بسم الله الرحمن الرحیم

مخابرات

(بخش سوم)

استاد صافی

۱۰

گوش انسان به فاز حساس نیست. فرکانس برایش مهم است یعنی $|X(f)|$.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

خروجی فیلتر $z(t) = \frac{A_c}{4} x(t) \cos\phi \overset{\mp}{\pm} \frac{A_c}{4} \hat{x}(t) \sin\phi$

$$Z(f) = \frac{A_c}{4} X(f) \cos\phi \pm \frac{A_c}{4} \hat{X}(f) \sin\phi$$

$$\left.\begin{aligned} & Z(f) = \frac{A_c}{4} X(f) \cos\phi \pm \frac{A_c}{4} \hat{X}(f) \sin\phi \\ & \hat{X}(f) = \begin{cases} jX(f) & f<0 \\ -jX(f) & f>0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z(f) = \frac{A_c}{4} X(f) \cos\phi \pm j\frac{A_c}{4} X(f) \sin\phi$$

$$= \frac{A_c}{4} X(f) \left(\cos\phi \pm j\sin\phi\right) = \frac{A_c}{4} X(f) e^{\pm j\phi}$$

$$\Rightarrow |Z(f)| = \frac{A_c}{4} |X(f)|$$

$$\measuredangle Z(f) = \pm\phi$$

به عبارت دیگر اعوجاج دامنه نداریم ولی اعوجاج تأخیری داریم که گوش انسان به اعوجاج تأخیری حساس نیست ولذا جابجایی فاز در سیستم‌های SSB برای صدا اهمیتی ندارد.

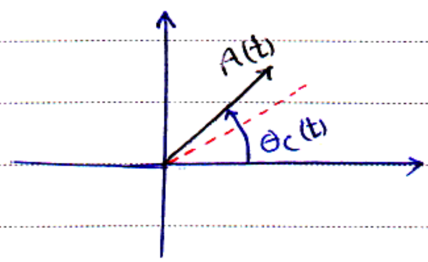
$$\begin{cases} x(t) = 1 & \phi_\Delta = 200 \Rightarrow \phi(t) = 200 \\ x(t) = -0/8 & \phi_\Delta = 200 \Rightarrow \phi(t) = -160 = 200 \end{cases}$$

فصل ۴ : مدولاسیون زاویه‌ای (غیرخطی) (فصل ۵ کتاب)

در مدولاسیون زاویه‌ای مشخصات زاویه‌ای سیگنال حامل متناسب با سیگنال پیام تغییر می‌کند. (دامنه ثابت است)

سیگنال میان گذر : $A(t)\cos(w_c t + \phi(t))$

زاویه لحظه‌ای : $\theta_c(t) = w_c t + \phi(t)$



به عبارت دیگر $\theta_c(t)$ متناسب با پیام $x(t)$ تغییر می‌کند

$$Re\{A(t)\, e^{j\theta_c(t)}\} = V_{bp}(t)$$

مدولاسیون زاویه‌ای را مدولاسیون نمایی نیز می‌گویند

مدولاسیون زاویه‌ای ⟵ مدولاسیون فاز (PM) هم فاز و هم فرکانس لحظه‌ای با پیام تغییر می‌کند
مدولاسیون زاویه‌ای ⟵ مدولاسیون فرکانس (FM)

مدولاسیون PM : در این مدولاسیون، فاز لحظه‌ای $\phi(t)$ متناسب با سیگنال پیام $(x(t))$ تغییر می‌کند

فاز لحظه‌ای $\phi(t) = \phi_\Delta x(t)$ $\qquad \phi_\Delta \le 180°$ $\qquad \phi_\Delta = 400$

$x(t) = 0/1 \Rightarrow \phi(t) = 40$

$x(t) = 1 \xRightarrow{\phi(t)=} 400 = \cancel{360} + 40 = 40$

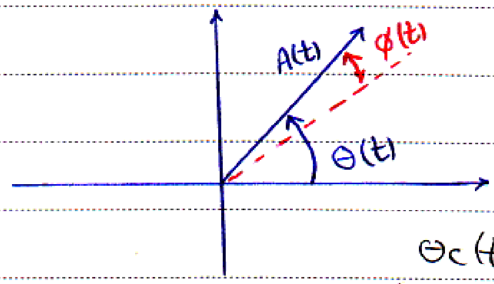
پس ما حق نداریم ϕ_Δ را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که به ازای دو $x(t)$ متفاوت یک فاز را بدست آوریم

لازمه‌ی داشتن $\phi(t)$ های مختلف به ازای $x(t)$ های مختلف این است که $\phi_\Delta \le 180°$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l} \phi_\Delta \le 180 \\ |x(t)| \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -180° \le \phi(t) \le 180°$$

$-1 \le x(t) \le 1$

ϕ_Δ : شاخص مدولاسیون فاز (انحراف فاز) می‌دانیم که حداکثر جابجایی فاز ناشی از $x(t)$ را نشان می‌دهد.



شکل موج مدوله شده PM در حوزه زمان : زاویه غیرخطی $x_c(t) = A_c \cos\left(\overbrace{\omega_c t + \phi_\Delta x(t)}^{\theta_c(t)}\right)$

فرکانس لحظه‌ای :

$$* \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_c(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{d(\omega_c t + \phi_\Delta x(t))}{dt} = f_c + \frac{\phi_\Delta}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}$$

مدولاسیون FM : در این مدولاسیون فرکانس لحظه‌ای $f(t)$ متناسب با سیگنال پیام ($x(t)$) تغییر می‌کند.

تعریف داریم : $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

خیلی بزرگ

$$\left.\begin{array}{l} f_\Delta < f_c \\ |x(t)| \le 1 \end{array}\right| \Rightarrow f(t) \ge 0$$

معمولاً در عمل f_Δ را خیلی کوچک‌تر از f_c در نظر می‌گیریم تا شرط باند باریک بودن سیگنال حفظ شود.

$\theta_c(t) = 2\pi\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + \phi_c(t_0)$: در واقع بوده $t_0 = 0$

شکل موج مدوله شده FM در حوزه زمان :

با توجه به الف *

زاویه لحظه‌ای $\theta_c(t) = 2\pi\int f(t)\,dt = 2\pi\int (f_c + f_\Delta x(t))\,dt = \omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$

فاز لحظه‌ای $\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)}$$

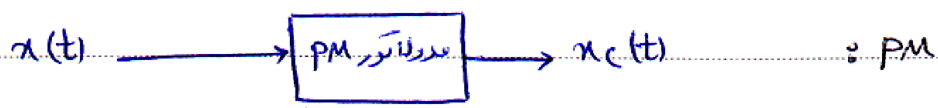
جدول خلاصه :

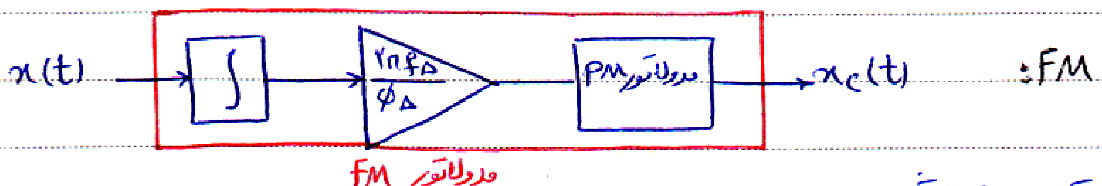
	فاز لحظه‌ای	فرکانس لحظه‌ای	شکل موج مدوله شده
PM	$\phi_\Delta\, x(t)$	$f_c + \frac{\phi_\Delta}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}$	$A_c \cos\left(\omega_c t + \phi_\Delta\, x(t)\right)$
FM	$2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$	$f_c + f_\Delta\, x(t)$	$A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)$

باید حفظ شوند.

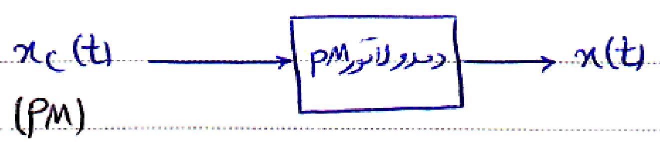
نتیجه ۱) در هر دو مدولاسیون FM و PM هم فاز و هم فرکانس با پیام تغییر می‌کند.

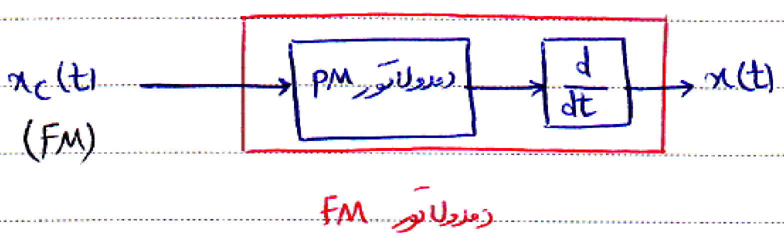
نتیجه ۲) مدولاتور و دمدولاتور PM را می‌توان با استفاده از مدولاتور و دمدولاتور FM ساخت و برعکس.

