* = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

$$u = \int P^*\,dx + f(y) = e^x(x-1)\sin y + ye^x\cos y + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x-1)\cos y + e^x\cos y -$$

$$-ye^x\sin y + f'(y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0, \quad f(y) = c_1 \Rightarrow u = e^x(x-1)\sin y + ye^x\cos y = c$$

۲) $x^\alpha y^\beta(x^4y^2 - y)\,dx + x^\alpha y^\beta(x^2y^4 - x)\,dy = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = (2+\beta)x^{4+\alpha}y^{1+\beta} - (1+\beta)x^\alpha y^\beta \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = (2+\alpha)y^{4+\beta}x^{1+\alpha} - (1+\alpha)y^\beta x^\alpha \end{cases} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \alpha = \beta = -2$$

$x^{-2}y^{-2}$ فاکتور انتگرال معادله می باشد.

$$P^* = x^2 - x^{-2}y^{-1} \quad Q^* = y^2 - x^{-1}y^{-2}$$

$$u = \int P^*\,dx + f(y) = \frac{1}{3}x^3 + x^{-1}y^{-1} + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x^{-1}y^{-2} + f'(y) = y^2 - x^{-1}y^{-2}$$

$$\Rightarrow f'(y) = y^2, \quad f(y) = \frac{1}{3}y^3 \Rightarrow u = x^3y + xy^3 + 3 + cxy = 0$$

۳) $P = y(2x + y^3), \quad Q = -x(2x - y^3)$

خطی مرتبه 1 :

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

۱) $y' + ۲y = e^{-x}$ ۲) $xy' + ۲y = ۸x^{۲}$

۳) $y' - y\cot x = \csc x$ ۴) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x - y\sec x$

۵) $y' - ۳y\tan x = ۲$ ۶) $(x^{۲} + ۲x - ۱)y' - (x + ۱)y = x - ۱$

جواب:

۱) $f(x) = ۲, \quad q(x) = e^{x}, \quad g(x) = \int f(x)\,dx = ۲x$

$$\Rightarrow y = e^{-۲x}\left(\int e^{x}\,dx + c\right) = e^{-x} + ce^{-۲x}$$

۲) $f(x) = \dfrac{۲}{x}, \quad q(x) = ۸x, \quad g(x) = \int f(x)\,dx = ۲\ln x$

$$\Rightarrow y = e^{-۲\ln x}\left(\int ۸xe^{۲\ln x}\,dx + c\right) = ۲x^{۲} + cx^{-۲}$$

۳) $f(x) = -\cot x, \quad q(x) = \csc x, \quad g(x) = \int f(x)\,dx = -\ln\sin x$

$$\Rightarrow y = \sin x\left(\int \csc^{۲} x\,dx + c\right) = -\cos x + c\sin x$$

۴) $f(x) = \sec x, q(x) = \cos x, g(x) = \int f(x)\,dx = \ln(\sec x + \tan x)$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{\ln\sec x + \tan x}\left(\int(\sec x + \tan x)\cos x\,dx + c\right) = \frac{x - \cos x + c}{\sec x + \tan x}$$

۵) $f(x) = -۳\tan x, q(x) = ۲, g(x) = \int f(x)\,dx = ۳\ln\cos x$

$$\Rightarrow y = \cos^{-۳} x\left(\int ۲\cos^{۳} x\,dx + c\right) = \frac{۲}{۳}\frac{(۳ - \sin^{۲} x)\sin x}{\cos^{۳} x} + c\sec^{۳} x$$

۶) $f(x) = -\dfrac{x + ۱}{x^{۲} + ۲x - ۱}, q(x) = \dfrac{x - ۱}{x^{۲} + ۲x - ۱}, g(x) = \int f(x)\,dx = -\dfrac{۱}{۲}\ln(x^{۲} + ۲x - ۱) \Rightarrow y = \sqrt{x^{۲} + ۲x - ۱}$

$$\left(\int \frac{x - ۱}{(x^{۲} + ۲x - ۱)^{۳/۲}}\,dx + c\right) = c\sqrt{x^{۲} + ۲x - ۱} + x$$

برنولی:

معادلات دیفرانسیل برنولی زیر را حل کنید.

