بسم الله الرحمن الرحیم

مخابرات

(بخش چهارم)

استاد صافی

ساختار دمدولاتورهای FM :

$$x_c(t)=A_c\cos\left(\omega_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)\,dt\right) \longrightarrow \boxed{\text{دمدولاتور}} \longrightarrow x(t)$$

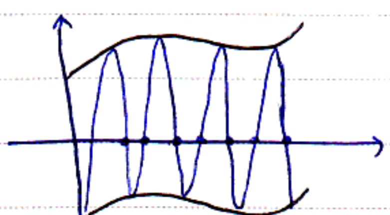
۱- تبدیل FM به AM (مشتق‌گیر)

$$x'_c(t)=-A_c\left(\omega_c+2\pi f_\Delta x(t)\right)\sin\left(\omega_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)\,dt\right)=$$

$$-A_c\,\omega_c\left(1+\underbrace{\frac{f_\Delta}{f_c}}_{<1}x(t)\right)$$

می‌توان $x(t)$ را توسط آشکارساز پوش استخراج کرد.

تفاوت x'_c با یک سیگنال AM فقط در این است که باعث می‌شود نقاط عبور از صفر در فواصل یکسان قرار نگیرد ولی تأثیری در پوش سیگنال ندارد.



مشکل استفاده از این ساختار این است که در عمل سیگنال مدوله شده با نویز جمع می‌شود لذا داریم:

$$x_R(t)=x_c(t)+n(t) \Rightarrow x'_R(t)=x'_c(t)+n'(t)$$

دریافتی

که چون $n(t)$ دارای تغییرات ناگهانی است، $n'(t)$ اثرات نامطلوب فراوانی بر دامنه سیگنال خروجی خواهد داشت.

راه حل: سیگنال اصلی را ابتدا از یک محدود کننده عبور می‌دهیم تا یک پالس مربعی تولید شود و سپس هارمونیک اصلی آن را توسط فیلتر جدا می‌کنیم که در نتیجه یک سینوسی بدون نویز خواهیم داشت و می‌توانیم از آن مشتق بگیریم.

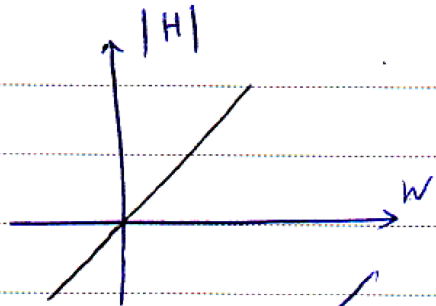
$$x_c(t) \longrightarrow \underbrace{\boxed{\text{محدود کننده}} \longrightarrow \boxed{\text{BPF}}}_{\text{denoising}} \longrightarrow \boxed{d/dt} \longrightarrow \boxed{\text{آشکارساز}} \longrightarrow \boxed{\text{حذف DC}} \longrightarrow x(t)$$

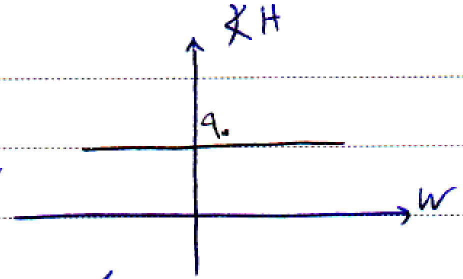
denoising — حذف نویز

مشتق: تابع تبدیل: $H(j\omega)=j\omega$

$$|H(j\omega)| = \omega$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

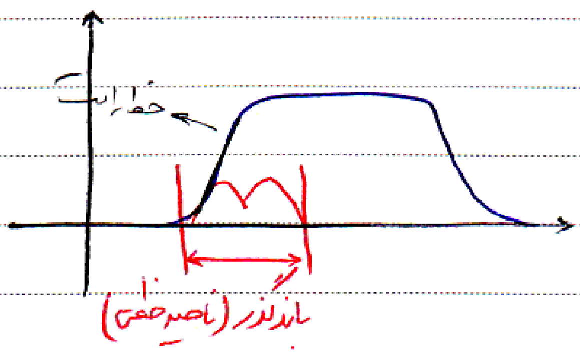




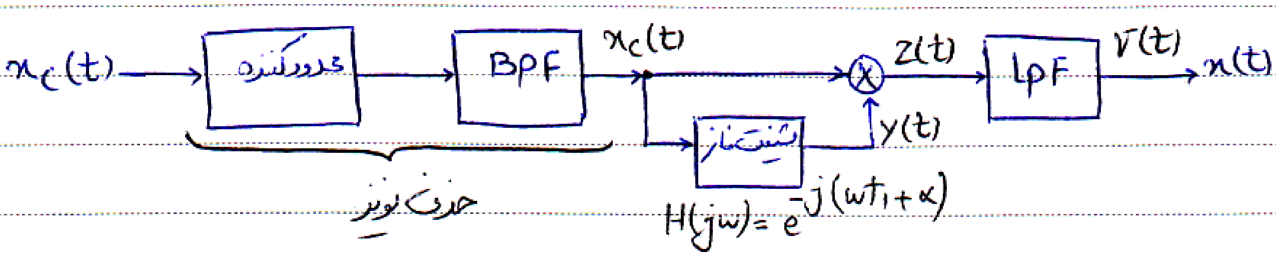
شکل عملی استفاده از مشتق‌گیر این است که غیرخطی است و لذا علاوه بر سیگنال $x(t)$، سیگنال‌های $x^2(t)$ و $x^3(t)$ و ... نیز در خروجی ایجاد می‌شوند که امکان جداسازی آن‌ها از یکدیگر وجود ندارد.

به عبارت دیگر المانی که در محدوده‌ی وسیعی پاسخ فرکانسی خطی داشته باشد وجود ندارد.

راه حل: استفاده از باند گذر یک فیلتر میان‌گذر



۲- آشکارساز انتقال فاز $\quad$ phase shift $\underbrace{\text{Discriminator}}_{\text{تمایزگر}}$



$$H(j\omega) = e^{-j(\omega t_1 + \alpha)}$$

$$|H| = 1$$

$$\measuredangle H = -\omega t_1 - \alpha$$

$$x_c(t) = A_c \cos\left(w_c t + \phi(t)\right) \qquad \phi(t) = 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$$

$$y(t) = A_c \cos\left(w_c(t - t_1) + \phi(t - t_1) - \alpha\right)$$

$$z(t) = x_c(t) z(t) = A_c^2 \cos\left(w_c t + \phi(t)\right) \cos\left(w_c(t - t_1) + \phi(t - t_1) - \alpha\right)$$

$$\cos\left(w_c t \underbrace{- w_c t_1} + \phi(t - t_1) \underbrace{- \alpha}\right)$$

$$\theta \triangleq -w_c t_1 - \alpha \qquad -w_c t_1 - \alpha = \theta$$

$$z(t) = A_c^2 \cos\left(w_c t + \phi(t)\right) \cos\left(w_c t + \phi(t - t_1) + \theta\right)$$

$$\Downarrow \quad \cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$v(t) = \frac{A_c^2}{2} \cos\left(\phi(t) - \phi(t - t_1) - \theta\right)$$

اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ انتخاب کنیم داریم:

$$v(t) = \frac{A_c^2}{2} \sin\left[\phi(t) - \phi(t - t_1)\right]$$

$$\sin x \simeq x \qquad x \to 0$$

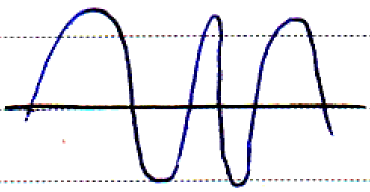
و اگر t_1 به اندازه کافی کوچک باشد:

$$v(t) \simeq \frac{A_c^2}{2} \underbrace{\left(\phi(t) - \phi(t - t_1)\right)}_{t_1 \frac{d\phi(t)}{dt}} \simeq \frac{A_c^2}{2} t_1 \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{A_c^2}{2} t_1 \left(2\pi f_\Delta x(t)\right)$$

