۸۸/۷/۱۴

میانترم ۲ آذر ماه ۹ و ۳

جلسه اول

مرجع : سیستم‌های مخابراتی (کارلسون)

مباحث : ۱- مقدمه ۲- تبدیل فوریه (فصل ۲ کتاب، اسئوال در میانترم) ۳- انتقال سیگنال و فیلتر کردن

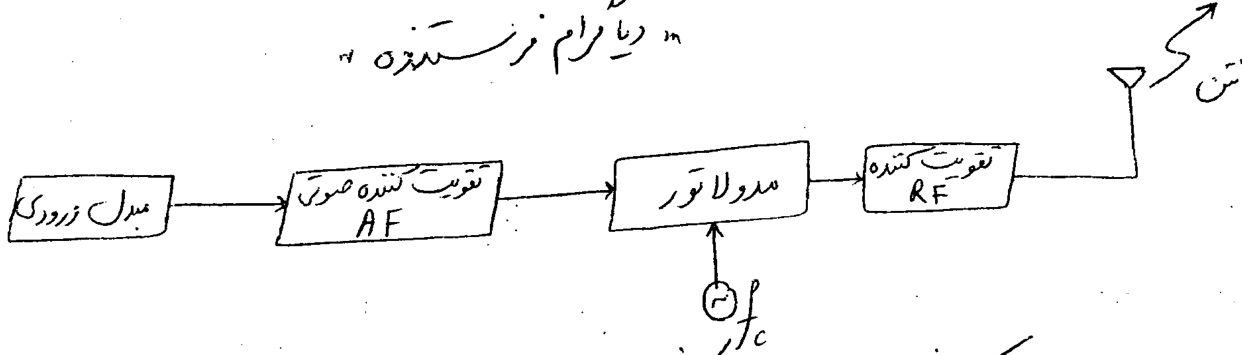
۴- مقدمه‌ای بر آمار و احتمال مهندسی (درس داده نمی‌شود و بطور مستقیم سئوال داده نمی‌شود)

۵- فرآیندها یا سیگنال‌های تصادفی ۶- مدولاسیون پیوسته خطی مانند : AM و DSB

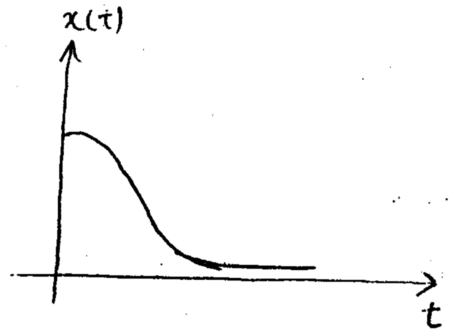
۷- مدولاسیون پیوسته نمایی فاز FM و PM ۸- گیرنده‌های رادیویی (میکسر).

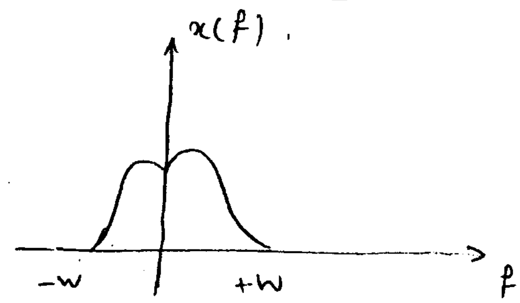
مقدمه :

« دیاگرام فرستنده »

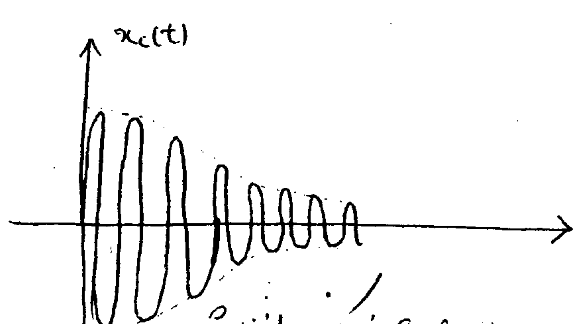


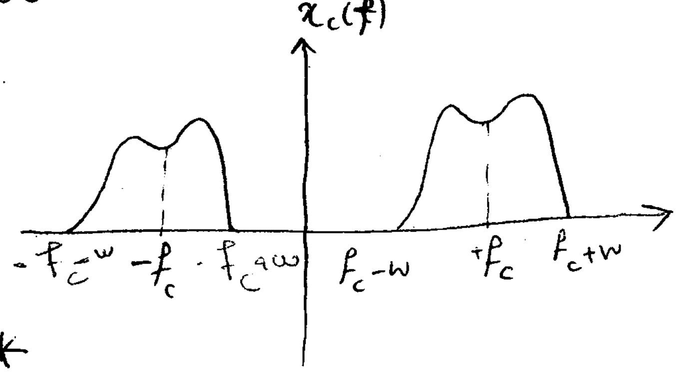
مدولاسیون : یک نوع بالا بردن فرکانس.





سیگنال مدوله شده $x_c(t) = x(t) \cos \omega_c t$





* با ضرب در cos فرکانس افزایش می‌یابد و اطلاعات از بین نمی‌رود و فقط شیفت می‌یابد.

عمل بکارگیری مدولاسیون :

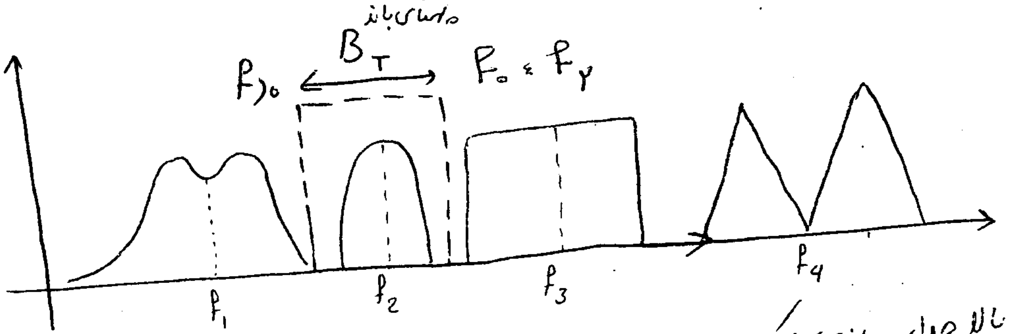
۱- کاهش سایز آنتن :

$$\text{ابعاد آنتن} \propto \frac{\lambda}{4} = \frac{v}{4f} = \frac{c}{4f} = \frac{3\times10^8}{4\times4\times10^3} \simeq 2\times10^4 \simeq 20\,km$$

نامناسب

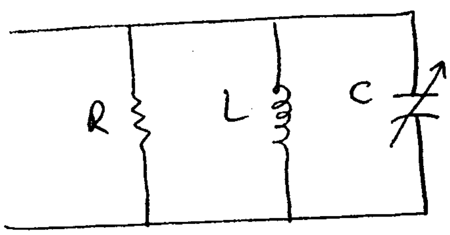
پس باید طول موج کاهش داد. (فرکانس را کاهش می دهیم)

۲- امکان ارسال همزمان چند فرستنده :



در فرکانس بالا جداسازی امکان پذیر نیست.

* مدولاسیون باعث می شود که شکل ها به صورت جداگانه منتقل شود و بر روی هم واقع نشوند.



فیلتر میان گذر ⇐

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

* مدار برای تنظیم دریافت یک فرکانس خاص.

۳- مقابله با نویز

۴- استفاده از کانال های مخابراتی مختلف.

انواع مدولاسیون :

۱- مدولاسیون دامنه (AM)

۲- مدولاسیون فاز (FM)

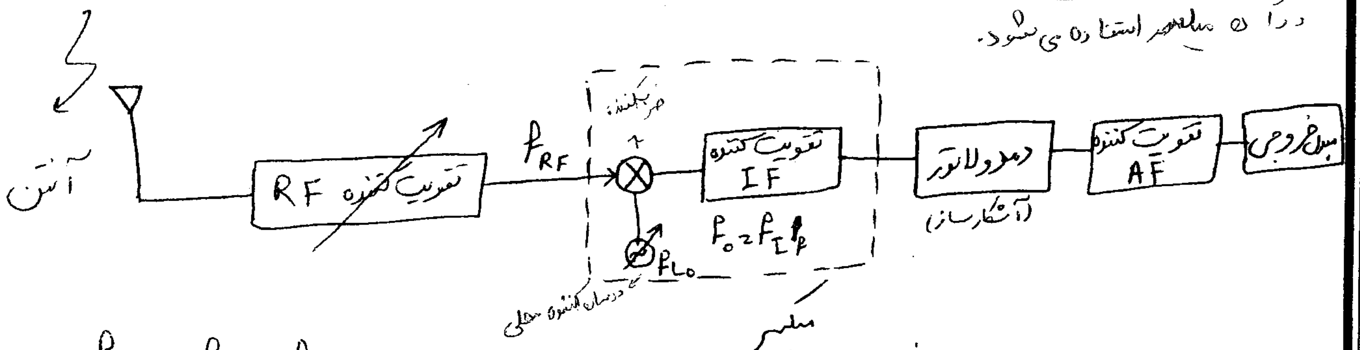
* مدولاتور عمل مدولاسیون را انجام می دهد.

* نویز یک سیگنال تصادفی است و شکل ~~خاص~~ مشخص ندارد.

سیگنال های تصادفی تبدیل فوریه ندارند.

دیاگرام گیرنده‌ها

- گیرنده‌های هیترودایم: گیرنده‌هایی که در آنها میکسر استفاده می‌شود.



$$f_{IF} = f_{RF} - f_{Lo}$$

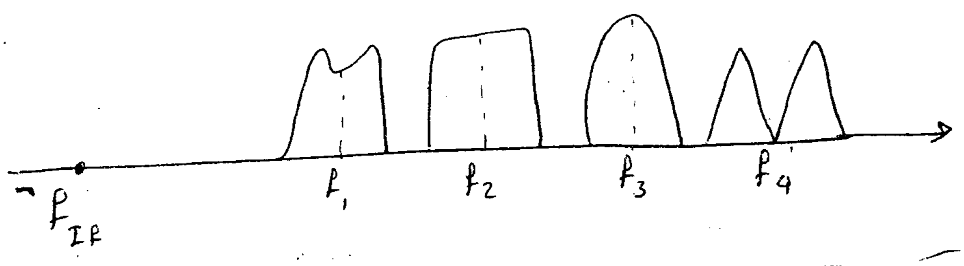
Q معمولاً در حد ۲۰۰ و ۳۰۰ می‌باشد.

ضریب کیفیت

$$Q = \frac{f_{IF}}{B_T}$$

$$Q = \frac{f_0}{B_T} = \frac{40\ MHZ}{8\ KHZ} = 5000$$

* هرچه ضریب کیفیت پائین‌تر باشد توانایی جدا کردن یک سمت از بقیه بیشتر است.
* علت استفاده از میکسر این است که فرکانس را پائین بیاوریم.



نحوه ارزیابی:
۱) ۴۵٪ میانترم
۲) ۵۵٪ پایانترم

۸۹/۲/۱۴ سه‌شنبه
تاریخ امتحان میانترم ۸۸/۹/۴

* فصل ۲ (تبدیل فوریه، سوال) و فصل ۳ (حل مسئله)
اثبات معادلات باشد

۸۸/۷/۲۱

فصل سوم: انتقال سیگنال و فیلتر کردن

۱- سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI):

$$y(t) = F[x(t)]$$

خاصیت خطی بودن
$$\begin{cases} x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \\ y(t) = \sum_k a_k F[x_k(t)] \end{cases}$$

۲- خاصیت تغییر ناپذیر با زمان:

$$F[x(t-t_d)] = y(t-t_d)$$

پاسخ ضربه واحد: $h(t) = F[\delta(t)]$

قضیه: در سیستم های LTI پاسخ سیستم به ورودی دلخواه، کانولوشن آن ورودی با پاسخ ضربه آن سیستم خواهد بود.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

اثبات:

نکته: هر تابعی با ضربه کانوالو شود، می شود خودش:

$$\cancel{y}\,x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = F[x(t)] = F[x(t) * \delta(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda\right]$$

با توجه به خطی بودن:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,F[\delta(t-\lambda)]\,d\lambda$$

با توجه به خاصیت تغییر ناپذیری با زمان:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,F[\delta(t-\lambda)\,d\lambda]$$

با توجه به خاصیت تعریف کانولوشن:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda = x(t) * h(t)$$

$$g(t) = F[u(t)]$$

پاسخ پله :

تعریف : در سیستم های LTI با زمان رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله به صورت زیر بیان می شود .

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$ (تابع ضربه مشتق تابع پله است)

$$\frac{d}{dt}\big(v(t) * w(t)\big) = v(t) * \frac{dw(t)}{dt}$$

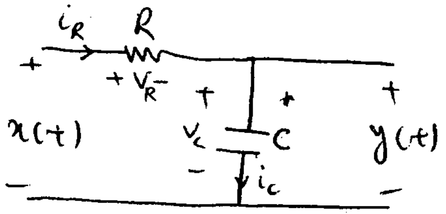
اثبات :

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(h(t) * w(t)\big) \Rightarrow h(t) * \frac{dw(t)}{dt} = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

مهم : در سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان رابطه خروجی بوسیله ی یک معادله خطی تغییر ناپذیر بیان می گردد :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

مثال : پاسخ زمانی سیستم مرتبه اول :



(I) $V_R + V_c = x(t)$ (II) $i_R = i_c = C\frac{dV_c}{dt} \xRightarrow{IV,\ II,\ III} RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

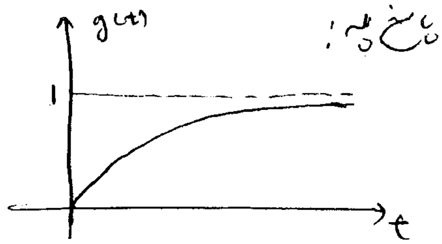
(III) $V_c = y(t)$ (IV) $V_R = R\, i_R$

معادله دیفرانسیل بین ورودی و خروجی :

$g(t) = ?$ $g(t) = F[u(t)]$

$x(t) = u(t)$ $\Rightarrow g(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\,u(t)$

پاسخ پله :

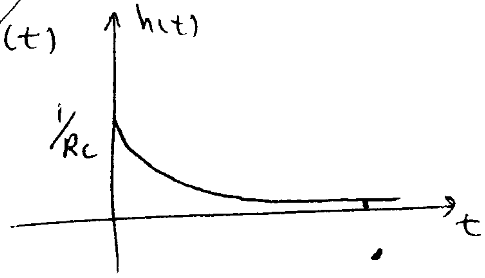


پاسخ ضربه : چون پاسخ پله داریم از آن مشتق می‌گیریم :

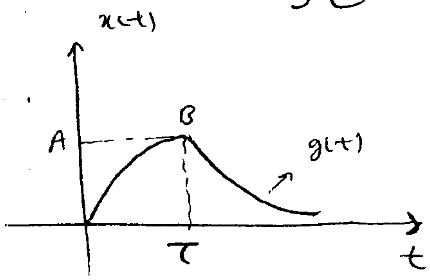
$h(t) = ?$

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \cancel{\delta(t)}^{\,0}$$

در پاسخ ضربه همیشه $\Rightarrow$ $$= \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



پاسخ پالس :



$t < 0 \longrightarrow y(t) = 0$

$0 \leq t \leq \tau \longrightarrow y(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

$t \geq \tau \longrightarrow y(t) = B e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}$

$B = A(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

$$y(t) = \begin{cases} 0 \\ A(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \\ A(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\, e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} \end{cases}$$

---

* تابع تبدیل و پاسخ فرکانسی :

تابع تبدیل $\quad H(f) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$

* اگر $h(t)$ یک تابع حقیقی باشد $H(f)$ تقارن هرمیتی بصورت زیر دارد :

$H(-f) = H^*(f)$

* هر تابع حقیقی تبدیل فوریه آن دارای تقارن هرمیتی است .

$$H^*(f) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt = H(-f)$$

بنابراین :

1) $|H(-f)| = |H(f)|$ تقارن زوج

2) $\measuredangle H(-f) = -\measuredangle H(f)$ 〃 فرد

در حوزه زمان

در حوزه فرکانس

$$y(t) = h(t) * x(t) \longrightarrow Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$\Rightarrow y(t) = F^{-1}[Y(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [H(f) * X(f)]\, e^{+j2\pi f t}\, df$$

$$|Y(f)| = |H(f)|\,|X(f)|$$

$$\measuredangle Y(f) = \measuredangle X(f) + \measuredangle H(f)$$

* پیدا کردن $H(f)$ (تابع تبدیل) با استفاده از معادله دیفرانسیلی ورودی - خروجی :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) =$$

$$a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

حال از دو طرف تبدیل فوریه می‌گیریم :

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{a_m (j2\pi f)^m + a_{m-1}(j2\pi f)^{m-1} + \cdots + a_1 (j2\pi f) + a_0}{b_n (j2\pi f)^n + b_{n-1}(j2\pi f)^{n-1} + \cdots + b_1 (j2\pi f) + b_0}$$

* پیدا کردن $H(f)$ تابع تبدیل با استفاده از فازورهای ورودی - خروجی :

امپدانس مقاومت $Z_R = R$

امپدانس سلف $Z_L = j2\pi L f$

امپدانس خازن $Z_C = \dfrac{1}{j2\pi f C}$

فازور ولتاژ $V = Z I$ فازور جریان

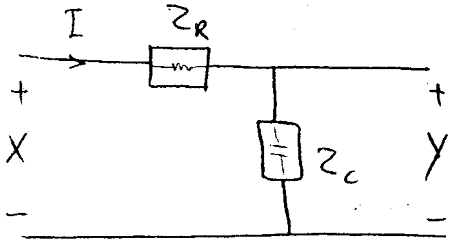
امپدانس

$$H(f) = \frac{Y}{X}$$

$Y \longrightarrow$ فازور خروجی

$X \longrightarrow$ فازور ورودی

مثال : پاسخ فرکانسی مدار مرتبه اول :



منظور از پاسخ فرکانسی رسم همزمان اندازه و فاز تابع تابع $H(f)$ می‌باشد.

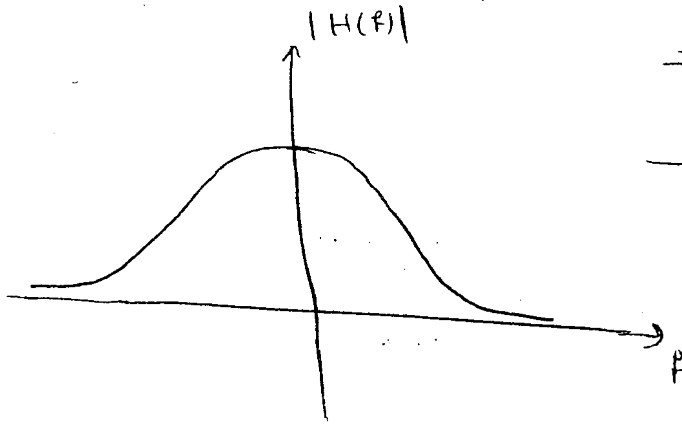
$$Y = I Z_c = \left(\frac{X}{Z_c+Z_R}\right) Z_c$$

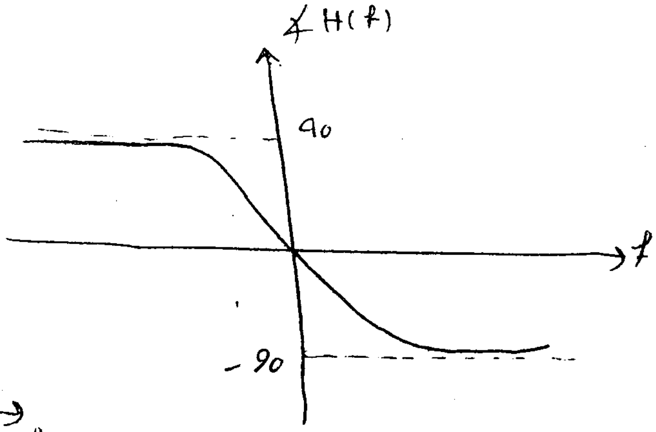
$$Z_R = R \qquad Z_c = \frac{1}{j\underbrace{2\pi f}_{\omega} C}$$

$$H(f) = \frac{Y}{X} = \frac{Z_c}{Z_c+Z_R} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{\frac{1}{j2\pi fC}+R} = \frac{1}{1+j2\pi fRC}$$

$$B \triangleq \frac{1}{2\pi RC} \longrightarrow H(f) = \frac{1}{1+j\left(\frac{f}{B}\right)} \longrightarrow H(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}}$$

$$\measuredangle H(f) = -tg^{-1}\left(\frac{f}{B}\right)$$





۸۸/۷/۲۸

جلسه سوم

* تحلیل با نمودار بلوکی:

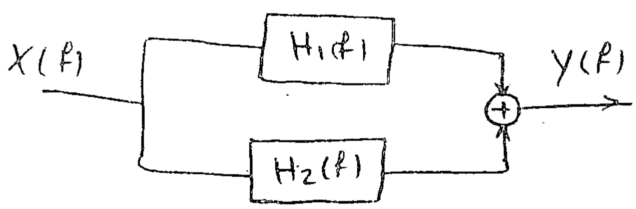
$$y(t) = \pm k\,x(t) \Longrightarrow H(f) = \pm K$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{d(t)} \Longrightarrow H(f) = (j2\pi f)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda \Longrightarrow H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

تأخیر: $y(t) = x(t-t_d) \Longrightarrow H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$

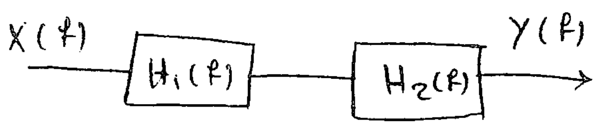
* اتصال موازی:



$$Y(f) = X(f)H_1(f) + X(f)H_2(f)$$

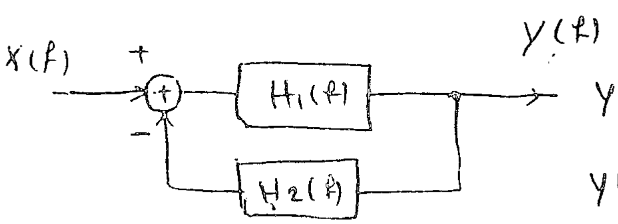
$$\Longrightarrow H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