۲۴) $xy' + xy^۲ = y$ ۲۵) $xy' - y(۲y \ln x - ۱) = ۰$

۲۶) $۲xyy' + x = y^۲$ ۲۷) $y' + ۴xy = ۲xe^{-x^۲}\sqrt{y}$

جواب:

۲۴) $y' - \frac{۱}{x}y = -y^۲ \quad \Rightarrow y^{-۲}y' - \frac{۱}{x}y^{-۱} = -۱$

$$u = y^{-۱}, \quad u' = -y^{-۲}y' \Rightarrow u' + \frac{۱}{x}u = ۱$$

$$f(x) = \frac{۱}{x}, \quad q(x) = ۱, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = \ln x$$

$$\Rightarrow u = e^{-\ln x}\left(\int x\, dx + c\right) = \frac{x}{۲} + c\frac{۱}{x}$$

ادامه صفحه بعد :

$$\Rightarrow y = \frac{2x}{x^2 + c}$$

۲۵) $y' + \frac{1}{x}y = 2y^2 \ln x \Rightarrow y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = 2\ln x$

$$u = y^{-1}, \quad u' = -y^{-2}y' \quad \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = \frac{-2\ln x}{x}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = \frac{-2\ln x}{x}, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = -\ln x$$

$$\Rightarrow u = e^{\ln x}\left(\int \frac{-2\ln x}{x^2}\, dx + c\right) = -2\ln x - 2 + cx$$

$$\Rightarrow 1 + 2y(1 + \ln x) = cxy$$

۲۶) $y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{1}{2}y^{-1} \Rightarrow 2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -1$

$$u = y^2, \quad u' = 2yy' \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = -1$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = -1, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = -\ln x$$

$$\Rightarrow u = e^{\ln x}\left(-\int \frac{1}{x}\, dx + c\right) = -x\ln x + cx$$

$$\Rightarrow y^2 = x \ln \frac{c}{x}$$

۲۷) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y} \Rightarrow y'y^{-1/2} + 4xy^{1/2} = 2xe^{-x^2}$

$$u = y^{1/2}, \quad u' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y' \Rightarrow u' + 2xu = xe^{-x^2}$$

$$f(x) = 2x, \quad q(x) = xe^{-x^2}, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = x^2$$

$$\Rightarrow u = e^{-x^2}\left(\int x\, dx + c\right) = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$\Rightarrow y = e^{-2x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2$$

درجه 2 همگن :

9) $y'' + y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

10) $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

11) $y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{1}{\pi}$

12) $4y'' + 20y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

جواب:

9) $t^2 + t + 3 = 0, \quad t = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{11}i),$

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1, \quad y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{11}}{2}c_2,$$

$$y = 2\frac{\sqrt{11}}{11}e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x$$

10) $t^2 + 5t + 6 = 0, \quad t = -2, \quad t = -3, \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2, \quad y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = -2c_1 - 3c_2$$

$c_1 = 5, \quad c_2 = -4, \quad y = 5e^{-2x} - 4e^{-3x}$

11) $t^2 + 2\pi t + \pi^2 = 0, \quad t = -\pi, -\pi, \quad y = (c_1 + c_2 x)e^{-\pi x}$

$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = (c_1 + c_2)e^{-\pi}, \quad y'(1) = \frac{1}{\pi}$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi} = e^{-\pi}(-\pi(c_1 + c_2) + c_2)$

$c_1 = \frac{e^{\pi}}{\pi}(\pi^2 + 1), \quad c_2 =, \frac{e^{\pi}}{\pi}(\pi - \pi^2 - 1)$

$y = \left((\pi^2 + 1)x + \pi - \pi^2 - 1\right) \frac{e^{\pi(1-x)}}{\pi}$

12) $4t^2 + 20t + 25 = 0, \quad t = -\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \ y = (c_1 + c_2 x)e^{-5x/2}$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1, \quad y'(0) = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{9}{2},$

$y = \left(1 + \frac{9}{2}x\right) e^{-5x/2}$

درجه 2 غیرهمگن (ضرائب نامعین)

فقط فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بنویسید.