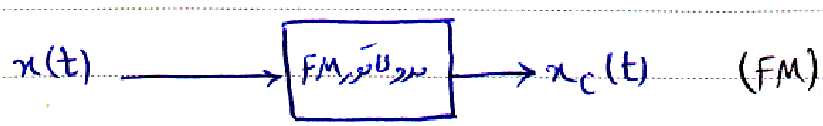




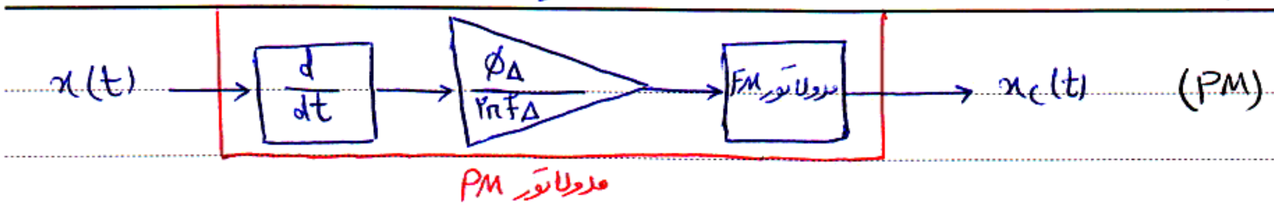
می‌خواهیم مدولاتور و دمدولاتور FM را با استفاده از مدولاتور و دمدولاتور PM بسازیم :

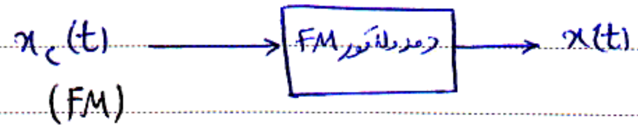


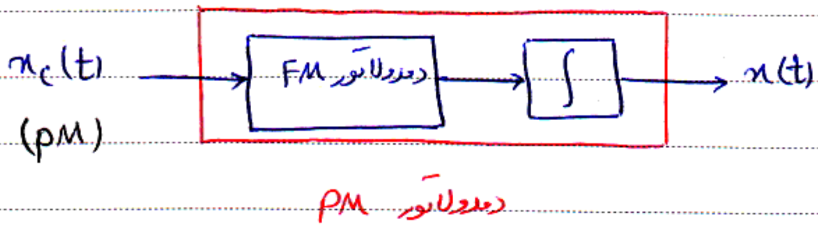




می‌خواهیم مدولاتور و دمدولاتور PM را با استفاده از مدولاتور و دمدولاتور FM بسازیم:



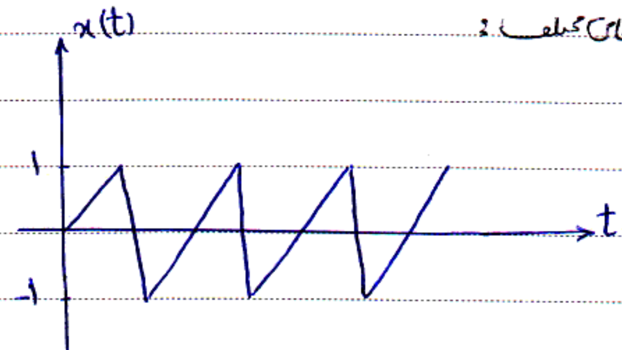


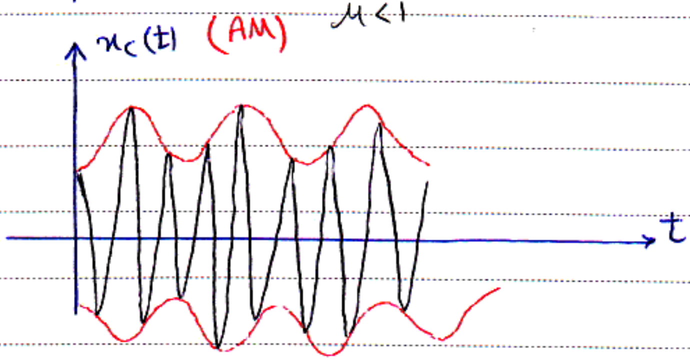


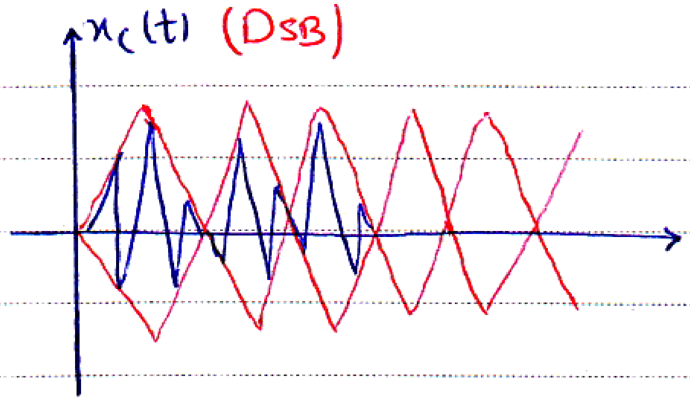
توان ارسالی: چون دامنه‌ی موج مدوله شده مقدار ثابت A_c است توان ارسالی مستقل از $x(t)$ است و برابر است با:

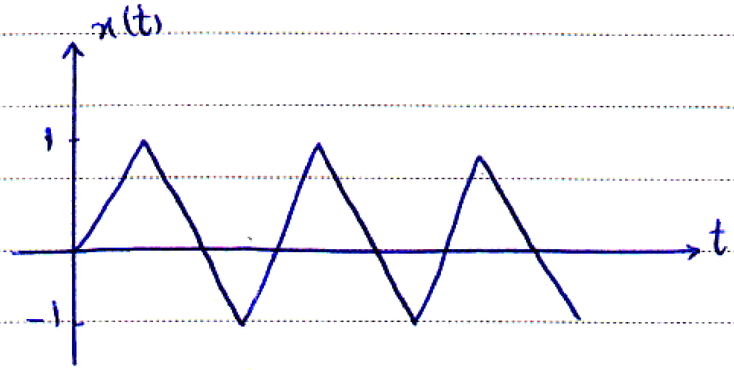
$$S_T = \frac{1}{2} A_c^2$$

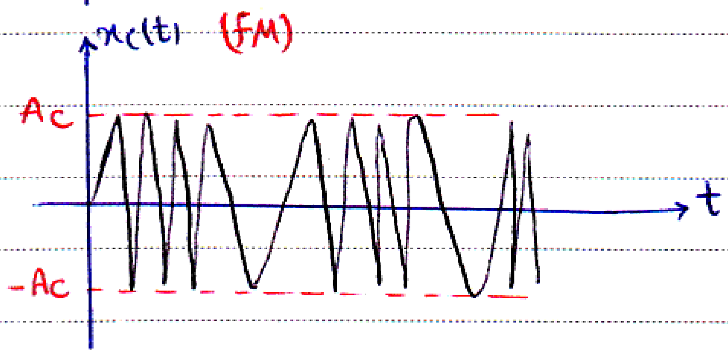
مقایسه‌ی شکل موج‌های مدوله شده در مدولاسیون‌های مختلف:





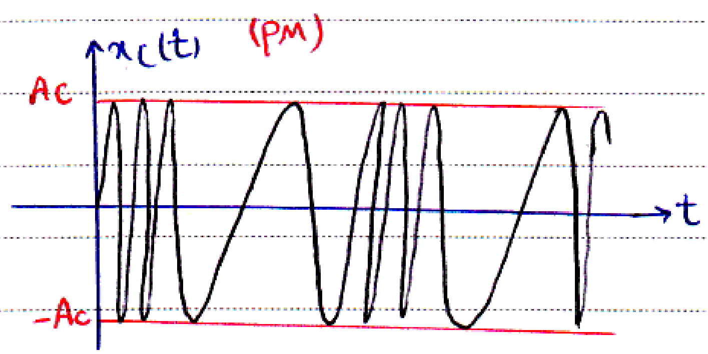






FM: $f(t)=f_c+2\pi f_\Delta\ x(t)$

PM: $f(t)=f_c+\dfrac{\phi_\Delta}{2\pi}\ \dfrac{dx(t)}{dt}$



یادآوری:

PM: $x_c(t)=A_c\cos\left(\omega_c t+\phi_\Delta\ x(t)\right)$

FM: $x_c(t)=A_c\cos\left(\omega_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)\,dt\right)$

وطن به عشق نازاست.

