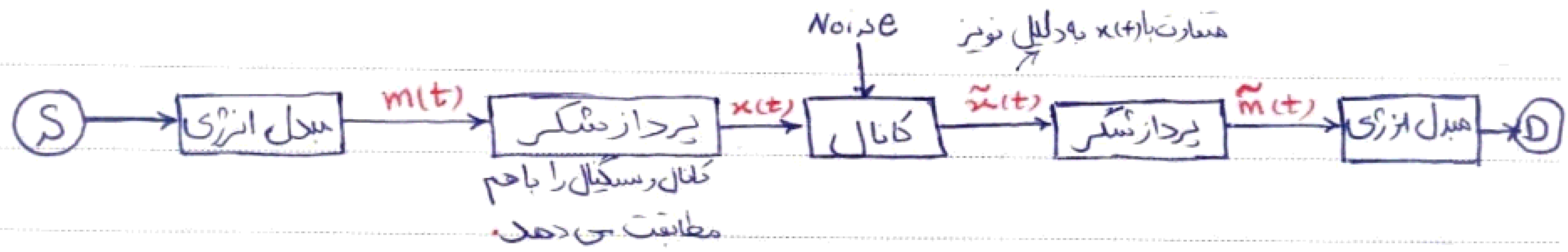
# جزوه مخابرات ۱

دکتر محمد مولوی

-




علت نیاز به پردازشگر:

فرضاً می خواهیم سیگنال را از طریق آنتن ارسال دهیم. اثبات می شود که باید ارتباطی بین ابعاد آنتن و فرکانس سیگنال برقرار باشد. حدوداً $l = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow l \cong \frac{c}{10 f}$

$$\left.\begin{array}{l} f = 100 \\ c = 300000 \ km/sec \end{array}\right\} \Rightarrow l \cong 300 \ km$$ غیرمنطقی

برای رفع این مشکل سیگنال را در یک کسینوسی ضرب می کنیم تا به فرکانس های بالا رود و طول آنتن کاهش یابد. این عمل پردازش است.

قبل از اینکه سیگنال به ما برسد ما بی نهایت تابع می توانیم حدس بزنیم که سیگنال مورد نظر می تواند یکی از آنها باشد. به این فرآیند، فرآیندهای استوکاستیک سیگنال های تصادفی می گوییم.

منابع:

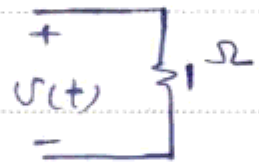
۱- سیستم های ارتباطی ‌ نویسنده: A.B. Carlson

۲- Comm Systems Engineering
۳- Digital Comm
Proakis + Masoud Salehi

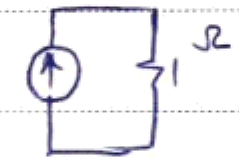
۴- Digital and analog Comm ‌ نویسنده: Shanmugan

$m(t)$ — **سیگنال :**

اگر باری که سیگنال به آن اعمال می‌شود مقاومتی یک اهم باشد داریم : $P_t = v(t)\,i(t)$




$P_t = v(t)\,i(t) = v^2(t)$




$P_t = i(t)\,i(t) = i^2(t)$

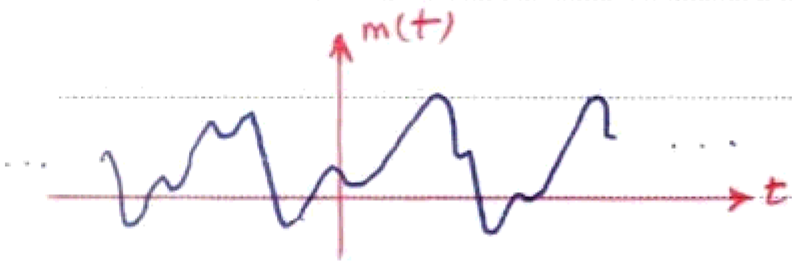
بنابراین توان لحظه‌ای نرمالیزه شده را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم : $P_t \triangleq m^2(t)$

بنابراین توان لحظه‌ای نرمالیزه شده یا به طور خلاصه توان لحظه برابر با مجذور سیگنال می‌باشد.

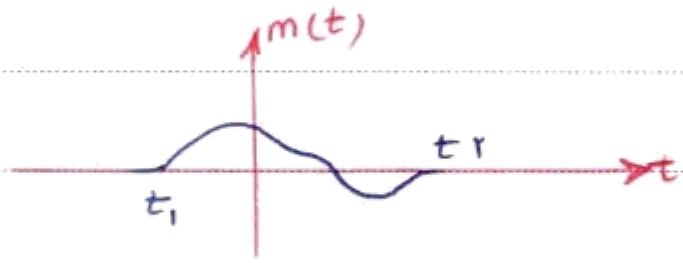
$$P_{\text{متوسط}} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)\,dt$$ (توان متوسط)

**انرژی سیگنال :**

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} m^2(t)\,dt$$ (انرژی کل)

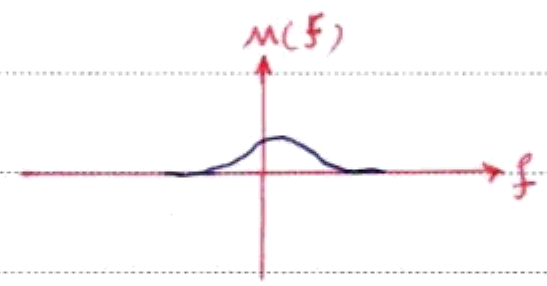



سیگنالی مشابه مقابل که در تمام زمان حضور دارند دارای انرژی بی‌نهایت هستند و فقط توان متوسط برای آنها قابل تعریف هستند. به این سیگنال‌ها، سیگنال‌های توان (Power Signals) می‌گوییم.



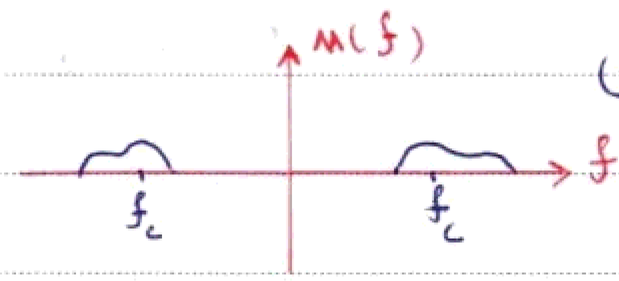

سیگنال مقابل دارای توان متوسط صفر و انرژی محدود می‌باشند. به این سیگنال‌ها سیگنال‌های انرژی (Energy Signals) می‌گوییم.

$m(t) \longleftrightarrow M(f)$




سیگنال‌های پایین‌گذر ـ سیگنال‌های باند پایه
Low pass Signals

$m(t) \longleftrightarrow M(f)$




سیگنال‌های میان‌گذر سیگنال‌های باند میانی
Band pass Signals

- به سیگنال ها یا فرآیندهایی که متغیر با زمان هستند ، سیگنال ها یا فرآیندهای استوکاستیک می گوییم.

سیگنال ها
- استوکاستیک / حقیقی یا موهومی
  - توان
    - LP
    - BP
  - انرژی
    - LP
    - BP
- معلوم / حقیقی یا موهومی
  - توان
    - LP
    - BP
  - انرژی
    - LP
    - BP

Subject: جلسه دوم

Year.      Month. ۴      Date. ۳۱ (  )

mh_abbasi2003@yahoo.com

ایمیل استاد حل تمرین:

سه‌شنبه ۲-۱۲

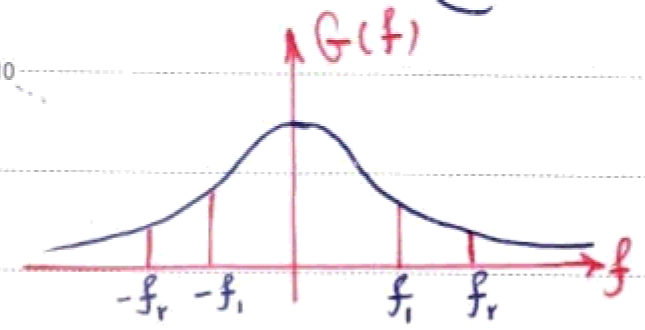
فرض می‌کنیم $x(t)$ یک سیگنال انرژی باشد و داشته باشیم:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

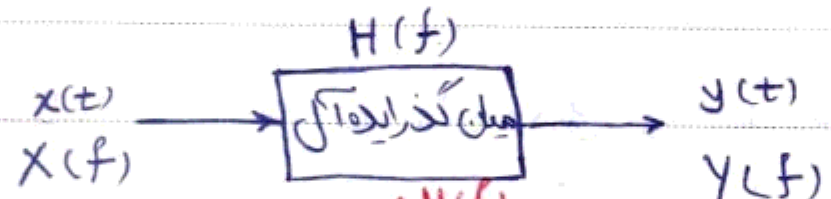
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

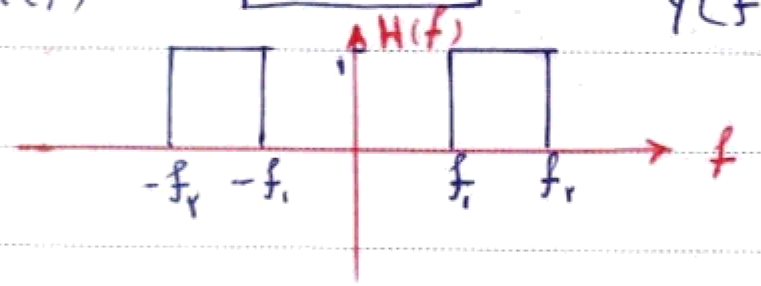
تابع چگالی طیف انرژی: Energy Spectral Function

این تابع نشان می‌دهد که انرژی سیگنال چگونه در فرکانس های مختلف توزیع شده است.




در این تابع هر سطح زیر دو فرکانس مشخص برابر با انرژی سیگنال در آن فرکانس ها است.

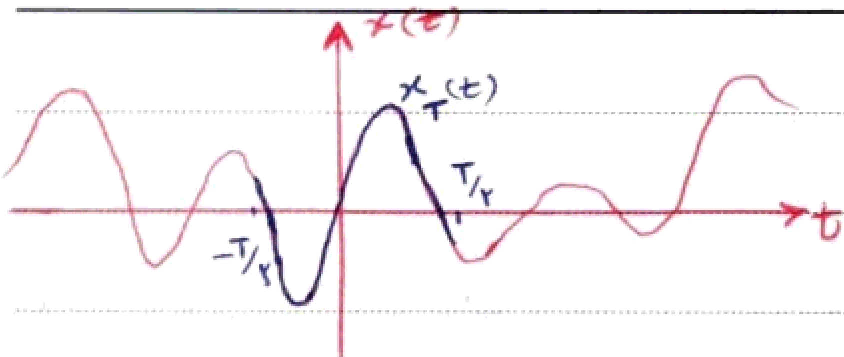



$$Y(f) = X(f)\,H(f)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = 2\int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$$ = انرژی مربوط به فرکانس های $f_1$ هرتز تا $f_2$ هرتز $x(t)$

هرگاه $G(f)$ را زوج گرفتیم نتیجه می‌گیریم که سیگنال حقیقی است. $G(f) = |X(f)|^2$




حال فرض می‌کنیم $x(t)$ یک سیگنال توان باشد.

$$x_T(t) = x(t)\,p\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow G(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (1)$$

$$x_T(t) \longleftrightarrow X_T(f)$$

برای پیدا کردن چگالی توان یک قطعه به طول T انتخاب، انرژی آن را بدست آورده و سپس بر T تقسیم می‌کنیم. حال با میل T به ∞ بینهایت تابع چگالی طیف توان را بدست می‌آوریم.

$$\underbrace{E}_{\text{ژول}/\text{اهم}} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\underbrace{df}_{\text{هرتز}} \rightarrow [G(f)] = \frac{\text{ژول}}{\text{اهم}\times\text{هرتز}}$$

$$E_{f_0} = \int_{f_0-\frac{df}{2}}^{f_0+\frac{df}{2}} G(f)\,df \simeq G(f_0)\,df$$

مثال: با استفاده از رابطه ۱ چگالی توان یک تابع پریودیک را بدست آورید؟

* هر سیگنال پریودیک یک سیگنال توان است زیرا انرژی یک سیگنال پریودیک بینهایت است.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$x_T(t) = p\left(\frac{t}{T}\right)x(t) \longleftrightarrow X_T(f)$$

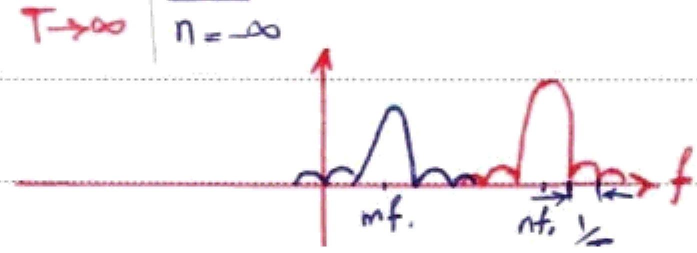
$$p\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\,\mathrm{sin}\,fT$$

$$x(t) \longleftrightarrow \sum C_n \delta(f - nf_0)$$

$$X_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T C_n \,\mathrm{Sinc}\,T(f-nf_0) \quad , f_0 = 1/T_0$$

$$|X_T(f)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} T|C_n|\,|\mathrm{Sinc}\,T(f-nf_0)|\right|$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(f)|^2}{T} = \lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} T|C_n|^2\,\mathrm{Sinc}^2\,T(f-nf_0) + \lim_{T\to\infty}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq m}}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} T|C_n||C_m|\,|\mathrm{Sinc}\,T(f-nf_0)|\,|\mathrm{Sinc}\,T(f-mf_0)|$$



$$\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2\, \delta(f-nf_0)$$

## تبدیل هیلبرت:

برای تبدیل هیلبرت یک سیگنال باید سیستمی با پاسخ ضربه $\frac{1}{\pi t}$ داشته باشیم اما این سیستم علی نخواهد بود و نمی‌توان چنین سیستمی ساخت.

$x(t)$

$$\hat{x}(t) \triangleq x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\pi t}} \longrightarrow \hat{x}(t)$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$
$$\hat{x}(t) \longleftrightarrow X_h(f)$$
$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j\,\mathrm{sign}(f)$$

$$X_h(f) = -j\,\mathrm{sign}(f)\, X(f)$$
$$X(f) = |X(f)|\, e^{j\measuredangle X(f)}$$
$$X_h(f) = |X_h(f)|\, e^{j\measuredangle X_h(f)}$$
$$\begin{cases} -j\,\mathrm{sign}(f) = \begin{cases} -j & f>0 \quad = e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ j & f<0 \quad = e^{j\frac{\pi}{2}} \end{cases} \\ |-j\,\mathrm{sign}(f)| = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |X_h(f)| = |X(f)|$$
$$\measuredangle X_h(f) = \begin{cases} \measuredangle X(f) - \frac{\pi}{2} & f>0 \\ \measuredangle X(f) + \frac{\pi}{2} & f<0 \end{cases}$$

**مثال.** فرض کنید $x(t) = a\cos 2\pi f_0 t$ ، $\hat{x}(t)$ را حساب کنید.

$$x(t) = \frac{1}{2} a e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} a e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\xrightarrow[\text{خطی و مستقل از زمان}]{\text{تبدیل هیلبرت}} \hat{x}(t) = \frac{1}{2} a e^{j2\pi f_0 t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} a e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = \frac{1}{2} a e^{j(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2} a e^{-j(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

$$x(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t - a_3 \sin \omega_3 t$$

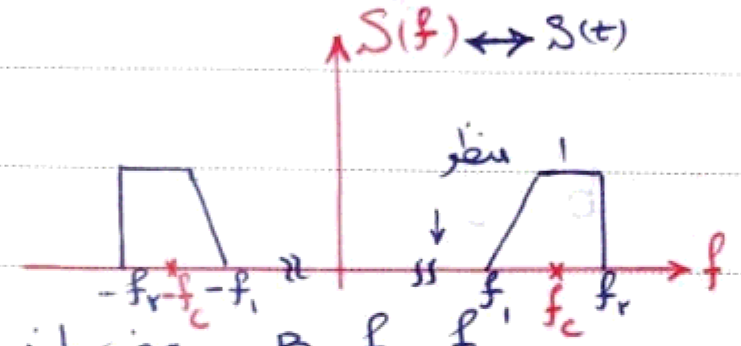
$$\hat{x}(t) = a_1 \cos (\omega_1 t - \pi/2) + a_2 \cos (\omega_2 t - \pi/2) - a_3 \sin (\omega_3 t - \pi/2)$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = a_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_1}\right) + a_2 \cos \omega_2 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_2}\right) - a_3 \sin \omega_3 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_3}\right)$$

همانطورکه می‌بینیم در حوزه زمان یک اعوجاج زیادی به سیگنال می‌دهد.

## سیگنال های میان گذر و پایین گذر:

اگر سیگنالی طیف فرکانسیش حول یک فرکانس میانی غیرصفر بوده، یا از یک فیلتر میان گذر عبور کند، به آن سیگنال، سیگنال طیف میانی می گوییم.



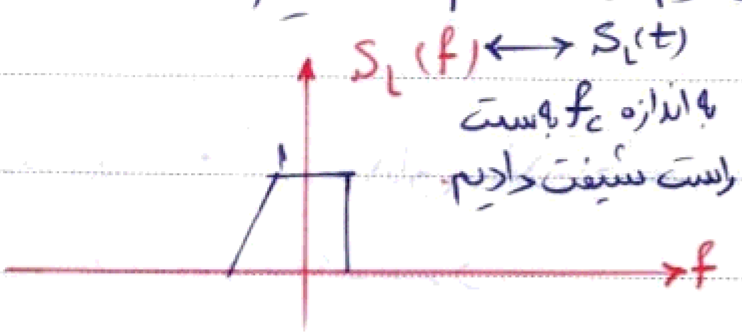

عرض باند: $B = f_2 - f_1$

در سرتاسر بحث ها، منظور از سیگنال میان گذر سیگنالی است که حقیقی می باشد.

سیگنال باریک عرض سیگنالی است که یکی از شرایط زیر در آن برقرار باشد:

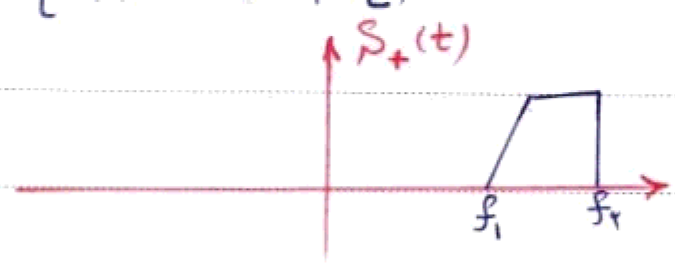
$\frac{f}{B} \gg 1$ $\qquad$ $\frac{B}{f} \ll 1$

یک فرکانس بین $f_1$, $f_2$ و یا حتی خود $f_1$, $f_2$ را انتخاب می کنیم و $f_c$ نام می گذاریم




سیگنال باند پایه معادل $S(f)$ ⇐

$S_l(f) = S(f+f_c)$




$$S_+(f) = S(f)\,u(f)$$
$$S(f) \longleftrightarrow s(t)$$
$$u(f) \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}$$

$$\Rightarrow s_+(t) = s(t) * \left[\tfrac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{s_+(t) = \tfrac{1}{2}s(t) + \tfrac{j}{2}\hat{s}(t)} \quad (1)$$

$$S_l(f) = S_+(f+f_c) \rightarrow s_l(t) = s_+(t)\,e^{-j2\pi f_c t} \rightarrow \boxed{s_+(t) = s_l(t)\,e^{j2\pi f_c t}} \quad (2)$$

$$\left.\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \tfrac{1}{2}s(t) + \tfrac{j}{2}\hat{s}(t) = s_l(t)\,e^{j2\pi f_c t}$$

$$\rightarrow \begin{cases} s(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[s_l(t)\,e^{j2\pi f_c t}\right] \\ \hat{s}(t) = 2\,\mathrm{Im}\left[s_l(t)\,e^{j2\pi f}\right] \end{cases}$$

مدل a

$$S_l(t)=\frac{1}{2}S_i(t)+\frac{j}{2}S_q(t)\rightarrow\begin{cases}S_i(t): \\ S_q(t):\end{cases}$$

دو برابر قسمت حقیقی
دو برابر قسمت موهومی

$$S(t)=2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{2}S_i(t)+\frac{j}{2}S_q(t)\right)\left(\cos 2\pi f_c t+j\sin 2\pi f_c t\right)\right]$$

$$\left.\begin{aligned}&\rightarrow S(t)=S_i(t)\cos 2\pi f_c t-S_q(t)\sin 2\pi f_c t\\ &\rightarrow \hat{S}(t)=S_i(t)\sin 2\pi f_c t+S_q(t)\cos 2\pi f_c t\end{aligned}\right\}\ b$$

مدل b

$$S_l(t)=\frac{1}{2}S_i(t)+\frac{j}{2}S_q(t)=\frac{1}{2}R(t)e^{j\phi(t)}$$

$$R(t)=\sqrt{S_i^2(t)+S_q^2(t)}$$

$$\varphi(t)=\tan^{-1}\frac{S_q(t)}{S_i(t)}$$

$$S(t)=2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}R(t)e^{j\phi(t)}e^{j2\pi f_c t}\right]\rightarrow S(t)=R(t)\cos(2\pi f_c t+\varphi(t))\quad c$$

مدل c

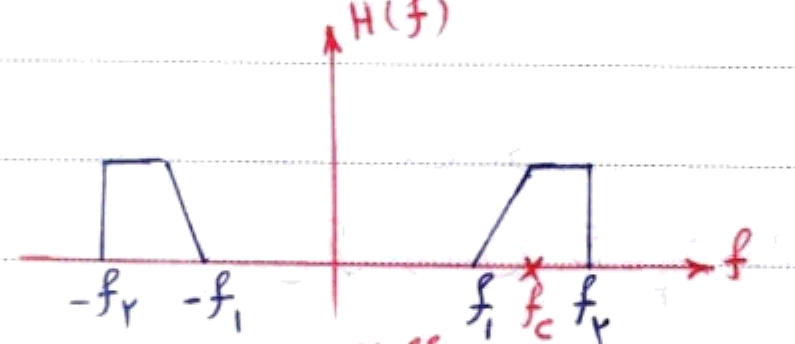
از آنجاییکه $S_l(t)$ سیگنالی از باند پایه است، سیگنال‌های $S_i(t)$، $S_q(t)$، $R(t)$ و $\varphi(t)$ همه سیگنال‌های باند پایه هستند.

$$S(f)=\frac{1}{2}\left[S_l(f-f_c)+S_l^*(-f-f_c)\right]$$

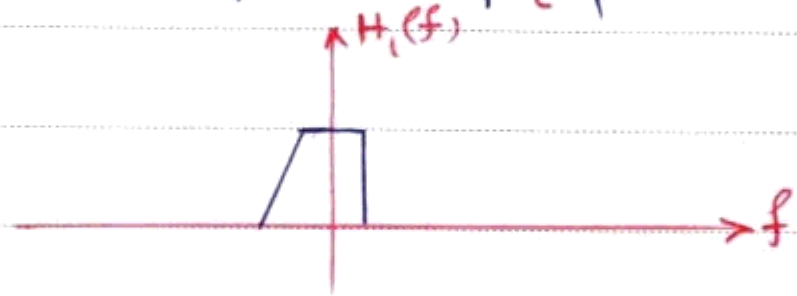
← نشان دهید:

# سیستم‌ها

سیستم باند میانی سیستمی است که پاسخ آن سیگنالی از باند میانی باشد.




سیستم معادل، سیستمی از باند میانی است.




سیستم پایین گذر معادل سیستم بالا

$s(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Q(t)$

$s_l(t) \longrightarrow \boxed{H_l(f)} \longrightarrow Q_l(t)$

$\xrightarrow{\text{اثبات}}$ $\left.\begin{array}{l} Q(f)=H(f)S(f) \\ f \to f+f_c \end{array}\right\} \Rightarrow Q(f+f_c)=S(f+f_c)H(f+f_c)$

$\xRightarrow{u(f+f_c)} Q(f+f_c)\,u(f+f_c)=S(f+f_c)\,u(f+f_c)\,H(f+f_c)\,u(f+f_c)$

$\rightarrow Q_l(f)=H_l(f)\,S_l(f) \rightarrow Q_l(t)=H_l(t)*S_l(t)$

← نشان دهید اگر انتخاب $f_c$ را عوض کنیم، $R(t)$ عوض نمی‌شود.

$$\begin{cases} s(t)=s_i(t)\cos 2\pi f_c t - s_q(t)\sin 2\pi f_c t \\ \hat{s}(t)=s_i(t)\sin 2\pi f_c t + s_q(t)\cos 2\pi f_c t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_i(t)=s(t)\cos 2\pi f_c t + \hat{s}(t)\sin 2\pi f_c t \\ s_q(t)=\hat{s}(t)\cos 2\pi f_c t - s(t)\sin 2\pi f_c t \end{cases}$$

$$R(t)=\sqrt{s_i^2(t)+s_q^2(t)}=\sqrt{s^2(t)\cos^2\omega_c t+\hat{s}^2(t)\sin^2\omega_c t+\hat{s}^2(t)\cos^2\omega_c t+s^2(t)\sin^2\omega_c t}$$

$$\Rightarrow R(t)=\sqrt{s^2(t)+\hat{s}^2(t)}$$

همانطور که می‌بینیم مقدار $R(t)$ مستقل از انتخاب $f_c$ است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اندازه نگذاشتیم چون سیگنال حقیقی است

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\,df$$

$$E_l = \int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_l(f)|^2\,df$$

$$\Rightarrow E = 2E_l$$

با یک روش دقیق‌تر، بالا را اثبات کنید.

راهنمایی $\longrightarrow$ به‌جای $s(t)$، معادل آن براساس $S_i$, $S_q$ را قرار دهیم.

## مدولاسیون:

مدولاسیون AM:

$$x_{bp}(t)=x_I(t)\cos 2\pi f_0 t - x_Q(t)\sin 2\pi f_0 t$$

$$x_{LP}(t)=\frac{1}{2}x_I(t)+\frac{j}{2}x_Q(t)$$

## مدولاسیون های موج پیوسته خطی:

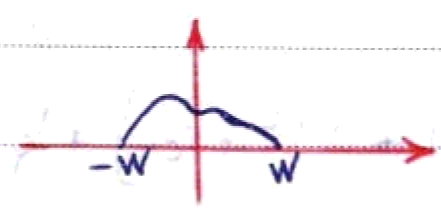
الف) مدولاسیون دامنه (AM)

* خبر را روی پوش سیگنال سینوسی قرار میدهیم.

حامل $c(t)=A_c\cos 2\pi f_0 t$

خبر $x(t)$ خبر باند پایه

$X(f)$ پهنای باند $W$ $\Rightarrow$




$S_x \ll 1$

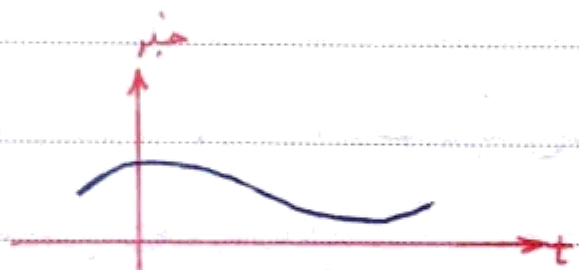
$\langle x\rangle=0$

سیگنال مدوله شده $x_c(t)=A_c(1+\mu x(t))\cos 2\pi f_0 t$

$\mu$: اندیس مدولاسیون AM

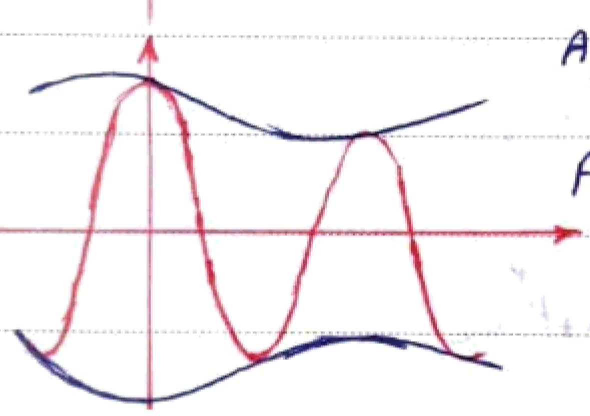
یکی از شرط های ما اینست که $|x(t)|\leq 1$

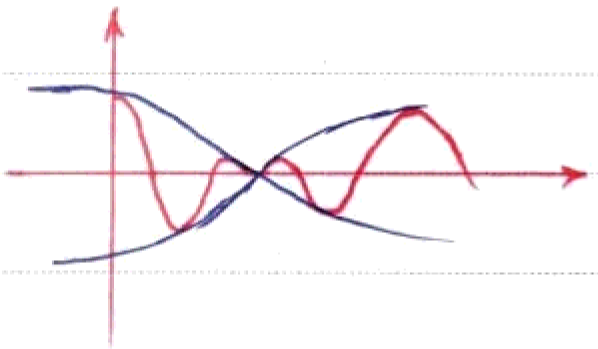
اگر $|x(t)|\not\leq 1$ نباشد آنگاه




$A_{max}=A_c(1+\mu)$

$A_{min}=A_c(1-\mu)$





اگر $A_{min}<0$ :

با انتخاب مناسب $\mu$ می توانیم پیام را با استفاده از آشکارساز پوش بدست آوریم.

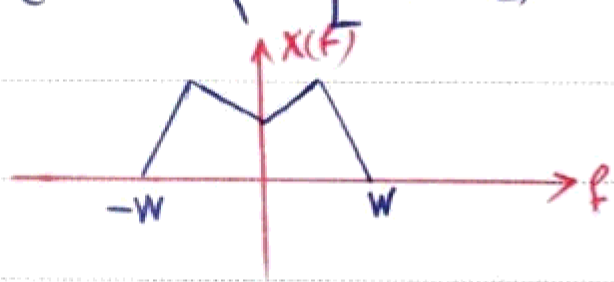
$A_{min}>0 \Rightarrow \mu<1$

اگر $\mu>1$ باشد پوش سیگنال متناسب با پیام نخواهد بود و در نقاط عبور از صفر وارونی فاز دارد.
همچنین $f_c \gg W$ باشد تا تداخل فاز نداشته باشیم.

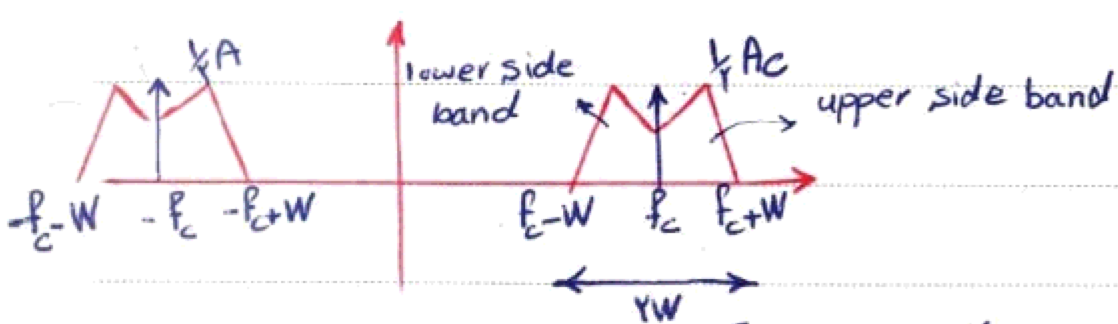
بررسی پهنای باند و توان سیگنال AM :

$$x_c(t)=A_c\cos 2\pi f_c t + A_c\mu x(t)\cos 2\pi f_c t$$

$$X_c(f)=\frac{1}{2}A_c\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]+\frac{1}{2}A_c\mu\left[X(f-f_c)+X(f+f_c)\right]$$




$BW=2W$ بنابراین در مدولاسیون AM دو برابر پهنای باند خود سیگنال برای ارسال اشغال می شود.




بررسی توان را می توان هم در حوزه زمان و هم در حوزه ی فرکانس بررسی کرد.

محاسبه توان در حوزه زمان :

$$S_T=\langle x_c^2(t)\rangle$$

$$=\frac{1}{2}A_c^2\langle 1+\mu^2x^2+2\mu x\rangle+\frac{1}{2}A_c^2\langle(1+\mu x(t))^2\cos 4\pi f_c t\rangle$$

$$\Rightarrow S_T=\frac{1}{2}A_c^2+\frac{1}{2}A_c^2\mu^2S_x+0+0=\frac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2S_x)$$

این توان علاوه بر ارسال خبر، حامل را نیز می‌فرستد.

حال می‌خواهیم ببینیم چه مقدار از توان صرف فرستادن حامل می‌شود.

$$S_T = \frac{1}{2}A_c^2 + \frac{1}{4}A_c^2\mu^2 S_x = P_c + 2P_{sb}$$

$\frac{1}{2}A_c^2$ : توان مصرفی برای فرستادن سیگنال حامل

$\frac{1}{2}A_c^2\mu^2 S_x$ : توان مصرفی برای فرستادن دو ساید باند

می‌خواهیم نسبت توان حامل و side-band ها را بنویسیم.

$$\begin{cases} P_c = \frac{1}{2}A_c^2 \\ P_{sb} = \frac{1}{4}A_c^2\mu^2 S_x \Rightarrow P_{sb} = \frac{1}{2}P_c\mu^2 S_x \end{cases}$$

توان حامل مدوله‌شده

توان به ازای هر کنار باند

$$\left.\begin{matrix} |x(t)| < 1 \\ \mu < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\mu x(t)| < 1 \longrightarrow \mu^2 S_x < 1 \Rightarrow \frac{1}{4}\mu^2 P_c S_x \leqslant \frac{1}{2}P_c$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} P_{sb} \leqslant \frac{1}{4}P_c \\ P_c = S_T - 2P_{sb} \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_{sb} \leqslant \frac{1}{6}S_t$$

یکی از مشکلات مدولاسیون AM اینست که بیش از ۵۰ ٪ توان مصرفی برای فرستادن حامل‌ها صرف می‌شود.

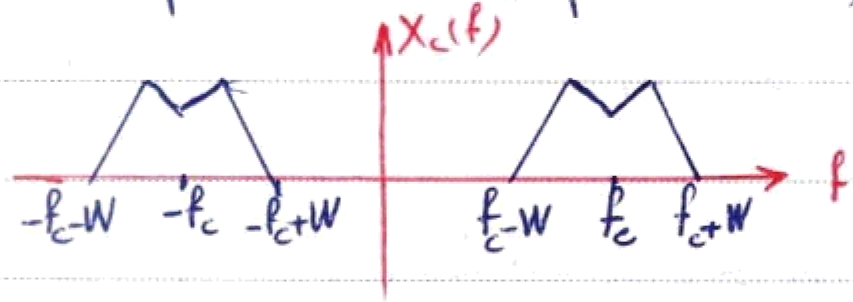
## مدولاسیون AM — DSB-SC (Double side band - suppresid carrier)

با حذف حامل و ۳ خواهیم داشت :

$$x_c(t)=A_c\,x(t)\cos 2\pi f_c t$$

در این حالت دیگر نمی‌توانیم از آشکارساز پوش استفاده کنیم.

$$X_c(f)=\tfrac{1}{2}A_c\,X(f-f_c)+\tfrac{1}{2}A_c\,X(f+f_c)$$




در این حالت نیز باند 2W داریم.

$$B_T=2W$$

$$S_T=\langle x_c^2(t)\rangle=\tfrac{1}{2}A_c^2\langle x^2(t)\rangle \Rightarrow S_T=\tfrac{1}{2}A_c^2 S_x=2P_{sb}$$

Subject: جلسه پنجم
Year. Month. ۷ Date. ۱۹ ( )

AM مدولاسیون : $x_c(t) = A_c(1+\mu x(t))\cos 2\pi f t$

$S_T = P_c + 2P_{sb}$

DSB مدولاسیون : $x_c(t) = A_c x(t)\cos 2\pi f t$

$S_T = 2P_{sb}$ $\quad B_T = 2W$

پارامتر مقایسه : حداکثر پوشی که سیگنال می‌تواند داشته باشد همواره محدود است. معیاری که برای مقایسه این پارامتر قرارداد می‌کنیم برابر با $\frac{P_{sb}}{A^2_{max}}$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow A_{max} = \begin{cases} A_c & DSB \\ 2A_c & AM, \mu=1 \end{cases} \\ \Longrightarrow P_{sb} = \begin{cases} \frac{1}{4}A_c^2 S_x & DSB \\ \frac{1}{4}\mu^2 A_c^2 S_x & AM \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} DSB: \frac{P_{sb}}{A^2_{max}} = \frac{1}{4} S_x \\ AM: \frac{P_{sb}}{A^2_{max}} = \frac{1}{16} S_x \end{cases}$$

بنابراین توانی که در DSB به هر Side-band اختصاص می‌دهیم ۴ برابر توان هر Side-band در AM است. بنابراین در حالت DSB سیگنال برد بیشتری خواهد داشت.

