فهرست مطالب

فصل ۱

مبانی مکانیک نیوتنی

۱. مطلوبست محاسبه نیروی جاذبه اعمال شده میان یک الکترون و یک پروتون که به فاصله $۰/۵A^\circ$ از هم قرار گرفته باشند $(۱A^\circ = ۱۰^{-۸}\ cm)$. این نیرو را با نیروی جاذبه الکتروستاتیکی میان آنها درحالی‌که به همین فاصله از یکدیگر قرار گرفته باشند مقایسه کنید.

حل:

مسئله را در دستگاهی که نسبت به الکترون و نسبت به پروتون ساکن است (الکترون و پروتون نیز نسبت به هم ساکن هستند) حل می‌کنیم در غیر این صورت جواب پیچیده می‌شود.

$$e = ۱,۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\ C \qquad \varepsilon_\circ = ۸,۸۴ = ۱۰^{-۱۲} \frac{c^2}{Nm^2}$$

$$_e = ۹,۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\ kg \qquad M_p = ۱,۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\ kg$$

$$G = ۶,۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \frac{N.m^2}{kg^2} \qquad d = ۰,۵ \times ۱۰^{-۱۰}\ m$$

$$F_G = \frac{M_P M_e G}{d^۲} = \frac{(۹,۱۱)(۱,۶۷)(۶,۶۷)}{۲۵} \frac{۱۰^{-۳۱}\ ۱۰^{-۲۷}\ ۱۰^{-۱۱}}{۱۰^{-۲۲}} = ۴,۰۶ \times ۱۰^{-۴۷}\ N$$

$$F_E = \frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ d^۲} = \frac{(۱/۶۰)^۲}{۴\pi \times ۸,۸۴ \times ۲۵} \frac{۱۰^{-۳۸}}{۱۰^{-۱۲}\ ۱۰^{-۲۲}} = ۹,۲۲ \times ۱۰^{-۸}\ N$$

$$۱\ dyne = ۱۰^{-۵}\ N$$

$$F_G = ۴,۰۶ \times ۱۰^{-۴۲}\ dyne$$

$$F_E = ۹,۲۲ \times ۱۰^{-۳}\ dyne$$

$$\alpha = \frac{F_G}{F_E} = ۴,۴۰ \times ۱۰^{-۴۰}$$

۲. ضریب چسبندگی η به وسیله رابطه

$$\frac{F}{A}=\eta\frac{dv}{ds}$$

تعریف می‌شود که در آن F نیروی اصطکاک مؤثر در سطح A و سیالی متحرک و dv اختلاف سرعت دو لایه از سیال است که به موازات سطح A به فاصله ds از هم فرض می‌شوند، فاصله ds در امتداد عمود بر سطح A سنجیده می‌شود. واحدهای چسبندگی η را به صورتی که در سه دستگاه فوت ـ پاوند ـ ثانیه و cgs و mks بیان می‌شود به دست آورید. همچنین مطلوبست محاسبه ضرایبی که برای تبدیل واحد چسبندگی از هریک از سه دستگاه به دو دستگاه دیگر لازم است.

$$\frac{F}{A}=\eta\frac{dV}{ds}\Rightarrow\frac{[F]}{[A]}=[\eta]\frac{[dv]}{[ds]}$$

حل:

با توجه به مطالب ذکر شده در فصل ۱

$$\begin{cases}[F]_{mks}=kgm-m\,sec^{-2}=Newton\rightarrow N\\ [f]_{fps}=lb-ft-sec^{-2}=Poundal\rightarrow pdl\\ [f]_{cgs}=gm-cm-sec^{-2}=Dyne\rightarrow dyne\end{cases}$$

با استخراج مقادیر مورد نیاز از جدول:

$$\left.\begin{array}{l}1\,kgm=10^{3}gm\\ 1\,m=10^{2}cm\end{array}\right\}\Rightarrow 1N=10^{5}dyne$$

$$\left.\begin{array}{l}1\,ft=0.3048\,m\\ 1\,lb=0.4536\,kgm\end{array}\right\}\Rightarrow 1N=7.231\,pdl$$

نکته: pound به‌عنوان واحد نیرو نیز به‌کار می‌رود که همان وزن یک جرم یک پوندی است البته در این مسئله pound واحد جرم است.

$1\ lb-Wt=4.448\ N \qquad 1\ lb=0.4536\ kg$

و البته پوندال (pdl) همیشه واحد نیرو است.

$$\Rightarrow\begin{cases}[\eta]_{mks}=\frac{N.s}{m^{2}}\\ [\eta]_{cgs}=\frac{dyne.s}{cn^{2}}=10^{-1}[\eta]^{mks}\\ [\eta]_{fps}=\frac{pdl.s}{(ft)^{2}}=1.489[\eta]_{mks}\end{cases}$$

برای مثال اگر برای نوعی سیال $\eta=10^{3}(\frac{N.S}{m^{2}})$

$$\eta=10^{3}\times[10(dyne.s/cm^{2})/1(N.s/m^{2})](\frac{N.s}{m^{2}})$$

$$\Rightarrow\eta=10^{4}(\frac{dyne.s}{cm^{2}})$$

$$\eta=10^{3}\times[(pdl.s/(ft)^{2})/1.489(N.s/m^{2})](\frac{N.s}{m^{2}})$$

$$\eta=10^{3}(\frac{1}{1.489})(\frac{pdl.s}{(ft)^{2}})=671.6\frac{pdl.s}{(ft)^{2}}$$

توجه کنید که بدلیل آنکه $\frac{pdl.s}{(ft)^{2}}=1.489\frac{NS}{m^{2}}$ پس مقدار کسر

$$\left(\frac{\frac{pdl.s}{(ft)^{2}}}{1.489\frac{N.S}{m^{2}}}\right)$$

برابر یک است و می‌توان این عدد یک را در $\eta=10^{3}(\frac{N.S}{m^{2}})$ ضرب کرد تا $\frac{N.S}{m^{2}}$ ساده شود و $\frac{pdl.s}{(ft)^{2}}$ جای آنرا بگیرد و بقیه کار تقسیم عددی است.

۳. سیالی در لوله‌ای استوانه‌ای به طول L و شعاع a سیلان می‌کند. اختلاف فشار ΔP (نیرو بر واحد سطح) سبب می‌شود که یک شار ϕ (حجم در ثانیه) در لوله سیلان کند. فرض کنید که ΔP متناسب با L است و در غیر این صورت فقط به ϕ، شعاع لوله a، و به چسبندگی η (که در مسئله ۲ تعریف شده است) بستگی دارد. با درنظر گرفتن ملاحظات بعدی نشان دهید که ΔP باید متناسب با η و ϕ و بطور معکوس متناسب به a^{4} هم باشد.

حل:

$$[a]=[L]=\ell$$

$$[\eta]=\frac{N.S}{m^{2}}=\frac{(kg).m}{s^{2}}(\frac{1}{m^{2}})=ML^{-1}T^{-1}$$

$$[a]=[L]=\ell$$

$$[\eta]=\frac{N.S}{m^{2}}=\frac{(kg).m}{s^{2}}(\frac{1}{m^{2}})=ML^{-1}T^{-1}$$

$$[\phi]=\frac{m^{3}}{s}=L^{3}T^{-1}$$

$$[\Delta P]=\frac{N}{m^{2}}=\frac{(kg).m}{s^{2}}(\frac{1}{m^{2}})=ML^{-1}T^{-2}$$

$$\Delta P = C\,(a^{\alpha})\,(\phi^{\beta})\,(\eta^{\gamma})\,(\ell)$$

نمی‌دانیم که ΔP متناسب با چه توانی از هریک از سه کمیت ϕ, a, η است ولی می‌دانیم که با L متناسب است. با بی بعد گرفتن C دیمانسیون هر دو طرف باید یکی شود.

$$ML^{-۱}t^{-۲} = (L^{\alpha})(L^{۳\beta}T^{-\beta})(M^{\gamma}L^{-\gamma}T^{-\gamma})(L)$$

$$ML^{-۱}t^{-۲} = M^{\gamma}L^{\alpha+۳\beta-\gamma+۱}T^{-(\beta+\gamma)}$$

$$\begin{cases}\gamma = ۱\\ \alpha+۳\beta-\gamma+۱ = -۱\\ -(\phi+\gamma) = -۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = -۴\\ \beta = +۱\\ \gamma = +۱\end{cases} \Rightarrow \Delta P = c\ell a^{-۴}\eta\,\phi$$

۴. یک دستگاه واحدها که اغلب توسط مهندسان مکانیک به‌کار برده می‌شود، علاوه بر پا (ft) و ثانیه، نیروی اساسی سومی نیز انتخاب می‌کند به نام پوند-وزن- (که معمولاً فقط پوند نامیده می‌شود). بنابراین واحد جرم براساس معادلات (۱ - ۹) یک واحد مشتق است که اسلاگ نامیده می‌شود. اسلاگ را برحسب پوند در دستگاه (پا-پوند- ثانیه) بیان کنید. ثابت گرانشی G را در دستگاه (پا-پوندوزن- ثانیه) پیدا کنید.

حل:

از جدول استخراج می‌کنیم

$$\begin{cases}\text{(پوند-وزن)} & ۱\ \ Lb = ۴.۴۴۸\ N\\ \text{(پا)} & ۱\ \ ft = ۰.۳۰۴۸\ m\\ & ۱\ \ slug = x\ kg\end{cases}$$

هدف ابتدایی ما یافتن slug برحسب kg است.

$$N = \frac{kgm}{s^{۲}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{Lb}{۴.۴۴۸}\right) = \left(\frac{slug}{x}\right)\left(\frac{ft}{0.3048}\right)s^{-۲}$$

$$Lb = \frac{(slug)(ft)}{s^{۲}} \qquad (*)$$

در نهایت باید به برسیم، پس تمام عددها را به سمت چپ آورده و حاصل‌ضرب و تقسیم آنها را برابر با یک درنظر می‌گیریم.

$$\frac{x \times ۰,۳۰۴۸}{۴,۴۴۸} = 1 \Rightarrow x = ۱۴,۵۹$$

$$1\ \ slug = ۱۴,۵۹\ kg$$

که همین عبارت هم از جدول قابل استخراج است. ما با فرض (*)، توانستیم مقداری برای x به‌دست آوریم. فرض (*) بدلیل قانون دوم نیوتون برقرار شده بود.

برای مثال

$$\left.\begin{array}{l}[a] = \dfrac{L}{T^{۲}} = (ft)sec^{-۲}\\ [m] = M = slug\\ [F] = lb\end{array}\right\},\ F = ma \Rightarrow lb = \frac{(slug)(ft)}{sec^{+۲}}$$

حتی اگر از این استدلال هم استفاده نکنیم می‌توان از استدلال قبلی در جهت عکس استفاده نموده یعنی x را از جدول استخراج کرد و با ساده‌سازی نمایی به (*) برسیم.

توجه شود که دستگاه‌ها را برحسب واحدهای اساسی آنها بیان می‌کنند.

(زمان - وزن - طول)

cgs → (cm - gm - sec)

mks → (m - kgm - sec)

fps → (ft - lb - sec)

پس دستگاه (پا - پوند - وزن) را که در صورت مسئله مطرح شده بدلیل اینکه این بیان اساسی این دستگاه نیست. (زمان - نیرو - طول)

چونکه می‌دانیم واحد جرم این دستگاه از این به بعد slug است بیان خود را عوض می‌کنیم.

