مخابرات ۱

نكات مهم:

- **حضور و غياب انجام نمي شود، مگر آنكه حضور دانشجويان در يك كلاس بيش از ظرفيت كلاس باشد.**
- **رعايت انضباط در كلاس بسيار مهم است.**
- **دانشجويان چنانچه كاملا به كتاب مرجع درس مسلط باشند، اين درس را با نمره بسيار خوبي مي گذرانند.**
- **سعي شود علاوه بر تمرين هاي درسي، ساير تمرينهاي كتاب مرجع نيز حل شود.**
- **ملاك دانشجويان نمرات ترم هاي گذشته نباشد.**

نكات مهم:

- **امكان ارائه همه مطالب در كلاس وجود ندارد. دانشجويان مي بايست كتاب مرجع را شخصاً مطالعه نمايند. مبناي امتحان كتاب مرجع است.**
- **حل تمرينات زياد عامل موفقيت در اين درس است.**
- **تمرين هاي درسي مي بايست در جلسه بعد تحويل شوند.**

مرجع:

كتاب سيستمهاي مخابراتي

تاليف

بروس كارسون و ...

ترجمه

محمود دياني

مطالب درسي از روي كتاب كارسون:

فصل ۲ـ سيگنال		۲ـ۱ـ۱ و ۲ـ۱ـ۲ و ۲ـ۱ـ۴ و ۲ـ۱ـ۵ و۲ـ۱ـ۹ و ۲ـ۲ـ۲ و ۲ـ۲ـ۳ و ۲ـ۲ـ۵ و ۲ـ۳ـ۱ و ۲ـ۳ـ۴ و ۲ـ۳ـ۱۰ و ۲ـ۴ـ۱ و ۲ـ۴ـ۸ و ۲ـ۵ـ۲
فصل ۳ـ سيستم	بخش ۳ـ۴ (فيلتر) در حد كلاس ۳ـ۶ (همبستگي) حذف	۳ـ۱ـ۱ و ۳ـ۱ـ۲ و ۳ـ۱ـ۴ و ۳ـ۱ـ۶ و ۳ـ۱ـ۸ و ۳ـ۱ـ۱۲ و ۳ـ۱ـ۱۳و ۳ـ۱ـ۱۵ و ۳ـ۲ـ۷ و ۳ـ۲ـ۱۰ و ۳ـ۲ـ۱۱ و ۳ـ۳ـ۱و ۳ـ۳ـ۲ و ۳ـ۳ـ۴ و ۳ـ۳ـ۶ و ۳ـ۳ـ۸ و ۳ـ۳ـ۹ و ۳ـ۵ـ۱و ۳ـ۵ـ۳ و ۳ـ۵ـ۵

مطالب درسي از روي كتاب كارسون:

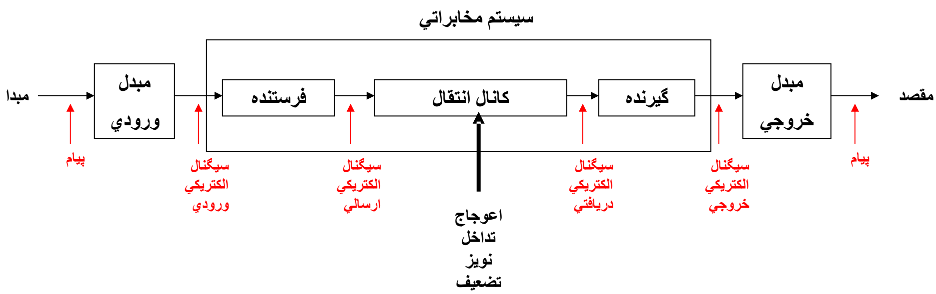
فصل ۴- AM	بخش ۴-۱ (ميانگذر) حذف	۴-۲-۱ و ۴-۲-۲ و ۴-۲-۳ و ۴-۲-۵ و ۴-۲-۶ و ۴-۲-۹ و ۴-۲-۱۰ و ۴-۲-۱۱و ۴-۳-۱ و ۴-۳-۲ و ۴-۳-۳ و ۴-۳-۴ و ۴-۳-۵ و ۴-۳-۶ و ۴-۴-۵ و ۴-۴-۶ و ۴-۴-۷ و ۴-۵-۱ و ۴-۵-۲ و ۴-۵-۳ و ۴-۵-۶ و ۴-۵-۷
فصل ۵- FM	بخش ۵-۱ در حد كلاس بخش ۵-۲ در حد كلاس بخش ۵-۳ همه مطالب بجز توليد FM به روش موج مثلثي بخش ۵-۴ حذف	۵-۱-۱ و ۵-۱-۲ و ۵-۱-۳ و ۵-۱-۴ و ۵-۱-۸ و ۵-۱-۹ و ۵-۲-۱ و ۵-۲-۲ و ۵-۲-۳ و ۵-۲-۴ و ۵-۳-۷ و ۵-۳-۸