اگر $A_{max}$ محدود باشد توان Side-band در مدولاسیون DSB، چهار برابر از توان Side-band در AM بیشتر است.

مثال: در یک فرستنده $A^2_{max} \leq 8\ kw$ ، $S_T \leq 3\ kw$. فرض می‌کنیم خبری به صورت $x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ با $A_m = 1$ داریم. $P_{sb}$ را در هر دو حالت AM و DSB حساب کنید. الف) DSB

$$\left.\begin{array}{l} S_x = \frac{1}{2}A_m^2 = \frac{1}{2} \qquad A^2_{max} \leq 8kw \\ P_{sb} = \frac{1}{4} S_x A^2_{max} = \frac{1}{8} A^2_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{sb} \leq 1\ kw$$

غیر از پوشش ماکسیمم ما محدودیتی در حداکثر توان ارسالی فرستنده نیز داریم

$P_{sb} = \frac{1}{2} S_T \leq \frac{3}{2} \Rightarrow P_{sb} \leq 1\ kw$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

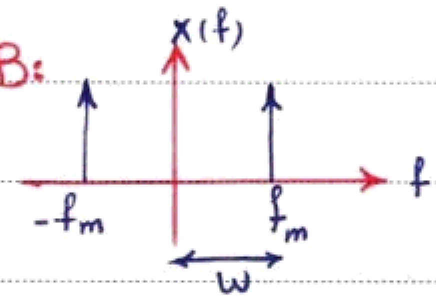
ب) AM:

$$P_{sb} = \frac{1}{14} S_x A_{max}^2 \leq 1/4$$
$$S_T = P_c + 2P_{sb} = 4P_{sb}$$
$$P_{sb} = 1/4\, P_c$$
$$P_{sb} = 1/4\, S_T \leq 1/4 \text{ kw}$$

$\Rightarrow P_{sb} \leq 0/25$ kw

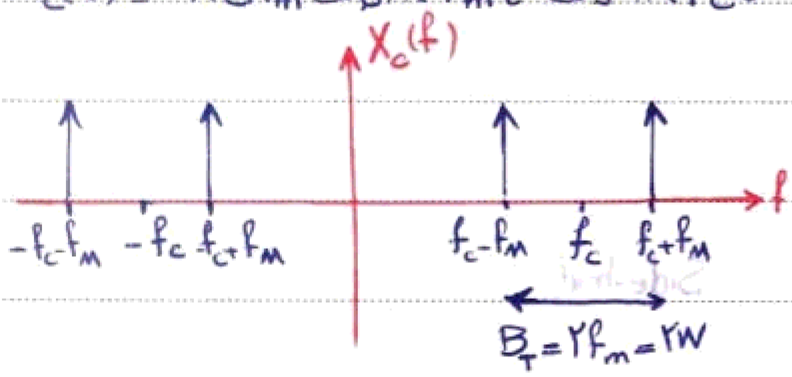
**Tone Modulation : DSB:**

$$x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$$



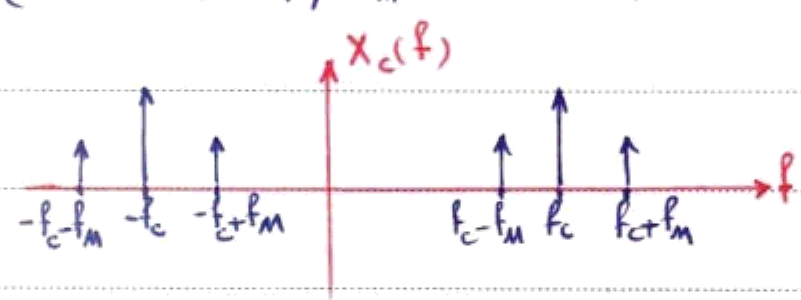

$$S_x = 1/2\, A_m^2 \leq 1$$

$$x_c(t) = A_c A_m \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_c t = 1/2\, A_c A_m \cos(f_c + f_m)t + 1/2\, A_c A_m \cos(f_c - f_m)$$



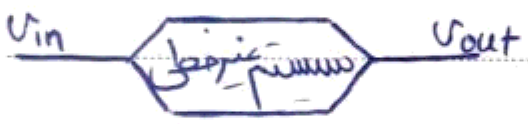

**AM:**

$$x_c(t) = A_c(1 + \mu A_m \cos 2\pi f_m t)\cos 2\pi f_c t$$

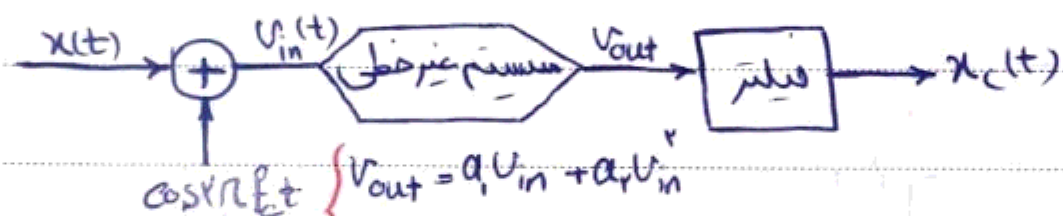


## ساختار مدولاتورهای DSB و AM :

همانطور که دیدیم اگرچه در ساختار سیگنال خبر فرکانس خاصی داریم ولی در سیگنال مدوله شده، فرکانس‌های متفاوت با خبر داریم. پس در مدولاتورها به ناچار باید از عناصر غیرخطی استفاده کنیم.



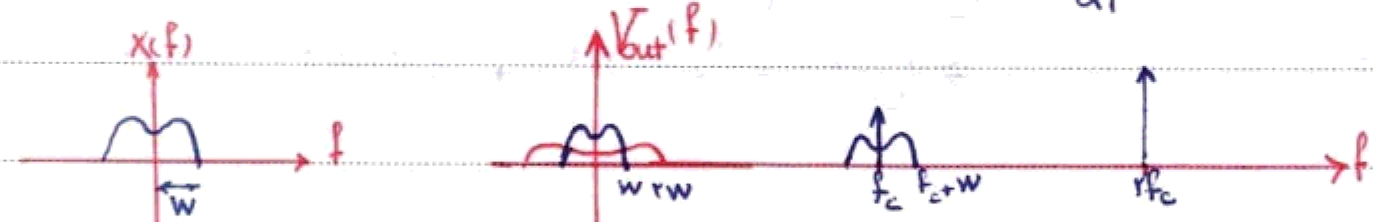

$$V_{out}=a_1V_{in}+a_2V_{in}^2+a_4V_{in}^3$$




$$\begin{cases} V_{out}=a_1V_{in}+a_2V_{in}^2 \\ V_{in}=x(t)+\cos 2\pi f_c t \end{cases}$$

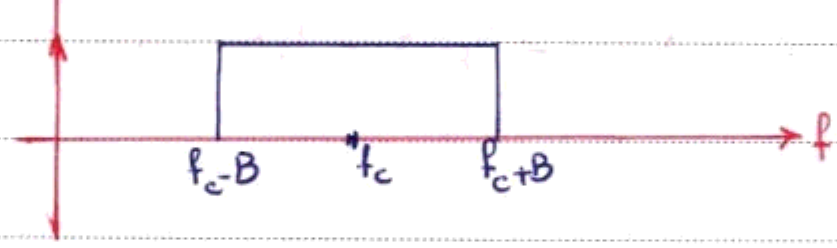
$$V_{out}(t)=a_1\left(x(t)+\cos 2\pi f_c t\right)+a_2\left(x(t)+\cos 2\pi f_c t\right)^2$$

$$=a_1x(t)+a_2x^2(t)+a_2\cos^2 2\pi f_c t+a_1\left[1+\frac{2a_2}{a_1}x(t)\right]\cos 2\pi f_c t \quad , \begin{cases} a_1=A_c \\ \frac{2a_2}{a_1}=\mu \end{cases}$$



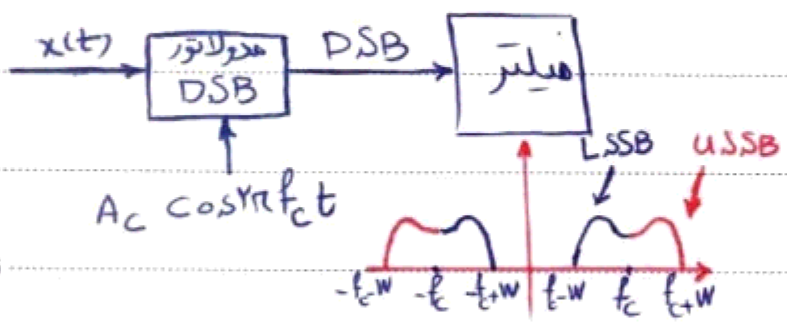

$$\Rightarrow \begin{cases} 2W < f_c-B < f_c-W \\ f_c+W < f_c+B < 2f_c \end{cases}$$

سیگنال‌های حاصل نسبت به خط $f=0$ تقارن زوج دارند ⟵




برای استفاده از قطع در مدولاسیون DSB باید مقادیر $a_1=0$ , $a_2=\frac{A_c}{2}$ را قرار دهیم.

## مدولاسیون SSB (Single-side band) :




$$B_T=W$$

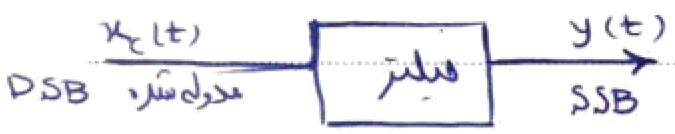
$$S_T=P_{sb}=\frac{1}{4}A_c^2S_x$$

مدولاسیون تون:

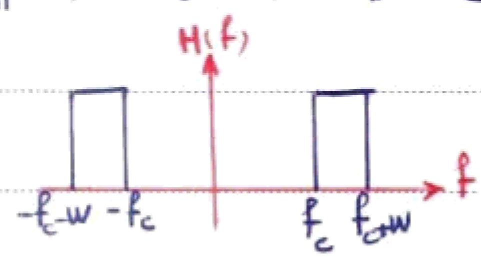
$x(t) = A_m \cos 2\pi f\, t$

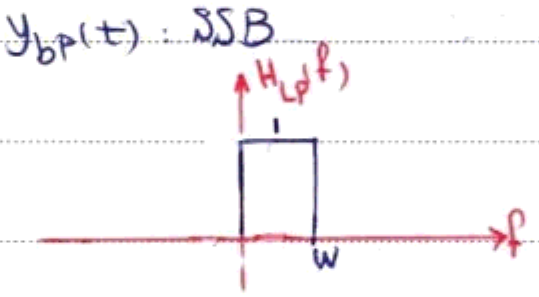
DSB: $\frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (f_c - f_m)t + \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (f_c + f_m)t$

$$\Rightarrow SSB: \begin{cases} USSB: \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (f_c + f_m)t \\ LSSB: \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi (f - f_m)t \end{cases}$$




$x_{bp}(t) = A_c x(t) \cos 2\pi f_c t \longrightarrow y_{bp}(t): SSB$




$Y_{LP}(f) = X_{LP}(f)\, H_{LP}(f)$

$x_{bp}(t) = A_c x(t) \cos 2\pi f_c t$

$H_{LP}(f) = u(f) - u(f-W) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{Sign}(f)) \quad |f| \leq W$

$x_{LP}(t) = \frac{1}{2} A_c x(t)$

$Y_{LP}(f) = \frac{1}{4} A_c X(f)(1 + \mathrm{Sign}(f))$

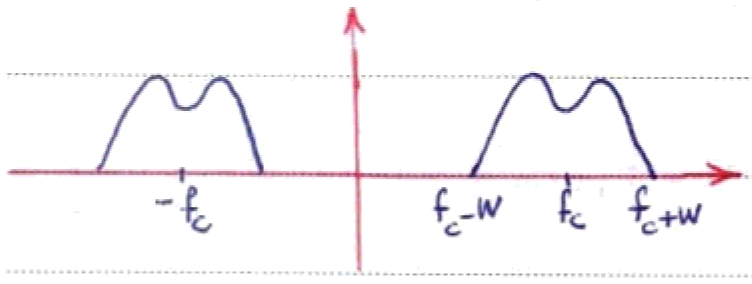
$X_{LP}(f) = \frac{1}{2} A_c X(f)$

$\Rightarrow Y_{LP}(f) = \frac{1}{4} A_c X(f) + \frac{1}{4} A_c X(f)\, \mathrm{sign}(f)$

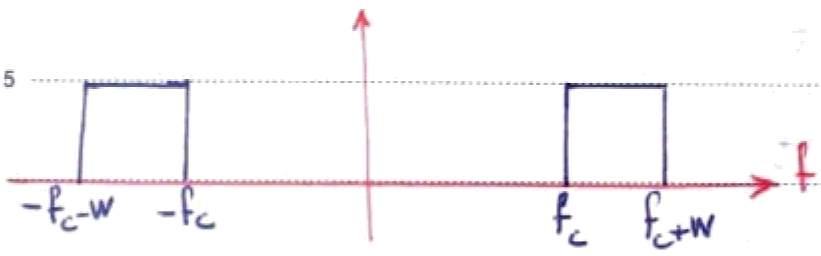
$\Rightarrow y_{LP}(t) = \frac{1}{4} A_c x(t) + \frac{j}{4} A_c \hat{x}(t) \Rightarrow y_{bp}(t) = \frac{1}{2} A_c \left[ x(t) \cos 2\pi f_c t - \hat{x}(t) \sin 2\pi f_c t \right]$

$\oplus$

## مدولاسیون SSB :



$f$ معادل باند پایه SSB: $y_{LP}(t) = \frac{1}{2} A_c \left( x(t) + j\hat{x}(t) \right)$



USSB, LSSB $\Rightarrow \begin{cases} y_i(t) = \frac{1}{2} A_c x(t) \\ y_Q(t) = \pm \frac{1}{2} A_c \hat{x}(t) \end{cases}$

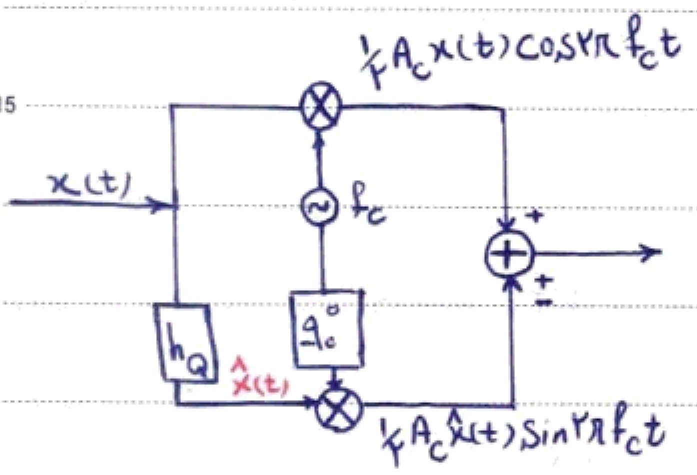
$$y_{bP}(t) = \frac{1}{2} A_c \left[ x(t) \cos 2\pi f_c t \mp \hat{x}(t) \sin 2\pi f_c t \right]$$

پوش : $A(t) = \frac{1}{2} A_c \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$

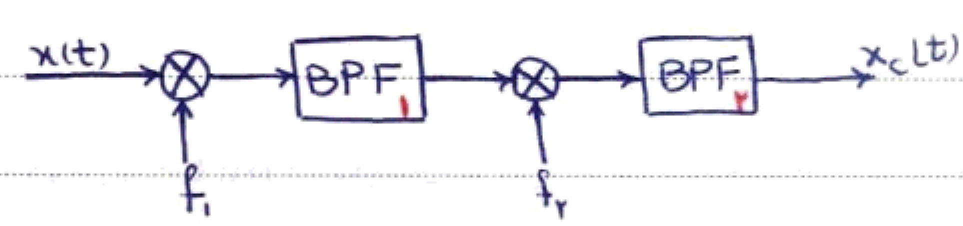
تولید $\hat{x}(t)$ کاری غیرممکن است زیرا سیستم سازنده آن غیرعلی است اما می‌توان با تقریب‌هایی به آن دست یافت.

تولید فیلتر کاملاً ایده‌آل نیز کاری مشکل است، درعمل باید با تقریب این فیلتر را ساخت.

## ساختار مدولاتورهای SSB :




phase-shift Method

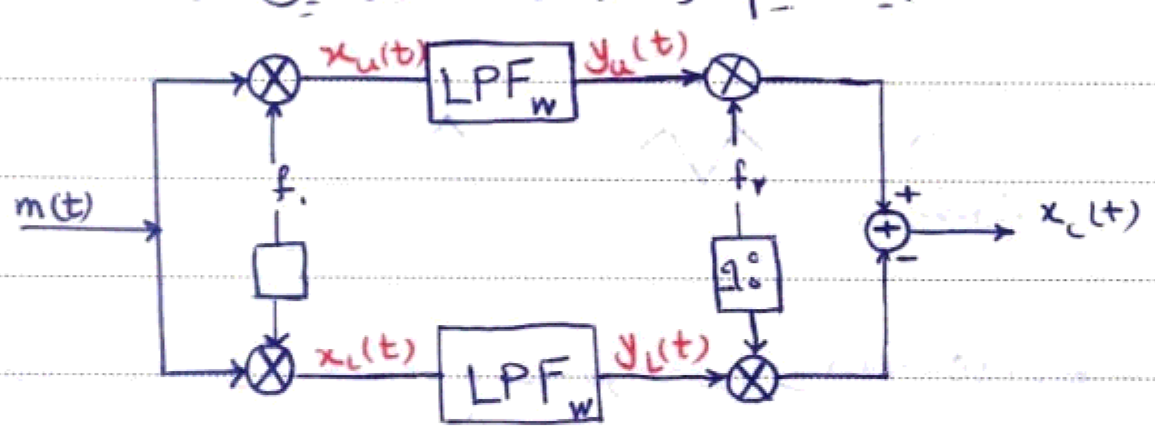



Two-step SSB generation

مثال :

$m(t) = \cos 2\pi f_m t$

می‌خواهیم با ساختار زیر به سیگنال SSB دست پیدا کنیم. پارامترهای ساختار را تعیین کنید.



$x_u(t) = m(t)\cos 2\pi f_1 t = \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_1 t = \frac{1}{2}\left[\cos 2\pi(f_1+f_m)t + \cos 2\pi(f_1-f_m)t\right]$

$x_L(t) = m(t)\sin 2\pi f_1 t = \cos 2\pi f_m t \sin 2\pi f_1 t = \frac{1}{2}\left[\sin 2\pi(f_1+f_m)t + \sin 2\pi(f_1-f_m)t\right]$

با فرض $\begin{cases} |f_1-f_m|<W \\ f_1+f_m>W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_u(t) = \frac{1}{2}\cos 2\pi(f_1-f_m)t \\ y_L(t) = \frac{1}{2}\sin 2\pi(f_1-f_m)t \end{cases}$

$x_c(t) = \frac{1}{2}\cos 2\pi(f_1-f_m)t \cos 2\pi f_2 t - \frac{1}{2}\sin 2\pi(f_1-f_m)t \sin 2\pi f_2 t = \cos 2\pi(f_1+f_2-f_m)t$

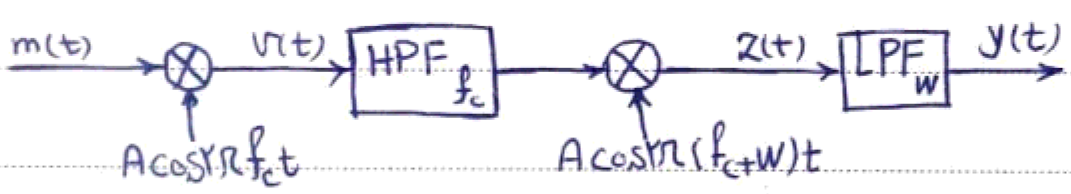
SSB.

$U x_c(t) = \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_c t - \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_c t = \cos 2\pi(f_c+f_m)t \Rightarrow f_c = -f_1-f_2$

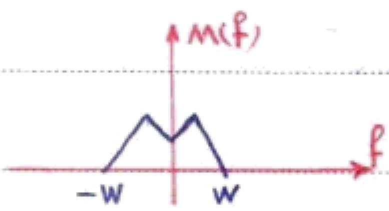
$L x_c(t) = \cos 2\pi(f_c-f_m)t \Rightarrow f_c = f_1+f_2$

$\rightarrow \begin{cases} |f_1-f_m|<W \\ f_1+f_m>W \end{cases}$

مثال:

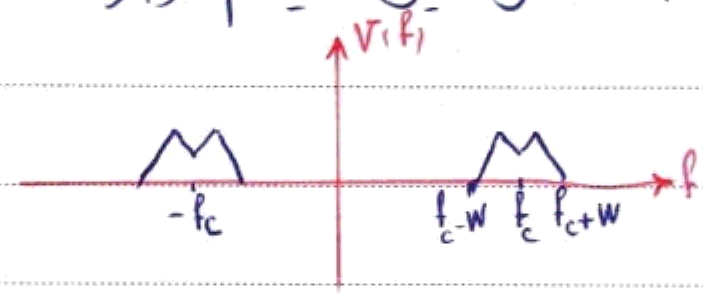



الف) رسم $y(f)$

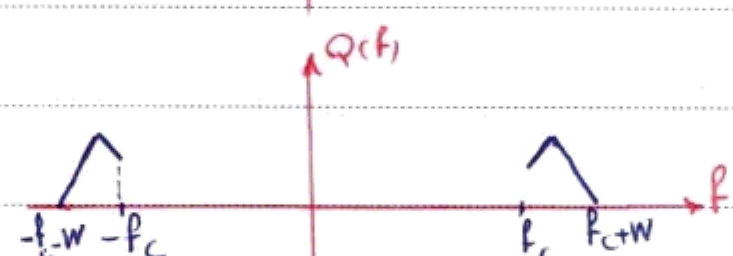


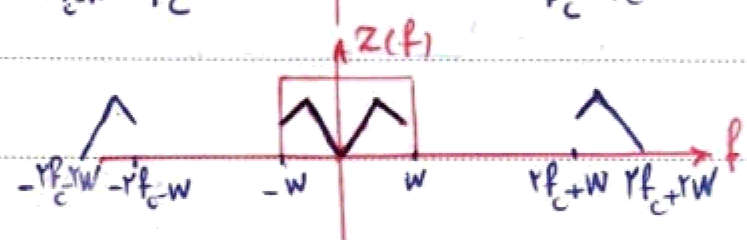

ب) آیا می‌توان با عبور مجدد $y(t)$ از این سیستم دوباره $m(t)$ را بدست آورد؟

$v(t) = m(t)A\cos 2\pi f_c t$




$Q(f) = H(f)\,V(f)$



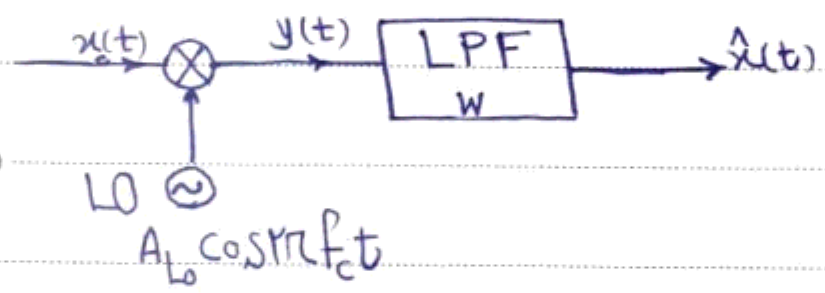

اگر دوباره خروجی را عبور دهیم همانطور که در بالا side-band ها جابجا شده‌اند دوباره نیز شاهد جابجایی
ست آوردن شکل اصلی البته با تغییری در دامنه خواهیم بود.

## روش‌های آشکارسازی در مدولاسیون‌های موج پیوسته خطی :

۱) روش سنکرون

۲) روش آشکارسازی پوش

## روش‌های آشکارسازی سنکرون :




فرض می‌کنیم فرکانس موج سینوسی محلی با فرکانس حامل یکی است به همین دلیل به آن روش سنکرون می‌گوییم.

$$x_c(t) = [k_c + k_\mu x(t)]\cos 2\pi f_c t - k_\mu x_q(t)\sin 2\pi f_c t$$

AM: $x_q(t)=0 \quad k_c = A_c \quad k_\mu = \mu A_c$

DSB: $x_q(t)=0 \quad k_c = 0 \quad k_\mu = A_c$

SSB: $x_q(t)=\hat{x}(t) \quad k_c = 0 \quad k_\mu = \frac{1}{2}A_c$

$$y(t) = A_{Lo}\, x_c(t)\cos 2\pi f_c t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}A_{Lo}\Big[(k_c + k_\mu x(t)) + \overbrace{(k_c + k_\mu x(t))\cos 2\pi 2 f_c t}^{\text{از فیلتر عبور نمی‌کند}} - \overbrace{k_\mu x_q(t)\sin 2\pi 2 f_c t}^{\text{از فیلتر عبور نمی‌کند}}\Big]$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2}A_{Lo}(k_c + k_\mu x(t)) \qquad \hat{x}(t) \xrightarrow{\text{خازن حذف DC}} \frac{1}{2}A_{Lo} k_\mu x(t)$$

حال در سر راه خازن حذف DC قرار می‌دهیم تا مقدار ثابت جمع شده با سیگنال را حذف کند. به همین علت فرض می‌کنیم خبر مقدار DC ندارد زیرا این مقدار در این مرحله حذف شده، در خروجی دیده نمی‌شود. پس این روش برای ارسال مقادیر DC مناسب نیست.

در اینجا مشکل همزمان کردن اسیلاتور کار سختی است برای رفع این مشکل نمونه ضعیف شده‌ای از سیگنال حامل را نیز همراه خبر می‌فرستیم تا گیرنده مشکلی برای سنکرون کردن نداشته باشیم.

مدولاسیون های موج پیوسته نمایی:

$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

$$\begin{cases} A(t) = A_c = cte \\ S_T = \frac{1}{2} A_c^2 \end{cases}$$

PM: $\varphi(t) = \varphi_\Delta x(t)$ $\qquad$ $\varphi_\Delta$ معرف حداکثر شیفت فاز تولید شده در اثر مدولاسیون است.

$|x(t)| \leqslant 1$

PM: $x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_\Delta x(t))$

$\theta_c(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t)$ (زاویه لحظه‌ای)

$$f_c(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\theta}_c(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \dot{\varphi}(t)$$

FM: $f_c(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

$|x(t)| \leqslant 1$ $\qquad$ $f_\Delta$ معرف حداکثر انحراف فرکانسی نسبت به فرکانس مرکزی $f_c$ است

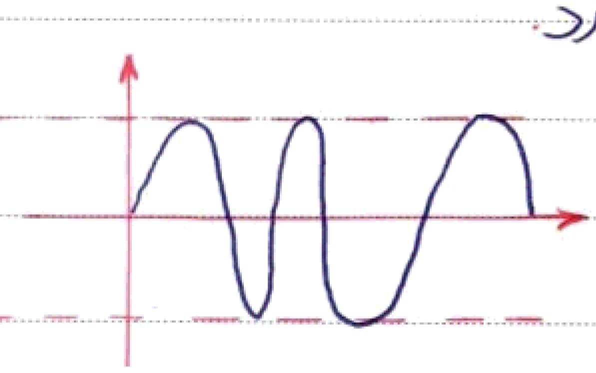
$$f_\Delta x(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\varphi}(t) \rightarrow \varphi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda$$

$$x_c(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda\right]$$

از آنجاییکه $x_c(t)$ در دو حالت FM و PM مشابه یکدیگر هستند پس می توان با گرفتن انتگرال از سیگنال ورودی از PM به FM رفت.

| | $\varphi(t)$ | $f(t)$ |
|---|---|---|
| PM | $\varphi_\Delta x(t)$ | $f_c + \frac{\varphi_\Delta}{2\pi} \dot{x}(t)$ |
| FM | $2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda$ | $f_c + f_\Delta x(t)$ |

از روی شکل مدوله شده نمی توان نوع مدولاسیون را تعیین کرد.



(اطلاعات در عبور از صفرها نهفته است و در اینجا از دامنه نمی توان اطلاعاتی از خبر را بدست آورد.

## پهنای باند مدولاسیون های نمایی :

در اینجا چون دامنه سیگنال مدوله شده ثابت است، پس $S_T$ ثابت است.

مدولاسیون های نمایی پهنای باند زیادی را اشغال می کنند.

$$x_c(t) = A_c\cos\varphi(t)\cos 2\pi f_c t - A_c\sin\varphi(t)\sin 2\pi f_c t$$

یا

$$x_c(t) = x_i(t)\cos 2\pi f_c t - x_q(t)\sin 2\pi f_c t \Rightarrow \begin{cases} x_i(t) = A_c\cos\varphi(t) \\ x_q(t) = A_c\sin\varphi(t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{تیلور}]{\text{بسط}} \begin{cases} x_i(t) = A_c\left[1 - \dfrac{\varphi^2(t)}{2!} + \dfrac{\varphi^4(t)}{4!} - \cdots\right] \\ x_q(t) = A_c\left[\varphi(t) - \dfrac{\varphi^3(t)}{3!} + \dfrac{\varphi^5(t)}{5!} - \cdots\right] \end{cases}$$

با فرض $|\varphi(t)| << 1 \Rightarrow \begin{cases} x_i(t) = A_c \\ x_q(t) = A_c\varphi(t) \end{cases}$

مولفه های هم فاز و متعامد برای تقریب باند باریک

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c\cos 2\pi f_c t - A_c\varphi(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$\Rightarrow X_c(f) = \tfrac{1}{2}A_c\delta(f-f_c) + \tfrac{1}{2}A_c\delta(f+f_c) + \tfrac{j}{2}A_c\Phi(f-f_c) - \tfrac{j}{2}A_c\Phi(f+f_c)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_\Delta x(t) & PM \\ 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda & FM \end{cases} \Rightarrow \Phi(f) = \begin{cases} \varphi_\Delta X(f) & PM \\ -j f_\Delta \dfrac{X(f)}{f} & FM \end{cases} \rightarrow$$

در هر دو حالت پهنای باند $2W$ اشغال می شود.

در اینجا به هیچ عنوان نمی توانیم پهنای باند را از $2W$ کمتر کنیم.

* اثبات می شود که اگر از تقریب باند باریک استفاده نکنیم آنگاه پهنای باند حتماً بزرگتر از $2W$ خواهد بود.

## Tone Modulation:

$$\text{خبر باندپایه } x(t) = \begin{cases} A_m \sin 2\pi f_m t & PM \\ A_m \cos 2\pi f_m t & FM \end{cases} \qquad W = f_m \ll f_c$$

$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \overbrace{\underbrace{\beta \sin 2\pi f_m t}_{FM:\ 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}}^{PM:\ \varphi_\Delta x(t)}) \xrightarrow[\text{داریم}]{\text{در اینجا}} \beta = \begin{cases} \varphi_\Delta A_m & PM \\ \frac{f_\Delta}{f_m} A_m & FM \end{cases}$$

$$(\text{درحالت کلی})\ \beta = \begin{cases} \varphi_\Delta \max(x(t)) & PM \\ \frac{f_\Delta}{W} \max(x(t)) & FM \end{cases}$$

می‌خواهیم شرط باندباریک بودن را برقرار دهیم.