(ft - slug - sec)

نکته: واحد اساسی، واحدی است که به بقیه واحدهای اساسی شناخته شده تجزیه نشود و به عبارت دیگر واحدهای اساسی از هم مستقلند.

قسمت دوم: می‌دانیم در دستگاه fps

$$۱\ \ lb = ۰,۴۵۳۶\ kg \quad (۱)$$

و در دستگاه (ft - slug - sec) داریم

$$۱\ \ slug = ۱۴,۵۹\ slug \quad (۲)$$

با تقسیم کردن روابط ~~(۱)~~ و (۲) بر یکدیگر

$$\frac{۱\ lb}{۱\ slug} = \left(\frac{۰,۴۵۳۶}{۱۴,۵۹}\right)\left(\frac{kg}{kg}\right) = \frac{۰,۴۵۳۶}{۱۴,۵۹} = ۳,۱۰۹ \times ۱۰^{-۲}$$

بنابراین

$$۱\ \ lb = ۳,۱۰۹ \times ۱۰^{-۲}\ slug$$

و یا

$$۱\ \ slug = ۳۲,۱۶\ \ell b$$

که هر دو با مقادیر جدول مطابقت کافی دارند.

قسمت سوم مسئله:

$$F = \frac{M_1 M_2 G}{d^2} \Rightarrow [G]_{mks} = \frac{N.m^2}{kg^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \left(\frac{N.m^2}{kg^2}\right)$$

پس به همان روشی که در مسئله ۲ به آن اشاره شد، عمل می‌کنیم.

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \left(\frac{lb}{4.448N}\right)^{+1} \left(\frac{ft}{0.3048m}\right)^{+2} \left(\frac{slug}{14.59kg}\right)^{-2} \left(\frac{N.m^2}{kg^2}\right)$$

پس از ساده کردن Nها و mها و kgها داریم

$$G = 6.67 \times 12^{-11} \times (14.59)^2 (0.3048)^{-2} (4.448)^{-1} \left(\frac{lb.ft^2}{slug^2}\right)$$

$$G = 3.44 \times 10^{-8} \left(\frac{lb.(ft)^2}{(slug)^2}\right)$$

۵. راننده‌ای با سرعت $V_\circ$ به چراغ راهنما، هنگامی که از سبز به زرد می‌رود، نزدیک می‌شود:
الف) اگر زمان عکس‌العمل او که طی آن تصمیم به توقف می‌گیرد و پایش را روی ترمز می‌گذارد، τ باشد و اگر حداکثر شتاب کندکننده در اثر ترمز برابر a باشد حداقل فاصله راننده از چهارراه، S_{min}، به هنگام زرد شدن چراغ چقدر باشد تا او بتواند اتومبیل را متوقف کند.
ب) اگر چراغ زرد قبل از قرمز شدن به مدت t روشن بماند، راننده از حداکثر چه مسافتی، S_{max} می‌تواند با سرعت $V_\circ$ به حرکت خود ادامه دهد تا قبل از قرمز شدن چراغ از چهارراه بگذرد.
پ) ثابت کنید اگر سرعت اولیه او $V_\circ$ از

$$V_{\circ max} = 2a\,(t - \tau)$$

بیشتر باشد، رشته فواصلی از چهارراه وجود خواهد داشت که او در آنها نه می‌تواند بی‌برخورد به چراغ قرمز توقف کند و نه به حرکت خود ادامه دهد. ت) برای t و T و a تخمین منطقی بزنید و $V_{\circ max}$ را برحسب مایل بر ساعت حساب کنید. اگر $V_\circ = \frac{2}{3} V_{\circ max}$ باشد مطلوب است S_{mix} و S_{max}.

حل:

توجه: در همه جای این مسئله کمیت S به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
الف) فاصله راننده از چهارراه (چراغ راهنما) در لحظه‌ای که راننده زرد شدن چراغ را مشاهده می‌کند.

S باید به اندازه‌ای باشد که راننده در آن فاصله مکانی فرصت انجام فقط دو کار را داشته باشد:
۱ ـ تصمیم به ترمز (از لحظه زرد شدن چراغ تا لحظه ترمز گرفتن (زمان τ ـ حرکت یکنواخت)
۲ ـ ترمز گرفتن (از لحظه ترمز گرفتن تا لحظه توقف (زمان $t_\circ$ ـ حرکت کندشونده)

$$\begin{cases} 0 \le t \le T & X_I(t) = V_\circ t + x_\circ \quad x_{\circ I} = 0 \\ T \le t \le t_\circ + T & x_{II}(t) = \frac{-1}{2} a (t-T)^2 + V_\circ (t-T) + x_{\circ II} \end{cases}$$

هدف اول ما یافتن $t_\circ$ برحسب معلومات مسئله است:

$$V(t) = -a\,(t - T) + V_\circ$$

$$V(t_\circ - T) = 0 \Rightarrow -a\,(t_\circ + T - T) + v_\circ = 0 \Rightarrow t_\circ = \frac{V_\circ}{a}$$

$$(*)\; S = X_1(\tau) + (x_{II}(t_\circ + \tau) - x_{\circ II})$$

و نیز

$$X_1(\tau) = x_{II}(\tau) \Rightarrow x_{\circ II} = V_\circ \tau$$

با کمی محاسبه و ساده‌سازی

$$x_{II}(t_\circ + \tau) - x_{\circ II} = \frac{V_\circ^2}{2a}$$

و در نهایت داریم

$$S = V_\circ \tau + \frac{V_\circ^2}{2a} = V_\circ t\left(1 + \frac{V_\circ}{2a\tau}\right)$$

و چون راننده از حداکثر شتاب ترمزی خودش استفاده می‌کند $a = a_{max}$

$$S_{min} = V_\circ \tau \left(1 + \frac{V_\circ}{2a\tau}\right)$$

البته اندیس min برای S در حالت کلی به ما می‌گوید که کمترین فاصله راننده از چراغ راهنما در لحظه زرد شدن چراغ باید S_{min} باشد که راننده بتواند در محل چراغ اتومبیل خود را متوقف نماید در غیر این صورت راننده باز هم اگر از ماکزیمم شتاب ترمزی خود استفاده کند، چراغ را رد خواهد کرد.

توضیح درباره معادله (*):

S عبارت است از فاصله‌ای که با سرعت ثابت پیموده شده $(X_1(\tau) - X_1(0))$ و فاصله‌ای که در طی عمل ترمزگیری تا توقف طی شده $(x_{II}(t_\circ + \tau) - x_{II}(\tau))$. توجه کنید که برای هر دو معادله مکان مبدا زمان $t = 0$ (نقطه زرد شدن چراغ) می‌باشد.

$$S = \underbrace{[x_1(\tau) - x_1(0)]}_{\text{مسافتی که در } \tau \text{ (زمان واکنش) طی می شود}} + \underbrace{[x_{II}(t_\circ + \tau) - x_{II}(\tau)]}_{\text{مسافتی که در } t_\circ \text{ طی می شود}}$$

ب) راننده زرد شدن چراغ را می‌بیند و حداکثر t ثانیه برای طی مسافت S با سرعت ثابت $V_\circ$

وقت دارد، تا خودش را قبل از قرمز شدن چراغ و یا در لحظه قرمز شدن چراغ به آن برساند. یعنی $(\frac{S}{V_0}) \le t$

بنابراین $S_{max} = V_0 t$

$S=S_{max}$ معادل آن است که راننده درست در لحظه قرمز شدن چراغ به آن برسد.
$S>S_{max}$ معادل آن است که راننده بعد از قرمز شدن چراغ به آن برسد.
$S<S_{max}$ معادل آن است که راننده قبل از قرمز شدن چراغ به آن برسد.

$V_{0max} = 2a\,(t-\tau)$

پ)

اولاً منطقی است که $t > \tau$ باشد. چرا؟

زیرا اگر سرعت عوض شدن رنگ‌های چراغ بیشتر از سرعت عکس‌العمل راننده نسبت به عوض شدن این رنگ‌ها باشد، دیگر راننده نمی‌تواند بر طبق چراغ تصمیم‌گیری کند و چراغ کارایی ندارد.

V_{0max} طبق تعریفی که برحسب a و t و τ برایش شده مقداری برای V_0 است که معادله $S_{min} = S_{max}$ را ارضا می‌کند. چرا؟

$$xV_{max} \Rightarrow V_{0max} = 2a\,(t-\tau)$$
$$\Rightarrow V^2_{0max} = 2aV_{0max}(t-\tau)$$
$$\div 2a$$
$$\Rightarrow \frac{V^2_{0max}}{2a} + V_{0max}\,(t-\tau)$$
$$+V_{0max}\tau$$
$$\Rightarrow \frac{V^2_{0max}}{2a} + V_{0max}\tau = V_{0max}t \Rightarrow S_{min} = S_{max}$$

جالب است بدانیم اگر $S_{min} > S_{max} \Leftarrow V_0 > V_{0max}$.

$V_0 > V_{0max} = 2a\,(t-\tau)$

چرا؟

بنابراین با ضرب V_0 در دو طرف $V_0^2 > 2aV_0\,(t-\tau)$

و تقسیم دو طرف بر $2a$ و جمع دو طرف با $V_0\tau$ $\frac{V_0^2}{2a} + V_0\tau > V_0 t$

در نهایت $S_{min} > S_{max}$ ولی چون $S_{min} > S_{max}$ می‌توان گستره‌ای از S یافت که

$S_{min} > S > S_{max}$

اولاً: چون $S < S_{min}$ راننده قادر نیست در محل چراغ متوقف شود.

ثانیاً: چون $S > S_{max}$ راننده قادر نیست خود را با سرعت ثابت قبل از قرمز شدن چراغ و یا

همزمان با قرمز شدن آن به چراغ برساند.

$\tau = 0.5\,s \quad t = 10\,s$

$a = (40\,(km/h)/S) \approx 11\,\frac{m}{S^2}$

$V_{0max} \approx 2 \times 11 \times (10 - 0.5) \approx 210\frac{m}{s}$

توجه داشته باشید که V_{0max} نوعاً سرعت خیلی بزرگی است.

$V_0 = \frac{2}{3} \times V_{0max} = (\frac{2}{3} \times 210)\frac{m}{s} = 140\,\frac{m}{s}$

V_0 هم سرعت بزرگی است، اگر V_0 کسر کوچکتری از V_{0max} گرفته می‌شد، مقدار طبیعی‌تری برای سرعت V_0 به‌دست می‌آمد برای مثال

$V_0 = \frac{1}{5}V_{0max} \approx 150\,\frac{km}{h}$

$S_{min} = V_0\,(\tau + \frac{V_0}{2a}) = (140\,\frac{m}{s})\,(0.5S + \frac{140\ m/s}{22 m/s^2}) \approx 961\ m$

S_{min} باز هم عدد بزرگی است که بدلیل بزرگ انتخاب شدن V_0 است.

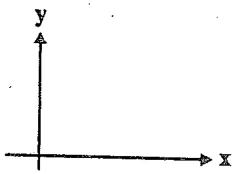
ـ یعنی اگر راننده با سرعت $140\,\frac{m}{s}$ به چهارراه نزدیک شود، اگر بعد از ۹۶۱ متری نرسیده به چهارراه زرد شدن چراغ را ببیند، نمی‌تواند خود را سر چهارراه متوقف کند.

