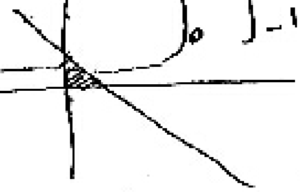


بسمه تعالی

امتحان پایان ترم ریاضی 2 — 93/3/10 — زمان 2 ساعت

1- اگر D ناحیه محصور به خطوط $x+y=1$، $x=0,\ y=0$ باشد انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\iint_D \sin^2\frac{x-y}{x+y}\,dxdy$$

2- منحنی بسته C به منحنی های زیر محدود می باشد:

$$-x+y=2,\quad x=3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}},\quad y=-2,\quad x=-2$$

و میدان برداری $F(x,y)$ با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$F(x,y)=-\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}i+\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}j$$

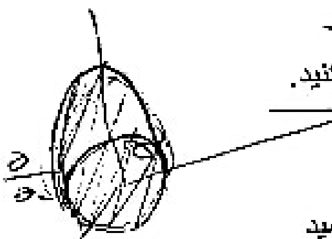
مطلوبست محاسبه $\oint_C F\cdot dr$.

3- اگر S قسمتی از رویه $z=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ واقع در زیر صفحه $z=1+y$ باشد انتگرال زیر را محاسبه کنید و برای آن تعبیر فیزیکی بنویسید:

$$\iint_S y\,dS$$

4- درستی قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $F=yi-xj+8zk$ و سطح بسته محدود به دو رویه $z=9-x^2-y^2$ و صفحه $z=1$ بیابید.

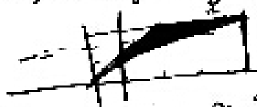
5- در صورتی که منحنی C محل برخورد کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و صفحه $x+y+z=0$ باشد و جهت حرکت روی منحنی با امتداد بردار $i+j+k$ سازگار است مقدار انتگرال $\oint_C (y^2+z)dx+(z^2+x)dy+(x^2+y)dz$ را محاسبه کنید.



موفق و موید باشید

دانشگاه علم و صنعت ایران	دانشگاه علم و صنعت ایران دانشکده ریاضی	سؤالات امتحانی درس ریاضی عمومی (۲) (پایان ترم) نیمسال اول ۹۱ - ۱۳۹۰
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۱۰/۲۵	رشته های فنی و مهندسی و فیزیک	مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد

۱) (الف) انتگرال $\iint_D \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ را بر ناحیه $D: \frac{2}{\pi} \le x < \infty,\ 0 \le y \le \frac{1}{x}$ در صورت وجود محاسبه کنید.



(ب) نشان دهید معادله زیر بر قرار است.

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\,dx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\,dx = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

۲) مجموع مساحت های دیواره و سقف ناحیه گنبدی شکل محدود به نیمکره به شعاع $\sqrt{2}$ و مرکز مبدأ مختصات را که بالای مربع $D: \ -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$ واقع است، بیابید.

۳) گشتاور ماند (اینرسی) جسم چگال (با چگالی ثابت) محصور به سهمی گون $3az = x^2 + y^2$ از پایین و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ از بالا را نسبت به محور z ها بدست آورید.

۴) مقادیر A و B را طوری پیدا کنید که میدان برداری زیر ابقایی (پیوستار) باشد:

$$\vec{F} = Ax\ln(z)\,\vec{i} + By^2z\,\vec{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^3\right)\vec{k}.$$

اگر C مسیری از $(1,1,1)$ تا $(2,1,2)$ باشد، کار انجام شده توسط میدان $\vec{F}$ را بر C محاسبه کنید.

۵) به کمک انتگرال خط، مساحت ناحیه محدود به منحنی $x^3 + y^3 = 3axy$ را پیدا کنید.

۶) درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\vec{F} = \overrightarrow{(x, x+y, x+y+z)}$ و ناحیه

$$S:\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1,\ \ z \ge 0$$

بررسی کنید.

موفق باشید

به نام خدا

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

۸۸/۱۰/۲۶ 　　　　　　　　　　　　　　　　مدت امتحان : ۲ ساعت

سؤالات امتحانی ریاضی II

(ترم اول سال تحصیلی ۸۹-۸۸)

سؤال اول . مطلوب است محاسبه:

$$\iiint_V y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$$

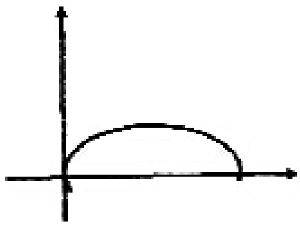
که در آن V ناحیه محدود به استوانه $x^2+z^2=1$ و $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$ و صفحه $y=1$ است.

سؤال دوم . حجم جسم محدود به استوانه $r=a\cos\theta$ و کره ای به شعاع a به مرکز مبدا را بیابید.