مطالب درسي از روي كتاب كارسون:

فصل ۶- نمونه برداري	بخش ۶-۳ در حد كلاس	۶-۱-۱ و ۶-۱-۲ و ۶-۱-۴ و ۶-۱-۷ و ۶-۱-۱۱ و ۶-۱-۱۲ و ۶-۱-۲۰ و ۶-۲-۴
فصل ۷- كاربردها	بخش ۷-۳ حذف بخش ۷-۴ حذف	۷-۱-۱ و ۷-۱-۲ و ۷-۱-۳ و ۷-۱-۴ و ۷-۱-۵ و ۷-۱-۶ و ۷-۱-۷ و ۷-۱-۹ و ۷-۱-۱۰ و ۷-۲-۱ و ۷-۲-۲ و ۷-۲-۳ و ۷-۲-۴

فصل اول ـ مقدمات

- وظيفه اصلي مخابرات انتقال اطلاعات از يك نقطه (مبدا) به يك نقطه ديگر (مقصد) مي باشد.
- اطلاعات داراي مفهوم فلسفي مي باشد و براي سادگي از مفهومهاي پيام و سيگنال نيز استفاده مي كنيم.
- پيام مي تواند آنالوگ يا ديجيتال باشد.
- پيام آنالوگ بصورت پيوسته با زمان تغيير مي كند. مانند صحبت انسان، دماي محيط، شدت روشنايي.
- پيام ديجيتال از مجموعه معيني از نمادهاي گسسته در دامنه و زمان، تشكيل شده است مانند حروف الفباء، كليدهاي صفحه كليد كامپيوتر.
- در اين درس مخابرات آنالوگ را بررسي مي نماييم.
- پيام توسط وسايلي بنام مبدل، به سيگنال الكتريكي تبديل مي شود.
- نقاط مبدا و مقصد معمولا از يكديگر دور هستند.
- محيط بين مبدا و مقصد كه سيگنال از داخل آن عبور مي كند، كانال انتقال، يا به اختصار كانال ناميده مي شود.



- در هر سيستم مخابراتي، سه قسمت اساسي ديده مي شود:

فرستنده، كانال انتقال، گيرنده

- فرستنده، سيگنال ورودي را پردازش نموده تا سيگنال آماده انتقال از طريق كانال انتقال شود مانند: فيلتر كردن، تقويت، مدولاسيون، كد گذاري، رمز گذاري، تبديل به امواج الكترومغناطيس.
- كانال انتقال، محيطي است كه از داخل آن سيگنال عبور مي كند تا به مقصد برسد مانند: سيم مسي تلفن، كابل هم محور (coaxial)، هوا، فيبر نوري، موجبر.

- گیرنده، بر روي سیگنال هاي خروجي از کانال پردازش نموده و سیگنال الکتریکي اولیه را حتي الامکان بازیابي مي نماید مانند تبدیل امواج به سیگنال الکتریکي، تقویت، فیلتر کردن، دمدولاسیون، دیکد، رمزگشایي.
- هنگام انتقال پیام، پدیده هاي مزاحم زیادي وجود دارند که ممکن است در همه قسمتها تاثیر داشته باشند، ولي مطابق قرارداد، عوامل مزاحم را فقط در کانال انتقال تاثیر مي دهیم.
- مهمترین پدیده هاي مزاحم عبارتند از:

اعوجاج، تضعیف، تداخل، نویز

- اعوجاج از غیر خطي بودن کانال و یا کافي نبودن پهناي باند آن ناشي مي شود.
- تضعیف بعلت فاصله فیزیکي بین مبدا و مقصد ایجاد مي شود.
- تداخل توسط سایر سیستمها، همزمان با سیگنال اصلي، در کانال منتشر مي شوند و باعث ایجاد اختلال در سیگنال دریافتي مي شود.
- نویز سیگنال الکتریکي کوچك و ناخواسته اي است که در همه محیطها وجود دارد. در مواقعي که سیگنال اصلي ضعیف است، تاثیر نویز بسیار مهم مي شود. یکي از مهمترین انواع نویز، نویز گرمایي است.
- سیستمهای مخابراتی را از نظر جهت ارسال و دریافت می توان دسته بندی نمود.
- سه نوع سیستم می توان نام برد:

یک طرفه (simplex)، نیمه دو طرفه (half duplex) و دوطرفه کامل (full duplex)

- در سیستمهای یکطرفه، انتقال فقط در یک جهت (از مبدا به مقصد) انجام می شود مانند پخش رادیو و تلویزیون.
- در سیستمهای نیمه دوطرفه، امکال ارسال از مبدا به مقصد و یا از مقصد به مبدا وجود دارد، ولی در هر لحظه از زمان، فقط در یک جهت می تواند انتقال اطلاعات انجام شود مانن سیستم بیسیم.
- در سیستمهای دو طرفه کامل، بصورت همزمان در هر دو جهت امکان انتقال اطلاعات وجود دارد مانند مکالمه تلفنی، ارتباط اینترنت.