* اتصال سری:



$$Y(f) = [X(f)H_1(f)]\,H_2(f) \Longrightarrow H(f) = H_1(f)\cdot H_2(f)$$

* اتصال فیدبک دار:

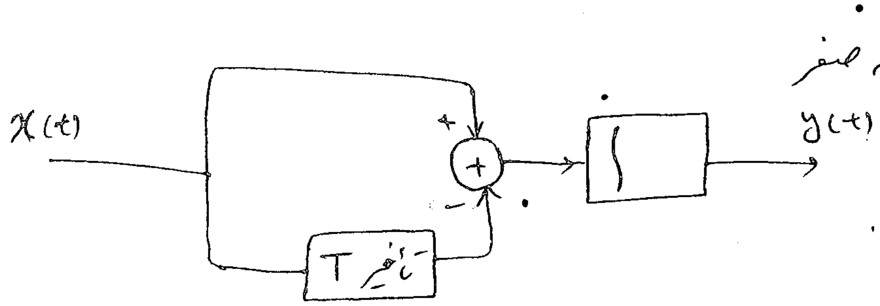


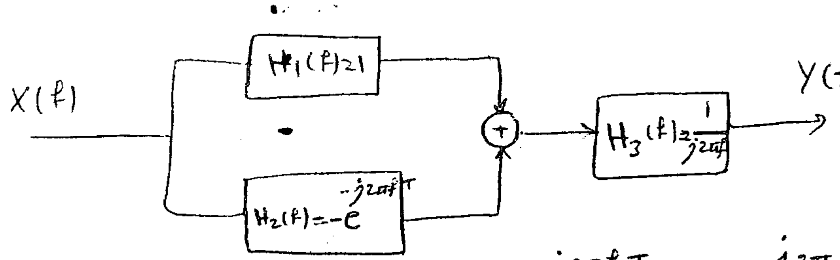
$$Y(f) = [X(f) - Y(f)H_2(f)]\,H_1(f)$$

$$Y(f)[1 + H_1(f)H_2(f)] = X(f)H_1(f)$$

$$\Longrightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

مثال : مدار نگهدار مرتبه صفر





$$H(f)=[H_1(f)+H_2(f)]H_3(f)=\frac{1-e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}=e^{-j\pi fT}\left(\frac{e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}}{j2\pi f}\right)$$

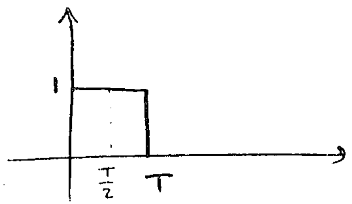
$$=e^{-j\pi fT}\frac{\sin\pi fT}{\pi f}=Te^{-j\pi fT}\operatorname{sinc} fT$$

$\operatorname{sinc} fT=\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}$

روش دوم :

$$x(t)=\delta(t)\Rightarrow y(t)=h(t)$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}[\delta(\lambda)-\delta(\lambda-T)]\,d\lambda=u(t)-u(t-T)$$



$$x(t)=\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\xleftrightarrow[]{\overset{\text{تبدیل فوریه}}{F}}X(f)=T\operatorname{sinc} fT$$

$$h(t)=x\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

$$\Rightarrow H(f)=X(f)e^{-j\pi fT}=Te^{-j\pi fT}\operatorname{sinc} fT$$

---

* اعوجاج سیگنال در انتقال: عوض شدن شکل موج خروجی نسبت به ورودی را اعوجاج می نامند. (ضریب ثابت و تاخیر زمانی اعوجاج محسوب نمی شود)

* انتقال بدون اعوجاج: ترکیب انتقال بدون اعوجاج خروجی می تواند تنها در یک ضریب ثابت و یک تاخیر زمانی ثابت با ورودی تفاوت داشته باشد.

مثل $\Rightarrow y(t)=K_1x(t-t_d)$

بدست آوردن تابع تبدیل اعوجاج قبلی $\Rightarrow y(f) = K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_d}$

تابع تبدیل $H(f) = K e^{-j2\pi f t_d}$

* بنابراین در یک سیستم بدون اعوجاج :

۱) $|H(f)| = K$

۲) $\measuredangle H(f) = -2\pi f t_d \pm m180$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{فرد} \\ \text{زوج}\end{array}}$ — k_1 مثبت باشد عدد زوج، k_1 منفی باشد عدد فرد

* اگر دامنه ثابت و منفی باشد m یک عدد فرد و مثبت در نظر می‌گیریم.

* در یک سیستم غیرخطی خروجی به توانهای بالاتری از ورودی نیز بستگی دارد.

شده: $y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \cdots$

$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{تبدیل فوریه}} Y(f) = a_1 X(f) + a_2 X(f)*X(f) + a_3 X(f)*X(f)*X(f) + \cdots$

بنابراین در سیستمهای غیرخطی حتماً اعوجاج وجود دارد.

* بر این اساس سه نوع اعوجاج را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱- اعوجاج دامنه که به ازای شرط زیر رخ می دهد: $|H(f)| \neq K$

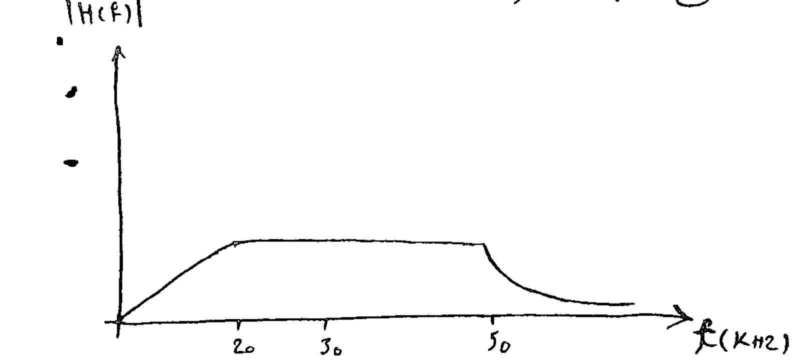
۲- اعوجاج فاز (تأخیر) که به ازای شرط زیر رخ می دهد: $\measuredangle H(f) \neq -2\pi f t_d \pm m180$

۳- اعوجاج غیرخطی که در صورت وجود اجزاء غیرخطی رخ می دهد.

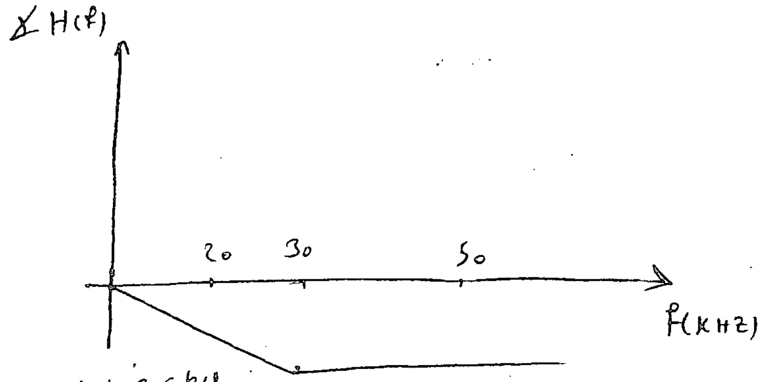
۸۸/۸/۵

جلسه چهارم

مثال: پاسخ فرکانسی یک سیستم انتقال در شکل زیر نشان داده شده است. این سیستم در چه ناحیه‌ای از باند فرکانسی بدون اعوجاج می‌باشد؟



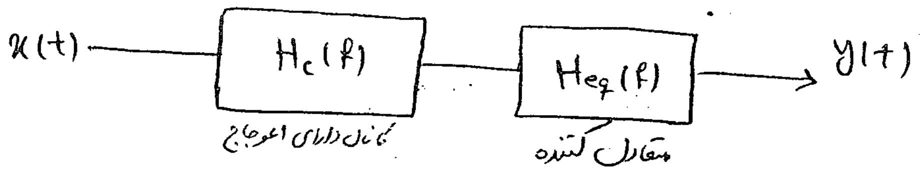
بین فاصله‌ی 20 تا 30 سیستم بدون اعوجاج است.



رابطه‌ی خطی دارد.

---

* متعادل کننده یا اکولایزر یا جبران ساز :

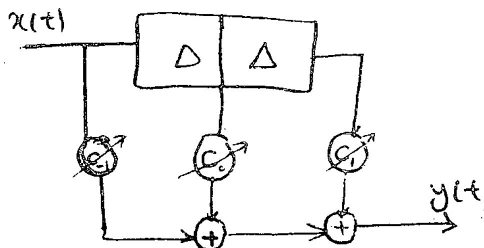


$$H_c(f)\,H_{eq}(f) = K e^{-j2\pi f t_d}$$

$$\boxed{H_{eq}(f) = \frac{K e^{-j2\pi f t_d}}{H_c(f)}}$$

تابع تبدیل

* متعادل کننده خط تأخیر برگ‌دار یا فیلتر عرضی :



$$y(t) = C_{-1}x(t) + C_0\, x(t-\Delta) + C_1\, x(t-2\Delta)$$

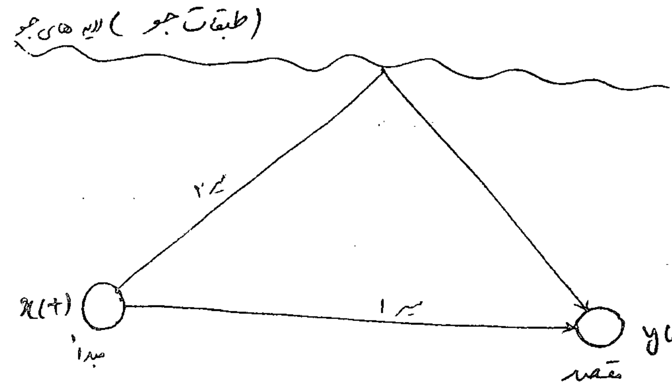
تبدیل فوریه از $y(t)$ می‌گیریم $\Rightarrow$ $H(f) = c_{-1} + c_0 e^{-j\omega\Delta} + c_1 e^{-j\omega 2\Delta}$

$$\Rightarrow H(f) = \left(c_{-1} e^{+j\omega\Delta} + c_0 + c_1 e^{-j\omega\Delta} \right) e^{-j\omega\Delta}$$

با تعمیم معادله‌ی فوق به حالت خط تأخیر $2M\Delta$ با $2M+1$ سر خواهیم داشت :

$$H(f) = \left(\sum_{m=-M}^{M} c_m e^{-j\omega m\Delta} \right) e^{-j\omega M\Delta}$$

مثال : اعوجاج چندمسیره



انتقال سیگنال از طریق طبقات جو : پدیده اسکترینگ

$$y(t) = K_1 x(t-t_1) + K_2 x(t-t_2)$$

تبدیل فوریه $\Rightarrow Y(f) = K_1 X(f) e^{-j\omega t_1} + K_2 X(f) e^{-j\omega t_2}$

تابع تبدیل $H_c(f) = K_1 e^{-j\omega t_1} + K_2 e^{-j\omega t_2}$

فرض : $t_2 > t_1$

$$\Rightarrow H_c(f) = k_1 e^{-j\omega t_1} \left(1 + k_0 e^{-j\omega t_0}\right)$$

$$k_0 = \frac{k_2}{k_1} \quad ; \quad t_0 = t_2 - t_1$$

متعادل کننده یا اکولایزر برای این سیستم باید دارای خاصیت زیر باشد یعنی اینکه :

$$H_c(f) H_{eq}(f) = K e^{-j\omega t_d}$$

$$H_{eq}(f) = \frac{K e^{-j\omega t_d}}{H_c(f)} \Rightarrow H_{eq}(f) = \frac{K e^{-j\omega t_d}}{k_1 e^{-j\omega t_1} \left(1 + k_0 e^{-j\omega t_0}\right)}$$

برای سادگی شکل متعادل کننده با انتخاب $t_d = t_1$ و $K = K_1$ خواهیم داشت :

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{1 + k_0 e^{-j\omega t_0}}$$

اگر $\alpha \ll 1$:

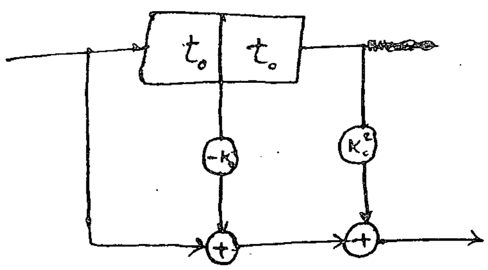
$$1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\cdots=\frac{1}{1+\alpha}$$

بنابراین با توجه به $K_0=\frac{K_2}{K_1}\ll 1$ $(K_0\ll K_1)$ خواهیم داشت:

$$H_{eq}(f)=\frac{1}{1+K_0e^{-j\omega t_0}}=1-K_0e^{-j\omega t_0}+K_0^2e^{-j\omega 2t_0}-K_0^3e^{-j\omega 3t_0}+\cdots$$

چون که $K_0\ll K_1$ است داریم: (از جمله سوم به بعد صرف نظر می‌کنیم)

$$H_{eq}\simeq 1-K_0e^{-j\omega t_0}+K_0^2e^{-j\omega 2t_0}=\underbrace{\left(1e^{+j\omega t_0}-K_0+K_0^2e^{-j\omega t_0}\right)}_{\text{خط تأخیر سرک دار}}e^{-j\omega t_0}$$



* اعوجاج غیرخطی:

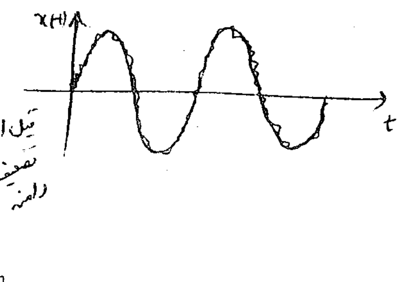
همانطور که قبلاً گفته شد در سیستم‌های غیرخطی خروجی به توان‌های بالاتری از ورودی نیز بستگی دارد:

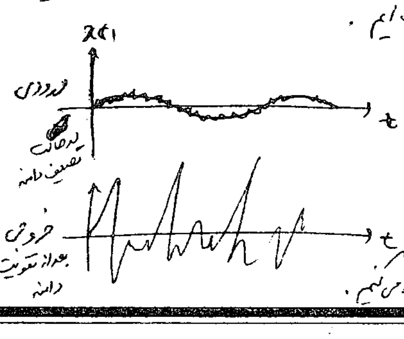
$$y(t)=a_1x(t)+a_2x^2(t)+a_3x^3(t)+\cdots$$

$$Y(f)=a_1X(f)+a_2X(f)*X(f)+a_3X(f)*X(f)*X(f)+\cdots$$

* اگر دامنه سیگنال را خیلی ضعیف کنیم خروجی تقریباً شبیه ورودی است یعنی اعوجاج کم است.

* البته با کاهش دامنه در حد میلی ولت ممکن است نویز روی سیگنال بیفتد چون که نویز نیز در حد میلی ولت است و اگر در خروجی دامنه را تقویت کنیم در کل نویز را نیز همراه دامنه تقویت کرده‌ایم.



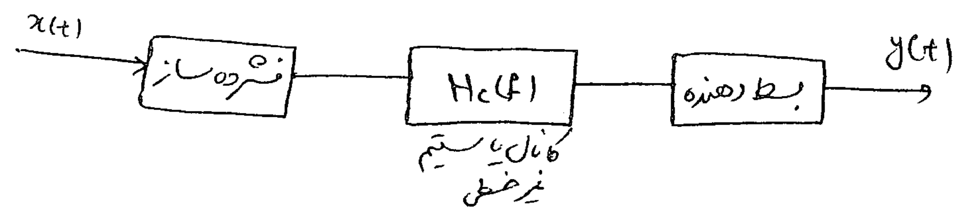


* اگر دامنه را خیلی کم کنیم با نویز ترکیب می‌شود و در حقیقت سیگنال را حذف می‌کند که برای این کار از دو روش فشرده‌ساز و بسط‌دهنده استفاده می‌کنیم.

فشرده ساز و بسط دهنده : مثل لگاریتم

فشرده ساز $T_{com}[x(t)]$

بسط دهنده $T_{exp}[T_{com}[x(t)]] = x(t)$ مثل آنتی لگاریتم



* تلفات انتقال :

۸۸/۸/۱۲

جلسه پنجم

* تلفات انتقال و دسیبل :

بهره توان $g = \dfrac{P_{out}}{P_{in}}$

$P_{in} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow P_{out}$

$P_{out} = g P_{in}$

$$g_{dB} = 10 \log g = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} \Longrightarrow g = 10^{\left(\frac{g_{dB}}{10}\right)}$$

* یک وات 0 dBW و 30 dBm است.

$$P_{dBW} = 10 \log \frac{P}{1w} \qquad P_{dBm} = 10 \log \frac{P}{1mw}$$

$$\Longrightarrow g_{dB} = P_{out\,dBW} - P_{in\,dBW} \Longrightarrow P_{out\,dBW} = P_{in\,dBW} + g_{dB}$$

$$P_{out\,dBm} = P_{in\,dBm} + g_{dB}$$

* در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان می‌توان نشان داد:

تابع تبدیل

$$g = |H(f)|^2$$

$$Y(f) = X(f)\,H(f)$$

$$|Y(f)| = |X(f)|\,|H(f)|$$

با اثبات:

$\omega = 2\pi f$

(موج تک فرکانس یعنی یک موج سینوسی)

ورودی

$$x(t) = A_x \cos \omega t$$
$$y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow A_y = A_x |H(f)|$$

$$\Longrightarrow \frac{A_y^2}{2} = \frac{A_x^2}{2} |H(f)|^2$$

توان متوسط خروجی $P_y = \dfrac{A_y^2}{2}$

$$\Longrightarrow g = \frac{P_y}{P_x} = |H(f)|^2$$

توان متوسط ورودی $P_x = \dfrac{A_x^2}{2}$

* اگر داشته باشیم $|H(f)|=K$ مقدار ثابت آنگاه خواهیم داشت $g=K^2$.

* تلفات انتقال و تکرار کننده ها :

* در تقویت کننده توان خروجی بیشتر از توان ورودی است . $g>1$

* در جایی که توان ورودی بیشتر از توان خروجی است تلفات داریم :

$L>1$: در خطوط انتقال و کابل ها

تلفات انتقال $L=\frac{P_{in}}{P_{out}}=\frac{1}{g}$

$$L = 10\log L = 10\log\frac{P_{in}}{P_{out}} = -g_{dB} \qquad g_{dB}=P_{out\,dBW}-P_{in\,dBW}$$

$$P_{out\,dBW}=P_{in\,dBW}-L_{dB} \qquad P_{out\,dBm}=P_{in\,dBm}-L_{dB}$$

* معمولاً در کابل ها ، فیبرهای نوری ، موج برها و ... رابطه ی بین توان ورودی و خروجی بصورت زیر بیان می شود :

$$P_{out}=10^{-(\frac{\alpha l}{10})}P_{in}$$

α : ضریب تضعیف

بستگی به جنس و نوع کانال دارد .

l : طول کابل (هرچه l بزرگتر باشد تلفات بیشتر است یعنی توان خروجی کمتر است)

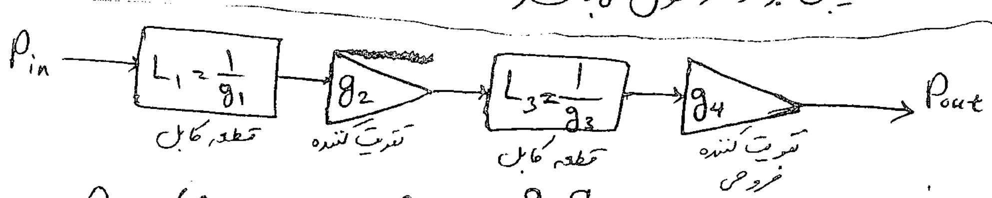
تلفات انتقال $L=10^{(\frac{\alpha l}{10})}$

تلفات برحسب دسیبل $L_{dB}=\alpha l$

* با توجه به رابطه ی فوق واحد α دسیبل بر واحد طول می باشد .

مثال :

رابطه ی بین توان خروجی و ورودی را بنویسید .



$$P_{out}=(g_1g_2g_3g_4)P_{in}=\left(\frac{g_2g_4}{L_1L_3}\right)P_{in}$$

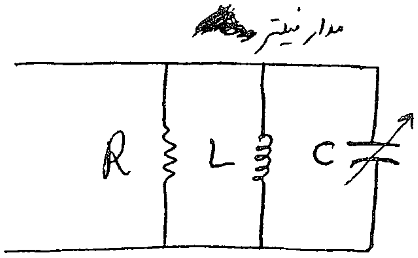
رابطه ی فوق برحسب دسیبل بصورت زیر نوشته می شود :

$$P_{out}=(g_2+g_4-L_1-L_3)+P_{in}$$

* فیلتر و فیلتر کردن :

فیلتر ایده‌آل : درعمل قابل ساخت نیست.

فیلتر غیر ایده‌آل : درعمل می‌توان ساخت.

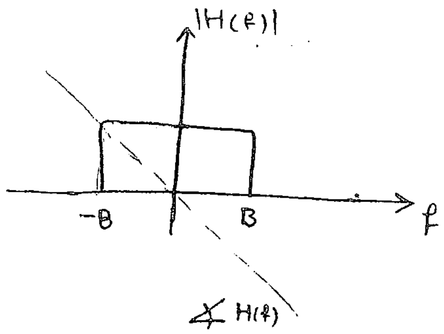


$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

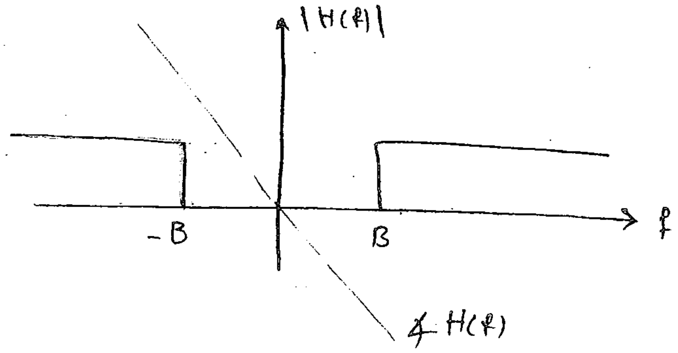
* انواع فیلترها :

* فیلتر پائین گذر ایده‌آل :

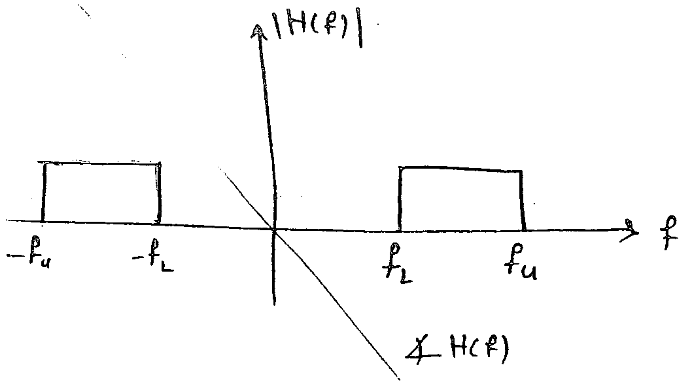
در ناحیه $B-0$:
مقدار ثابت و فازش رابطه‌ی خطی با فرکانس دارد.