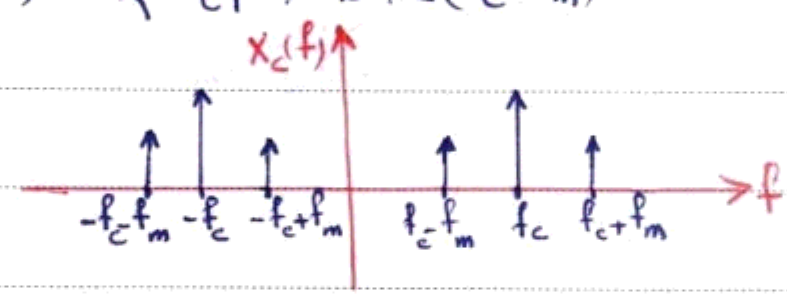
$$|\varphi(t)| \ll 1 \rightarrow |\beta \sin 2\pi f_m t| \ll 1 \xrightarrow{|\sin 2\pi f_m t| \leq 1} |\beta| \ll 1$$

$$\rightarrow x_c(t) = A_c \cos(\beta \sin 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t - A_c \sin(\beta \sin 2\pi f_m t) \sin 2\pi f_c t$$

$$\rightarrow x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \beta \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_c t$$

$$\rightarrow x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t + \tfrac{1}{2} A_c \beta \cos 2\pi (f_c + f_m)t - \tfrac{1}{2} A_c \beta \cos 2\pi (f_c - f_m)t$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم پهنای باند برابر با $2W$ می‌باشد.




$$\cos(\beta \sin 2\pi f_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n \text{ زوج}} 2 J_n(\beta) \cos(2\pi n f_m t)$$

به ترتیب فوق تابع غیرخطی را به صورت مجموع هارمونیک‌های نوشتیم که می‌توانیم تبدیل فوریه آنها را حساب کنیم

$$\sin(\beta \sin 2\pi f_m t) = \sum_{n \text{ فرد}} 2 J_n(\beta) \sin(2\pi n f_m t)$$

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda$$ بسل نوع 1 از مرتبه $n$ :

$J_n(\beta)$ به ازای مقادیر مختلف $n$ , $\beta$ در جدول قرار دارد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$x_c(t) = A_c\left[J_0(\beta) + \sum_{n\ \text{زوج}} 2J_n(\beta)\cos n\omega_m t\right]\cos\omega_c t - A_c\left[\sum_{n\ \text{فرد}} 2J_n(\beta)\sin n\omega_m t\right]\sin\omega_c t$$

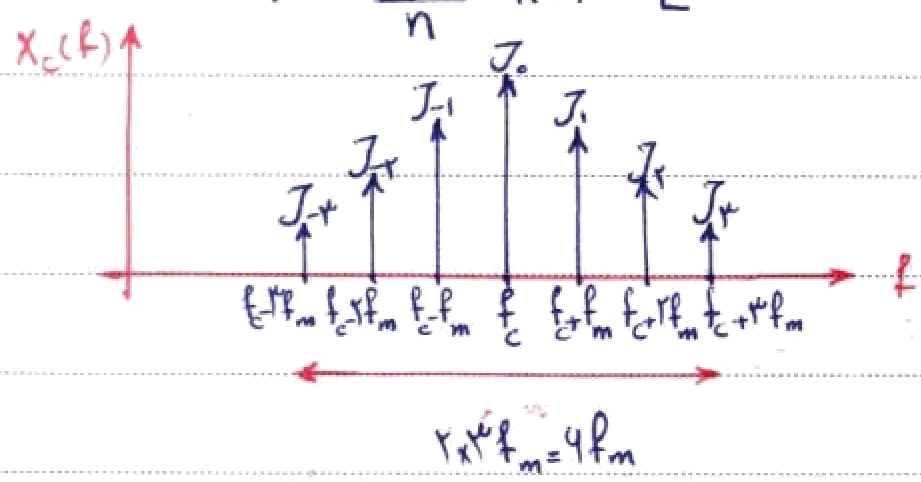
$$\Rightarrow x_c(t) = A_c J_0(\beta)\cos\omega_c t + A_c\sum_{n\ \text{زوج}} J_n(\beta)\left[\cos(\omega_c - n\omega_m)t + \cos(\omega_c + n\omega_m)t\right]$$

$$- A_c\sum_{n\ \text{فرد}} J_n(\beta)\left[\cos(\omega_c + n\omega_m)t - \cos(\omega_c - n\omega_m)t\right]$$

می‌دانیم: $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

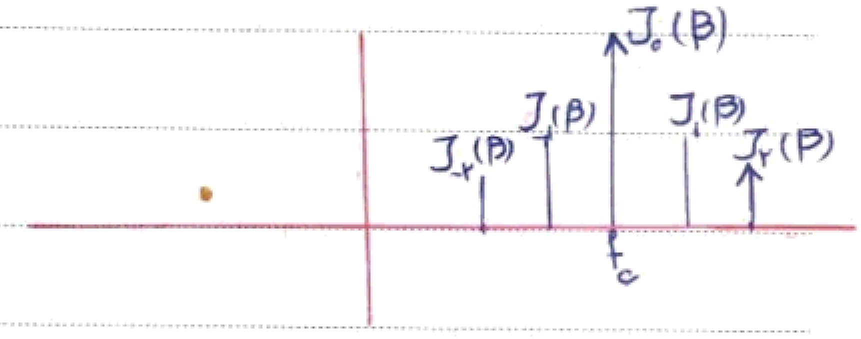
$$\Rightarrow X_c(f) = \tfrac{1}{2}A_c\sum_{n} J_n(\beta)\left[\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)\right]$$



مدولاسیون نمایی :

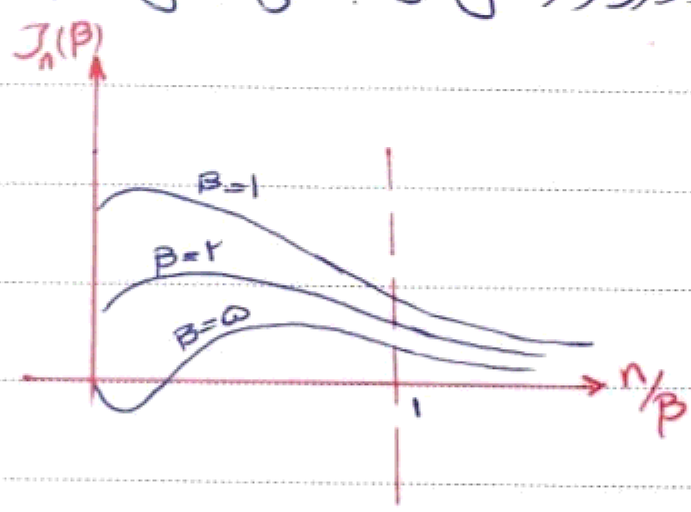
$$x_c(t)=A\cos(2\pi f_c t+\varphi(t)) \longrightarrow \begin{cases}\varphi(t)=\varphi_\Delta x(t) & PM\\ \varphi(t)=2\pi f_\Delta\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau & FM\end{cases}$$

$$x_c(t)=A_c\sum_n \cos(2\pi f_c t+2\pi f_m t)\,J_n(\beta)$$




سیگنال های FM و PM پهنای باند بیشتری بخود اختصاص داده اند

مسأله دیگر اینست که در فرکانس حامل مقداری از اطلاعات خبر وجود دارد و ارسال آن بامعنی ارسال خبر است.




$$|n/\beta| \gg 1 \Rightarrow |J_n(\beta)| \longrightarrow 0$$

$$|n/\beta|<1 \Rightarrow n_{max}=\beta$$

تعریف پهنای باند

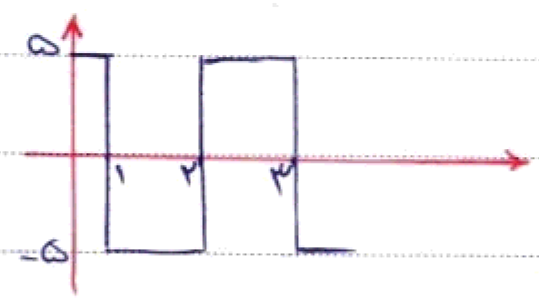
$\beta \gg 1$

پهن باند FM : $B_T = 2n f_m = 2\beta f_m$ .

قانون کارلسون برای تعریف پهنای باند $x_c$ :

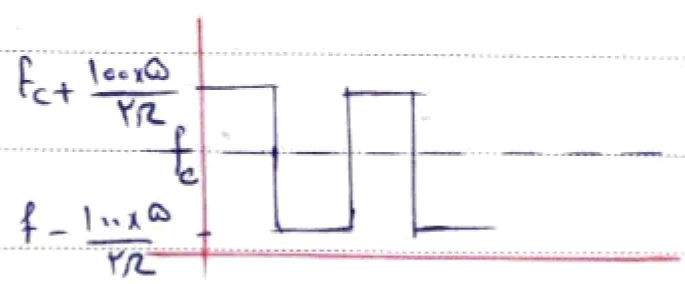
$$B_T=2(\beta+1)f_m^{W}$$

مثال :




$$x_c(t)=100\cos(\underbrace{2\pi f_c t+100\int m(\tau)d\tau}_{\theta_c})$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\dot{\theta}_c=f_c+\frac{100}{2\pi}m(t)$$




$$\Delta f_{max}=\frac{5\times100}{2\pi}$$

مثال:

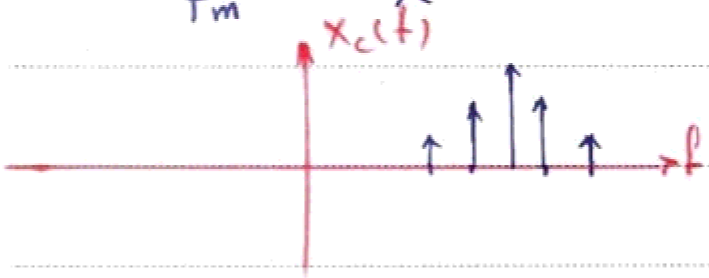
$m(t)=10\cos 14\pi t$

$x_c(t)=10\cos\left[4000\pi t+2\pi f_\Delta\int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right]$ , $f_\Delta=10$

سگنال فوق را به یک BPF داده، می‌خواهیم ببینیم توان در خروجی چند درصد توان سگنال است.

BPF: $f_c=3000$ $BW=42\ Hz$

$\beta=\dfrac{f_\Delta A_m}{f_m}=\dfrac{10\times10}{8}=12{,}5$




خروجی BPF

ضربه‌ها به ازای $n=-4\ldots4$ عبور پیدا می‌کنند

$$P_o=\frac{10^2}{2}J_0^2(\beta)+2\sum_{i=1}^{4}\frac{10^2}{2}J_i^2(\beta)=13{,}15$$

$|J_n(\beta)|=|J_{-n}(\beta)|$

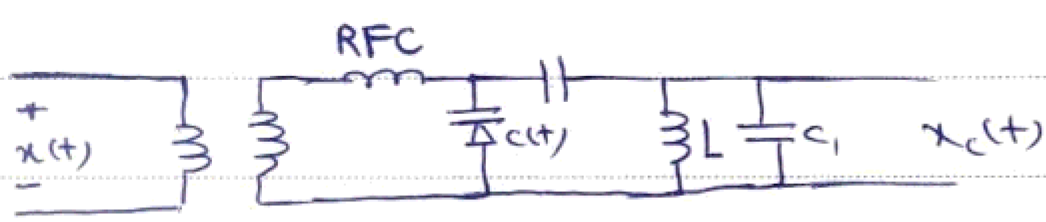
$P_{\text{سگنال مدوله‌شده}}=\frac{1}{2}A_c^2=50$

$\Rightarrow \dfrac{P_o}{P_c}\%=26{,}3$

## تولید و آشکارسازی سگنال‌های FM، PM:

۱ـ روش مستقیم برای تولید سگنال FM:

استفاده از VCO:




$C(t)=C_0-Cx(t)$

$$\dot\theta_c(t)=\frac{1}{\sqrt{LC(t)}}=\frac{1}{\sqrt{LC_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-\quad x(t)}}$$

$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC_0}}$ $\left|\frac{C}{C_0}x(t)\right|\ll1$

$\dot\theta_c(t)=\omega_0\left(1+\frac{C}{2C_0}x(t)\right)$ $f_\Delta=\frac{C}{2C_0}f_0$ $f_\Delta<0{,}004\,f_c$

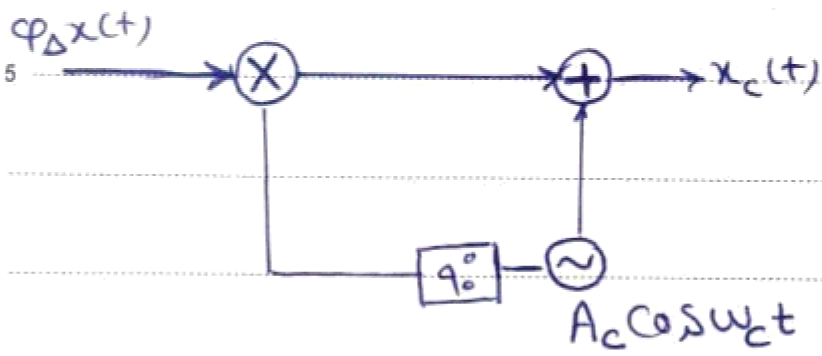
Subject:

Year. Month. Date. ( )

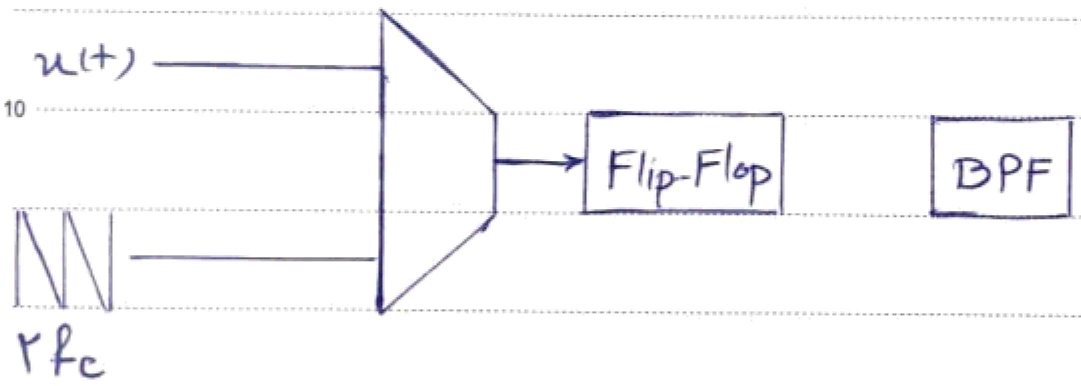
## روش غیرمستقیم: مدولاتور فاز

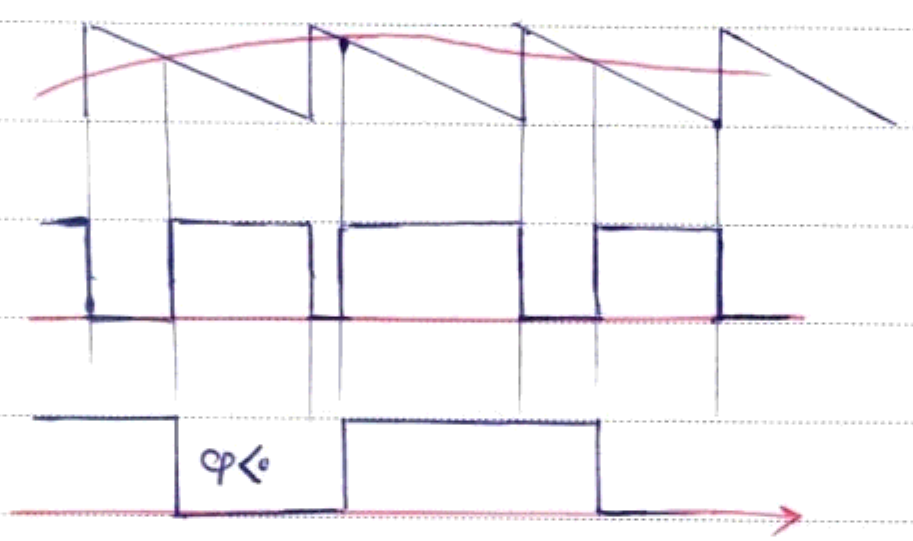
مدولاتور باندباریک:

$$x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \underbrace{\varphi(t)}_{\varphi_\Delta x(t)} \sin 2\pi f_c t$$




مدولاتور فاز:

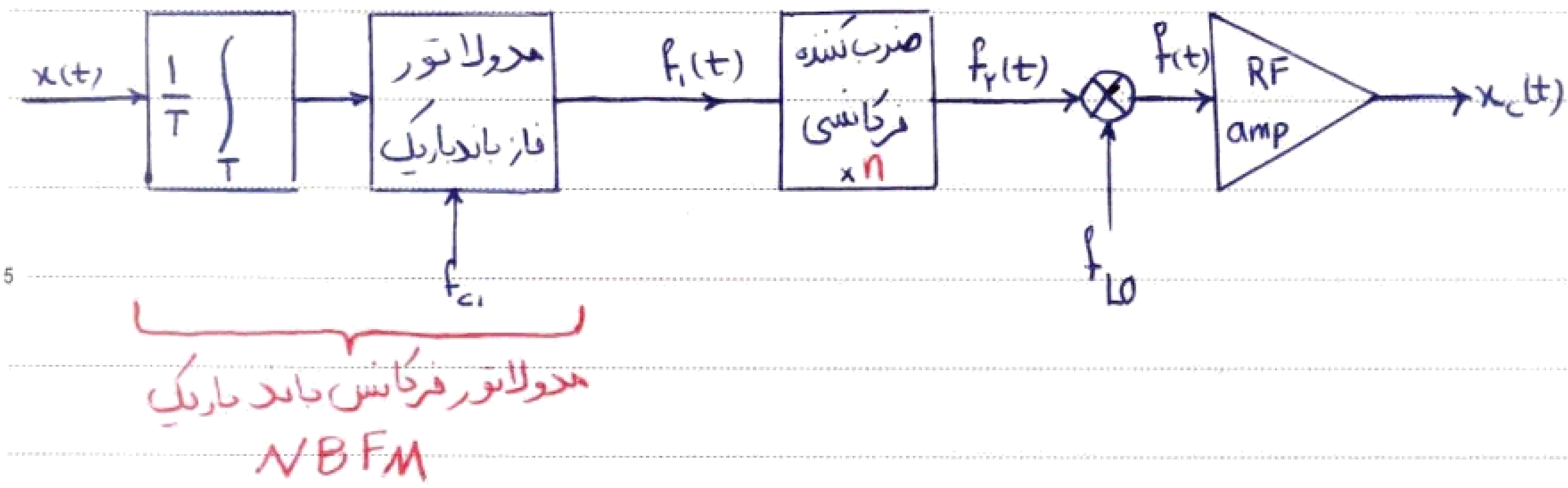



خروجی مقایسه

خروجی Flip-Flop

## تولید و آشکارسازی سیگنال FM :




در اینجا به‌جای مشاهده‌ی طیف فرکانسی در هر مرحله، فرکانس لحظه‌ای هر بلوک را مشاهده می‌کنیم.

می‌خواهیم در نهایت داشته باشیم: $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

$$\theta_1(t) = 2\pi f_{c1} t + \frac{\varphi_\Delta}{T}\int x(\tau)\,d\tau$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}(t) = f_{c1} + \frac{\varphi_\Delta}{2\pi T}x(t)$$

$$f_2(t) \xrightarrow[\text{n ضرب می‌شود}]{\text{زاویه‌ی لحظه‌ای در}} n f_1(t) = n f_{c1} + \frac{n\varphi_\Delta}{2\pi T}x(t)$$

$f(t)$ می‌تواند در حالت مجموع یا تفاضل $f_2(t)$ و $f_{LO}$ را داشته باشد. پس:

$$\left.\begin{cases} f(t) = n f_{c1} + f_{LO} + \frac{n\varphi_\Delta}{2\pi T}x(t) \\ f(t) = n f_{c1} - f_{LO} + \frac{n\varphi_\Delta}{2\pi T}x(t) \end{cases}\right\} \rightarrow \begin{cases} f_c = n f_{c1} \pm f_{LO} \\ f_\Delta = \frac{n\varphi_\Delta}{2\pi T} \end{cases}$$

از رابطه دوم n مشخص می‌شود و سپس در رابطه اول با توجه به n، $f_{c1}$ و $f_c$، $f_{LO}$ مشخص می‌گردد.

هدف: $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$

فیلتر RF یکی از فرکانس‌های لحظه‌ای را حذف و دیگری را برای ارسال مهیا می‌کند.

## آشکارسازی فرکانسی :

حال می خواهیم اطلاعات خبر را از سیگنال مدوله شده دریافت کنیم.

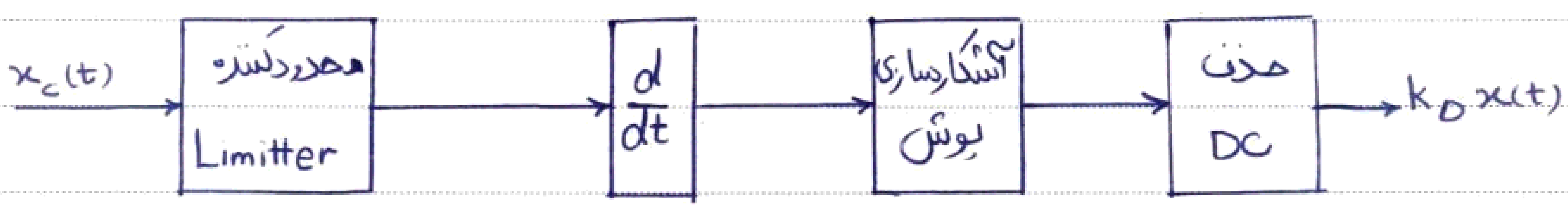
۱) در سیگنال مدوله شده اطلاعات در فاز وجود دارد و با مشتق گرفتن، از آن اطلاعات خبر به دامنه منتقل می شود. با اینکار می توانیم با استفاده از آشکارساز پوش اطلاعات را بازیابی کنیم

مثال AM و FM :

$x_c(t)=A_c\cos(\theta_c(t)) \Rightarrow \dot{x}_c(t)=-A_c\dot{\theta}_c(t)\sin(\theta_c(t))$

$\dot{\theta}_c(t)=2\pi(f_c+f_\Delta x(t))$

$\dot{x}_c(t)=-2\pi A_c(f_c+f_\Delta x(t))\sin(\theta_c(t))$




دسته دیگری از آشکارسازها مشتق را با تقریب حساب می کنند. به این روش Phase-Shift discriminator

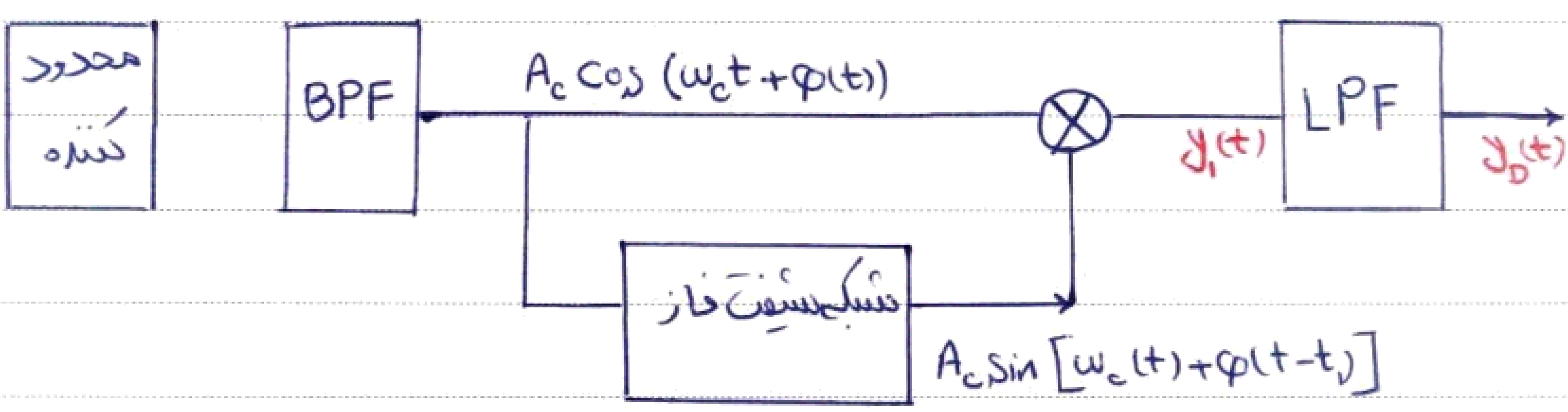
اساس این روش تقریب زدن مشتق به صورت مقابل است.

$\dot{v}(t)=\lim_{t_1\to 0}\frac{v(t)-v(t-t_1)}{t_1}$

FM: $\dot{\varphi}(t)=2\pi f_\Delta x(t)$ , $x_c(t)=A_c\cos(2\pi f_c t+\varphi(t))$

تقریب : $\varphi(t)-\varphi(t-t_1)=t_1\dot{\varphi}(t)=2\pi f_\Delta t_1 x(t)$

برای پیاده سازی $\varphi(t)$ و $\varphi(t-t_1)$ از ساختار زیر بدست می آید.



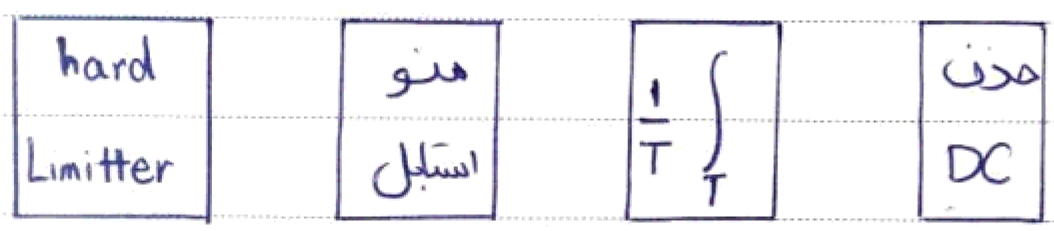

$y_1(t)$ : $\sin(2\omega_c t+\varphi(t)+\varphi(t-t_1))$ , $\sin(\varphi(t)-\varphi(t-t_1))\simeq\varphi(t)-\varphi$

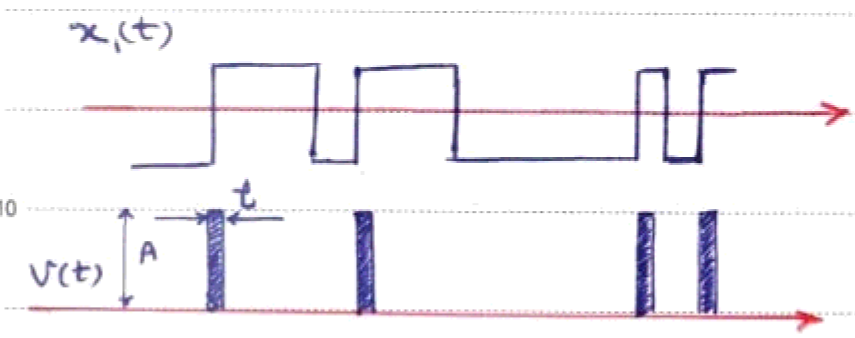
$y_D(t)\propto 2\pi f_\Delta t_1 x(t) \Rightarrow y_D(t)=k_D f_\Delta x(t)$

## Zero-Crossing

## ۳_ آشکارساز عبور از صفر:

مبنای کار در اینجا کاملاً متفاوت با مرحله قبل است. در اینجا عبور از صفرها آشکارسازی می‌شوند و با توجه به فواصل این عبور از صفرها فرکانس لحظه‌ای تخمین زده می‌شود.



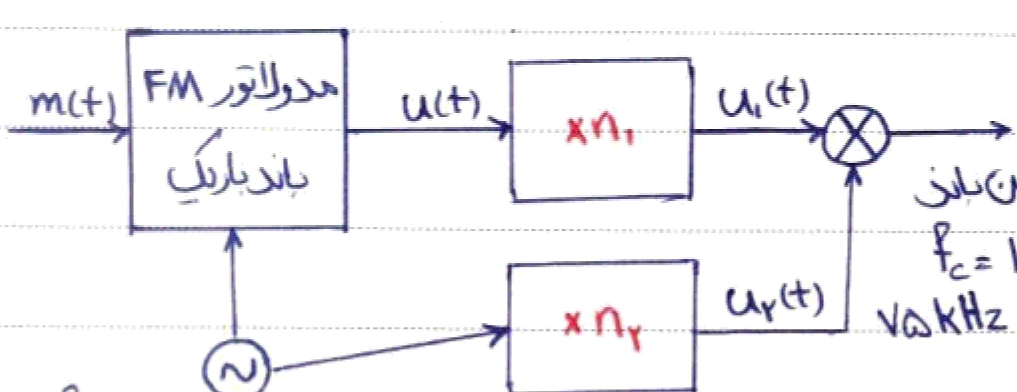




تعداد پالس‌ها در یک دوره‌ی T $\quad n_T = T f(t)$

$$\frac{1}{T}\int_T v(\tau)d\tau = \frac{1}{T} n_T A\tau = \frac{1}{T} T f(t) A\tau = A\tau f(t) = A\tau\left(f_c + f_\Delta x(t)\right) \Rightarrow y(t) = k_D x(t)$$

* T متناسب با پهنای باند خبر انتخاب می‌شود.

مثال:




FM پهن باند
$f_c = 104$ MHz
انحراف فرکانسی 75 kHz

$f_0 = 100$ kHz

$\beta_{FM}$ $\quad A\cos 2\pi f_0 t$

= FM باندباریک: حداکثر انحراف زاویه‌ای ۰/۱

$W = 15$ kHz

$n_1 = ? \quad , n_2 = ?$

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= A\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \\ u_1(t) &= A\cos(2\pi n_1 f_0 t + n_1\varphi(t)) \\ u_2(t) &= A\cos(2\pi n_2 f_0 t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(t) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi(n_1+n_2)f_0 t + n_1\varphi(t)) + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi(n_1-n_2)f_0 t + n_1\varphi(t))$$

هدف: $y(t) = A\cos(2\pi f_c t + f_\Delta \varphi_1(t))$

$$\left.\begin{array}{l} FM:\ \beta = \dfrac{f_\Delta}{W} \\ f_\Delta\text{: ناشی از FM باندباریک} \end{array}\right\} \Rightarrow f_\Delta = ٠/١ \times ١٥ = ١/٥ \ kHz$$

ابتدا انتخاب می‌کنیم کدام یک از حملات $y(t)$ را نگه داریم، پس داریم:

$$۷۵ = n_1 \times ١/٥ \Rightarrow n_1 = ٥٠$$

$$٢\pi(n_1 + n_2) f_0 = ٢\pi f_c \Rightarrow n_2 = ٩٩٠$$

اگر بخواهیم در سیگنال نهایی حداکثر انحراف مجاز در فرکانس حامل $\pm ٢Hz$ باشد براین اساس حداکثر انحراف مجاز در اسیلاتور محلی مقدار است:

$$(n_1 + n_2)\Delta f_0 = \Delta f_{\text{حامل}} \Rightarrow \Delta f_0 = ٠/٠٠١٩ \ Hz$$

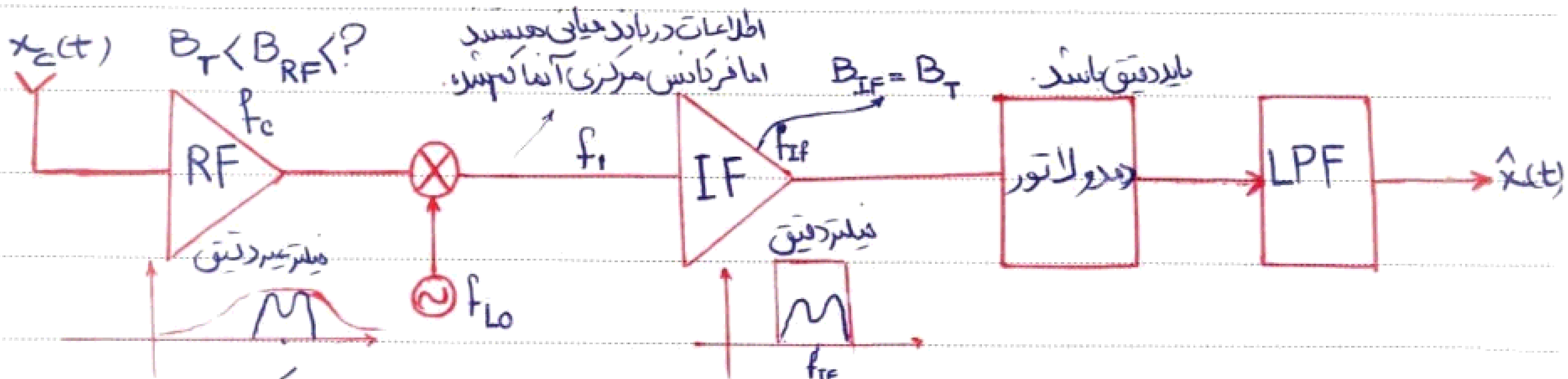
Subject: جلسه یازدهم
Year. Month. ۸ Date. ۱۲ ( )

## ساختار گیرنده‌ها در سیستم‌های مخابراتی (موج پیوسته)

### گیرنده‌های جبد کنشی (سوپرهتروداین):

$x_c(t)$ سیگنالی مدوله‌شده که ارسال می‌شود. این سیگنال با باند فرکانسی خیلی بالاست.

RF: هم فیلترینگ و هم تقویت را انجام می‌دهد.



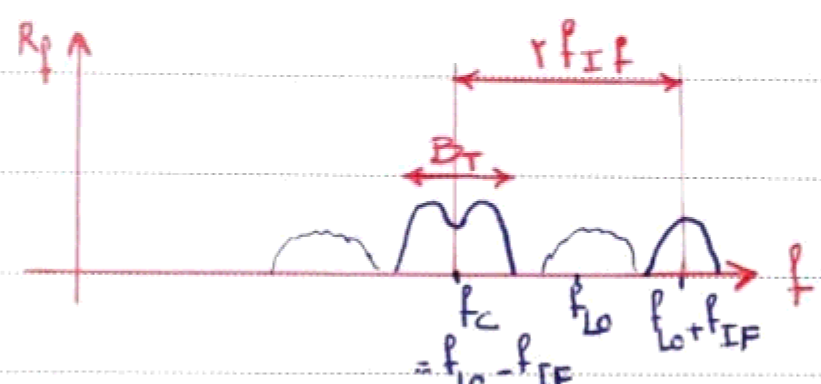

مزیت این روش اینست که اما باید سخت‌افزار دقیق خود را برای کار در یک فرکانس پایین‌تر طراحی کنیم.
فیلترینگ اول که غیردقیق نیز می‌باشد باعث می‌شود نویز در سیگنال کاهش یابد.

$$f_1 = |f_{LO} \pm f_c| \Rightarrow \begin{cases} |f_{LO}+f_c| : \\ |f_{LO}-f_c| : \end{cases}$$

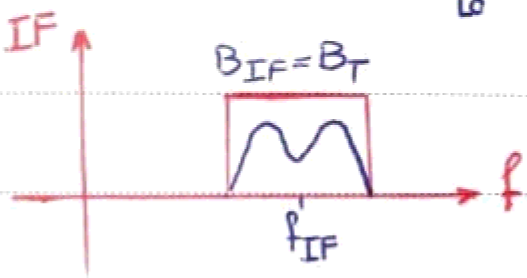
$|f_{LO}+f_c|$: این فرکانس را نمی‌خواهیم چون سیگنال باید به فرکانس مرکزی کمتر از $f_c$ برود.

$|f_{LO}-f_c|$: این فرکانس را به‌عنوان $f_{IF}$ انتخاب می‌کنیم.

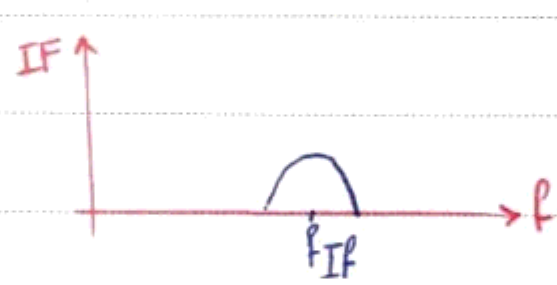
$f_c = f_{LO} - f_{IF} \rightarrow f_{IF} = f_{LO} - f_c$




بنابراین اگر شرط $B_{RF} < 2f_{IF}$ را نگذاریم آنگاه فرکانس‌های موجود در $f_{LO}+f_{IF}$ هنگام ضرب شدن در سینوسی به $f_{IF}$ منتقل شده و تداخل ایجاد می‌شود.




هرچه $f_{IF}$ بیشتر باشد فاصله بین تا تصویر بیشتر شده و در نتیجه فیلترینگ راحت‌تر خواهد شد.




$f'_c$: فرکانس تصویر

$f'_c = f_{LO} + f_{IF} = f_c +$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: گیرنده FM سوپرهترودایِن: ۸۸-۱۰۸ MHz — $f_{IF} < f_{LO}$

$88^{MHz} < f_c < 108^{MHz}$

$f_c'$ خارج از محدوده فوق باشد. حداقل $f_{IF}$ و محدوده تغییرات $f_{LO}$ ؟

$f_c' \notin [88,108] \Rightarrow 88 + 2f_{IF} > 108 \rightarrow f_{IF} > 10\ MHz$

$f_{LO} = f_c + f_{IF} \Rightarrow 88+10 < f_{LO} < 108+10 \Rightarrow 98^{MHz} < f_{LO} < 118^{MHz}$

Subject: جلسه دوازدهم

Year. Month. ۸ Date. ۲۴ ( )

## نویز:

## شناخت نویز:

## احتمال و متغیرهای تصادفی:

پیشامد تصادفی آزمایشی است که نمی‌توان مقدار قطع و یقینی آن را از قبل بیان کرد.

## Event : پیشامد (رخداد):

نتیجه‌ای است که در هر بار انجام یک آزمایش تصادفی ممکن است حاصل شود.

$$P_A = \frac{N_A}{N}$$

$N_A \rightarrow$ تعداد دفعاتی که A پیش آمده

$N \rightarrow$ تعداد دفعات انجام آزمایش

$P_A$: نتیجه ممکن آزمایش

## تئوری احتمال:

$S = \{S_i\}$ تمام پیشامدهای ممکن

شرط ها:

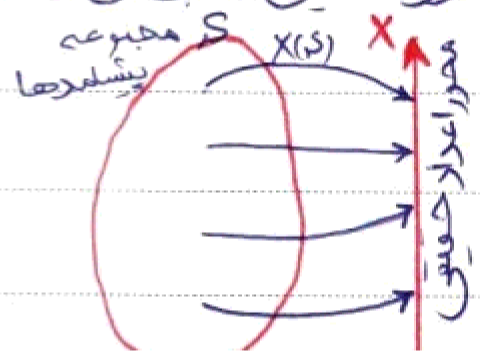
1) $P(S_i) > 0$

2) $P(S) = 1$

3) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ اگر $A_1$ , $A_2$ اشتراکی نداشته باشند.