همیشه $\frac{1}{2}A_c^2$ <= توان ارسالی FM و PM است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

علی‌رغم شباهت بیش از حد FM و PM ، FM دارای خاصیت حذف نویز بهتری است زیرا سیگنال دمودوله شده برابر است با $f_c + f_\Delta x(t)$ که بدون افزایش توان ارسالی و فقط با افزایش f_Δ می‌توان آن را افزایش داد و لذا SNR را افزایش داد. البته افزایش f_Δ به معنی افزایش پهنای باند است و باید بین SNR و پهنای باند یک حالت بهینه را در نظر گرفت.

$$SNR = \frac{\text{توان سیگنال}}{\text{توان نویز}} = \frac{P_S}{P_N}$$

مدولاسیون PM و FM باند باریک:

$$x_c(t) = A_c \cos(w_c t + \phi(t))$$

یادآوری:

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_\Delta x(t) & ; PM \\ 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt & ; FM \end{cases}$$

بیان سیگنال براساس مولفه‌های هم فاز و تربیعی:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$x_c(t) = \underbrace{A_c \cos\phi(t)}_{\substack{x_{c_i}(t) \\ \text{مولفه هم فاز}}} \cos w_c t - \underbrace{A_c \sin\phi(t)}_{\substack{x_{c_q}(t) \\ \text{مولفه تربیعی}}} \sin w_c t$$

بسط

$$\cos\phi(t) = 1 - \frac{1}{2}\phi^2(t) + \dots \quad \text{جملات زوج}$$

$$\sin\phi(t) = \phi(t) - \frac{1}{6}\phi^3(t) + \dots \quad \text{" فرد}$$

فقط برای باند باریک

چنانچه $\phi(t) \ll 1$ باشد داریم:

از توان‌های ۲ به بالا صرف نظر می‌کنیم. $\phi^2, \phi^3, \dots$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\sin\omega_c t \xrightarrow{F} \frac{j}{2}\left[\delta(f+f_c)-\delta(f-f_c)\right] \qquad \int x(t)dt \xrightarrow{F}$$

$$\cos\omega_c t \xrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)\right] \qquad \frac{X(f)}{j\omega}=\frac{X(f)}{j2\pi f}$$

$\phi(t)\to 0$

$$\begin{cases} x_{c_i}(t)\simeq A_c & A_c\cos(0)=A_c \\ x_{c_q}(t)\simeq A_c\,\phi(t) & A_c\sin\phi(t)=A_c\phi(t) \end{cases} \qquad \underset{x\to 0}{\sin x\simeq x}$$

$\phi(t)\to 0$

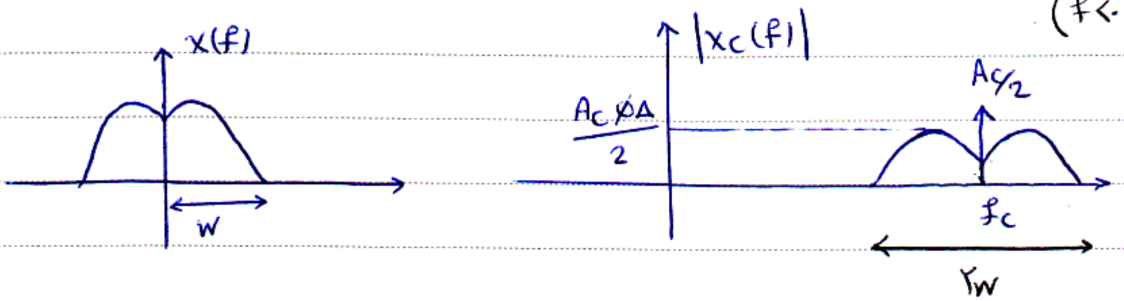
$$\boxed{x_c(t)=A_c\cos\omega_c t - A_c\,\phi(t)\sin\omega_c t} \Rightarrow$$ حول باند باریک :

$$=\begin{cases} A_c\cos\omega_c t-\underbrace{A_c\phi_\Delta x(t)}_{X(f)}\underbrace{\sin\omega_c t}_{\frac{1}{2j}\delta(f-f_c)} & ;\ PM \\ A_c\cos\omega_c t-\left(A_c 2\pi f_\Delta \underbrace{\int x(t)dt}_{X(f)/j2\pi f}\right)\underbrace{\sin\omega_c t}_{\frac{1}{2j}\delta(f-f_c)} & ;\ FM \end{cases}$$

باند باریک
Narrow band

$$\Rightarrow X_c(f)=\begin{cases} \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c)+A_c\phi_\Delta\left(\frac{\times j}{2}\right)X(f-f_c) & NB\ PM\ (f>0) \\ \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c)+A_c\cancel{2\pi}f_\Delta\left(\frac{\times j}{2}\right)\frac{X(f-f_c)}{\cancel{j2\pi}(f-f_c)} & NB\ FM\ (f>0) \end{cases}$$

(با مزدوج برای $f<0$)



$x_c(t)$ یک سیگنال میان‌گذر با پهنای باند $2W$ است، البته چنانچه $\phi(t)$ افزایش یابد جملات $\phi^2(t)$ ،

$\phi^3(t)$ و ... قابل صرف‌نظر کردن نیستند و لذا پهنای باند افزایش می‌یابد. (یعنی دیگر باند باریک نیست)

مدولاسیون تک‌آهنگ (یک Cos یا یک Sin ای که فقط آن را ارسال کنیم.)

در مدولاسیون تک‌آهنگ $\longrightarrow$ $x(t)=A_m\cos\omega_m t$

$$\begin{cases}\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲} \\ \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}\end{cases} \qquad \cos^۲ u = \frac{۱+\cos ۲u}{۲} \qquad \cos^۳ u = \frac{۳}{۴}\cos u + \frac{۱}{۴}\cos ۳u$$

$$\text{FM}: \; x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + ۲\pi f_\Delta \int (A_m \cos w_m t)\, dt\right)$$

$$x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + \cancel{۲\pi} f_\Delta A_m \frac{\sin w_m t}{\underbrace{\cancel{۲\pi} f_m}_{w_m}}\right)$$

$$x(t) = A_m \sin w_m t$$

$$\text{PM}: \; x_c(t) = A_c \cos(w_c t + \phi_\Delta A_m \sin w_m t)$$

$$\phi(t) = \beta \sin w_m t \qquad \beta = \begin{cases} A_m \phi_\Delta & ,\ \text{PM} \\ \dfrac{A_m}{f_m} f_\Delta & ,\ \text{FM}\end{cases}$$

شاخص مدولاسیون تک آهنگ برابر حداکثر انحراف فاز است.

تقریب

$$x_c(t) = A_c \cos(w_c t + \underbrace{\beta \sin w_m t}_{\phi(t)})$$

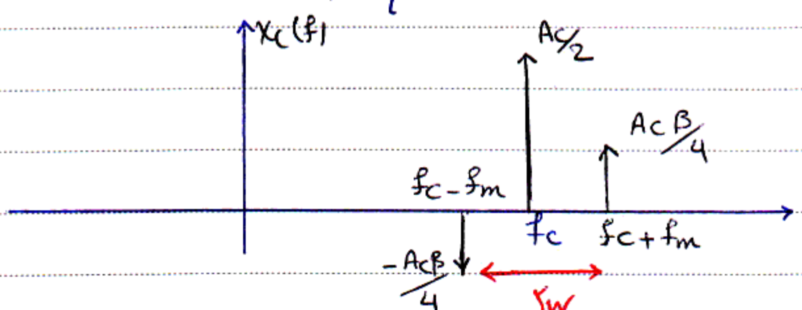
* با فرض مدولاسیون تک آهنگ باند باریک داریم،

+

باند باریک $\phi(t) \ll 1 \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \beta \ll 1$

$$x_c(t) \simeq A_c \cos w_c t - A_c \beta \sin w_m t \sin w_c t$$

$$= A_c \cos w_c t - \frac{A_c \beta}{۲}\left[\cos(w_c - w_m)t - \cos(w_c + w_m)t\right]$$



$\leftarrow f>0$

چون باند باریک است.

$\cos w_c t \xrightarrow{f_c} \ast \quad \frac{۱}{۲}\{\delta(f - f_c) + \text{—}\}$

$\cos(w_c - w_m)t \xrightarrow{f_c - f_m}$

$$\frac{۱}{۲}\left\{\delta\big(f - (f_c - f_m)\big) + \delta\big(f + (f_c - f_m)\big)\right\}$$

$$\begin{cases} \sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] \\ \cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right] \end{cases}$$

چنانچه سیگنال سینوسی باند باریک نباشد؟ داریم:

(تک آهنگ اگر سیگنال پیام ارسالی تک آهنگ باند باریک باشد)

$$x_c(t) = A_c \cos(\beta \sin w_m t) \cos w_c t -$$

$$A_c \sin(\beta \sin w_m t) \sin w_c t$$

فرکانس ؟ f_m

دوره تناوب $T = \frac{1}{f_m}$

توابع بسل:

$$\cos(\beta \sin w_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n\ \text{زوج}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \cos n w_m t$$

$$\sin(\beta \sin w_m t) = \sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \sin(n w_m t)$$

ضرایب $J_n(\beta)$: توابع بسل نوع اول مرتبه n با آرگومان β

با جایگذاری داریم:

$$x_c(t) = A_c J_0(\beta) \cos w_c t + A_c \sum_{n\ \text{زوج}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \cos n w_m t \cos w_c t$$

چون به n بستگی ندارد می‌توانیم آن را وارد Σ کنیم

$$- A_c \sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \sin n w_m t \sin w_c t$$