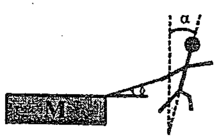
۶. پسربچه‌ای به جرم m سورتمه‌ای به جرم M را بطور افقی می‌کشد، ضرب اصطکاک میان سورتمه و برف μ است.

الف) نموداری رسم کنید که تمام نیروهای وارد بر پسربچه و سورتمه در آن نشان داده شده باشد. ب) مطلوب است مؤلفه‌های افقی و قائم هریک از نیروها در لحظه‌ای که پسر و سورتمه هریک دارای شتاب a باشند. پ) اگر ضریب اصطکاک استاتیکی میان پاهای پسر و زمین μ_s و اصطکاک تنها عامل محدودکننده باشد، بزرگترین شتابی که او می‌تواند به خود و سورتمه بدهد را محاسبه کنید.

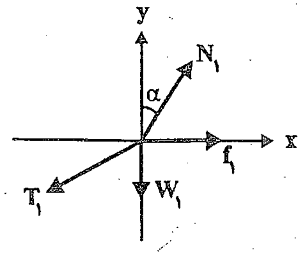
$\theta \equiv$ زاویه‌ای که طناب سورتمه با راستای افقی دارد
$\alpha \equiv$ زاویه‌ای که بدن پسربچه با راستای عمودی دارد

حل:

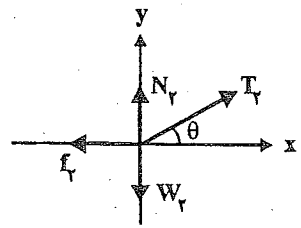




الف) در نمودار زیر نیروهای وارد بر پسربچه نمایش داده شده است، W_1 نیروی وزن پسر، N_1 نیروی عمودی بر کف پاهای پسر و f_1 نیروی اصطکاک وارده بر زمین به پسر و T_1 نیروی کشش طناب اتصال است.



در نمودار زیر نیروهای وارده بر سورتمه نمایش داده شده است. W_2 نیروی وزن سورتمه و N_2 نیروی عمودی بر کف سورتمه و T_2 نیروی کشش طناب کف سورتمه و T_2 نیروی کشش طناب اتصالی می‌باشد.



ب) قانون دوم نیوتن

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

یعنی در صورتی که N نیروی مختلف به یک جسم به جرم m وارد شوند، مجموع برداری N نیرو شتاب کل جسم a را تعیین می‌کند. در اینجا ما با دستگاه مختصات کارتزین (x,y) کار می‌کنیم. پس

$$\vec{F}_i = F_{x\,i}\hat{x} + y_{y\,i}\hat{y}$$

و نیز داریم

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$

پی معادله برداری قانون دون نیوتن به ما دو معادله اسکالر می‌دهد که حرکت جسم را در دو بعد مختلف بررسی کنیم.

$$\sum_{i=1}^{N} F_{x\,i} = ma_x \qquad \sum_{i=1}^{N} F_{y\,i} = ma_y$$

برای مورد پسربچه

B = Boy (پسر)

$$a_{By} = 0 \Rightarrow N_1\cos\alpha - T_1\sin\theta - mg = 0 \quad (۱)$$

$$a_{Bx} \neq 0 \Rightarrow F_1 - T_1\cos\theta + N_1\sin\alpha = ma_{Bx} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} N_{1x} = N_1\cos\alpha \\ N_{1y} = N_1\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} T_{1x} = -T_1\sin\theta \\ T_{1y} = -T_1\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} W_{1x} = 0 \\ W_{1y} = -mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{1x} = f_1 \\ f_{1y} = 0 \end{cases}$$

با جایگذاری این ۴ دسته در معادلات کلی مربوط به ابعاد x,y و دانستن $a_{By} = 0$ معادلات (۱) و (۲) به‌دست می‌آیند.

- برای مورد سورتمه

s = sled (سورتمه)

$$a_{sy} = 0 \Rightarrow N_2 + T_2\sin\theta - mg = 0 \quad (۳)$$

$$a_{sx} \neq 0 \Rightarrow T_2\cos\theta - f_2 = ma_{sx} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} N_{2x} = 0 \\ N_{2y} = N_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_{2x} = T_2\cos\theta \\ F_{2y} = T_2\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} W_{2x} = 0 \\ W_{2y} = -Mg \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{2x} = -f_2 \\ f_{2y} = 0 \end{cases}$$

چون سورتمه و پسر در حال حرکت با شتاب a هستند با اصطکاک‌های دینامیکی سروکار داریم.

$$f_1 = \mu_k N_1 \quad (۵) \qquad f_2 = \mu_k N_2 \quad (۶)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \text{ و } (۵) \Rightarrow a_{BX} = \frac{1}{m}\left(G(\alpha)(T_1\sin\theta + mg) - T_1\cos\theta\right) \quad (۷)$$

$$(۳) \text{ و } (۴) \text{ و } (۶) \Rightarrow a_{sx} = \frac{1}{m}\left(T_2\cos\theta - \mu_k Mg + T_2\mu_k\sin\theta\right) \quad (۸)$$

که در توضیح باید گفت

$$G(\alpha) = \frac{\mu_k + \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

با فرض اینکه کابل اتصال کش نیاید ویا شل نشود و در حالت کلی پسر و سورتمه نسبت به یکدیگر حرکت نسبی نداشته باشد می‌توان پسر و سورتمه را در جزء از یک سیستم صلب درنظر گرفت که

$$(۹) \quad a_{Bx} = a_{sx}$$

و نیز با همین فرض کش نیامدن یا شل نشدن کابل می‌توان نتیجه دومی نیز گرفت

$$(۱۰) \quad T_1 = T_2$$

$$(۷) و (۸) و (۹) و (۱۰) \Rightarrow T = \frac{[\mu_k + G(\alpha)]\, mMg}{m(\mu_k \sin\theta + \cos\theta) + M(\cos\theta - G(\alpha)\sin\theta)}$$

$$(۱۰)(۱۱)(۸) یا (۱۰)(۱۱)(۷) \Rightarrow a = \mu_k g\left(\frac{1}{p(\theta)} - 1\right) + \frac{G(\varepsilon)g}{p(\theta)}$$

با این توضیح که

$$p(\theta) = 1 - \left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{G(\alpha)\sin\theta - \cos\theta}{\mu_k \sin\theta + \cos\theta}\right)$$

$$(۱)(۱۰)(۱۱) \Rightarrow$$

$$f_1 = \mu_k N_1 \;\&\; N_1 = \frac{\sin\theta[\mu_k + G]mMg}{\cos[m(\mu_k\sin\theta + \cos\theta) + M(\cos\theta - G\sin\theta)]} + \frac{mg}{\cos\alpha}$$

$$(۳)(۱۰)(۱۱) \Rightarrow F_2 = \mu_k \;\&\; N_2 = Mg - \frac{[G + \mu_k]mMg\sin\theta}{[m(\mu_k\sin\theta + \cos\theta) + M(\cos\theta - G\sin\theta)]}$$

پس تمام نیروهای F و N و W و T را برحسب پارامترهای سیستم μ_k, M,m, α, θ به‌دست آوردیم.

تابع $a(\mu)$ ماکزیمم شتابی که پسربچه می‌تواند بگیرد بدون اینکه بلغزد را به ما می‌دهد به دو نکته توجه کنید:

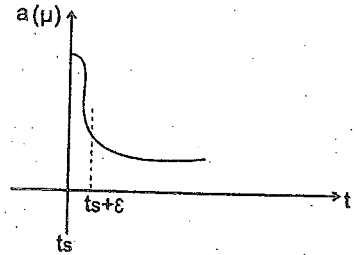
۱ـ وقتی ما برای نلغزیدن بر روی یک سطح زمین را فشار می‌دهیم، در واقع نیرویی جدای از نیروی وزن خود بر سطح وارد نکرده‌ایم و نیروی عمودی سطح تغییر نمی‌کند و در واقع سطح تماس درگیری پا و سطح افزایش می‌یابد و μ به حداکثر ممکن خود می‌رسد.

۲ـ اگر ما بخواهیم حداکثر شتابی که در بازه زمانی ابتدایی حرکت را که مجاز به آن هستیم پیدا کنیم $(t_s < t < t_s + \varepsilon, \varepsilon \to 0)$ در اینجا چون از حال ساکن شروع به حرکت کردیم به جای μ_k باید μ_s را قرار دهیم و چون $a(\mu)$ برحسب μ یک تابع صعودی است پس

$$a(\mu_k) < a(\mu_k)$$

$$\text{حداکثر شتاب مجاز}\; a(\mu)\begin{cases} a(\mu_s) & t_s<t<t_s+\varepsilon \quad \varepsilon\to 0 \\ a(\mu_k) & t>t_s+\varepsilon \end{cases}$$

t_s زمان آستانه حرکت زمانی است که سورتمه از جای خود کنده شده و شروع به حرکت می‌کند.



حال فرض کنید پسربچه شتاب ثابت a می‌گیرد (که برای نلغزیدن مناسب است). اگر احتمال لغزش را به‌صورت مقابل تعریف کنیم $p(\text{لغزیدن}) \propto |a - a(\mu)|^{-1}$

احتمال لغزیدن پسربچه در حین حرکت بیشتر است.

حالت‌های جالب توجه ما:

۱ـ جرم پسر از جرم سورتمه خیلی بزرگتر باشد $(m \geq M)$

اگر بخواهیم مستقل از نتیجه به‌دست $a0\mu$ را پیدا کنیم، باید نیروی آن را از نیروهای اعمالی بر پسربچه حذف کنیم گویی پسربچه روی برف‌های دود و سورتمه‌ای را بر دوش نمی‌کشد.

$$\begin{cases} N_1\cos\alpha = mg & (I) \\ F_1 + N_1 \sin\alpha = m a_{Bx} & (II) \end{cases}$$

$$(II) \Rightarrow a(\mu) = a_{Bx} = \frac{N_1}{m}(\mu + \sin\alpha) \overset{(I)}{\Rightarrow} a(\mu) = G(\alpha)g$$

با توجه به نتایج قبلی مسئله

$$a(\mu) = mg\left(\frac{1}{p(\theta)} - 1\right) + \frac{Gg}{p(\theta)}$$

$$P(\theta) = 1 - \left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{G\sin\theta - \cos\theta}{\mu\sin\theta + \cos\theta}\right)$$

$$m >> M \Rightarrow P(\theta) \approx 1 \Rightarrow a(\mu) \approx \mu g\,(1 - 1) + \frac{Gg}{1} = G(\alpha)g$$

۲ـ جرم سورتمه خیلی بزرگتر از جرم پسربچه $(M >> m)$

در این حالت پسربچه قادر نیست سورتمه را بکشد، زیرا نیروی اصطکاک بین سورتمه و یخ خیلی بزرگتر از نیروی اصطکاک بین پاهای پسر و یخ است. توجه کنید که در این مورد فرض صلب بودن دیگر درست نیست زیرا در این حالت پسر به سورتمه نزدیک می‌شود که این جزء حالات مسئله نیست.

۳ـ می‌دانیم $P(\theta)$ با بزرگ شدن G کاهش می‌یابد و با توجه به فرمول $a(\mu)$ و a افزایش می‌یابد.