## متغیر تصادفی:

ضابطه‌ای است که به هر نتیجه ممکن یک آزمایش تصادفی، یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

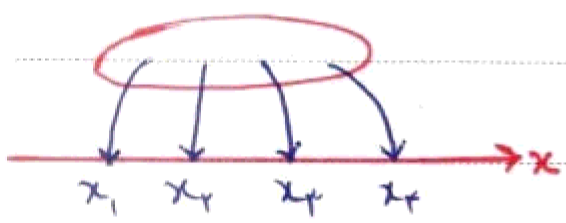



$$P(X = +\infty) = P(X = -\infty) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

## انواع متغیرهای تصادفی:

الف) متغیر تصادفی گسسته: اگر فضای $S$ دارای تعداد اعضای قابل شمارش باشد.




$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی $x$ : CDF $\quad F_X(x) = P(X \le x)$

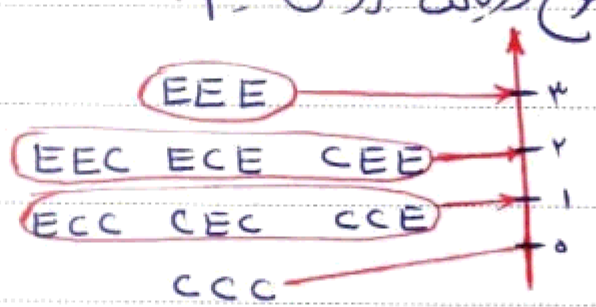
$$\text{خواص} \rightarrow \begin{cases} 0 \le F_X(x) \le 1 \\ F_X(-\infty) = 0 \\ F_X(+\infty) = 1 \end{cases}$$

با استفاده از تابع توزیع تجمعی می‌توانیم احتمال هر پیشامدی را حساب کنیم.

$$P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

مثال: احتمال ایجاد خطا در هر بیت مستقل از سایر بیت‌ها است، احتمال خطا برابر با $\frac{2}{5}$ است. حال بیتهای ۳ بیتی را ارسال می‌کنیم. می‌خواهیم اطلاعات دریافتی را از لحاظ نوع دریافت بررسی کنیم.




$$P(X=0) = \left(\tfrac{3}{5}\right)^3$$

$$P(X=1) = 3 \times \tfrac{2}{5} \times \left(\tfrac{3}{5}\right)^2$$

$$P(X=2) = 3 \times \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 \times \tfrac{3}{5}$$

$$P(X=3) = \left(\tfrac{2}{5}\right)^3$$

$$F_X(0) = P(X \le 0) = P(X=0) = \left(\tfrac{3}{5}\right)^3$$

$$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$F_X(2) = P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1 - P(X=3)$$

$$F_X(3) = 1$$

ب) متغیر تصادفی پیوسته:

این متغیر می‌تواند هر عددی در روی محور حقیقی به خود اختصاص دهد.

x متغیری پیوسته است.

$F_X(x)=P(X\leqslant x)$

$P(X=a)=0$

تابع چگالی احتمال PDF:

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

PDF تابعی غیرمنفی است که سطح زیر آن ۱ بوده و سطح زیر آن در بازه‌ی $[a,b]$ احتمال رخداد پیشامد در آن بازه است.

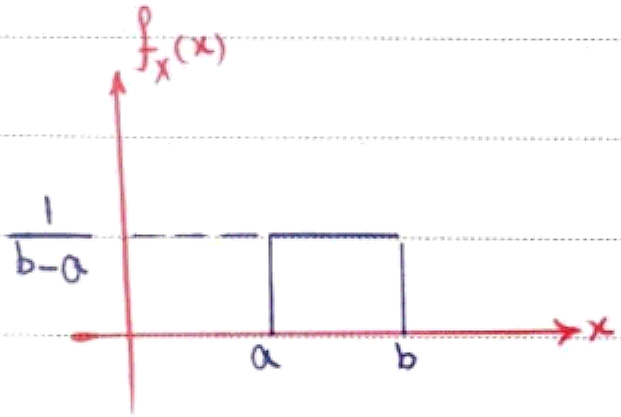
۱- $P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(\lambda)\,d\lambda$

۲- $f_X(x)\geqslant 0$

۳- $P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f_X(\lambda)\,d\lambda$

۴- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\lambda)\,d\lambda=1$

- متغیر با توزیع یکنواخت:




اگر دو متغیر تصادفی X و Y همزمان قابل مشاهده باشند: تابع توزیع مشترک $F_{XY}(x,y)=P(X\leqslant x, Y\leqslant y)$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

$$P(a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d)=\int_c^d\int_a^b f_{XY}(\lambda,\tau)\,d\lambda\,d\tau$$

$$f_{XY} = f_X(x) f_Y(y)$$

اگر متغیرهای $x, y$ وابسته باشند می‌توانیم تابع زیر را تعیین کنیم.

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} & f_X(x) \neq 0 \\ 0 & f_X(x) = 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, \lambda)\, d\lambda$$

به این تابع چگالی احتمال PDF کناری می‌گوییم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

میانگین آماری : $X, f_X(x)$

ممان اول $\quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

ممان n-ام $\quad E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx$

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

$E(CX) = CE(X)$ $\qquad$ $E(C+X) = C + E(X)$

$Var(CX) = C^2 Var(X)$ $\qquad$ $Var(C+X) = Var(X)$

تابع مشخصه :

$$\phi_X(v) = E(e^{jvX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} f_X(x)\,dx$$

$v = 2\pi t$

$x = f$

$$\Longrightarrow \phi_X(2\pi t) = F^{-1}\{f_X(f)\}$$

مثال: می خواهیم تابع چگالی احتمال برای $f_Z$ به دست آوریم.

$X, Y$ مستقل از هم $f_X(x)$ , $f_Y(y)$ , $Z = X + Y$

$$\phi_Z(v) = E(e^{jvZ}) = E(e^{jvX} e^{jvY}) \xrightarrow[\text{استقلال}]{\text{با توجه به شرط}} E(e^{jvX})\,E(e^{jvY}) \rightarrow$$

$$\phi_Z(v) = \phi_X(v)\,\phi_Y(v) \Rightarrow f_Z(\lambda) = f_X(\lambda) * f_Y(\lambda)$$

کوواریانس (هم پراشی):

$E(X) = m_x$

$E(Y) = m_y$

$$\Longrightarrow Cov(X,Y) = E[(X - m_m)(Y - m_y)]$$

ضریب همبستگی $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$$\begin{cases} \sigma_X^2 = Var(X) \\ \sigma_Y^2 = Var(Y) \end{cases}$$

شرط ناهمبسته بودن: $X, Y$ ناهمبسته $\longrightarrow Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow E(XY) = E(X)\,E(Y)$

شرط مستقل بودن: $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$

فرض کنیم برای متغیر تصادفی $X$ ، تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ را داشته باشیم. حال می خواهیم برای $y = g(x)$ تابع چگالی احتمال را بدست آوریم.

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \Rightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

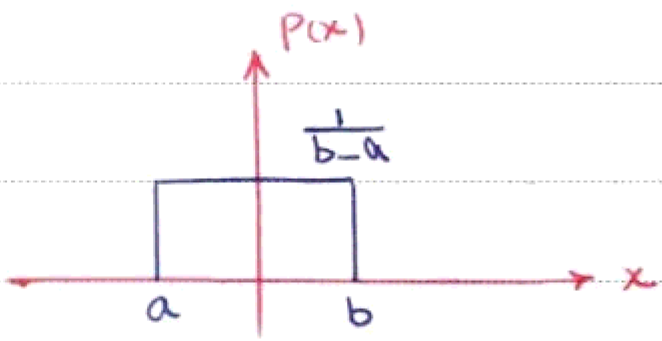
امتحان میانترم : چهارشنبه ۸۹/۹/۱۷

در نوشتن از این به بعد به‌جای $f_x(x)$ از $P(x)$ استفاده می‌کنیم.
برای ساده‌سازی، از تابع $P(x)$ به‌جای $f_x(x)$ استفاده می‌کنیم.
همچنین برای PDF توأم از $P(x,y)$ استفاده می‌کنیم.

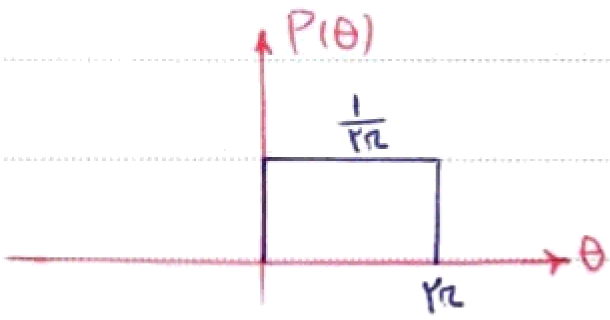
– به تعداد پدیده‌های موجود در طبیعت، تابع چگالی احتمال داریم.

تابع های چگالی احتمال مهم :

۱) PDF یکنواخت (Uniform PDF) :




مصداق این حالت روشن کردن سیگنال ژنراتور است که در هر حالت ما یک فاز اولیه خاص سیگنال را می بینیم.




$$\left.\begin{matrix} x = \underset{\updownarrow}{x_1} + \underset{\updownarrow}{x_2} \\ P_1(x_1) \quad P_2(x_2) \end{matrix}\right\} \longrightarrow P(x) = P_1(x) * P_2(x)$$

نظریه حد مرکزی . Central limit theorem

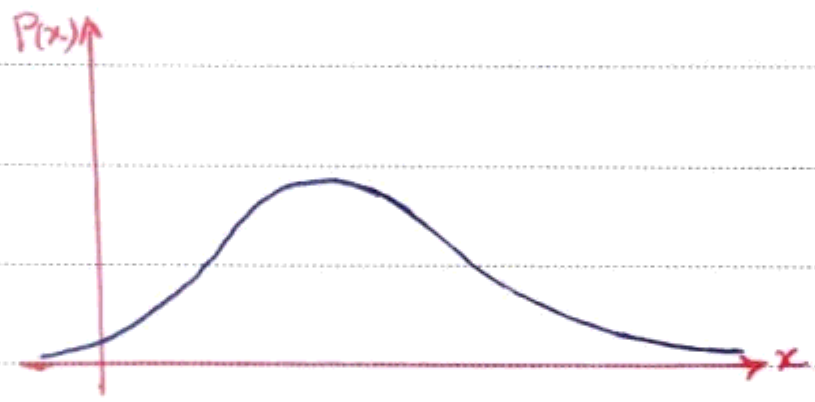
این نظریه می‌گوید اگر بینهایت تابع مثبت را با هم کانوالو کنیم، آنگاه حاصل تابعی گوسی خواهد بود.

اگر پدیده‌ای مجموع بینهایت پدیده مستقل باشد، آنگاه آن پدیده توزیعی گوسی دارد.

PDF گوسی:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

PDF گوسی ← یعنی بینهایت متغیر مستقل باهم جمع شده و این گونه PDF را شکل داده اند.



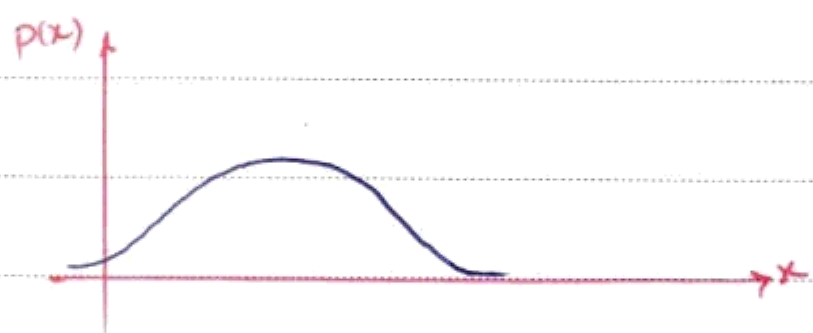

کانولوشن عملی نرم کننده است

تکلیف: تئوری حد مرکزی را با انتخاب تعدادی تابع مثبت و رسم کانولوشن آنها بدست آورید.

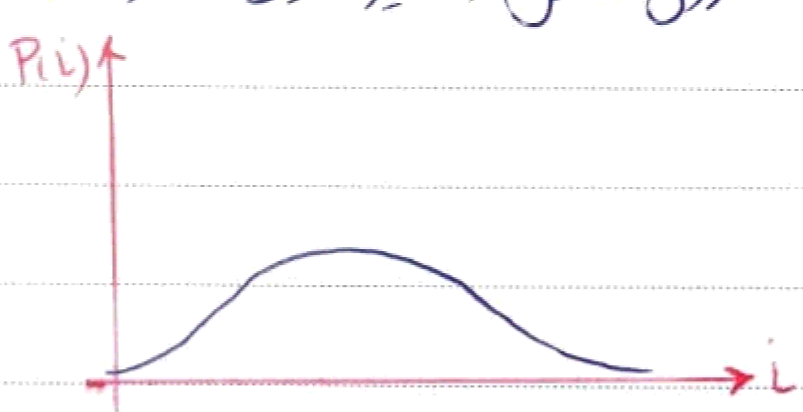
مصداق: افتادن برگ از درخت های موجود در یک باغ. هرکدام از این برگ ها مستقل از بقیه ممکن است بیفتد یا نیفتد.

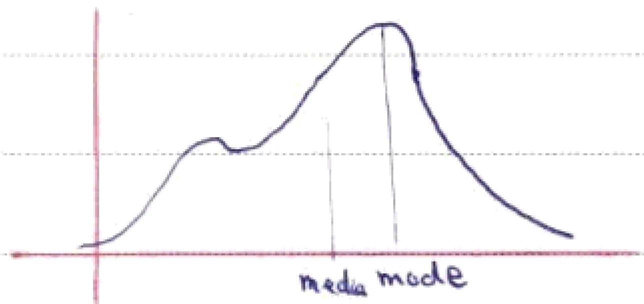
$x = x_1 + x_2 + \dots$

برگ شماره ۱




مصداق: در مقاومتی که هیچ گونه میدان الکتریکی یا مغناطیسی وجود ندارد، جریان تابعی گوسی است زیرا از حرکت بینهایت الکترون بوجود آمده و این الکترون مستقل از سایر الکترون ها حرکت می کند.






در PDF گوسی mode ، media , mean برهم منطبق هستند.

mode: نقطه مربوط به ماکزیمم PDF

media: محلی که سطح زیر منحنی را نصف می‌کند

mean: امید متغیر

## ۳- PDF رالی:

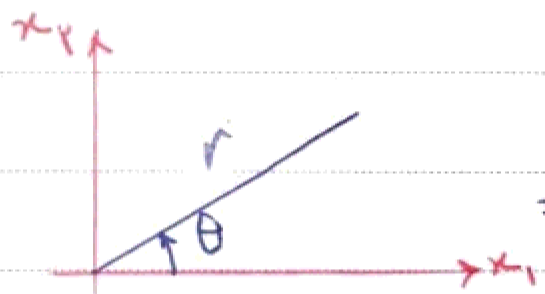
فرض می‌کنیم دو متغیر $x_1$ , $x_2$ را داریم که خواص زیر را دارند.

۱- مستقل از هم هستند

۲- گوسی شکل هستند

۳- $E\{x_1\} = E\{x_2\} = 0$

۴- $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma$




حال متغیر $z$ , $\theta$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

در واقع متغیر به صورت $z = x_1 + jx_2$ را تعریف می‌کنیم.

حال می‌خواهیم PDF مربوط به $r$ , $\theta$ است.

نگاشت یک به یک است یعنی هر $x_1$, $x_2$ یک $z$ یا یک $r$ و $\theta$ می‌دهد و برعکس.

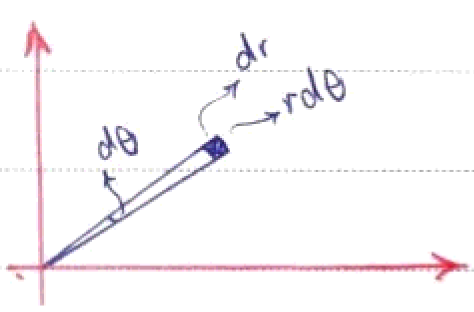
پس اگر با احتمال ۲۰٪، $x_1 \simeq 1$ , $x_2 \simeq 2$ باشد آنگاه با احتمال ۲۰٪، $r \simeq \sqrt{5}$ , $\theta \simeq \arctan 2$ و برعکس.

به شرط اینکه $x_1$, $x_2$, $r$ و $\theta$ در روابط فوق صدق کنند:

$$p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = p(r, \theta)\, dr d\theta$$

حال ارتباط بین المان‌های سطح را بدست می‌آوریم.

$$dx_1 dx_2 = r dr d\theta$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$dx_1 dx_2 = r\,dr\,d\theta$

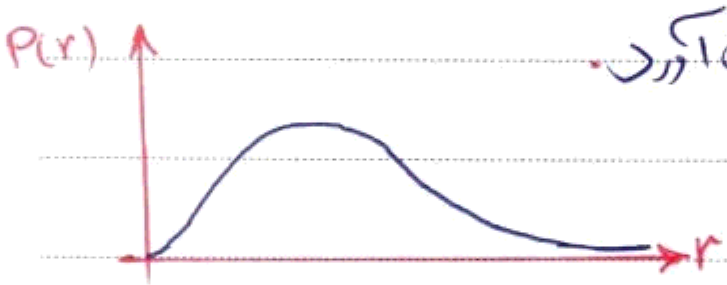
$p(x_1, x_2) = p(x_1)\,p(x_2)$

$\Longrightarrow p(x_1,x_2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2+x_2^2)}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r\,dr\,d\theta = p(r,\theta)\,dr\,d\theta \Longrightarrow p(r,\theta) = \dfrac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$

$p(\theta) = \displaystyle\int_0^\infty p(r,\theta)\,dr = \frac{1}{2\pi}$

$p(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} p(r,\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,d\theta = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$




تکلیف: mean ، mode , media تابع توزیع رالی را بدست آورد.

مصداق: زدن تیر به هدف x و y هر کدام دارای PDF گوسی هستند زیرا بینهایت عامل در محل آنها تأثیر دارند و در نتیجه دارای توزیع گوسی هستند بنابراین r حاصل دارای توزیعی رالی، θ دارای توزیعی یکنواخت است.

اگر بتوانیم اثبات کنیم که $P(x,y) = P(x)P(y)$ را داریم آنگاه می توانیم بگوییم x و y مستقل از هم هستند. برای اثبات رابطه فوق $P(x)$ و $P(y)$ را از روی انتگرال گیری درست آورده و بعد مقایسه می کنیم که آیا حاصل ضربشان برابر با $P(x,y)$ است یا نه.

اگر رابطه $E\{xy\} = E\{x\}E\{y\}$ برقرار باشد آنگاه می توانیم بگوییم x و y ناهمبسته هستند.

نشان دهید که اگر دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، حتماً ناهمبسته هم هستند ولی عکس قضیه صادق برای متغیرهای تصادفی گوسی

شود که اگر دو متغیر گوسی ناهمبسته باشند آنگاه مستقل نیز هستند

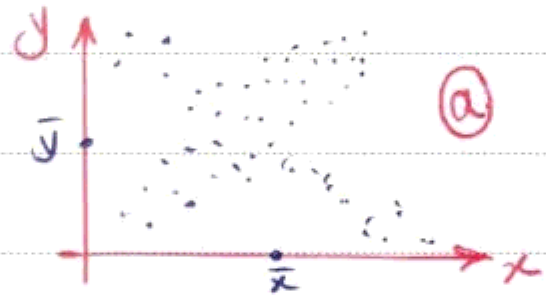
علت اینکه سراغ ناهمبسته بودن می‌رویم اینست که شرایط برقراری استقلال بسیار سخت است و معمولاً حاصل نمی‌شوند.

$$\mathrm{Cov}(x,y) \triangleq E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}$$

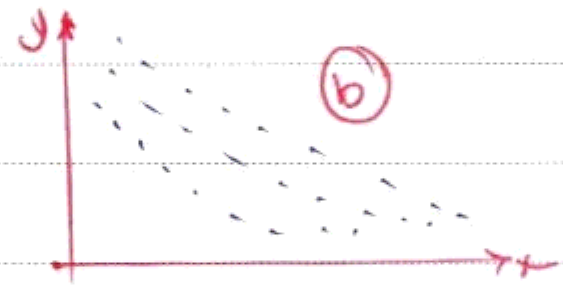
دو متغیر تصادفی $x$ و $y$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = \text{معدل دبیرستان} \\ y = \text{تعداد احتمالات عشق خوب در زمان دکتری} \end{cases}$$

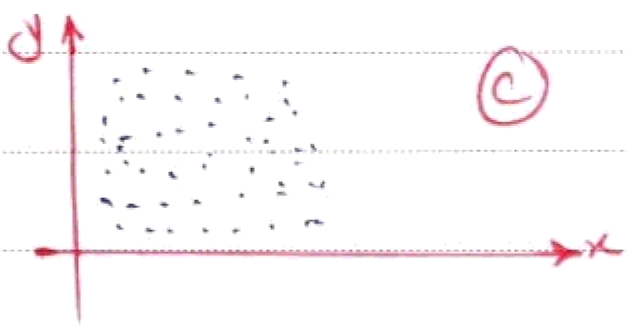
هر فرد از این افراد یک $x$ و یک $y$ دارد. برای هر فرد در صفحه‌ی $x-y$ یک نقطه داریم.




$$\begin{cases} x = \text{تعداد غیبت‌ها در کلاس} \\ y = \text{معدل} \end{cases}$$




$$\begin{cases} x = \text{نمره‌ی کفش} \\ y = \text{معدل دبیرستان} \end{cases}$$




a: بین $x$ ها معدل گرفته و بین $y$ ها نیز معدل می‌گیریم. نتیجه مقابل را داریم.

در اکثر موارد $\longrightarrow \begin{cases} x > \bar{x} \\ y > \bar{y} \end{cases}$

در اکثر موارد $\longrightarrow \begin{cases} x < \bar{x} \\ y < \bar{y} \end{cases}$

بنابراین در اکثر موارد $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ عددی مثبت است و در نتیجه cov نیز مثبت است یعنی اگر $x$ رو به افزایش است به احتمال خیلی زیاد $y$ نیز رو به افزایش است.

b:

$$E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} < 0$$

$$E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\} = 0$$

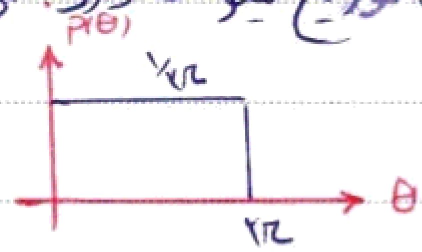
درصورتی می‌توانیم بگوییم دو تابع $x$ و $y$ از هم مستقل هستند اگر هر دو تابع دلخواه از $x$ و $y$ ناهمبسته باشند.

مثال:

دو متغیر تصادفی $x$ و $y$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم که $\theta$ یک توزیع یکنواخت دارد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $x$ و $y$ مستقل نیستند و ناهمبسته می‌باشند.

$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$




$$\bar{x} = E\{\cos\theta\} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta \, \cancelto{\frac{1}{2\pi}}{p(\theta)} \, d\theta = 0$$

$$\bar{y} = E\{\sin\theta\} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta \, \cancelto{\frac{1}{2\pi}}{p(\theta)} \, d\theta = 0$$

$$\overline{xy} = E\{\sin\theta\cos\theta\} = \frac{1}{2} E\{\sin 2\theta\} = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin 2\theta \, p(\theta) \, d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y} \Rightarrow \mathrm{cov}(x,y) = 0$$

تحقیق شد که دو متغیر مستقل نیستند.

۱) $x^2 + y^2 = 1$ ⇐ $x$ روی $y$ قیدی ایجاد می‌کند ⇐ دو متغیر مستقل نیستند

۲) PDF مربوط به $x$ و $y$ را بدست می‌آوریم سپس نشان می‌دهیم که $f(x,y) \neq f(x) f(y)$

برای اینکه معیاری از بزرگی یا کوچکی داشته باشیم ضریب کوواریانس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اثبات کنید:
$$-1 \le \rho = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \le 1$$

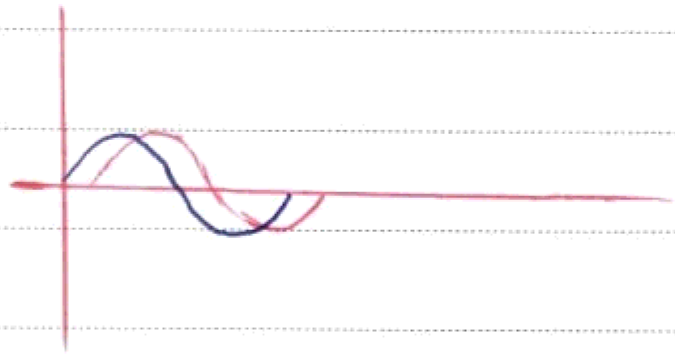
اگر $\rho = 1$ باشد آنگاه رابطه‌ی بین $x$ و $y$ کاملاً خطی می‌شود

$$|\rho| \le 1 \Rightarrow \begin{cases} |\rho| \to 1 & \text{: بین } x \text{ و } y \text{ رابطه‌ی خطی ایجاد می‌شود} \\ |\rho| \to 0 & \text{: } x \text{ و } y \text{ به سمت ناهمبسته بودن می‌روند.} \end{cases}$$

## فرآیند های تصادفی (فرآیندهای استوکاستیک):

فرض کنیم سیگنال مقابل توسط اسیلاتور تولید شده است. $\cos(\omega_0 t + \theta)$

$\theta$ نیز دارای توزیعی به صورت $P(\theta)$ می‌باشد.



با توجه به مقدار $\theta$ ما می‌توانیم بی‌نهایت سیگنال تولیدی داشته باشیم. و این سیگنال‌ها را خانواده می‌گوییم و به هر کدام از توابع یک تابع نمونه یا Sample Function می‌گوییم.

به مجموعه نیز خانواده یا Ensemble می‌گوییم.

مقدار تابع در لحظه $t_0$ به صورت $\cos(\omega_0 t_0 + \theta)$ است،

### فرآیند

فرآیند استوکاستیک یک تابع زمانی است که در هر لحظه از زمان یک متغیر تصادفی می‌دهد.

یک فرآیند استوکاستیک به صورت $x(t, s)$ نشان می‌دهیم.

- اگر مقدار $s$ برای ما معلوم شود، آنگاه $x(t, s)$ یک تابع معلوم می‌شود.
- اگر $t$ را مشخص کنیم آنگاه با یک متغیر تصادفی مواجهیم یعنی $x(t, s)$ متغیری تصادفی است

اگر $t$ و $s$ را هر دو معلوم کنیم، با یک عدد مواجهیم.

فرآیند استوکاستیک دترمینستیک فرآیندی است که اگر در یک لحظه مقدار تابع را بدانیم می‌توانیم تابع را به طور کامل مشخص کنیم. مثلاً در مورد تابع $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ اگر مقدار $\varphi$ را در یک لحظه بدانیم، می‌توانیم تابع را به طور مشخص بدست آوریم.

برای نمایش مقدار dc از نمایش $\langle g(t)\rangle$ استفاده می‌کنیم.

$$\langle g(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,dt$$

برای توابع متناوب، lim برداشته می‌شود، و به جای T نیز $T_0$ قرار می‌گیرد.

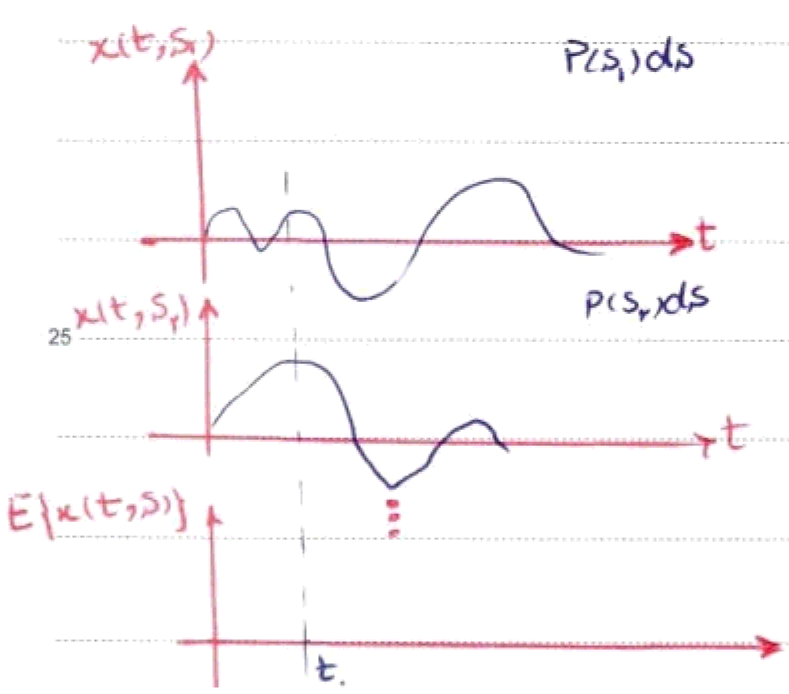
مقدار متوسط $x(t,S)$ برابر میانگین آماری تمام dcهای توابع مختلف است.

فرض می‌کنیم فرآیند تصادفی $x(t,S)$ داریم که S دارای توزیع $p(S)$ است.

| احتمال | تابع نمونه | مقدار dc |
|---|---|---|
| $p(S_1)dS$ | $x(t,S_1)$ | $\langle x(t,S_1)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,S_1)\,dt$ |
| $p(S_2)dS$ | $x(t,S_2)$ | $\langle x(t,S_2)\rangle$ |
| $\vdots$ | | |
| $p(S_n)dS$ | $x(t,S_n)$ | $\langle x(t,S_n)\rangle$ |

$$\overline{d.c} \triangleq E\Big\{\underbrace{\langle x(t,S)\rangle}_{\text{تابع S است.}}\Big\} = E\Big\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,S)\,dt\Big\} = \int_{\text{همه S}}\Big[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,S)\,dt\Big]p(S)dS$$

می‌توان گفت امید dcها برابر با dc تابع امید می‌باشد، یعنی:




در لحظه‌ی $t_0$ از تمام مقدار متغیرها معدل گرفته، در $E\{x(t_0,S)\}$ قرار می‌دهیم.

dc. تابع معدل

معدل همه dc های ممکن

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t,S)\,dt\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\int_{S\text{ها}}x(t,S)\,p(S)\,dS\right]dt$$

$$=\langle E\{x(t,S)\}\rangle$$

$$E\{\langle x(t,S)\rangle\}=\langle E\{x(t,S)\}\rangle$$

همواره می‌توانیم جای امید و dc را عوض کنیم.

$E\{x(t,S)\}$ دیگر تابعی استوکاستیک نیست.

مثال: فرآیند $x(t)=\cos(\omega_0 t+\theta)$ مفروض است. $E\{x(t)\}$ را در حالتهای زیر بدست آورید

الف) $\theta$ متغیر تصادفی با PDF یکنواخت بین ۰ تا $2\pi$

ب) $\theta$ یک متغیر تصادفی با PDF یکنواخت بین ۰ تا $\pi$

dc تابع را در هر دو حالت محاسبه کنید.

$$E\{x(t)\}=\int_{\theta\text{ها}}\cos(\omega_0 t+\theta)\,p(\theta)\,d\theta$$

$$\theta\in[0,2\pi]\Rightarrow\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\times\frac{1}{2\pi}\,d\theta=0$$

$$\theta\in[0,\pi]\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\,d\theta=-\frac{1}{\pi}\sin\omega_0 t$$

چون به همه‌ی فازهای موجود احتمال یکنواخت را نداده‌ایم پس $E\{x(t)\}$ مخالف صفر شد

$$d.c=\langle E\{x\}\rangle=\begin{cases}0 & \text{حالت اول}\\ 0 & \text{حالت دوم}\end{cases}$$

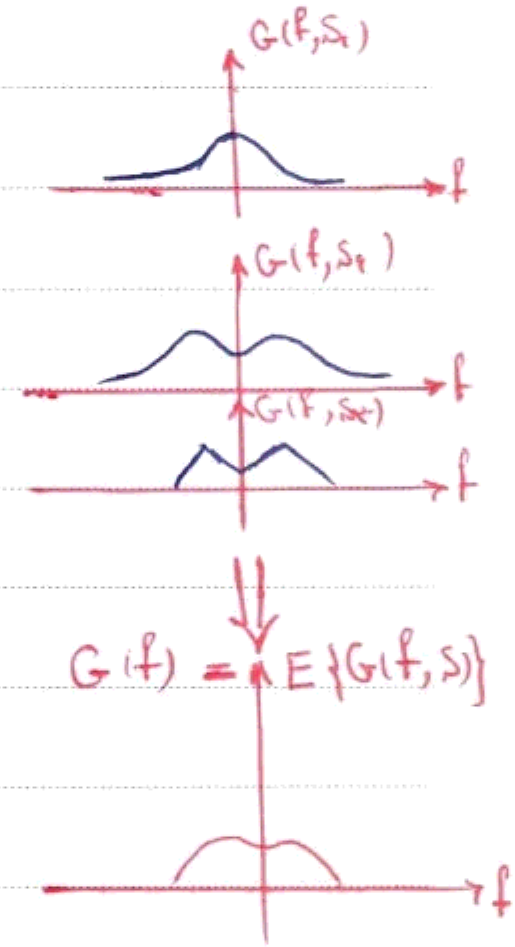
$x(t)$ : تابع از جنس توان $\Longrightarrow G(f) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$

$x(t,S)$

$p(S_1)dS \qquad x(t,S_1) \qquad \lim\limits_{T\to\infty} \frac{|X_T(f,S_1)|^2}{T} = G(f,S_1)$

$p(S_2)dS \qquad x(t,S_2) \qquad G(f,S_2)$

$p(S_3)dS \qquad x(t,S_3) \qquad G(f,S_3)$




$$G(f) = E\{G(f,S)\} = E\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f,S)|^2}{T}\right\}$$

چون نمی دانیم کدام SF رخ می دهد پس از تمام چگالی توان ها معدل گرفته و به عنوان تابع چگالی طیف توان معرفی می کنیم

$x(t,s)$

$\downarrow$

$E\{x(t,s)\}$ تابع مقابل دترمینیستیک می باشد.

$$E\{x(t,s)\} = \int_{s\text{ها}} x(t,s)\,p(s)\,ds$$

معدل آماری

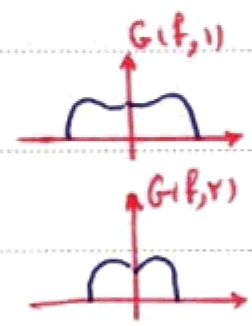
تابع تصادفی - معدل زمانی : $\langle x(t,s)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t,s)\,dt$

دو معدل فوق اصلاً قابل مقایسه نمی باشند.

$$\overline{dc} \triangleq E\{(dc)_s\} = E\{\overbrace{\langle x(t,s)\rangle}^{dc\ \text{s-این نمونه}}\} = \langle E\{x(t,s)\}\rangle$$

تابع چگالی توان:

$x(t,s)$ $\qquad G(f,s) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f,s)|^2}{T}$




$$G(f) = E\{G(f,s)\} = E\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X_T(f,s)|^2\}$$

$$\bar{P} = \int_{f=-\infty}^{\infty} G(f)\,df$$

* توان معدل همه ی توان ها است

تابع چگالی توان ، تابع چگالی توان امید نیست

توان برابر با توان نیست.

$$\bar{P} = \int_{f=-\infty}^{\infty} G(f)\,df = \int_{f=-\infty}^{\infty} \left( E\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f)|^2\}\right) df$$

$$\Rightarrow \bar{P} = E\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\underbrace{\int_{f=-\infty}^{\infty}|X_T(f,s)|^2\,df}_{\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t,s)\,dt}\} = E\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t,s)\,dt\} = E\{P_s\}$$

$P' = E\{x(t,S)\}$ توان سیگنال $= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left(E\{x(t,S)\}\right)^2 dt$

$\neq \langle E\{x^2(t,S)\}\rangle$

علت تفاوت ناشی از تفاوت $E\{x^2\}$ با $(E\{x\})^2$

تصادفی معین

$* \; E\{g_d(t)g_r(t)\} = g_d(t)E\{g_r(t)\}$

مطلوبست محاسبه توان آماری سیگنال های AM , DSB

فرض کنید توان متوسط آماری پیام برابر $P_m$ است.