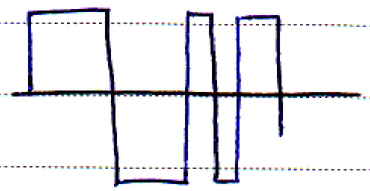
$$\frac{d\phi}{dt} \simeq \frac{\Delta\phi}{\underset{t_1}{\Delta t}}$$

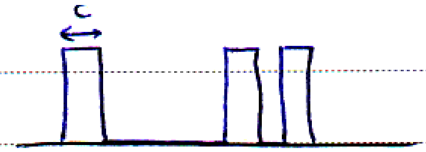
۳_ آشکارساز نقاط عبور از صفر (شمارنده نقاط عبور از صفر)

$x_c(t)$ → محدودکننده → مولتی ویبراتور مونواستابل → LPF → $K c f_c(t)$



$T_c = \frac{1}{f_c}$





Dc مقدار $= c f_c$

$f_c(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

پروژه مخابرات :

مراحل کار :

۱) تولید سیگنال پیام به صورت یک سینوسی $x(t) = \sin 2\pi f t$

۲) تولید سیگنال حامل به صورت یک سینوسی

$t = 0 : \overbrace{0.001}^{1e-3} : 1 ; \quad f = 20 ;$

```
x = Sin(2*Pi*f*t)
plot (t, x)
```

۳) تولید سیگنال مدوله شده (AM , DSB , FM)

۴) انتقال سیگنال مدوله شده از یک کانال غیر خطی $(Y = x^3)$

اکولایزر (شیفت دادن)

۵) آشکارسازی پیام از سیگنال منتقل شده

$Z = [0\ 0\ 0 \ \text{---}]$

$Z = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7]$

$Z = [0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5]$

ساختار گیرنده های آنالوگ :

کارهایی که گیرنده انجام می دهد :

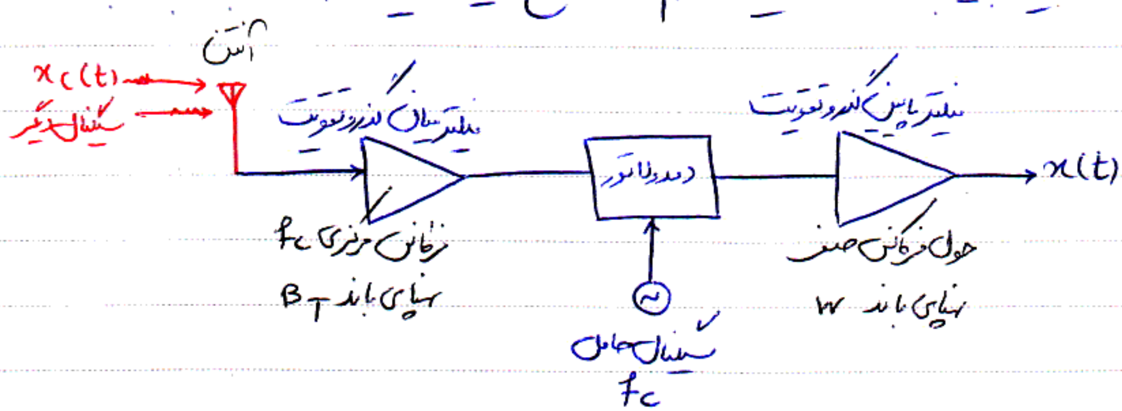
۱) فیلتر کردن به منظور استخراج سیگنال از سایر سیگنال ها

۲) تولید فرکانس حامل به منظور انجام عمل دمدولاسیون

۳) دمدولاسیون جهت استخراج سیگنال پیام

۴) تقویت به منظور جبران سازی تلفات کانال

حداقل بخشی از تقویت باید قبل از دمدولاسیون انجام شود تا سطح سیگنال دریافتی به مقدار قابل قبولی برای دمدولاتور برسد.

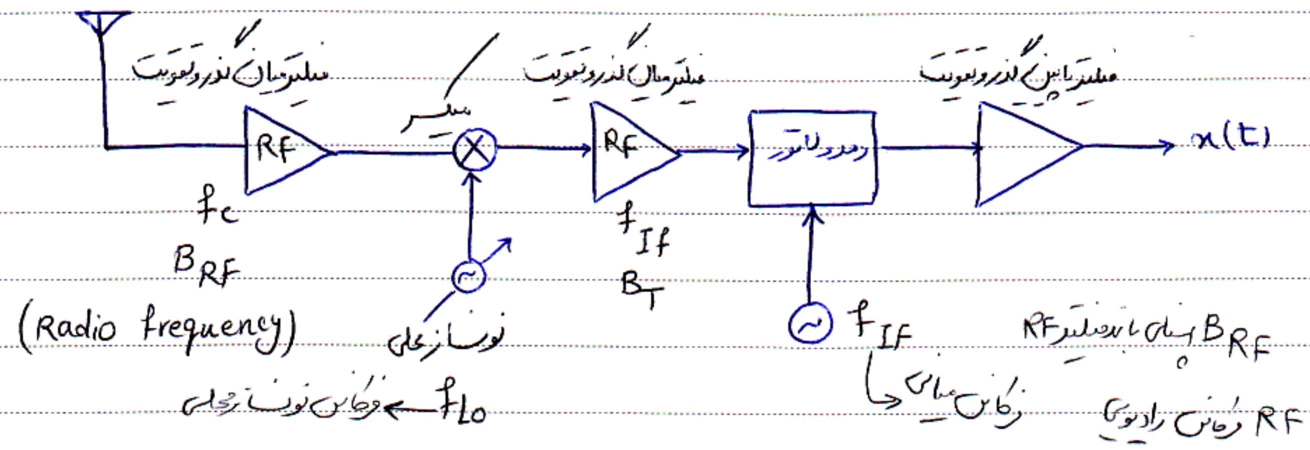


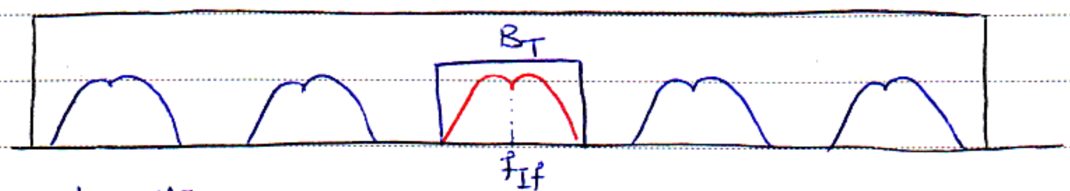
ساختار فوق دارای دو عیب است : ۱- برای فیلتر ورودی نسبت پهنای باند به فرکانس مرکزی بسیار کوچک است و ساخت چنین فیلتری عملاً ممکن نیست.

$$Q = \frac{B}{f_0} = \frac{200\,k}{100\,M} = 2m$$

۲- برای دریافت کانال های دیگر باید ساختار فیلتر ورودی و نوسان ساز تولید کننده فرکانس حامل را مرتباً تغییر دهیم.

راه حل: گیرنده سوپرهترودایِن





$f_{IF} = 10\ MHz$

$f_{Lo} = 90 \xrightarrow{\text{تغییر کند}} 92$

$f_c = 100 \xrightarrow{\text{تغییر کند}} 102$

در این حالت فیلتر ورودی پهنای باند بزرگی وارد و علاوه بر سیگنال پیام، کانال های مجاور را نیز عبور می دهد.