اگر ماکزیمم تابع $G(\alpha)$ را نسبت به α پیدا کنیم، چون $G(\alpha)$ در آن α ماکزیمم است $a(\mu)$ نیز ماکزیمم می‌شود. یعنی پسربچه با زاویه مناسبی که به بدن خود نسبت به خط قائم می‌دهد می‌تواند ماکزیمم شتابی که مجاز به گرفتن آن است را افزایش دهد و احتمال لغزیدن خود را کاهش دهد.

$$\frac{dG}{d\alpha} = + \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \mu\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$$

$$2\sin^2\alpha + \mu\sin\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\left(\left(\frac{\mu}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{0.5}-\left(\frac{\mu}{4}\right)\right)=\sin^{-1}\beta$$

در طبیعت μ هر مقداری را می‌تواند اختیار کند $0 < \mu < \infty$

که می‌دهد

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4} \Leftarrow 0<\beta<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس $a(\mu)$ زاویه‌ای است که پسربچه اگر نسبت به خط قائم بگیرد $a(\mu)$ را برای خود افزایش داده است و احتمال لغزیدن خود را کاهش داده است. که این زاویه در بازه زمانی آغاز حرکت کمتر از مقدارش در حین حرکت است. چون $a(\mu)$ تابعی نزولی است.

$$\mu_s > \mu_k \Rightarrow \alpha(\mu_s) < \alpha(\mu_k)$$

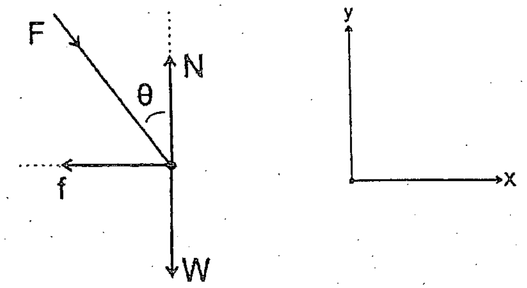
۷. یک جاروی زمین‌شویی به جرم m که دسته آن با جهت قائم زاویه θ می‌سازد با نیروی F که در امتداد دسته آن وارد است، رانده می‌شود. ضریب اصطکاک با زمین μ است.

الف) نموداری رسم کنید که تمام نیروهای وارد بر جارو در آن نشان داده شده است.

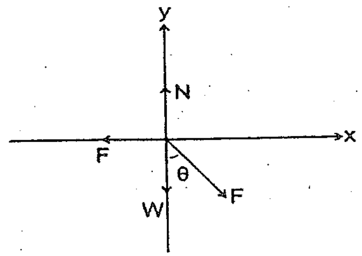
ب) اگر μ و θ معلوم باشد نیروی لازم جهت راندن این جارو با سرعت ثابت روی زمین پیدا کنید.

پ) نشان دهید که اگر θ کوچکتر از زاویه سکون باشد نمی‌توان جارو را با فشار دادن در جهت دسته آن به حرکت درآورد. از جرم دسته جارو صرف‌نظر کنید.

حل:



تعادل استاتیکی در راستای قائم



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg + F\cos\theta$$

تعادل در راستای افقی

$$\Sigma F_x = 0 = 0 \Rightarrow F\sin\theta - f = 0 , f \le \mu_s N$$

$$\Rightarrow F(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) - \mu_s mg \le 0 \quad (*)$$

با نوشتن تعادل دینامیکی یعنی $f = \mu_k N$ به حالت خاصی از معادله (*) می‌رویم چون $\mu_s > \mu_k$ پی خواهیم داشت $F(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) = \mu_k mg \quad \oplus$

جالب توجه است که در این حالت θ و μ_k در محدوده‌ای تغییر می‌کنند که عبارت

$\sin\theta - \mu_k\cos\theta$

صفر نشود. چرا؟ اگر شروع به کاهش دادن θ از $\frac{\pi}{2}$ بنماییم (در این حین حرکت) μ_k هم از صفر شروع به افزایش می‌کند، زیرا در $\theta = \frac{\pi}{2}$ سطح تماس با زمین صفر است پس μ نیز صفر است

پس از همان ابتدا معادله $\sin\theta - \mu_k\cos\theta = 0$

برقرار نیست زیرا $1 - (.*.) \neq 0$

ولی با ادامه این کاهش به یک θ می‌رسیم که در آن $\sin\theta - \mu_k\cos\theta = 0$

برقرار می‌شود ولی این در فرمول تعادل دینامیکی صدق نمی‌کند.

$$(F \times 0) - \mu_k mg = -\mu_k mg = 0$$

از طرفی $\mu_k mg \neq 0$ این یک متناقض نما است.

این بدان معنی است که فرمول تعادل دینامیکی دیگر صحیح نیست و با جایگذاری

$$\sin\theta - \mu_k\cos\theta = 0$$

در معادله کلی تعادل

$$(F \times 0) - \mu_k mg \le 0$$

این مشکل برطرف می‌شود و این بدان معنی است که باید تعادل استاتیکی بنویسیم و به حال سکون رفته‌ایم.

$$\sin\theta - \mu_k\cos\theta = 0$$

$$\tan\theta_s = \mu_s$$

اندیس s را برای این گذاشتیم که به حالت سکون (s ≡ static) رفته‌ایم و به θ_s زاویه سکون گفته می‌شود.

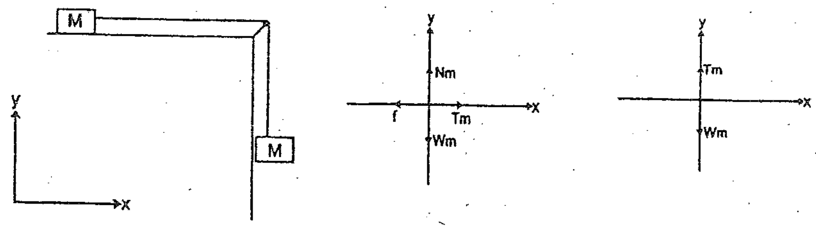
نتیجه‌ای که از فرمول ⊕ می‌گیریم این است که در $\theta > \theta_s$ نیرویی که باید در راستای دسته جارو وارد کنیم تا با سرعت ثابت حرکت کند برابر است با $F = \frac{\mu_k mg}{\sin\theta - \mu_k \cos\theta}$

رمزی که در نیروی اصطکاکی قبل از شروع حرکت نهفته است این است که نیروی اصطکاکی همیشه به حدی است که نیروهای محرک را خنثی کند تا شرایط تعادل استاتیک برقرار شود.

$F\sin\theta = f$

در اینجا نمی‌توان مدل‌سازی برای رابطه بین f و نیروی عمودی N ارائه داد. و هر الگویی که بر $F\sin\theta$ حاکم است همان الگو بر f حاکم است.

۸. جعبه‌ای به جرم m بر روی سطح افقی میزی با ضریب اصطکاک μ حرکت می‌کند و با ریسمانی از روی قرقره‌ای که بر لبه میز قرار دارد به جسم آویخته‌ای به جرم M متصل است. شتاب دستگاه و کشش ریسمان را محاسبه کنید.



نمودار مربوط به جرم M نمودار مربوط به جرم m

حل:

در حالت کلی برای کل سیستم $(m + M)$ چهار حالت می‌تواند رخ بدهد.

۱) ساکن باشد.

۲) در آستانه حرکت باشد.

۳) با سرعت ثابت بلغزد.

۴) با شتاب ثابت بلغزد.

ابتدا به بررسی حالت چهارم می‌پردازیم: در این حالت $f = \mu_k N$.

$a_{m,y} = 0 \Rightarrow N_m = mg \ \&\ Ma_{m,y} = T_M - M_g$ (۲)

$ma_{m,x} = T - \mu_k N = T - \mu_k mg$ (۱)

با فرض اینکه ریسمان متصل‌کننده دو جرم کش نیاید و شل نشود (در حالت کلی بین m و M حرکت نسبی وجود نداشته باشد) پس دو جسم یک سیستم صلب را تشکیل می‌دهند.

$T_m = T_M$ و $a_{m.x} = -a_{M.y}$ (۳)

(۳) و (۲) و (۱) $\Rightarrow T = (\mu_k + 1)g(\frac{mM}{m + M})$

$a_{m.x} = \frac{(\mu_k + 1)gmM}{(m + M)m} - \mu_k g = g(\frac{M - \mu_k m}{M + m})$

$a_{m.x} > 0 \Rightarrow (\frac{M}{m}) > \mu_k$

$a_{m.x} = \frac{1}{M}(T - Mg) = -a_{m.x} = (\frac{\mu_k m - M}{m + M})$

در حالت سوم: $F = \mu_k N$

$a_{m.x} = a_{M,y} = 0$

$T_M = Mg \qquad T_m = \mu_k mg$

$T_m = T_m \Rightarrow (\frac{M}{m}) = \mu_k$

در حالت (۱) $F < \mu_k N$

$a_{m,y} = 0 \Rightarrow N_m = mg$

$a_{m,x} = 0 \Rightarrow T_m = F < \mu_s N_m$

$a_{M,y} = 0 \Rightarrow T_m = mg$

$T_M = T_m \Rightarrow M_g < \mu_s N_m = \mu_s mg \Rightarrow (\frac{M}{m}) < \mu_s$

در حالت (۲) $F = \mu_k N$ و با انجام دادن همان کارهای قسمت قبلی به نتیجه زیر می‌رسیم

$\frac{M}{m} = \mu_s$

ـ مسئله مهمی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا فقط با تنظیم پارامتر $\frac{M}{m}$ با توجه به شرایط سیستم (μ_s, μ_k) می‌توان به هریک از حالت‌های چهارگانه رفت؟

پارادوکس اول:

۱ـ شرط رسیدن به حالت (۴) $\frac{M}{m} > \mu_k$ است و به حالت (۱) $\frac{M}{m} < \mu_s$ و می‌دانیم که $\mu_s > \mu_k$ پس بازه‌ای از پارامتر می‌توان انتخاب کرد که هر دو شرط را برقرار کند.

$\mu_k < \frac{M}{m} < \mu_s$

ولی در دنیای واقعی ما فقط می‌توانیم به یکی از این دو حالت برویم و نه هر دو ...!

جواب ما در شرایط اولیه سیستم نهفته است. اگر ما سیستم را از حال سکون رها کنیم چون

$\frac{M}{m} < \mu_s$ در نهایت $f < \mu_s N$ و f خودش را طوری تنظیم می‌کند که سیستم به حالت ساکن بماند. و اگر سیستم به حالت غیرساکن رها شود $f < \mu_s N$ و چون شرط $\frac{M}{m} > \mu_k$ برقرار است نیروهای محرک بر f غلبه کرده و سیستم به حالت (۴) می‌رود.

۲ـ شرط رسیدن به حالت (۳) $\mu_s = \frac{M}{m}$ و به حالت (۱) $\frac{M}{m} < \mu_s$

و چون شرط $\mu_s > \mu_k$ است، پس می‌توان $\frac{M}{m}$ را برابر با μ_k گرفت و شرط رسیدن به هر دو حالت (۳) و (۱) را برقرار ساخت. باز هم استدلال ما روی شرایط اولیه سیستم استوار است و اگر سیستم را از حال سکون رها کنیم طبق استدلال قبلی سیستم حالت سکون خود را حفظ می‌کند و اگر سیستم را از حالت غیرسکون رها کنیم چون $\frac{M}{m} = \mu_k$ پس نیروهای محرک و اصطکاکی با هم برابرند و سیستم به سرعت ثابتی می‌رسد و به حالت (۳) می‌رویم.

