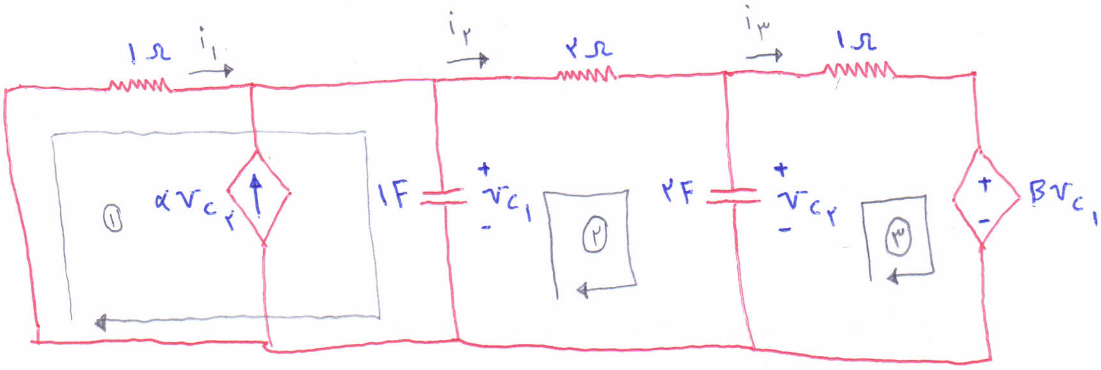
به نام شاهد خطاپوش

مهدی عبداللهی

جواب سؤال ۱:



نکات:

$$i_c = c\frac{dv_c}{dt}$$

★ مدار بحرانی زمانی اتفاق می‌افتد که دو ریشه مضاعف داشته باشیم.

$$\begin{cases} KVL @ 1 : i_1 = -v_{c_1} \\ KVL @ 2 : v_{c_1} = 2i_2 + v_{c_2} \\ KVL @ 3 : v_{c_2} = i_3 + \beta v_{c_1} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} KCL @ 1 : i_1 + \alpha v_{c_2} = i_2 + \frac{dv_{c_1}}{dt} \\ KCL @ 2 : i_2 = i_3 + 2\frac{dv_{c_2}}{dt} \end{array}$$

$$\begin{cases} i_1 = -v_{c_1} \\ i_2 = \frac{1}{2}(v_{c_1} - v_{c_2}) \\ i_3 = v_{c_2} - \beta v_{c_1} \end{cases} \xrightarrow[\text{در KCL ها}]{\text{جایگذاری این مقادیر}} \begin{cases} -v_{c_1} + \alpha v_{c_2} = \frac{1}{2}v_{c_1} - \frac{1}{2}v_{c_2} + \frac{dv_{c_1}}{dt} \\ \frac{1}{2}v_{c_1} - \frac{1}{2}v_{c_2} = v_{c_2} - \beta v_{c_1} + 2\frac{dv_{c_2}}{dt} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{را مرتب می‌کنیم}]{\text{دو معادله بدست آمده}} \begin{cases} \frac{dv_{c_1}}{dt} + \frac{3}{2}v_{c_1} - (\alpha + \frac{1}{2})v_{c_2} = 0 \quad (A) \\ \frac{dv_{c_2}}{dt} + \frac{3}{4}v_{c_2} - (\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4})v_{c_1} = 0 \rightarrow v_{c_1} = \frac{4}{2\beta+1}\left(\frac{dv_{c_2}}{dt} + \frac{3}{4}v_{c_2}\right) \quad (B) \end{cases}$$

$$(A) \xrightarrow{} (B) \quad \frac{4}{2\beta+1}\left(\frac{dv_{c_2}}{dt}\right) + \frac{3}{2\beta+1}\left(\frac{dv_{c_2}}{dt}\right) + \frac{6}{2\beta+1}\left(\frac{dv_{c_2}}{dt}\right) + \frac{9}{4\beta+2}(v_{c_2}) - \alpha(v_{c_2}) - \frac{1}{2}(v_{c_2}) = 0$$