ابتدا میکسر و نوسان‌ساز محلی عمل انتقال فرکانسی را انجام داده و سیگنال مطلوب در باند رادیویی (RF) را به باند (IF) منتقل می کند. ($f_{IF} < f_{RF}$) پس فیلتر میانی سیگنال مطلوب را که حول f_{IF} قرار گرفته است عبور داده و کانال های مجاور را حذف می کند و خروجی آن به دمدولاتور رفته و پیام بازیابی می شود.

$$f_c - f_{Lo} = \pm f_{IF}$$

* برخلاف ساختار گیرنده سوپرهتروداین بسته به مقدار f_{LO} یک کانال را حول f_{IF} منتقل کرده و دمدولاتور فقط حول این فرکانس ثابت کار می‌کند

* پهنای باند فیلتر ورودی زیاد است و در نتیجه پیاده‌سازی آن عملاً امکان‌پذیر است همچنین فیلتر میانی فرکانس مرکزی پایینی دارد و لذا قابل پیاده‌سازی است.

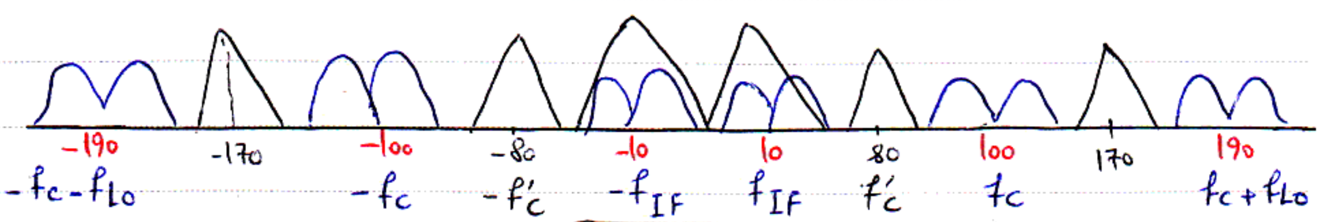
* فیلتر ورودی که در فرکانس‌های بالا کار می‌کند بهره‌ی پایینی دارد تا پایداری حفظ شود و بیشتر تقویت در فرکانس میانی صورت می‌گیرد.

$$f_c - f_{LO} = \pm f_{IF} \longrightarrow f_{LO} = f_c \pm f_{IF}$$

$$f_{IF} = |f_c - f_{LO}|$$

* فرکانس نوسان‌ساز محلی برابر $f_{LO} = f_c \pm f_{IF}$ است، داریم:

فرض: $f_{LO} = f_c - f_{IF}$



$\boxed{\begin{matrix} -f_c+f_{LO} \\ f'_c - f_{LO} \end{matrix}}$ $\quad \begin{matrix} f_c - f_{LO} \\ -f'_c - f_{LO} \end{matrix}$

$$f'_c = -f_c + 2f_{LO} = -f_c + 2(f_c - f_{IF}) = f_c - 2f_{IF}$$

$$\frac{B_{RF}}{2} = \frac{f_c - f'_c}{2}$$

حداکثر پهنای باند $\Rightarrow B_{RF} = f_c - (f_c - 2f_{IF}) = 2f_{IF}$

مشکلی که در استفاده از میکسر وجود دارد حضور طیف سیگنال دیگری به نام سیگنال تصویر (Image) است

که این طیف نیز به فرکانس میانی منتقل می‌شود و لذا توسط فیلتر ورودی باید حذف شود به عنوان مثال اگر :

$f_{LO}=f_c-f_{IF}$ باشد داریم : $\left\{-f_{IF}=f'_c-f_{LO} \;,\; f_{IF}=f_c-f_{LO}\right\}$

$$\Downarrow$$

$$f'_c=f_c-2f_{IF}$$

و لذا پهنای باند فیلتر ورودی باید به گونه‌ای باشد که فرکانس تصویر را حذف کند در نتیجه داریم : $B_T < B_{RF} < 2F_{IF}$

تمرین) اگر در گیرنده‌ی سوپرهتروداین فرکانس نوسان ساز محلی از رابطه‌ی $f_{LO}=f_c+f_{IF}$ به دست آید پهنای باند فیلتر ورودی را به گونه‌ای تعیین کنید که فرکانس تصویر حذف شود.

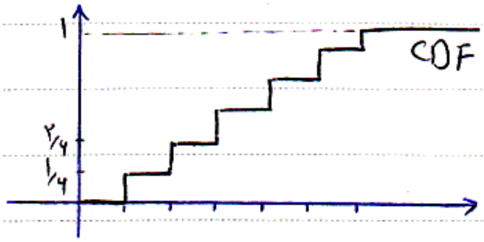
متغیرهای تصادفی : فصل ۴ (یادآوری) S فضای نمونه

متغیر تصادفی تابعی است که نتایج فضای نمونه S در یک آزمایش را به تعدادی عدد نسبت می‌دهد، به عبارت دیگر اگر S نماینده‌ی نقاط فضای نمونه S باشد متغیر تصادفی $X(S)$ تابعی است که به هر نقطه‌ی S عدد حقیقی x را نسبت می‌دهد، اگر فضای نمونه (S) تعداد متناهی نقاط داشته باشد $X(S)$ را متغیر تصادفی گسسته و اگر تعداد نامتناهی نقاط داشته باشد، $X(S)$ را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم. بدین ترتیب $x=a$ و $x\leq a$ که در آن‌ها a نقطه‌ای بر روی محور حقیقی است را می‌توان بررسی کنیم.

تابع احتمال اینکه $p(X\leq x)$ را تابع توزیع انباره یا (CDF) می‌نامیم و با $F_X(x)$ نمایش می‌دهیم:

$$\boxed{F_X(x)=P(X\le x)}\quad\Longrightarrow\quad \text{CDF تابع توزیع (ساده) یا}$$

$F_X(0)=0 \quad F_X(0/5)=0 \quad F_X(1)=\frac{1}{6} \quad F_X(1/5)=\frac{1}{6} \quad F_X(5)=\frac{4}{6} \quad F_X(6)=1$



CDF بیانگر احتمال است و به شکل زیر محدود می‌شود.

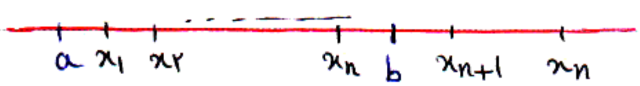
$$0\le F_X(x)\le 1 \qquad F_X(-\infty)=0 \quad , \quad F_X(\infty)=1$$

همچنین داریم:

$$P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a) \quad , \quad (b>a)$$

برای یک متغیر تصادفی گسسته که به مقادیر متمایز $x_1, x_2, \dots, x_N$ محدود می‌شود تابع فراوانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تابع فراوانی $P_X(x_i)=P(X=x_i)$
$i=1\to N$



لذا داریم: $a\le x_1$
$x_n\le b\le x_{n+1}$

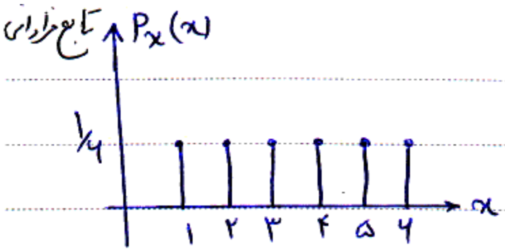
$$P(a\le X<b)=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\dots+P(X=x_n)=$$

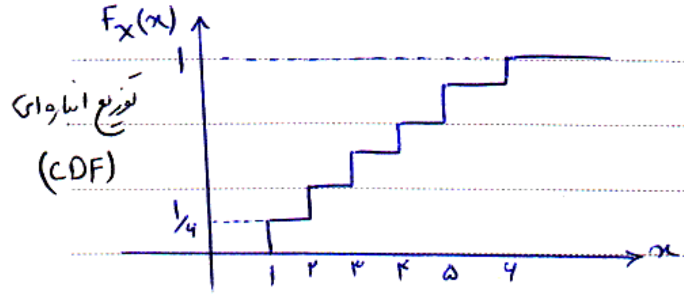
$$P_X(x_1)+P_X(x_2)+\dots+P_X(x_n)=\sum_{k=1}^{n}P_X(x_k)=F_X(b)-F_X(a)$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<x_1\\ \sum_{i=1}^{n}P_X(x_i) & x_n<x<x_{n+1}\\ 1 & x>x_N\end{cases}$$

بنابراین با تغییر x از $-\infty$ تا ∞، $F_X(x)$ یک تابع پله‌ای است که از پله‌هایی با ارتفاع $P_X(x_i)$ در نقاط $x=x_i$ تشکیل شده است. CDF در فاصله‌های بین پله‌ها ثابت است.

$$F_X(x_i)-F_X(x_{i-1})=P_X(x_i)$$





$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) & x_n\le x<x_{n+1} \\ 1 & x\ge x_N \end{cases}$$

برای متغیرهای تصادفی پیوسته تعداد نقاط فضایش نامتناهی است ولذا احتمال وقوع هر نقطه برابر صفر است.