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c J_0(\beta) \cos w_c t + A_c \sum_{n\ \text{زوج}}^{\infty} J_n(\beta)\left[\cos(w_c + n w_m)t + \cos(w_c - n w_m)t\right]$$

$$+ A_c \sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty} J_n(\beta)\left[\cos(w_c + n w_m) - \cos(w_c - n w_m)t\right]$$

$$J_{-n}(\beta) \triangleq (-1)^n J_n(\beta)$$

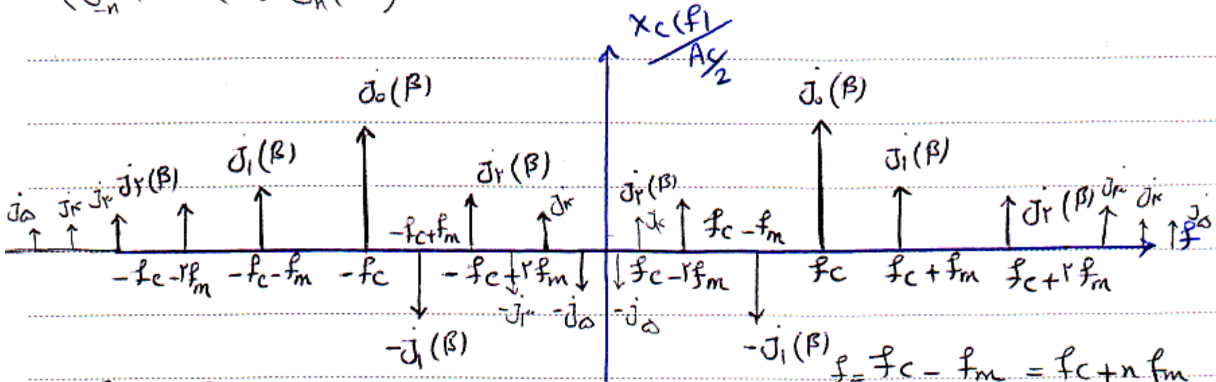
$$\Rightarrow \boxed{x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(w_c + n w_m)t}$$

این رابطه فقط برای تک آهنگ است (نه باند باریک نباشد.) $\rightarrow$ هم FM هم PM

$$f - (f_c + n f_m) \longrightarrow f = f_c + n f_m$$
$$f + (f_c + n f_m) \longrightarrow f = -f_c - n f_m \Rightarrow f = \pm f_c \pm n f_m$$

نتیجه: طیف فرکانسی $x_c(f)$ شامل ضربه‌هایی در فرکانس‌های $\pm f_c \pm n f_m$ است. دامنه‌ی این ضربه‌ها (سطح) برابر $\frac{A_c}{2} J_n(\beta)$ است. ضربه‌های مربوط به n های منفی و فرد دارای علامت منفی هستند.

$(J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta))$



$f = f_c - 3 f_m = f_c + n f_m$ $\qquad f = f_c - f_m = f_c + n f_m$

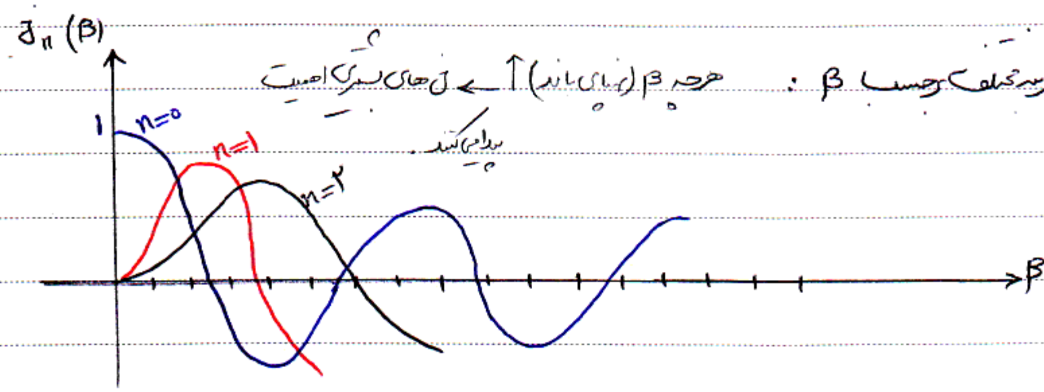
اثر n منفی: $\Rightarrow n = -1$

$J_{-3}(\beta) = (-1)^3 J_3(\beta) = -J_3(\beta)$ $\qquad J_{-1}(\beta) = (-1)^1 J_1(\beta) = -J_1(\beta)$

با توجه به نامحدود بودن n، ضربه‌های مربوط به طیف حول f_c و طیف حول $-f_c$ هم‌پوشانی دارند که باید در هر فرکانس اثر هر دو را در نظر گرفت.

بررسی توابع بسل:

- توابع بسل با n های مختلف بر حسب β: هرچه β (زیاد باشد) $\uparrow$ ← n های بیشتری اهمیت پیدا می‌کنند.



نتایج:

۱) دامنه‌ی مؤلفه‌ی فرکانسی حامل برابر $J_0(\beta)$ است که این مقدار به ازای β های مختلف مقادیر متفاوتی دارد.
← چون که در فرکانس f_c است

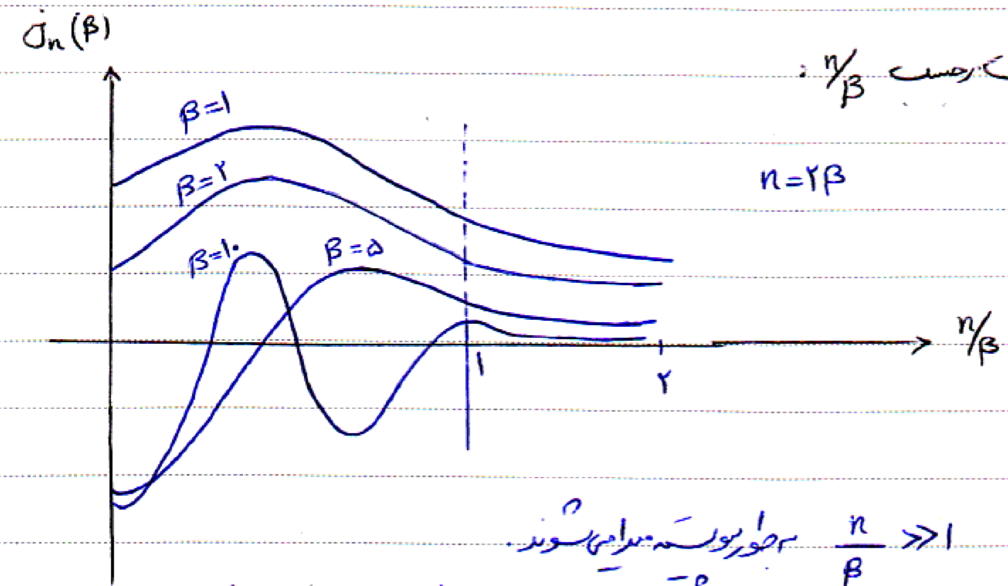
FM: $\beta = \frac{A_m}{f_m} f_\Delta$ PM: $\beta = A_M \phi_\Delta$

پس برخلاف مدولاسیون‌های دامنه، درواقع حامل بخشی از اطلاعات پیام را شامل می‌شود.

۲) تعداد ضریب‌های کناری دارای اهمیت به β بستگی دارد. اگر $\beta<1$ باشد فقط $J_0(\beta)$ و $J_1(\beta)$ مهم‌اند ولی به ازای $\beta>1$ ضریب‌های مهم بیشتری خواهیم داشت و طیفی مشابه به مدولاسیون‌های خطی ایجاد می‌شود.

۳) هرچه β بزرگ‌تر باشد پهنای باند بزرگ‌تر می‌شود چون تعداد ضریب‌های با اهمیت بیشتر می‌شود.

توابع بسل با β های مختلف برحسب n/β:



تمامی منحنی‌ها به ازای $\frac{n}{\beta} \gg 1$ به طور پیوسته میرا می‌شوند.

$$\frac{n}{\beta} \gg 1 \Rightarrow J_n(\beta) \ll 1$$

جدول تابع بسل به ازای β و n های مختلف:

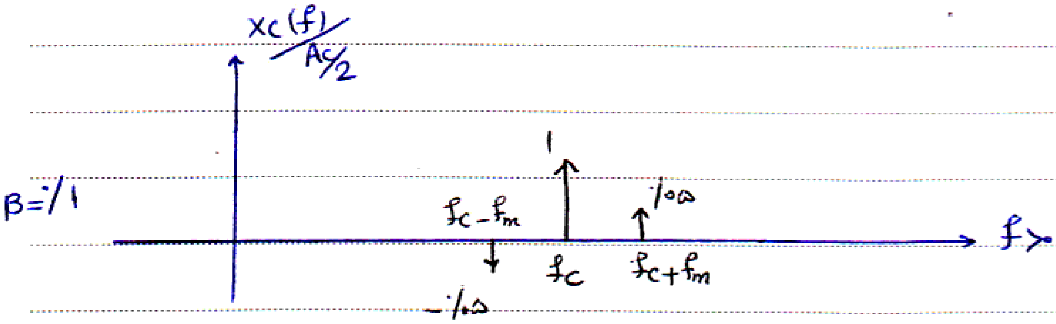
n	$J_n(0.1)$	$J_n(0.2)$	$J_n(0.5)$	$J_n(1)$	$J_n(2)$	$J_n(5)$
0	1	۰/۹۹	۰/۹۴	۰/۷۷	۰/۲۲	-۰/۱۸
1	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲۴	۰/۴۴	۰/۵۸	-۰/۳۳
2			۰/۰۳	۰/۱۱	۰/۳۵	۰/۰۵
3				۰/۰۲	۰/۱۳	۰/۳۶
4					۰/۰۳	۰/۳۹
5						۰/۲۶
6						۰/۱۳
7						۰/۰۵
8						۰/۰۲

بقیه قابل صرف نظر کردن یا صفر هستند.