۳ـ اگر $\frac{M}{m} = \mu_k$ تنظیم شود چون $\mu_s > \mu_k$ پس هم شرط رسیدن به حالت (۲) و هم شرط رسیدن به حالت (۴) برقرار شده یعنی $\frac{M}{m} > \mu_k$ در اینجا استدلال‌های ما کاملاً شبیه به مورد پارادوکس ۱ است.

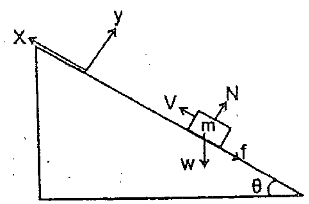
۹. به آجر نشان داده شده در شکل‌های ۱ـ ۳ و ۱ـ ۲ سرعت اولیه‌ای به طرف بالای سطح شیب‌دار می‌دهیم. زاویه θ بزرگتر از زاویه سکون منظور می‌شود مطلوب است محاسبه مسافتی که آجر روی سطح شیب‌دار بالا می‌رود و نیز زمان لازم برای بالا رفتن و برگشتن به نقطه اول.

حل:

فرض: $\theta > \theta_s$

باید توجه کنیم که جهت نیروی اصطکاک همیشه مخالف جهت حرکت است و این بدان معنی است که جهت نیروی اصطکاک در رفت و برگشت یکسان نیست.

(I): حالت رفت را درنظر می‌گیریم



$$\begin{cases} ma_{x_I} = -F - mg\sin\theta & \oplus \\ ma_{y_I} = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta & \otimes \end{cases}$$

$$\oplus\ a_{xI} = -\mu_N\left(\frac{N}{m}\right) - g\sin\theta \overset{\otimes}{\Rightarrow} a_{xI} = -g(\mu_k\cos\theta + \sin\theta) < 0$$

$$x_I(t) = \frac{1}{2}a_{xI}t^2 + V_{0I}t + x_{0I}$$

$$\Delta x_I(t) = X_I(t) - x_I(0) = \frac{1}{2}a_{xI}t^2 + V_{0I}t$$

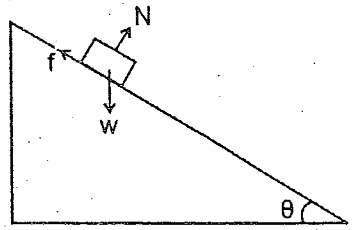
فرض کنیم زمان به سکون رسیدن بلوک t_0 باشد (توجه کنید مبدأ زمان $t = 0$ است که همان زمان آغاز جهیدن بلوک به طرف بالای سطح شیب‌دار است).

$$V_I(t) = a_{xI}t + V_{0I} \qquad V_{0I} = V_0$$

$$V_I(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{-V_0}{a_{xI}} = \frac{V_0}{g}(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)^{-1}$$

$$\Delta x_I(t_0) = \frac{-V_0^2}{2a_{xI}} = \frac{V_0^2}{2g}(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)^{-1}$$

(II): حالت برگشت را درنظر می‌گیریم



$$\begin{cases} ma_{x_{II}} = F - mg\sin\theta & \oplus \\ ma_{y_{II}} = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta & \otimes \end{cases}$$

$$\oplus\ a_{x_{II}} = \frac{f}{m} - g\sin\theta = \frac{\mu_k N}{m} - g\sin\theta \overset{\otimes}{\Rightarrow} a_{x_{II}} = g(\mu_k\cos\theta - \sin\theta)$$

$$x_{II}(t) = \frac{1}{2a_{x_{II}}}(t-t_0)^2 + V_{0II}(t-t_0) + x_{II}(t_0)$$

$V_{0II} = 0$ از سکون شروع به حرکت می‌کند و از زمان t_0

$$\theta > \theta_s \Rightarrow \sin\theta > \mu_s\cos\theta > \mu_k\cos\theta \Rightarrow a_{x_{II}} < 0$$

زمان رسیدن بلوک به نقطه اولیه زمانی است که در آن $\Delta x_{II}(t) = -\Delta x_I$

$$\Delta x_{II} = \frac{-V_0^2}{2g}(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)^{-1}$$

$$\Delta x_{II}(t) = \frac{1}{2}a_{x_{II}}(t-t_0)^2 = \frac{1}{2}a_{x_{II}}\Delta t_{II}^2$$

$$\Delta t_{II} = \left[\frac{2Hx_{II}}{a_{x_{II}}}\right]^{0.5} = \left[\frac{-2V_0^2}{2g^2}\left[\frac{\mu_k\cos\theta + \sin\theta}{\mu_k\cos\theta - \sin\theta}\right]\right]^{1/2}$$

$$\Delta t_{II}=\frac{V_\circ}{g}(\sin^2\theta-(\mu_k\cos\theta)^2)^{-0.5}$$

$$\Delta t_{tot}=\Delta t_I+\Delta_{II}=(t_\circ-\circ)+\Delta t_{II}=$$

$$\frac{V_\circ}{g}(\mu_k\cos\theta+\sin\theta)^{-1}+\frac{V_\circ}{g}(\sin^2\theta-(\mu_k\cos\theta)^2)^{-0.5}$$

$$\Delta t_{tot}=\Delta t_I+\Delta t_{II}=(t_\circ-\circ)+\Delta t_{II}=$$

$$=\frac{V_\circ}{g}(\mu_k\cos\theta+\sin\theta)^{-1}+\frac{V_\circ}{g}(\sin^2\theta-(\mu_k\cos\theta)^2)^{-0.5}$$

$$\Delta t_{tot}=\frac{V_\circ}{g}(\mu_k\cos\theta+\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\left[(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}+(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

و می‌توان سرعتی راکه بلوک با آن سرعت به مکان اولیه باز می‌گردد محاسبه کرد.

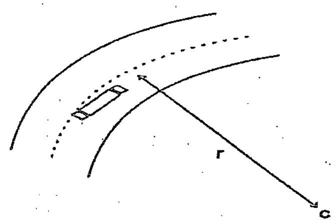
$$V_{x_{II}}=a_{x_{II}}a_{x_{II}}\Delta t_{II}+V_{\circ II}=a_{x_{II}}\Delta t_{II}+\circ$$

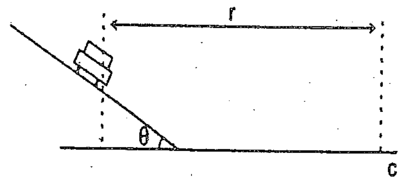
$$V_{x_{II}}=\frac{-V_\circ}{g}\frac{\sin\theta-\mu_k\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta-(\mu_k\cos\theta)^2}}g$$

در نهایت با ساده کردن

$$V_{x_{II}}=-V_\circ\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu_k\cos\theta}{\sin\theta+\mu_k\cos\theta}}$$

۱۰. سطح بزرگراهی در پیچی به شعاع انحنای ۳ با سطح افق زاویه θ می‌سازد. اگر ضریب اصطکاک μ_k باشد، مطلوب است محاسبه حداکثر سرعتی که یک اتومبیل می‌تواند با آن بی‌انحراف از این پیچ بگذرد.





مقطع شعاعی پیچ

حل:

مسئله را می‌توان به دو صورت حل کرد:

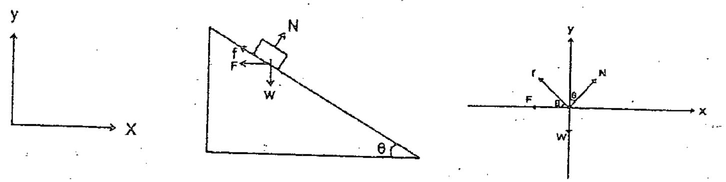
۱ ـ به دستگاهی برویم که نسبت به مرکز دوران (جزیی) اتومبیل ساکن است بنابراین برآیند نیروهای وارد بر اتومبیل باید شتاب جانب به مرکز را (centripetal) تأمین کنند.

۲ ـ به دستگاهی برویم که اتومبیل در آن ساکن است، بنابراین باید تعادل استاتیکی بنویسیم و تمام نیروهای از جمله وزن، اصطکاک، عمودی سطح، گریز از مرکز (centrifugal) باید یکدیگر را حذف کنند.

در این مسئله ما روش دوم را پیگیری می‌کنیم و با دانستن این نکته که اگر متحرکی به جرم m با سرعت $\vec{V}$ نسبت به نقطه‌ای مفروض (فاصله نقطه از متحرک $\vec{r}$ است) حرکت کند طوری که بردار $\vec{V}$ بر بردار $\vec{r}$ عمود باشد می‌توان نیروی گریز از مرکزی که به متحرک وارد می‌شود را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$F_{cfg}=\frac{mV^2}{r}\quad\odot\quad v=|\vec{V}|\quad r=|\vec{r}|$$

I ـ در حالت اولی که درنظر می‌گیریم اتومبیل در آستانه انحراف به سمت داخل پیچ است.



$$\begin{cases}f_x=-f\cos\theta\\ f_y=+f\sin\theta\end{cases}\quad\begin{cases}N_x=N\sin\theta\\ N_y=N\cos\theta\end{cases}\quad\begin{cases}W_x=\circ\\ W_y=-mg\end{cases}\quad\begin{cases}F_x=-F_{cfg}\\ f_y=\circ\end{cases}$$

$$\begin{cases}ma_x=\circ\Rightarrow\sum F_x=\circ\Rightarrow(-F\cos\theta)+(N\sin\theta)+(\circ)+(-F_{cfg})=\circ & (1)\\ ma_y=\circ\Rightarrow\sum F_y=\circ\Rightarrow(F\sin\theta)+(N\cos\theta)+(-mg)+(\circ)=\circ & (2)\end{cases}$$

$$f\le\mu_s N\quad(3)$$

$$(1)\text{ و }(3)\Rightarrow F_{cfg}\ge N(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)\quad(4)$$

$$(2)\text{ و }(3)\Rightarrow N\ge\frac{mg}{(\cos\theta+\mu_k\sin\theta)}\quad(5)$$

$$(۴)\ و\ (۵) \Rightarrow F_{cfg} \geq mg\left(\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}\right) \quad (۶)$$

$$(۰)\ و\ (۶) \Rightarrow V^۲ \geq rg[(\tan\theta - \mu_s) / (۱ + \mu_s\tan\theta)]$$

اگر $\theta \leq \theta_s$ و یا به عبارتی $\sin\theta \leq \mu_s\cos\theta$ باشد

بنابراین

$$p = rg\left[\frac{\tan\theta - \mu_s}{۱+\mu_s\tan\theta}\right] \leq ۰$$

$$V^۲ \geq p \Rightarrow V^۲ \geq ۰ \Rightarrow V \geq ۰ \Rightarrow V_{min} = ۰$$

پس اگر زاویه شیب جاده از زاویه سکون کمتر باشد و یا با آن برابری کند، اتومبیل حتی در حال سکون هم به سمت پایین شیب نمی‌لغزد.