$(P(x=a)=0)$ ولی پیشامدهای $x\le a$ ، $a<x\le b$ قابل شناسایی هستند.

تابع توزیع انباره‌ای CDF

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} p_X(\lambda)\,d\lambda$$

تابع چگالی احتمال PDF

$$p_X(\lambda)=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

خواص تابع PDF :

همواره $p_X(x)\ge 0$ چون احتمال منفی نداریم.

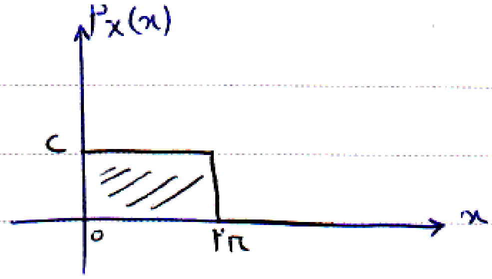
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx=1$$

$$P(a\le x\le b)=F_X(b)-F_X(a)=\int_a^b p_X(x)\,dx$$

تابع چگالی احتمال یکنواخت: چنانچه $p_X(x)$ به ازای کلیه نقاط در یک ناحیه‌ی محدود مقدار ثابتی داشته باشد و در سایر

PDF

نقاط ضعف یا شرایط :



فرض : X زاویه یک بردار در حال چرخش در یک

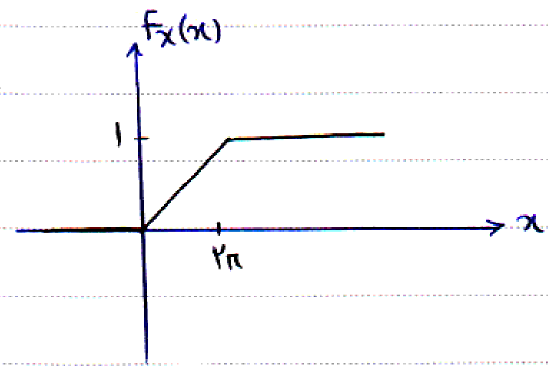
لحظه تصادفی $\qquad 0 \le x \le 2\pi$

مساحت زیر نمودار

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)\, dx = 2\pi c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2\pi}}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{سایر نقاط} \\ \frac{1}{2\pi} & 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2\pi} & 0 \le x \le 2\pi \\ 1 & x \ge 2\pi \end{cases}$$



میانگین های آماری :

$$0 \le x \le 2\pi \longrightarrow P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{x}{2\pi}$$

– میانگین متغیر تصادفی X (m_x) : مقدار متوسط مقادیر متفاوت X با احتمال هریک از آن ها وزن دار شده باشد. (امید ریاضی)

گسسته :

$$m_x = \overline{x} = \underset{\text{امید ریاضی}}{E[X]} = \sum_{i=1}^{N} x_i \underset{\text{احتمال}}{P_X(x_i)}$$

پیوسته :

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \underset{\text{PDF}}{P_X(x)}\, dx$$

امید ریاضی $E[X^n] = \overline{x^n}$ را گشتاور n ام متغیر تصادفی X می نامیم.

گشتاور اول همان مقدار میانگین است. $E[X]$

گشتاور دوم $E[X^2]=\overline{x^2}$ را میانگین مربعی X می‌نامیم، با مربع میانگین $E^2[X]=\overline{x}^2$ تفاوت دارد

مثال)
$$E[\alpha X+\beta]=\alpha E[X]+\beta=\alpha\overline{x}+\beta$$

$$E[\overline{x}X]=\overline{x}\underbrace{E[X]}_{\overline{x}}=\overline{x}^2$$

- انحراف معیار (انحراف میانگین) (σ_x): ملاکی برای پراکندگی مقادیر مشاهده شده X نسبت به m_x است.

واریانس
$$\sigma_x^2\triangleq E\left[(x-m_x)^2\right]$$

$$\sigma_x^2=E\left[x^2-2m_x x+m_x^2\right]=E[x^2]-2m_x\underbrace{E[x]}_{m_x}+m_x^2=E[x^2]-m_x^2$$

واریانس برابر است با میانگین مربعی منهای مربع میانگین.

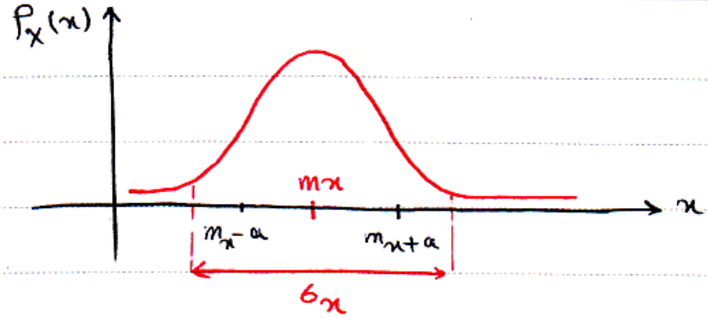
انحراف معیار جذر واریانس است.

تابع چگالی احتمال گاوسی (نرمال): (PDF گاوسی)

متغیر تصادفی گاوسی دارای PDF به صورت زیر است:

$$P_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}$$

که در آن m_x و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس متغیر تصادفی X هستند.