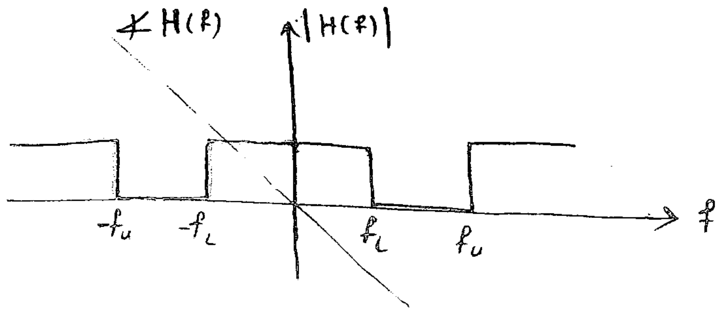
* فیلتر بالاگذر ایده‌آل :



* فیلتر میان گذر ایده‌آل :



* فیلتر میان نگذر ایده‌آل :



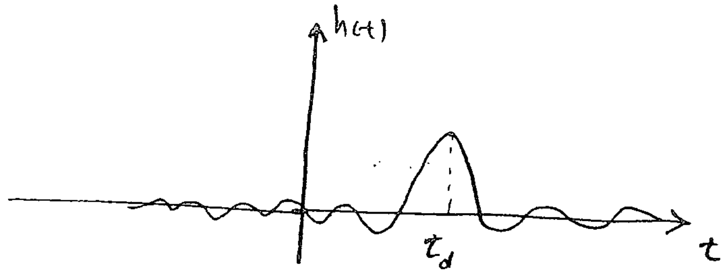
* فیلتر پائین گذر ایده‌آل :

در فاصله بین B و B- بدون اعوجاج است
و در خارج از آن صفر است.

فرکانس قطع : B

$$H(f) = K e^{-j2\pi f t_d} \overset{\text{پاس}}{\Pi}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

پاسخ ضربه $h(t) = 2KB \operatorname{sinc} 2B(t-t_d)$



~~پاسخ قبل از صفر~~
~~پاسخ قبل از ورودی نیز وجود دارد.~~

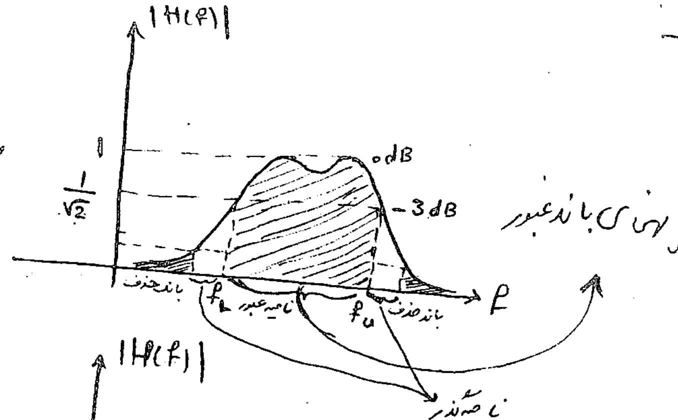
* در سیستم‌های علّی خروجی قبل از ورودی وجود ندارد.

در پاسخ ضربه در زمان‌های قبل از صفر مقدار صفر است.

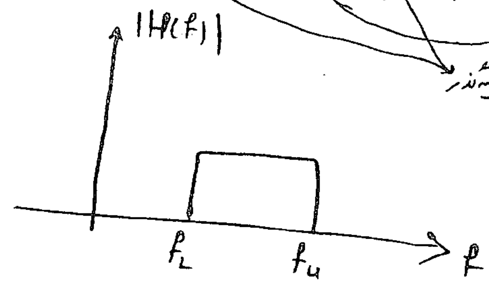
فیلتر میان گذر واقعی یا عملی :

$$20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$$

واقعی



فیلتر میان گذر ایده‌آل



* فیلترهای پائین گذر باتروورث :

$$H(f) = \frac{1}{P_n(\frac{jf}{B})}$$

$P_n(\frac{jf}{B})$: چندجمله‌ای باتروورث

$$\Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{f}{B})^{2n}}}$$

۱) $P_n(\frac{jf}{B})$ یک چندجمله‌ای مرتبه n برحسب $(\frac{jf}{B})$ می‌باشد.

۲) فرکانس قطع 3dB فیلتر می‌باشد.

۳) خاصیت چندجمله‌ای : $|P_n(\frac{jf}{B})|^2 = 1+(\frac{f}{B})^{2n}$

$$P_n\left(\frac{jf}{B}\right) = 1 + \frac{jf}{B}$$

$$\left|P_n\left(\frac{jf}{B}\right)\right|^2 = 1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2$$

$$P_n\left(\frac{jf}{B}\right) = 1 + \sqrt{2}\left(\frac{jf}{B}\right) + \left(\frac{jf}{B}\right)^2$$

$$= \left[1 - \left(\frac{f}{B}\right)^2\right] + \frac{j\sqrt{2}f}{B}$$

$$\left|P_n\left(\frac{jf}{B}\right)\right|^2 = \left[1 - \left(\frac{f}{B}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\sqrt{2}f}{B}\right)^2$$

$$= 1 + \left(\frac{f}{B}\right)^4$$

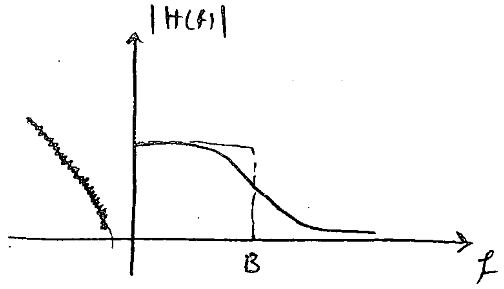
$\alpha = \frac{jf}{B}$

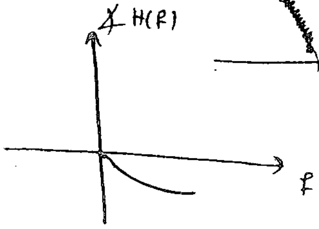
$P_n(\alpha)$	n
$1+\alpha$	$\leftarrow 1$
$1+\sqrt{2}\alpha+\alpha^2$	$\leftarrow 2$
$(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$	$\leftarrow 3$
$(1+0.765\alpha+\alpha^2)(1+1.848\alpha+\alpha^2)$	$\leftarrow 4$
⋮	

برای $n=3$:

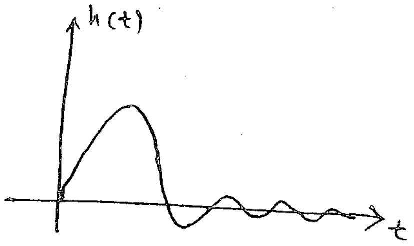
$$H(f) = \frac{1}{\left(1+\frac{jf}{B}\right)\left[1+\left(\frac{jf}{B}\right)+\left(\frac{jf}{B}\right)^2\right]}$$

طبق تعریف $|H(f)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{B}\right)^6}}$





پاسخ ضربه‌اش:

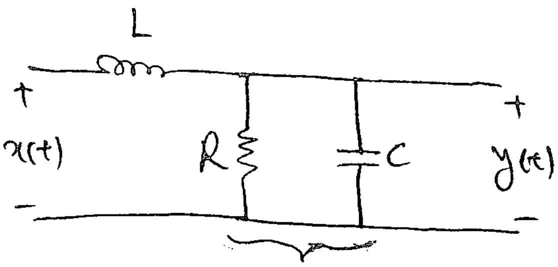


تمرین: فصل ۳ : 1-1 , 1-۲ , 1-۶ , 1-۸ , 1-۱۰ , 2-4 , 2-5 , 2-9 , 3-1 , 3-3 ,
4-5 , 4-7 , 4-9 , 4-17 .

۸۸/۸/۱۹

جلسه پنجم (ششم)

* مهم مثال: مدار شکل زیر رابطه‌ای را بین R، L و C پیدا کنید که این مدار یک فیلتر پایین‌گذر باتروورث مرتبه‌ی دو با پهنای باند 3dB، $B = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ باشد.



Z_{RC}

$$Z_{RC} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$H(f) = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + Z_L}$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$H(f) = \frac{\frac{R}{1 + j\omega RC}}{\frac{R}{1 + j\omega RC} + j\omega L} = \frac{R}{R + j\omega L - \omega^2 RLC}$$

$$\Longrightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R}\right) - \omega^2 LC}$$

P_n چندجمله‌ای باترورث (در سؤال داده می‌شود)

$$P_n(\alpha) = 1 + \sqrt{2}\,\alpha + \alpha^2 \quad ; \quad \alpha = \frac{jf}{B} \Longrightarrow H(f) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\left(\frac{jf}{B}\right) - \left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

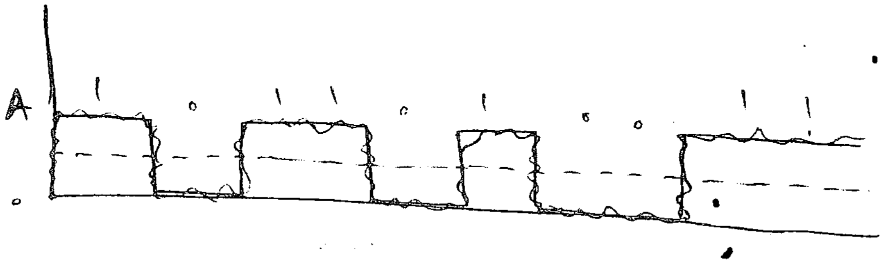
$$H(f) = \frac{1}{P_n\left(\frac{jf}{B}\right)}$$

$$\xrightarrow{*} \frac{\sqrt{2}\, f}{B} = \frac{\omega L}{R} \Longrightarrow \sqrt{2}\, \cancel{2\pi} \sqrt{LC}\, \cancel{f} = \frac{\cancel{2\pi f} L}{R}$$

$$\Longrightarrow R = \frac{L}{\sqrt{2LC}} \Longrightarrow R = \sqrt{\frac{L}{2C}}$$

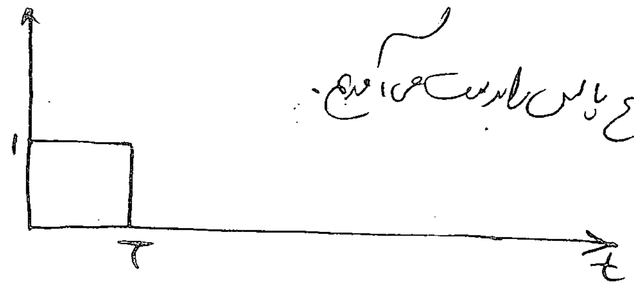
$$\omega^2 LC = \frac{f^2}{B^2} \Longrightarrow \cancel{4\pi^2 f^2} LC = \cancel{4\pi^2 LC f^2} = 1$$

* پاسخ پالس و زمان صعود :



اگر پهنای باند بی‌نهایت باشد (بزرگ باشد) اگر پالس صاف ارسال شود در طرف مقابل هم بصورت صاف دریافت می‌شود. ولی اگر کانال ما پایین گذر باشد (پهنای باند کم) شکل موج ما از بین می‌رود (عوض می‌شود).

اما تا حدودی می‌توان این صفر و یک های تغییر یافته را بدست آورد.



از روی پاسخ پله پاسخ پالس را بدست می‌آوریم.

پاسخ پالس برحسب پله $x(t) = u(t) - u(t-\tau)$

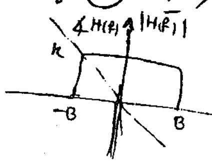
* پاسخ پله فیلتر پایین گذر مرتبه اول:

$$g(t) = (1 - e^{-2\pi B t})\, u(t) \quad ; \quad \text{فرکانس قطع } 3dB \;\; B = \frac{1}{2\pi RC}$$

* پاسخ پله فیلتر پایین گذر ایده آل :

تابع تبدیل فیلتر پایین گذر ایده آل

$$H(f) = K e^{-j\omega t_d}\, \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$



تبدیل فوریه پالس، Sinc است.
و تبدیل فوریه Sinc پالس است.

فوریه معکوس

$$h(t) = F^{-1}[H(f)] = 2KB \,\mathrm{Sinc}\, 2B(t - t_d)$$

برای سادگی تحلیل $t_d=0$ و $k=1$ را فرض می‌کنیم بنابراین خواهیم داشت که :

پاسخ ضربه ← $h(t) = 2B\,\mathrm{sinc}\,2Bt$

$$\Longrightarrow \text{پاسخ پله } g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{t} 2B\,\mathrm{sinc}\,2B\lambda\,d\lambda$$

$$\mu = 2B\lambda \rightarrow d\mu = 2B\,d\lambda$$

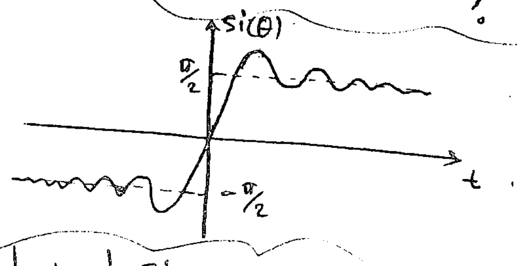
$$d\lambda = \frac{d\mu}{2B}$$

if: $\lambda \; {}^{\to\, 0}_{\to\, t} \Rightarrow$

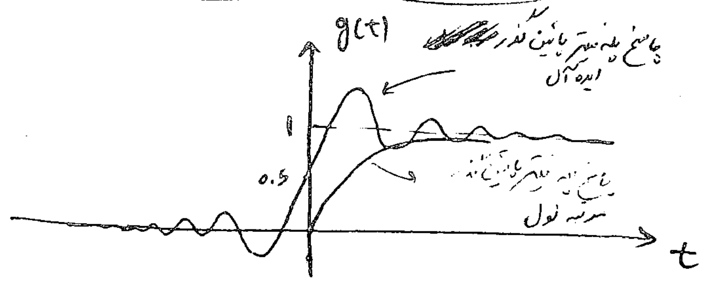
$$\Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{2Bt} \mathrm{sinc}\,\mu\,d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{sinc}\,\mu\,d\mu + \int_{0}^{2Bt} \mathrm{sinc}\,\mu\,d\mu$$

$$\text{تابع سینوس انتگرال: } Si(\theta) \triangleq \int_0^{\theta} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \pi \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} \mathrm{sinc}\,\mu\,d\mu \qquad \alpha = \pi\mu$$



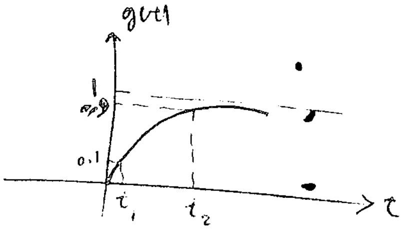
$$\Rightarrow \boxed{g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(2\pi B t)}$$



* زمان صعود (t_r):

مدت زمانی که طول می‌کشد تا خروجی از ۰.۱ تا ۰.۹ مقدار نهایی خود برسد.

* زمان صعود برای فیلتر پائین گذر مرتبه اول:



$$t_r = t_2 - t_1$$

$$g(t) = (1 - e^{-2\pi B t})\,u(t)$$

$$0.1 = (1 - e^{-2\pi B t_1})$$

$$0.9 = (1 - e^{-2\pi B t_2}) \Rightarrow \boxed{t_r = t_2 - t_1 \simeq \frac{0.35}{B}}$$

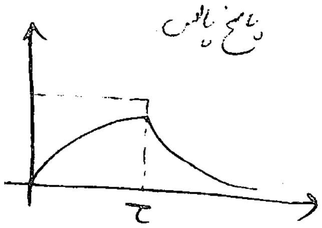
* زمان صعود برای فیلتر پائین گذر ایده آل: (از مرتبه بی‌نهایت)

چون شکل خاصی ندارد
از روش‌های تحلیلی استفاده می‌کنیم.

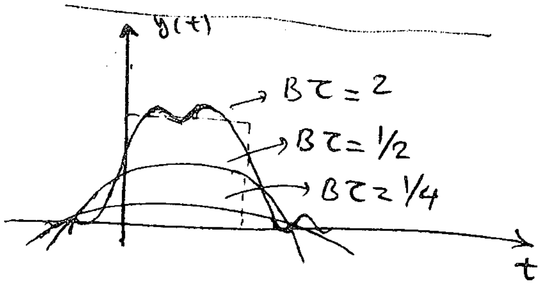
$$t_r \simeq \frac{0.44}{B}$$

بنابراین: $t_r \simeq \frac{0.5}{B} = \frac{1}{2B}$ زمان صعود فیلتر پائین گذر (به مرتبه فیلتر بستگی ندارد)

* پاسخ پالس فیلتر پائین گذر مرتبه اول:



* پاسخ پالس فیلتر پائین گذر ایده آل:



$$x(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

$$y(t) = g(t) - g(t-\tau)$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{\pi}\left\{ Si(2\pi B t) - Si[2\pi B(t-\tau)] \right\}$$

if: $B\tau \gg 1 \Rightarrow$ به پالس نزدیکتر است

نتیجه: اگر $B \geq \frac{1}{2\tau}$ هنوز پالس‌ها قابل تشخیص هستند. (هنوز صفر و یک‌هاشان قابل تشخیص است)

عرض‌ها یکی هستند. (عرض پالس)

اگر پالس‌هایی ارسال شوند که عرض آنها با هم یکی نباشد (یعنی τ ها یکی نباشند) در این صورت پهنای باند کانال گذر $B \geq \frac{1}{2\tau_{min}}$

کوچکترین عرض

ما بایستی بصورت زیر باشد:

$$B \geq \frac{1}{2\tau_{min}}$$

---

* فیلترهای ربعی و تبدیل هیلبرت:

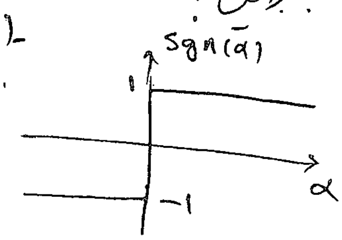
فیلترهای ربعی سیستم‌هایی هستند که فاز فرکانس‌های مثبت را به اندازه‌ی -90° و فاز فرکانس‌های منفی را به اندازه‌ی $+90^\circ$ شیفت می‌دهند. (دامنه را تغییر نمی‌دهند (اندازه))

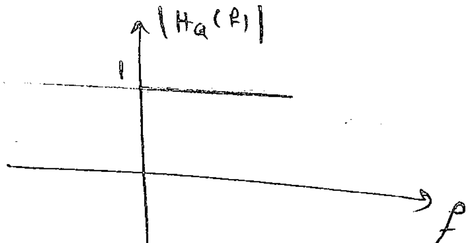
بنابراین تابع تبدیل این فیلترها را می‌توان بصورت زیر نوشت:

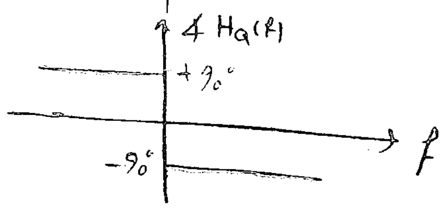
$$H_Q(f) = \begin{cases} 1e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j & f > 0 \\ 1e^{+j\frac{\pi}{2}} = +j & f < 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$$







* پاسخ ضربه فیلتر ربعی :

$$h_Q(t) = F^{-1}\left[H_Q(f)\right] = F^{-1}\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\right]$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sgn}(t) + 1\right]$$

با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه ی فوق خواهیم داشت :

$$F\left[u(t)\right] = \frac{1}{2} F\left[\mathrm{sgn}(t)\right] + \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$\frac{1}{j2\pi f} + \cancel{\frac{1}{2}\delta(f)} = \frac{1}{2} F\left[\mathrm{sgn}(t)\right] + \cancel{\frac{1}{2}\delta(f)}$$

$$\Longrightarrow F\left[\mathrm{sgn}(t)\right] = \frac{1}{j\pi f}$$

بنا به قضیه ی همزادی :

$$F\left[\frac{1}{j\pi t}\right] = \mathrm{sgn}(-f) \overset{\text{چون تابع}}{\underset{\text{فرد است}}{=}} -\mathrm{sgn}(f)$$

$$\xrightarrow{\times j} F\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j\,\mathrm{sgn}(f)$$

$$\boxed{h_Q(t) = \frac{1}{\pi t}}$$ ⟵ پاسخ ضربه فیلتر ربعی

تبدیل هیلبرت : خروجی یک فیلتر ربعی می شود تبدیل هیلبرت ورودی :

تبدیل هیلبرت $x(t)$ ورودی

$$\hat{x}(t) = x(t) * h_Q(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\lambda)}{\pi(t-\lambda)}\, d\lambda$$

۸۸/۸/۲۶

جلسه ششم (هفتم)

$H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$ — تابع تبدیل فیلتر ربعی

$h_Q(t) = \dfrac{1}{\pi t}$ — پاسخ ضربه فیلتر ربعی

مثال: تبدیل هیلبرت تابع زیر را بدست آورید.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

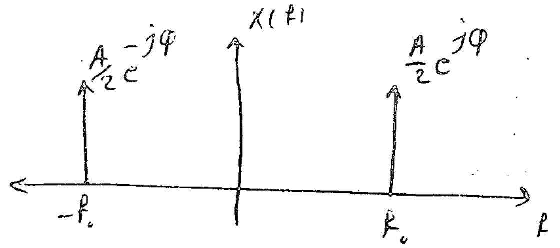
$$x(t) = \frac{A}{2}\left[e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t+\varphi)}\right]$$

$$x(t) = \frac{A}{2}\left[e^{j\varphi}\cdot e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\varphi}\cdot e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

(تبدیل فوریه عدد ثابت ضربه می‌شود.)