فصل دوم - سیگنال

- هر کمیتی که بتوان مقادیر آن را در حوزه زمان نمایش داد، سیگنال خوانده می شود.
- سیگنالها را می توان به انواع حقیقی و موهومی دسته بندی کرد.
- نمونه سیگنال حقیقی:

$$v(t) = A\delta(t - t_0) \qquad v(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

- نمونه سیگنال موهومی:

$$v(t) = jA\sin(\omega t + \varphi) \qquad v(t) = Ae^{j\omega t + \varphi}$$

- یکی از متداولترین سیگنالها در مباحث مخابرات، سیگنال سینوسی می باشد.
- مطابق قرارداد، در این درس کلیه سیگنالهای سینوسی را با تابع کسینوس نمایش می دهیم.

$$v(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

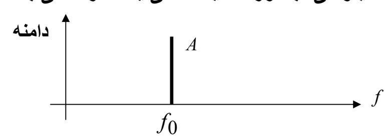
- A مقدار دامنه، $\omega = 2\pi f$ فرکانس و φ فاز است.
- سیگنال سینوسی را می توان بصورت زیر هم نمایش داد:

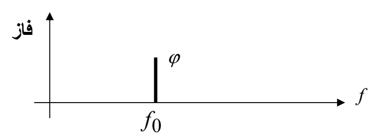
$$v(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\,\mathrm{Re}\left(e^{j(\omega t + \varphi)}\right) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}\right)$$

- این روابط نمایش فاز برداری است. در رشته مهندسی قدرت، چون ω ثابت است، بیشتر با قسمت $Ae^{j\varphi}$ ، که فیزور نامیده می شود، کار می شود.
- در این درس اغلب از f بجای ω استفاده می کنیم.
- مقدار دامنه همیشه مثبت در نظر گرفته می شود و برای نمایش دامنه منفی، $180°$ به فاز اضافه یا از آن کم میکنیم.
- موجهای سینوسی هم به کسینوسی تبدیل می شوند:

$$\sin\omega t = \cos(\omega t - 90°)$$

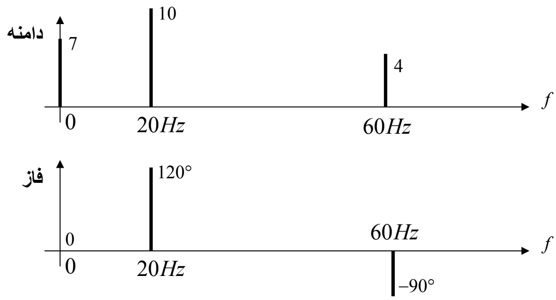
- یک نحوه نمایش سیگنالهای سینوسی، بصورت طیف خطی یک طرفه می باشد:





- **مثال: تابع زیر را بصورت طیف خطی یک طرفه نمایش دهید:**

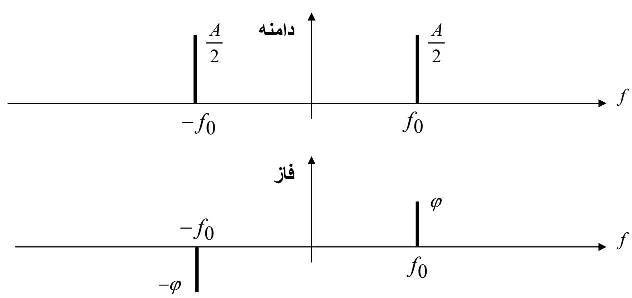
$$v(t) = 7 - 10\cos(40\pi t - 60°) + 4\sin(120\pi t)$$
$$= 7\cos 2\pi(0)t + 10\cos(2\pi(20)t - 60° + 180°) + 4\cos(2\pi(60)t - 90°)$$



- **از رابطه** $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ **استفاده نموده و تابع سینوسی را بصورت زیر هم می توان نوشت:**