سؤال سوم . با استفاده از قضیه گرین مساحت ناحیه محدود به محور xها و یک قوس از منحنی سیکلوئید با معادلات پارامتری

$$r(t)=(t-\sin t)i+(1-\cos t)j \qquad 0\le t\le 2\pi$$

را محاسبه کنید .



سؤال چهارم . فرض کنید C فصل مشترک سهمی گون $z=x^2+y^2$ و صفحه z=y بوده و در جهت مثبت (یا در جهت مثلثاتی) جهت دار شده است . مطلوب است محاسبه

$$\int_C xydx+x^2dy+z^2dz$$

سؤال پنجم . قضیه دیورژانس را روی حجم محدود به نیم کره $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ و صفحه z=0 و میدان نیروی $F=x^3i+y^3j+z^3k$ تحقیق کنید .

توجه درک سؤال جزء امتحان است سؤال نکنید.

موق باشید

به نام خدا

86/10/22

دانشگاه علم و صنعت ایران

مدت امتحان 120 دقیقه

(دانشکده ریاضی)

سؤالات امتحانی ریاضی 2

سؤال اول. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$ که در آن V ناحیه واقع در یک هشتم اول بوده که از بالا به صفحه z=1 و از پایین به صفحه x+y-1=0 محدود است .

سؤال دوم. حجم ناحیه ای را بیابید که درون مخروط $x^2+y^2=z^2$ قرار دارد و به کره $x^2+y^2+z^2=2az$ محدود است .

سؤال سوم. مطلوب است محاسبه

$$\iint_S xz^2\,dy\,dz+(x^2y-z^3)\,dz\,dx+(2xy+y^2z)\,dx\,dy$$

که در آن Sقسمت خارجی نیمکره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ می باشد .

سؤال چهارم. مساحت قسمتی از کره به معادله $x^2+y^2+z^2=2ay$ را که به وسیله مخروط $x^2+z^2=y^2$ بریده شده است حساب کنید .

سؤال پنجم. بر قراری قضیه گرین را بر میدان برداری $F(x,y)=x^2yi+\frac{x}{y^2}j$ روی منحنی C تحقیق کنید که در آن Cمنحنی بسته ای است که شامل خطوط y=1,y=x+1 ، و xy=2 می باشد .

سؤال ششم. درستی دستور استکس را برای F(x,y)=<yz,xz,xy> روی منحنی C محل تلاقی کره $x^2+y^2+z^2=R^2$ با صفحه xy را تحقیق کنید .

موفق باشید

باسمه‌ای تعالی

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲

مدت آزمون : ۱۰۰ دقیقه

دانشگاه علم و صنعت ایران

سوال۱) مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_{\arctan(x)}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(y))dydx$

سوال۲) مرکز جرم قسمتی از سهموی $z = 16 - x^2 - y^2$ واقع در ربع اول مختصات که بین دو استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 9$ قرار می گیرد، در صورتی که $\delta(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

سوال۳) اگر T حجم محصور به استوانه $x^2 + z^2 = 1$ از $y = 0$ تا $y = 1$ باشد، انتگرال سه‌گانه زیر را محاسبه نمایید.

$$\iiint_T (x^2 + y + z^2)^3 dxdydz$$

سوال۴) قضیه گرین را برای میدان برداری $F(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ و منحنی مثلثی شکل C با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ تحقیق کنید.

سوال۵) اگر S رویه‌ای به معادله $z = 4 - x^2 - y^2$ با شرط $z \geq 0$ باشد، انتگرال سطح زیر را محاسبه نمایید.

$$\iint_S (x^2 + y^2)d\sigma$$

سوال۶) شار برون‌سوی F بر سطح S رامحاسبه کنید اگر

$$F = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\ \vec{i} +^{-} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\ \vec{j} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\ \bar{k}\ :\ S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

در پناه حق باشید.

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی دو — ترم اول ۸۵–۱۳۸۴

۱— مطلوب است محاسبه مساحت سطح محدود به منحنی $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ و واقع در ربع اول.

حل. در اینجا دامنه عبارت است از $D: 0\le x, 0\le y, \sqrt{x/a}+\sqrt{y/b}\le 1$. با فرض $x=au\cos^2 v$ و $y=bu\sin^2 v$، داریم

$$J=\left|\det\begin{bmatrix} a\cos^2 v & -2au\sin v\cos v\\ b\sin^2 v & 2b\sin v\cos v\end{bmatrix}\right|=|abu\sin(2v)| \qquad ; \qquad D': 0\le u\le 2,\ 0\le v\le \pi/2$$

در نتیجه

$$\mathrm{Area}(D)=\iint_D dA=\iint_{D'}|abu\sin(2v)|\,dA'=ab\Big(\int_0^1 u\,du\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\sin(2v)\,dv\Big)=ab\times\frac{1}{2}\times 2=ab$$

۲— مقدار انتگرال $\iiint_V z\,dV$ که در آن V حجم واقع در یک هشتم اول مختصات، و بالای صفحهٔ $z=x+y-1$ و زیر صفحهٔ $z=1$ است، را محاسبه کنید.