$DSB(t) = A_c m(t)\cos 2\pi f_c t$

$P_{DSB} = \langle E\{A_c^2 m^2(t)\cos^2 2\pi f_c t\}\rangle = \langle A_c^2 \cos^2 2\pi f_c t \, E\{m^2(t)\}\rangle$

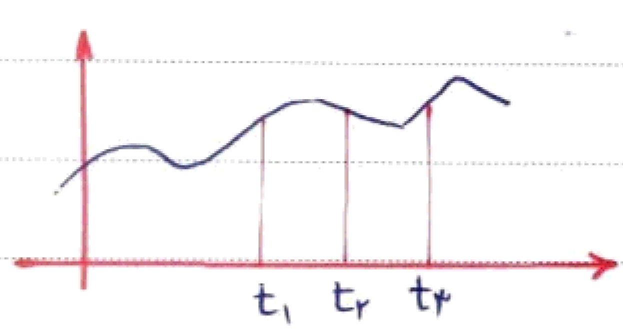
## فرآیندهای ایستان Stationary

فرآیندی است که در آن داشته باشیم

$E\{f(x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_N))\} = E\{f(x(t_1+\lambda), \dots, x(t_N+\lambda))\}$

اگر به ازای همه توابع f ممکن و هر دسته دلخواه از لحظه‌های $t_1, t_2, \dots, t_N$ و هر $\lambda$ حقیقی ، رابطه بالا برقرار باشد آنگاه سیگنال را ایستا از مرتبه ی N می گویند.

یعنی اگر در شکل مقابل فواصل $t_1t_2$ , $t_2t_3$ ثابت باشد آنگاه با جابه‌جایی مبدأ تغییری در خصوصیات آماری سیگنال بوجود نمی آورد.




$E\{x(t)\} = cte$

$E\{x^2(t)\} = cte$

$E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1+\Delta)x(t_2+\Delta)\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

WSS : Wide Sense Stationary

شرطها →
$$\begin{cases} E\{x(t)\} = cte \\ E\{x(t_1)\,x(t_2)\} = f(t_1 - t_2) \end{cases}$$

اگر شرایط فوق برقرار باشند، می‌گوییم فرآیند در مفهوم وسیع ایستان است.

مثال: تحقیق کنید که آیا فرآیند زیر ایستان است یا خیر، که در آن $\theta$ متغیری تصادفی در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ با PDF یکنواخت است؟

$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$

$$E\{x(t)\} = \int_{\theta\text{ها}} x(t,\theta)\, P(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) \times \frac{1}{2\pi}\, d\theta = 0$$ شرط اول برقرار

$$E\{x(t_1)\,x(t_2)\} = E\{A_0^2 \cos(\omega_0 t_1 + \theta) \cos(\omega_0 t_2 + \theta)\}$$

$$= \int_0^{2\pi} A_0^2 \cos(\omega_0 t_1 + \theta) \cos(\omega_0 t_2 + \theta)\, \cancel{P(\theta)}^{\frac{1}{2\pi}}\, d\theta = \frac{A_0^2}{2} \cos\omega_0 (t_1 - t_2)$$ شرط دوم برقرار

مثال: مسأله‌ی بالا را برای حالتی که $0 \leq \theta \leq \pi$ است بررسی کنید.

$$E\{x(t)\} = \int_0^{\pi} A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) \frac{1}{\pi} = -\frac{A_0}{2\pi} \sin\omega_0 t$$

امید $x_1, x_2$ را حساب کنید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۳: برای مسأله قبل $E\{x(t_1)x(t_2)\}$ را بدست آورید.

تابع همبستگی متقابل $x(t_1)$, $y(t_2)$ : Cross Correlation Function: CCF

$$E\{x(t_1)y(t_2)\} = R_{xy}(t_1,t_2)$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{x(t_1),y(t_2)}(\alpha,\beta)\,\alpha(t_1)\,\beta(t_2)\,d\alpha\,d\beta$$

فرض کنیم $x(t)$ و $y(t)$ دو فرآیند استوکاستیک باشند، آنگاه تعریف زیر را داریم:

تابع همبستگی متقابل در لحظه‌های $t_1, t_2$: $E\{x(t_1), y(t_2)\} = R_{xy}(t_1, t_2)$

در لحظه‌ی $t_1$ از $x$ نمونه گرفتیم و دیدیم زیاد است این یعنی با فرض $R_{xy}(t_1, t_2)$ بالا در لحظه $t_2$، $y$ نیز زیاد است.

حال کار فوق را برای یک سیگنال انجام می‌دهیم: $E\{x(t_1)x(t_2)\} = R_{xx}(t_1, t_2)$
به تابع فوق را تابع خودهمبستگی می‌گوییم. Auto Correlation Function

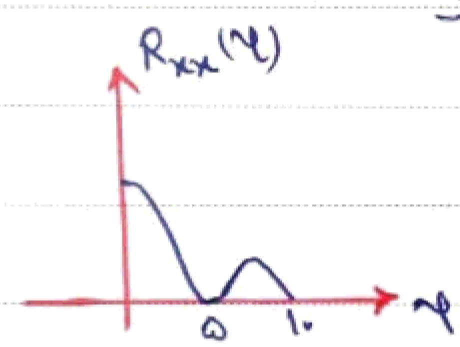
فرض کنید می‌دانیم $E\{x(t_1)x(t_1+5)\}$ زیاد است اگر بدانیم در لحظه $t_1$، $x$ زیاد است آنگاه می‌توانیم پیش‌بینی کنیم که در ۵ ثانیه‌ی بعد نیز $x$ زیاد خواهد بود.

معیار بزرگ یا کوچک بودن را با استفاده از مقدار $\rho$ بدست می‌آوریم.

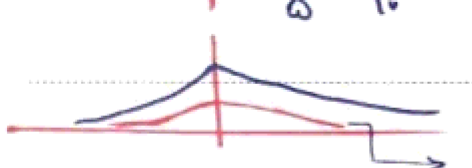
$E\{x(t+\tau)x(t)\} = R_{xx}(t+\tau, t)$
اگر تابع در مفهوم وسیع ایستان باشد آنگاه $R_{xx}$ فقط تابع $\tau$ خواهد بود، یعنی داریم:

$R_{xx}(t+\tau, t) = R_{xx}(\tau)$
$R_{xx}$ مقدار متوسط حاصل ضرب دو نمونه از سیگنال به فاصله $\tau$ ثانیه از هم است.

اگر فرآیند ایستان نباشد آنگاه $R_{xx}(t_1, t_2)$ تابع دو متغیر خواهد بود.




$\rightarrow$ در فواصل ۵ و ۱۰ ثانیه $R_{xx}$ نمی‌توان هیچ ید




برخلاف تابع PDF تابع $R_{xx}$ هرچه جمع‌تر باشد آنگاه ۲ تر است.

۲ترین فرآیند فرآیندی است که تابع خودهمبستگی آن یک ضربه باشد.

ماکزیمم مقدار $R_{XX}(\tau)$ برای فرآیندی ایستان در $\tau=0$ رخ می‌دهد.

**خواص تابع خودهمبستگی فرآیند ایستان:**

۱- $R_{xx}(\tau)$ تابع زوجی از $\tau$ است چرا ← جای دو فرآیند را عوض کنیم اثبات می‌شود.

۲- اگر $x(t)$ متناوب باشد با دوره‌ی تناوب $T_0$، آنگاه $R_{xx}(\tau)$ هم با همان دوره‌ی تناوب متناوب خواهد بود

$$R_{xx}(\tau)=E\{\overbrace{x(t+\tau)}^{=x(T_0+t+\tau)}x(t)\}=R_{xx}(\tau+T_0)\Rightarrow$$ $R_{xx}$ متناوب با دوره‌ی $T_0$

۳- $|R_{xx}(\tau)|\leqslant R_{xx}(0)$ زیرا هر لحظه با خود حداکثر همبستگی را دارد.

$$(E\{pq\})^2\leqslant E\{p^2\}E\{q^2\}\rightarrow$$ چرا؟

$$\begin{array}{l}p=x(t+\tau)\\ q=x(t)\end{array}\Rightarrow\left[E\{x(t+\tau)x(t)\}\right]^2\leqslant E\{x^2(t)\}E\{x^2(t+\tau)\}$$

$$\Rightarrow R^2_{xx}(\tau)\leqslant R^2_{xx}(0)\Rightarrow|R_{xx}(\tau)|\leqslant|R_{xx}(0)|$$

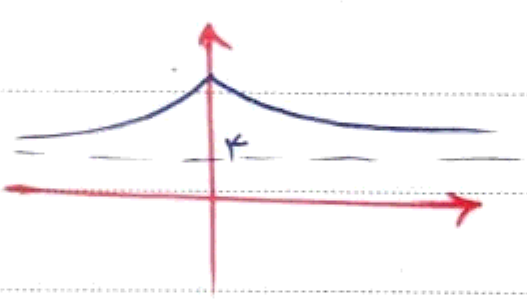
برای هر فرآیندی برای محاسبه توان داریم:

$$P=\langle E\{x^2(t)\}\rangle\xrightarrow{\text{فرآیند ایستان}}E\{x^2(t)\}=R_{xx}(0)\ \rangle.$$

۴- $P=R_{xx}(0)$

۵- برای فرآیندی ایستان و غیر متناوب:

$$\lim_{\tau\to\infty}R_{xx}(\tau)=(dc)^2$$




$\Rightarrow dc=2$

$$E\{x(t+\tau)x(t)\}=R_{xx}(\tau)$$

اگر سیگنال متناوب نباشد آنگاه رفتارش با رفتار خیلی قبلش متفاوت است

اما اگر متناوب باشد امکان دارد رفتار مشابه باشد

$$\lim_{\tau\to\infty} Cov\{x(t)\,x(t+\tau)\}=0 \Longrightarrow \lim_{\tau\to\infty} E\{x(t)x(t+\tau)\} = \underbrace{\lim_{\tau\to\infty} \underbrace{E\{x(t)\}}_{dc}\ \underbrace{E\{x(t+\tau)\}}_{dc}}_{}$$

چون تابع ایستان است.

$$\Longrightarrow \lim_{\tau\to\infty} R_{xx}(\tau) = (dc)^2$$

۶ـ تابع خودهمبستگی و چگالی طیف توان فرآیند زوج تبدیل فوریه هستند، یعنی: $R_{xx}(\tau) \to G(f)$

قضیه فوق را قضیه وینر ـ کینشتاین (Wiener-Kinchin)

از راههایی که قبلاً گفتیم $G(f)$ محاسبه نمی‌شود بلکه با روش فوق آن را بدست می‌آورند.

قضیه فوق هم برای فرآیندهای ایستان و هم غیر ایستان برقرار است

حال این قضیه را برای فرآیندهای ایستان اثبات می‌کنیم:

$$G(f) = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f,s)|^2\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\{|X_T(f,s)|^2\}$$

$\rightarrow$ با فرض اینکه می‌توانیم جای دو عملگر را عوض کنیم.

در اینجا فرض را این است که فرآیند حقیقی نیز هست.

$X_T(f,s) \longrightarrow x_T(t,s)$ * تکه ای از تبدیل فوریه نیست بلکه تبدیل فوریه قطعی است.

$$X_T(f,s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t,s)\, e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t,s)\, e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$X_T^*(f,s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\lambda,s)\, e^{j2\pi f t}\,d\lambda = \int_{-T/2}^{T/2} x(\lambda,s)\, e^{j2\pi f t}\,d\lambda$$

$$|X_T(f,s)|^2 = \int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{\lambda=-T/2}^{T/2} x(t,s)\,x(\lambda,s)\, e^{-j2\pi f(t-\lambda)}\,dt\,d\lambda$$

$$\Longrightarrow G(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{\lambda=-T/2}^{T/2} R_{xx}(t-\lambda)\, e^{-j2\pi f(t-\lambda)}\,dt\,d\lambda$$

$$\xrightarrow{t-\lambda=\tau} G(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{\tau=-T}^{T} R_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\,dt\,d(t-\tau)\right]$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{\tau=-T}^{T} R_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, dt\, d(t-\tau) = T\int_{-T/2}^{T/2} R_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$ : ثابت شد

$$\Rightarrow G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \Rightarrow R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$x(t)$ $\qquad R_{xx}(t+\tau, t) = f(t,\tau)$ اگر ایستان نباشد.

$$\overline{R_{xx}(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{xx}(t+\tau, t)\, dt \longleftrightarrow G(f) \quad *$$

ثابت کنید. $(*)$

$G_x(f)$

$R_{xx}(\tau)$

روابط آماری ورودی و خروجی یک سیستم LTI :

LTI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$R_{yx}(t+\tau, t) = E\{y(t+\tau)\, x(t)\} = ?$$

$$R_{yy}(t+\tau, t) = E\{y(t+\tau)\, y(t)\} = ?$$

$$E\{y(t)\} = ?$$

$$G_y(f) = ?$$

$$y(t) = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$* \; R_{yx}(t+\tau, t) = E\{y(t+\tau)\, x(t)\} = E\left\{x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t+\tau-\lambda)\, d\lambda\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E\{x(t+\tau-\lambda)\, x(t)\}}_{R_{xx}(\tau-\lambda)} h(\lambda)\, d\lambda = R_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

$$* \; R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

می‌دانیم: $R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$ چون زمان آنها هم باید قرینه شود.

Subject: ........................... Date: ...............

$*\quad E\{y(t+\tau)\,y(t)\} = E\left\{ y(t+\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda \right\}$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E\{y(t+\tau)\,x(t-\lambda)\}}_{R_{yx}(\tau+\lambda)}\, h(\lambda)\,d\lambda$

$R_{xx}(\tau) * h(\tau)$

$\uparrow$

$\lambda \to -\lambda \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(\tau-\lambda)\,h(-\lambda)\,d\lambda = R_{yx}(\tau) * h(-\tau)$

$\Rightarrow \quad R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$

$*\quad E\{y(t)\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda \right\} = \bar{x}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\,d\lambda}_{H(0)} = Cte$

$E\{x(t-\lambda)\} = \bar{x}$

$\bar{y} = H(0)\,\bar{x}$

پس اگر ورودی ایستان باشد خروجی هم ایستان است . (LTI)

$\therefore \quad G_y(f) = |H(f)|^2\, G_x(f)$

مثال) $\qquad G_y(f) = ?$

$x(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{\pi t}} \longrightarrow y(t) = \hat{x}(t)$

$-j\,\mathrm{sign}(f)$

$R_{xx}(\tau) \qquad\qquad R_{yy}(\tau)$

$G_x(f) \qquad\qquad G_y(f) = ?$

$\therefore \quad G_y(f) = G_x(f)\,|-j\,\mathrm{sign} f| = G_x(f)$

$\therefore \quad R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = R_{xx}(\tau)$

$$R_{\hat{x}x}(\tau) = R_{xx}(\tau) * \frac{1}{\pi t} = \hat{R}_{xx}(\tau)$$

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = R_{\hat{x}x}(-x) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$$

$\therefore$ $R_{x\hat{x}}(\tau)$ تابع فردی است.

$$R_{\hat{x}x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E\{x(t)\,\hat{x}(t)\} = 0$$

$R_{yx}(\tau) \longleftrightarrow G_{yx}(f)$ هیچ تعبیر فیزیکی ندارد.

$$\Rightarrow G_{yx}(f) = G_x(f)\, H(f)$$

برای هر $\quad R_{yx}(0) = E\{x(t)\, y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{yx}(f)\, df$

$\therefore \quad R_{yx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\, H(f)\, df$ مهم

$$E\{\hat{x}(t)\} = E\left\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\right\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\lambda}\, x(t-\lambda)\, d\lambda\right\}$$

$= \bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\lambda}\, d\lambda = 0$ برای ایستان

مثال) برای سیگنالهای AM و DSB و SSB توان متوسط آماری را بدست آورید. (برحسب توان پیام)

$$\bar{P} = \{\langle x^2(t)\rangle\}$$

① اگر چگالی طیف توان $P = \int_{-\infty}^{+\infty}$

② تابع خود همبستگی را دادند مقدار آن در صفر را بدست می آوریم.

③ فرمول فوق

DC پیام را صفر فرض می کنیم. $m(t)$ $P_m$

$$DSB(t) = A_c m(t) \cos 2\pi f_c t$$

دیگر ایستان نیست.

$$\bar{P} = \langle E\{A_c^2 m^2(t) \cos^2 2\pi f_c t\}\rangle = \langle A_c^2 \cos^2 2\pi f_c t \; \underbrace{E\{m^2(t)\}}_{P_m}\rangle$$

$$= P_m \langle A_c^2 \cos^2 w_c t\rangle \Rightarrow P_{DSB} = \frac{A_c^2}{2} P_m$$

مثال) $P(\theta)$ ← متغیر تصادفی $\theta$ $y(t) = x(t)\cos(w_0 t + \theta)$

نشان دهید توان $y(t)$ نصف توان $x(t)$ است.

$$AM(t) = \underbrace{A_c(1 + \mu m(t))}_{g(t)} \cos 2\pi f_c t$$

چون $m(t)$ ایستان است $g(t)$ هم ایستان است.

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_g \Rightarrow P_g = \langle E\{A_c^2[1 + 2\mu m(t) + \mu^2 m^2(t)]\}\rangle$$

$$= \langle A_c^2 + A_c^2 \mu^2 P_m\rangle = A_c^2(1 + \mu^2 P_m)$$

$$\Rightarrow P_{AM} = \frac{A_c^2(1 + \mu^2 P_m)}{2}$$

از روش دیگر خودم حل کنم.

$$P_{AM} = A_c^2 (1+\mu^2 P_m)/2 = \frac{A_c^2}{2} + \mu^2 P_m \frac{A_c^2}{2}$$ بازی!

$$= P_c + a\frac{A_c^2}{2} = P_c + aP_c \qquad 0 < a \leq 1$$

بیش از ۵۰٪ انرژی صرف ارسال حامل می‌شود.

SSB: ① راه اول: واضح است که توان آن نصف توان DSB است.

$$P_{SSB} = \frac{A_c^2}{4} P_m$$

② معمولی:

$$SSB(t) = \frac{A_c}{2}\left[m(t)\cos 2\pi f_c t \mp \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t\right]$$

$$P_{SSB} = \left\langle E\left\{ m^2\cos^2 2\pi f_c t + \hat{m}^2(t)\sin^2 2\pi f_c t \mp 2\sin 2\pi f_c t\, m(t)\,\hat{m}(t)\right\}\right\rangle$$

$$\times \frac{A_c^2}{4}$$

$$\Rightarrow P_{SSB} = \frac{A_c^2}{4}\langle \cos^2 2\pi f_c t\, P_m + \sin^2 2\pi f_c t\, P_m\rangle$$

$$= \frac{A_c^2}{4} P_m$$

در FM خانه: $f_\Delta = 75\,kH \qquad f_c = 100\,MH$

$$FM = A_c\cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \qquad f_c \gg f_\Delta$$ که

، PM

$$P_{FM} = P_{PM} = \frac{A_c^2}{2}$$ ⟵ پس با تقریب خیلی خوب

Subject: جلسه هجدهم
Year. Month. ۹ Date. ۱۷

## نویز یا اغتشاش:

هر سیگنال الکتریکی ناخواسته که همراه سیگنال ما در سیستم وجود دارد را نویز می گویند.

منابع:

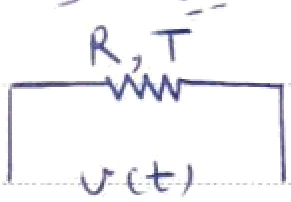
۱- طبیعی ←
- از درون: نمی توان از بین برد و فقط باید رفتار آن را شناخت. نویز حرارتی
- از بیرون: تخلیه الکتریکی: قابل کنترل در دست ما نیست.

ساخته دست بشر ←
- از درون: سیستم های ایزوله نشده
- از بیرون: پست ترانس در نزدیکی آنتن

نویز حرارتی: هر فلزی در هر درجه حرارتی الکترون آزاد از خود ساطع می کند. این منبع نویز طبیعی از درون است.

اگر مقاومت R در درجه حرارت T قرار بگیرد الکترون های آزاد آن شروع با حرکت می کنند و در نتیجه ولتاژی در دو سر آن وجود دارد. این ولتاژ نتیجه‌ی حرکت بی نهایت الکترون است و در نتیجه انتظار داریم این ولتاژ فرآیندی تصادفی گوسی باشد (بدلیل تئوری حد مرکزی)

چون احتمال راست رفتن و یا چپ رفتن فرق نمی کند پس امید فرآیند نیز صفر است و از آنجایی که شرایط محیطی ثابت است، پس فرآیند ایستان نیز است.




$E\{v\} = \bar{v} = 0$

$$P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(v-\cancel{m})^2}{2\sigma^2}}$$

به نویز فوق نویز حرارتی می گویند

حال می خواهیم توان نویز را محاسبه کنیم

ابراتور دوم را اثر ندادیم زیرا ایستان است.

$$P = E\{v^2(t)\} = \overline{v^2} \qquad \sigma^2 = \overline{v^2} - (\cancel{\bar{v}})^2 = \overline{v^2}$$

توان مصرفی در مقاومت ۱ اهمی

$$G(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{\frac{h|f|}{KT}} - 1} \qquad \left[\frac{W}{\Omega \cdot Hz}\right]$$

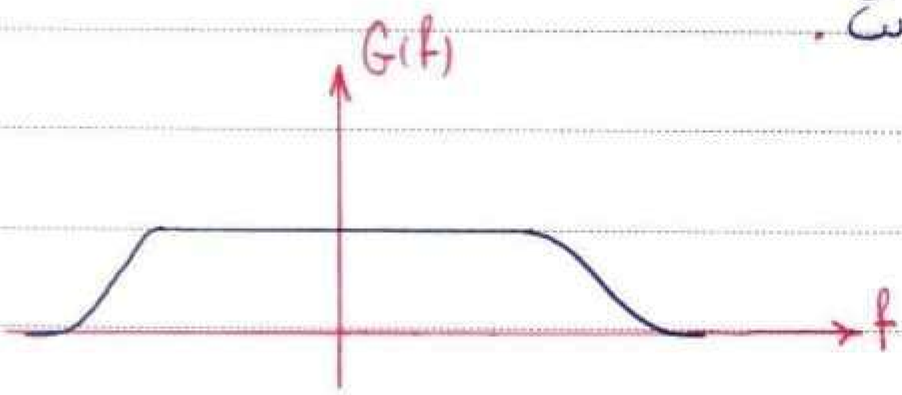
جدایی

مقاومت یک اهمی

$k =$ ثابت بولتزمن $= 1.37 \times 10^{-23}$ $\frac{\text{ژول}}{\text{درجه کلوین}}$ $\qquad h =$ ثابت پلانک $= 6.62 \times 10^{-34}$ $\frac{\text{ژول}}{\text{هرتز}}$

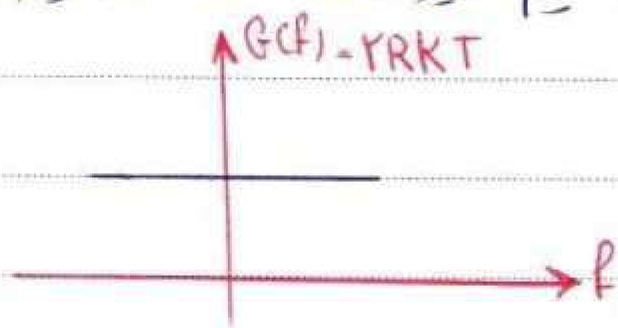
$$P = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,df = \frac{2}{3}\,\frac{(\pi k T)^2}{h}\,R$$

نویزها لبه در سیستم‌های مخابراتی از نوع فوق است.



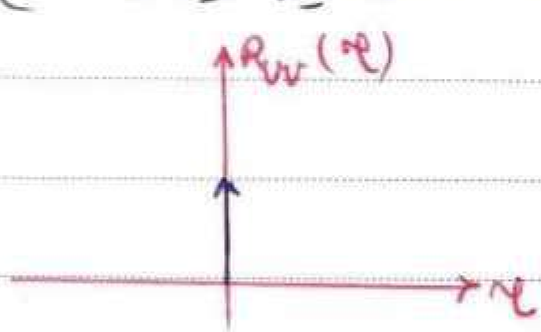

$$\left.\begin{array}{l} f < 10^{12} \longrightarrow \dfrac{hf}{kT} < 0.1 \\[2ex] e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{کار می‌کنیم}]{\text{در بازه‌ای که ما}} G(f) = 2RKT$$

هرگز از تابع فوق در بازه $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال‌گیری نمی‌کنیم زیرا بی‌نهایت می‌شود و رابطه فوق تنها برای بازه‌ای خاص برقرار است.




چون همه‌ی فرکانس‌ها در G(f) به یک اندازه حضور دارند، به فرآیند، فرآیندی سفید می‌گویند.

به نویز از جنس فوق نویز سفید گوسی می‌گویند، و چون با سیگنال جمع می‌شود به آن نویز سفید گوسی جمع شونده می‌گویند.




حال تابع خودهمبستگی نویز سفید را می‌کشیم:

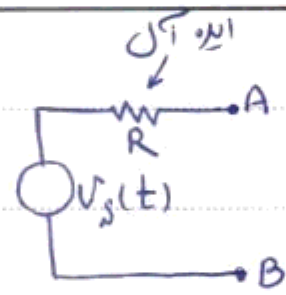
رندم‌ترین فرآیند قابل تصور است زیرا

نه به‌جای $\tau$ در $R_{vv}$ صفر می‌ذاریم و نه از G(f) در کل اعداد انتگرال می‌گیریم (به دلیل تقریب استفاده شده)

بنابر تعریف داریم:

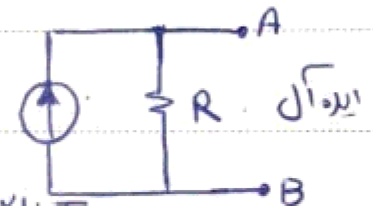
$$G(f) = 2RKT = \frac{N_0}{2}$$

بنابراین از این به بعد هر مقاومت را بصورت مقابل مدل می‌کنیم.




$G(f)=2RkT$

با مدل کردن به صورت مقابل، مقاومتی داریم که ایده آل است.




$G(f)=\frac{2kT}{R}$

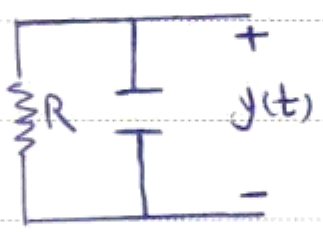
مثال: شکل زیر در T درجه کلوین قرار دارد. خازن عاری از بار است. مطلوبست محاسبه

۱) چگالی طیف توان فرآیند $y(t)$

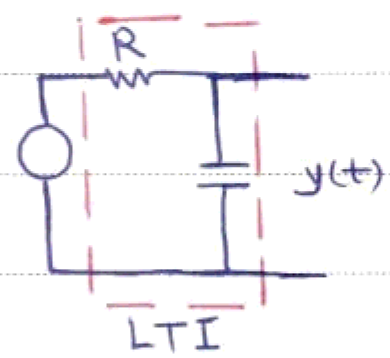
۲) تابع خودهمبستگی فرآیند $y(t)$

۳) PDF مربوط به y

۴) احتمال آنکه y در لحظه‌ی t از $10^{-4}$ ولت بیشتر باشد.




$G(f)=$
$2RkT$

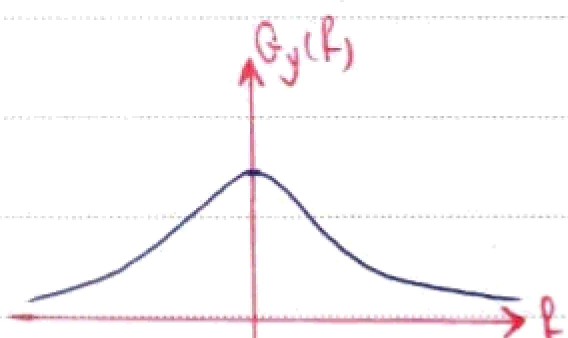



$$G_y(t)=|H(f)|^2 G_x(t)$$

$$H(f)=\frac{1}{1+j2\pi R\ f} \Rightarrow |H(f)|^2=\frac{1}{1+4\pi^2R^2C^2f^2}$$

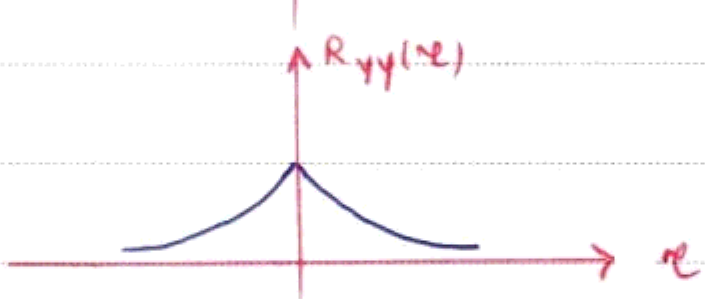
$$\Rightarrow G_y(t)=\frac{2RkT}{1+4\pi^2R^2C^2f^2}$$

ورودی نویز سفید بود اما خروجی نویزی رنگی است.




$$R_{yy}(\tau) \longleftrightarrow G_y(f)$$

$$\Rightarrow R_{yy}(\tau)=\frac{kT}{C}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$




$$P_y=R_{yy}(0)=\frac{kT}{C}$$

اگر در خروجی مقاومت یک اهمی قرار دهیم با مقدار فوق انرژی در لحظه مصرف می‌شود.

خازن کمتر نویز بیشتری ایجاد می‌کند.

مقاومت دو کار می‌کند هرچه بیشتر باشد نویز بیشتر شده، از طرف دیگر فیلتر با رکتر می‌شود پس اینها همدیگر را خنثی می‌کنند.

PDF $y$ گوسی است زیرا اولاً $x$ گوسی بوده و ثانیاً سیستم LTI بوده است.

$E\{y\}=0$ است زیرا $E\{x\}=0$ است.

هرچه C بیشتر باشد توان نویز کمتر است

$$P(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

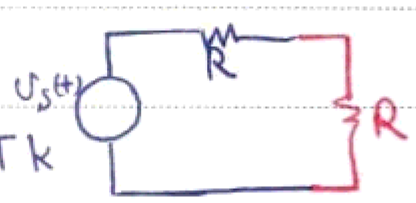
$$\sigma_y^2=E\{y^2\}-(\cancel{E\{y\}})^2=P_y=\frac{kT}{C}$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{kT}{C}}$$

$$P\{y<10^{-4}\}=\int_{-\infty}^{10^{-4}}p(y)\,dy=f(T,C)$$

در سیستم های مخابراتی می خواهیم حداکثر توان به بار برسد

فرض کنید یک منبع نویز داریم.




$G(f)=2RTk$

حال می خواهیم اگر مدار را به یک مقاومت تطبیق داده شده وصل کنیم

چه مقدار توان به آن می رسد.

مقدار متوسط حداکثر توانی است که می تواند به یک بار داده شود.

$$P_a=E\{\langle v(t)i(t)\rangle\}$$

$$=E\left\{\left\langle\frac{v_s^2(t)}{4R}\right\rangle\right\}=\frac{1}{4R}E\{v_s^2(t)\}\Rightarrow P_a=\frac{1}{4R}\int 2RkT\,df=\int\frac{kT}{2}\,df$$

چگالی متوسط مقداری است که در بار تطبیق داده شده در حال مصرف است.

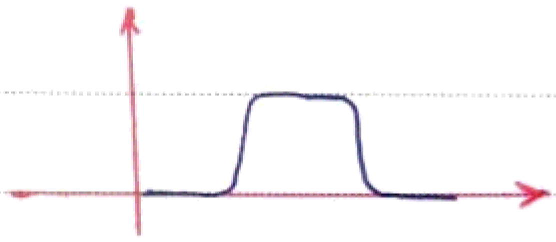
$$\Rightarrow \underbrace{G_a(f)=\frac{kT}{2}}_{\text{چگالی توان در دسترس: تحویل داده شده به مقاومت تطبیق داده شده}}$$

بنابراین این چگالی به مقاومت بستگی ندارد.

یکی از منابع اصلی نویز تقویت کننده های طبقه ی اول هستند که دارای گین بسیار بالا هستند.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

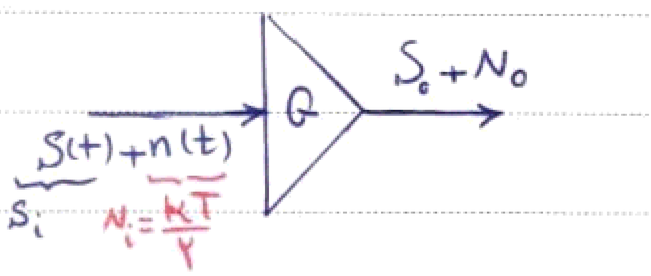


هر تقویت کننده یک عرض باند دارد.

در مخابرات منظور از ایده‌آل بودن تقویت کننده این است که تقویت کننده نویز ایجاد نکند.

فرض کنید یک منبع نویز داریم.

حال می‌خواهیم مکانی سیگنال و نویز در خروجی را بدست آوریم.

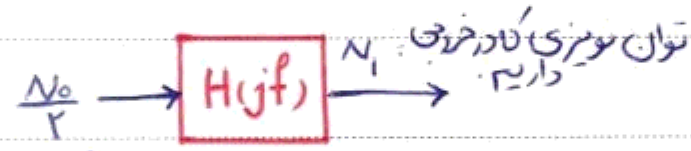



ما یک نسبت $(\frac{S}{N})_i$ و یک نسبت $(\frac{S}{N})_o$ داریم و با توجه به اینکه خود تقویت کننده نیز نویز ایجاد می‌کند، پس $(\frac{S}{N})_i > (\frac{S}{N})_o$ بنا به تعریف داریم:

$$\frac{(\frac{S}{N})_i}{(\frac{S}{N})_o}=F \Rightarrow (\frac{S}{N})_o=\frac{1}{F}(\frac{S}{N})_i$$

بنابراین می‌خواهیم F تا حد مقدور کوچکتر باشد. به تقویت کننده های دارای F کوچک LNA می‌گویند که در طبقه اول گیرنده‌ها استفاده می‌شوند.

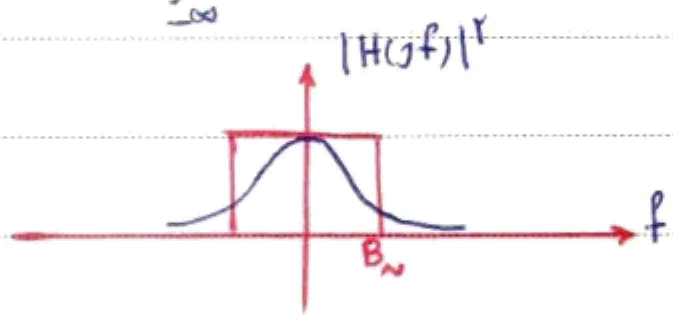
# Noise Equivalent Bandwidth — عرض باند معادل نویز:

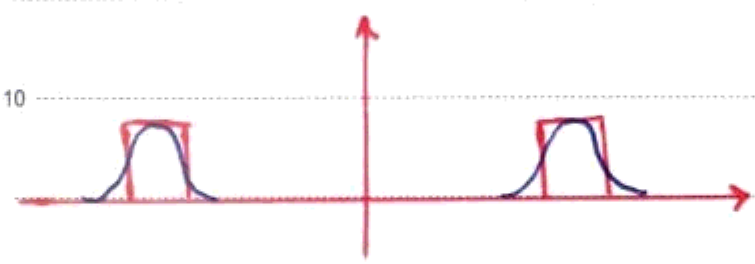



می‌خواهیم عرض باند فیلتر ایده‌آل را به گونه‌ای بدست آوریم که توان نویز در خروجی در دو حالت یکسان باشد

$$N_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(jf)|^2 df$$

پس هر شکلی یک عرض باند معادل نویزی دارد.




$$N_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(jf)|^2_{max} df = N_0 |H(jf)|^2_{max} B_N$$

$$N_1 = N_2 \Rightarrow N_0 \int_0^{+\infty} |H(jf)|^2 df = N_0 |H(jf)|^2_{max} B_N \Rightarrow B_N = \frac{\int_0^{+\infty} |H(jf)|^2 df}{|H(jf)|^2_{max}}$$

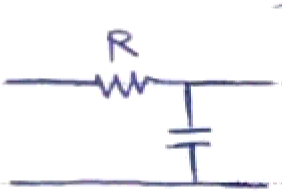
بنابراین اگر نویز را به فیلتری ایده‌آل وارد کنیم که عرض باند $B_N$ را دارد توان نویز در خروجی در هر دو حالت برابر است.