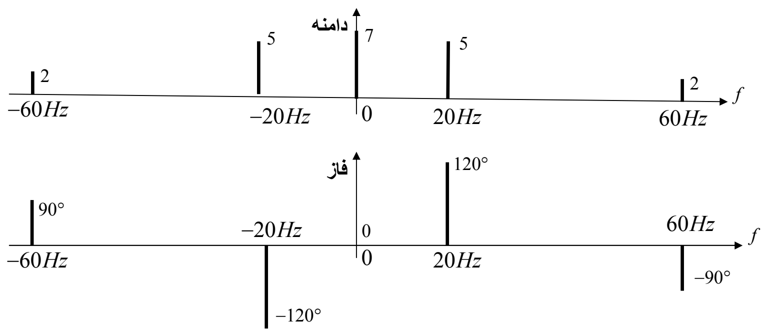
$$A\cos(2\pi ft + \varphi) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j\varphi}e^{j2\pi ft}\right) = \frac{1}{2}\left(Ae^{j\varphi}e^{j2\pi ft} + Ae^{-j\varphi}e^{-j2\pi ft}\right)$$
$$= \frac{1}{2}Ae^{j\varphi}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}e^{-j2\pi ft}$$

- **به این ترتیب یک نمایش طیف خطی دوطرفه هم بدست می آید. این نحوه نمایش متداولتر است.**



- در این نحوه نمایش، هر تابع حقیقی کسینوسی با دو خط نمایش داده می شود.
- برای مثال قبل داریم:

$$v(t) = 7\cos 2\pi(0)t + 10\cos\left(2\pi(20)t - 60^\circ + 180^\circ\right) + 4\cos\left(2\pi(60)t - 90^\circ\right)$$



- سیگنا ل پریودیک: $v(t \pm mT_0) = v(t)$

که در آن T_0 دوره تناوب یا پریود و m عدد صحیح است.

- متوسط زمانی:

$$\langle v(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)dt$$

- متوسط زمانی برای یک سیگنال پریودیک:

$$\langle v(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t)dt$$

- توان متوسط سیگنال پریودیک:

$$P = \left\langle |v(t)|^2 \right\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |v(t)|^2 dt$$

علت استفاده از $|v(t)|$ بجای $v(t)$ اینست که سیگنالهای مختلط هم پوشش داده شود.

- **مثال: مقدار متوسط زمانی و توان متوسط سیگنال زیر را محاسبه نمایید.**

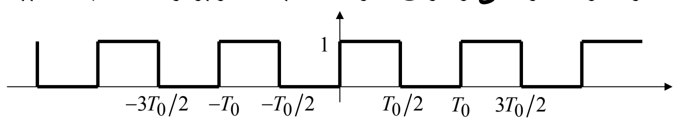
$$v(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- **پاسخ:** $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t)dt = 0$$

$$P = \left\langle |v(t)|^2 \right\rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{2}A^2$$

- **مثال: مقدار متوسط زمانی و توان متوسط سیگنال زیر را محاسبه نمایید.**



- **پاسخ:** $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0/2} 1.dt = \frac{1}{2}$$

$$P = \left\langle |v(t)|^2 \right\rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0/2} 1^2 dt = \frac{1}{2}$$

- بسط سری فوریه سیگنال پریودیک با پریود $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = |c_n| e^{j(\arg c_n)}$$

- بنابراین $v(t)$ بصورت فاز بردارهایی با دامنه های $|c_n|$ و فازهای $\arg c_n$ در فرکانسهای $nf_0 = 0, \pm f_0, \pm 2f_0, \pm 3f_0, \ldots$ قابل نمایش است.

- خواص سری فوریه:
  - o تمام فرکانسها مضرب صحیحی از f_0 هستند.
  - o به مولفه c_0 ، مولفه DC سیگنال $v(t)$ گفته می شود. مولفه DC سیگنال پریودیک، همان متوسط زمانی سیگنال است. یعنی:

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) dt = \langle v(t) \rangle$$

  - o اگر $v(t)$ سیگنال حقیقی (غیر مختلط) باشد، آنگاه خواهیم داشت:

یعنی طیف دامنه تقارن زوج و طیف فاز تقارن فرد دارد. $c_{-n} = c_n^*$

در این حالت می توان نوشت: $v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |2c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n)$

- **تعریف تابع سینک:**

در هنگام محاسبه سری فوریه و بعدها تبدیل فوریه، اغلب به انتگرال زیر بر می خوریم:

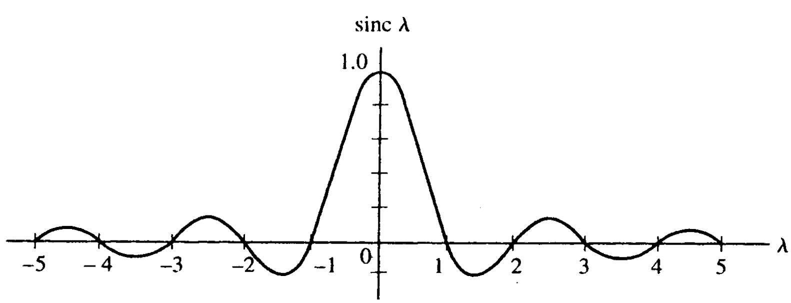
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi ft}\,dt = \frac{1}{j2\pi fT}\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi fT}\sin \pi fT$$