★ نکته: $s^2+2\alpha s+\omega_0^2=0$

← برای مدار بحرانی : $\alpha=\omega_0$

★ حال کافی است شرط مدار بحرانی را اعمال کنیم:

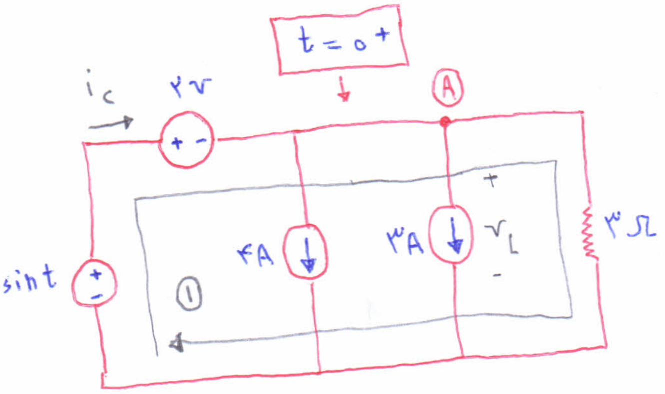
★ (ابتدا معادله را مرتب کرده و سپس $\alpha=\omega_0$ قرار می دهیم)

$$\frac{d^2 v_{c_2}}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{9}{2\beta+1}\cdot\frac{2\beta+1}{4}\right)}_{2\alpha=\frac{9}{4}}\frac{dv_{c_2}}{dt} + \underbrace{\left(\frac{\frac{9}{2}}{2\beta+1}-\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2\beta+1}{4}\right)}_{\omega_0^2=\left(\frac{9}{8}-\frac{\alpha(2\beta+1)}{4}-\frac{2\beta+1}{8}\right)} v_{c_2}=0$$

$$\xrightarrow{\alpha=\omega_0} \frac{81}{\cancel{64}} = \frac{72}{\cancel{64}} - \frac{16\alpha(2\beta+1)}{\cancel{64}} - \frac{8(2\beta+1)}{\cancel{64}} \rightarrow 9 = -8(2\beta+1)(2\alpha+1)$$

$$\rightarrow \boxed{(2\beta+1)(2\alpha+1) = -\frac{9}{8}}$$ جواب نهایی

جواب سؤال ۲ :



نکته:

$$i_c = c\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

KCL @ A : $3+4+\frac{v_L}{3} = i_c$

KVL @ 1 : $\sin t = 2 + v_L$

$$\rightarrow \begin{cases} v_L = \sin t - 2 \\ i_c = 7 + \frac{\sin t - 2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \sin t - 2 \quad (2) \\ \frac{dv_c}{dt} = 7 + \frac{\sin t - 2}{3} \end{cases}$$

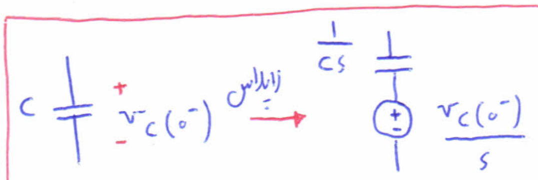
$$\xrightarrow{(2)} \frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\sin t - 2) = \cos t$$ (از رابطه ۲ مشتق گرفتیم)

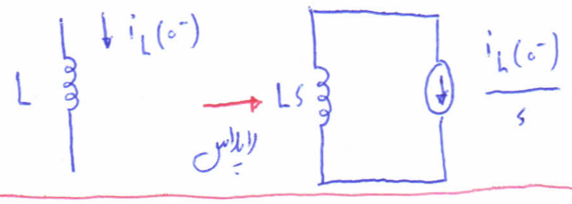
$$\rightarrow i_L''(0^+) = ? \rightarrow i_L''(t) = \cos t \rightarrow \boxed{i_L''(0^+) = \cos(0) = 1}$$ جواب نهایی