اگر فیلتر از ابتدا ایده‌آل می‌بود عرض باند نویزی خود عرض باند فیلتر می‌شد.

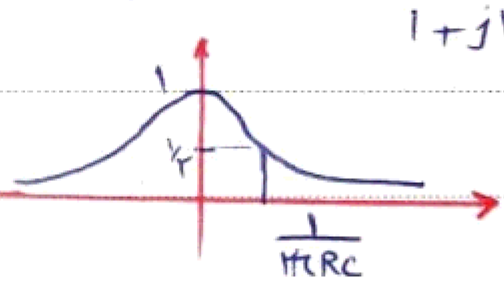
مثال:

برای فیلتر مقابل عرض باند معادل نویزی و عرض باند ۳dB را باهم مقایسه کنید

علت استفاده از $|H(jf)|$ تأکید بر تقارن هرمیتی است




$$H(jf) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf} \Rightarrow |H(jf)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$B_N = \frac{\int_0^{\infty} \frac{df}{1+4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}{1} = \frac{1}{4RC}$$

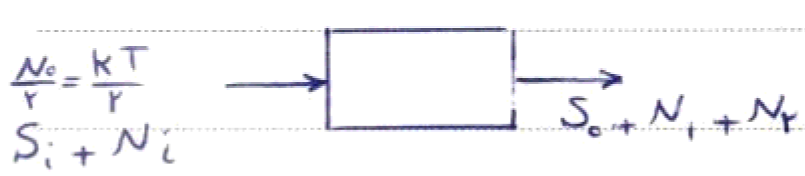
پهنای باند 3dB $= \frac{1}{2\pi RC}$

پهنای باند معادل نویزی $= \frac{1}{4RC}$

فرض کنید یک تقویت کننده داریم

عرض باند معادل نویزی $B_N$ است و $|H(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2_{max} = G$

با فرض منطبق بودن طیف‌ها نویز با چگالی $\frac{kT}{2}$ به تقویت کننده می‌رسد




$$\frac{N_0}{2} = \frac{kT}{2} \Rightarrow N_0 = kT \Rightarrow N_1 = kTGB_N \Longrightarrow N_i = kTB_N$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{GS_i}{kTGB_N + N_2} = \frac{GS_i}{G\left(kTB_N + \frac{N_2}{G}\right)} = \frac{\cancel{G}S_i}{kB_N\cancel{G}\left(T + \frac{N_2}{kB_NG}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_i}{\underbrace{kB_NT}_{N_i}\left(1 + \frac{N_2}{kB_NGT}\right)} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_o = \left(\frac{S}{N}\right)_i \times \frac{1}{1 + \frac{N_2}{kB_NGT}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_i}{\left(\frac{S}{N}\right)_o} = 1 + \frac{N_2}{kB_NGT}$$

$$N_o = kGB_N\left(\underbrace{T + \frac{N_2}{kGB_N}}_{T_N}\right)$$

$T_N$: درجه حرارت معادل نویز

می‌توان فرض کرد به دلیل نویز تقویت کننده دمای محیط از T به $T_N$ افزایش یافته است.

$$T_N = T + \frac{N_2}{k G B_N}$$

## بررسی مشخصات آماری مؤلفه‌های یک فرآیند ایستان گوسی و میانگذر:

$$n(t)\begin{cases}\text{میانگذر}\\ \text{ایستان}\\ \text{گوسی}\\ E\{n(t)\}=0\\ G_n(f)\ \text{را داریم}\end{cases}$$

آیا $n_i(t)$ , $n_q(t)$ ایستان هستند؟

$E\{n_i(t)\}=?$ $\quad E\{n_q(t)\}=?$

آیا $n_i(t)$ , $n_q(t)$ گوسی هستند؟

آیا $n_i(t)$ , $n_q(t)$ ناهمبسته هستند؟

چگالی طیف توان $n_i(t)$ , $n_q(t)$ چگونه هستند؟

فرکانس $f_c$ را در بازه‌ی فرکانسی $n(t)$ انتخاب می‌کنیم.

$$n_i(t) = n(t)\cos 2\pi f_c t + \hat{n}(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$n_q(t) = \hat{n}(t)\cos 2\pi f_c t - n(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$E\{n_i(t)\} = \cos 2\pi f_c t\, E\{n(t)\} + \sin 2\pi f_c t\, E\{\hat{n}(t)\} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} E\{n_q(t)\} = 0$$

پس اگر سیگنال ایستان امید صفر داشته باشد مؤلفه‌های آن هم امید صفر دارند

$n_i$ و $n_q$ گوسی نیز هستند زیرا ترکیب خطی در فرآیند گوسی است. $n(t)$ بنابه فرض گوسی است، $\hat{n}(t)$ نیز نتیجه عبور $n(t)$ از سیستمی خطی است پس گوسی می‌باشد.

حال می‌خواهیم ایستان بودن را بررسی کنیم:

$$E\{n_i(t)n_i(t-\tau)\} = E\{[n(t)\cos 2\pi f_c t + \hat{n}(t)\sin 2\pi f_c t][n(t-\tau)\cos 2\pi f_c(t-\tau) + \hat{n}(t-\tau)\sin 2\pi f_c(t-\tau)]\} = \cos 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c(t-\tau)\underbrace{R_{nn}(\tau)}_{\text{ایستانی فرآیند } n}$$

$$+ \cos 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c(t-\tau)\overbrace{R_{n\hat{n}}(\tau)}^{E\{n(t)\hat{n}(t-\tau)\}} + \sin 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c(t-\tau) R_{\hat{n}n}(\tau)$$

$$+ \sin 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c(t-\tau) R_{\hat{n}\hat{n}}(\tau)$$

$$\text{قبلاً داشتیم} \Rightarrow \begin{cases} R_{nn}(\tau) = R_{\hat{n}\hat{n}}(\tau) \\ R_{n\hat{n}}(\tau) = -R_{\hat{n}n}(\tau) = \hat{R}_{nn}(\tau) \end{cases}$$

حاصلضرب با حاصل جمع را استفاده از روابط مقابل نشان داده می‌شود که:

$$E\{n_i(t)\, n_i(t-\tau)\} = R_{nn}(\tau)\cos 2\pi f_c \tau + \hat{R}_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau$$

پس سمت چپ تابع $t$ نبوده، فرآیند $n_i$ فرآیندی ایستان است.

$$\Rightarrow R_{n_i n_i}(\tau) = R_{nn}(\tau)\cos 2\pi f_c \tau + \hat{R}_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau$$

نشان دهید:

$$R_{n_q n_q}(\tau) = R_{n_i n_i}(\tau)$$

$$P_{n_i} = R_n(0) = P_n = P_{n_q}$$

پس $n_i$ و $n_q$ با هم توان یکسانی دارند.

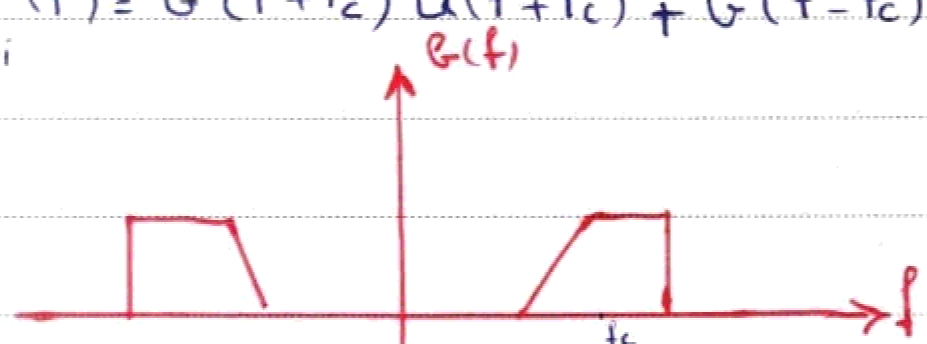
$$G_{n_i}(f) = \tfrac{1}{2}G(f+f_c) + \tfrac{1}{2}G(f-f_c) + F\{\hat{R}_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c \tau\}$$

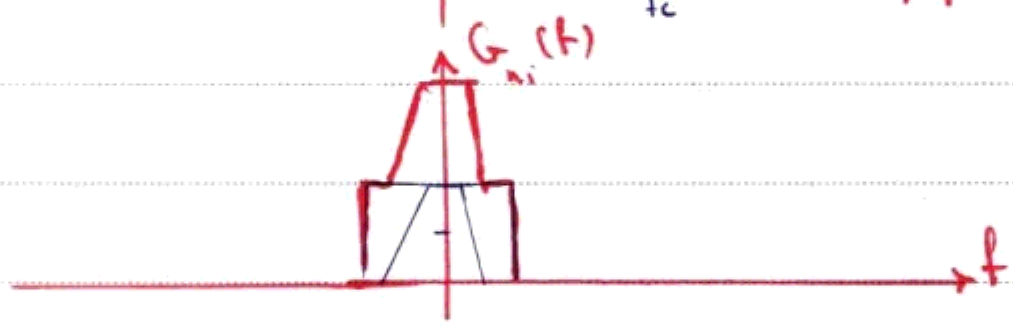
$$\hat{R}_{nn}(\tau) \longleftrightarrow G(f)\{-j\,\mathrm{Sgn}(f)\} \Rightarrow \hat{R}_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c\tau \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}G(f+f_c)\,\mathrm{Sgn}(f+f_c) - \tfrac{1}{2}G(f-f_c)\,\mathrm{Sgn}(f-f_c)$$

$$G_{n_i}(f) = \left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{Sgn}(f+f_c)\right]G_n(f+f_c) + \left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{Sgn}(f-f_c)\right]G_n(f-f_c)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{Sgn}(x) = u(x) \\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{Sgn}(x) = u(-x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_{n_i}(f) = G(f+f_c)\,u(f+f_c) + G(f-f_c)\,\overbrace{u(-(f-f_c))}^{u(-f+f_c)=u(-f)|_{f\to f-f_c}}$$



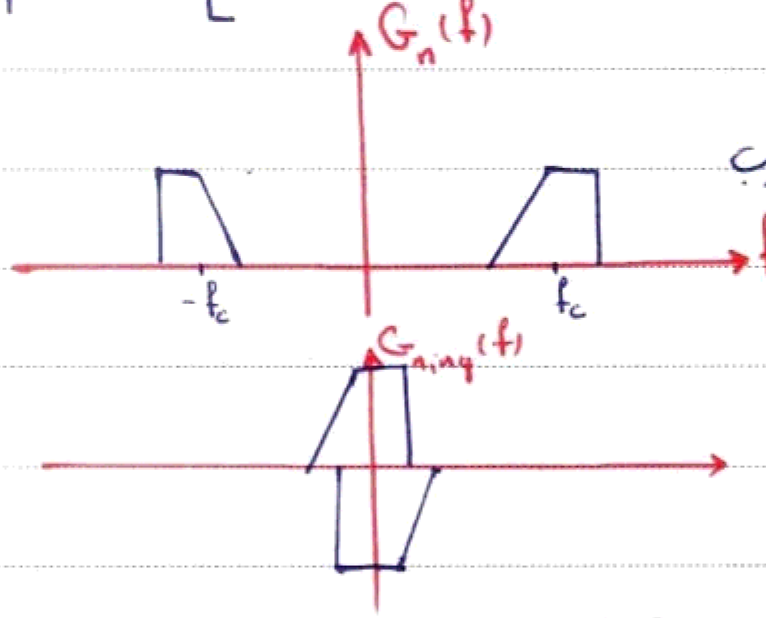

$$G_{n_q}(f) = G(f+f_c)\,u(f+f_c) + G(f-f_c)\,u(-(f-f_c))$$

حال می‌خواهیم رابطه بین $n_i$ , $n_q$ را بدست آوریم و ببینیم آیا باهم همبستگی دارند یا خیر.

$$E\{n_i(t)\, n_q(t-\tau)\} \xrightarrow[\text{شود}]{\text{اثبات}} f(\tau) = R_{n_i n_q}(\tau)$$

$$R_{n_i n_q}(\tau) \longleftrightarrow G_{n_i n_q}(f)$$ تابع چگالی احتمال توأم

$$G_{n_i n_q}(f) = j\left[G_n(f+f_c)\,u(f+f_c) - G_n(f-f_c)\,u(f-f_c)\right]$$




در این حالت الزاماً مجموع صفر نیست پس امید حاصلضرب الزاماً صفر نیست

وقتی امید فوق صفر است که نویز اصلی در اطراف یک نقطه متقارن باشد و ماهمان

در شکل مقابل $n_i$ و $n_q$ ناهمبسته هستند ولی اگر یکی را مقداری در حوزه‌ی زمان شیفت دهیم دیگر اصلاً ناهمبسته نمی‌شوند.

* ثابت کنید به ازای $\tau=0$ ، حتماً $R_{n_i n_q}(\tau)=0$ می‌باشد

بنابراین $n_i$ , $n_q$ ، حتماً ناهمبسته هستند چون $\tau=0$ ولی در مورد $n_i(t)$ , $n_q(t-\tau)$ ، $R_{n_i n_q}(\tau)$ فقط وقتی صفر است که تقارن گفته شده را داشته باشیم.

بنابراین $n_i$ , $n_q$ همزاده ناهمبسته هستند ولی $n_i$ و $n_q$ با یکی شیفت داده شود، نمی‌توانند ناهمبسته باشند مگر اینکه حالت تقارن ایجاد شود.

$$Z(t)=x(t)+y(t)$$

$$R_{zz}(t_1,t_2)=E\{(x(t_1)+y(t_1))(x(t_2)+y(t_2))\}=R_{xx}(t_1,t_2)+R_{yy}(t_1,t_2)+R_{xy}(t_1,t_2)+R_{yx}(t_1,t_2)$$

بنابراین دیدیم که در حالت کلی اگر فرآیندی مجموع دو فرآیند باشد آنگاه تابع خود همبستگی آن مجموع تابع های خود همبستگی دو فرآیند نیست مگر اینکه همبستگی متقابل دو فرآیند صفر باشد.

وقتی مجموع دو فرآیند ایستان، ایستان است که تابع همبستگی متقابل دو فرآیند نیز ایستان باشد. در این حالتی اتفاق می افتد که $x$ و $y$ ورودی و خروجی یک سیستم LTI باشند.

از ایستان بودن $x$ و $y$ نمی توان به ایستان بودن توأم دو فرآیند رسید.

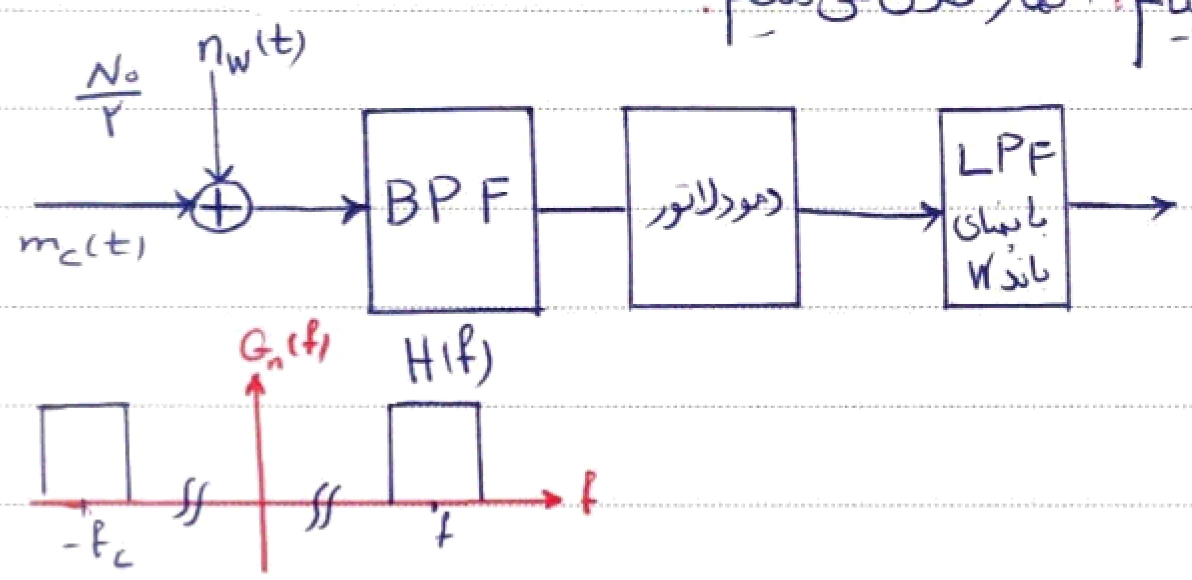
اگر به ازای هر $t_1$ و $t_2$، $E\{x(t_1)y(t_2)\}=0$ باشد آنگاه می توانیم بگوییم:

* خود همبستگی متقابل مجموع، مجموع خود همبستگی هاست.
* ایستان بودن دو فرآیند باعث ایستان بودن مجموع می شود.

## عملکرد مدولاسیون های مختلف در حضور AWGN:

نویز سفید رندترین نویز موجود است. اکثر نویزهای سیستم های مخابراتی از این نوع نویز است.

برای بررسی از مدل خلاصه شده زیر استفاده می کنیم. خیلی عناصر هستند که تأثیر زیادی دارند اما چون این تأثیر یکسان است روی نویز و پیام، آنها را حذف می کنیم.



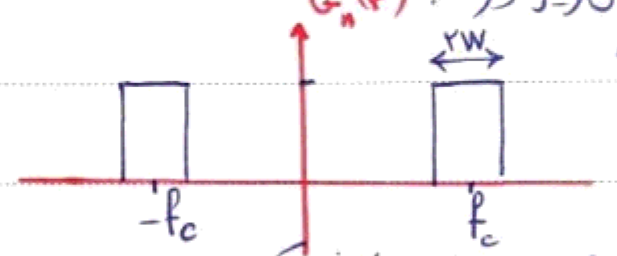

بلوک اول هم فیلتر و هم تقویت کننده است اما چون هم سیگنال و هم نویز را تقویت می کند پس سیگنال به نویز را عوض نمی کند و آن را حذف فرض می کنیم.

# DSB:

$A_c m(t)\cos 2\pi f_c t \longrightarrow A_r m(t)\cos 2\pi f_c t \Rightarrow \begin{cases} S_T = \frac{A_c^2}{2}P_m \\ S_R = \frac{A_r^2 P_m}{2} \end{cases} \Rightarrow L = \frac{A_c^2}{A_r^2} \Rightarrow A_r^2 = \frac{A_c^2}{L}$

$N_R = 2N_0 W$

چگالی طیف توان نویز در ورودی گیرنده : $G_n(f)$

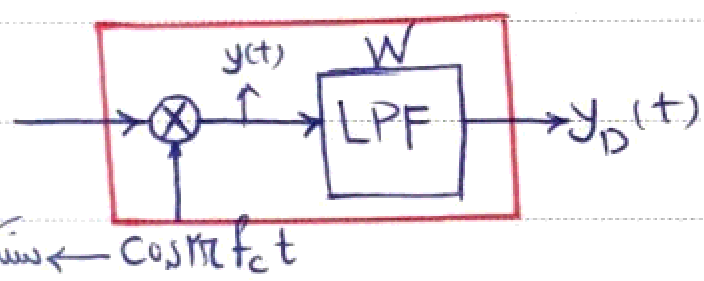



$v(t) = m_c(t) + n(t) = A_R m(t)\cos 2\pi f_c t + n(t)$

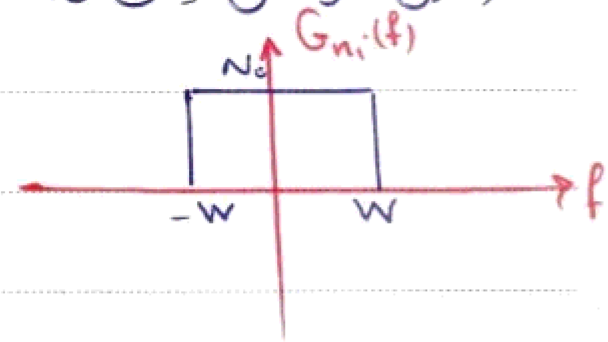
در $v(t)$ می‌توان فرض کرد $m_c(t)$ , $n(t)$ مستقل از هم هستند زیرا هر کدام از یک منبع جداگانه بدست می‌آیند.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{A_R^2 P_m}{4N_0 W}$$

در مورد دمودلاتور DSB داریم




$n(t)$ را حول فرکانس میانی $f_c$ با بردارهای sin و cos تجزیه می‌کنیم.




$n(t) = n_i \cos 2\pi f_c t - n_q(t)\sin 2\pi f_c t$

$v(t) = [A_R m(t) + n_i(t)]\cos 2\pi f_c t - n_q(t)\sin 2\pi f_c t$

$$y(t) = [A_R m(t) + n_i(t)]\underbrace{\cos^2 2\pi f_c t}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\pi f_c t} - n_q(t)\underbrace{\sin 2\pi f_c t\cos 2\pi f_c t}_{\frac{1}{2}\sin 4\pi f_c t}$$

جملاتی از $y(t)$ که در $\sin 4\pi f_c t$ , $\cos 4\pi f_c t$ ضرب می‌شوند دیگر از LPF عبور نمی‌کنند.

$y_D(t) = \frac{1}{2}A_R m(t) + \frac{1}{2}n_i(t)$

می‌خواهیم توان سیگنال $y_D(t)$ را بدست آوریم.

بنابراین توان $y_D(t)$ چون از دو فرآیند مستقل ساخته شده پس توان $y_D(t)$ مجموع توان‌هاست.

$$\left.\begin{aligned} S_D &= \frac{A_R^2 P_m}{4} \\ N_D &= \frac{1}{4}P_{n_i} = \frac{1}{4}P_n = \frac{2N_0 W}{4} = \frac{N_0 W}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = \frac{\frac{A_R^2 P_m}{4}}{\frac{N_0 W}{2}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = \frac{A_R^2 P_m}{2N_0 W}$$

$\left(\frac{S}{N}\right)_{R}$ ۲ = $\left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB}$ زیرا یکی از مؤلفه های نویز در این سیستم حذف شد

از گوسی بودن نویز در اینجا استفاده‌ای نکردیم.

$$E\{n_i(t)\,n_q(t)\} = R_{nn}(\tau)\sin 2\pi f_c\tau - \hat{R}_{nn}(\tau)\cos 2\pi f_c t = R_{n_i n_q}(\tau)$$

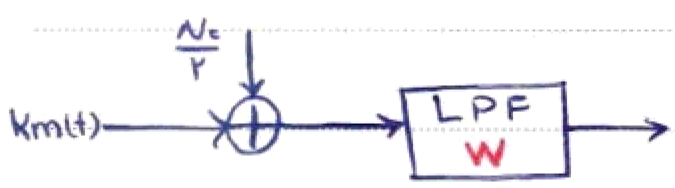
$$E\{n_i(t)\,n_q(t)\} = 0$$

$$\hat{R}_n(\tau)\big|_{\tau=0} = 0 \qquad \hat{R}_{nn}(\tau) = R_{nn}(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} \longleftrightarrow G_n(f)\,(-j\,\mathrm{sgn}(f))$$

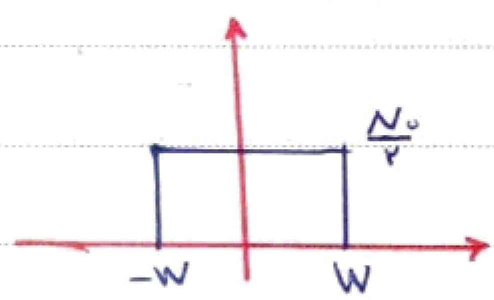
$$\hat{R}_{nn}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{G_n(f)\,(-j\,\mathrm{sgn}(f))}_{\text{فرد}} = 0$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = \frac{A_R^2 P_m}{2N_0 W} = \frac{S_R}{N_0 W} \triangleq \gamma$$

سیگنال به نویز در مخابرات باند پایه:




$$y_D(t) = km(t) + n(t)$$



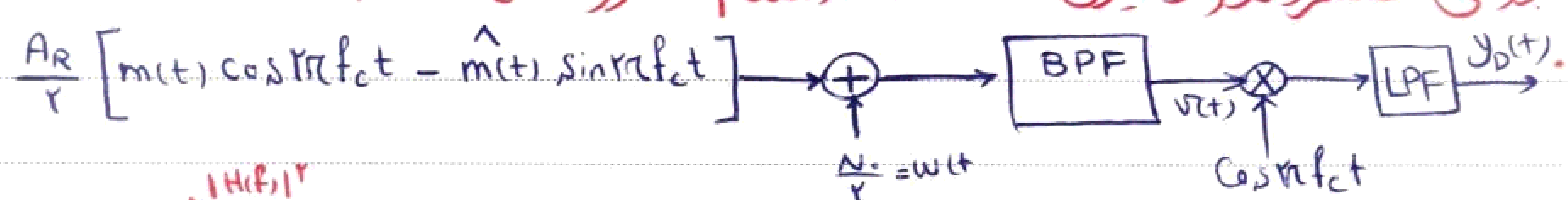

$$S_T = P_m$$

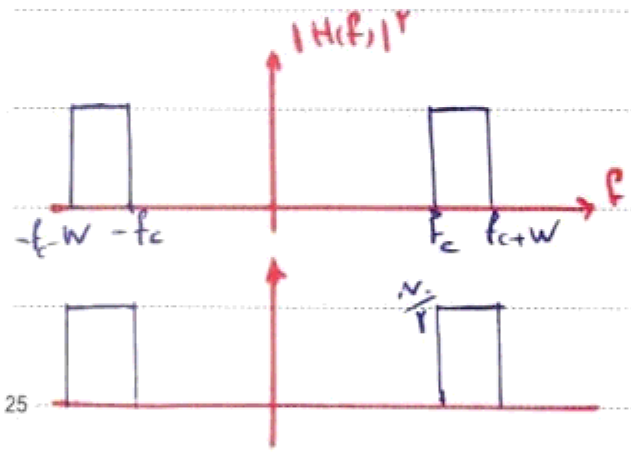
$$S_R = k^2 P_m$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,BB} = \frac{k^2 P_m}{N_0 W} = \frac{S_R}{N_0 W} = \gamma$$

$\gamma$ یعنی سیگنال به نویز مقصد اگر مدولاسیون انجام ندهیم

بررسی عملکرد مدولاسیون SSB در هنگام حضور AWGN :




$$v(t) = \frac{A_R}{2}\left[m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t\right] + n_i(t)\cos 2\pi f_c t - n_q(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$y(t) = \left[A_R m(t) + n_i(t)\right]\cos^2 2\pi f_c t - \left[A_R\hat{m}(t) + n_q(t)\right]\sin 2\pi f_c t\cos 2\pi f_c t$$

$$\Rightarrow y_D(t) = \frac{1}{4}A_R m(t) + \frac{1}{4}n_i(t)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

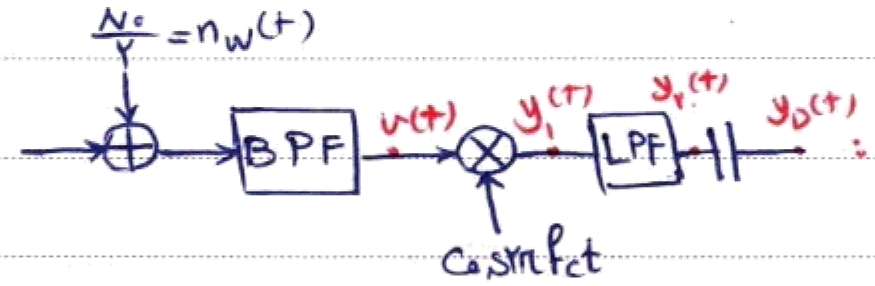
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,SSB} = \frac{\frac{1}{16}A_R^2 P_m}{\frac{1}{4}N_0 W} = \gamma$$

$$S_R = \frac{A_R^2 P_m}{4}$$

در اینجا در سر دمودلاتور سیگنال به نویز همان $\gamma$ است و علت اینست که سیگنال سینوسی ضرب بشوند، هم قسمتی از سیگنال و هم قسمتی از نویز را حذف می‌کند

مدولاسیون AM :

$A_R[1+\mu m(t)]\cos 2\pi f_c t$




$$y_1(t) = A_R[1+\mu m(t)]\cos^2 2\pi f_c t + n_i(t)\cos^2 2\pi f_c t - n_q(t)\sin 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c t$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}A_R[1+\mu m(t)] + \frac{1}{2}n_i(t)$$

$$y_D(t) = \frac{1}{2}A_R \mu m(t) + \frac{1}{2}n_i(t)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\ \text{AM سنکرون}} = \frac{A_R^2\mu^2 P_m}{2N_0W}$$

$$S_R = \frac{A_R^2}{2}(1+\mu^2 P_m) \Rightarrow A_R^2 = \frac{2S_R}{1+\mu^2 P_m}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,\ \text{AM سنکرون}} = \frac{\overbrace{\mu^2 P_m}^{a}}{1+\mu^2 P_m}\gamma$$

$$0 \leq a \leq 1 \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\ \text{AM سنکرون}} \leq \frac{\gamma}{2}$$

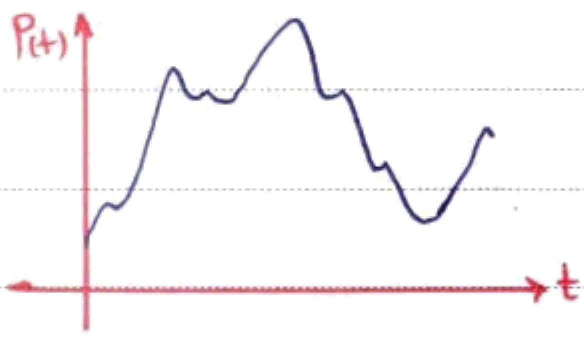
| | |
|---|---|
| DSB | $\frac{S_R}{N_0W}$ |
| SSB | $\frac{S_R}{N_0W}$ |
| BB | $\frac{S_R}{N_0W}$ |
| AM سنکرون | $\leq \frac{1}{2}\frac{S_R}{N_0W}$ |

نویز یکسان، سیگنال یکسان، توان ارسالی یکسان، تضعیف یکسان

← سه مورد اول سیگنال به نویز فرقی نمی‌کند

بنابراین هیچ انگیزه‌ای در زمینه‌ی مدولاسیون برای سیگنال به نویز است.

سه مدولاسیون اول 3dB ارجحیت از لحاظ سیگنال به نویز نسبت به سومی دارند.




می‌خواهیم سیگنال به نویزهایی را که در مقصد برحسب $\gamma$ نوشتیم برحسب Peak power باهم مقایسه می‌کنیم.

**DSB:** $DSB(t) = A_c\, m(t) \cos 2\pi f_c t \Rightarrow P(t) = A_c^2\, m^2(t) \cos^2 2\pi f_c t \Rightarrow P_p = A_c^2$

$$\frac{A_c^2}{A_R^2} = L \Rightarrow A_R^2 = \frac{A_c^2}{L} = \frac{P_p}{L}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,DSB} = \frac{A_c^2 P_m}{2LN_0W} = \frac{P_p P_m}{2LN_0W}$$

**AM:** $AM(t) = A_c(1+\mu\, m(t)) \cos 2\pi f_c t \Rightarrow P(t) = A_c^2(1+\mu m(t))^2 \cos^2 2\pi f_c t \Rightarrow P_p = 4A_c^2$

$$\Rightarrow A_c^2 = \frac{P_p}{4}$$

$$\Rightarrow A_R^2 = \frac{P_p}{4L}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\ \text{AM سنکرون}} = \frac{\mu^2 P_p P_m}{8LN_0W}$$

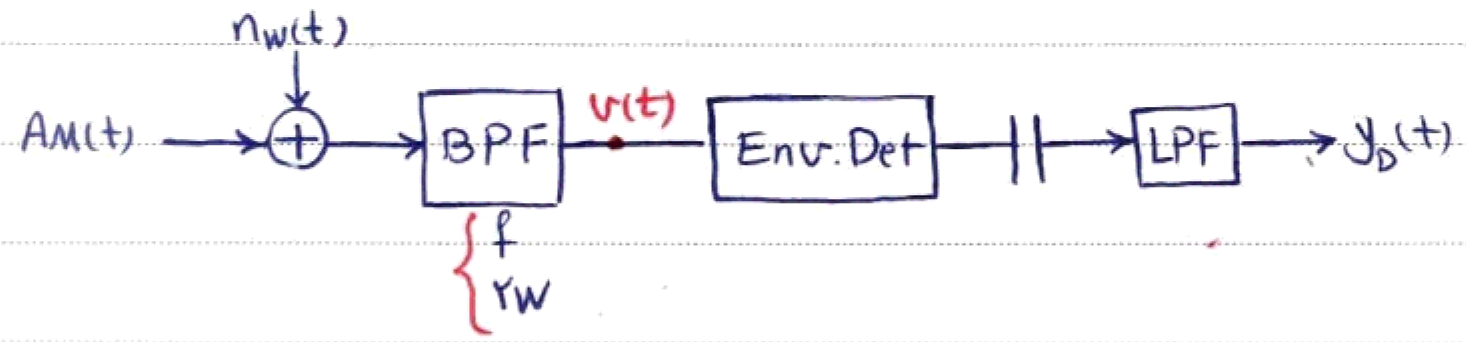
با ازای $P_p$ های یکسان (توان‌های متوسط ارسالی یکسان یا پول انرژی یکسان)، کانال یکسان، نویز یکسان سیگنال یکسان DSB به مقدار 9dB مزیت نسبت به AM سنکرون دارد.

**SSB:** $\frac{A_c}{2}\left[m(t)\cos 2\pi f_c t - \hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t\right]$

SSB، 3dB ارجحیت سیگنال به نویز نسبت به DSB دارد.

SSB، 9dB ارجحیت سیگنال به نویز نسبت به AM سنکرون دارد.