2) $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$ 3) $y'' + 16y = \sin(4x + \beta)$

4) $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$ 5) $y'' - 4y' = xe^{4x}$

6) $y'' - 7y' = (x - 1)^2$

7) $y'' + 2y' + 5y = e^x\left((x + 1)\cos 2x + 3\sin 2x\right)$

جواب :

۲) ۴ دو بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = x^{۲} e^{۴x}(Ax + B)$$

۳) $۴i$ یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = x(A\cos ۴x + B\sin ۴x)$$

$$۴)\ y'' - ۴y' = ۱ + \cos ۸x$$

صفر یک بار ریشه معادله مفسر و $۸i$ ریشه معادله مفسر نمیباشد، بنابراین

$$y_p = xA + B\cos ۸x + C\sin ۸x$$

۵) ۴ یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = xe^{۴x}(Ax + B)$$

۶) صفر یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = x(Ax^{۲} + Bx + c)$$

۷) $-۱ + ۲i$ ریشه معادله مفسر نمیباشد، بنابراین

$$y_p = e^{x}\left((Ax + B)\cos ۲x + (Cx + D)\sin ۲x\right)$$

اپراتور معکوس :

با استفاده از روش اپراتورهای معکوس، جواب خصوصی معادلات زیر را تعیین کنید.

۱) $y'' + ۴y' + ۴y = ۸e^{-۲x}$ ۲) $y'' + ۴y' + ۳y = ۹e^{-۳x}$

۳) $y'' + ۳y' = ۳xe^{-۳x}$ ۴) $y'' + ۲y' + ۲y = ۱ + x$

۵) $y'' + y' + y = (x + x^۲)e^x$ ۶) $y'' - y = \cosh x$

جواب:

۱) $y_p = \dfrac{۱}{(D+۲)^۲}۸e^{-۲x} = \dfrac{۸x^۲e^{-۲x}}{۲!} = ۴x^۲e^{-۲x}$

۲) $y_p = \dfrac{۱}{(D+۳)(D+۱)}۹e^{-۳x} = \dfrac{۹xe^{-۳x}}{۱! \times (-۲)} = -\dfrac{۹}{۲}xe^{-۳x}$

۳) $y_p = ۳\dfrac{۱}{D(D+۳)}xe^{-۳x} =$

$$۳\left(x\frac{۱}{D(D+۳)}e^{-۳x} - \frac{۲D+۳}{D^۲(D+۳)^۲}e^{-۳x}\right) =$$

$$۳\left[x\frac{xe^{-۳x}}{-۳} - \frac{۱}{D(D+۳)^۲}e^{-۳x} - \frac{۱}{D^۲(D+۳)}e^{-۳x}\right] =$$

$$-x^۲e^{-۳x} + x^۲e^{-۳x} - \frac{xe^{-۳x}}{۳} = -\frac{۱}{۶}(۳x^۲ + ۲x)e^{-۳x}$$

۴) $y_p = \dfrac{۱}{D^۲ + ۲D + ۲}(۱ + x) = \left(\dfrac{۱}{۲} - \dfrac{D}{۲}\right)(۱ + x) =$

$$\frac{۱}{۲}(۱ + x) - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}x$$

۵) $y_p = \dfrac{۱}{D^۲ + D + ۱}(x + x^۲)e^x =$

$$e^x\frac{۱}{(D+۱)^۲ + (D+۱) + ۱}(x + x^۲) =$$

$$e^x\frac{۱}{D^۲ + ۳D + ۳}(x + x^۲) = e^x\frac{۱}{۳}\left(۱ - D + \frac{۲}{۳}D^۲\right)(x + x^۲) =$$

$$e^x\frac{۱}{۳}\left(x + x^۲ - ۱ - ۲x + \frac{۴}{۳}\right) = e^x\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۳} - x + x^۲\right)$$