ولی اگر $\theta > \theta_s$ باشد

$$V^۲ \geq rg\left[\frac{\tan\theta - \mu_s}{۱+\mu_s\tan\theta}\right] > ۰$$

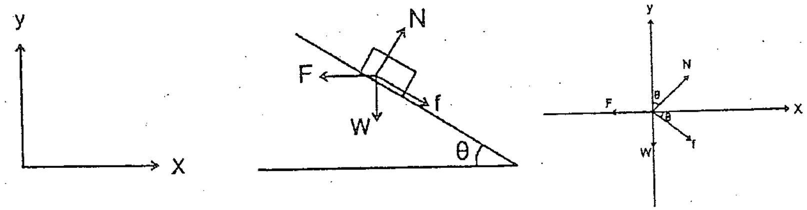
بنابراین

$$V \geq \sqrt{rg}\left[\frac{\tan\theta - \mu_s}{\tan\theta\mu_s + ۱}\right]^{۰.۵}$$

پس عبارت زیر حداقل سرعتی را به ما می‌دهد که در $\theta > \theta_s$ راننده به داخل جاده منحرف نشود.

$$V_{min} = \sqrt{rg}\left[\frac{\tan\theta - \mu_s}{۱+\mu_s\tan\theta}\right]^{۰.۵}$$

II ـ در حالت دوم اتومبیل در آستانه انحراف به سمت خارج پیچ است.



$$\begin{cases} F_x = f\cos\theta \\ f_y = -f\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} N_x = N\sin\theta \\ N_y = N\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} W_x = ۰ \\ W_y = -mg \end{cases} \quad \begin{cases} F_x = -F_{cfg} \\ F_y = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ma_x = ۰ \Rightarrow \sum F_x = ۰ \Rightarrow (F\cos\theta) + (N\sin\theta) + (۰) - f_{cfg} = ۰ \quad (۱) \\ ma_y = ۰ \Rightarrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow (-F\sin\theta) + (N\cos\theta) + (-mg) + (۰) = ۰ \quad (۲) \end{cases}$$

$$F \leq \mu_s N \ (۳)$$

$$(۱)\ و\ (۳) \Rightarrow F_{cfg} \leq (\mu_s\cos\theta + \sin\theta)\, N \ (۴)$$

$$(۲)\ و\ (۳) \Rightarrow N \leq mg(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)^{-۱} \ (۵)$$

$$(۴)\ و\ (۵) \Rightarrow F_{cfg} \leq mg\left[\frac{\mu_s + \tan\theta}{۱-\mu_s\tan\theta}\right] \quad (۶)$$

$$(۶)\ و\ (۰) \Rightarrow v^۲ \leq rg\left[\frac{\mu_s + \tan\theta}{۱-\mu_s\tan\theta}\right] = q$$

اگر $\mu_s\tan\theta < ۱$ پس $q > ۰$

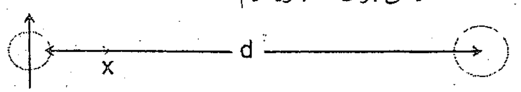
$$v \leq \sqrt{rg}\left[\frac{\mu_s + \tan\theta}{۱-\mu_s\tan\theta}\right]^{۰.۵} \Rightarrow V_{max} = \sqrt{rg}\left[\frac{\mu_s + \tan\theta}{۱-\mu_s\tan\theta}\right]^{۰.۵}$$

اگر در حالت (II) $\mu_s N\tan\theta < ۱$ باشد ماکزیمم سرعتی که راننده می‌تواند داشته باشد و از پیچ به سمت بالای شیب پیچ منحرف نشود با عبارت بالا برای V_{max} داده شده است.

۱۱. فرض کنید زمین در مدار مدوری به شعاع ۹۳×۱۰^۶ مایل با زمان تناوب دورانی برابر یک سال حرکت می‌کند. جرم خورشید را برحسب تن به‌دست آورید.

حل:

اگر به دستگاه سکون زمین برویم و تعادل استاتیکی برای آن بنویسیم



e ≡ earths زمین   ≡ sun خورشید

G ≡ Gravity گرانش   cfg ≡ centrifugal گریز از مرکز

$$ma_x = ۰ \Rightarrow F_G - F_{cfg} = ۰ \quad (۱)$$

$$F_G = \frac{GM_e M_s}{d^۲} \ (۲) \qquad F_{cfg} = \frac{M_e V^۲}{d} \ (۳)$$

$$(۱)\ و\ (۲)\ و\ (۳) \Rightarrow \frac{GM_s}{d} = V^۲ \ (۴) \qquad V = \frac{۲\pi d}{T} \ (۵)$$

$$(۴)\ و\ (۵) \Rightarrow M_s = \frac{۴\pi^۲ d^۲}{GT^۲}$$

$$T = ۱\ year \times \left(\frac{۳۶۵\ day}{۱\ year}\right) \times \left(\frac{۲۴\ hour}{۱\ day}\right) \times \left(\frac{۳۶۰۰\ second}{۱\ hour}\right)$$

$T = ۳۱۵۳۶ \times ۱۰^{۳}\ s$

$$d = ۹۳ \times ۱۰^{۶}\ (mile)(\frac{۱۶۰۹\ m}{۱\ mile}) = ۱.۴۹۶۳۷ \times ۱۰^{۱۱}\ m$$

$۱\ mile = ۱۶۰۹\ meter$

$$G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ \frac{N.m^{۲}}{kg^{۲}}$$

$$\begin{cases} ۱\ ton = ۹.۰۷۲ \times ۱۰^{۲} kg \\ ۱\ metic\ ton = ۱۰^{۳} \end{cases}$$

$\Rightarrow M_{sun} = M_s = ۲.۱۹ \times ۱۰^{+۲۷}\ tons$

۱۲. الف) با در دست داشتن شعاع زمین و مقادیر G و g، جرم زمین را حساب کنید.

ب) اجرام و فواصل ماه و خورشید از زمین را از جدول استخراج کنید و نیروی جاذبه میان زمین و خورشید و زمین و ماه را محاسبه کنید و با درنظر گرفتن این نکته که نیروی اولی سبب دوران سالانه زمین به دور خورشید و نیروی دومی سبب نوسان زمین حول مرکز ثقل مشترک دستگاه زمین ـ ماه می‌شود. نتایج خود را به‌وسیله تخمین تقریبی نسبت این دو نیرو امتحان کنید.

حل:

نیروی وارد بر یک جسم که در ارتفاع x از سطح زمین قرار دارد mg است که همان نیروی گرانشی بین زمین و جسم است.

$$mg = \frac{mM_eG}{(x + R_e)^{۲}}$$

که فواصل معمولی از سطح زمین نسبت به شعاع زمین خیلی کوچکتر است.

$$X << R_e \Rightarrow g \cong \frac{M_eG}{R^{۲}} \Rightarrow M_e = (\frac{gR_e^{۲}}{G})$$

$R_e = ۶.۳۷ * ۱۰^{۶}\ m$ $\qquad g = ۹.۸\ \frac{m}{s^{۲}}$

$G = ۶.۶۷ * ۱۰^{-۱۱}\ \frac{N.m^{۲}}{kg^{۲}}$ $\qquad \Rightarrow M_e = ۵.۶۹ * ۱۰^{۲۴}\ kg$

ب)

$d_{s-۱} \equiv$ فاصله زمین خورشید $= ۱.۴۹۶۳۷ \times ۱۰^{۱۱}\ m = a$

$d_{m-e} \equiv$ فاصله ماه خورشید $= ۳.۸۲ \times ۱۰^{۵}\ m = b$

$M_s = ۱.۹۹ \times ۱۰^{۳۰}\ kg$ $\qquad M_m = ۷.۳۶ \times ۱۰^{۲۲}\ k$

$$\left.\begin{aligned} F_{s-e} &= \frac{GM_eM_s}{a^{۲}} = ۳۵.۳ \times ۱۰^{۴۳} N \\ F_{m-e} &= \frac{GM_eM_m}{b^{۲}} = ۲۰.۱ \times ۱۰^{۴۷} N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{F_{m-e}}{F_{s-e}} = ۵۶۹ \times ۱۰^{-۷}$$

$$\Rightarrow F_{cfg} = \frac{mV^{۲}}{d} = \frac{m}{d}(\frac{۲\pi d}{T^{۲}})$$

با فرض اینکه زمین به دور ماه می‌چرخد و نه حول مرکز جرم ماه ـ زمین (تقریب)

$$F'_{m-e} = \frac{۴\pi^{۲}M_e}{T_{m^{۲}-e}} d_{m-e}$$

با فرض اینکه زمین حول خورشید می‌چرخد و نه مرکز جرم ماه ـ زمین حول خورشید (تقریب)

$$F'_{s-e} = \frac{۴\pi^{۲}M_e}{T_{s^{۲}-e}} d_{s-e}$$

$T_{m-e} \equiv$ دوره تناوب گردش زمین به دور ماه $\cong \frac{۱}{۱۲}$ year

$T_{s-e} \equiv$ دوره تناوب گردش زمین حول خورشید $\cong ۱$ year

$$\alpha' = \frac{F'_{m-e}}{F'_{s-e}} = (\frac{d_{m-e}}{d_{s-e}}) \times (\frac{T_{s-e}}{T_{m-e}})^{۲} = ۳۶۸ \times ۱۰^{-۶}$$

α و α' از هر دو روش باید یکی به‌دست می‌آمد اما تقریب‌هایی که به‌کار بردیم میان آنها فاصله انداخت.

$\alpha = ۵۶۹ \times ۱۰^{-۷}$ $\qquad \alpha' = ۳۶۸ \times ۱۰^{-۶}$

۱۳. خورشید نزدیک به ۲۵۰۰۰ سال نوری از مرکز کهکشان فاصله دارد و با سرعت ۱۷۵ مایل بر ثانیه بر مَداری که نزدیک به مدور است حرکت می‌کند. اگر در محاسبه نیروی ثقل وارد بر خورشید تمام جرم کهکشان را در مرکزش فرض کنیم، جرم تقریبی کهکشان را پیدا کنید. نتیجه را به‌صورت نسبت جرم کهکشان به جرم خورشید بیان کنید (اگر گردش خورشید دور مرکز کهکشان را با گردش زمین به دور خورشید مقایسه کنید برای حل این مسئله احتیاجی به دانستن جرم خورشید یا ثابت G نخواهید داشت).

حل:

$d_{s-G} = ۲۵ \times ۱۰^{۳}$ سال نوری

سال نوری: مسافتی که نور در مدت یک سال طی می‌کند.

$d_{s-G} = ۲۵ \times ۱۰^{۳} \times ۳ \times ۱۰^{۸} \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۳۶۰۰۰ = ۲۳۶۵۲ \times ۱۰^{۱۶}\ m$

$V = ۱۷۵ \left(\frac{mile}{s}\right) = ۲۸۱۵۷۵ \left(\frac{m}{s}\right)$

$G \equiv Goloxy$ کهکشان $\qquad M_G = \frac{dV^{۲}}{G}$ (طبق مسائل قبلی)

$M_G = ۲.۸۱ \times ۱۰^{۴۱}\ kg$

$(M_G / M_s) = (۲.۸ \times ۱۰^{۴۱}\ kg) / (۱,۹۹ \times ۱۰^{۳۰}\ kg) = ۱.۴۱ \times ۱۰^{۱۱}$

قسمت بعد:

$\beta = \frac{F_{s-e}}{F_{s-G}} \qquad F_{s-e} = \frac{GM_eM_s}{d_{s^{۲}-e}} \qquad F_{G-s} = \frac{GM_GM_s}{d_{s^{۲}-e}}$

$\beta = \left(\frac{M_e}{M_G}\right)\left(\frac{d_{s-a}}{d_{s-e}}\right)^{۲} = ۵,۳ \times ۱۰^{۲۵}$

$d_{s-e} = ۱۴۹۶۳۷ \times ۱۰^{۶}\ m \qquad M_e = ۵,۹۶ \times ۱۰^{۳۴}\ kg$

۱۴. یک ستاره نوترونی مجموعه‌ای از نوترون‌هایی است که در اثر نیروی گردش متقابل به هم چسبیده‌اند و دارای چگالی قابل مقایسه با چگالی یک هسته اتمی (تقریباً $۱۰^{۱۲}\ g/cm^{۳}$) هستند. فرض کنید که ستاره نوترونی یک کره است، نشان دهید که فرکانس حداکثر که با آن ستاره ممکن است دوران کند به شرط آنکه جرم در استوا نیفتد عبارت است از

$f = (pG\ /\ J\pi)^{۰.۵}$

که در آن p چگالی است f را برای یک چگالی $۱۰^{۱۲}\ g/cm^{۳}$ حساب کنید. گفته شده است که تپ ـ اخترها که ترنمهای منظم رادیواکتیو بطور مکرر، تا در حدود ۳۰ عدد در ثانیه، تولید می‌کنند، ستاره‌های نوترونی دوار هستند.