با تعریف تابع سینک بصورت مقابل: $\mathrm{sinc}\lambda = \dfrac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}$

مقدار انتگرال برابر با $\mathrm{sinc}\, fT$ **خواهد بود.**

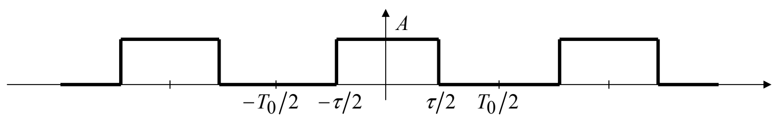
- **شکل تابع سینک بصورت زیر است:**



- **مثال: سری فوریه سیگنال $v(t)$ با پریود T_0 را محاسبه نمایید:**

$$v(t)=\begin{cases}0 & \dfrac{-T_0}{2}\le t\le\dfrac{-\tau}{2}\\ A & \dfrac{-\tau}{2}\le t\le\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & \dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{T_0}{2}\end{cases}$$

- **پاسخ: شکل سیگنال بصورت زیر است:**



ضرایب c_n بصورت زیر محاسبه می شوند:

$$c_n=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt$$

$$=\frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{-\tau/2}0.e^{-j2\pi nf_0t}dt+\int_{-\tau/2}^{\tau/2}A.e^{-j2\pi nf_0t}dt+\int_{\tau/2}^{T_0/2}0.e^{-j2\pi nf_0t}dt\right]$$

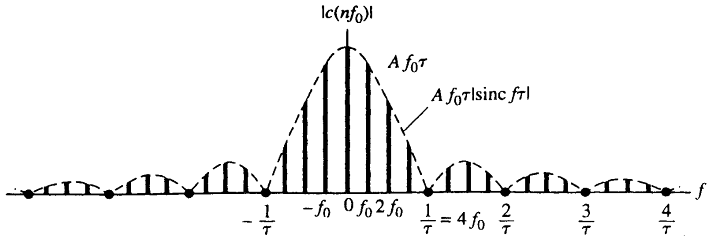
$$=\frac{A}{T_0}\left[\frac{1}{-j2\pi nf_0}\left(e^{-j2\pi nf_0\frac{\tau}{2}}-e^{-j2\pi nf_0\frac{-\tau}{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{A}{j2\pi n}\left(e^{j\pi nf_0\tau}-e^{-j\pi nf_0\tau}\right)$$

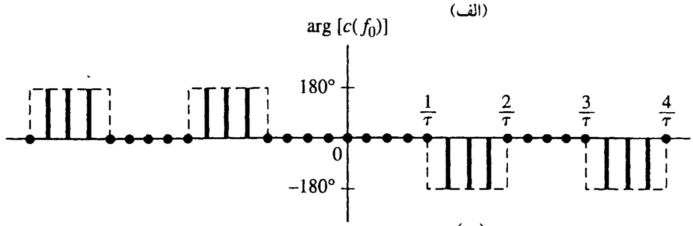
$$=Af_0\tau.\text{sinc}\ nf_0\tau$$

در این مثال ضرایب c_n ، مقادیر حقیقی بدست آمده اند.

به ازای $\tau=\frac{1}{4}T_0$ ، ضرایب c_n را بصورت اندازه دامنه و فاز رسم می نماییم.



(الف)



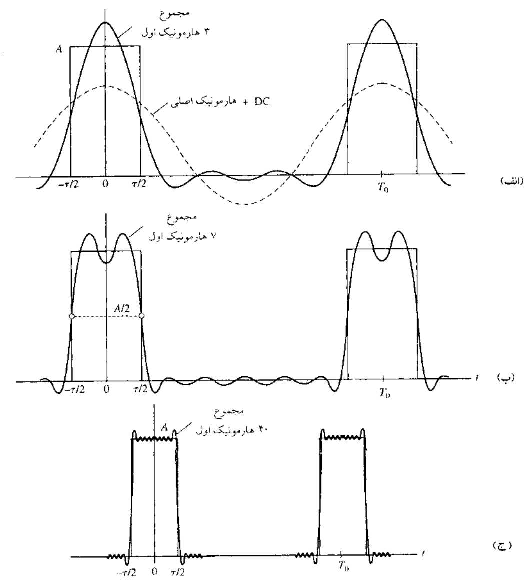
(ب)

اگر $v(t)$ را بصورت جملات بسط سری فوریه آن بنویسیم، خواهیم داشت:

$$v(t)=\frac{A}{4}+\frac{\sqrt{2}A}{\pi}\cos 1.2\pi f_0 t+\frac{A}{\pi}\cos 2.2\pi f_0 t+\frac{\sqrt{2}A}{3\pi}\cos 3.2\pi f_0 t+\ldots$$

به این جملات هارمونیک های $v(t)$ گفته می شود.