۶) $y_p = \dfrac{۱}{۲(D-۱)(D+۱)}(e^x + e^{-x}) = \dfrac{۱}{۲(D-۱)(D+۱)}e^x +$

تبدیل لاپلاس :

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

$$۱)\ f(t) = ۵t^{۴} - ۳t^{۲} + ۶$$

$$۲)\ f(t) = ۴e^{۳t} + ۲\cos t - ۱$$

$$۳)\ f(t) = \cos(at + b)$$

$$۴)\ f(t) = \sinh(at + b)$$

جواب :

$$۱)\ F(s) = ۵\frac{۴!}{s^{۵}} - ۳\frac{۲!}{s^{۳}} + \frac{۶}{s}$$

$$۲)\ F(s) = \frac{۴}{s - ۳} + \frac{۲s}{s^{۲} + ۱} - \frac{۱}{s}$$

$$۳)\ f(t) = \cos at \cos b - \sin at \sin b$$

$$\Rightarrow F(s) = \cos b\mathcal{L}(\cos at) - \sin b\mathcal{L}(\sin at)$$

$$F(s) = \cos b\frac{s}{s^{۲} + a^{۲}} - \sin b\frac{a}{s^{۲} + a^{۲}}$$

$$۴)\ f(t) = \sinh at \cosh b + \cosh at\ sinhb$$

$$\Rightarrow F(s) = \cosh b\mathcal{L}(\sinh at) + \sinh b\mathcal{L}(\cosh at)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{a}{s^{۲} - a^{۲}}\cosh b + \frac{s}{s^{۲} - a^{۲}}\sinh b$$

معکوس لاپلاس:

در تمرینات زیر $f(t)$ را پیدا کنید.

$$۱۰)\ F(s)=\frac{s^{۲}+s+۱}{s(s^{۲}+۱)}$$

$$۱۱)\ F(s)=\frac{۲-s}{۳s^{۳/۲}}$$

$$۱۲)\ F(s)=\frac{۱}{s^{۳}}+\frac{۴s}{s^{۲}-۱}+\frac{۳}{s^{۲}+۴}$$

جواب :

$$۱۰)\ F(s)=\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s^{۲}+۱}\Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{s}\right)+\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right)$$

$$\Rightarrow f(t)=۱+\sin t$$

$$۱۱)\ F(s)=\frac{۲}{۳}s^{۳/۲}-\frac{۱}{۳}s^{-۱/۲}\Rightarrow f(t)=\frac{۲}{۳\Gamma(۳/۲)}t^{۱/۲}-\frac{۱}{۳\Gamma(۱/۲)}t^{-۱/۲}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{۴}{۳\sqrt{\pi}}-\frac{۱}{۳\sqrt{\pi}}t^{-۱/۲}$$

$$۱۲)\ F(s)=\frac{۱}{۲}\frac{۲}{s^{۳}}+۴\frac{s}{s^{۲}-۱}+\frac{۳}{۲}\frac{۲}{s^{۲}+۴}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{۱}{۲}t^{۲}+۴\cosh t+\frac{۳}{۲}\sin ۲t$$

لاپلاس مشتق :

$$1)\ f(t) = t\sin 5t \qquad 2)\ f(t) = te^{2t}$$

$$3)\ f(t) = t\sinh 4t \qquad 4)\ f(t) = t\cosh t$$

حل:

$$1)\ f'(t) = \sin 5t + 5t\cos 5t \Rightarrow f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(t) = 10\cos 5t - 25t\sin 5t = 10\cos 5t - 25f(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f''(t)) = 10\frac{s}{s^2+25} - 25F(s) =$$