جواب سؤال (۳):

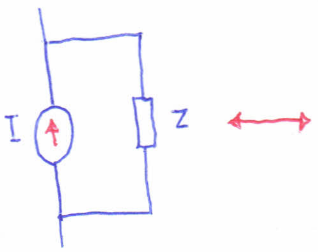
* برای راحتی می‌توان معادلات دیفرانسیل را در حوزه‌ی لاپلاس نوشت:

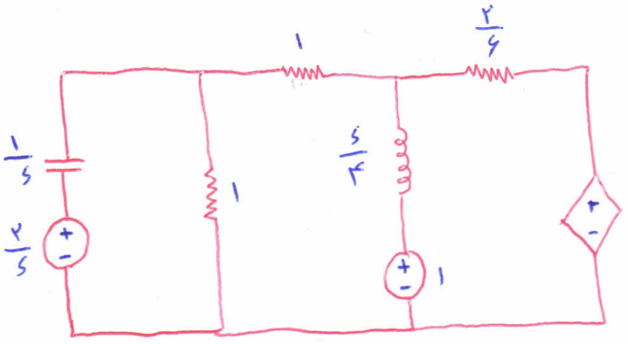
* نکته:





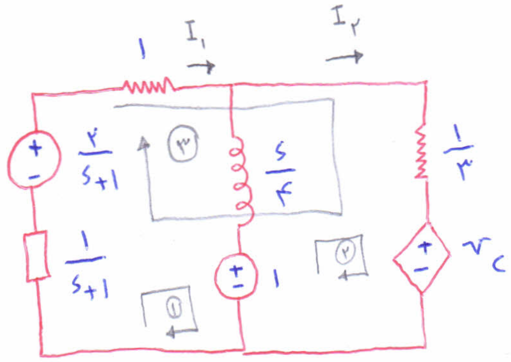
* نکته (۲): تبدیل منابع





* در شکل فوق (مدار فوق)، در سمت راست تبدیل منابع انجام شده و دو مقاومت سری $\frac{1}{s}\ \Omega$ به صورت معادل $\frac{2}{s}\ \Omega$ در نظر گرفته شده‌اند.

* در ادامه یکبار دیگر تبدیل منابع را برای شاخه‌ی سمت چپ انجام می‌دهیم و مقاومت $1\ \Omega$ موازی را نیز دخیل می‌کنیم:



KVL @ ① : $\frac{I_1}{s+1} - \frac{2}{s+1} + I_1 + \frac{s}{4}(I_1 - I_2) + 1 = 0$

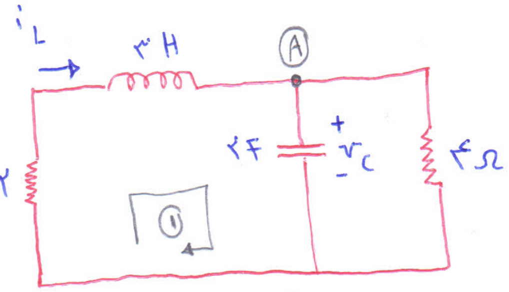
KVL @ ② : $-1 + \frac{s}{4}(I_2 - I_1) + \frac{I_2}{3} + V_C = 0$ Ⓐ

KVL @ ③ : $\frac{I_1}{s+1} - \frac{2}{s+1} + I_1 + \frac{I_2}{3} + V_C = 0$ Ⓑ

$$\xrightarrow[B]{A} \quad I_2 = \frac{4(I_1 - 2)}{s(s+1)} + \frac{4(I_1 + 1)}{s} + I_1$$

* باید V_C را برحسب s بدست آورده و لاپلاس معکوس بگیریم.