در شکل زیر نمودار $v(t)$ به ازای استفاده از چند جمله هارمونیک، بصورت نمونه آورده شده است.



- **قضیه توان پارسوال:**

ثابت می شود برای تابع پریودیک$v(t)$با ضرایب c_n ، می توان نوشت.

$$P=\left\langle \left|v(t)\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|v(t)\right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2$$

یعنی توان میانگین یک سیگنال پریودیک را می توان با مجذور و جمع کردن ارتفاع خطوط دامنه $\left|c_n\right|$ بدست آورد.

- **چند تمرین از سری فوریه:**

۱. اگر $c_v(n)$ ضرایب سری فوریه سیگنال پریودیک $v(t)$ باشند، ثابت کنید:

الف)

$$w(t) = Av(t) + b \Rightarrow \begin{cases} c_w(0) = Ac_v(0) + B \\ c_w(n) = Ac_v(n) \qquad , n \neq 0 \end{cases}$$

ب)

$$w(t) = v(t - t_d) \Rightarrow c_w(n) = c_v(n)e^{-jn2\pi f_0 t_d}$$

ج)

$$w(t) = \frac{d}{dt}v(t - t_d) \Rightarrow c_w(n) = (jn2\pi f_0)c_v(n)$$

۲. ضرایب سری فوریه توابع زیر را بدست آورید:

الف)

$$v(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \dfrac{T_0}{2} \\ -1 & \dfrac{-T_0}{2} < t < 0 \end{cases}$$

ب)

$$v(t) = 1 - \frac{4|t|}{T_0} \qquad |t| < \frac{T_0}{2}$$

- **تبدیل فوریه**

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f)e^{j2\pi ft}dt$$

- **در اینجا بجای c_n سری فوریه که به ازای مقادیر صحیح n تعریف شده بودند و طیف خطی ایجاد می شد، تابع $V(f)$ را داریم که یک طیف پیوسته در حوزه f ایجاد می کند.**

- **ویژگیهای تبدیل فوریه**

  - $V(f)$ **در حالت کلی تابعی مختلط است و لذا دارای اندازه** $|V(f)|$ **و فاز** $\arg V(f)$ **می باشد.**
  - **مقدار** $V(f)$ **در** $f=0$ **همان سطح زیر منحنی** $v(t)$ **است.**
  - **اگر** $v(t)$ **سیگنال حقیقی باشد، آنگاه** $V(f)$ **تقارن هرمیتی دارد یعنی:**

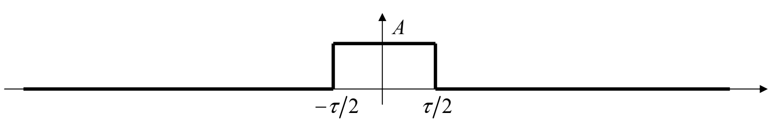
$$V(-f)=V^{*}(f)\Rightarrow\begin{cases}|V(f)|=|V(-f)|\\ \arg V(f)=-\arg V(-f)\end{cases}$$

یعنی دامنه تقارن زوج و فاز تقارن فرد دارد.

- **مثال: تبدیل فوریه تابع** $v(t)$ **را محاسبه نمایید:**

$$v(t)=A\Pi(\frac{t}{\tau})=\begin{cases}1 & |t|<\tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$$

پاسخ: شکل $v(t)$ **به صورت زیر است:**

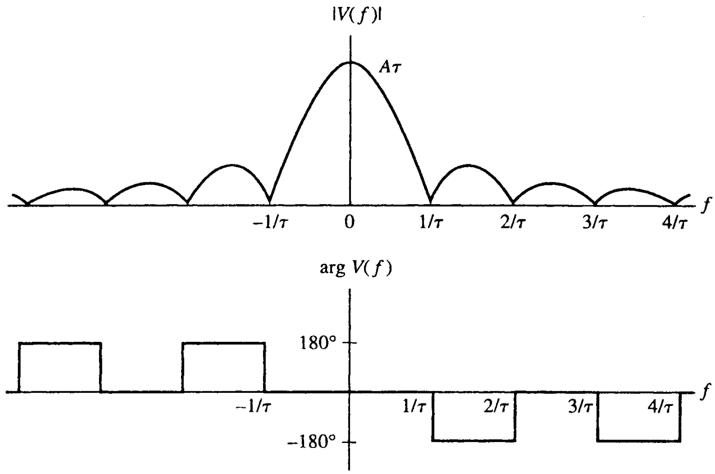


برای محاسبه تبدیل فوریه داریم:

$$V(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ae^{-j2\pi ft}dt=\frac{A}{-j2\pi f}\left(e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}}-e^{-j2\pi f\frac{-\tau}{2}}\right)$$

$$=A\tau\,\mathrm{sinc}\,f\tau$$

- شکل تبدیل فوریه بصورت زیر است:



- تبدیل فوریه در حقیقت حالت خاصی از تبدیل لاپلاس است که در آن $s = j\omega = j2\pi f$ را در نظر می گیریم.در حالت کلی برای تبدیل لاپلاس داریم: $s = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$

- مثال: تبدیل فوریه تابع $v(t)$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورید:

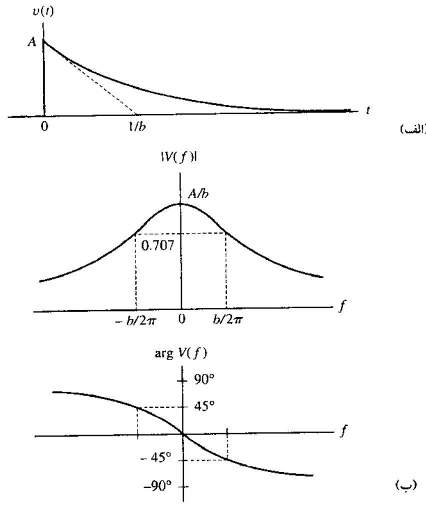
$$v(t) = \begin{cases} Ae^{-bt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

پاسخ:

$$L[v(t)] = \frac{A}{s+b}$$

$$s = j2\pi f \Rightarrow V(f) = \frac{A}{j2\pi f + b} \Rightarrow \begin{cases} |V(f)| = \dfrac{A}{\sqrt{(2\pi f)^2 + b^2}} \\ \arg V(f) = -arc\ tg\,\dfrac{2\pi f}{b} \end{cases}$$

- تغییرات دامنه و فاز$V(f)$ برحسب f بصورت زیر است:



- قضیه انرژی ریلی:
- مشابه قضیه پارسوال برای سیگنال متناوب است.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2 \, dt$$

- بنابراین $|V(f)|^2$ چگالی طیفی انرژی سیگنال است بطوریکه با انتگرالگیری روی آن از$-\infty$ تا $+\infty$ ، کل انرژی سیگنال بدست می آید.
- از روی چگالی طیفی، نحوه توزیع انرژی سیگنال در فرکانسهای مختلف بدست می آید.

- **تمرین: برای تابع** $v(t)=\begin{cases}Ae^{-bt} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$، **انرژی را از رابطه حوزه زمان و رابطه حوزه فرکانس محاسبه نمایید و صحت قضیه ریلی را نمایش دهید.**

- **خواص تبدیل فوریه:**

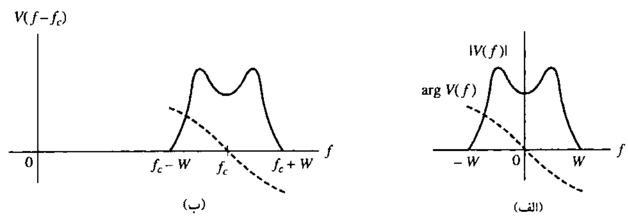
$$v(t)=a_1v_1(t)+a_2v_2(t)\Leftrightarrow V(f)=a_1V_1(f)+a_2V_2(f)$$

$$w(t)=v(t-t_d)\Leftrightarrow W(f)=V(f)e^{-j2\pi ft_d}\Rightarrow |W(f)|=|V(f)|$$

$$w(t)=v(\alpha t)\Leftrightarrow W(f)=\frac{1}{|\alpha|}V(\frac{f}{\alpha})\quad ,\alpha\neq 0$$

قضیه مدولاسیون

$$w(t)=v(t)e^{j2\pi f_c t}\Leftrightarrow W(f)=V(f-f_c)$$



$V(f-f_c)$ **پهنای طیفی دو برابر** $V(f)$ **دارد.**

- البته $v(t)e^{j2\pi f_c t}$ سیگنال حقیقی نیست و بصورت فیزیکی قابل ساختن نیست ولی با استفاده از این خاصیت می توان وضعیتهای حقیقی را مورد بررسی قرار داد. برای نمونه:

$$w(t) = v(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi) \Leftrightarrow W(f) = \frac{1}{2}e^{j\varphi}V(f - f_c) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}V(f + f_c)$$

- بعبارت دیگر، با ضرب یک سیگنال در حوزه زمان در یک سیگنال کسینوسی با فرکانس f_c ، شکل طیف آن هم در جهت $+f$ و هم در جهت $-f$ به اندازه f_c جابجا می شود که این اساس مدولاسیون AM است.