$$P(x \leq m_x - a) = P(x \geq m_x + a)$$

$$P(x \leq m_x) = P(x \geq m_x) = \frac{1}{2}$$

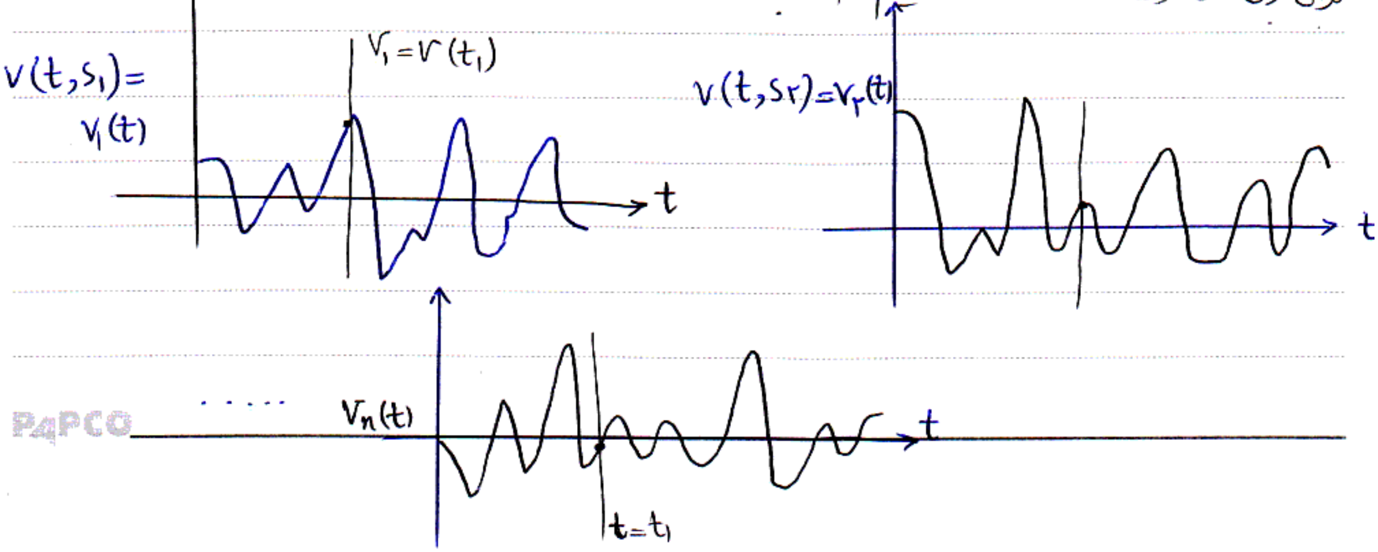
فصل هفتم : فرآیندهای تصادفی و نویز

متغیر تصادفی : نتایج آزمایش را به صورت اعداد در امتداد محور حقیقی می‌نگارد. $x(s) \longrightarrow x$

فرآیند تصادفی : نتایج آزمایش را به صورت توابعی از زمان می‌نگارد. $v(t,s) \longrightarrow v(t)$

مثال) در دماهای بالای صفر درجه کلوین، انرژی جنبشی مولکولی باعث ایجاد ولتاژ نویز در دو سر هر مقاومت می‌شود. اگر تعداد زیادی مقاومت داشته باشیم و در طی زمان ها شکل موج دو سر آن ها را مشاهده کنیم یک فرآیند تصادفی خواهیم داشت.

برای برش‌های عمودی، استاد رسم نمودار را از صفر رسم کرده بود.



$X(S) \leftarrow$ یک متغیر تصادفی را n بار یا n متغیر تصادفی را یک بار مشاهده می‌کردیم. $n \to \infty$

$V(t,S) \leftarrow n$ متغیر تصادفی را m بار مشاهده می‌کنیم. $n, m \to \infty$

نکته: هر برش تا انم یک متغیر تصادفی است. $V_1 = V(t_1)$: متغیر تصادفی

متوسط آماری (میانگین) فرآیند تصادفی $V(t)$: $\overline{V(t)} = E[V(t)]$

میانگین است که با متوسط‌گیری از (۲) توابع در زمان t به دست می‌آید. (میانگین نمودارها)

نکته: متوسط آماری $V(t)$ در $t=t_1$ برابر: متوسط آماری متغیر تصادفی V_1 است.

$$\overline{V(t_1)} = m_{V_1} = E[V_1] = \overline{V_1}$$

$$V_1 = V(t_1)$$

تابع خودهمبستگی $R_V(t_1,t_2)$:

به این گویند به یک فرآیند تصادفی خودش ضرب شده است.

$$R_V(t_1,t_2) \triangleq E[V(t_1)V(t_2)]$$

تابع خودهمبستگی همان همبستگی میان دو متغیر V_1 و V_2 است.

$$R_V(t_1,t_2) = E[V(t_1)V(t_2)] \xrightarrow[\text{مستقل باشند}]{\text{اگر } V_1 \text{ و } V_2} E[V(t_1)]E[V(t_2)] = \overline{V(t_1)}\,\overline{V(t_2)} = m_{V_1} m_{V_2}$$

اگر $t_1 = t_2 = t$ باشد داریم: $R_V(t,t) = E[V^2(t)] = \overline{V^2(t)}$ میانگین مربع

- تابع همبستگی دو فرآیند تصادفی :

$$R_{vw}(t_1,t_2) \triangleq E\left[v(t_1)\,w(t_2)\right]$$

ملاکی برای میزان وابستگی بین دو فرآیند تصادفی است.

نکته : اگر برای تمام زمانهای t_1 ، t_2 داشته باشیم :

$$R_{vw}(t_1,t_2)=\overline{v(t_1)}\;\overline{w(t_2)}$$

دو فرآیند $v(t)$ ، $w(t)$ را ناهمبسته گوییم.

نکته : اغلب فرآیند تصادفی را می‌توان که بصورت تابعی از یک متغیر تصادفی بیان کرد.

فرآیند تصادفی $v(t)=g(x,t)$ ← متغیر تصادفی

و به عبارت دیگر داریم :

متغیر تصادفی $V_i=g(x,t_i)$

اگر PDF متغیر تصادفی x را با $p_x(x)$ نمایش دهیم :

$$\overline{x}=E[x]=m_x=\int_{-\infty}^{\infty} x\,p_x(x)\,dx$$

$$\overline{v(t)}=E\left[g(x,t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)\,p_x(x)\,dx$$

$$R_v(t_1,t_2)=E\left[v(t_1)v(t_2)\right]=E\left[g(x,t_1)\,g(x,t_2)\right]=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t_1)\,g(x,t_2)\,p_x(x)\,dx$$

مهم مثال) اگر $\begin{cases} v(t)=t+x \\ w(t)=ty \end{cases}$ فرآیند تصادفی ، $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ متغیر تصادفی

میانگین

$$\overline{V(t)} = E[t+x] = t + E[x] = t + m_x$$

$$\overline{W(t)} = E[tY] = t\,E[Y] = t\,m_y$$

خود همبستگی

$$R_V(t_1,t_2) = E[V(t_1)V(t_2)] = E[(t_1+x)(t_2+x)] = t_1t_2 + (t_1+t_2)E[x] + E[x^2]$$

$$R_W(t_1,t_2) = E[W(t_1)W(t_2)] = E[t_1 Y t_2 Y] = t_1 t_2 E[Y^2]$$

تابع همبستگی ← $R_{VW}(t_1,t_2) = E[V(t_1)W(t_2)] = E[(t_1+x)(t_2 Y)] =$

$$t_1t_2E[Y] + t_2E[xY]$$

اگر x و Y مستقل باشند داریم: $E[xY] = E[x]E[Y]$

$$R_{VW}(t_1,t_2) = t_1t_2E[Y] + t_2E[x]E[Y]$$

$(t_1 + E[x])(t_2E[Y]) = \overline{V(t_1)}\,\overline{W(t_2)}$ V و W ناهمبسته هستند.

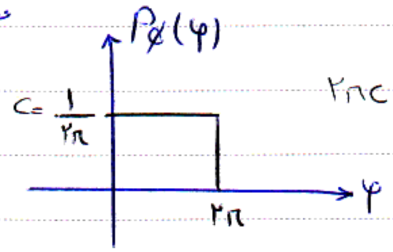
تمرین) اگر $V(t) = x + 3t$ باشد و x متغیر تصادفی با $\overline{x} = 0$ و $\overline{x^2} = 5$ باشد مطلوبست

تعیین $\overline{V(t)}$ ، $R_V(t_1,t_2)$ و $\overline{V^2(t)}$ ؟

مثال) موج سینوسی با فاز تصادفی :

فرایند تصادفی $V(t)=A\cos(\omega t+\phi)$

متغیر تصادفی



$2\pi c=1 \longrightarrow c=\frac{1}{2\pi}$

$$0\leq\varphi\leq 2\pi \Longrightarrow P_\phi(\varphi)=\frac{1}{2\pi}$$

$$\overline{V(t)} = E\big[V(t)\big] = AE\big[\cos(\omega t+\varphi)\big]=0$$

$$E\big[\cos(\omega t+\phi)\big]=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega t+\phi)P_\phi(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)\,d\varphi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\sin(\omega t+\varphi)\Big|_0^{2\pi}=0$$

$* \; E\big[\cos(\omega t+\phi)\big]_0^{2\pi}=0 \longrightarrow$ حفظ شود

تابع خودهمبستگی $R_V(t_1,t_2)=E\big[V(t_1)V(t_2)\big]=A^2E\big[\cos(\omega t_1+\varphi)\cos(\omega t_2+\varphi)\big]=$

$$\frac{A^2}{2}\Big(E\big[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\varphi)\big]+E\big[\cos\omega(t_1-t_2)\big]\Big)=\frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1-t_2)$$

$\to 0$

با رابطه *

در این جا cos ای ها هم فاز نیستند
پس مقدار میانگین صفر می‌شود.