جواب سؤال ④ :



نکته :

Q (ضریب کیفیت) $= \dfrac{\omega_0}{2\alpha}$

B_ω (پهنای باند) $= 2\alpha$

KVL @ ① : $2i_L + 3\dfrac{di_L}{dt} + v_C = 0 \rightarrow v_C = -2i_L - 3\dfrac{di_L}{dt}$ Ⓑ

KCL @ Ⓐ ; $\dfrac{v_C}{4} + 2\dfrac{dv_C}{dt} = i_L$ Ⓒ

Ⓑ را در Ⓒ جایگذاری می‌کنیم

$$-\frac{i_L}{2} - \frac{3}{4}\frac{di_L}{dt} - 4\frac{di_L}{dt} - 6\frac{d^2 i_L}{dt^2} = i_L \rightarrow \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \underbrace{\frac{19}{24}}_{2\alpha}\frac{di_L}{dt} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\omega_0^2} i_L = 0}$$

جواب نهایی

$$\rightarrow \begin{cases} Q = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{19}{24}} = \boxed{\dfrac{12}{19}} & \text{جواب نهایی} \\ B_\omega = \boxed{\dfrac{19}{24}} & \text{جواب نهایی} \end{cases}$$

★ از روش Δ :

$$s_1 , s_2 = \frac{-\frac{19}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{19}{24}\right)^2 - 1}}{2} \rightarrow$$

دو ریشه مختلط دارد که مقدار حقیقی آنها منفی است $(\Delta < 0)$

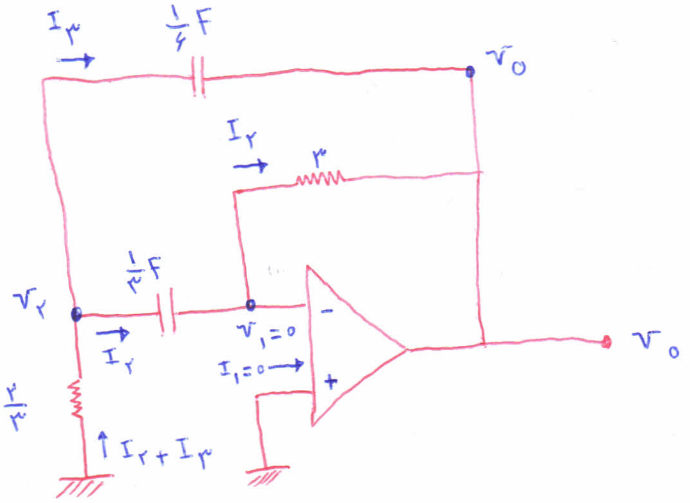
پس مدار نوسانی (مدار ضعیف) است. جواب نهایی

یا :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{19}{48} \\ \omega_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha < \omega_0} \checkmark$$

جواب سؤال ۵ :

★ حالت اوّل که R ها باز :



$$(A')\quad I_2 = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\left(v_2-\cancel{v_1}^{\,0}\right) = \frac{1}{3}\frac{dv_2}{dt}$$

$$v_0 = -3I_2 + \cancel{v_1}^{\,0}$$

$$\rightarrow v_0 = -\frac{dv_2}{dt} \quad (A)$$

مرحله ۱

$$\rightarrow \quad v_2 = -\frac{2}{3}\left(I_2+I_3\right) \xrightarrow[A']{B} v_2 = -\frac{2}{3\times 3}\frac{dv_2}{dt} - \frac{1}{9}\left(\frac{dv_2}{dt}+\frac{d^2v_2}{dt^2}\right) \quad (C)$$