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2 f(0)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{10s}{(s^2+25)^2}$$

$$2)\ f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t}, \quad f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f'(t)) = \frac{1}{s-2} + 2F(s) = sF(s) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$3)\ f'(t) = \sinh 4t + 4t\cosh 4t, \qquad f''(t) = -16t\sinh 4t + 8\cosh 4t$$

$$-16\mathcal{L}(t\sinh 4t) + 8\mathcal{L}(\cosh 4t) = s^2\mathcal{L}f(t) - sf(0) - f'(0)$$

$$\Rightarrow (s^2-16)F(s) = \frac{8s}{s^2-16} \Rightarrow F(s) = \frac{8s}{(s^2-16)^2}$$

$$4)\ f'(t) = \cosh t + t\sinh t, \qquad f''(t) = t\cosh t + 2\sinh t$$

$$\mathcal{L}(t\cosh t) + 2\mathcal{L}(\sinh t) = s^2\mathcal{L}f(t) - sf(0) - f'(0)$$

$$\Rightarrow (s^2-1)F(s) = \frac{2}{s^2-1} + 1 \Rightarrow F(s) = \frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$$

حل معادله دیفرانسیل با استفاده از لاپلاس :

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$۷)\ y'' + ۴y = ۰, \quad y(۰) = ۱, \quad y'(۰) = ۱$$

$$۸)\ y'' + ۹y = \sin ۲t, \quad y(۰) = ۱, \quad y'(۰) = ۱$$

$$۹)\ y'' + y' = ۱, \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۲$$

$$۱۰)\ y'' + ۹y = t, \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۰$$

$$۱۱)\ y'' - y' - ۲y = ۳, \quad y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۰$$

حل:

$$۷)\ \mathcal{L}y'' + ۴\mathcal{L}y = ۰, \quad s^۲Y - sy(۰) - y'(۰) + ۴Y = ۰$$

$$Y = \frac{s}{s^۲ + ۴} + \frac{۱}{s^۲ + ۴} \Rightarrow y(t) = \cos t + \frac{۱}{۲}\sin ۲t$$

$$۸)\ \mathcal{L}y'' + ۹\mathcal{L}y = \mathcal{L}(\sin ۲t), \quad s^۲Y - sy(۰) - y'(۰) + ۹Y = \frac{۲}{s^۲ + ۴}$$

$$Y = \frac{s}{s^۲ + ۹} + \frac{s^۲ + ۶}{(s^۲ + ۹)(s^۲ + ۴)} = \frac{s}{s^۲ + ۹} + \frac{۳/۵}{s^۲ + ۹} + \frac{۲/۵}{s^۲ + ۴}$$

$$\Rightarrow y(t) = \cos ۳t + \frac{۱}{۵}\sin ۳t + \frac{۱}{۵}\sin ۲t$$

ادامه در صفحه بعد :

۹) $s^{۲}Y - sY(۰) - y'(۰) + sY + y(۰) = \frac{۱}{s}$

$$\Rightarrow Y = \frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{s} + \frac{۱}{s+۱}\right)$$

$$y(t) = \int_{۰}^{t} (۱ + e^{-r})\, dr = t - e^{-t} + ۱$$

۱۰) $s^{۲}Y - sY(۰) - y'(۰) + ۹Y = \frac{۱}{s^{۲}} \Rightarrow$

$$Y = \frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{s(s^{۲}+۹)}\right)$$

$$y(t) = \int_{۰}^{t}\left(\int_{۰}^{t} \frac{۱}{۳}\sin ۳r\, dr\right)\, dt = \int_{۰}^{t} \frac{۱}{۹}(۱ - \cos ۳t)\, dt$$

$$y(t) = \frac{t}{۹} - \frac{۱}{۲۷}\sin ۳t$$

۱۱) $s^{۲}Y - sY(۰) - y'(۰) - sY + Y(۰) - ۲Y = \frac{۳}{s}$

$$\Rightarrow Y = \frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{s-۲} - \frac{۱}{s+۱}\right)$$

$$y(t) = \int_{۰}^{t} (e^{۲r} - e^{-r})\, dr = \frac{۱}{۲}(e^{۲t} - ۱) + (e^{-t} - ۱)$$