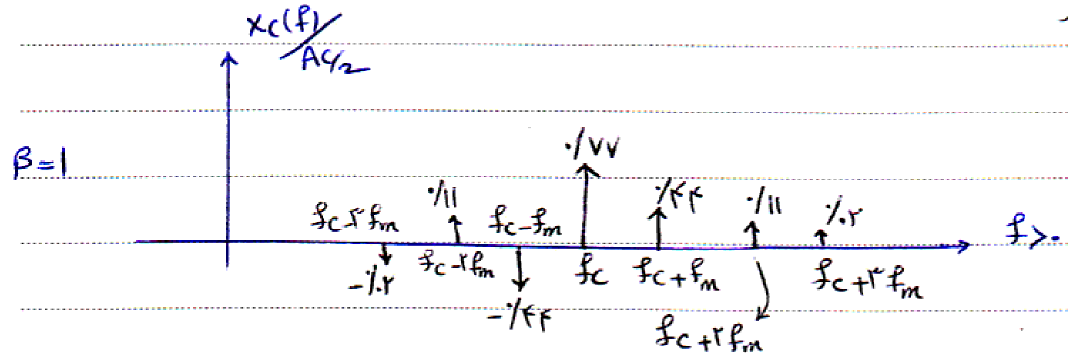
$$x_c(t)= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_c+n\omega_m)t$$

$$\begin{cases} f=f_c+nf_m \\ f=-f_c-nf_m \end{cases}$$

نمایش طیف فرکانسی PM و FM به ازای β های کوچک:



$\beta\uparrow \leftarrow$ پهنای باند بیشتر



مثال ۱) سیگنال FM باند باریک $x_c(t)=100\cos(2\pi 5000t+0/05\sin 2\pi 200t)$ ارسال شده است. عبارتی برای $f(t)$ بنویسید، طیف فرکانسی را رسم کنید، $s(t)$ را محاسبه کرده و با $\frac{1}{2}A_c^2$ مقایسه کنید.

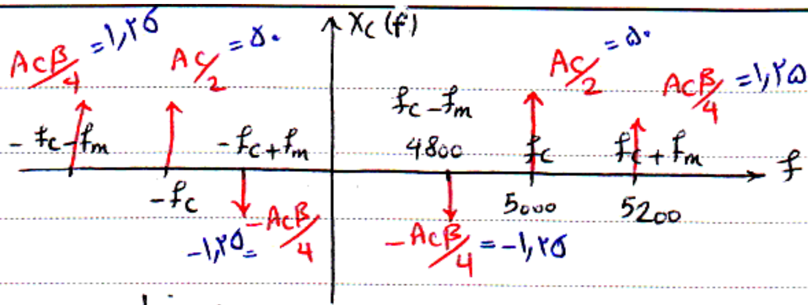
$A_c=100 \quad f_c=5\,KHz \quad \beta=0/05$ $\qquad \beta=0/05 \Rightarrow$ سیگنال باند باریک است.

$f_m=200\,Hz \qquad x_c(t)=A_c\cos(\omega_c t+\beta\sin\omega_m t)$

فرکانس لحظه‌ای $f(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}=5000+10\cos 2\pi 200t = f_c+f_\Delta x(t)$

$\Rightarrow f_\Delta=10 \quad , \quad x(t)=\cos 2\pi 200t$

$$\beta=\frac{A_m}{f_m}f_\Delta=\frac{1}{200}\times 10=0/05$$



ب) طیف فرکانسی :

n	$J_n(0/5)$
0	
1	

چون باند باریک است نیازی به جدول هم ندارد.

محاسبه $S(t)$: مساحت ضربه‌ای $\longrightarrow$ $S(t) = \frac{1}{2} \times 100^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{A_c\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{A_c\beta}{2}\right)^2$

$= 5000 + 6/25 = 5006/25$

چون $\sin\beta \simeq \beta$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}A_c^2 = \frac{1}{2}100^2 = 5000$

این اختلاف به خاطر تقریبی است که از باند باریک بودن سیگنال گرفته‌ایم

مهم برای امتحان

مثال ۲) سیگنال FM تک آهنگ با مشخصات $A_c = 100$ ، $A_m f_\Delta = 8\,KHz$ ، $f_m = 4\,KHz$ ، $f_c = 30\,KHz$ را در نظر بگیرید.

n	$J_n(2)$
0	0/22
1	0/58
2	0/35
3	0/13
4	0/03

وقتی $J_1(\beta)$ برای n=1 با اهمیت است یعنی $J_{-1}(\beta)$ هم برای n=-1 با اهمیت است $\Leftarrow \sum_{-4}^{4}$

$J_n(\beta)$ برای n های ۰ تا ۴ برای ما با اهمیت است.

الف) عبارتی برای $f(t)$ بنویسید.

ب) طیف فرکانسی را رسم کنید.

ج) $S(t)$ را محاسبه کرده و با $\frac{1}{2}A_c^2$ مقایسه کنید.

$J_n(\beta)$ برای $n>4$ قابل صرف نظر کردن هستند.

۳۳

Subject: ۱٤

Year. Month. Date.

(الف)

$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$

$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)$

$x_c(t) = 100 \cos(\underbrace{2\pi \times 30 t + 2 \sin 2\pi \times 4 t}_{\theta})$

$\beta = \frac{A_m f_\Delta}{f_m} = \frac{8}{4} = 2$

خیلی مهم

تمرین) این سیگنال‌ها برای $f_c = 11^{KHZ}$ انجام دهید. (با استفاده از اثر سیگنال)

حل سؤال ۲) Am را یک هم می‌توان در نظر گرفت.

$x_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)$

$\theta(t) = \omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$

در FM، $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

در FM تک آهنگ: $f(t) = f_c + f_\Delta A_m \cos \omega_m t$

(الف)

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + f_\Delta \underbrace{x(t)}_{A_m \cos \omega_m t} = 30^k + 8^k \cos 2\pi(4^k)t$

فرکانس لحظه‌ای بین 22^k تا 38^k تغییر می‌کند.

پهنای باند سیگنال FM در حالت ایده‌آل بی‌نهایت است

از روی فرکانس لحظه‌ای نمی‌توان پهنای باند را به دست آورد. (۳۸-۲۲=۱۴^k اشتباه است.)

$\beta = \frac{A_m}{f_m} f_\Delta = \frac{8^k}{4^k} = 2$

(ب)

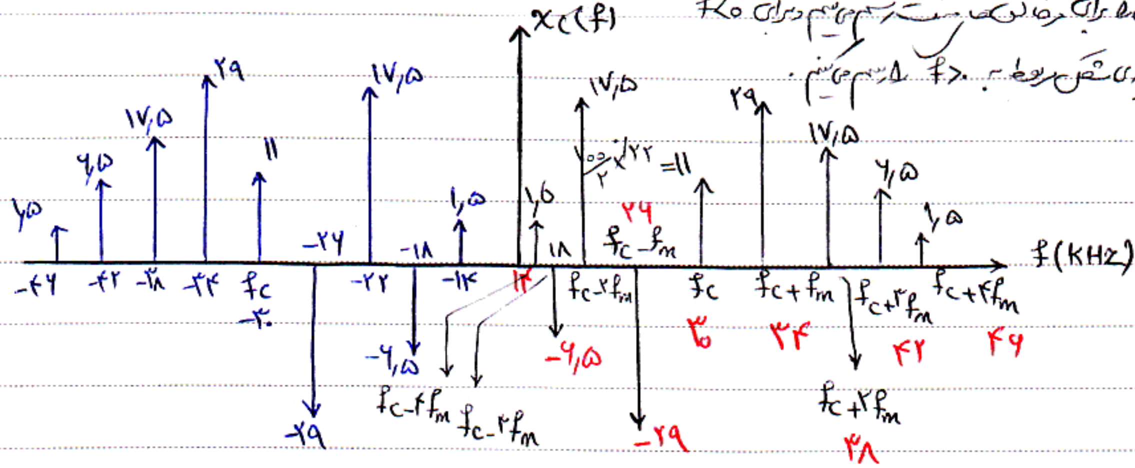
$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t$

$X_c(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-4}^{4} J_n(\beta)\, \delta(f_c + n f_m) \qquad f>0$

$X_c(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-4}^{4} J_n(\beta)\, \delta(-f_c - n f_m) \qquad f<0$

شکل‌ها برای فرکانس‌های مثبت رسم می‌شود برای f<0

قرینه شکل مربوط به f>0 را رسم می‌کنیم.