تبدیل فوریه می‌گیریم

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\varphi}\,\delta(f-f_0) + e^{-j\varphi}\,\delta(f+f_0)\right]$$



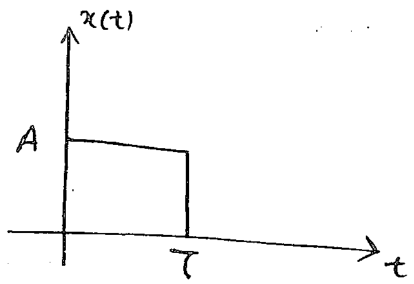
هیلبرت

$$\hat{X}(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j(\varphi-\frac{\pi}{2})}\,\delta(f-f_0) + e^{-j(\varphi-\frac{\pi}{2})}\,\delta(f+f_0)\right]$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{2}\left[e^{j(2\pi f_0 t+\varphi-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(2\pi f_0 t+\varphi-\frac{\pi}{2})}\right]$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi-\tfrac{\pi}{2}) = A\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

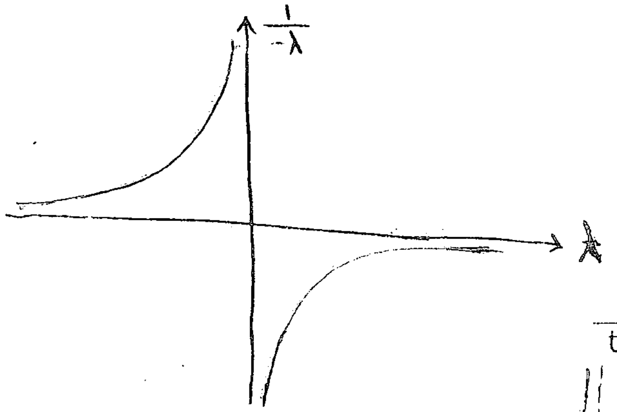
مثال: تبدیل هیلبرت تابع پالس $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید.



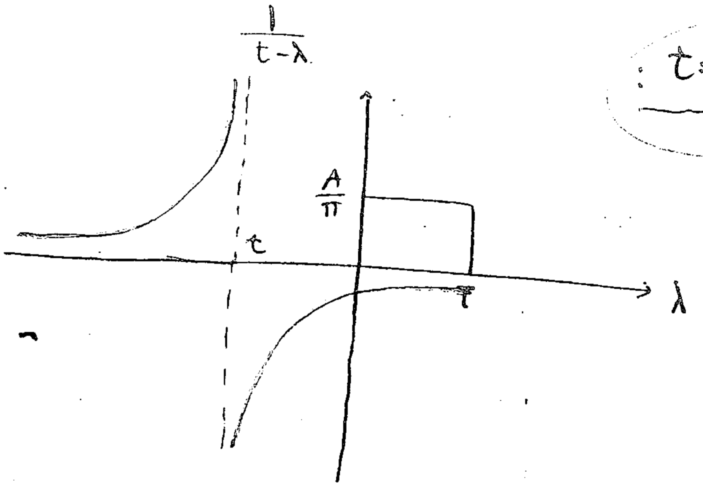
$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\lambda)}{\pi(t-\lambda)} d\lambda = \frac{A}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda}$$

در زمانهای $t=\lambda$ انتگرال مقدارش بی نهایت می شود و انتگرال نامعین پس برای رفع این مشکل مراحل زیر را انجام می دهیم.

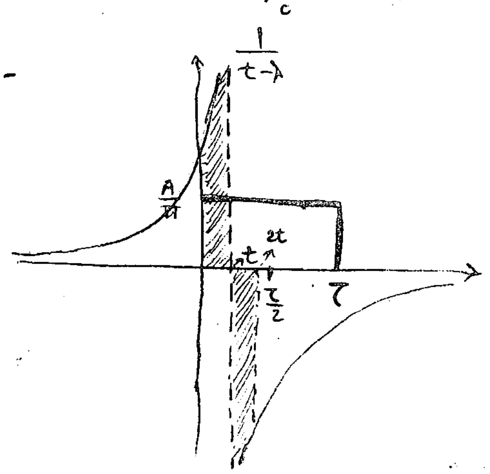


به ازای $t<0$:



$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}\left[-\ln(t-\lambda)\right]\Big|_0^{\tau} = \frac{A}{\pi}\left[\ln t - \ln(t-\tau)\right] = \frac{A}{\pi} \ln \frac{t}{t-\tau}$$

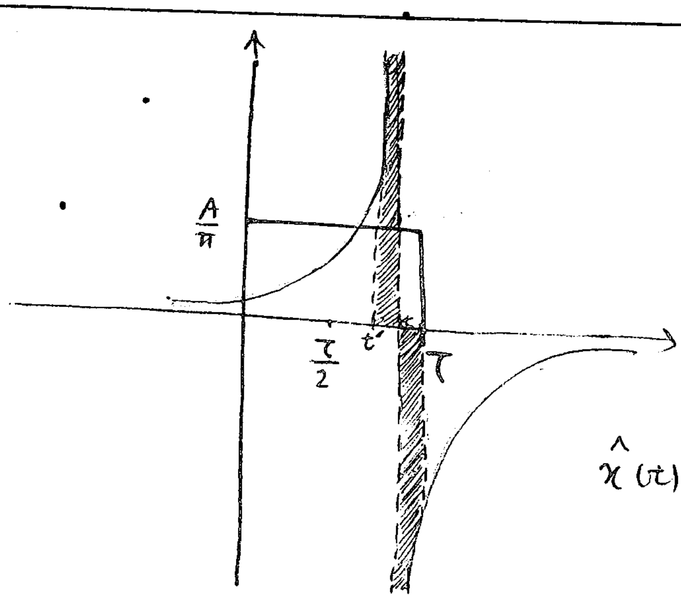
به ازای $0<t\leqslant\frac{\tau}{2}$:



$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi} \int_{2t}^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda}$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[-\ln(t-\lambda)\right]\Big|_{2t}^{\tau} = \frac{A}{\pi}\left[\ln(-t) - \ln(t-\tau)\right]$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \ln \frac{t}{\tau - t}$$



به ازای $\frac{\tau}{2} < t \leq \tau$:

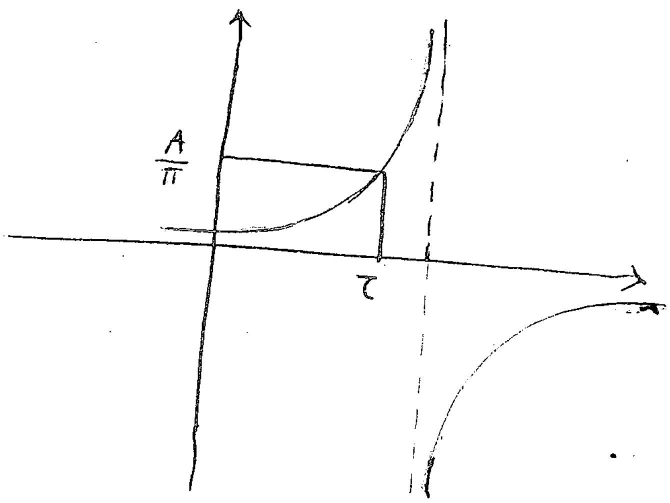
$$t' = \tau - 2(\tau - t)$$

$$\boxed{t' = 2t - \tau}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_0^{t'} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}\int_0^{2t-\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\Big[-\mathrm{Ln}(t-\lambda)\Big]_0^{2t-\tau}$$

$$= \frac{A}{\pi}\Big[\mathrm{Ln}\, t - \mathrm{Ln}(t-2t+\tau)\Big] = \frac{A}{\pi}\,\mathrm{Ln}\,\frac{t}{\tau - t}$$



به ازای $t > \tau$:

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_0^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}\,\mathrm{Ln}\,\frac{t}{t-\tau}$$

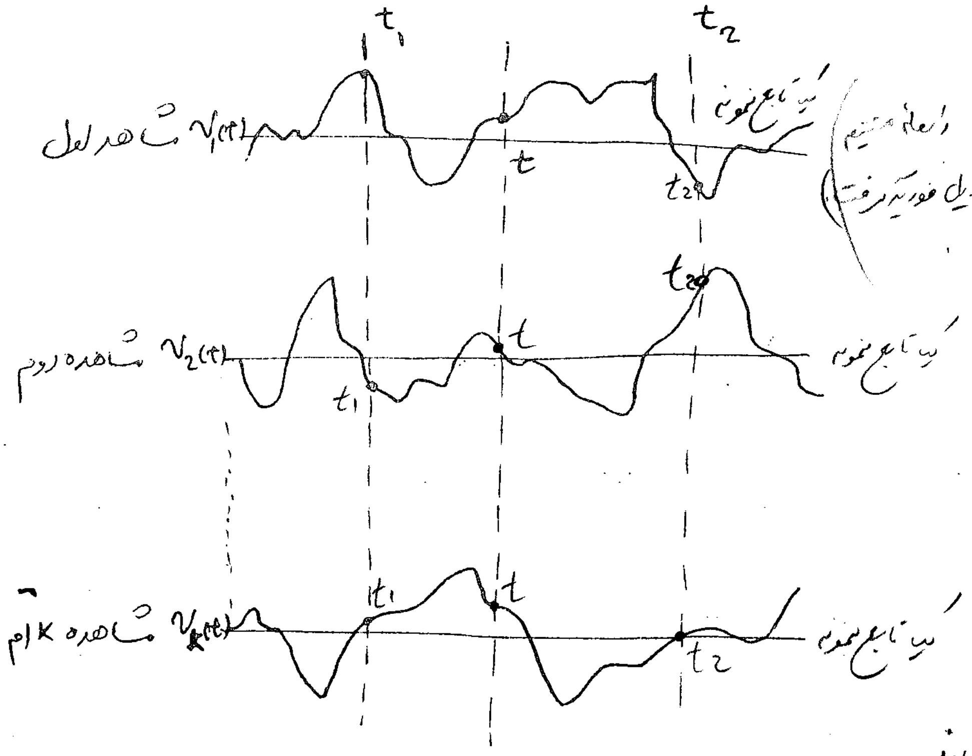
$$\boxed{\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{t}{t-\tau}\right|}$$

۸۸/۹/۱۰

جلسه هفتم : ـــ فصل ۵ پنجم ـــ

* فرآیندها یا سیگنالهای تصادفی :

* فرآیند تصادفی : یک فرآیند تصادفی نتایج تجربی را به توابع حقیقی از زمان می نگارد . مجموعه توابع زمانی (۱) مجموعه آماری و هر یک از آنها تابع نمونه خوانده می شود .



(سیگنالهای تصادفی : سیگنالهای متعددی را اعلام میکنیم که از آنها نمی توان از آن تبدیل فوریه گرفت)

* متوسط یا میانگین آماری فرآیند :

$$\overline{v(t)} \triangleq E[v(t)]$$

میانگین آماری فرآیند — امید ریاضی — expectation

* تابع خودهمبستگی :

$$R_v(t_1, t_2) = E[v(t_1)\, v(t_2)] \xrightarrow{\text{اگر } t_1=t_2=t} R_v(t,t) = E[v^2(t)]$$

در بعضی از مواقع فرآیند بصورت تابعی از یک متغیر تصادفی و یک متغیر غیر تصادفی بصورت زیر می باشد :

$$v(t) = g(t, x)$$

متغیر غیر تصادفی ← t ، x → متغیر تصادفی

مثلاً موج سینوسی با فاز تصادفی :

$$v(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

φ : متغیر تصادفی

t : متغیر غیر تصادفی

برای این حالت :

متوسط آماری $\overline{v(t)} = E[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,x)\, f_x(x)\,dx$ تابع چگالی احتمال

$$R_v(t_1,t_2) = E[v(t_1)v(t_2)]$$

تابع خود همبستگی $R_v(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_1,x)g(t_2,x)\, f_x(x)\,dx$

$f_x(x)$: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X :

مثال : مهم برای سیگنال سینوسی با فاز تصادفی زیر متوسط و تابع خود همبستگی را پیدا کنید.

$$v(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

(φ یک متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله $[0,2\pi]$ می باشد.)

تابع چگالی احتمال $f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$

$$\overline{v(t)} = E[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[A\cos(\omega t+\varphi)]\, f_\varphi(\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)\,d\varphi = 0$$

انتگرال $x\sin\alpha$ ، $x\cos\alpha$ در یک پریود کامل صفر می شود.

تابع خود همبستگی $R_v(t_1,t_2) = E[v(t_1)v(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[A\cos(\omega t_1+\varphi)][A\cos(\omega t_2+\varphi)]\, f_\varphi(\varphi)\,d\varphi$

$$(\cos x\cos) = \tfrac{1}{2}(\cos t_1+\cos t_2) - \tfrac{1}{2}(\cos t_1-\cos t_2)$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t_1+\varphi)\cos(\omega t_2+\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{A^2}{\underset{2\times 2\pi}{4\pi}}\int_0^{2\pi}\cancel{\cos[\omega(t_1+t_2)+2\varphi]}\,d\varphi + \frac{A^2}{\underset{2\times 2\pi}{4\pi}}\int_0^{2\pi}\cos\omega(t_1-t_2)\,d\varphi$$

$$\Rightarrow R_v(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1-t_2)$$

حال اگر $t_1=t_2=t \Rightarrow R_v(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}$

* فرآیندهای ارگادیک و ایستا

یک فرآیند تصادفی درصورتی ارگادیک است که تمام متوسط های زمانی توابع نمونه با متوسط گیری متناظر مجموعه آماری برابر باشد.

متوسط زمانی نمونه i ام فرآیند $\langle v_i(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_i(t)\,dt$

متوسط مربع نمونه i ام فرآیند $\langle v_i^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_i^2(t)\,dt$

$\vdots$

$$\langle v_i^k(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_i^k(t)\,dt$$

یک فرآیند زمانی ارگادیک است که:

$$\left.\begin{aligned}
&\langle v_i(t)\rangle = E[v(t)] = m_v\\
&\langle v_i^2(t)\rangle = E[v^2(t)]\\
&\vdots\\
&\langle v_i^k(t)\rangle = E[v^k(t)]
\end{aligned}\right\}$$ مهم

مثلاً برای موج سینوسی با فاز تصادفی:

$$\langle v_i(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos(\omega t+\varphi)\,dt$$

تغییر متغیر $\omega t = \frac{2\pi}{T}t = \theta$

$\theta = \frac{2\pi}{T}t$ ، $t=-\frac{T}{2}\to\theta=-\pi$ ، $t=+\frac{T}{2}\to\theta=+\pi$

$$= \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\theta+\varphi)\,d\theta = 0$$

$E[v(t)] = 0 \quad \Longrightarrow \langle v_i(t)\rangle = E[v(t)]$

$$\langle v_i^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\cos^2(\omega t+\varphi)\,dt$$

با تغییر متغیر θ :

$$= \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\theta+\varphi)\,d\theta$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{2}\cos(2\theta+2\varphi)}}\right]d\theta = \frac{A^2}{2}$$

$$t_1=t_2=t \Rightarrow R_v(t,t) = E[v^2(t)] = \frac{A^2}{2}$$

$$\Rightarrow \langle v_i^2(t)\rangle = E[v^2(t)]$$

* تمام متوسط‌های آماری یک فرآیند ارگادیک مستقل از زمان هستند.

$\langle v_i(t)\rangle = E[v(t)] = m_v$ برای فرآیندهای ارگادیک

۱- مقدار میانگین فرآیند یعنی m_v با مقدار dc نمونه‌ها یعنی $\langle v_i(t)\rangle$ برابر است.

$\cancel{\langle v_i(t)\rangle = E[v(t)] = m_v}$

۲- مقدار مربع میانگین فرآیند یعنی m_v^2 با مقدار توان dc نمونه‌ها یعنی $\langle v_i(t)\rangle^2$ برابر است.

۳- مقدار میانگین مربع فرآیند یعنی $\overline{v^2(t)}$ با توان نمونه‌ها یعنی $\langle v_i^2(t)\rangle$ برابر است.

۴- مقدار واریانس فرآیند یعنی $\sigma_v^2 = E[v^2(t)] - E^2[v(t)]$ یا σ_v^2 با توان ac نمونه‌ها یعنی

$$\langle v_i^2(t)\rangle - \langle v_i(t)\rangle^2$$

برابر است.

۵- انحراف معیار σ_v با مقدار rms نمونه‌ها یعنی $\sqrt{\langle v_i^2(t)\rangle - \langle v_i(t)\rangle^2}$

برابر است.

* فرآیندهای ایستا یا ساکن :

یک فرآیند تصادفی ایستای با تسامح (ساکن به مفهوم وسیع) (WSS) گویند اگر $E[v(t)]$ مستقل از زمان باشد و تابع خودهمبستگی $R_v(t_1,t_2)$ تنها به تفاضل (t_1-t_2) بستگی داشته باشد.

$$E[v(t)] = m_v$$

$$R_v(t_1,t_2)=R_v(t_1-t_2)=R_v(\tau)$$

$$t_1-t_2=\tau$$

تاو

خواص :

۱- تابع خودهمبستگی فرآیندهای ایستا یا ساکن برحسب τ یک تابع زوج می‌باشد :

$$R_v(\tau)=R_v(-\tau)$$

اثبات :
$$R_v(\tau)=E[v(t)v(t-\tau)]$$
$$=E[v(t+\tau)v(t)]$$
$$=E[v(t)v(t+\tau)]$$
$$=R_v(-\tau)$$

۲- $$R_v(0)=E[v^2(t)]=\sigma^2+m_v^2$$

توان متوسط

۳- با استفاده از نامساوی شوارتز می‌توان نشان داد :

$$R_v(0)\geq|R_v(\tau)|$$

۴- برای فرآیندهای ایستا یا ساکن رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود :

$$R_v(\pm\infty)=m_v^2$$

مقدار متوسط DC

اثبات: $R_v(\pm\infty) = \lim\limits_{\tau\to\pm\infty} R_v(\tau) = \lim\limits_{\tau\to\pm\infty} E[v(t)v(t-\tau)]$

$$= \lim_{\tau\to\pm\infty} E[v(t)]E[v(t-\tau)] = m_v \times m_v = m_v^2$$

۵- اگر توابع نمونه متناوب باشند (با دوره تناوب T_0) آنگاه:

$$R_v(\tau \pm nT_0) = R_v(\tau)$$

اثبات: $R_v(\tau \pm nT_0) = E[v(t+\tau\pm nT_0)v(t)]$

$$= E[v(t+\tau)v(t)]$$

$$= R_v(\tau)$$

۶-

توان متوسط فرآیند $P = R_v(0)$

اثبات:

توان نمونه اول $\langle v_1^2(t)\rangle$

توان نمونه دوم $\langle v_2^2(t)\rangle$

$\vdots$

توان نمونه ام $\langle v_k^2(t)\rangle$

به t بستگی ندارد

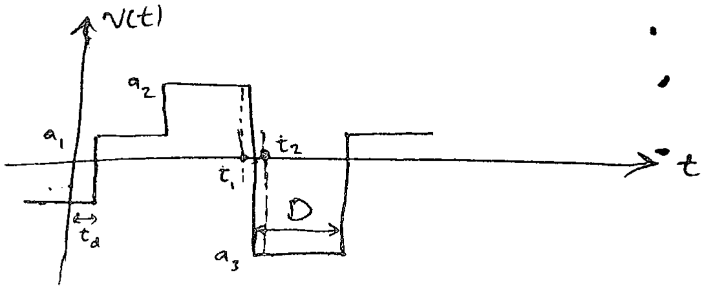
$$P = E[\langle v_i^2(t)\rangle] = \langle E[v_i^2(t)]\rangle$$

$$= E[v^2(t)] = R_v(0)$$

۸۸/۹/۱۷

جلسه هشتم.

مثال: موج دیجیتال تصادفی از مجموعه‌ی قطارهای پالس مستطیلی شکل شبیه تابع نمونه شکل زیر بدست می‌آید. تمام پالس‌ها دارای عرض ثابت و غیرتصادفی D هستند.



ولی مجموعه‌ی آماری دو متغیر تصادفی به شرح زیر دارد:

واریانس δ^2 می‌باشد

۱. دامنه‌ی a_k پالس k ام یک متغیر تصادفی گسسته با میانگین صفر ($E[a_k]=0$) و ضمناً دامنه‌ها در فواصل زمانی مختلف مستقل آماری هستند.

$$E[a_k a_j]_{k\neq j} = E[a_k]E[a_j]$$

2. t_d یک متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله‌ی $[0, D]$ است.

برای این فرآیند مقدار متوسط و تابع خودهمبستگی را پیدا کنید.

$\delta^2 = E[a_k^2] - \cancel{E^2[a_k]}$ واریانس

مقدار متوسط $E[v(t)] = E[a_k] = 0$

تابع خودهمبستگی $R_v(t_1 - t_2) = ?$

حالت اول: $|t_2 - t_1| > D$: یعنی t_1 و t_2 حتماً در دو پالس مختلف قرار دارند.

$$R_v(t_2 - t_1) = E[v(t_2)v(t_1)] = E[a_k a_j]_{k\neq j} = E[a_k]E[a_j] = 0$$

حالت دوم: $|t_2 - t_1| < D$: یعنی t_1 و t_2 یا در یک پالس قرار می‌گیرند یا در دو پالس مجاور قرار می‌گیرند.