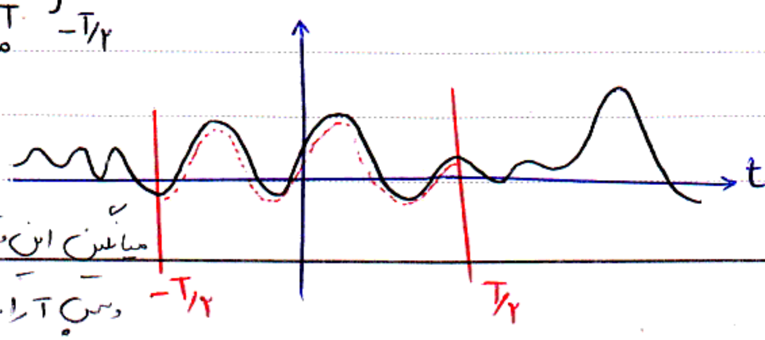
در این جا هر cos ای ها هم فازند
پس میانگینشان خود آن ها می‌شود

$$R_V(t,t)=\frac{A^2}{2}\cos(t-t)=\frac{A^2}{2}=E\big[V^2(t)\big]=\overline{V^2(t)}$$

میانگین مربعی مقداری ثابت است.

میانگین های زمانی :

$$\langle x(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt$$



میانگین این قسمت را حساب کرده
و سپس T را به سمت ∞ میل می‌دهیم.

برای $V_i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ داریم: $\langle A\cos(\omega t+\phi) \rangle = 0$

$$\langle V_i^2(t) \rangle = \langle A^2 \cos^2(\underbrace{\omega t + \phi}_{\text{تفکیک مهاشم}}) \rangle = \frac{A^2}{2}$$

مشاهده می‌شود که متوسط‌های زمانی و آماری باهم برابرند.

شرط ارگودیک بودن:

$$\begin{cases} \underset{\text{زمانی}}{\langle V(t) \rangle} = \underset{\text{آماری}}{\overline{V(t)}} = 0 \\ \langle V^2(t) \rangle = \overline{V^2(t)} = \frac{A^2}{2} \end{cases}$$

فرایند تصادفی ارگودیک: فرایندی است که تمام متوسط‌های زمانی هر تابع آن با متوسط‌های متناظر آماری آن برابر باشد.

متوسط‌گیری زمانی فقط روی یک تابع صورت می‌گیرد ولی متوسط‌گیری آماری روی تمام توابع. به عبارت دیگر در فرایندهای ارگودیک یک تابع زمانی را می‌توان به عنوان نماینده کل فرایند در نظر گرفت.

نکته: تمام متوسط‌های آماری یک فرایند ارگودیک مستقل از زمان هستند. (استادیواتی دارند)

اثبات ارگودیک بودن یک فرایند غیر ممکن است زیرا باید تمام متوسط‌های آماری و زمانی را محاسبه کنیم. به جای ارگودیک بودن یک شرط ساده‌تر را در نظر می‌گیریم:

فرایند تصادفی ایستا (ساکن) اکید: فرایندی است که تمام متوسط‌های آماری آن مستقل از هم باشند. (SSS)

فرایند تصادفی ایستای غیر اکید (WSS): فرایندی است که ① $E[V(t)]$ مستقل از زمان باشد و

② تابع خودهمبستگی آن $R_V(t_1, t_2)$ فقط به $t_2 - t_1$ بستگی داشته باشد. ← مستقل از زمان باشد.

برای فرآیندهای WSS داریم:

$E[v(t)] = m_v$ $\qquad R_v(t_1,t_2)=R_v(t_1-t_2) \xrightarrow[t_1=t,\ t_2=t]{t_1-t_2=\tau}$

$$R_v(\tau)=E[v(t)\,v(t+\tau)] = E[v(t)\,v(t-\tau)]$$

ویژگی‌های $R_v(\tau)$:

۱) $R_v(\tau)=R_v(-\tau)$ اثبات: در رابطه بالا $t=0$ می‌گذاریم.

۲) $R_v(0)=\overline{v^2(t)} = \sigma_v^2 + m_v^2$

۳) $|R_v(\tau)| \le R_v(0)$

← حالت تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که تابع متناوب باشد.

نتیجه: تابع خودهمبستگی $R_v(\tau)$ یک فرآیند WSS، حول مقدار ماکزیمم خود در $\tau=0$ تقارن زوج دارد.

برای مثال قبل داریم: $\qquad E[v(t)]=0$

$$R_v(t_1,t_2)=\frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1-t_2) \Rightarrow R_v(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega(\tau)$$

در نتیجه سینوسی با فاز تصادفی یک فرآیند WSS است.

فرآیند تصادفی گاوسی: فرآیندی است که تمام توابع چگالی احتمال آن گاوسی باشند.

خواص فرآیندهای گاوسی:

$E[v(t_1)] \longrightarrow m_v$

$E[v^2(t_1)] = \sigma_v^2 + \overline{v(t)}^2 \longrightarrow \sigma_v^2$

۱) فرآیند توسط $E[v(t)]$ و $R_v(t_1, t_2)$ کاملاً توصیف می‌شود.

۲) اگر $R_v(t_1, t_2) = E[v(t_1)]E[v(t_2)]$ آنگاه $v(t_1)$ و $v(t_2)$ ناهمبسته و مستقل آماری هستند.

۳) اگر $v(t)$ ایستای عمومی باشد آنگاه ایستای اکید و ارگودیک نیز هست.

۴) هر عمل خطی روی $v(t)$ یک فرآیند گاوسی ایجاد می‌کند.

سیگنال‌های تصادفی: طیف توان $G_v(f)$، نمایشی از توزیع توان متوسط در حوزه فرکانس است.

قضیه: برای سیگنال‌های تصادفی ایستا، طیف توان از تبدیل فوریه تابع خودهمبستگی $R_v(\tau)$ بدست می‌آید.

$G_v(f) = F\{R_v(\tau)\} \longrightarrow$ برای سیگنال‌های تصادفی ایستا

طیف توان

خواص $G_v(f)$:

۱) $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\,df = R_v(0) = \overline{v^2(t)}$ توان متوسط

عکس تبدیل فوریه $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\, e^{-j2\pi f \tau}\, df = R_v(\tau)$

۲) $G_v(f) \geq 0$

۳) $R_v(\tau)$ حقیقی $\Longrightarrow G_v(-f) = G_v(f)$

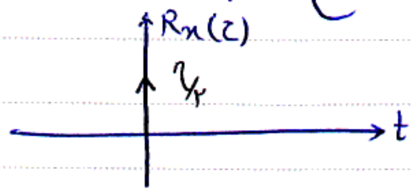
برای مثال قبل داریم: $R_v(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos w\tau = \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f \tau$

$$\Rightarrow R_v(f) = \frac{A^2}{4}\,\delta(f-f_0) + \frac{A^2}{4}\,\delta(f+f_0)$$

فصل ۸ :

فرایند نویز سفید: فرایندی است ایستا که تابع خودهمبستگی آن برابر است با:

$$R_x(\tau) = \frac{\eta}{2}\,\delta(t)$$

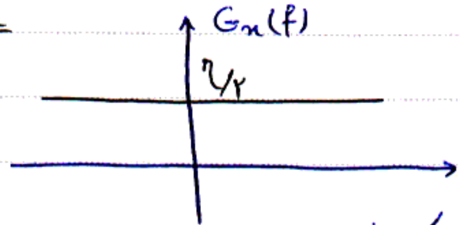


چرا این می‌گوییم نویز سفید

چون تمام فرکانس‌ها را در بر می‌گیرد.