P4PCO

پهنای باند $46 - 14 = 32^{KHZ}$

هرچه $f_\Delta \uparrow$ ← نویز $\downarrow$

ج) S_T ورودی $= \frac{1}{2}(۲۲)^2 + ۲\times\frac{1}{2}(۵۸)^2 + ۲\times\frac{1}{2}(۳۵)^2 + ۲\times\frac{1}{2}(۱۳)^2 +$

$۲\times\frac{1}{2}(۳^2) = ۵۰۰۹$ $\longrightarrow$ انرژی $x_c(t)$ نوشته شده است

دامنه یک Cos، $\frac{1}{2}A_c^2$ ای

یا

انرژی شکل $S_T = ۲(۱۱)^2 + ۴(۲۹)^2 + ۴(۱۷,۵)^2 + ۴(۶,۵)^2 + ۴(۱,۵)^2 = ۵۰۰۹$

تئوری: $\frac{1}{2}A_c^2 = \frac{1}{2}\times۱۰۰^2 = ۵۰۰۰$

تفاوت به دلیل آن است که در اعداد $J_n(\beta)$ تقریب زده‌ایم.

FM دو آهنگ:

$$x(t) = A_{m_1}\cos w_{m_1}t + A_{m_2}\cos w_{m_2}t$$

$$x_c(t) = A_c\cos\left(w_ct + 2\pi f_\Delta\int\left(A_{m_1}\cos w_{m_1}t + A_{m_2}\cos w_{m_2}t\right)dt\right)$$

$$= A_c\cos(\overbrace{w_ct + \beta_1\sin w_{m_1}t}^{A} + \beta_2\sin w_{m_2}t)$$

$$\beta_1 = \frac{A_{m_1}}{f_{m_1}}f_\Delta \qquad \beta_2 = \frac{A_{m_2}}{f_{m_2}}f_\Delta$$

در تک آهنگ داشتیم: $x_c = A_c\cos(\overbrace{w_ct + \beta\sin w_m t}^{A \text{ شده}})$

$$x_c(t) = A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(w_ct + nw_mt)$$

با توجه به تک آهنگ $\Longrightarrow$ $x_c(t) = A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_2)\cos(w_ct + \beta_1\sin w_{m_1}t + nw_{m_2}t)$

$\cos((w_ct + nw_{m_2}t) + \beta_1\sin w_{m_1}t)$ ، در نظر بگیرید A شده

$$= \boxed{A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)\cos(w_ct + mw_{m_1}t + nw_{m_2}t)}$$

رابطه‌ی FM دو آهنگ

تعبیر $x_c(t)$ در حوزه فرکانس:

$x_c(f)$ شامل ۴ دسته ضربه است.

① ضربه‌ای در فرکانس حامل با دامنه‌ی $\frac{A_c}{2}J_0(\beta_1)J_0(\beta_2)$

در f_c و $-f_c$ (قرینه)

② ضریب‌های باند کناری در فرکانس‌های $f_c \pm m f_{m1}$ مربوط به یک آهنگ با دامنه $\frac{A_c}{2} J_m(\beta_1) J_0(\beta_2)$

③ ضریب‌های باند کناری (کنار باند) در فرکانس‌های $f_c \pm n f_{m2}$ مربوط به آهنگ دیگر با دامنه $\frac{A_c}{2} J_0(\beta_1) J_n(\beta_2)$

④ ضریب‌های باند کناری در فرکانس‌های $f_c \pm m f_{m1} \pm n f_{m2}$ مربوط به هر دو آهنگ با دامنه $\frac{A_c}{2} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2)$

مثال)

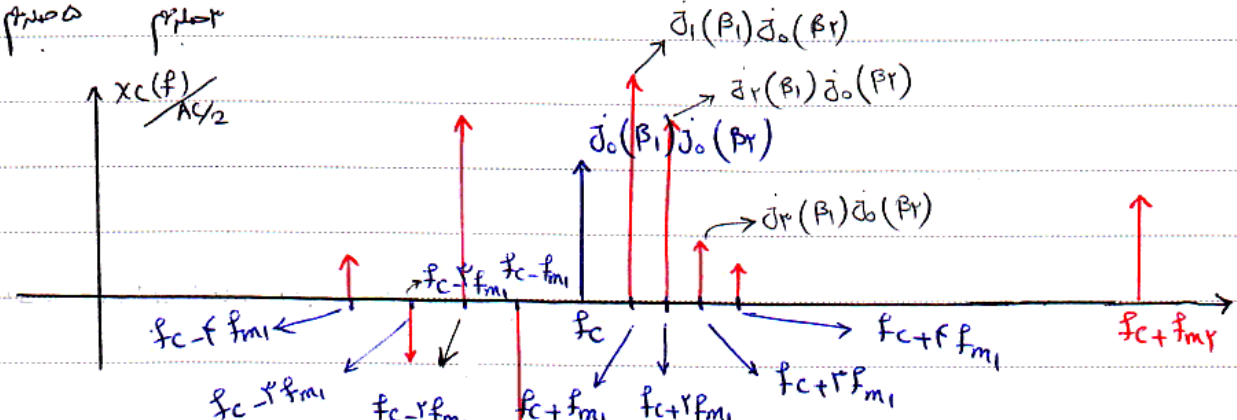
طیف FM دو آهنگ با شرایط $f_{m1} \ll f_{m2}$ و $\beta_1 > \beta_2$.

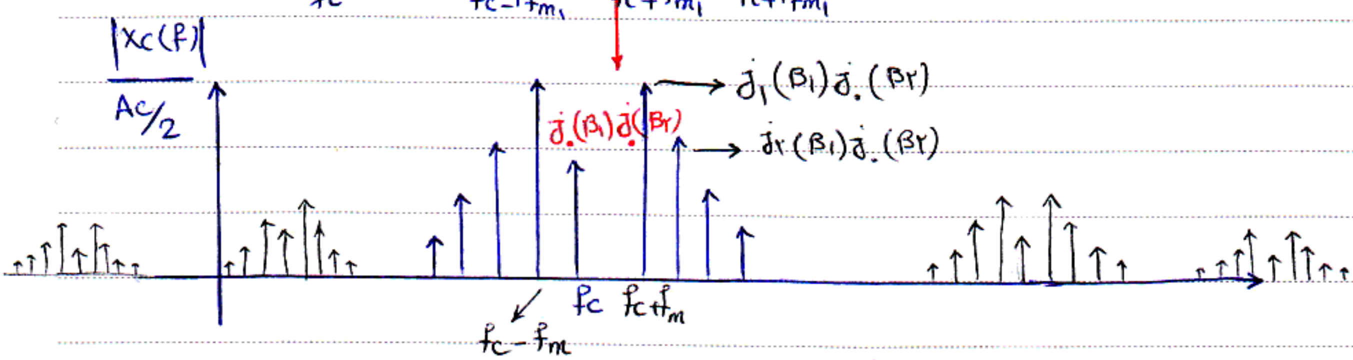
نکته: β تعداد جملات با اهمیت را مشخص می‌کند (هر چه β بیشتر باشد تعداد جملات با اهمیت بیشتر می‌شود.)

$2 > 0/5$

$\beta_1 > \beta_2$

۵ جمله‌ام ۳ جمله‌ام





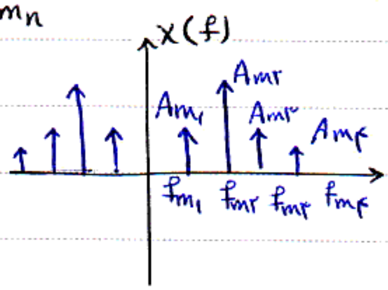
مدولاسیون چند آهنگ: (FM چند آهنگ)

$$x(t)=\sum_{n=1}^{N} A_{m_n}\cos w_{m_n} t$$

در این صورت با نظیر کردن فرکانس های حول f_c و با فواصل $\pm n_1 f_{m_1} \pm n_2 f_{m_2} \pm \dots \pm n_N f_{m_N}$

را در نظر گرفت و با توجه به مقادیر β_1 تا β_N جملات با اهمیت را به دست آورد.

$$\beta_n=\frac{A_{m_n}}{f_{m_n}} f_\Delta$$



f_Δ خصوصیت مدولاتور

A_m و f_m خصوصیت سیگنال پیام

مدولاسیون طیف پیوسته:

می توان گفت که $x(t)$ شامل کلیه ی سینوسی ها در محدوده ی فرکانسی 0 و W است و لذا باید با توجه به دامنه ی آن

در هر فرکانس، β و مربوط به هر فرکانس را محاسبه کرده و جملات با اهمیت را به دست آورد.