حل. با توجه به صورت مسأله، حدود ناحیهٔ مورد نظر چنین است:

$$V: 0\le x\ 0\le y,\ 0\le z,\ x+y-1\le z,\ z\le 1\ :\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2-x,\ x+y-1\le z\le 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\iiint_V z\,dV &= \int_0^2\left(\int_0^{2-x}\left(\int_{x+y-1}^1 z\,dz\right)dy\right)dx=\int_0^2\left(\int_0^{2-x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x+y-1)^2\right)dy\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^2\left[y-\frac{1}{3}(x+y-1)^3\right]_0^{2-x}dx=\frac{1}{6}\int_0^2(x^3-3x^2+4)\,dx=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

۳— انتگرال تابع $|xyz|$ را بر ناحیه محدود به بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ محاسبه کنید.

حل. از مختصات کروی وزندار $x=a\rho\sin\varphi\cos\theta$، $y=b\rho\sin\varphi\sin\theta$ و $z=c\rho\cos\varphi$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $J=abc\rho^2\sin\varphi$ و ناحیهٔ تصویر شده عبارت است از $V': 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\iiint_V |xyz|\,dV &= \iiint_{V'}\Big|(a\rho\sin\varphi\cos\theta)(b\rho\sin\varphi\sin\theta)(c\rho\cos\varphi)\Big|\,(abc\rho^2\sin\varphi)\,dV,\\ &= a^2b^2c^2\iiint_{V'}\rho^5\sin^3\varphi\Big|\cos\varphi\cos\theta\sin\theta\Big|\,dV'\\ &= a^2b^2c^2\left(\int_0^1\rho^5\,d\rho\right)\left(\int_0^\pi\sin^3\varphi\Big|\cos\varphi\Big|\,d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi}\Big|\cos\theta\sin\theta\Big|\,d\theta\right)\\ &= 8a^2b^2c^2\left(\int_0^1\rho^5\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)\\ &= 8a^2b^2c^2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}a^2b^2c^2\end{aligned}$$

۴− مطلوب است محاسبهٔ جرم قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=4$ که توسط استوانه $x^2+y^2=2x$ جدا شده است و چگالی در هر نقطهٔ (x,y,z) برابر $\delta=x^2+y^2+z^2$ است.

حل. دامنهٔ این مسأله $V:\ x^2+y^2\le 2x,\ x^2+y^2+z^2\le 4$ است. آن را به مختصات استوانه‌ای می‌بریم:

$$
\begin{aligned}
V' &: r^2\le 2r\cos\theta,\ r^2+z^2\le 4 \ :\ 0\le\cos\theta,\ 0\le r\le 2\cos\theta,\ z^2\le 4-r^2\\
&: -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2\cos\theta,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}
\end{aligned}
$$

در نتیجه، با فرض $u=\sqrt{4-r^2}$ داریم

$$
\begin{aligned}
m &= \iiint_V \delta\, dV=\iiint_{V'}(r^2+z^2)\,r\,dV'=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta}\left(\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}(r^2+z^2)\,r\,dz\right)dr\right)d\theta\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta}\left[\left(r^3z+r\frac{z^3}{3}\right)\right]_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}dr\right)d\theta=\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta}r(r^2+2)\sqrt{4-r^2}\,dr\right)d\theta\\
&= \frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{2\sin\theta}^{2}u^2(u^2-6)\,du\right)d\theta=\frac{32}{15}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\sin^5\theta+3-5\sin^3\theta\right)d\theta=\frac{32}{5}
\end{aligned}
$$

۵− قضیه گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F}=(x^2-xy)\mathbf{i}+(xy-y^2)\mathbf{j}$ و C مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,1)$ و $(2,0)$، بررسی کنید.

حل. الف) محاسبهٔ مستقیم. در اینجا با فرض $O=(0,0)$، $A=(1,1)$ و $B=(2,0)$، داریم $C=\triangle OBA$ یا $C=OB\cup BA\cup AO$، که در آن

$$
\begin{aligned}
OB &: \mathbf{r}(t)=(1-t)O+tB=(2t,0)\ ;\ 0\le t\le 1\\
BA &: \mathbf{r}(t)=(1-t)B+tA=(2-t,t)\ ;\ 0\le t\le 1\\
AO &: \mathbf{r}(t)=(1-t)A+tO=(1-t,1-t)\ ;\ 0\le t\le 1
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{OB}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{BA}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{AO}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\
&= \int_0^1(4t^2,0)\cdot(2,0)\,dt+\int_0^1(2t^2-6t+4,2t-2t^2)\cdot(-1,1)\,dt+\int_0^1(0,0)\cdot(-1,-1)\,dt\\
&= 4\int_0^1(t^2+2t-1)\,dt=\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