حل:

یک جرم m را در استوای ستاره درنظر می‌گیریم:

$F_a = \frac{mMG}{R^{۲}}$

که R شعاع ستاره است و M جرم ستاره است.

$F_{cfg} = \frac{mV^{۲}}{R} = \frac{m}{R}\left(\frac{۲\pi R}{T}\right)^{۲} \qquad F = \frac{۱}{T}$

$\Rightarrow F_{cfg} = \frac{mV^{۲}}{R} = \frac{m}{R}\ ۴\pi^{۲}R^{۲}F^{۲} = ۴\pi^{۲}mRF^{۲}$

برای جرم m در روی ستاره نوترونی تعدل می‌نویسیم

$F_{cfg} = F_G \Rightarrow ۴\pi^{۲}mRF^{۲} = mMGR^{-۲}$

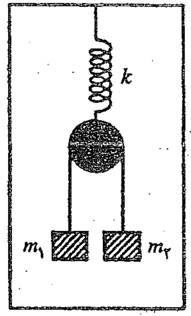
$M = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}p \Rightarrow f^{۲} = \frac{pG}{۳\pi} \Rightarrow f = \left(\frac{pG}{۳\pi}\right)^{۰.۵}$

$p = ۱۰^{۱۲}\left(\frac{g}{cm^{۳}}\right) = ۱۰^{۱۲}\left(\frac{۱۰^{-۳}\ kg}{۱۰^{-۶}\ m^{۳}}\right) = ۱۰^{۱۵}\ (kg\ /\ m^{۳})$

$G = ۶.۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ \frac{N.m^{۲}}{kg^{۲}} \Rightarrow f \cong ۸۴\ (Hz)$

سؤالات کارشناسی ارشد

۱. ماشین آتوودی با جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$، $(m_۱ > m_۲)$، مطابق شکل توسط فنری به سقف یک آسانسور آویزان شده است. وقتی آسانسور با سرعت ثابت حرکت کند، افزایش طول فنر از اندازه‌ی طبیعی‌اش x می‌باشد. اگر آسانسور با شتاب a حرکت کند، x به x' تغییر می‌کند. اندازه‌ی شتاب آسانسور کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)



۱) $g\left[\frac{x'}{x}-۱\right]$ ۲) $۲g\left[\frac{x'}{x}-۱\right]$

۳) $۲g\left[\frac{x}{x'}-۱\right]$ ۴) $g\left[\frac{x}{x'}-۱\right]$

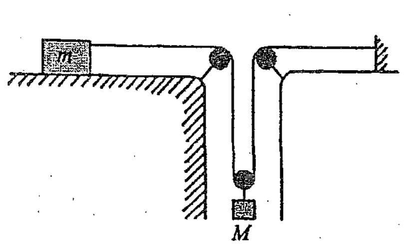
گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$T = \frac{۲m_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}g$$

$$F - ۲T = ۰ \times a \Rightarrow F = ۲T \Rightarrow kx = ۲T \Rightarrow \frac{kx'}{kx} = \frac{۲T'}{۲T} \Rightarrow \frac{x'}{x} = \frac{g + a}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g\left(\frac{x'}{x} - ۱\right)$$

۲. در شکل زیر جسم به جرم m روی میز افقی و جسم به جرم M در امتداد قائم، در حرکتند. اگر $M = \frac{۳}{۲}m$ و شتاب جسم m برابر $\frac{g}{۲}$ باشد. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم m و میز افقی کدام است؟ (از جرم نخ و قرقره‌ها و اصطکاک در محور قرقره‌ها چشم‌پوشی شود.) (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

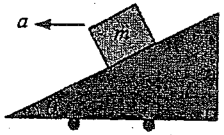
گزینه‌ی (هیچکدام) صحیح است.

$$a_M = \frac{g}{۶}$$

$$Mg - T - T = Ma_M \Rightarrow \frac{۳}{۲}mg - ۲T = \frac{۳}{۲}m \times \frac{g}{۶} \Rightarrow T = \frac{۵}{۸}mg$$

$$T - f_k = ma \Rightarrow \frac{۵}{۸}mg - \mu_k mg = m\frac{g}{۳} \Rightarrow \mu_k = \frac{۷}{۲۴}$$

۳. جسمی به جرم m بر روی سطح شیب‌داری به زاویه θ قرار دارد. سطح شیب‌دار با شتاب a در حال حرکت است. حداقل ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیب‌دار چقدر باشد تا جسم روی سطح شیب‌دار به سمت بالا بلغزد؟ $(a \geq g\tan\theta)$ (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\frac{a\cos\theta + g\sin\theta}{g\cos\theta + a\sin\theta}$ ۲) $\frac{a\cos\theta - g\sin\theta}{g\cos\theta + a\sin\theta}$

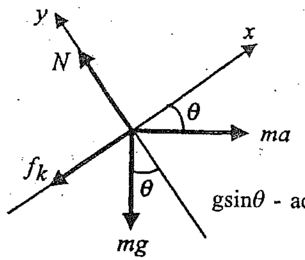
۳) $\frac{a\cos\theta + g\sin\theta}{g\cos\theta - a\sin\theta}$ ۴) $\frac{a\sin\theta - g\cos\theta}{g\sin\theta + a\cos}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

در امتداد y ها

$$N - ma\sin\theta - mg\cos\theta = ۰ \Rightarrow N = m(g\cos\theta + a\sin\theta)$$

در امتداد x ها



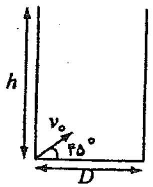
$$ma\cos\theta - f_k - mg\sin\theta = m \times ۰ \Rightarrow$$

$$ma\cos\theta - \mu m(g\cos\theta + a\sin\theta) - mg\sin\theta = ۰$$

در نتیجه، خواهیم داشت

$$g\sin\theta - a\cos\theta = \mu(g\cos\theta + a\sin\theta) \Rightarrow \mu = \frac{g\sin\theta - a\cos\theta}{g\cos\theta + a\sin\theta}$$

۴. چاهی به عمق h و عرض D در اختیار داریم. گلوله‌ای به جرم m را با زاویه‌ی $۴۵°$ نسبت به افق و با سرعت $v_۰$ از یک گوشه‌ی چاه پرتاب می‌کنیم. این گلوله پس از ۲۰ بار رخورد با دیواره‌های چاه، از چاه خارج می‌شود. حداقل مقدار D چقدر است؟ (برخورد بین گلوله و دیواره‌ی چاه الاستیک است.) (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\frac{h}{۲۰}$ ۲) $\frac{h}{۱۰}$

۳) $\frac{h}{۵}$ ۴) h

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اگر گلوله بطور افقی ($v_y = 0$) خارج شود آنگاه حداقل مقدار D را خواهیم داشت

$$v_y = -gt + v_0 \sin 45 \Rightarrow 0 = -10t + v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{v_0}{10\sqrt{2}}$$

در ادامه برای مسافت ۲۰D در امتداد افق و ارتفاع h داریم

$$x = v_0 \cos 45 t \Rightarrow 20D = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{v_0}{10\sqrt{2}} \Rightarrow v_0^2 = 400D$$

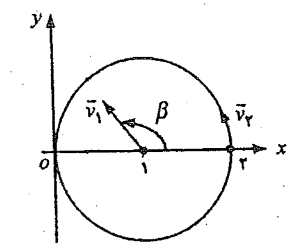
$$y = \frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin 45)t \Rightarrow h = -10\frac{v_0^2}{400} + \frac{v_0^2}{20} \Rightarrow$$

$$h = -10D + 20D \Rightarrow h = 10D \Rightarrow D = \frac{h}{10}$$

۵. شکل زیر دو گلوله‌کوچک را در لحظه‌ی $t = 0$ نشان می‌دهد. گلوله‌ی شماره‌ی ۱ با سرعت ثابت $\vec{v}_1$ در راستایی که با محور x زاویه‌ی $\beta = 2$ rad می‌سازد حرکت می‌کند و گلوله‌ی شماره‌ی ۲ در جهت مثلثاتی روی محیط دایره‌ی حرکت می‌چرخد بطوری که $|\vec{v}_2| = \alpha t$ و $\alpha = 4\,\frac{m}{s^2}$ اگر پس از ۲ ثانیه گلوله‌ها با هم برخورد کنند، اندازه‌ی $\vec{v}_1$ چند متر بر ثانیه است؟
(سراسری ـ ۸۵)

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴



گزینه‌ی (۲) صحیح است.

برای گلوله‌ی ۲

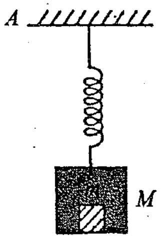
$$v_2 = \alpha t \Rightarrow s = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow R\beta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow R \times 2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \Rightarrow R = 4$$

برای گلوله‌ی ۱

$$R = v_1 t \Rightarrow 4 = v_1 \times 2 \Rightarrow v_1 = 2\,\frac{m}{s}$$

۶. فنر سبکی با ثابت k از تکیه‌گاه A آویزان است. به انتهای فنر جعبه‌ای به جرم M، که در داخل آن جسمی به جرم m قرار دارد، متصل شده است. جعبه را از وضعیت تعادل به اندازه‌ی

d به سمت پایین کشیده و رها می‌کنیم تا دستگاه بطور قائم نوسان کند. به ازای چه مقدار d، جسم در نقطه‌ی اوج نوسان (عمودی) در آستانه‌ی جدا شدن از کف جعبه قرار می‌گیرد؟
(سراسری ـ ۸۶)



۱) $d = \frac{(M - m)g}{k}$

۲) $d = \frac{(M + m)g}{k}$

۳) $d = \frac{(M + 2m)g}{k}$

۴) $d = \frac{(2M + m)g}{k}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\begin{cases} N - mg = ma \Rightarrow 0 - mg = ma \Rightarrow a = -g \\ F = (m + M)a \Rightarrow -kd = (m + M)(-g) \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = \frac{m + M}{k}g$$

۷. نوار نقاله‌ای با سرعت ثابت $3\,\frac{m}{s}$ در حرکت است. مکعبی به جرم ۲ kg بطور قائم روی نقاله می‌افتد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی مکعب با نوار نقاله ۰/۳ باشد، مقدار مسافتی که مکعب روی نقاله قبل از رسیدن به سرعت نهایی می‌پیماید چند متر است؟ ($g = 10\ m/s^2$)
(سراسری ـ ۸۶)

۱) صفر   ۲) ۰/۷۵   ۳) ۱/۵   ۴) ۳

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

طبق قضیه کار ـ انرژی داریم

$$W = \Delta k \Rightarrow -\mu mgd = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow d = 1/5\ m$$

۸. فیزیکدانی که در یک محفظه‌ی بسته محبوس است ملاحظه می‌کند که با رها کردن سیبی که در دست دارد، سیب در فضا غوطه‌ور می‌ماند (یعنی نسبت به او ساکن می‌ماند) او نتیجه می‌گیرد: (سراسری ـ ۸۶)

۱) محفظه در حال سقوط آزاد است.