محاسبه ی پهنای باند سیگنال FM:

سیگنال مدوله شده FM دارای بی نهایت مولفه ی کناری است به نظر می رسد که طیف FM تا بی نهایت گسترش دارد ولی

ثابت شده است که برای هر β بیشتر توان در یک پهنای باند محدود قرار می گیرد و در صورت حذف مولفه های خارج از این

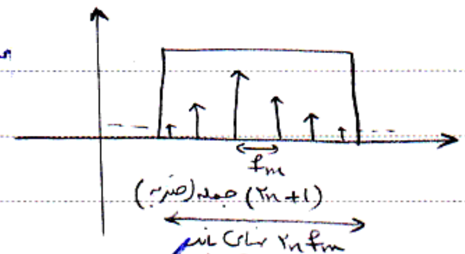
باند محدود، اعوجاج جدی در سیگنال صورت نمی گیرد. معمولاً اگر 99٪ توان سیگنال FM در باند عبور قرار گیرد

اعوجاج قابل صرف نظر کردن است. برای محاسبه ی پهنای باند ارسالی FM تک آهنگ نسبت توان S_N را به صورت زیر

تعریف می کنیم:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} A_c^2 \sum_{k=-n}^{n} J_k^2(\beta)}{\frac{1}{2} A_c^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta)}$$

مدل FM تک آهنگ



برای محاسبه‌ی پهنای باند FM باید کوچکترین n ای را انتخاب کنیم که $S_n \geq 0/99$ شود. در این صورت پهنای باند ارسالی برابر $2n f_m$ خواهد بود.

$\beta = 3 \longrightarrow n \simeq 5 \qquad B_T = 10 f_m$ (11 ضربه)

با مشاهده جدول در می‌یابیم که به ازای $\beta \geq 2$ داریم:

$$\boxed{\beta \geq 2: \quad n \simeq \beta + 2}$$

بنابراین پهنای باند ارسالی FM تک آهنگ برابر است با:

$$\boxed{B_T = 2n f_m} = 2(\beta+2) f_m = 2\left(\frac{A_m}{f_m} f_\Delta + 2\right) f_m = \boxed{2(A_m f_\Delta + 2 f_m)}$$

f_Δ یک ویژگی مدولاتور و f_m و A_m ویژگی های پیام هستند.

حالت بیشترین پهنای باند داشته باشیم.

بیشترین پهنای باند به ازای پیامی ایجاد می‌شود که دارای ویژگی $\boxed{A_m = 1 \;\text{و}\; f_m = W}$ باشد. (بدترین حالت)

$|x(t)| \leq 1 \qquad x(t) = A_m \cos w_m t$

$A_m = 1 \qquad w_m = 2\pi f_m = 2\pi W \longrightarrow x(t) = \cos 2\pi W t$

β بدترین حالت

$$\longrightarrow B_T = 2(f_\Delta + 2W) = 2\left(\frac{f_\Delta}{W} + 2\right) W$$

برای تعمیم مدولاسیون تک آهنگ به سیگنال پیام $x(t)$ با پهنای باند W، نسبت انحراف D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

نسبت انحراف $\boxed{D \triangleq \frac{f_\Delta}{W}}$

β بدترین حالت مدولاسیون تک آهنگ

پس با شاخص مدولاسیون (β) بزرگ حالت مدولاسیون تک آهنگ تنها ظاهر است.

نتایج بالا را با استفاده از این روابط خواهیم بود: $B_T = 2MW \quad M = D+2, \quad D \geq 2$

$$\Rightarrow \boxed{B_T = 2(D+2)W} = 2\left(\frac{f_\Delta}{W}+2\right)W \qquad D \geq 2$$

چنانچه بخواهیم برای مقادیر D ها رابطه‌ای بیابیم می‌توان دو حالت حدی D را در نظر گرفت:

$$B_T = \begin{cases} 2f_\Delta = 2DW & D \gg 1 \quad \frac{f_\Delta}{W} \gg 1 \quad \text{W خیلی کوچک} \\ 2W & D \ll 1 \quad \frac{f_\Delta}{W} \ll 1 \quad f_\Delta \text{ خیلی زیاد} \end{cases}$$

پس از ترکیب نتایج مدولاسیون تک آهنگ به ازای β خیلی بزرگ و خیلی کوچک به دست آمده است و لذا داریم به ازای

$$\boxed{B_T \simeq 2(D+1)W}$$

به ازای کلیه‌ی D ها

رابطه کارسون

کلیه D ها: $2(D+1)W$: $D \gg 1 \quad D+1 \simeq D \Rightarrow 2DW$

$D \ll 1 \quad D+1 \simeq 1 \Rightarrow 2W$

برای سیگنال PM روابط مشابهی استخراج می‌شود: $B_T \simeq 2(\phi_\Delta + 1)W$

مثال) برای مدولاسیون FM سیگنال صوتی داریم:

$88\ MHz \leq f_c \leq 108\ MHz$

$f_\Delta = 75\ KHz$

$W = 15\ KHz$

$$D = \frac{f_\Delta}{W} = 5 \qquad B_T = 2(D+2)W = 2(7)15^k = 210\ kHz = \underset{\text{دلیلی}}{14W}$$

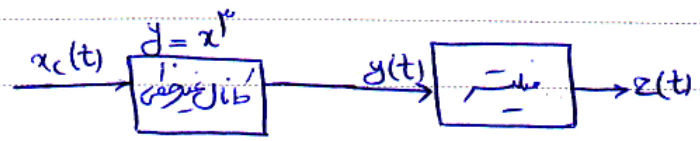
اگر برای هر کانال $250\ kHz$ در نظر بگیریم داریم:

$$\text{تعداد کانال‌ها} = \frac{20\,MHz}{250\,kHz} = 80$$

مزایای مدولاسیون زاویه‌ای: (حتماً حفظ شود)

1) در این مدولاسیون اطلاعات در نقاط عبور از صفر ذخیره می‌شود و این نقاط در اثر جمع شدن با سیگنال‌های مزاحم مثل نویز به سختی جابجا می‌شود لذا مقاومت این نوع مدولاسیون نسبت به نویز بیشتر از مدولاسیون‌های دامنه است.

2) مقاومت بسیار بالا در برابر اعوجاج غیرخطی



سیگنال DSB: $x_c(t)$ $\qquad x_c(t) = A_c\, x(t) \cos w_c t$

$$y(t) = x_c^3(t) = A_c^3\, x^3(t) \cos^3 w_c t = \frac{A_c^3}{4} x^3(t)\left(3\cos w_c t + \cos 3 w_c t\right)$$

$$\text{خروجی فیلتر} = \frac{3A_c^3}{4} x^3(t) \cos w_c t \xrightarrow[\text{ضرب } \cos]{\text{دمدولاسیون DSB}} A x^3(t)$$

سیگنال FM $\qquad x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt\right)$

$$y(t) = A_c^3 \cos^3\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right) = \frac{A_c^3}{4}\Big[3\cos\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)dt\right) +$$

$$\cos\left(3 w_c t + 6\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)\Big]$$

$$\text{خروجی فیلتر} \Rightarrow z(t) = \frac{3A_c^3}{4} \cos\left(w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right) \xrightarrow{\text{دمدولاسیون}} A x(t)$$

نتیجه: اعوجاج غیرخطی تأثیری روی اطلاعات پیام به صورت FM ندارد.

معایب مدولاسیون زاویه‌ای : (حفظ شود)

۱) پهنای باند زیاد

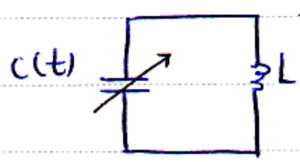
۲) پیچیدگی ساختار مدولاتور و دمدولاتور

ساختارهای موجود جهت تولید سیگنال FM :
- روش مستقیم
- روش غیرمستقیم

روش مستقیم : استفاده از VCO (اسیلاتور کنترل شونده با ولتاژ). VCO اسیلاتوری است که فرکانس آن متناسب با ولتاژ اعمال شده به آن می‌باشد.

$$f(t) = f_0 + Kv(t)$$

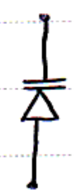
به عنوان مثال می‌توان از یک مدار LC با خازن متغیر استفاده کرد.



فرکانس تشدید

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,c(t)}}$$

می‌توان از دیود وراکتور به جای خازن متغیر استفاده کرد. varactor (variable capacitor)



$$c(t) = C_0 - C_1 v(t) \qquad C_1 \ll C_0$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(C_0 - C_1 v(t)\right)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}\sqrt{1-\frac{C_1}{C_0}v(t)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1-\frac{C_1}{C_0}v(t)\right)^{-1/2} \overset{C_1/C_0 \ll 1}{=\!=} \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1+\frac{C_1}{2C_0}v(t)\right)$$

سیگنال FM

$$(1+x)^{-n} = 1-nx \qquad x \ll 1$$

$$\left(1+(-x)\right)^{-n} \simeq 1-n(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_c = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \\[2mm] f_\Delta = \dfrac{c_1}{2C_0}\,\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \end{cases}$$

شرط مطلوب است: $\dfrac{f_\Delta}{f_c} = \dfrac{c_1}{2C_0} \ll 1$

مزیت: شرط خوبی است

عیب: پارامترهای دیود واراکتور و در نتیجه f_c و f_Δ وابستگی شدیدی به دما دارند.