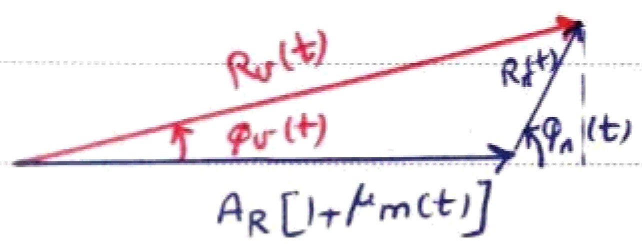
تاکنون نویز جمع‌شونده داشتیم. حال می‌خواهیم مدولاسیون AM پوش را بررسی کنیم و خواهیم دید اگر سیگنال نسبت به نویز کم باشد باعث می‌شود نویز ضرب‌شونده داشته باشیم که باعث می‌شود طبیعت سیگنال عوض شود.




$$v(t) = A_R[1+\mu m(t)]\cos 2\pi f_c t + R_n(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_n(t)) = R_v(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi_v(t)]$$

آشکارساز پوش وسیله‌ای است که اگر $R_v(t)\cos[2\pi f_c t+\varphi(t)]$ به آن برسد، $R_v(t)$ را به ما بدهد

برای رسیدن به شکل فوق نویز را به صورت قطبی تجزیه می‌کنیم.




$$R_v(t) = \sqrt{\left[A_R(1+\mu m(t)) + n_i(t)\right]^2 + n_q^2(t)}$$

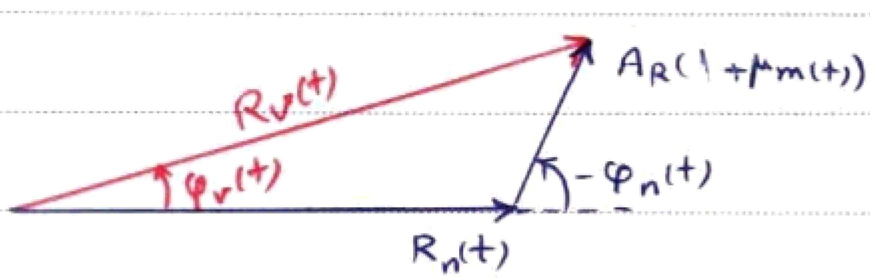
1) $\left(\frac{S}{N}\right)_R \gg 1 \qquad P\{A_R \gg R_n\} \approx 1$

($S \to \propto A_R$, $N \to \propto R_n$)

$$R_v(t) \cong A_R[1+\mu m(t)] + n_i(t)$$

$$\Rightarrow y_D(t) = \mu A_R m(t) + n_i(t) \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{پوش AM}\ (\frac{S}{N}\gg 1)} = \frac{\mu^2 A_R^2 P_m}{2N_0 W}$$

برای سادگی این بار نویز را که دامنه بیشتری دارد مبدأ فاز در نظر می‌گیریم.




$$R_v(t) = \underbrace{R_n(t)}_{\text{نویز}} + \underbrace{A_R[1+\mu m(t)]\cos\varphi_n(t)}_{\text{نویز و سیگنال در هم ضرب شده‌اند}}$$

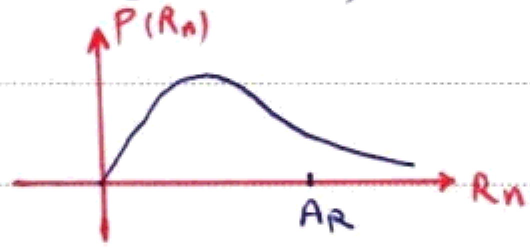
سیستم‌های قبلی هرچه سیگنال به نویز را کم می‌کردیم آنگاه باز هم نویز جمع شونده خواهد بود.

نیاز به داشتن PDF، $R_n$ داریم :

$P\{R_n > A_R\} \leqslant 0/01$

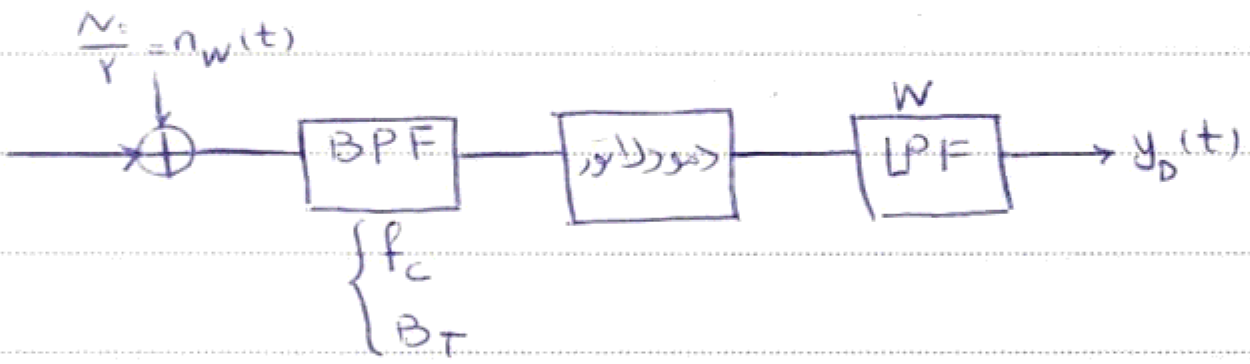
$R_n^2(t) = n_i^2(t) + n_q^2(t) \longrightarrow$ $R_n$ رایلی است $\Rightarrow P(R_n) = \frac{R_n}{2N_0W} e^{-\frac{R_n^2}{4N_0W}}$

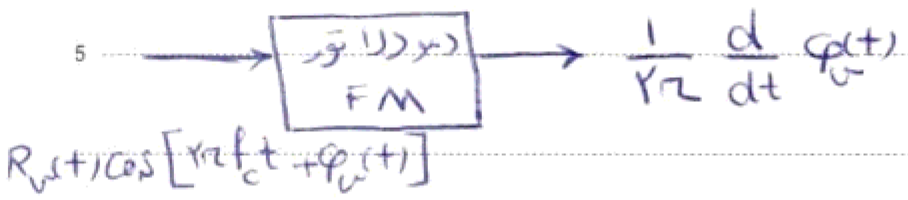
$n_q , n_i$ $\left\{\right.$ مستقل، امید صفر، برابر $\sigma$، گوسی




$P\{R_n > A_R\} \leqslant 0/01 \Rightarrow \int_{A_R}^{\infty} P(R_n)\, dR_n \leqslant 0/01 \Rightarrow e^{-\frac{A_R^2}{2NR}} \leqslant 0/01$

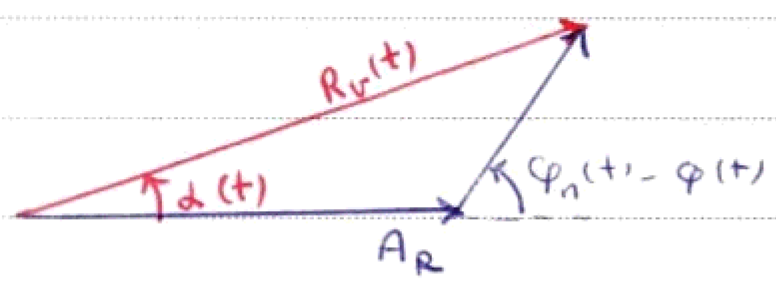
$\Rightarrow \frac{A_R^2}{2NR} \geqslant 10 \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_R \geqslant 10 \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{th} = 10$





$$v(t) = A_R \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)] + R_n(t)\cos\Big[\underbrace{2\pi f_c t + \varphi_n(t)}_{2\pi f_c t + \varphi(t) + \overbrace{\varphi_n(t) - \varphi(t)}}\Big] = R_v(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi_v(t)]$$




در اینجا زاویه نمایانگر نویز است.

$$\alpha(t) = \arctan \frac{R_n(t)\sin[\varphi_n(t) - \varphi(t)]}{A_R + R_n(t)\cos[\varphi_n(t) - \varphi(t)]}$$

در ذات آشکارسازی FM یک آشکارسازی پوش است و همانطور که دیدیم هر آشکارساز پوشی یک مقدار آستانه برای سیگنال به نویز دارد و بنابراین ما در آشکارسازی FM هم یک مقدار آستانه داریم و برای رعایت آن باید شرط $A_R >> R_n$ را داشته باشیم.

$$\Rightarrow \alpha(t) = \arctan \frac{R_n(t)\sin[\varphi_n(t) - \varphi(t)]}{A_R} \simeq \frac{R_n(t)\sin[\varphi_n(t) - \varphi(t)]}{A_R}$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \frac{1}{A_R} R_n(t)\sin[\varphi_n(t) - \varphi(t)]$$

حال می‌خواهیم چگالی طیف توان $\alpha(t)$ را محاسبه کنیم

از باند پایین است و $\varphi_n(t)$ فرکانس بالاست پس تغییرات $\varphi(t)$ نرم‌تر از $\varphi_n(t)$ است پس $\varphi(t)$ را در مقابل عددی ثابت در نظر می‌گیریم. پس:

$\varphi(t) \simeq \varphi$

$$\alpha(t) = \frac{1}{A_R}\left[R_n(t)\sin\varphi_n(t)\cos\varphi - R_n(t)\cos\varphi_n(t)\sin\varphi(t)\right]$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \frac{1}{A_R}\left[n_q(t)\cos\varphi - n_i(t)\sin\varphi\right]$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \frac{\cos\varphi}{A_R}n_q(t) - \frac{\sin\varphi}{A_R}n_i(t)$$

اثبات کردیم که $n_i(t)$ و $n_q(t)$ مستقل هستند و در نتیجه $G_\alpha(f)$ برابر مجموع چگالی های طیف توان است.

$$G_\alpha(f) = \frac{\cos^2\varphi}{A_R^2}G_q(f) + \frac{\sin^2\varphi}{A_R^2}G_q(f) \rightarrow G_\alpha(f) = \frac{1}{A_R^2}G_q(f)$$

فرض‌ها: اولاً بالاتر از آستانه کار می‌کنیم $\left(\left(\frac{S}{N}\right)_R \geq 10\right)$

ثانیاً می‌توان از $\varphi(t)$ را در مقابل $\varphi_n(t)$ ثابت فرض کرد.

حال می‌خواهیم وارد نوع مدولاسیون بشویم.

در قسمت‌های قبل توان نویز به توان سیگنال بستگی نداشت اما در اینجا این ارتباط وجود دارد.

$$S_R = \frac{A_R^2}{2} \Rightarrow A_R^2 = 2S_R$$

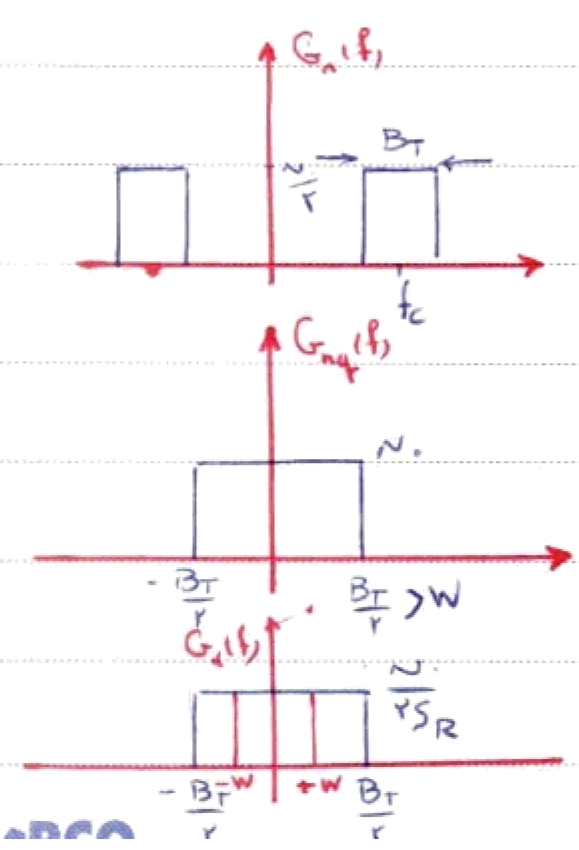
$$\Rightarrow G_\alpha(f) = \frac{1}{2S_R}G_q(f)$$

**PM:**

$$- \quad \varphi(t) = \varphi_\Delta m(t)$$

$$y(t) = \varphi_v(t)$$

$$y(t) = \varphi_\Delta m(t) + \alpha(t)$$




چون سیگنال و نویز ناهمبسته هستند، پس می‌توان $G_y$ را از مجموع دو چگالی توان ساخت.

نویز بعد از عبور از LPF

$$y_D(t) = \varphi_\Delta m(t) + \vec{\beta}(t)$$

$$\left.\begin{aligned} N_D &= \frac{N_0 W}{S_R} = \frac{1}{\gamma} \\ S_D &= \varphi_\Delta^2 P_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,PM} = \varphi_\Delta^2 P_m \gamma$$

و برابر این ضریب سیگنال به نویز در این حالت

$$P_m = 1 \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D,PM} = \varphi_\Delta^2\gamma \Leftarrow$$

که علاوه بر تقویت خود آن، نویز را نیز تضعیف می‌کند

**FM:** $\varphi(t) = 2\pi f_\Delta \int^t m(\lambda)\, d\lambda$

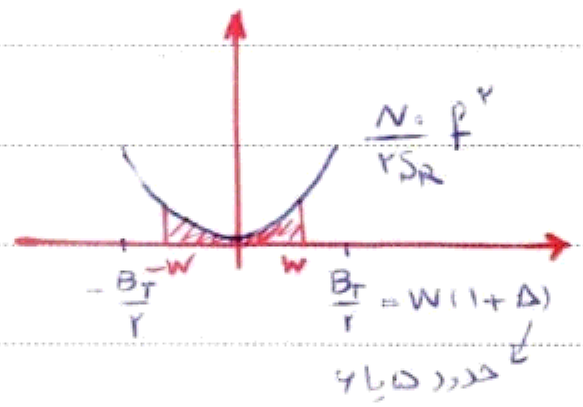
$$y(t) = \underbrace{\tfrac{1}{2\pi}}\frac{d}{dt}\left(\varphi_v(t)\right)$$

در اینجا ضریب ۲π خط خورد

$$\varphi_v(t) = \varphi(t) + \alpha(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = f_\Delta\, m(t) + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\alpha(t))}_{\frac{1}{4\pi^2}(4\pi^2 f^2)G_\alpha(f) = \underbrace{\frac{f^2}{2S_R}G_{nq}(f)}}$$

(چگالی طیف توان نویز در خروجی دمودلاتور FM)




اگر اندکی بازه‌ی فیلتر LPF زیاد شود مقدار نویز بیشتری در این حالت عبور می‌کند حال اینکه در حالت قبل اینطور نمی‌شود.

$$N_D = \int_{-W}^{+W} \frac{N_0}{2S_R} f^2\, df = \frac{N_0}{S_R}\frac{W^3}{3} = \frac{W^2}{3\gamma}$$

$$S_D = f_\Delta^2 P_m$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{f_\Delta^2 P_m 3\gamma}{W^2} = 3\beta^2 P_m \gamma$$

فرض‌ها: اولاً از بیشتر بودن $\left(\frac{S}{N}\right)_R$ از آستانه مطمئن باشیم.

در اینجا سیگنال به نویز با توان دوم پهنای باند زیاد می‌شود

$$B_T = 2W(1+\beta)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{FM} = 3\beta^2 P_m \frac{S_R}{N_0 W}$$

به ازای یک نویز معین و پیام معین (دست ما نیست) ما می‌توانیم با تغییر $S_R$ و $\beta$ سیگنال به نویز را بهبود دهیم

هرچه $S_R$ را زیاد کنیم سیگنال به نویز بهتری می‌گیریم

اگر پهنای باند را خیلی زیاد کنیم آنگاه نویز بیشتری به ورودی دمودلاتور می‌رسد و این یعنی سیگنال به نویز به حد آستانه پایین نزدیک می‌شود و دیگر روابط فوق برقرار نخواهند بود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\frac{S_R}{N_R} \geqslant 10$$

$$N_R = N_0 B_T = 2N_0 W (1+\beta)$$

$$\therefore S_R/N_R = \left(\frac{S_R}{2N_0W(1+\beta)}\right) \geqslant 10 \Rightarrow \frac{S_R}{N_0W} \geqslant 20(1+\beta) \Rightarrow \gamma_{th} = 20(1+\beta)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D \geqslant 40\beta^2(1+\beta)P_m$$

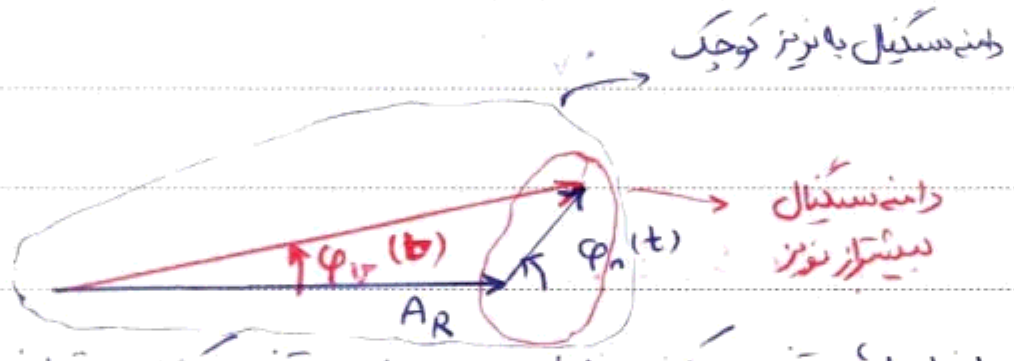
باحداقل توان ممکن ارسالی، $\left(\frac{S}{N}\right)_D = 50^{dB}$ را بدست آورید

نامساوی فوق را با تساوی تبدیل شده و سیگنال به نویز در سر دمدولاتور دقیقاً ۱۰ خواهد بود

β بدست می‌آید، $B_T$ را از روی آن حساب می‌کنیم مثلاً $\Longrightarrow 2W(1+\beta)^{5} = 220^{kHz}$

باید
و چون در دسترس $180^{kHz}$ است از روی $18^{kHz}$، $\beta'$ را بدست آورده و بقیه مسأله را با آن حل می‌کنیم.

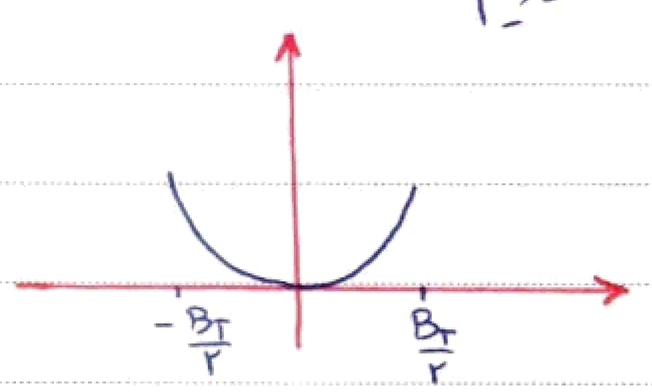
سیگنال را خاموش می‌کنیم $\Rightarrow A_R \cos 2\pi f_c t + R_n(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi_n(t)) = v(t)$

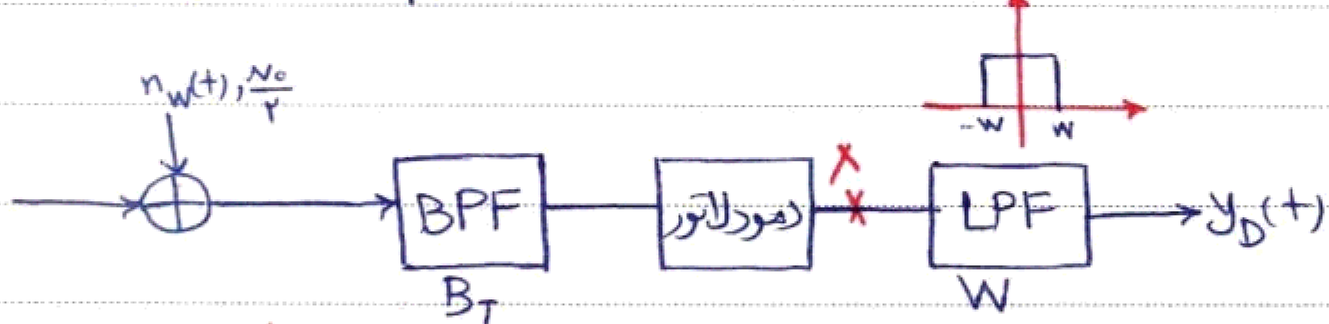


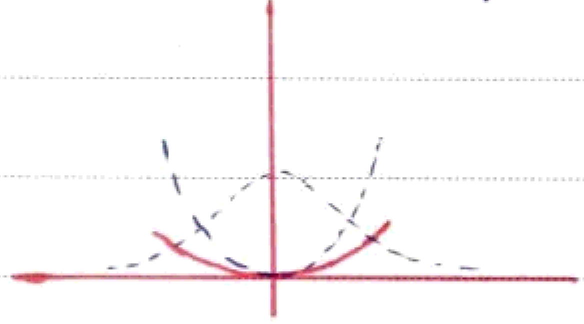

بردار مربوط به نویز در هر لحظه هم زاویه و هم اندازه‌اش تغییر می‌کند بنابراین هر جا این در تغییر کند می‌توانیم ناحیه‌ای را بکشیم که $\varphi_v(t)$ در آن تغییر می‌کند. حال اگر $R_n(t)$ کوچک باشد این ناحیه کوچک است و تغییرات $\varphi_v(t)$ نمی‌تواند زیاد شود اما اگر دامنه نویز از سیگنال زیادتر شود آنگاه ناحیه بزرگ شده و امکان دارد با تغییر اندک زمان $\varphi_v(t)$ زیاد تغییر کند و امکان دارد در بعضی مواقع ضربه‌هایی را نیز ایجاد کند که مطلوب نمی‌باشد.

نویز FM متناسب با عکس توان سیگنال است. در رادیو وقتی روی یک موج هستیم و می‌خواهیم به موج دیگر برویم در بین راه نویز داریم زیرا در اینجا سیگنال صفر است ولی در موج دیگر چون سیگنال اعمال می‌شود سیگنال به نویز افزایش یافته و صدا را می‌شنویم.

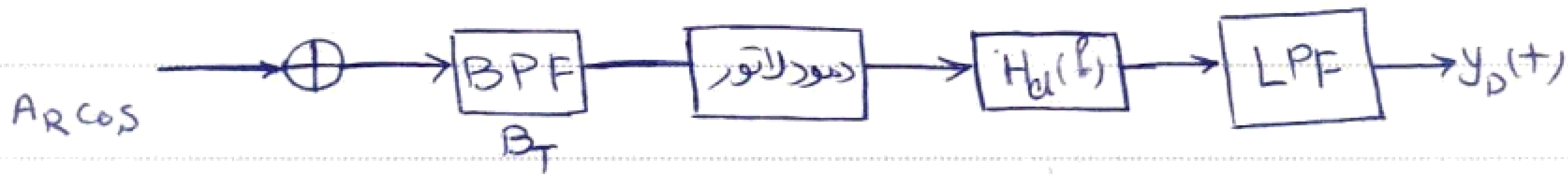
همانطور که دیدیم در مکان طیف توان نویز در خروجی دمودلاتور FM داریم.
هرچه فرکانس کار بالا رود انرژی نویز عبوری زیاد می‌شود.

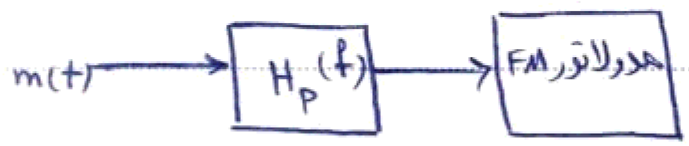


اگر در نقطه x یک فیلتر RC ساده قرار دهیم آنگاه داریم
اما این فیلتر سیگنال را نیز تضعیف می‌کند.
برای رفع این مشکل در فرکانس‌های بالا پیام تقویت می‌شوند و بنابراین با فیلتر RC، این پیام به حالت عادی خود باز می‌گردد و نویز تضعیف می‌شود.
عمل در فرستنده تأکیدگر و در گیرنده واتأکیدگر می‌گویند.
ی کتاب کارلسون را حل کنید.




$H_d(f)\,H_p(f) = 1$

تا هنگامی که در مورد سیگنال بحث می‌کنیم چشم خود را بر تأکیدزدایی ببندیم.

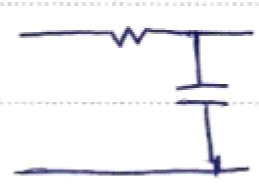
$$(N_D)_{\text{با تأکید}} = \int_{-W}^{W} \frac{N_0 f^2}{2 S_R} |H_d(f)|^2 \, df << (N_D)_{\text{بدون تأکید}}$$

$$(S_D)_{\text{با تأکید}} = (S_D)_{\text{بدون تأکید}}$$

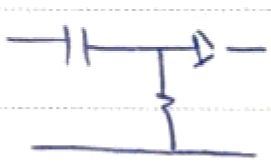
$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\text{با تأکید}}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{D,\text{بدون تأکید}}} = \frac{(N_D)_{\text{بدون تأکید}}}{(N_D)_{\text{با تأکید}}} >> 1$$

پس در ذات مدولاسیون FM هم تأکیدگر و واتأکیدگر وجود دارد، هم آستانه رعایت شده است.

اگر فیلتر $H_d(f)$ به صورت



استفاده شود آنگاه $H_p(f)$ به صورت

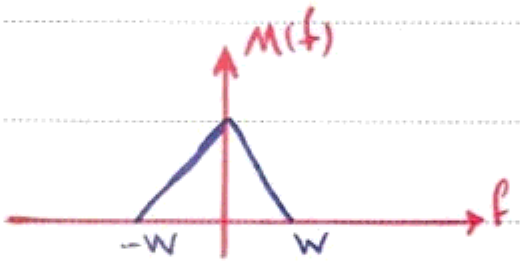


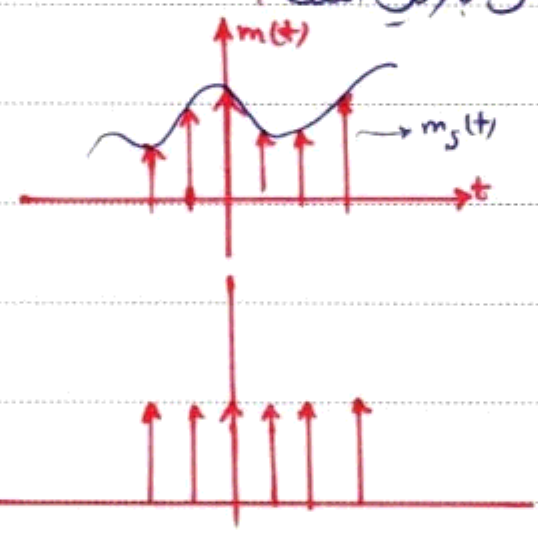
خواهد بود.

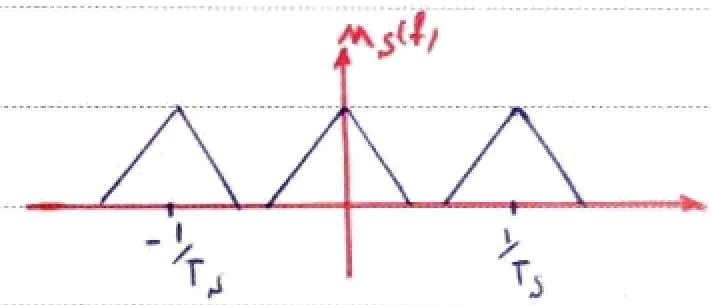
در مدولاسیون خطی با افزایش دامنه عرض باند تغییری نمی‌کرد ولی در مدولاسیون غیرخطی با افزایش دامنه عرض باند زیاد می‌شود، پس با افزایش دامنه سیگنال فرکانس‌های بالا تقویت می‌شوند.

اساس مخابرات دیجیتال تقریباً نمونه‌برداری است. یعنی به جای یک سیگنال نمونه‌هایی از آن را ارسال می‌کنیم.

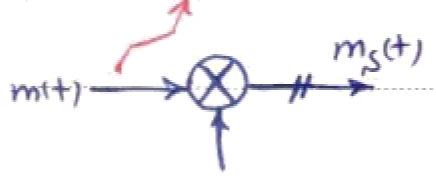
دامنه‌ی بحث band limited بودن سیگنال است. فرض کنیم $m(t)$ سیگنالی با باند محدود با عرض باند $W$ باشد. سیگنال $m(t)$ را وارد نمونه‌گیری کنیم. نمونه‌گیر ایده‌آل ضرب در قطار ضربه بود. نمونه‌گیر غیرایده‌آل نیز پالس‌هایی با سطح واحد، عرض باریک است.




اینجا نیز معمولاً یک LPF می‌گذاریم تا مطمئن شویم سیگنال محدود باند است




از لحاظ تئوری ما عرض باندی بی‌نهایت برای ارسال $m_s(t)$ نیاز داریم.

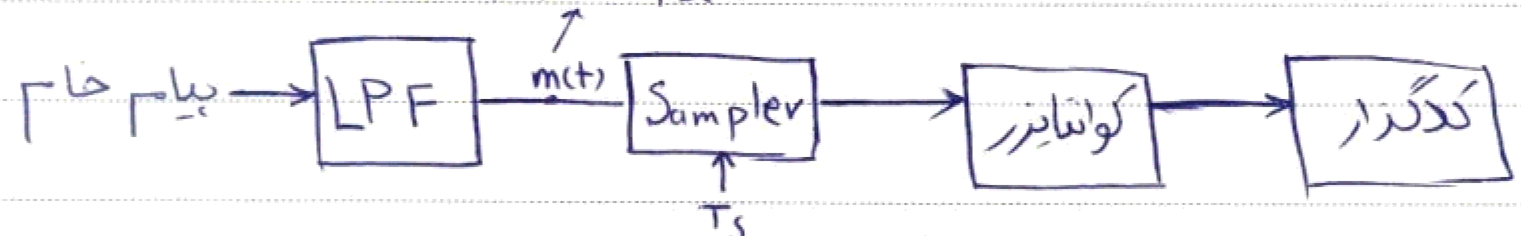
$$\sum \delta(t-kT_s) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s}\delta(f-nf_s)$$

$\Rightarrow f_s \geq 2W$ → نرخ نمونه‌برداری نایکوئیست

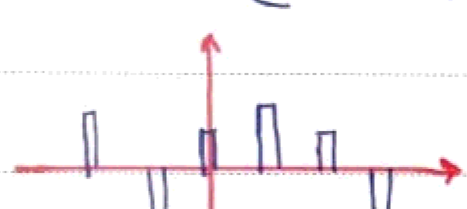
## معرفی سیستم PCM: Pulse Code Modulation

یک ATD در بخش فرستنده و یک DTA در بخش گیرنده داریم.

پیام محدود باند با عرض باند W هرتز




در نمونه‌گیری غیره ایده‌آل نیز به جای ضربه پالس‌های باریک را داریم و فقط، در $M_s(f)$ سطح $M(f)$های شیفت یافته متفاوت است.



PCM: در باینری عددی مثل $Q$ انتخاب کرده، بازه‌ی $[-1,1]$ را به $Q$ قسمت تقسیم کرده، مقادیر خروجی نمونه‌گیر را به نزدیک‌ترین مقدارش گرد می‌کنیم. به این عمل که توسط کوانتایزر انجام می‌شود کوانتیزه کردن می‌گوییم.

اگر مثلاً ۸ سطح داشته باشیم آنگاه با سه بیت باینری می‌توانیم این مقادیر را به طور کامل مشخص کنیم.

رشته‌ی $(q=2^k)$ $k$ تایی را مشخص کرده و ارسال می‌کند که $k$ تای اول مشخص‌کننده‌ی اولین و $k$ تای دوم مشخص‌کننده‌ی دومین نمونه، و به همین ترتیب می‌باشد.

بنابراین ATD عبارتست از یک نمونه‌بردار، کوانتایزر، کدگذار

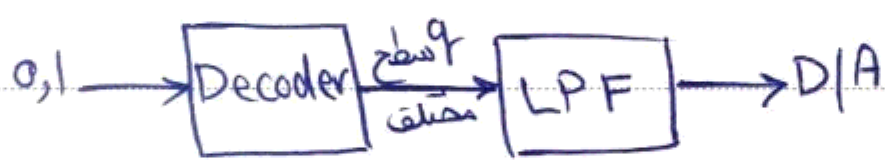
چون هر نمونه با یک رشته‌ای فرستاده شد، که در آن دو تنوع است به آن binary PCM گفته می‌شود.

در Mary PCM رابطه‌ی $q = M^k$ خواهیم داشت.

پس سیگنال آنالوگ وارد شد و در خروجی یک رشته‌ی صفر، یک خارج شد.

هرچه عرض باند پیام بیشتر شود سیگنال دیجیتالی که از خروجی ATD بیرون می‌آید فرکانس بیشتری از لحاظ نمونه برداری دارد.

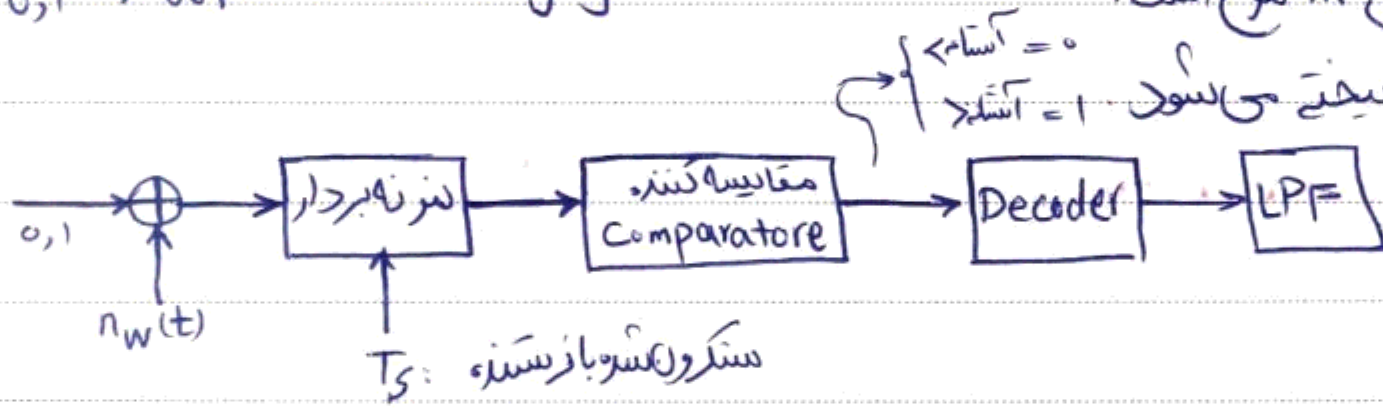
در سمت گیرنده آنچه مهم است Timing است که این قضیه با کلاک سنکرون شده در فرستنده و گیرنده حل می‌شود.




$0,1 \rightarrow OOK$ = on off keying

در Mary، هر بردار شامل M تنوع است.

در عمل سیستم به نویز آمیخته می‌شود.



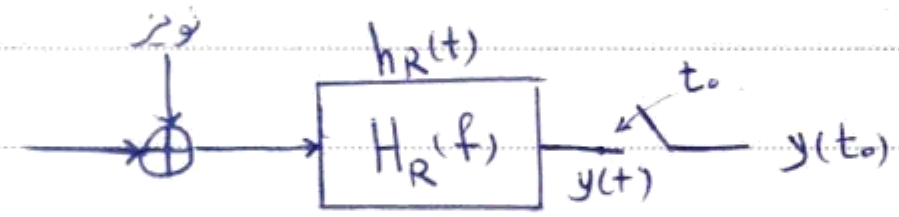

بنابراین صفر و یک‌ها علاوه بر تضعیف، نویزی نیز شده‌اند.

بهترین سطح آستانه $\frac{1}{2}$ است با فرض احتمال صفر و یک بودن برابر باشد و ثانیاً نویز از نوع AWGN باشد

در اینجا خطا داریم. زیرا امکان دارد

گیرنده‌ی بهینه گیرنده‌ای است که بهترین آستانه را داشته باشد یعنی آستانه طوری انتخاب شده که کمترین خطا را داریم.

حال می‌خواهیم در خروجی جمع‌کننده LPF بگذاریم که مقادیر را در جاهایی که نمونه‌برداری می‌کنیم سیگنال را بدون تغییر عبور داده و نویز را کم کند. نیاز نداریم بدانیم این فیلتر در جاهایی که نمونه نداریم چه می‌کند. مهم اینست که مقادیر در محل‌هایی که می‌خواهیم نمونه برداریم تغییری نکنند. به این فیلترها، فیلترهای تطبیقی می‌گویند.




قرار است از خروجی جمع کننده سیگنال و نویز نمونه بگیریم. مهم اینست که آلودگی نمونه به نویز کم باشد. برای این منظور از فیلترهای تطبیقی استفاده می کنیم.

## Match Filter — فیلتر تطبیقی (سازگار)

فرض کنیم پالس $s(t)$ رسیده و به نویز $n(t)$ آلوده شده است.