A: رخداد اینکه t_1 و t_2 در دو پالس مجاور باشند:

$$R_v(t_2, t_1) = E[v(t_2)v(t_1)] = \cancel{E[a_k a_j]}P(A) + E[a_k^2](1 - P(A))$$

$$\Rightarrow R_v(t_2, t_1) = \delta^2(1 - P(A))$$

: $t_2 > t_1$

عرض پالس / پالس kام

$$P(A) = P(t_1 < KD + t_d < t_2)$$

$$P(A) = P(t_1 - KD < t_d < t_2 - KD)$$

تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی مقدار ثابت است : $\frac{1}{\text{فاصله}}$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی t_d

$$f_{T_d}(t_d) = \frac{1}{D}$$

$$P(A) = \int_{t_1-KD}^{t_2-KD} f_{T_d}(t_d)\, dt_d = \frac{t_2 - t_1}{D}$$

: $t_1 > t_2$

$$P(A) = \frac{t_1 - t_2}{D}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$P(A) = \frac{|t_2 - t_1|}{D}$$

$$t_2 - t_1 = \tau$$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{|\tau|}{D}$$

بنابراین برای حالت $|t_2 - t_1| < D$ خواهیم داشت :

$$R_v(t_2, t_1) = \delta^2 \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{D}\right)$$

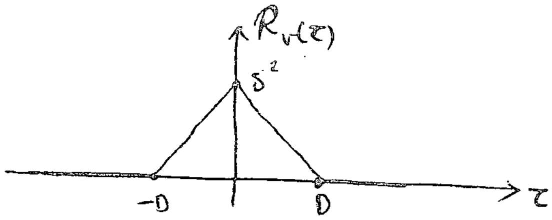
$$R_v(t_2, t_1) = \begin{cases} \delta^2 \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{D}\right) & |t_2 - t_1| < D \\ 0 & |t_2 - t_1| > D \end{cases}$$

ایستا است :

$E[V(t)] = 0$ مقدار ثابت و مستقل از زمان

$$R_v(t_2, t_1) = \begin{cases} \delta^2 \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{D}\right) \\ 0 \end{cases}$$

$$R_v(\tau) = \begin{cases} \delta^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{D}\right) & \tau < D \\ 0 & \tau > D \end{cases}$$



$$R_v(\tau) = \delta^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{D}\right)$$ پالس مثلثی

برای ارگادیک بودن همیشه حالتی را بررسی می‌کنیم که اثبات کند ارگادیک نیست :

$$E[a_k^2] = \delta^2$$

$$\langle v_i^2(t)\rangle^2 = ?$$

باید تمام حالات برابر با δ^2 باشد تا ارگادیک باشد :

مثال نقض : اگر: $v_1(t) = a_1$ $\Leftarrow$

$$\langle v_i^2(t)\rangle^2 = \langle a_1^2\rangle \neq a_1^2$$

ارگادیک نیست .

---

* طیف توان :

اگر $v(t)$ یک سیگنال تصادفی است تا باشد می‌توانیم از طیف توان آن $G_v(f)$ بعنوان توزیع توان متوسط P در حوزه‌ی فرکانس صحبت کنیم .

$$\text{توان متوسط}\ P = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)\,df$$

برای سیگنالهای غیرتصادفی :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2\,df \quad \text{طبق قضیه پارسوال}$$

بنابراین برای سیگنالهای غیرتصادفی :

$$G_v(f) = |V(f)|^2$$

طبق قضیه وانیر کینشاین برای یک سیگنال تصادفی $v(t)$ ، $G_v(f)$ توسط تبدیل فوریه با تابع خودهمبستگی مربوط می‌شود :

$$G_v(f) = F[R_v(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \quad (*)$$

$$R_v(\tau) = F^{-1}[G_v(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)\, e^{j2\pi f \tau}\, df$$

اثبات

توان متوسط $P = R_v(0) \Rightarrow R_v(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)\, df = P$

* خواص:

۱) $G_v(f) \geq 0$

۲) $G_v(f) = G_v(-f)$ یک تابع زوج است.

اثبات: $G_v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau)\, e^{+j2\pi f \tau}\, d\tau$

از روی تابع اصلی ⊛

$$\tau' = -\tau \rightarrow d\tau' = -d\tau$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} R_v(\tau')\, e^{-j2\pi f \tau'}\, d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau')\, e^{-j2\pi f \tau'}\, d\tau' = G_v(f)$$

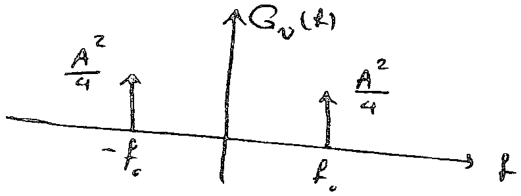
مثال: موج سینوسی با فاز تصادفی:

شیفت به راست $\frac{1}{2} \rightarrow \cos$

شیفت به چپ $\frac{1}{2} \rightarrow$

$$R_v(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$$

$$G_v(f) = F[R_v(\tau)] = \frac{A^2}{4}\delta(f-f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f+f_0)$$

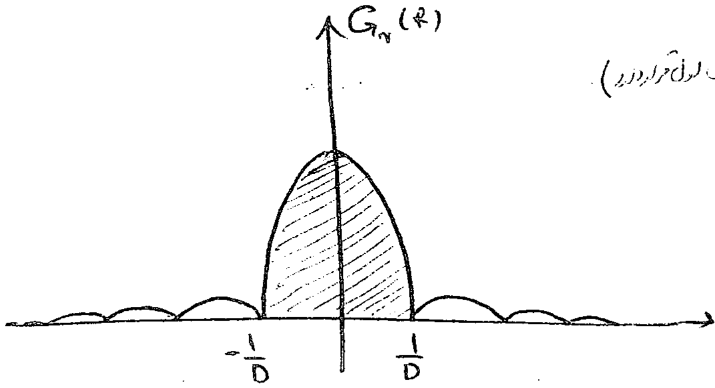


مثال: طیف توان را بدست آورید.

* موج دیجیتال تصادفی:

$$R_v(\tau) = \delta^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{D}\right)$$

$$G_v(f) = F[R_v(\tau)] = \delta^2 D \, \mathrm{sinc}^2 Df$$

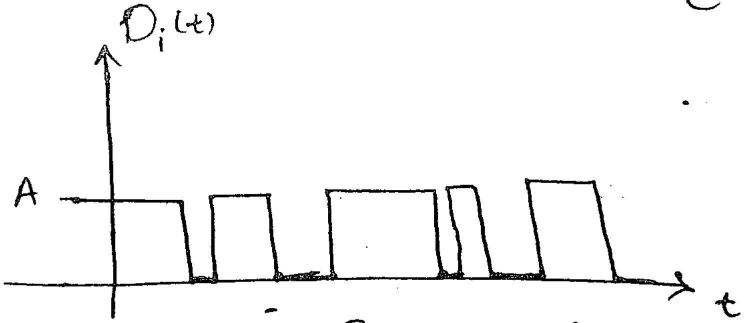


پایین گذر است. (۹۸ درصد انرژی در لوب اول قرار دارد)
فرکانس قطع $\frac{1}{D}$.

مثال: طیف توان را بدست آورید.

موج تلگراف تصادفی:

شکل زیر یک تابع نمونه از یک موج تلگراف تصادفی را نشان می‌دهد.



این سیگنال بین دو مقدار هم احتمال A و ۰ جابجایی تصادفی مستقل دارد. زمانهای جابجایی یک متغیر تصادفی پواسون با مقدار متوسط μ می‌باشد.

تابع خودهمبستگی این فرآیند بصورت زیر می‌باشد:

$$R_v(\tau) = \frac{A^2}{4}\left(e^{-2\mu|\tau|}+1\right)$$

الف) تابع خودهمبستگی را برحسب τ رسم کنید.

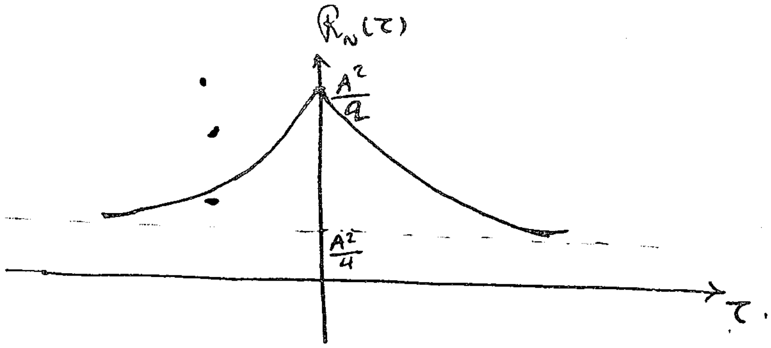
ب) توان متوسط فرآیند را بدست آورید.

ج) مقدار متوسط این فرآیند چقدر است.

د) مقدار rms این فرآیند را محاسبه نمائید.

ه) چگالی طیف توان این فرآیند را محاسبه نموده و رسم کنید.

الف)



ب) توان متوسط $P = R_v(0) = \frac{A^2}{4}\left(e^{-2\mu|\tau|} + 1\right) = \frac{A^2}{2}$

ج) $m_v^2 = R_v(\pm\infty) = \frac{A^2}{4}$

$m_v = \frac{A}{2}$

د)

مقدار rms : $\sigma = \sqrt{E[v^2(t)] - m_v^2} = \sqrt{R_v(0) - m_v^2} = \sqrt{\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4}} = \frac{A}{2}$

$\sigma = rms = \frac{A}{2}$

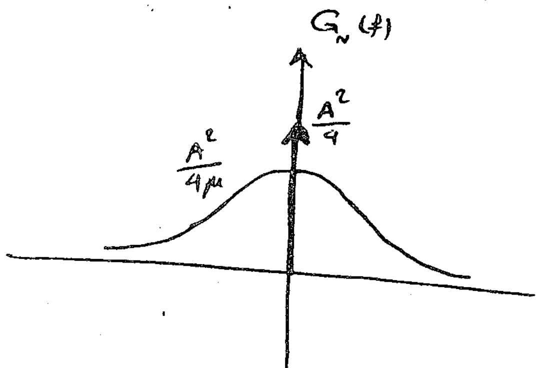
ه)

$G_v(f) = F[R_v(\tau)]$

$e^{-\lambda|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$

$G_v(f) = \frac{A^2}{4}\left(\frac{4\mu}{4\mu^2 + 4\pi^2 f^2} + \delta(f)\right)$

$= \frac{A^2}{4\mu\left[1 + \left(\frac{\pi f}{\mu}\right)^2\right]} + \frac{A^2}{4}\delta(f)$



فصل ۵ :

مسئله‌ها: ۱-۱، ۱-۳، ۱-۶، ۱-۷، ۲-۱، ۲-۷، ~~[illegible]~~

جلسه نهم

۸۸/۹/۲٤.

فصل ششم

* مدولاسیون موج پیوسته خطی :

* مدولاسیون AM :

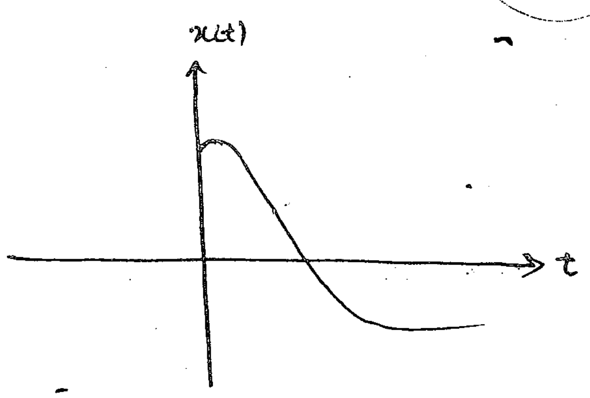
AM : $x(t) = A_c(1+\mu x(t))\cos\omega_c t$

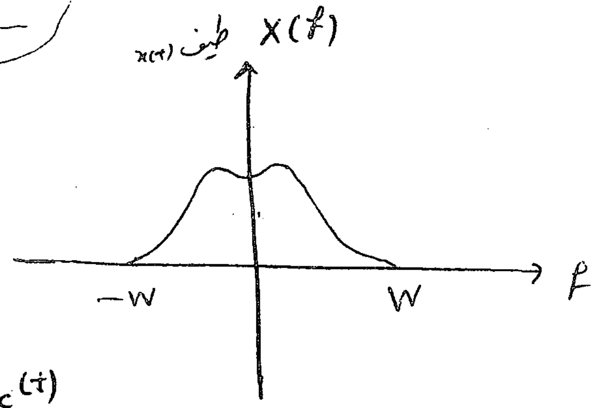
$x(t)$: سیگنال اطلاعات

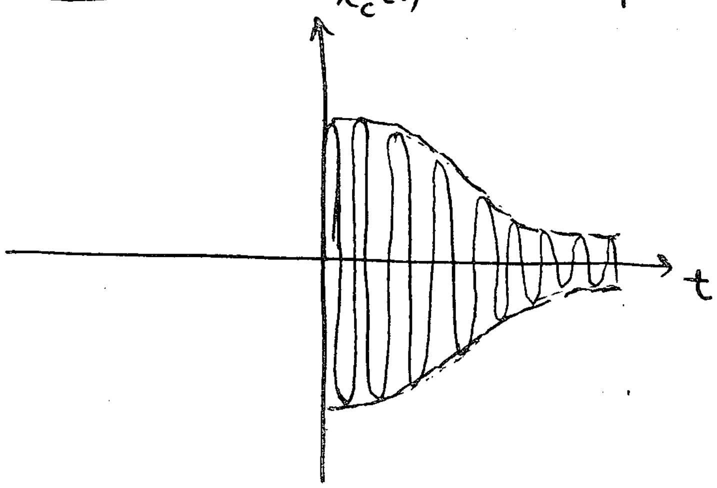
μ : ضریب مدولاسیون $\quad 0<\mu\leq 1$

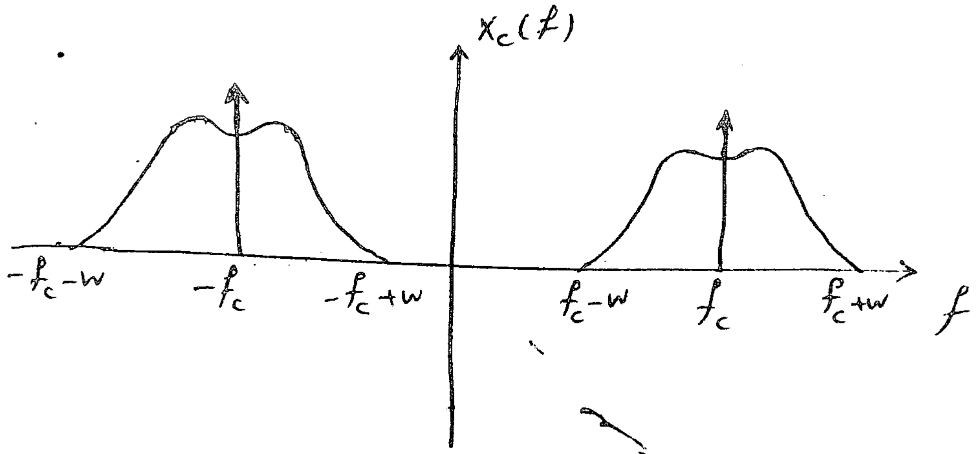
f_c : فرکانس حامل. $\quad \omega_c = 2\pi f_c$

$$|x(t)| \leq 1$$









* محدودیت‌های مخابراتی :

1) توان ارسالی (S_T)

* توان ارسالی کم باشد.

2) پهنای باند لازم (B_T)

* پهنای باند کم باشد.

* برای مدولاسیون AM :

$$B_T = 2W$$

$$S_T = \langle x_c^2(t) \rangle = \langle A_c^2 (1+\mu x(t))^2 \cos^2 \omega_c t \rangle$$

متوسط زمانی

$$= \left\langle \frac{A_c^2}{2}(1+\mu x(t))^2 \right\rangle + \left\langle \frac{A_c^2}{2}(1+\mu x(t))^2 \cos 2\omega_c t \right\rangle \xrightarrow{} 0$$

با فرض اینکه تغییرات $x(t)$ خیلی کمتر از f_c باشد پس $x(t)^2$ نسبت به $\cos 2\omega_c t$ ثابت است پس مقدار متوسط آنها صفر شود.

$$= \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2}{2}\mu^2 \langle x^2(t) \rangle + \cancel{A_c^2 \mu \langle x(t) \rangle}$$

$$\Longrightarrow S_T = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2}{2}\mu^2 S_x$$

$S_x : \langle x^2(t) \rangle$ توان سیگنال اطلاعات

$$S_T = P_c + 2P_{sb}$$

carryer (توان سیگنال حامل مدوله نشده (کریر)) $P_c = \frac{A_c^2}{2}$ (1)

توان باند کناری $P_{sb} = \frac{A_c^2}{4}\mu^2 S_x = \frac{P_c}{2}\mu^2 S_x$ (2)

Side bound

$$\left(\frac{S_x}{N}\right)\uparrow \Longrightarrow \text{کیفیت} \uparrow$$

توان نویز

$$\mu^2 S_x \leq 1 \qquad (3)$$

$$(2),(3) \Longrightarrow \boxed{P_{sb} \leq \frac{P_c}{2}}$$

$$P_c = S_T - 2P_{sb} \geq S_T - P_c \Longrightarrow \boxed{P_c \geq \frac{1}{2} S_T}$$

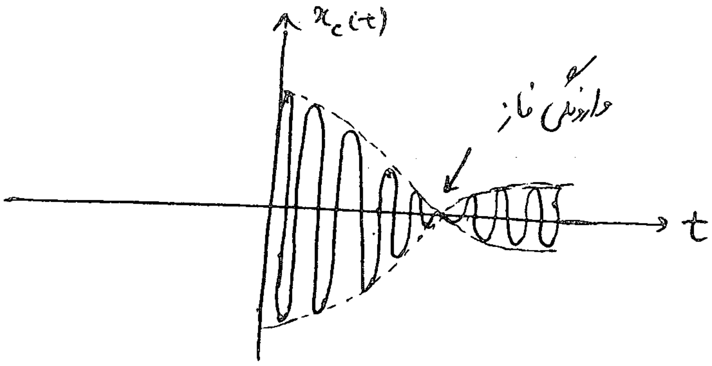
$$2P_{sb} \leq S_T - 2P_{sb} \Longrightarrow \boxed{P_{sb} \leq \frac{1}{4} S_T}$$

---

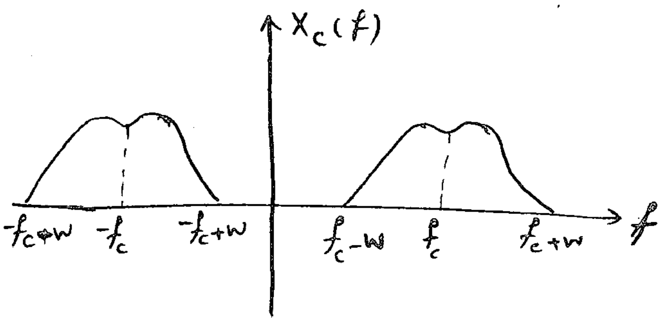
* سیگنال و طیف DSB :

DSB: $x_c(t) = A_c\, x(t) \cos \omega_c t$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2} X(f-f_c) + \frac{A_c}{2} X(f+f_c)$$



: DSB



: DSB

$$B_T = 2W$$

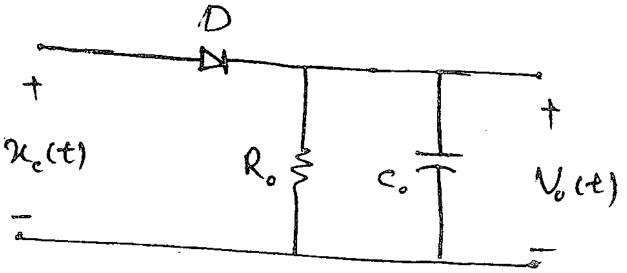
$$S_T = \langle x_c^2(t) \rangle = \langle A_c^2 x^2(t) \cos^2 \omega_c t \rangle$$

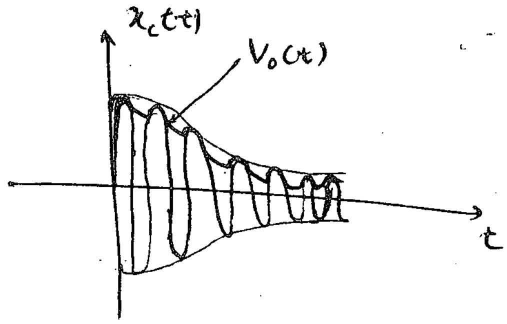
$$= \frac{A_c^2}{2} \langle x^2(t) \rangle + \frac{A_c^2}{2} \cancel{\langle x^2(t) \cos 2\omega_c t \rangle}^{\,0}$$

$S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x$ یا $S_T = 2 P_{sb}$

---

* آشکارساز قله‌ی پوش :

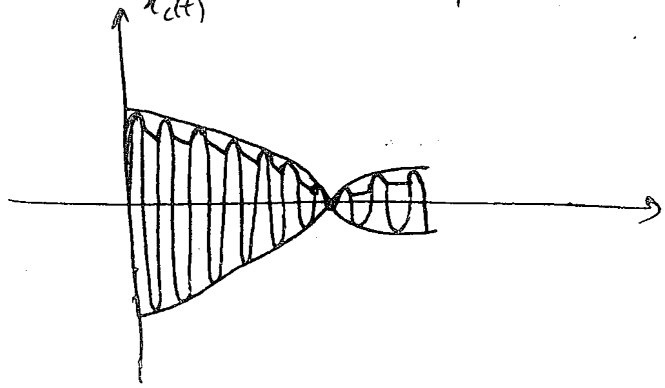




$$\frac{1}{f_c} \ll RC \Longrightarrow \frac{1}{RC} \ll f_c$$

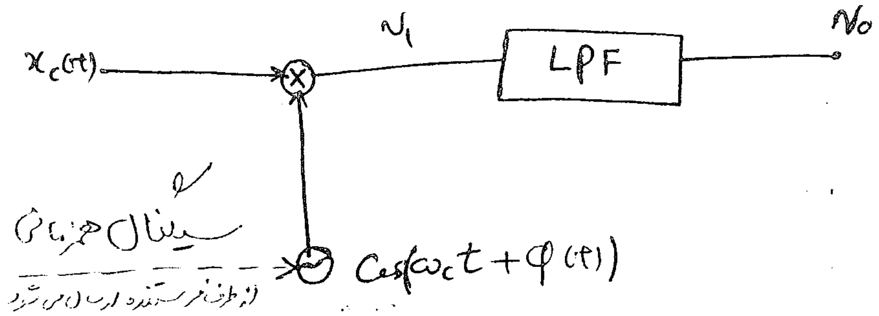
فرکانس قطع فیلتر پائین گذر RC $\frac{1}{RC} \geqslant W \Longrightarrow \boxed{W \leqslant \frac{1}{RC} \leqslant f_c}$

اگر از آشکارساز قله‌ی پوش در DSB استفاده کنیم:



$x_c(t)$ شکل $x(t)$ محدود نیست
پس نمی‌توان از آن در DSB
استفاده کرد.