صدای آبشار، صدای برفک تلویزیون

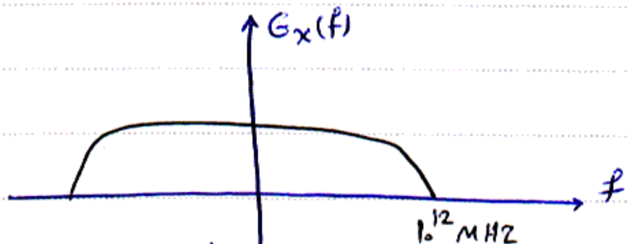
طیف توان نویز سفید $G_x(f) = \frac{\eta}{2}$



η بستگی به نوع نویز دارد. (در تجهیزات الکترونیکی معمولاً با نویز حرارتی روبرو هستیم.)

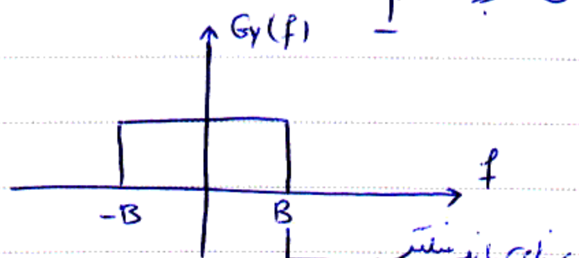
نویز حرارتی = نویز سفید

طیف توان نویز حرارتی:



نویز حرارتی را می‌توان یک نویز سفید گاوسی با میانگین صفر و چگالی طیف توان $\frac{\eta}{2}$ در نظر گرفت.

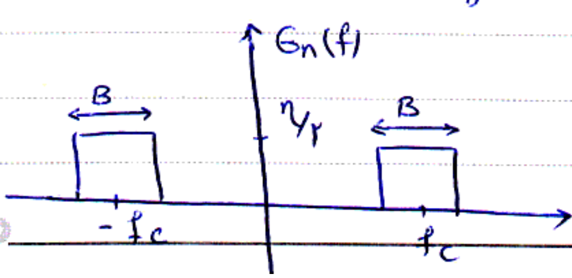
نویز پایین‌گذر: چنانچه نویز سفید از یک LPF ایده‌آل عبور کند داریم:



$$G_y(f) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

توان متوسط $= \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)\,df = \eta B \Rightarrow$ مساحت زیر نمودار

نویز میان‌گذر:



سیگنال نویز:

$$n(t) = A_n(t)\cos(\omega_c t + \phi_n(t))$$

$$n_i(t) = A_n(t)\cos\phi_n(t)$$

$$n_q(t) = A_n(t)\sin\phi_n(t)$$

همفاز — ربعی

$$n(t) = n_i(t)\cos\omega_c t + n_q(t)\sin\omega_c t$$

$$A_n(t) = \sqrt{n_i^2(t) + n_q^2(t)} \qquad \phi_n(t) = tg^{-1}\frac{n_q(t)}{n_i(t)}$$

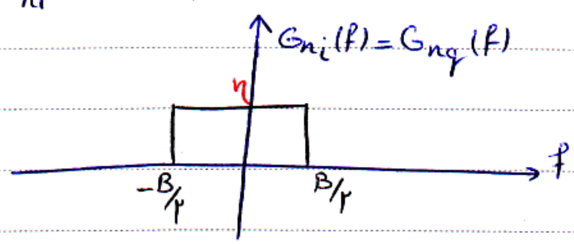
برای فرآیندهای تصادفی $n_i(t)$ و $n_q(t)$ داریم:

۱) اگر $n(t)$ فرآیند گاوسی و ایستا (WSS) باشد، $n_i(t)$ و $n_q(t)$ نیز گاوسی و ایستا هستند.

۲) اگر $\overline{n(t)}$ صفر باشد، $\overline{n_i(t)}$ و $\overline{n_q(t)}$ نیز صفر هستند.

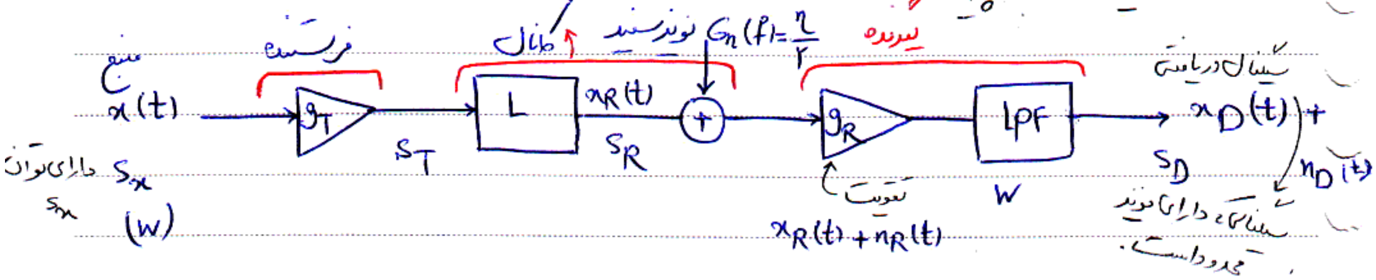
۳) طیف توان $n_i(t)$ و $n_q(t)$ به صورت زیر است:

$$G_{n_q}(f) = G_{n_i}(f) = G_n(f+f_c)\,u(f+f_c) + G_n(f-f_c)\,(1-u(f-f_c))$$



۴) $n_i(t)$ و $n_q(t)$ از هم مستقل هستند.

انتقال سیگنال در باند پایه:



هدف مقایسه SNR خروجی است (SNR_D)

هدف : $SNR_D = \frac{S_D}{N_D}$

بهره توان : g_T , g_R ① $S_T = g_T S_x$ ② $S_R = \frac{S_T}{L}$

③ $S_D = g_R S_R$ ①,②,③ $\Rightarrow$ $S_D = \frac{g_T g_R}{L} S_x = \frac{g_R}{L} S_T = g_R S_R$

S_x برحسب S_T برحسب S_R برحسب

$$\boxed{N_D = g_R \eta W}$$

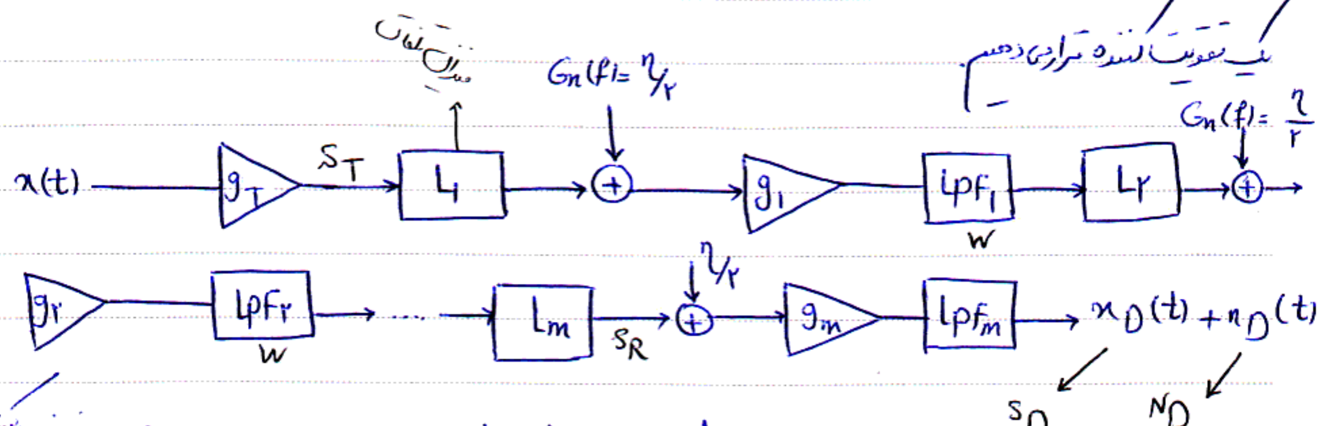
نکته: می‌توان از g_R صرف نظر کرد، چون هم سیگنال و هم نویز را به یک اندازه تقویت می‌کند.

$$SNR = \frac{\cancel{g_R} S_R}{\cancel{g_R} \eta W} = \boxed{\frac{S_R}{\eta W} = \gamma}$$

$$SNR_D = \frac{S_R}{\eta W} = \gamma = \frac{S_T}{L \eta W}$$

مشکل ساختار فوق این است که با افزایش طول مسیر، L به شدت افزایش یافته و SNR بسیار کم می‌شود.