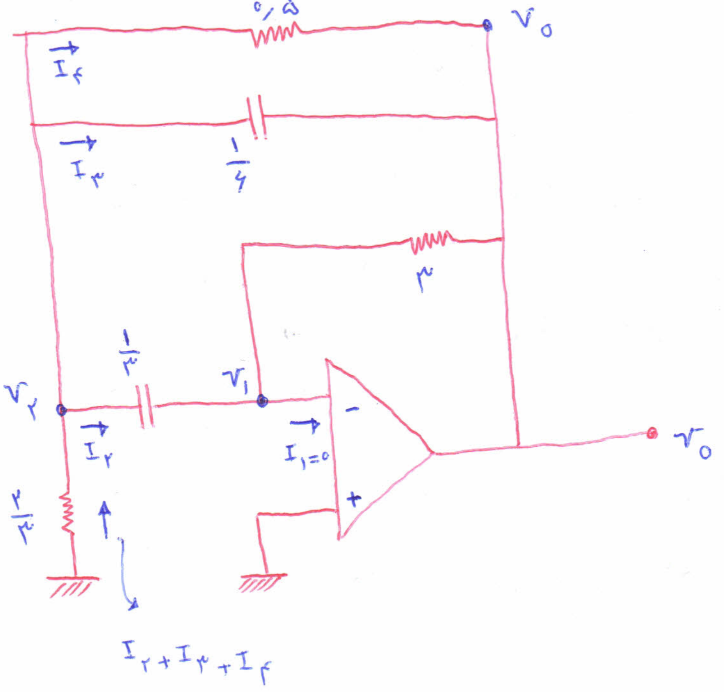
مرحله ۳

$$I_3 = \frac{1}{6}\frac{d}{dt}\left(v_2-v_0\right) \xrightarrow{A} I_3 = \frac{1}{6}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{6}\frac{d}{dt}\left(\frac{dv_2}{dt}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{dv_2}{dt}+\frac{d^2v_2}{dt^2}\right) \quad (B)$$

مرحله دو

$$(C) \rightarrow -\frac{1}{9}\frac{d^2v_2}{dt^2} - \frac{1}{3}\frac{dv_2}{dt} - v_2 = 0 \rightarrow \frac{d^2v_2}{dt^2} + \underbrace{3}_{2\alpha}\frac{dv_2}{dt} + \underbrace{9}_{\omega_0^2}v_2 = 0 \rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{3}{2}\\ \omega_0 = 3\end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{\alpha < \omega_0} \rightarrow$ پس میرای نوسانی (ضعیف) است.   جواب نهایی



ادامه‌ی پاسخ سؤال ⑤ :

* حالت دوم، $R=0/5$:

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3}\frac{dv_2}{dt} \\ v_0 &= -3 I_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow v_0 = -\frac{dv_2}{dt} \quad \text{(I)}$$

$$\left\{\begin{aligned} v_2 &= -\frac{2}{3}\left(I_2+I_3+I_4\right) \quad \text{(III)} \\ I_3 &= \frac{1}{6}\frac{d}{dt}\left(v_2-v_0\right) \end{aligned}\right.$$

→ تنها تفاوت نسبت به حالت قبل اضافه شدن مقاومت $R=0/5$ و در نتیجه جریان I_4 است که:

$$I_4 = \frac{v_2 - v_0}{0/5}$$

$$\xrightarrow{\text{(I)}} I_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{dv_2}{dt} + \frac{d^2v_2}{dt^2}\right) \quad \text{(II)}$$

$$\xrightarrow{\text{(II) و (III)}} v_2 = -\frac{2}{9}\frac{dv_2}{dt} - \frac{1}{9}\left(\frac{dv_2}{dt} + \frac{d^2v_2}{dt^2}\right) - \frac{4}{3}\left(v_2 + \frac{dv_2}{dt}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله را مرتب می‌کنیم}} \frac{1}{9}\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{5}{3}\frac{dv_2}{dt} + \frac{4}{3}v_2 = 0 \rightarrow \frac{d^2v_2}{dt^2} + \overbrace{15}^{2\alpha}\frac{dv_2}{dt} + \overbrace{12}^{\omega_0^2}v_2 = 0$$

$$\text{(6)} \rightarrow \left\{\begin{aligned} \omega_0 &= 2\sqrt{3} \\ \alpha &= 7/5 \end{aligned}\right. \rightarrow \text{مشخص است که} : \boxed{\alpha > \omega_0 \rightarrow \text{مدار شدیداً میرا است}}$$

جواب نهایی