ب) با استفاده از قضیه. داخل مثلث را به صورت $D:\ 0\le y\le 1,\ y\le x\le 2-y$ می‌توان نوشت، در نتیجه

$$
\iint_D(Q_x-P_y)\,dA=\iint_D(x+y)\,dA=\int_0^1\left(\int_y^{2-y}(x+y)\right)dy=2\int_0^1(1-y^2)\,dy=\frac{4}{3}
$$

۶− قضیه استوکس را برای میدان نیروی $\mathbf{F}=(y+2z)\mathbf{i}+(z+2x)\mathbf{j}+(x+2y)\mathbf{k}$ و منحنی C تحقیق کنید:

$$
C:\ \mathbf{r}(t)=(2\cos t,\sin t,\cos t+\sin t)\ ;\ 0\le t\le 2\pi
$$

حل. الف) محاسبهٔ مستقیم. با توجه به اینکه منحنی پارامتره شده است، داریم

$$
\begin{aligned}
\oint_C C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}(\cos t+3\sin t,5\cos t+\sin t,2\cos t+2\sin t)\cdot(-2\sin t,\cos t,-\sin t+\cos t)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi}(7\cos^2 t-8\sin^2 t-\sin t\cos t)\,dt=-\pi
\end{aligned}
$$

ب) با استفاده از قضیه. این منحنی محل برخورد صفحهٔ $x + 2y = 2z$ و استوانهٔ $x^2/4 + y^2 = 1$ است. بنابراین آن را به صورت لبهٔ قسمتی از صفحهٔ $x + 2y = 2z$ می‌توان تصور نمود که توسط استوانهٔ $x^2/4 + y^2 = 1$ جدا شده است. به عبارت دیگر، لبهٔ رویهٔ زیر:

$$S : z = x/2 + y \,,\ (x,y) \in D \quad , \quad D : x^2/4 + y^2 \le 1$$

به این ترتیب با فرض $f = 2z - x - 2y$، داریم

$$\mathbf{n} = \pm\frac{f'}{\|f'\|} = \pm\frac{1}{3}(-1,-2,2) \quad , \quad d\sigma = \frac{\|f'\|}{|f_z|}\,dxdy = \frac{3}{2}\,dxdy$$

که با توجه به جهت C، حالت مثبت در $\mathbf{n}$ مورد قبول است. بعلاوه

$$\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+2z & z+2x & x+2y \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

و در نتیجه

$$\iint\limits_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_{D}(1,1,1)\cdot(-1,-2,2)\,dxdy = -\frac{1}{2}\iint\limits_{D} dxdy = -\frac{1}{2}\mathrm{Area}(D) = -\frac{1}{2}\times\pi\times 1\times 2 = -\pi$$

۷− در صورتی که $\mathbf{F} = -\frac{1}{r^3}\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right)$ باشد، که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$، قضیه دیورژانس را برای ناحیه محدود به دو کره $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ بررسی کنید.

حل. الف) محاسبهٔ مستقیم. از مختصات قطبی برای پارامتره نمودن کره‌های مورد نظر استفاده می‌کنیم:

$$S = S_1 \cup S_2 \quad ; \quad D : 0 \le \varphi \le \pi \,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$S_1 : \mathbf{r}(\varphi,\theta) = (2\sin\varphi\cos\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 2\cos\varphi) \quad ; \quad (\varphi,\theta) \in D$$
$$S_2 : \mathbf{r}(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi) \quad ; \quad (\varphi,\theta) \in D$$

در نتیجه

$$\mathbf{n}_1\,d\sigma_1 = \pm\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta\,d\varphi d\theta = \pm\,(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)\ 4\sin\varphi\,d\varphi d\theta$$
$$\mathbf{n}_2\,d\sigma_2 = \pm\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta\,d\varphi d\theta = \pm\,(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)\ \sin\varphi\,d\varphi d\theta$$

که در حالت اول + و در حالت دوم − مورد قبول است. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(S)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint\limits_{(S_1)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \iint\limits_{(S_2)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \\
&= \iint\limits_{D} -\frac{1}{8}\,(2\sin\varphi\cos\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 2\cos\varphi)\cdot(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)\ 4\sin\varphi\,d\varphi d\theta \\
&\quad + \iint\limits_{D} -\,(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)\cdot(-\sin\varphi\cos\theta, -\sin\varphi\sin\theta, -\cos\varphi)\ \sin\varphi\,d\varphi d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

ب) با استفاده از قضیه. داخل رویهٔ داده شده عبارت است از $V : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ و دیورژانس میدان صفر است:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right) = 0$$

در نتیجه

$$\iiint\limits_{V} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,dV = 0$$