راه حل: استفاده از تکرارکننده ها. مسیر انتقال را به m قطعه مساوی با اتلاف L_1 تقسیم می‌کنیم و در انتهای هر قطعه یک تقویت کننده قرار می‌دهیم



فرض می‌کنیم : $g_1 = g_2 = \dots = g_m = L_1 = L_2 = \dots = L_m$

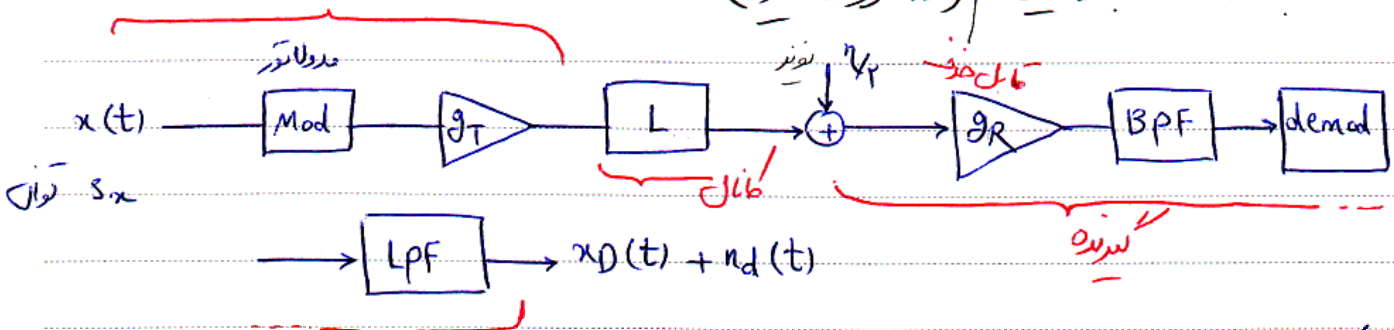
$S_D = S_T \qquad N_D = g_1 \eta W + g_2 \eta W + \cdots + g_m \eta W = m g_1 \eta W = m L_1 \eta W$

ولی $L = L_1 \cdot L_2 \cdots L_m = L_1^{m}$

$$SNR_D = \frac{S_T \times L}{m L_1 \eta W \times L} = \frac{L}{m L_1} \times \frac{S_T}{L \eta W} = \frac{(L_1)^{m-1}}{m} \gamma$$

چون سیگنال و نویز را به یک اندازه تضعیف می‌کند.

خاصه SNR در باند میانی : (در حضور مدولاسیون)



ورودی دمدولاتور به صورت $V(t) = A_r(t)\cos(\omega_c t + \phi_r(t))$ یا $V(t) = V_i(t)\cos\omega_c t + V_q(t)\sin\omega_c t$

باشد خروجی دمدولاتور یکی از ۴ حالت زیر خواهد بود :

(مولفه هم فاز) ضریب cos

DSB : $V_i(t)$ $\qquad x(t) \to \boxed{mod} \to A_c x(t)\cos\omega_c t \to \boxed{\text{دمدلاتور}} \to x(t)$

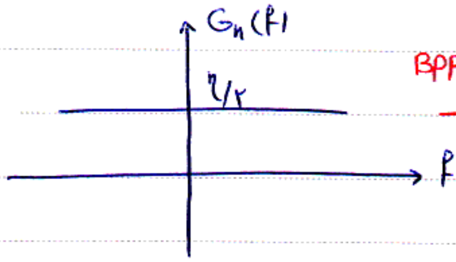
ضریب cos ←

AM : $A_r(t) - \overline{A_r(t)}$ $\qquad$ پوش – میانگین پوش

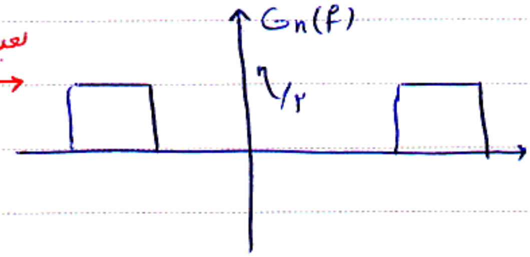
PM : $\phi_r(t)$ $\qquad$ فاز

FM : $\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi_r(t)}{dt}$ $\qquad$ مشتق فاز

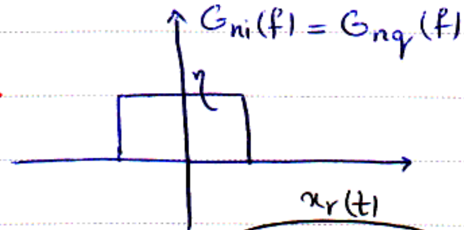
محاسبه SNR برای مدولاسیون DSB :



عبور از BPF $\longrightarrow$



$\longrightarrow$



آشکارساز DSB همان آشکارساز همزمان است.

ورودی دمدولاتور : $\underbrace{A_R x(t)\cos\omega_c t}_{x_r(t)} + \underbrace{n_i(t)\cos\omega_c t + n_q(t)\sin\omega_c t}_{\text{نویز}} =$

$(A_R x(t) + n_i(t))\cos\omega_c t + n_q(t)\sin\omega_c t$ توان $v_i(t) \longrightarrow \overline{v_i^2(t)}$

خروجی دمدولاتور : $\underbrace{A_R x(t) + n_i(t)}_{\text{سیگنال پایین گذر}}$

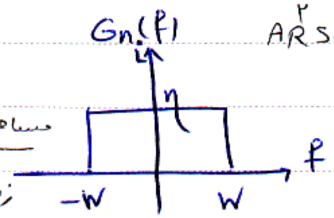
$S_R = \overline{(A_R x(t))^2} = A_R^2 \overline{x^2(t)} = A_R^2 S_x$

$x(t) \xrightarrow{\text{توان}} S_x$

$A_R x(t) \xrightarrow{\text{توان}} A_R^2 S_x$

$$SNR_D = \frac{A_R^2 S_x}{\overline{n_i^2(t)}} = \frac{A_R^2 S_x}{2\eta W} \quad (1)$$

مساحت زیر منحنی



همیشه باید روابط را برحسب $\gamma = \frac{S_R}{\eta W}$ بیان کنیم. داریم:

$$x_r(t) = A_R x(t)\cos\omega_c t \Rightarrow S_R = \frac{A_R^2}{2} S_x \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow SNR_D = \frac{\cancel{A_R^2}}{2\eta W} \times \frac{2S_R}{\cancel{A_R^2}} = \frac{S_R}{\eta W} = \gamma$$

نتیجه : مدولاسیون DSB تأثیری در SNR ندارد.

$x_R(t) = A_R x(t)\cos\omega_c t \rightarrow S_R = \overline{A_R^2 x^2(t)\cos^2\omega_c t} = (A_R^2 S_x)\overline{\cos^2\omega_c t} =$

$A_R^2 S_x \overline{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_c t\right)} = \frac{A_R^2}{2} S_x$