* آشکارساز همزمانی : (DSB)



$$x_c(t) = A_c\, x(t) \cos\omega_c t$$

$$v_1 = A_c\, x(t) \cos^2\omega_c t = \frac{A_c}{2} x(t) + \underbrace{\frac{A_c}{2} x(t) \cos 2\omega_c t}_{\text{توسط LPF حذف می‌شود}}$$

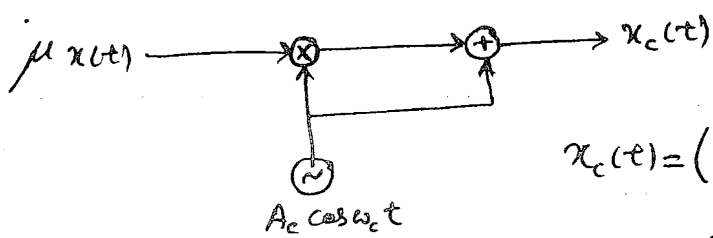
$$v_0 = \frac{A_c}{2} x(t)$$

$$v_1 = A_c\, x(t) \cos\omega_c t \cdot \cos\left(\omega_c t+\varphi(t)\right)$$

$$= \frac{A_c}{2} x(t) \cos\varphi(t) + \underbrace{\frac{A_c}{2} x(t) \cos\left(2\omega_c t+\varphi(t)\right)}_{\text{توسط LPF حذف می‌شود}}$$

$$V_0 = \frac{A_c}{2} x(t) \cos\varphi(t)$$

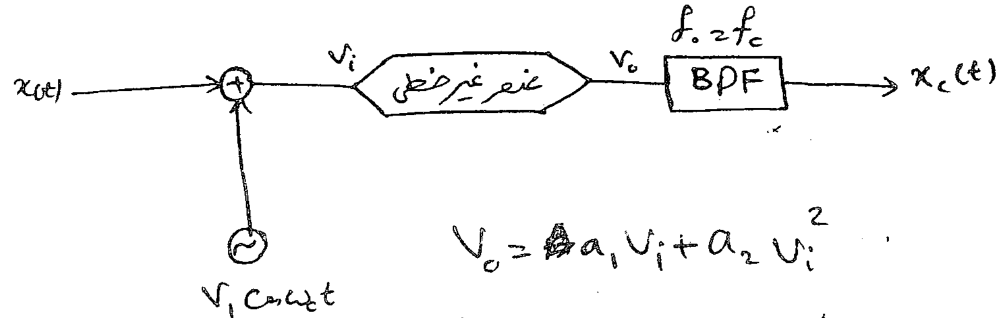
* مدولاتور حاصلضربی :



$$x_c(t) = \left(\mu x(t)\right)\left(A_c \cos\omega_c t\right) + A_c \cos\omega_c t$$

$$x_c(t) = A_c\left(1+\mu\, x(t)\right) \cos\omega_c t$$

* مدولاتورهای مربع کننده و متعادل :



$$V_o = a_1 V_i + a_2 V_i^2$$

$$V_i = x(t) + V_1 \cos\omega_c t$$

$$\Rightarrow V_o = a_1 \left(x(t) + V_1 \cos\omega_c t\right) + a_2 \left(x(t) + V_1 \cos\omega_c t\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad V_o = \left(a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \frac{a_2 V_1^2}{2}\right) + V_1\left(a_1 + 2a_2 x(t)\right)\cos\omega_c t$$

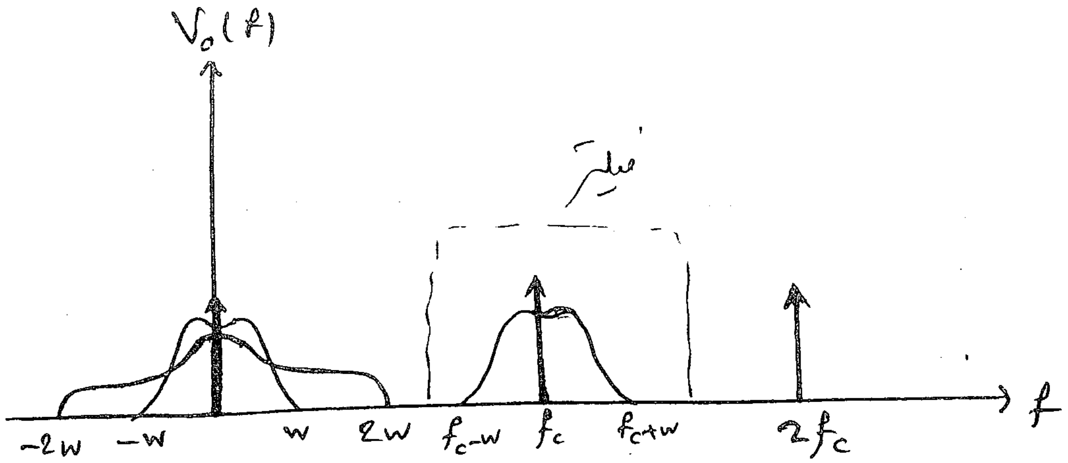
$$+ \frac{a_2 V_1^2}{2} \cos 2\omega_c t$$

$$\Rightarrow x_c(t) = V_1\left(a_1 + 2a_2 x(t)\right) \cos\omega_c t$$

$$\boxed{x_c(t) = A_c\left(1 + \mu x(t)\right) \cos\omega_c t}$$

$\mu = \frac{2a_2}{a_1}$

$A_c = a_1 V_1 \quad , f > 0$



$f_c - w \geq 2w \Rightarrow \boxed{f_c \geq 3w}$ با این شرط یک مدولاتور AM است.

تمرین ۲: ۲-۱ ، ۲-۲ ، ۲-۶ ، ۲-۱۰ ، ۳-۱ ، ۳-۲ ، ۳-۴ ، ۳-۶ ، ۵-۱ ، ۵-۷

جلسه دهم

۸۸/۱۰/۱

فصل هفتم

* مدولاسیون موج پیوسته زاویه‌ای :

* سیگنال های FM و PM :

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

ϕ متغیر است.
دامنه ثابت است.

$\phi(t)$: فاز لحظه‌ای

* مدولاسیون فاز (PM) :

$\phi(t) = \phi_\Delta x(t)$ و $\phi_\Delta \leq 180°$: شاخص مدولاسیون فاز

$$x_c(t) = A_c \cos(\underbrace{\omega_c t + \phi_\Delta x(t)}_{\theta_c(t)}) \quad (PM)$$

فاز متناسب با $x(t)$ تغییر می‌کند.

$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi_\Delta x(t)$

$\omega_c = 2\pi f_c$

فرکانس لحظه‌ای (ثابت نیست) $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_c(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \phi_\Delta \frac{dx(t)}{dt}$

* مدولاسیون فرکانس (FM) :

فرکانس متناسب با $x(t)$ تغییر می‌کند.

$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$ فرکانس لحظه‌ای

f_Δ : شاخص مدولاسیون فرکانس

$$\theta_c(t) = \omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$$

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \underbrace{2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt}_{\phi(t)}) \quad (FM)$$

	فاز لحظه‌ای	فرکانس لحظه‌ای
PM	$\phi_\Delta x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_\Delta \frac{dx(t)}{dt}$
FM	$2\pi f_\Delta \int x(t)dt$	$f_c + f_\Delta x(t)$

* FM و PM باند باریک :

در حالت کلی : $x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c \cos\omega_c t \cdot \cos\phi(t) - A_c \sin\omega_c t \cdot \sin\phi(t)$$

$$A_c \cos\phi(t) = A_c\left[1 - \frac{1}{2!}\phi^2(t) + \frac{1}{4!}\phi^4(t) + \dots\right]$$

$$A_c \sin\phi(t) = A_c\left[\phi(t) - \frac{1}{3!}\phi^3(t) + \frac{1}{5!}\phi^5(t) - \dots\right]$$

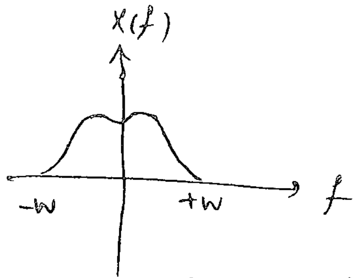
باند باریک : $|\phi(t)| \ll 1$ rad (از جملات دوم به بعد صرف‌نظر می‌کنیم)

$$x_c(t) = A_c \cos\omega_c t - \phi(t) A_c \sin\omega_c t$$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) - \frac{A_c}{2j}\Phi(f)(f-f_c)$$ و $f>0$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A_c j}{2}\Phi(f)(f-f_c)$$

$$\Phi(f) = \begin{cases} \phi_\Delta X(f) & : PM \\ \frac{-j f_\Delta X(f)}{f} & : FM \end{cases}$$



پهنای باند : $2W$ برای PM و FM باند باریک

FM باند باریک : NBFM

PM باند باریک : NBPM

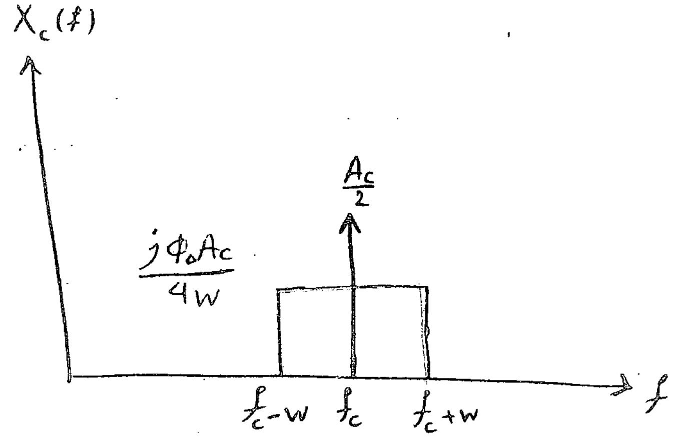
مثال: با درنظر گرفتن $x_i(t) = \operatorname{sinc} 2wt$ ، طیف های باند باریک PM و باند باریک FM برای این سیگنال را رسم نمائید.

$$x_i(t) = \operatorname{sinc} 2wt$$

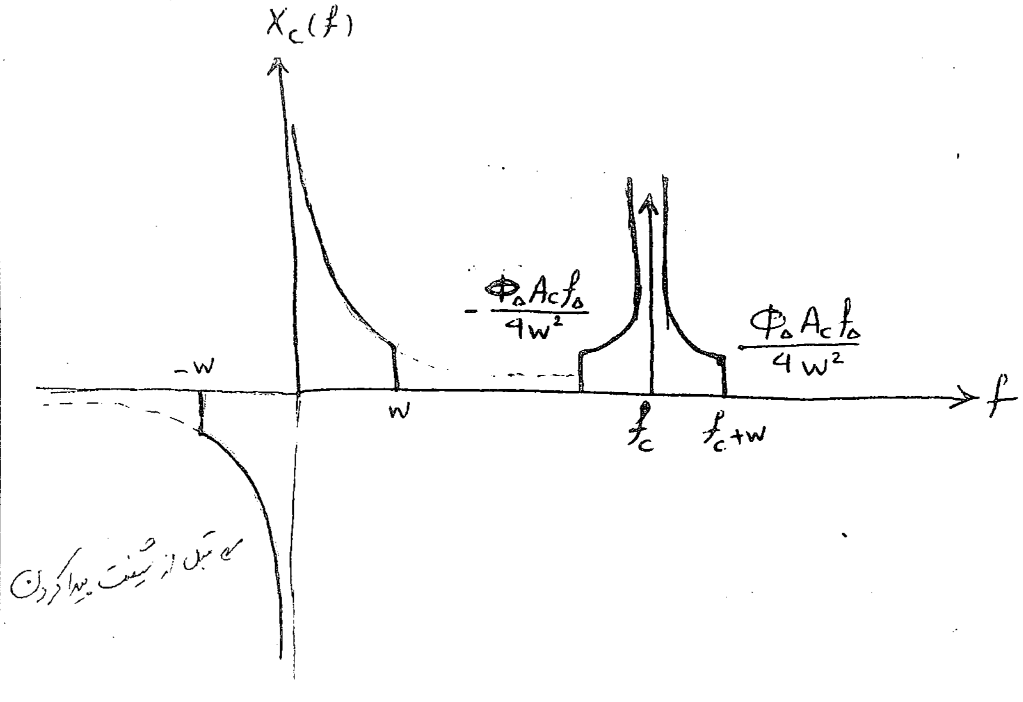
$$X_i(f) = \frac{1}{2w}\Pi\left(\frac{f}{2w}\right)$$

$f>0$:

PM :



FM :



برای PM ، FM :

توان ارسالی $S_T = \langle x_c^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2}$

به S_x بستگی ندارد.

* پهنای باند FM :

$$\boxed{B_T = 2(D+2)W \quad ; \quad D \geqslant 2 \qquad D = \frac{f_\Delta}{W}}$$

$$B_T = \begin{cases} 2W & D \ll 1 \\ 2DW & D \gg 1 \end{cases}$$

$$\boxed{B_T = 2(D+1)W \qquad \begin{matrix} D \gg 1 \\ D \ll 1 \end{matrix}}$$

* پهنای باند PM :

$$\boxed{B_T = 2(\phi_\Delta + 1)W}$$

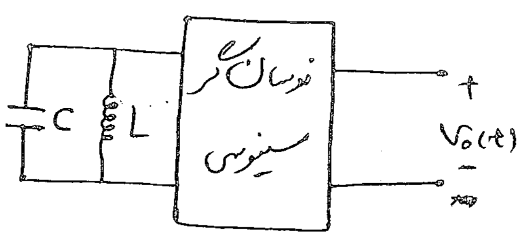
* تولید و آشکارسازی FM :

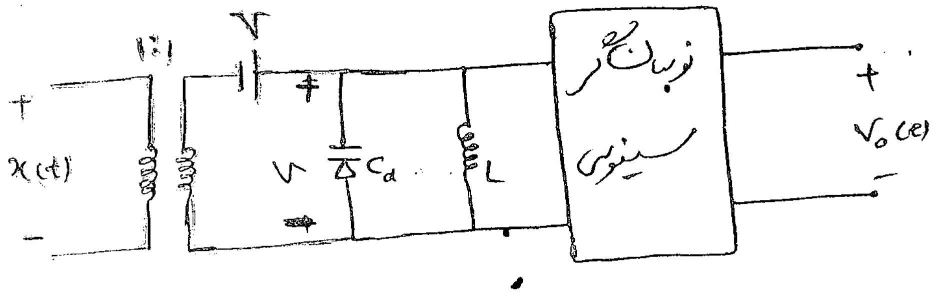
فرکانس باید با تغییرات $x(t)$ بصورت خطی تغییر کند.

* تولید FM :

FM مستقیم :

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$





ظرفیت خازنی دیود وراکتور $C_d = \frac{K}{\sqrt{v}}$

$$v = V + x(t)$$

$$C_d = \frac{K}{\sqrt{v}} = \frac{K}{\sqrt{V + x(t)}} = \frac{K}{\sqrt{V}}\left(1 + \frac{1}{V}x(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n = a^n + \frac{n a^{n-1} b}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \cdots$

$$C_d = \frac{K}{\sqrt{V}}\left(1 - \frac{x(t)}{2V} + \cdots\right)$$

$$\left|\frac{x(t)}{V}\right| \ll 1 \implies \boxed{V \gg 1}$$

با این رابطه می‌توان از جملات دوم به بعد را صرف‌نظر کرد.

$$|x(t)| \leqslant 1$$

$$C_d \simeq \frac{K}{\sqrt{V}}\left(1 - \frac{1}{2V}x(t)\right)$$

$$\implies C_d = C_0 + C_1 x(t)$$

$$C_0 = \frac{K}{\sqrt{V}}, \quad C_1 = \frac{-C_0}{2V}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_d}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_0 + C_1 x(t))}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 + \frac{C_1}{C_0}x(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 - \frac{C_1}{2C_0}x(t) + \cdots\right)$$

$$\left|\frac{C_1}{C_0}\right| \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{2V} \ll 1 \Rightarrow \boxed{V \gg 1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 - \frac{C_1}{2C_0}x(t)\right)$$

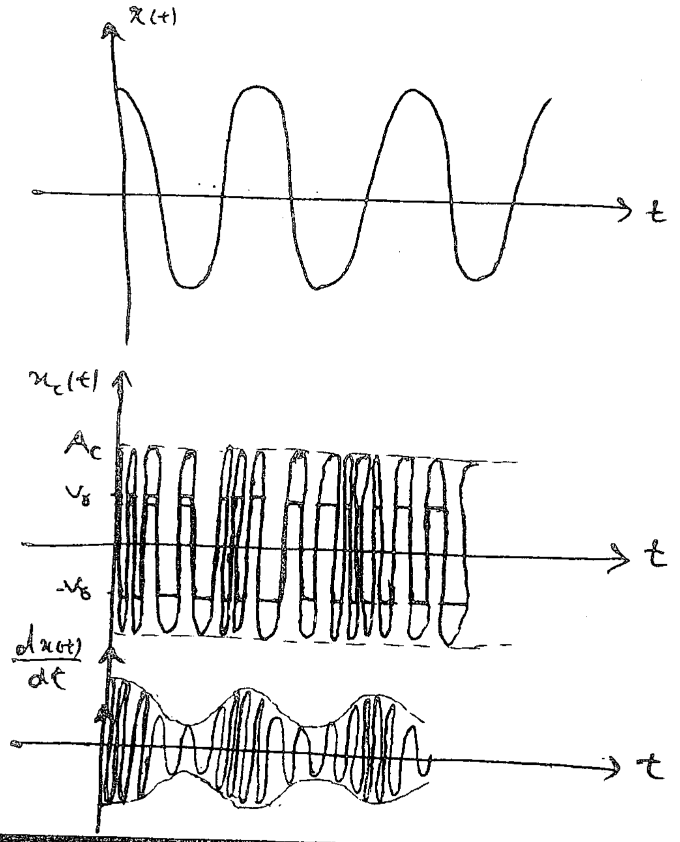
$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} f(t) = f_c + f_\Delta x(t) \\ f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}, \quad f_\Delta = \frac{-f_c C_1}{2C_0} \end{gathered}}$$

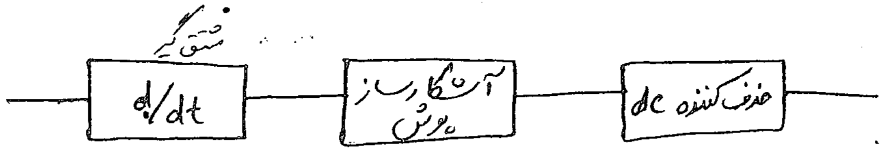
---

* آشکارسازی FM : (روش تبدیل FM به AM با مشتق گیری)

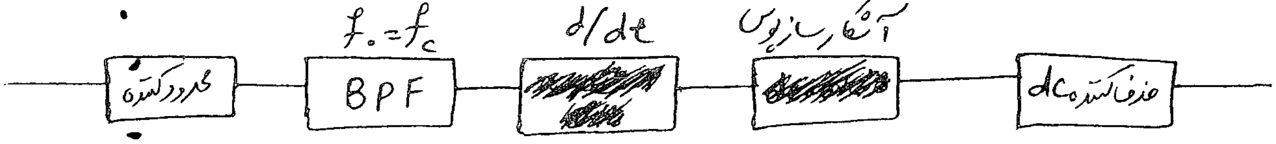
$$FM: \; x_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)$$

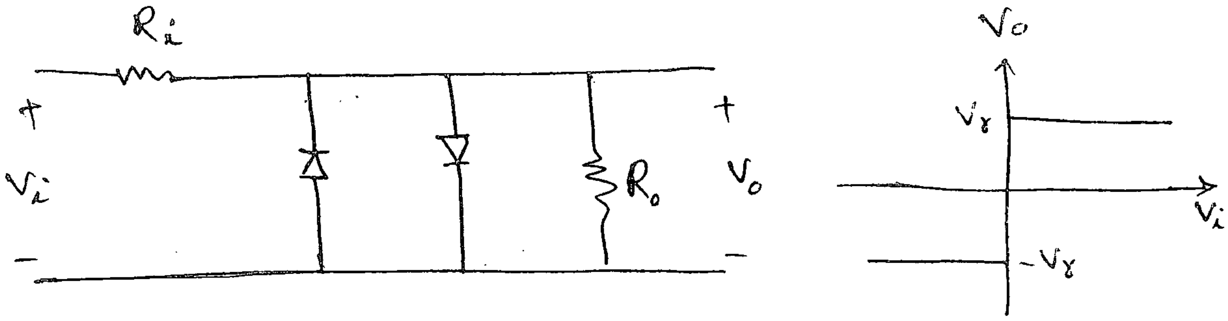
$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -A_c\left(\omega_c + 2\pi f_\Delta x(t)\right)\sin\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)$$





* این مدار ایراد دارد چون نویز را وارد دامنه می کند.





تمرینات فصل ۷: ۱-۹ ، ۱-۱۰ ، ۱-۱۲ ، ۱-۱۴ ، ۲-۱ ، ۲-۲ ، ۳-۴ ، ۳-۷ ، ۳-۱۲

1

* متوسط متحرک سیگنال تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\lambda)\,d\lambda$$

$H(f)$ را به نحوی بیابید که $y(t)=h(t)*x(t)$ و نشان دهید که:

$$R_y(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

با فرض $x(t)=\delta(t)$

$$y(t)=h(t)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}\delta(\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}\frac{1}{T} & t-\frac{T}{2}<0<t+\frac{T}{2}\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases}1 & |t|<\frac{T}{2}\\ 0 & |t|>\frac{T}{2}\end{cases}\Longrightarrow \begin{array}{l}H(f)=\operatorname{Sinc} fT\\ G_y(f)=|H(f)|^2G_x(f)\end{array}$$

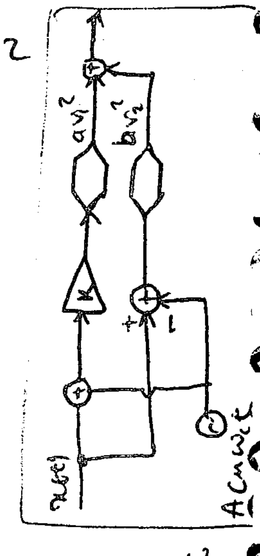
$$R_y(\tau)=F^{-1}[G_y(f)]=F^{-1}[\operatorname{Sinc}^2 fT\,G_x(f)]$$

$$=\frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)*R_x(\tau)$$

$$R_y(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

---

* یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی $x_c(t)=ak^2(v(t)+A\cos\omega_c t)^2-b(v(t)-A\cos\omega_c t)^2$ را ایجاد کرده است. اگر فرکانس حامل f_c باشد، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب K می‌توان بدون فیلتر کردن مدولاسیون $\frac{DSB}{AM}$ را بدست آورد و نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید.