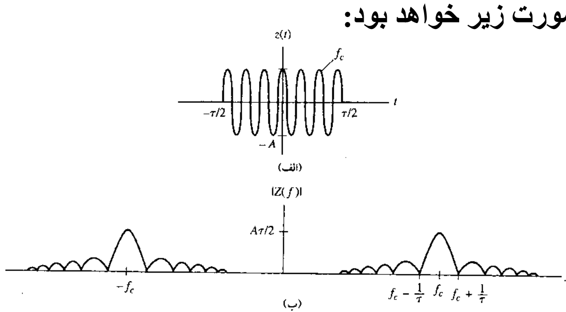
- مثال: قبلا داشتیم:

$$v(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow V(f) = A\tau \operatorname{sinc} ft$$

حال پس از ضرب در سیگنال کسینوسی داریم:

$$w(t) = v(t).\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow W(f) = \frac{A\tau}{2}\operatorname{sinc}(f - f_c)t + \frac{A\tau}{2}\operatorname{sinc}(f + f_c)t$$

شکل طیف بصورت زیر خواهد بود:



- **سایر خواص تبدیل فوریه:**

$$w(t)=\frac{d}{dt}v(t)\Leftrightarrow W(f)=(j2\pi f)V(f)$$

$$w(t)=\frac{d^n}{dt^n}v(t)\Leftrightarrow W(f)=(j2\pi f)^n V(f)$$

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t}v(\lambda)d\lambda\Leftrightarrow W(f)=\frac{1}{j2\pi f}V(f)$$

با فرض آنکه: $V(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(\lambda)d\lambda=0$

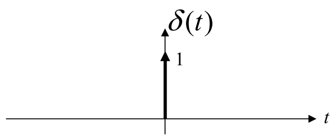
- **کانولوشن (پیچش):**

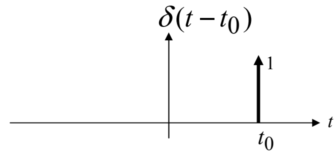
$$z(t)=v(t)*w(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(\lambda)w(t-\lambda)d\lambda$$

- **حاصل مجددا تابعی از زمان خواهد بود.**
- **یکی از راههای محاسبه کانولوشن، روش ترسیمی است.**
- **بعضی خواص مهم کانولوشن:**

$$v(t)*w(t)=w(t)*v(t)$$
$$v(t)*[w(t)*z(t)]=[v(t)*w(t)]*z(t)$$
$$v(t)*[w(t)+z(t)]=[v(t)*w(t)]+[v(t)*z(t)]$$
$$z(t)=v(t)*w(t)\Leftrightarrow Z(f)=V(f).W(f)$$
$$z(t)=v(t).w(t)\Leftrightarrow Z(f)=V(f)*W(f)$$

- سیگنال ضربه واحد: $\delta(t)$
- به نامهای ایمپالس و تابع دلتای دیراک هم خوانده می شود.
- نحوه نمایش آن بصورت زیر است:





- بصورت حد تعریف می شود:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

- تابع ضربه بیشتر از طریق خواص آن شناخته می شود:
- سطح زیر منحنی تابع ضربه برابر یک است و در نقطه $t=0$ متمرکز است و در هیچ جای دیگر سطحی را در بر نمی گیرد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)dt = 1$$

- سایر خواص:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t).\delta(t-t_d)dt = v(t_d)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t).\delta(t)dt = v(0)$$

$$v(t) * \delta(t-t_d) = v(t-t_d)$$

$$v(t).\delta(t-t_d) = v(t_d).\delta(t-t_d)$$

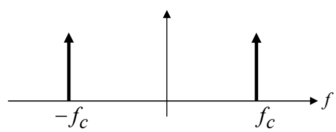
$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$$

- تابع ضربه در حوزه فرکانس نیز داریم: $\delta(f)$
- ثابت می شود:

$$v(t) = A \Leftrightarrow V(f) = A\delta(f)$$
$$v(t) = A\delta(t) \Leftrightarrow V(f) = A$$

- با استفاده از خواص تبدیل فوریه می توان نوشت:

$$v(t) = Ae^{j2\pi f_c t} \Rightarrow V(f) = A\delta(f - f_c)$$
$$v(t) = A\cos(2\pi f_c t + \varphi) \Leftrightarrow V(f) = \frac{Ae^{j\varphi}}{2}\delta(f - f_c) + \frac{Ae^{-j\varphi}}{2}\delta(f + f_c)$$



- تبدیل فوریه توابع پریودیک:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0)e^{jn2\pi f_0 t}$$
$$V(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0)\delta(f - nf_0)$$

یعنی تبدیل فوریه یک سیگنال پریودیک، شامل قطاری از ضربه ها با وزنهایی برابر با ضرایب سری فوریه است.