روش غیرمستقیم:

$$x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + \phi(t)\right)$$

$$x_c(t) = A_c\left[\cos w_c t \underbrace{\cos\phi(t)}_{1} - \sin w_c t \underbrace{\sin\phi(t)}_{\phi(t)}\right]$$

$\phi(t) = \phi_\Delta x(t)$

$\phi_\Delta \ll 1 \Rightarrow \phi(t) \ll 1$

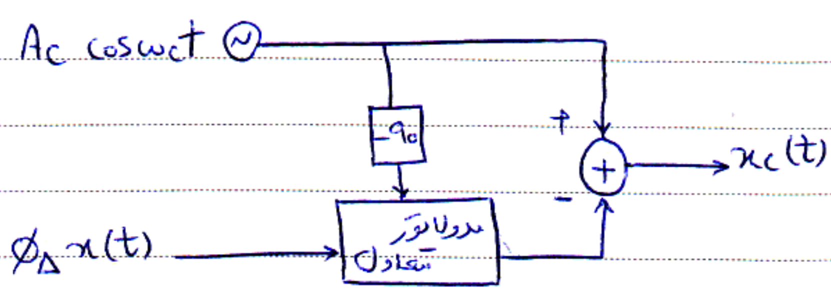
- مدولاسیون NBPM (باند باریک PM) $(\phi_\Delta \ll 1)$

$$x_c(t) = A_c \cos w_c t - A_c \sin w_c t \underbrace{\phi(t)}_{\phi_\Delta x(t)}$$

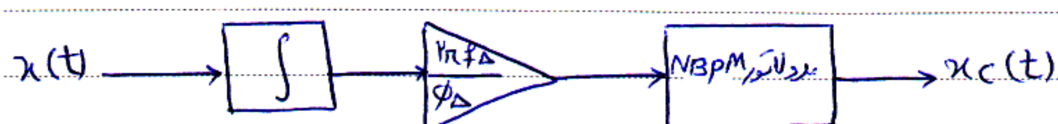
$$x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + \phi_\Delta x(t)\right) =$$

$$A_c\left[\underbrace{\cos \phi_\Delta x(t)}_{1} \cos w_c t - \underbrace{\sin \phi_\Delta x(t)}_{\phi_\Delta x(t)} \sin w_c t\right]$$

$$= A_c \cos w_c t - A_c \phi_\Delta x(t) \sin w_c t$$



مدولاسیون NBFM:



$\left(\dfrac{f_\Delta}{W} \ll 1\right)$

$D \ll 1$

ضرب کننده فرکانس :

$$A_c\cos(\omega_c t+\phi(t)) \longrightarrow \boxed{\times N} \longrightarrow A_c\cos(N\omega_c t+N\phi(t))$$

$$A_c\cos(\omega_c t+\phi(t)) \longrightarrow \boxed{\text{عنصر غیرخطی}} \xrightarrow[\vdots \; A_n\cos^n(\omega_c t+\phi(t))]{A_1\cos(\omega_c t+\phi(t))+ \; A_2\cos^2(\omega_c t+\phi(t))+} \underset{}{\overset{n\omega_c}{\boxed{BPF}}} \longrightarrow A'_c\cos(n\omega_c t+n\phi(t))$$

با آوردن ضرب کننده فرکانس بعد از مدولاتور NBFM ، f_c و f_Δ در n ضرب می‌شوند و مدولاتور FM ساخته می‌شود.

عنصر غیرخطی تمام هارمونیک‌های n ام را تولید می‌کند ولی دامنه هارمونیک n ام خیلی کوچکتر از هارمونیک اول است و این، کار را در ساخت مداری که بتواند A_1 را خیلی ضعیف‌تر از A_n کند سخت می‌کند.

لذا معمولاً n را ۲ یا ۳ در نظر گرفته و برای n های بزرگ از یک سری چند ضرب کننده استفاده می‌کنیم.

مثال) یک مدولاتور FM با مشخصات زیر طراحی کنید؟

$W = 15\ KHz \qquad f_\Delta = 75\ KHz \qquad f_c = 80\ MHz \longrightarrow 100\ MHz$

$D = \frac{f_\Delta}{W} = \frac{75k}{15k} = 5 \Rightarrow$ است. $D=5$ برای این مثال $\frac{f_\Delta}{W} \ll 1$ برای FM باند باریک (NBFM) داریم

راه حل: ابتدا یک NBFM می‌سازیم سپس با استفاده از یک ضرب کننده فرکانس آن را تبدیل می‌کنیم.

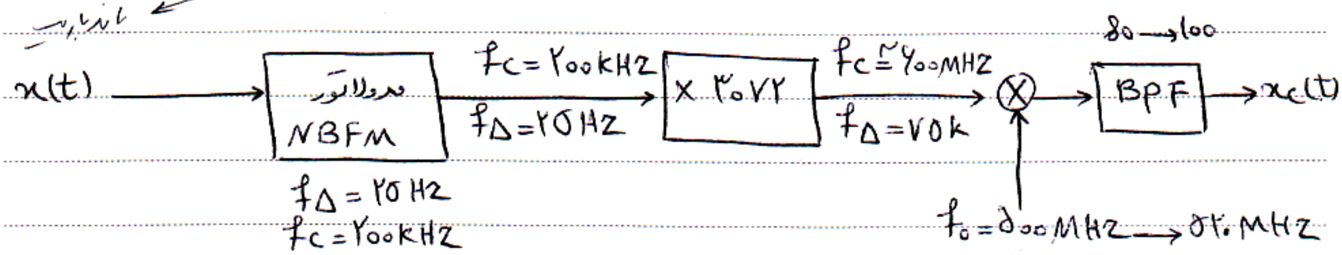
$$D_1 \triangleq \frac{f_{\Delta_1}}{W_{15}} = 0/002 \ll 1 \Rightarrow f_{\Delta_1} = 30\ \text{Hz}$$

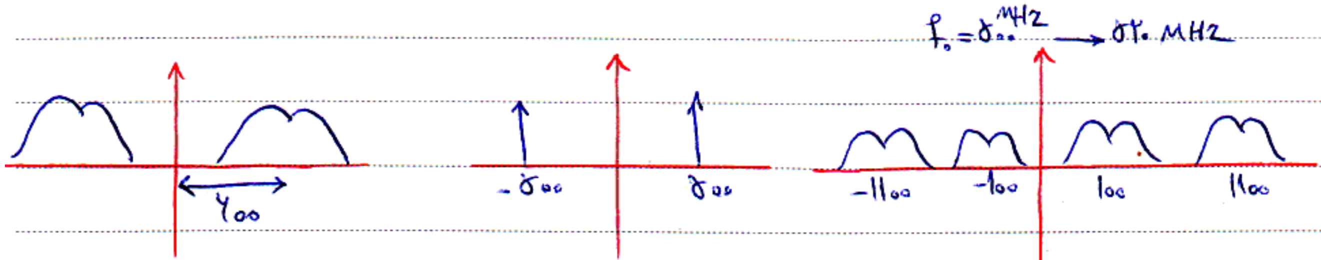
ضریب افزایش فرکانس $N = \dfrac{75\ \text{kHz}}{30\ \text{Hz}} = 2500 = 2^m\, 3^n$

$$\left.\begin{array}{l} m = 10 \\ n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow N = 3072 \Rightarrow \frac{75\ k}{f_{\Delta_1 new}} = 3072 \Rightarrow f_{\Delta_1 new} = 25\ \text{Hz}$$

f_c شرط: $f_c > W \Rightarrow f_c \triangleq 200\ k$

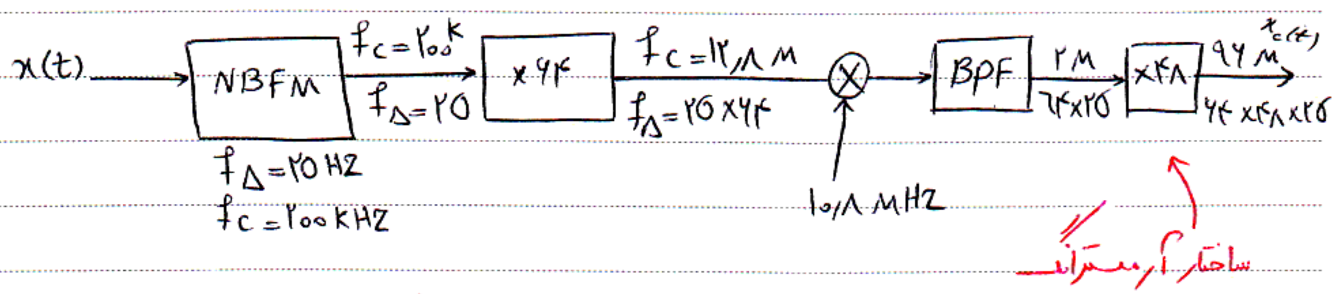
باند پایه





مشکل مدار این است که فرکانس بالایی دارد و لذا تجهیزات با این فرکانس بالا استفاده شود (هزینه بر است). راه حل:

این است که به تدریج فرکانس کاری تا حد بالا برود



$10{,}72 \longrightarrow 11{,}14$