$v(t)=x(t)$

DSB:

$$x_c(t)=ak^2(x(t)+A\cos\omega_c t)^2-b(x(t)-A\cos\omega_c t)^2$$

$$=ak^2\left[x^2(t)+2Ax(t)\cos\omega_c t+A^2\cos^2\omega_c t\right]$$

$$-b\left[x^2(t)-2Ax(t)\cos\omega_c t+A^2\cos^2\omega_c t\right]$$

$$=ak^2x^2(t)+2ak^2Ax(t)\cos\omega_c t+ak^2A^2\cos^2\omega_c t$$

$$-bx^2(t)+2bAx(t)\cos\omega_c t-bA^2\cos^2\omega_c t$$

$$=(ak^2-b)(x^2(t)+A^2\cos^2\omega_c t)+2A(ak^2+b)x(t)\cos\omega_c t$$

اگر $k=\sqrt{\frac{b}{}}$ داریم:

۲

AM: $x_c(t)=ak^2(V(t)+A\cos w_c t)^2-b(V(t)-A\cos w_c t)^2$

$$=ak^2[V^2(t)+2AV(t)\cos w_c t+A^2\cos^2 w_c t]$$
$$-b[V^2(t)-2AV(t)\cos w_c t+A^2\cos^2 w_c t]$$

$$=ak^2V^2(t)+ak^2 2AV(t)\cos w_c t+ak^2A^2\cos^2 w_c t$$
$$-bV^2(t)+b2AV(t)\cos w_c t-bA^2\cos^2 w_c t$$

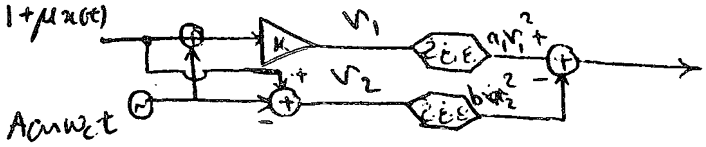
$$=(ak^2-b)(V^2(t)+A^2\cos^2 w_c t)+2A(ak^2+b)V(t)\cos w_c t$$

اگر $k=\sqrt{\frac{b}{a}}$ داریم:

$$=4AbV(t)\cos w_c t$$

و اگر $V(t)=1+\mu x(t)$ داریم:

$$x_c(t)=\underbrace{4Ab}_{A_c}[1+\mu x(t)]\cos w_c t$$

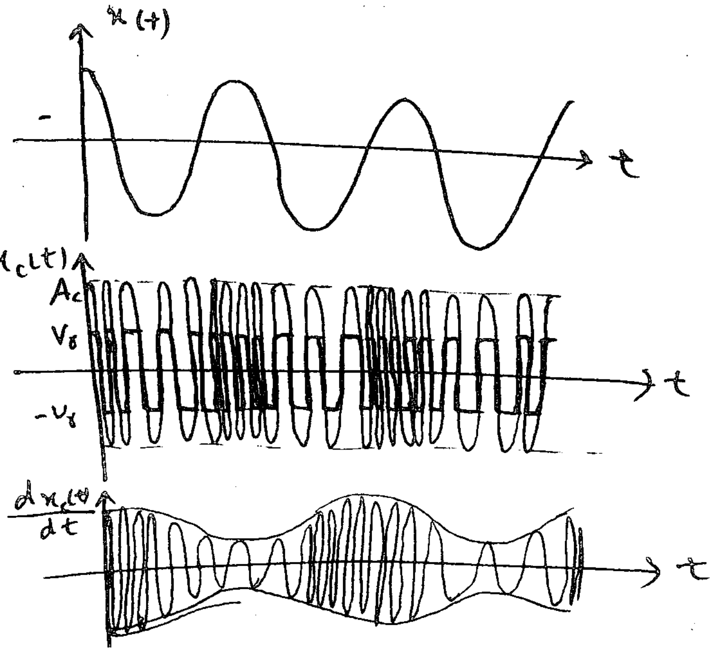


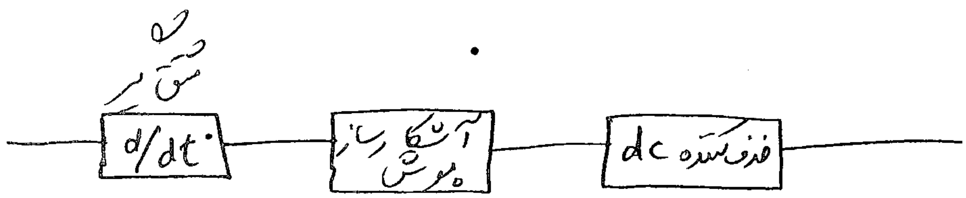
---

* بلوک دیاگرام یک آشکارساز FM از نوع تبدیل FM به AM را رسم نموده و آن را شرح دهید.

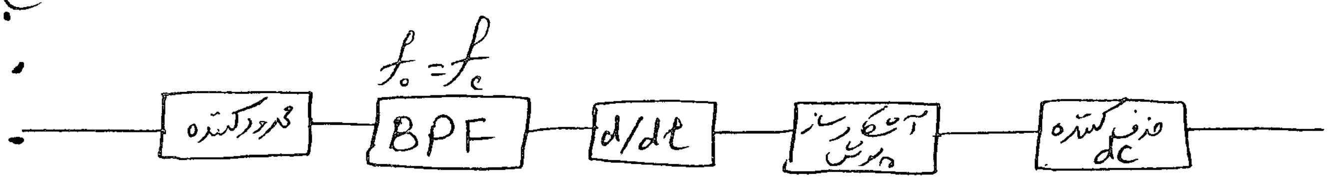
$$x_c(t)=A_c\cos\left(w_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)dt\right)$$

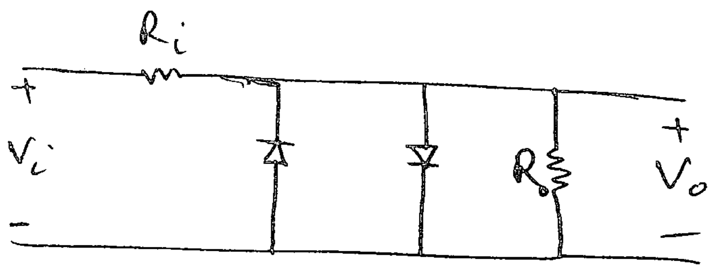
$$\frac{dx_c(t)}{dt}=-A_c(w_c+2\pi f_\Delta x(t))\sin\left(w_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)dt\right)$$

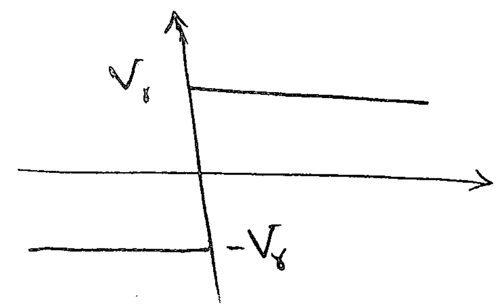




این مدل ناقص است چون که نویز را اثر و وارد دامنه می کند به همین دلیل مدل را به صورت زیر اصلاح می کنیم!



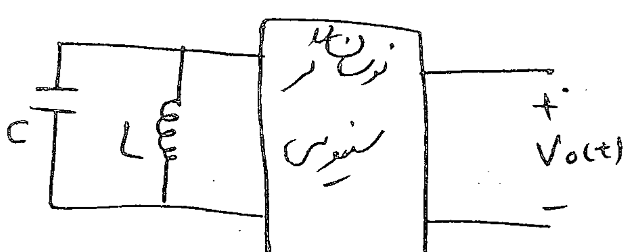




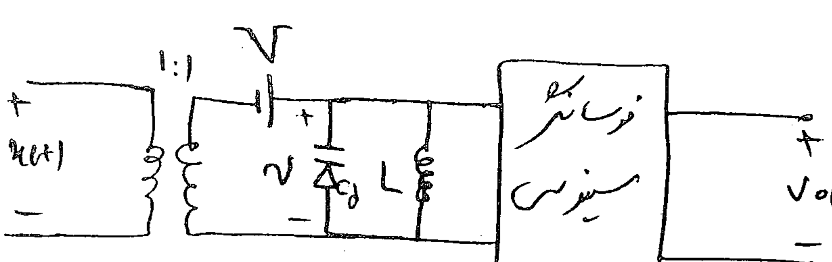
---

* بلوک دیاگرام مدولاتور FM مستقیم را رسم نموده و آن را شرح دهید.

تولید FM به روش مستقیم:



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



$$C_d = \frac{k}{\sqrt{v}}$$

ظرفیت خازنی دیود ورکتور

$$v = V + x(t)$$

$$C_d = \frac{k}{\sqrt{v}} = \frac{k}{\sqrt{V + x(t)}} = \frac{k}{\sqrt{V}}\left(1 + \frac{1}{V}x(t)\right)^{-1/2}$$

با نوشتن بسط
تا جملات دلخواه

$$\Rightarrow C_d = \frac{k}{\sqrt{V}}\left(1 - \frac{x(t)}{2V} + \cdots\right)$$

$$\left|\frac{x(t)}{V}\right| \ll 1 \Longrightarrow \boxed{V \gg 1}$$

$$|x(t)| \lesssim 1$$

پس از جملات دوم به بعد صرف نظر می‌کنیم.

$$C_d \simeq \frac{k}{\sqrt{V}}\left(1 - \frac{1}{2V}x(t)\right) \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} C_d = C_0 + C_1 x(t) \\ C_0 = \dfrac{k}{\sqrt{V}}, \quad C_1 = \dfrac{-C_0}{2V} \end{array}}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_d}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_0 + C_1 x(t))}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 + \frac{C_1}{C_0}x(t)\right)^{-1/2}$$

$$\left|\frac{C_1}{C_0}\right| \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{2V} \ll 1 \Longrightarrow \boxed{V \gg 1}$$

از جملات دوم به بعد صرف
نظر می‌کنیم:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 - \frac{C_1}{2C_0}x(t)\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(t) = f_c + f_\Delta x(t) \\ f_c = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}, \quad f_\Delta = \dfrac{-f_c C_1}{2C_0} \end{array}}$$

۵

$R_v(\tau) = 16e^{-(8\tau)^2} + 9$

* برای سیگنال تصادفی $v(t)$ با تابع خودهمبستگی $\cancel{R_v(\tau) = (12e^{-3\tau} + 4)u(t)}$ طیف توان آن را بیابید و مقدار dc سیگنال، توان متوسط و مقدار rms را حساب کنید.

$$F\left[e^{(\sqrt{\pi} bt)^2}\right] = \frac{1}{b} e^{(\sqrt{\pi} f/b)^2}$$

$$R_v(\tau) = 16e^{-(8\tau)^2} + 9 \qquad b = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$$

طیف توان

$$\Rightarrow G_v(f) = F\left[R_v(\tau)\right] = \frac{16}{8/\sqrt{\pi}} e^{\left(\sqrt{\pi} \frac{f}{8/\sqrt{\pi}}\right)^2} + 9\delta(f) = 2\sqrt{\pi}\, e^{(\pi f/8)^2} + 9\delta(f)$$

مقدار dc

$$\langle v(t) \rangle = \sqrt{R_v(\pm\infty)} = \pm 3$$

توان متوسط

$$\langle v^2(t) \rangle = P = R_v(0) = 25$$

$$V_{rms} = \sqrt{R_v(0) - R_v(\pm\infty)} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

---

* سؤال بالا را برای $R_v(\tau) = (12e^{-3\tau} + 4)u(t)$ تکرار کنید.

$$G_v(f) = F\left[R_v(\tau)\right] = 2\sqrt{\pi}\, e^{-(\sqrt{\pi} f/3)} + 4\delta(f)$$

$12\delta(f+2) +$

مقدار dc

$$\langle v(t) \rangle = \sqrt{R_v(\pm\infty)} = \pm 2$$

توان متوسط

$$\langle v^2(t) \rangle = P = R_v(0) = 16$$

$$V_{rms} = \sqrt{R_v(0) - R_v(\pm\infty)} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

٦

* با در نظر گرفتن $x(t) = \cos 200\pi t$ ، B_T و S_T را برای مدولاسیون AM با $A_c = 10$ و $\mu = 0.6$ بدست آورید. برای مدولاسیون DSB تکرار کنید.

روش اصلی: $S_x = 1$ مدولاسیون ، $S_x = 1/2$ مدوله

AM: $B = 2W = 2 \times 200 = 400\ Hz$

$W = 200$

$S_T = \frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_x) = \frac{100}{2}(1 + (0.6)^2)$

$S_x = 1 \Rightarrow S_T = 68\ W$ وات

DSB: $B = 2W = 2 \times 200 = 400\ Hz$

$W = 200$

$S_T = \frac{1}{2} A_c^2 S_x = \frac{100}{2} = 50\ W$ وات

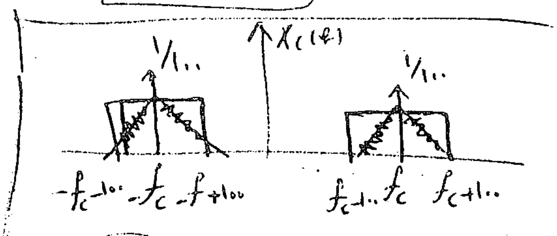
متعامد را از تابع sinc ، $S_x = 1/2$

---

* $\operatorname{sinc} 200\pi t$ ، $A_c = 10$ ، $\mu = 0.6$

$\operatorname{sinc} 200\pi t \longleftrightarrow \frac{1}{200} \Pi\left(\frac{f}{200}\right)$

$\boxed{S_x = 1/2}$



AM:

$B_T = 2W = 2 \times 200 = 400$

$S_T = \frac{A_c^2}{2}(1 + \mu^2 S_x) = \frac{100}{2}\left(1 + \frac{0.6^2}{2}\right) = 59\ W$ وات

DSB: $B_T = 2W = 400$

$S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x = \frac{100}{4} = 25\ W$ وات

---

* $x(t) = \operatorname{sinc}(\underbrace{8 \times 10^{-3}}_{W})t$ ، $A = 10$ ، $\mu = 0.5$ ، $S_T, B_T = ?$

AM: $B_T = 2 \times 8 \times 10^{-3}$ ، $S_T = \frac{A_c^2}{2}(1 + \mu^2 S_x) = \dots$ $\boxed{S_x = 1/2}$

DSB: $B_T = 2 \times 8 \times 10^{-3}$ ، $S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x = \dots$

* توان ارسالی یک منبع AM مدوله شده با تک آهنگ به ازاء مدولاسیون ۱۰۰ درصد و ماکزیمم توان پوشش [redacted] 32kw را حساب کنید.

$$A_{max}^2=(2A_c)^2=32\,kw \Rightarrow A_c^2=8\,kw$$

$$\mu=1 \quad , S_x=1/2 \Rightarrow S_T=\tfrac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2 S_x)=6\,kw$$

الف)

* اگر ماکزیمم توان پوشش یک فرستنده رادیویی 4kw باشد ماکزیمم مقدار μ منبع AM مدوله شده با تک آهنگ و $S_T=1kw$ چیست؟

$$S_x=1/2 \qquad S_T=\tfrac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2 S_x)=1^{kw} \Rightarrow A_c^2=\frac{4}{2+\mu^2}\,kw$$

$$A_{max}^2=(1+\mu)^2A_c^2=4\,\frac{(1+\mu)^2}{2+\mu^2}\le 4\,kw$$

$$1+2\mu+\mu^2\le 2+\mu^2 \Rightarrow \boxed{\mu\le 0.5}$$

* فرآیند تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $x(t)=2\cos(2\pi t+y)$ به طوری که y یک متغیر تصادفی گسسته با $P(y=0)=P(y=\pi/2)=1/2$ باشد، $M_x(1)$, $R_x(0,1)$ را پیدا کنید.

$$m_x=\sum x_i P_x(x)$$

$$m_x(t)=\sum 2\cos(2\pi t+y)\,\overset{1/2}{P_y(y)}$$

$$m_x(t)=\sum\cos(2\pi t+y)\Rightarrow m_x(1)=\sum\cos(2\pi+y)$$

$$\Rightarrow m_x(1)=\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\cos(2\pi+0)}_{1}+\underbrace{\cos(2\pi+\pi/2)}_{\sin 2\pi=0}\Big]=1/2$$

۸

$$R_x(t_1,t_2)=\sum \cos(2\pi t_1+y)\cos(2\pi t_2+y)\,P_y(y)$$

$$R_x(0,1)=\sum \cos(y)\cos(2\pi+y)\,P_y(y) \quad \tfrac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum\left[\cos(2\pi+y+y)+\cos(y-2\pi-y)\right]$$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$$=\frac{1}{4}\sum\cos(-2\pi)+\frac{1}{4}\sum\cos(2\pi+2y)$$

$$=\frac{1}{4}\sum\cos 2\pi+\frac{1}{4}\sum\cos(2\pi+2y)$$

$y=\begin{cases}0\\ \pi/2\end{cases}$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\Big(\cos 2\pi+\underbrace{\cos(2\pi+2(\tfrac{\pi}{2}))}_{\cos(3\pi)}\Big)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1+(-1))=\frac{1}{4}$$

---

* $X_c(f)$ را برحسب $X(f)$ برای NBFM و NBPM بدست آورید.

$$x_c(t)=A_c\cos(\omega_c t+\phi(t))$$

$$\longrightarrow x_c(t)=A_c\cos\omega_c t\cdot\cos\phi(t)-A_c\sin\omega_c t\cdot\sin\phi(t)$$

$$A_c\cos\phi(t)=A_c\left[1-\frac{1}{2!}\phi^2(t)+\frac{1}{4!}\phi^4(t)+\dots\right]$$

$$A_c\sin\phi(t)=A_c\left[\phi(t)-\frac{1}{3!}\phi^3(t)+\frac{1}{5!}\phi^5(t)-\dots\right]$$

$|\phi(t)|\ll 1\ \text{rad} \rightarrow$ از جملات توان بالا صرف نظر می‌کنیم

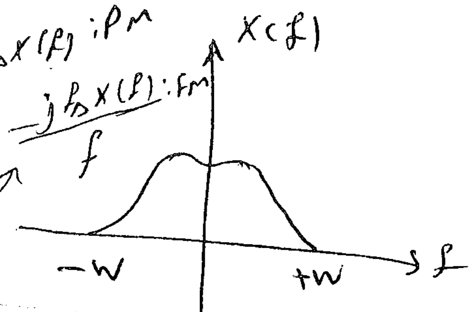
$$x_c(t)=A_c\cos\omega_c t-\phi(t)A_c\sin\omega_c t$$

$$X_c(f)=\frac{A_c}{2}\delta(f-f_c)-\frac{A_c}{2j}\Phi(f-f_c)$$

$$X_c(f)=\frac{A_c}{2}\delta(f-f_c)+\frac{A_c j}{2}\Phi(f-f_c)$$

$\phi_\Delta X(f)$:PM

$-\dfrac{j f_\Delta X(f)}{f}$:FM



$$\Phi(f)=\begin{cases}\phi_\Delta X(f) & :PM\\ \dfrac{-j f_\Delta X(f)}{f} & :FM\end{cases}$$

PM, FM پهنای باند برابر 2W

۸- اگر فرآیند تصادفی از سیستم LTI عبور کند، تابع خود همبستگی خروجی را نسبت به خروجی حساب کنید.

$$R_y(t_1,t_2)=E[y(t_1)y(t_2)]=h(-\tau)*R_{yx}(\tau)$$

$$R_y(t_1,t_2)=E[y(t_1)y(t_2)],\quad y(t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

$$R_y(t_1,t_2)=\int^{+\infty}h(\lambda)E[y(t_1)x(t-\lambda)]d\lambda$$

$$E[y(t_1)x(t-\lambda)]=R_{yx}(t_1,t_2-\lambda)=R_{yx}(t_1-t_2+\lambda)=R_{yx}(\tau+\lambda)$$

$$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)R_{yx}(\tau+\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}h(-\mu)R_{yx}(\tau-\mu)d\mu$$

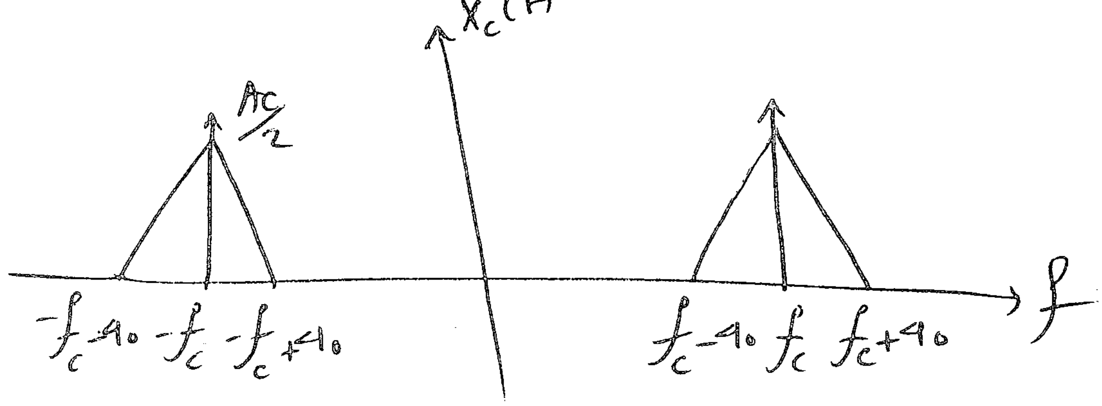
$$=h(-\tau)*R_{yx}(\tau)$$

---

* اگر سیگنال $x(t)=\text{sinc}^2 40t$ بصورت AM با $\mu<1$ ارسال شود طیف دوطرفه $x_c(t)$ را رسم و B_T را بدست آورید.

$$\text{sinc}^2 40t \longleftrightarrow \frac{1}{40}\Lambda\left(\frac{f}{40}\right)$$

$$B_T=2W=2\times 40=80\,\text{Hz}$$



* یک فرستنده‌ی رادیویی با $S_T \leq 3kw$ و $A_{max}^2 \leq 8kw$ در نظر بگیرید.
سیگنال پیام باند پایه تک تن، با $A_m = 1$ در نظر بگیرید. حداکثر P_{sb}
برای مدولاسیون AM و DSB را بدست آورید.