می خواهیم فیلتر تطبیقی را به گونه ای طراحی کنیم که در $y_o(t)=s_o(t)+n_o(t)$، مقدار $\frac{|s_o(t_o)|^2}{E\{n_o^2(t_o)\}}$ ماکسیمم شود.

$$SNR=\frac{|s_o(t_o)|^2}{E\{n_o^2(t_o)\}}$$

بنابراین در اینجا مهم اینست که آلودگی نویز در نمونه ها کم باشد.

$$s_o(t)\xleftrightarrow{F} S_o(f)=S(f)H_R(f)$$

$$\Rightarrow s_o(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)H_R(f)e^{j2\pi ft}df \Rightarrow s_o(t_o)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)H_R(f)e^{j2\pi ft_o}df$$

$$E\{n_o^2(t_o)\}=\int_{-\infty}^{\infty}G_n(f)|H_R(f)|^2df$$

$$SNR=\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(f)H_R(f)e^{j2\pi ft_o}df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}G_n(f)|H_R(f)|^2df}$$

$S(f)$، $t_o$ و $G_n(f)$ معلوم شد حال می خواهیم $H_R(f)$ را به گونه ای انتخاب کنیم که SNR ماکسیمم شود.

طبق نامساوی شوارتز داریم:

$$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}V(f)W^*(f)df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|V(f)|^2df}\leq\int_{-\infty}^{\infty}|W(f)|^2df$$

در حالتی به تساوی تبدیل می شود که $V$ ضریبی اسکالر از $W$ باشد. $V=kW$

$$V(f) = H_R(f)\, G_n^{1/2}(f)$$

$$W(f) = \frac{S^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}{G_n^{1/2}(f)}$$

بنابراین حداکثر سمت چپ وقتی است که $V = kW$.

$$\Rightarrow H_R(f)\, G_n^{1/2}(f) = k\,\frac{S^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}{G_n^{1/2}(f)} \Rightarrow H_R(f) = k\,\frac{S^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}{G_n(f)}$$

این فرآیند ۲۰-۳۰ dB سیگنال به نویز را افزایش می‌دهد
در هر فرکانسی که $G_n(f)$ زیاد است در آنجا $H_R$ کم است و برعکس پس $H_R(f)$ به نفع سیگنال و با ضرر نویز کار می‌کند.

حال می‌خواهیم سیگنال به نویز ماکسیمم را بدست آوریم.

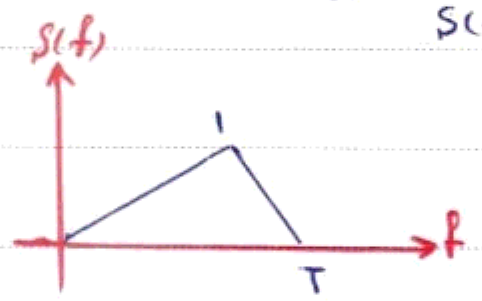
$$(SNR)_{MAX} = \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{G_n(f)}\, df$$

$k$ در سیگنال به نویز تأثیری ندارد.

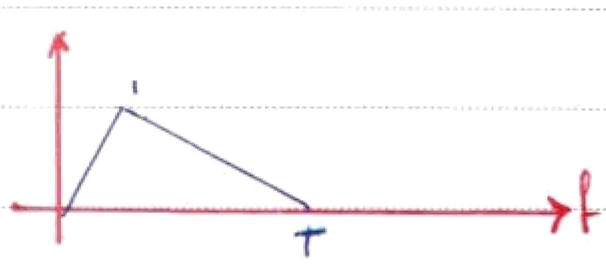
فیلتر سازگار در حضور AWGN:

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow H_R(f) = \frac{2k}{N_0}\, S^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\therefore\ h_R(t) = \frac{2k}{N_0}\, \underbrace{s(t_0 - t)}_{s(-t) \to t \to t - t_0}$$




فرض کنیم گفته شود پالس مقابل وارد فیلتر تطبیقی شود.
می‌خواهیم پاسخ ضربه فیلتر را بدست آوریم.
اگر $t_0 < T$ باشد فیلتر علی نیست و قابل پیاده‌سازی نمی‌باشد پس
باید $t_0 \geq T$ بگیریم.




محاسبه انرژی سیگنال و نویز با تفکیک:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبه تحلیلی انرژی‌های سیگنال و نویز:

$$(SNR)_{max} = \frac{2E}{N_0}$$

$$(SNR)_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{G_n(f)} df = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

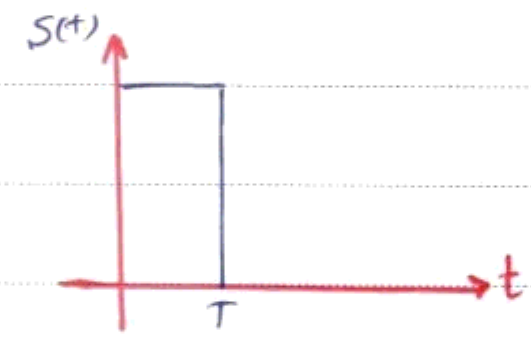
$$S_o^2(t_0) = ?$$

$$S_o(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df \Rightarrow S_o(t_0) = \int \frac{2k}{N_0} S^*(f) S(f) df = \frac{2k}{N_0} E$$

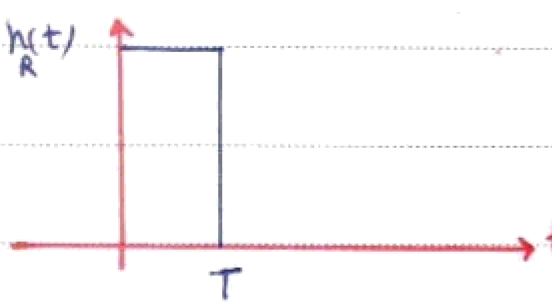
$$\left.\begin{array}{l} S_o^2(t_0) = \dfrac{4k^2E^2}{N_0^2} \\ \\ E\{n_o^2(t)\} = \displaystyle\int \frac{N_0}{2} \frac{4k^2}{N_0^2} |S(f)|^2 df = \frac{2k^2}{N_0} E \end{array}\right\} \Rightarrow (SNR)_{max} = \frac{2E}{N_0}$$

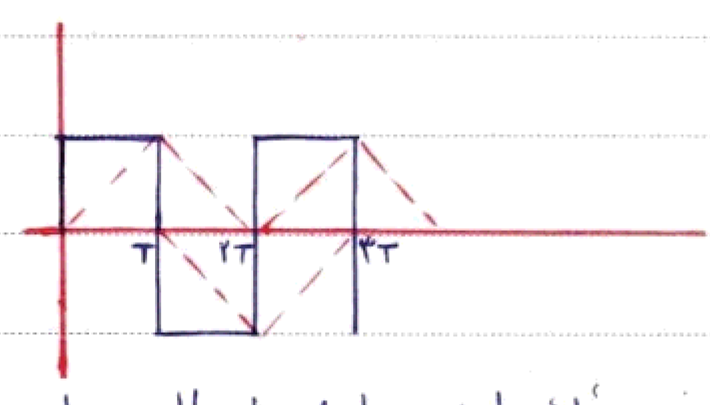
همانطور که دیدیم k در انرژی هر دو سیگنال به طور مستقل حضور دارد ولی در $(SNR)_{max}$ تأثیری ندارد.

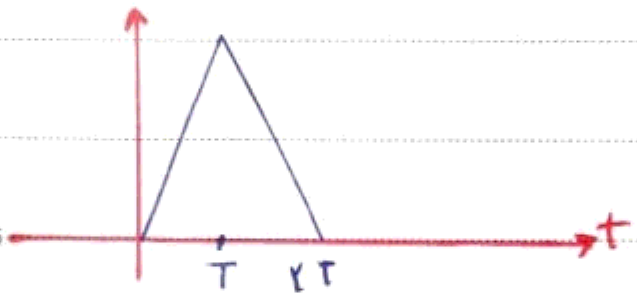
مثال: یک رشته پالس $+a$ و $-a$ در حضور AWGN به گیرنده می‌رسد. برای این سیستم فیلتر تطبیق طراحی کنید همچنین در غیاب نویز شکل موج خروجی از فیلتر تطبیق را رسم کنید.
اگر فیلتر برای پالس $a$ تطبیق باشد آنگاه برای پالس $-a$ نیز تطبیق خواهد بود.




یک پالس $+a$ را در نظر می‌گیریم.
Match Filter هم به نویز وابسته است و هم به خود سیگنال

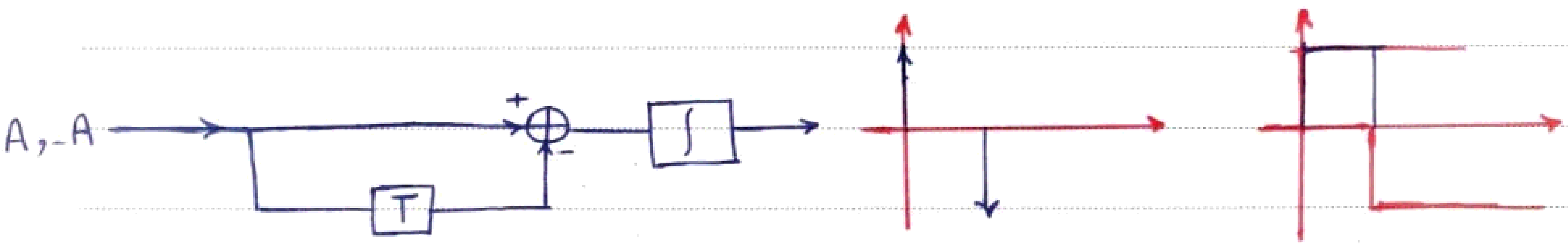


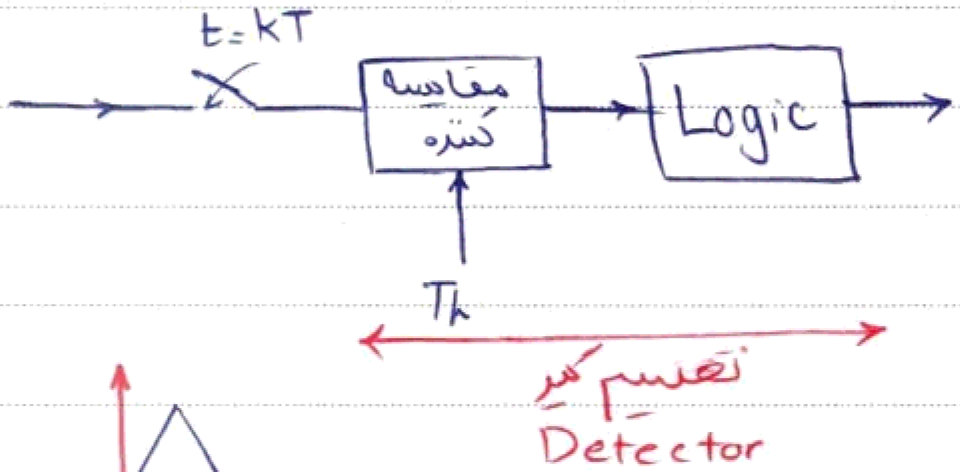




همانطور که می‌بینیم مثلث‌های مربوط به سایر پالس‌ها در نقطه نمونه‌گیری مربوط به پالسی خاص صفر بود. و در آن تأثیری ندارند.

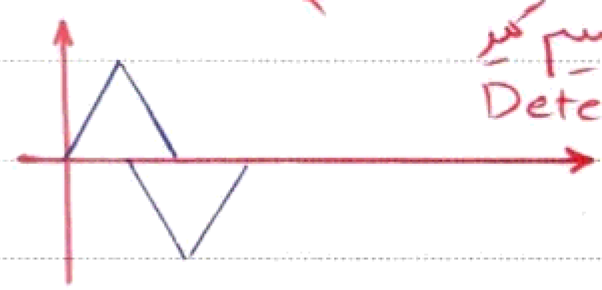
می‌خواهیم بلوک دیاگرام مربوط به Match Filter را طراحی کنیم.




T عرض هرکدام از پالس‌هاست.

در مثال قبل به مثلث‌های مقابل رسیدیم:



می‌توانیم به جای المان تأخیر از I&D استفاده کردیم و با انیکاری توانیم ترک مثلث‌ها را بدست آوریم اما انیکار باعث می‌شود توان نویز دو برابر شود و به این حالت فیلتر نیمه تطبیق می‌گویند.

Error Control Coding

احتمال خطا در سیستم‌های مخابرات دیجیتال:

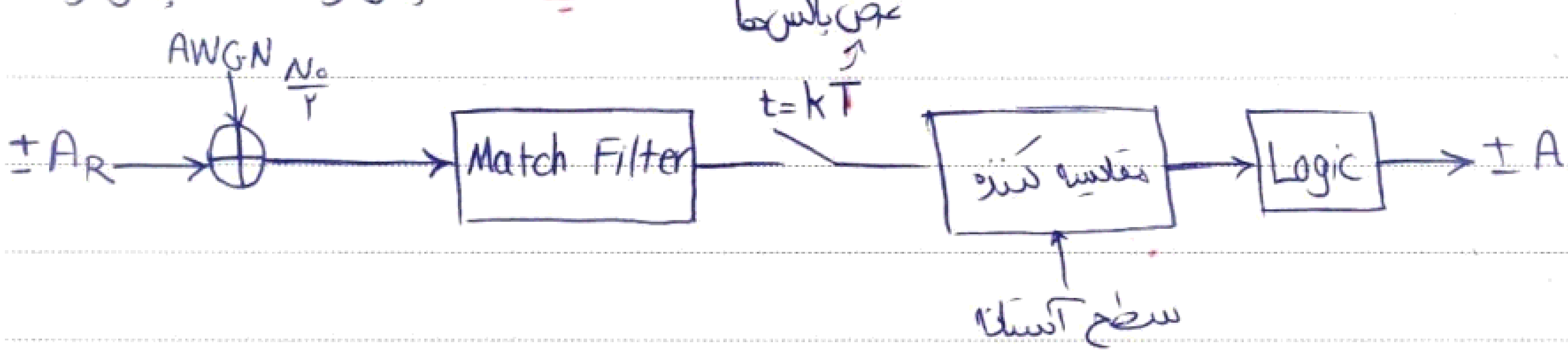
با اضافه کردن Parity check می‌توانیم از خطادار بودن یک سیگنال آگاه شد و بتواند آن را تصحیح نیز کند.

بررسی عملکرد سیستم باینری باند پایه (بهینه) در حضور AWGN:

در اینجا می‌خواهیم از گوسی بودن نویز نیز استفاده کنیم.

$\underbrace{\pm A}_{\text{پالس فرستاده‌شده}}$ $\underbrace{\pm A_R}_{\text{پالس دریافت‌شده}}$

R → تضعیف محیط.



امکان خطا وجود دارد. می خواهیم احتمال این خطا را محاسبه کنید.

k-امین نمونه

$$r_k = \underbrace{\pm A_0}_{S_0(kT)} + n_k$$

در بحث خود به جای $\frac{2k}{N_0}=1$ گرفتیم و در نتیجه $k=\frac{N}{2}$

$$n_k = N(0,\sigma^2)$$

$$\sigma^2 = E\{n_k^2\} - (\cancel{E\{n_k\}})^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}|H_R(f)|^2 df = \frac{N_0 E}{2}$$

$$A_0 = E \qquad S_0(t_0) = \frac{2kE}{N_0}\Big|_{k=\frac{N}{2}} = E$$

$$\Rightarrow r_k = N\left(\pm A_0 , \frac{N_0 E}{2}\right)$$

در محاسبات خود به جای k از $\frac{N_0}{2}$ استفاده کردیم زیرا k در سیگنال به نویز نقشی ندارد

$P(A_R|r_k) > P(-A_R|r_k) \Rightarrow$ A ارسال شده است.

$P(-A_R|r_k) > P(A_R|r_k) \Rightarrow$ -A ارسال شده است.

با انجام کار فوق احتمال خطای سیستم را حداقل کرده‌ایم.

$$\xRightarrow[\text{معادل}]{\text{باطور}} P(A|r_k) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} P(-A|r_k)$$

$$\frac{P(A,r_k)}{\cancel{P(r_k)}} \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} \frac{P(-A,r_k)}{\cancel{P(r_k)}} \Rightarrow P(A)\,P(r_k|A) \underset{-A}{\overset{A}{\gtrless}} P(-A)\,P(r_k|-A)$$

$P(A)$ , $P(-A)$ را داریم و با آنها احتمالا بیشتر می‌گردند.

$$P(r_k|A) = P(r_k|A_R) = P(r_k|A_0)$$

$$\Rightarrow P(r_k|A_R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(r_k-A_0)^2/2\sigma^2}$$

$$P(r_k|-A_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_k+A_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{P(A)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_k-A_0)^2}{2\sigma^2}} > \frac{P(-A)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_k+A)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \ln P(A) - \frac{(r_k-A_0)^2}{2\sigma^2} > \ln P(-A) - \frac{(r_k+A)^2}{2\sigma^2}$$

یک نامساوی برحسب $r_k$ بدست می‌آوریم که بر مبنای آن $A_0$ یا $-A_0$ می‌گیریم.

$r_k$ بدست آمده سطح آستانه را مشخص می‌کند.

مثال: نشان دهید

تکمیل چند مطلب :

تراز گرها — Equ

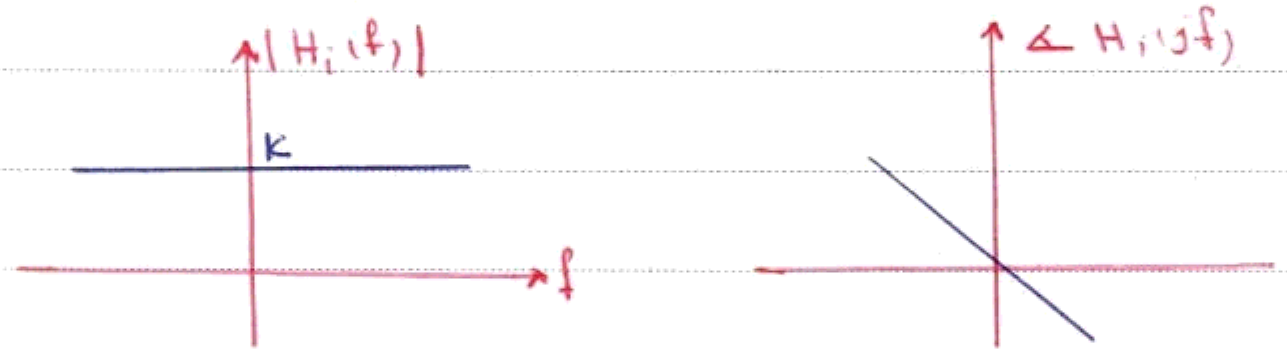
کانال های خطی : این کانال ها را می توان مثل یک سیستم LTI مدل کرد.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H_c(f)} \longrightarrow y(t)$$

رابطه مقابل مربوط به کانالی ایده آل است

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H_i(f)} \longrightarrow y(t) = k\,x(t-t_d)$$

$$X(f) \xrightarrow{\text{کانال ایده آل}} Y(f) = k\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_d} \Rightarrow H_i(jf) = k\,e^{-j2\pi f t_d}$$




در واقعیت کانال ایده آل نداریم یعنی هیچکدام از نمودارهای فوق نمی تواند برقرار باشد

اگر اندازه ی پاسخ فرکانسی خط راست نباشد به پدیده ی حاصل اعوجاج دامنه ای می گویند

اگر فاز پاسخ فرکانسی خط راست مورب نباشد به پدیده ی حاصل اعوجاج فاز می گویند

معمولاً هر دو اعوجاج رخ می دهند اما اینکه کدام یک غالب است ، به سیستم وابسته است.

حال فرض کنیم که مشخصاً کانال را می دانیم

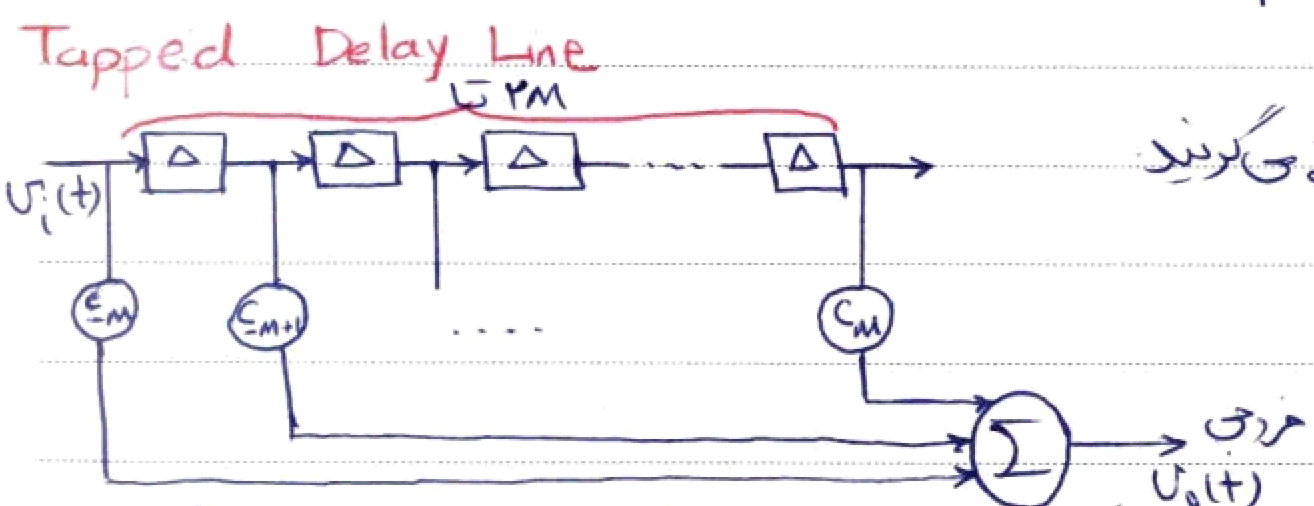
$$x(t) \longrightarrow \boxed{H_c(jf)} \longrightarrow \underset{Eq}{\boxed{\text{ترازگر}}} \longrightarrow y(t)$$

$$H_c(f)\,H_{eq}(f) = \underbrace{k\,e^{-j2\pi f t_d}}_{\text{پاسخ فرکانسی کانال ایده آل}} \Rightarrow H_{eq}(f) = \frac{k\,e^{-j2\pi f t_d}}{H_c(f)}$$

هیچکس نمی‌تواند به ترازگر فوق دست یابد زیرا ترکیب دو سیستم به کانال ایده‌آل تبدیل شده و باز هم مشکل غیرعلی بودن را داریم.

حال می‌خواهیم $H_{eq}(f)$ را سنتز کنیم برای این سنتز از مدل زیر استفاده می‌کنیم

Tapped Delay Line




این مدل را خطوط تأخیر انشعاب یافته می‌گویند

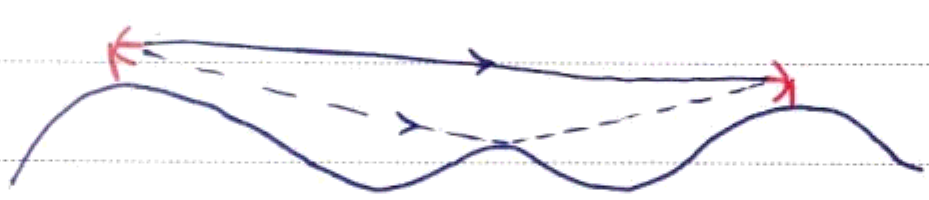
می‌خواهیم با مقادیر فوق به گونه‌ای بازی کنیم که پاسخ فرکانسی کل بلوک پاسخ فرکانسی ترازگر گردد.

$$V_o(t) = C_{-M}V_i(t) + C_{-M+1}V_i(t-\Delta) + \dots + C_0 V_i(t-M\Delta) + \dots + C_M V_i(t-2M\Delta)$$

$$\xrightarrow{F} V_o(f) = C_{-M}V_i(f) + C_{-M+1}V_i(f)e^{-j2\pi f\Delta} + \dots$$

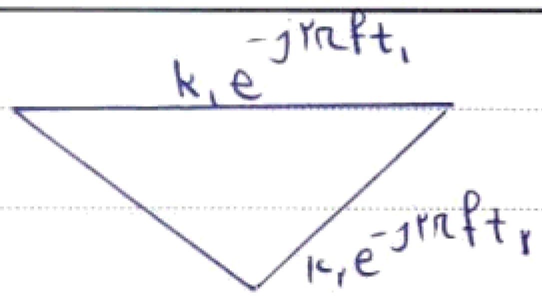
$$\Rightarrow H_{eq}(f) = C_{-M} + C_{-M+1}e^{-j2\pi f\Delta} + C_{-M+2}e^{-j2\pi f(2\Delta)} + \dots + C_0 e^{-j2\pi f M\Delta} + \dots + C_M e^{-j2\pi f 2M\Delta}$$

$$\Rightarrow e^{-jM\omega\Delta}\sum_{m=-M}^{M} c_m e^{-jm\Delta\omega}$$



مثال: می‌خواهیم یک ترازگر طراحی کنیم
طراحی ترازگر برای مخابرات دو راهه.

سیگنال از دو راه به گیرنده می‌رسد، می‌توان یکی را از سر راه برداشت و یا اینکه یک ترازگر قرار دهیم.
حال می‌خواهیم $H_c(f)$ را بدست آوریم تا با استفاده از آن ترازگر را طراحی کنیم
پدیده‌ی Fading نیز حالتی است که دو سیگنال همدیگر را خنثی کنند که در این حالت تضعیف نداریم اما چون دو سیگنال به گونه‌ای تغییر فاز داده‌اند که همدیگر را خنثی کرده‌اند، سیگنال از بین می‌رود
F باعث تغییر شرایط جوی نیز رخ می‌دهد.

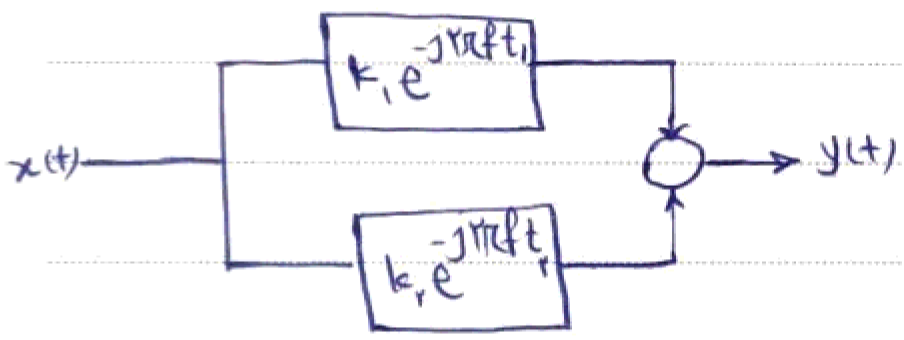



$t_1, t_2$ و همچنین $k_1, k_2$ با دقت بسیار زیادی داده می‌شوند.

$$y(t) = k_1 x(t-t_1) + k_2 x(t-t_2) \neq k x(t-t_d)$$

تقریب $k_2 << k_1$ فرض کاملاً معقول است زیرا با افزایش مسیر انرژی بسیار کاهش می‌یابد

ما دنبال $H_c(f)$ هستیم و بعد می‌خواهیم از روی آن ترازگر خود را طراحی کنیم.




$$H_c(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = k_1 e^{-j2\pi f t_1} + k_2 e^{-j2\pi f t_2}$$

$$H_{eq}(f) = \frac{\overset{\text{دلخواه}}{k \; e^{-j2\pi f t_d}}}{k_1 e^{-j2\pi f t_1} + k_2 e^{-j2\pi f t_2}}$$

هیچگاه نمی‌توان $H_{eq}(f)$ فوق را طراحی کردن و تنها می‌توان با تقریبی از آن دست یافت.

$$H_{eq}(f) = \frac{k e^{-j2\pi f t_d}}{k_1 e^{-j2\pi f t_1}\left(1 + \frac{k_2}{k_1} e^{-j2\pi f (t_2 - t_1)}\right)}$$

با انتخاب فرض های $\left.\begin{matrix} t_d = t_1 \\ k = k_1 \end{matrix}\right\}$ می‌خواهیم مسیر با تأخیر $t_2$ را حذف کنیم

$$\Rightarrow H_{eq}(f) \simeq \frac{1}{1+\epsilon} \simeq 1 - \epsilon + \epsilon^2$$

* اگر شرط $\overbrace{\text{برقرار}}^{k_2 << k_1}$ نبود، راه‌حل درست نبود

$$\Rightarrow H_{eq}(f) = 1 - \frac{k_2}{k_1} e^{-j2\pi f (t_2 - t_1)} + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 e^{-j2\pi f\, 2(t_2 - t_1)}$$

$M=1$ باشد، تعداد Delay Line ها ۲ و در نتیجه سه جمله داریم

$M = 1$

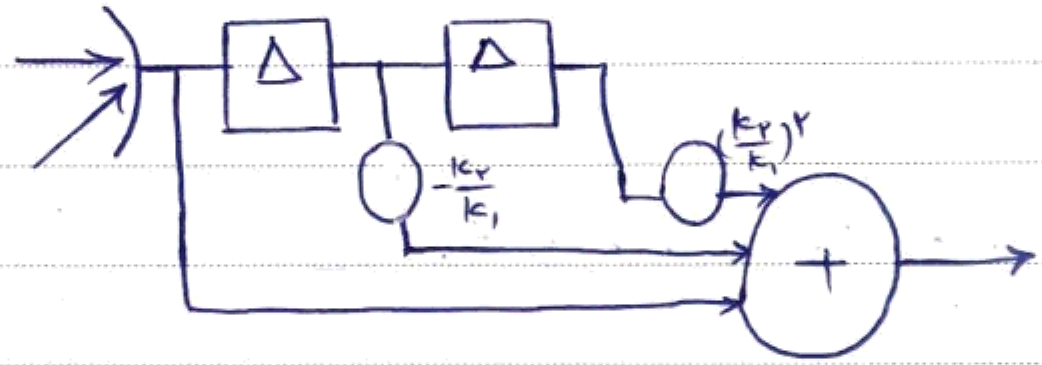
$\Delta = t_2 - t_1$

پشت آشکارگیرنده ترازگر را قرار می دهیم

$C_{-1} = 1$

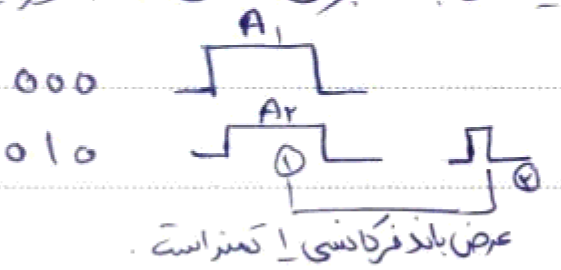
$C_0 = -\frac{k_2}{k_1}$

$C_1 = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2$




در مخابرات نوری محیط انتشار از جنس شیشه است. در مخابرات الکتریکی محیط‌های انتشار یا محیط آزاد است و یا مس می باشد.

در مس خام معمولاً فرکانس‌های بالا به خوبی ارسال نمی‌شود لذا می توان هر بیت را با سمبلی نشان داد و در نتیجه عرض باند را کم کرد.




در کابل های هم محور نیز پاسخ فرکانسی کابل پهن تر می گردد.

اگر $A_i \cos 2\pi f_i t$ را وارد یک کابل کنیم داریم.

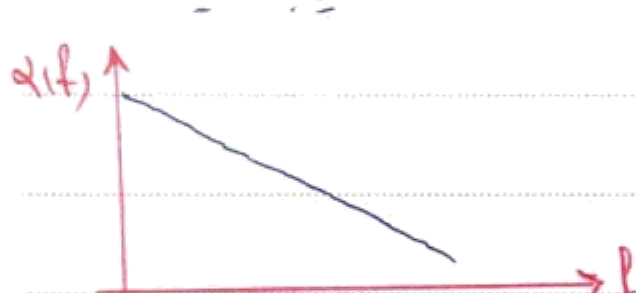
$$A_i \cos 2\pi f_i t \longrightarrow \boxed{\text{کابل}} \longrightarrow A_o \cos(2\pi f_i t + \theta_i)$$

$A_o$ فرکانس با فرکانس عوض می شود.

$$\frac{P_{in}}{P_{out}} = \frac{\frac{A_i^2}{2}}{\frac{A_o^2}{2}} = \left(\frac{A_i}{A_o}\right)^2 = L(f)$$

$$L(f)_{dB} = \underbrace{\alpha(f)}_{\text{ضریب تضعیف}}\, l \rightarrow \text{کیلومتر}$$

اگر $L = 1$ بگذاریم آنگاه $\alpha(f)$ یعنی تضعیف هر کیلومتر در فرکانس خاص برحسب dB می باشد.




ثابت k روی کابل ها به این معنی است که سرعت نور در کابل k برابر سرعت نور در خلأ است.

اگر مثلاً در فرکانس بالا سروکار داریم تضعیف بیشتر برده و لذا با کابل های بهتری نیاز داریم.

اگر طول دو برابر شود اگرچه تضعیف برحسب dB دو برابر می‌شود اما تضعیف نمایی تغییر خواهد کرد.

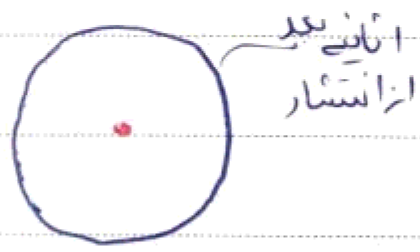
$$L_l(f) = 10^{\frac{\alpha L}{10}}$$
$$L_{kl}(f) = (L_l)^k$$

⇐ در فواصل بلند نباید از کابل استفاده کرد مگر اینکه در فواصل کوتاه، سیگنال را از لحاظ SNR تصحیح کرد و سپس با ادامه راه رفت.

طول متوسط کابلی مورد استفاده $2^{km}$ است.

اگر تضعیف ۱ کیلومتر ۱۰۰ باشد آنگاه تضعیف در طول ۲ کیلومتر $(100)^2$ است.

با همین دلیل به دنبال انتشار رادیویی می‌رویم.

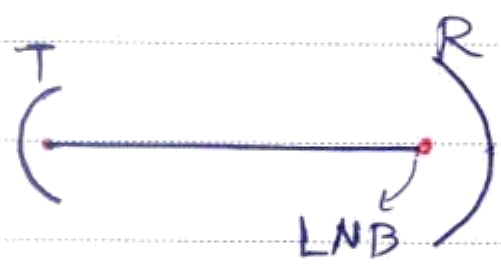



بعد از یک ثانیه انرژی روی کره‌ای به شعاع $300000^{km}$ تقسیم می‌شود.

در مخابرات رادیویی وقتی فاصله d برابر می‌شود، تضعیف در $d^2$ ضرب می‌گردد.

به طور متوسط در هر $40^{km}$، سیگنال رادیویی گرفته شده و یک چیزهایی به آن اضافه و چیزهایی از آن کم می‌شود ولی اگر نخواهیم تغییری در آن دهیم نیز به دلیل انحنای زمین باید این عمل انجام شود.

در انتشار رادیویی می‌توان کانال را ثابت فرض کرد ولی ثابت آن تغییر می‌کند.




سیگنال به کانون می‌خورد و این کانون باعث می‌شود سیگنال در همه‌ی جهات پخش نشود و همه‌ی آن در جهت مورد نظر برود.

directivity ← نسبت توانی که در حالت با آنتن به بدون آنتن را گین آنتن می‌گویند. ویژگی آنتن

collectivity ← ویژگی آنتن گیرنده

در LNB هم تقویت انجام می‌شود و هم تغییر فرکانسی از فرکانس های RF به IF صورت می‌گیرد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برای تولید SSB از DSB استفاده می‌کنیم. اما ما فرض کردیم فیلتر کردن DSB برای تولید SSB ایده‌آل است. اگر فرض ایده‌آل بودن را برداریم از DSB به VSB خواهیم رسید.

می‌توان به VSB یا SSB حامل بزرگی اضافه کرد تا بتوان آن را با