DSB:

$$\frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \frac{S_x}{4} \rightarrow P_{sb} = \frac{S_x A_{max}^2}{4} = \frac{A_{max}^2}{8} \leq 1\,kw \qquad S_x = \frac{A_m^2}{2} = 1/2$$

$$S_T = 2P_{sb} \Rightarrow P_{sb} = \frac{S_T}{2} = \frac{3}{2} \leq 1.5\,kw \qquad \boxed{P_{sb} \leq 1^{kw}}$$

Am:

$$\frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \frac{S_x}{16} \rightarrow P_{sb} = \frac{S_x A_{max}^2}{16} = \frac{A_{max}^2}{32} \leq 0.25\,kw$$

$$P_{sb} = \frac{1}{2} S_x P_c = \frac{P_c}{4} \rightarrow S_T = P_c + 2P_{sb} = 4P_{sb} + 2P_{sb}$$

$$\Rightarrow S_T = 6P_{sb} \Rightarrow \boxed{P_{sb} = \frac{S_T}{6} \leq 0.5^{kw}}$$

فرمول:

$$\frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \begin{cases} \frac{S_x}{4} & DSB \\ \frac{S_x}{16} & Am \end{cases}$$

DSB: $A_{max}^2 = A_c^2$, $P_{sb} = \frac{A_c^2}{4} S_x$

Am: $A_{max}^2 = 4A_c^2$, $P_{sb} = \frac{A_c^2 S_x}{4}$

باسمه تعالی

نام آزمون: مخابرات I نام مدرس: کاظمی مدت آزمون: ۲ ساعت

نام و نام خانوادگی دانشجو: .... رشته تحصیلی: برق

نیمسال: تابستان سال تحصیلی: ۸۶

۱- فرآیند تصادفی $X(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: (۲۰ نمره) پایان ترم کامل

$$X(t) = 2\cos(2\pi t + y)$$

پشت برگه

در صورتیکه y یک متغیر تصادفی گسسته با $P(Y=0)=P(Y=\pi/2)=\frac{1}{2}$ باشد

$m_x(1)$ و $R_x(0,1)$ را پیدا کنید

۲- متوسط متحرک سیگنال تصادفی $X(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (۲۰ نمره) ص ۱۹۷

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\lambda)\,d\lambda$$

پایان ترم مهر ۲۴۷

$H(f)$ را به نحوی بیابید که $y(t)=h(t)*x(t)$ و نشان دهید که:

کتاب جزوه

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

$\mathrm{sinc}\, fW$

۳- اگر $x(t)=\mathrm{sinc}(8\times10^3 t)$ باشد، B_T و S_T را برای مدولاسیون AM با

$Ac=10$ و $\mu=0.4$ حساب کنید. مسئله را برای مدولاسیون DSB تکرار کنید (۱۵ نمره)

۴- یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی $x_c(t)=ak^2(v(t)+Ac\cos\omega_c t)^2-b(v(t)-Ac\cos\omega_c t)^2$

را ایجاد کرده است. اگر فرکانس حامل f_c باشد، نشان دهید که بازای یک مقدار مناسب

K می‌توان با فیلتر کردن مدولاسیون DSB را بدست آورد. نمودار بلوکی

سیستم مدولاسیون را رسم کنید. (۱۵ نمره) حل تمرین ص ۶۹

۲۴ خرداد

۱- $X_1(t)$ را بر حسب $X(t)$ برای NBFM و NBPM بدست آورید (۱۰ نمره)

(نمره کلاس)

۲- بلوک دیاگرام یک آشکارساز FM از نوع تبدیل FM به AM را رسم نموده و آن را شرح دهید. (۱۰ نمره) آخرین سؤال جزوه درسی

۳- بلوک دیاگرام سیستم دمدولاتور FM مستقیم را رسم نموده و آن را شرح دهید (۱۰ نمره)

$x = 2\cos(2\pi t + y)$

$m_x(1) = ?$

$R_x(0,1) = ?$

$m_x = \sum x_i \, P_x(x)$

$m_x(t) = \sum \cancel{2}\cos(2\pi t + y)\, P_x(y)$

$\Rightarrow m_x(1) = \sum \cos(2\pi + y)\, \cancel{P_x(y)}$

$= \cancel{2}\left(\underbrace{\cos(2\pi + 0)}_{+1} + \underbrace{\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{(0)}\right) \frac{1}{2} \quad 1$

$R_x(t_1,t_2) = \sum \cos(2\pi t_1 + y)\cos(2\pi t_2 + y) \cdot P_Y(y)$

$R_x(0,1) = \sum \cos(y)\cos(2\pi + y)\, \cancel{P_X(y)}$

$= \cancel{2}\sum \cancel{2} \frac{1}{2}\{\cos(y - 2\pi - y) + \cos(y + 2\pi + y)\}$

$= \frac{1}{2}\sum \cos 2\pi + \frac{1}{2}\sum \cos(2\pi + 2y)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum \cos(2\pi + 2y)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2\pi + \cos\left(2\pi + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}$

$m_x = \sum_{i=1}^{k} x_i \, P_x(x_i)$

$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, P_x(x)\, dx$

باسمه تعالی

نام آزمون: مخابرات I نام مدرس: ... مدت آزمون: ۲ ساعت و ربع

نام و نام خانوادگی دانشجو: ... رشته تحصیلی: کارشناسی برق

نیمسال: دوم سال تحصیلی: ۸۶-۸۵

۱- اگر برای سیگنال تصادفی $y(t)$ با تابع خودهمبستگی $R_y(\tau) = (12e^{-3\tau} + 4)u(t)$ طیف توان را بیابید و مقدار dc سیگنال، توان متوسط و مقدار rms را حساب کنید (۲۰ نمره)

۲- شرط تشکیل سیگنال تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود. (۲۰ نمره) ص ۱۹۷

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\lambda)\, d\lambda$$

ص ۲۴۷

۵ - ۲ - ۴۵

$H(f)$ را به نحوی که $y(t) = h(t) * x(t)$ بیابید و نشان دهید که:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right) R_x(\tau-\lambda)\, d\lambda$$

$x(t) = \mathrm{sinc}\, 2W t$

۳- اگر $x(t) = \mathrm{sinc}(8\times10^3 t)$ باشد، S_T را برای مدولاسیون AM با $AC=10$ و $\mu=0.4$ را حساب کنید. مشابه آن را برای مدولاسیون DSB تکرار کنید (۲۰ نمره)

$B_T = 2W$

۴- یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی $x_c(t) = aK^2(x(t)+A\cos\omega_c t)^2 - b(x(t)-A\cos\omega_c t)^2$ را ایجاد کرده است. اگر ترکیب خاص f_c باشد، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب K می‌توان به وسیله فیلتر کردن مدولاسیون DSB را بدست آورد. نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید (۲۰ نمره) ص ۶۹

۵- $X_c(f)$ را برحسب $X(f)$ برای NBFM و NBPM بدست آورید (۱۰ نمره)

FM مستقیم

۶- ... سازی ... ۱/۳۰ ...

نام درس مخابرات I ..... نام مدرس کاکائی ..... مدت آزمون ۲ ساعت و ربع

نام و نام خانوادگی دانشجو ..... رشته تحصیلی .....

نیمسال ..... سال تحصیلی تابستان ۸۵

ص ۵۲ و ۵۳ کتاب

۱- رابطه زیر را از خواص تبدیل فوریه اثبات کنید (۲۰ نمره)

$$v(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} V\left(\frac{f}{a}\right)$$

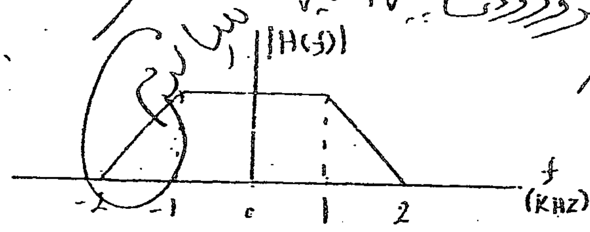
۲- سیستمی را با پاسخهای دامنه و فاز نشان داده شده در شکل زیر با سه ورودی زیر در نظر می‌گیریم:

$x_1(t)=\cos 500\pi t+\cos 2000\pi t$ $\quad x_2(t)=\cos 500\pi t+\cos 2500\pi t$ $\quad x_3(t)=\cos 2500\pi t+\cos 3500\pi t$

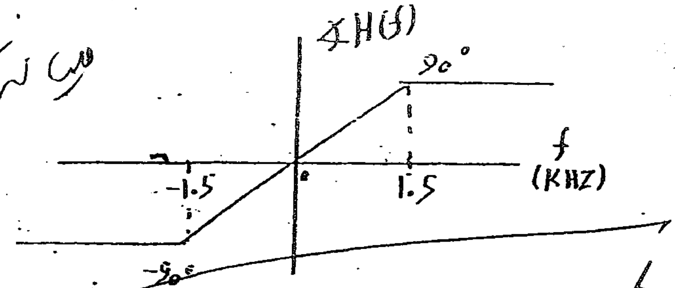
(۲۰ نمره)

الف) خروجی‌های $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ و $y_3(t)$ را پیدا کنید

ب) در صورت وجود اعوجاج، نوع آن را برای هر ورودی پیدا کنید



میانترم



پایان ترم

۳- فرآیند تصادفی $X(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: (۲۰ نمره)

$$X(t)=2\cos(2\pi t+Y)$$

تابستان ۸۶

در صورتیکه Y یک متغیر تصادفی گسسته با $P(Y=0)=P(Y=\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$ باشد، $m_x(1)$ و $R_x(0,1)$ را پیدا کنید

۴- یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی سیگنال زیر را ایجاد کرده است: (۲۰ نمره)

$$x_c(t)=aK^2[v(t)+A\cos\omega_c t]^2-b(v(t)-A\cos\omega_c t)^2$$

اگر f_c فرکانس حامل باشد و $v(t)=x(t)$، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب K می‌توان بدون فیلتر کردن مدولاسیون DSB به دست آورد. نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید

۱-۳-۴

۵- بلوک دیاگرام کیا آشکارسازی FM از نوع تبدیل FM به AM را رسم نموده و آن را شرح دهید. (۱۰) آفرین سؤال جزوه درسی بسیار مهم

۶) بلوک دیاگرام یک دمدولاتور FM مستقیم را رسم نموده و آن را شرح دهید؟ (۱۰)

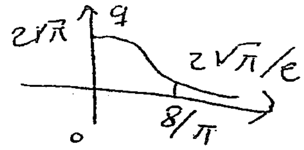
پایان ترم فصل مهم

۲

$R_V(\tau) = 16\, e^{-(8\tau)^2} + 9$ حل

$f[e^{-(\sqrt{\pi} b t)^2}] = \frac{1}{b} e^{-(\sqrt{\pi} \cdot f/b)^2}$ $b = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$

$G_V(f) = 2\sqrt{\pi}\, e^{-(\pi f/8)^2} + 9\delta(f)$ ✓



$\langle V(t) \rangle = \sqrt{R_V(\pm\infty)} = \pm 3$

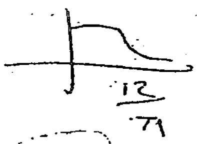
$\langle V^2(t) \rangle = R_V(0) = 25$

$V_{rms} = \sqrt{25-9} = 4$

$R_Y(\tau) = 12\, e^{-|3\tau|} + 4$ (۱) حل کنید؟

$f[e^{-\sqrt{\pi} b t}] = \frac{1}{b} e^{-\sqrt{\pi} \cdot f/b}$ $b = \frac{12}{\sqrt{\pi}}$

$G_Y(f) = 2\sqrt{\pi}\, e^{-(\pi f/3)} + 4\delta(f)$



$\langle V(t) \rangle = \sqrt{R_Y(\pm\infty)} = \pm 2$

$\langle V^2(t) \rangle = R_Y(0) = 16$

$V_{rms} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

$\infty = 0$

$0 = 1$ e^0

$\sqrt{R_Y(0) - (m_d)^2}$

$\sqrt{16-4} = \sqrt{12}$ $R_V =$ توان

(۷) ... ، (۶) ، (۵) ، (۳) ، (۱) حل

۷۱

۹-۲-۱۰

① $dc \Rightarrow \tau = 0$ قرار می‌دهیم

* برای سیگنال تصادفی $R_v(\tau) = (12e^{-3\tau}+4)\,u(\tau)$ مقدار dc سیگنال را

متوسط و مقدار rms را حساب کنید؟

سؤال دانشگاه کازرون

$\tau = 0 \Rightarrow dc^2$

$\tau = \infty$

$R_v(\pm\tau)$
$R_v(0)$

توان متوسط $\tau = 0$

مقدار rms → رابطه واریانس $(\sqrt{\quad})^2$

حلیف توان ← کنترل خودرو بگیریم جدول می‌دهیم

② * اگر فرایند تصادفی از سیستم LTI تابع خود همبستگی خروجی

را نسبت به خروجی حساب کنید

57 تا 59

$R_y(t_1,t_2) = E[y(t_1)\cdot y(t_2)] = h(-\tau) * R_{yx}(\tau)$

سؤال تمرین کن

فصل 7 دو تا
فصل 6 دو تا
فصل 4 دو تا

③ مثال ۲:

$x(t) * h(t)$ $\omega(\tau)$

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

صفحه ۱۹۴

$h(t) = \begin{cases}\frac{1}{T} \\ 0\end{cases}$ اشتباه کتاب

۱۵-۲-۹۰

تمرین

توضیح تمرین

سؤال تمرین کتاب

حل :

$$\text{AM:}\ \ B_T = 400\text{Hz} \qquad S_T = \frac{1}{2}A_c^2\left(1+\mu^2 S_x\right) = \frac{100}{2}\left(1+0.6^2\right) = 68\text{W}$$

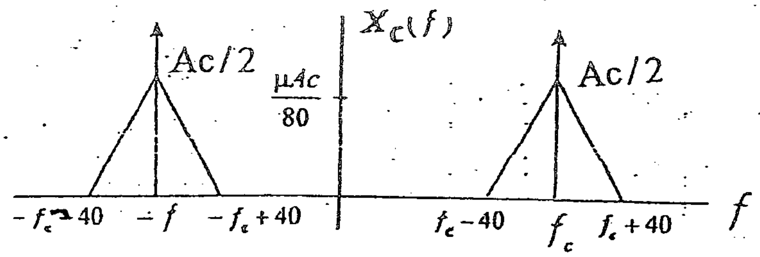
$$\text{DSB:}\ \ B_T = 400\text{Hz} \qquad S_T = \frac{1}{2}A_c^2 S_x = \frac{100}{2} = 50\text{W}$$

٤. ٢-٤. اگر سیگنال $x(t)=\text{sinc}^2 40t$ بصورت AM با $\mu < 1$ ارسال شود، طیف دو طرفه $x_c(t)$ را رسم و B_T آن را بدست آورید.

حل :

$$\text{sinc}^2\,40t \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{40}\Lambda\left(\frac{f}{40}\right)$$

$$B_T = 2W = 80\ \text{Hz}$$



٤. ٢-٥. توان ارسالی یک موج AM مدوله شده با تک آهنگ را به ازاء مدولاسیون 100 درصد و ماکزیمم توان پوش 32kW را حساب کنید.

حل :

$$A_{max}^2 = (2A_c)^2 = 32\text{kW} \quad \Rightarrow \quad A_c^2 = 8\text{kW}$$

$$\mu = 1, \quad S_x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S_T = \frac{1}{2}A_c^2\left(1+\mu^2 S_x\right) = 6\text{kW}$$

٤. ٢-٦. اگر ماکزیمم توان پوش یک فرستنده رادیوئی 4kW باشد ماکزیمم مقدار μ موج AM مدوله شده با تک آهنگ و S_T=1kW چیست؟ (سؤال)

حل :

$$S_x = \frac{1}{2}, \quad S_T = \frac{1}{2}A_c^2\left(1+\frac{\mu^2}{2}\right) = 1\text{kW} \quad \Rightarrow \quad A_c^2 = \frac{4}{2+\mu^2}\text{kW}$$

$$A_{max}^2 = (1+\mu)^2 A_c^2 = 4\frac{(1+\mu)^2}{2+\mu^2}\text{kW} \le 4\text{kW}$$

۱۹۰

۱۱۰ 7

با در نظر گرفتن $x(t) = \cos 200\pi t$ ، S_T و B_T را برای مدولاسیون AM با $A_c = 10$ و $\mu = 1$ به دست آورید. این مسئله را برای مدولاسیون DSB تکرار نمایید.

$W = 200\pi$

$S_x = \frac{1}{2}$

AM: $B_T = 2W$

$S_T = \frac{A_c^2}{2}(1 + \mu^2 S_x)$ $(S_x = 1)$ $1/2$

$2P_c + 2P_{sb}$

DSB: $B_T = 2W$

$\cancel{S_T = \frac{A_c^2}{2}}$ $S_T = 2P_{sb}$ و $P_{sb} = \frac{A_c^2}{4}\mu^2 S_x$

$S_T = A_c^2 \mu^2 S_x$ $\rightarrow$ $S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x$

سوال دانشگاه آزاد ...

اگر $x(t) = \mathrm{Sinc}\, 200\pi t$ باشد B_T و S_T را برای مدولاسیون AM با $A_c = 10$ و $\mu = 1$ بدست آورید.

نکته: برای تابع Sinc ، $S_x = \frac{1}{2}$ می باشد

$B_T = 2W$

$S_T = \frac{A_c^2}{2}(1 + \mu^2 ...) \cos ...$

A_c^2 A_c^2 ...

بنام خدا

۳ تا فصل پنج

۱- رابطه‌ی زیر را از خواص تبدیل فوریه اثبات کنید؟ $v(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} V\left(\frac{f}{a}\right)$

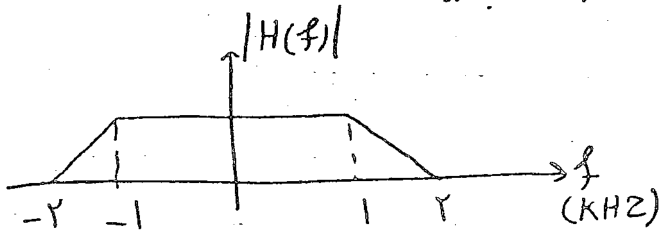
۲- سیستمی با پاسخ های دامنه و فاز نشان داده شده در شکل زیر با سه ورودی زیر در نظر میگیریم :

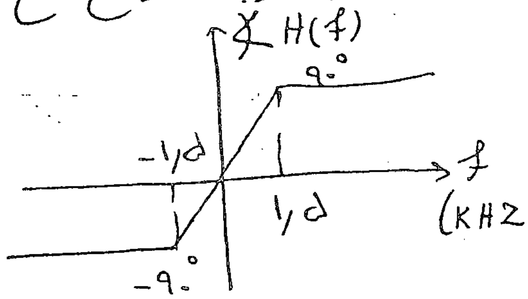
$x_1(t) = \cos 2000\pi t + \cos 4000\pi t$ $\quad x_2(t) = \cos 2000\pi t + \cos 2500\pi t$

$x_3(t) = \cos 2500\pi t + \cos 3500\pi t$

الف) خروجی‌های $y_1(t)$ و $y_2(t)$ و $y_3(t)$ را پیدا کنید؟

ب) در صورت وجود اعوجاج، نوع آنرا برای هر ورودی پیدا کنید؟





**۳- فرایند تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود $x(t) = 2\cos(2\pi t + y)$

در صورتی که y یک متغیر تصادفی گسسته با $P(y=0) = P(y=\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ باشد،

$m_x(1)$ و $R_x(0,1)$ را پیدا کنید؟

**۴- یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی سیگنال زیر را ایجاد کرده است : دقیق خوانده شود

$x_c(t) = a k^2 \left[v(t) + A\cos\omega_c t\right]^2 - b\left(v(t) - A\cos\omega_c t\right)^2$

اگر f_c فرکانس حامل باشد و $v(t) = x(t)$، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب k می‌توان بدون فیلتر کردن مدولاسیون DSB به دست آورد، نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید؟ صفحه ۶۹ حل المسائل ۴-۳-۲

** ۵- بلوک دیاگرام یک آشکارساز FM از نوع تبدیل FM به AM را رسم نموده و آنرا شرح دهید؟

** ۶- بلوک دیاگرام یک مدولاتور FM مستقیم را رسم نموده و آنرا شرح دهید؟

* ۷- متوسط متحرک سیگنال تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می شود

دقیق

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\lambda)\,d\lambda$$

ص ۱۹۷ 15-2.9

فصل ۹

$H(f)$ را به نحوی بیابید که $y(t)=h(t)*x(t)$ و نشان دهید که: ص ۱۹۷ 15-2.9 مثال ... ثابت اثبات دارد

$$R_y(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

$x(t)=\cos 200\pi t$

** ۸- اگر $x(t)=\text{sinc}(8\times10^{3}t)$ باشد، B_T و P_T را برای مدولاسیون AM با $A_c=10$ و $\mu=0/4$ حساب کنید. مسئله را برای مدولاسیون DSB تکرار کنید؟ فصل ۶ ص ۲۳۶

$m=0/12$

** ۹- $x_c(f)$ را برحسب $X(f)$ برای NBFM و NBPM بدست آورید؟

فصل ۹ ۱۰- برای سیگنال تصادفی $v(t)$ با تابع خودهمبستگی $R_v(\tau)=(12e^{-2\tau}+4)u(t)$ طیف توان را بیابید و مقدار dc سیگنال، توان متوسط و مقدار rms را حساب کنید؟ ص ۱۹۳

* ۱۱- یک روش تولید و یک روش آشکارسازی FM را نام برده و با رسم بلوک دیاگرام آنها را شرح دهید

FM مستقیم — تبدیل FM به AM

داخل جزوه ۱۵ اسلاید آخر