۲) محفظه در فضایی خالی از میدان گرانشی قرار دارد.

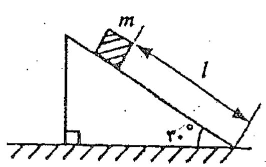
۳) محفظه در یک مدار به دور زمین در حرکت است.

۴) هر سه صحیح است.

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

در سه حالت دیگر هیچ نیروی جاذبه‌ای به سیب وارد نمی‌شود.

۹. مکعبی به جرم m روی گوه‌ای به جرم ۲m و شیب °۳۰ قرار دارد. از اصطکاک میان سطوح مختلف چشم‌پوشی می‌کنیم. ابتدا مجموعه در حال سکون است. پس از رها کردن مجموعه، چقدر طول می‌کشد تا مکعب مسافت l را روی گوه پایین بیاید؟ (سراسری ـ ۸۶)



۱) $\sqrt{\frac{2l}{g}}$ ۲) $\sqrt{\frac{3l}{g}}$

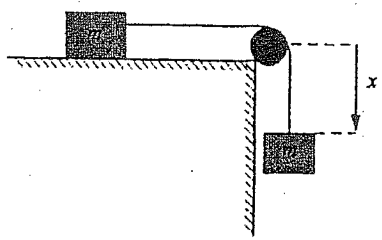
۳) $\sqrt{\frac{5l}{g}}$ ۴) $\sqrt{\frac{7l}{g}}$

گزینه‌ی (هیچکدام) صحیح است.

پس: $a_y = g\sin^2\alpha$

$$y=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow l\sin\alpha=\frac{1}{2}g\sin^2\alpha t^2+0\Rightarrow l=\frac{1}{2}g\sin 30\, t^2\Rightarrow t=\sqrt{\frac{4l}{g}}$$

۱۰. دو مکعب به جرم‌های مساوی m به‌وسیله‌ی کابلی به طول l و جرم ´m به هم متصل شده‌اند. یکی از آن‌ها روی یک میز افقی بدون اصطکاک و دیگری از لبه‌ی میز به اندازه‌ی x آویزان است. با صرف‌نظر از جرم قرقره، شعاع آن و اصطکاک دو محور قرقره، شتاب دستگاه برحسب x و سایر پارامترهای داده شده برابر است با: (سراسری ـ ۸۶)



۱) $\frac{g}{l}\left[\frac{ml-m'x}{2m+m'}\right]$ ۲) $\frac{g}{l}\left[\frac{mx+m'l}{2m+m'}\right]$

۳) $\frac{g}{l}\left[\frac{m'l-mx}{2m+m'}\right]$ ۴) $\frac{g}{l}\left[\frac{ml+m'x}{2m+m'}\right]$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\begin{cases} m'=\lambda l \\ M'=\lambda x \end{cases}\Rightarrow \frac{M'}{m'}=\frac{x}{l}\Rightarrow M'=\frac{x}{l}m'$$

قانون دوم نیوتن

$$mg+M'g=(2m+m')a\Rightarrow a=\frac{m+M'}{2m+m'}g\Rightarrow a=\frac{m+\frac{x}{l}m'}{2m+m'}g\Rightarrow a=\frac{g}{l}\frac{ml+m'x}{2m+m'}$$

۱۱. بنابر یکی از نظریه‌های موجود در مورد مبدأ عالم، جهان اولیه دارای چگالی $10^{15}\ \frac{gr}{cm^3}$ و شعاعی برابر فاصله‌ی کنونی زمین تا خورشید بود. اگر ماده‌ی موجود در عالم را متشکل از پروتون، نوترون و الکترون با تعداد مساوی در نظر بگیریم، تعدادکل ذرات موجود درعالم بر مبنای این مدل به کدام یک از اعداد زیر نزدیک‌تر است؟ (سراسری ـ ۸۷)

۱) 10^{70} ۲) 10^{76} ۳) 10^{79} ۴) 10^{90}

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

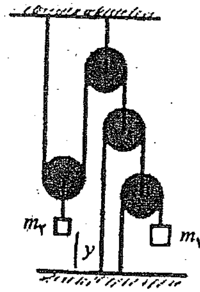
$$\rho = 10^{15}\ \frac{gr}{cm^3} = 10^{18}\ \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \Rightarrow n(m_p + m_n + m_e) = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$n\,(1/67\times10^{-27}+1/68\times10^{-27}+9/11\times10^{-31})= 10^{18}\times\frac{4}{3}\times 3/14\times(1/5\times10^{12})^3$$

$$\Rightarrow n \approx 10^{79}$$

۱۲. در دستگاه نشان داده شده در شکل زیر، جابه‌جایی m_2 برحسب زمان به‌صورت $y = \frac{1}{2}at^2$ است. شتاب رو به پایین m_1 برابر است با: (سراسری ـ ۸۷)



۱) 2a ۲) 4a

۳) 6a ۴) 8a

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

هر قرقره متحرک شتاب حرکت را نصف می‌کند یعنی؛ $a_1 = 2a^3 = 8a$

۱۳. ذره‌ای بر روی یک مسیر مستقیم نصف مسیری را با سرعت v_0 طی می‌کند. باقیمانده‌ی مسیر را در نصف زمان با سرعت v_1 و درنصف زمان دیگر با سرعت v_2 طی می‌کند. سرعت متوسط ذره درکل مسیرکدامست؟ (سراسری ـ ۸۸)

۱) $\frac{v_0+v_1+v_2}{3}$ ۲) $\frac{v_0(v_1+v_2)}{v_0+v_1+v_2}$

۳) $\frac{2v_0(v_1+v_2)}{2v_0+v_1+v_2}$ ۴) $\frac{2v_0(v_0+v_1+v_2)}{v_0+v_1+v_2}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در قسمت اول حرکت

$$x_۰ = v_۰t_۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} = v_۰t_۰ \Rightarrow t_۰ = \frac{۱}{۲v_۰}$$

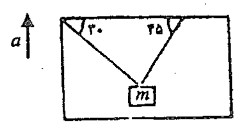
در قسمت دوم حرکت

$$\begin{cases} x_۱ = v_۱t_۱ \\ x_۲ = v_۲t_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = v_۱ \times \frac{t'}{۲} \\ x_۲ = v_۲ \times \frac{t'}{۲} \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = \frac{t'}{۲}(v_۱+v_۲) \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{t'}{۲}(v_۱+v_۲) \Rightarrow t' = \frac{۱}{v_۱+v_۲}$$

از طرفی

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{x_۰+x_۱+x_۲}{t_۰+t_۱+t_۲} \Rightarrow \bar{v} = \frac{۱}{t_۰+t'} \Rightarrow \bar{v} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲v_۰}+\frac{۱}{v_۱+v_۲}} \Rightarrow \bar{v} = \frac{۲v_۰(v_۱+v_۲)}{۲v_۰+v_۱+v_۲}$$

۱۴. مطابق شکل فرض کنید جسمی به جرم m به ریسمان سبکی بسته شده است و درون آسانسوری که با شتاب مثبت a به سمت بالا حرکت می‌کند قرار دارد. کشش طناب سمت راست چقدر است؟ (سراسری ـ ۸۸)



۱) $(\sqrt{۳}+۱)m(g+a)$

۲) $(\sqrt{۳}-۱)m(g+a)$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۳}+۱)m(g+a)$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۳}-۱)m(g+a)$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

در امتداد x ها

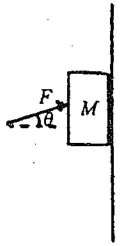
$$T_۱\cos۴۵ - T_۲\cos۳۰ = ۰ \Rightarrow T_۲ = \sqrt{\frac{۲}{۳}}T_۱$$

در امتداد y ها

$$T_۱\sin۴۵ + T_۲\sin۳۰ - mg = ma \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}T_۱ + \sqrt{\frac{۲}{۳}}T_۱ \times \frac{۱}{۲} - mg = ma \Rightarrow T_۱ = \sqrt{\frac{۳}{۲}}(\sqrt{۳}-۱)m(g+a)$$

۱۵. مطابق شکل می‌خواهیم با وارد کردن نیرویی (مانند F) تحت زاویه‌ای (مانند θ) مانع از افتادن کتابی به وزن Mg شویم که به دیوار قائمی تکیه دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین کتاب و دیوار μ باشد، کمینه‌ی F چقدر خواهد بود؟ (سراسری ـ ۸۸)



۱) $\frac{mg}{۱+\mu}$

۲) $\frac{\mu Mg}{۱+\mu}$

۳) $\frac{Mg}{\sqrt{۱+\mu^۲}}$

۴) $\frac{\mu Mg}{\sqrt{۱+\mu^۲}}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در امتداد x ها

$$F\cos\theta - N = ۰ \Rightarrow N = F\cos\theta$$

در امتداد y ها

$$F\sin\theta + \mu N - Mg = ۰ \Rightarrow F\sin\theta + \mu F\cos\theta = Mg \Rightarrow F = \frac{Mg}{\sin\theta + \mu\cos\theta} \quad (۱)$$

حالا برای F_{min} داریم

$$\frac{dF}{d\theta} = ۰ \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left[\frac{Mg}{\sin\theta+\mu\cos\theta}\right] = ۰ \Rightarrow \frac{-Mg(\cos\theta-\mu\sin\theta)}{(\sin\theta+\mu\cos\theta)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \mu\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{۱}{\mu}$$

که با قرارگیری در رابطه (۱) داریم

$$F = \frac{Mg}{\sin\theta+\mu\cos\theta} \Rightarrow F = \frac{Mg}{\cos\theta(\tan\theta+\mu)} \Rightarrow F = \frac{Mg}{\frac{\mu}{\sqrt{۱+\mu^۲}}(\frac{۱}{\mu}+\mu)} \Rightarrow F = \frac{Mg}{\sqrt{۱+\mu^۲}}$$

فصل ۲

حرکت یک بعدی ذره

۱. الف) یک موتور جت خاصی در حداکثر میزان مصرف سوختنش پیشران (نیرو) ثابتی به اندازه ۳۰۰۰ پوند ـ وزن تولید می‌کند. به فرض آنکه در هنگام بلند شدن در حداکثر پیشران عملی کند، مدتی را (برحسب اسب بخار) که موتور به هواپیما می‌دهد وقتی سرعت هواپیما ۲۰ میل در ساعت، ۱۰۰ میل در ساعت و ۳۰۰ میلی در ساعت است، حساب کنید. (قدرت اسب ـ ۷۴۶ وات)

ب) یک موتور پیستونی در حداکثر میزان مصرف سوختنش قدرت ثابت ۵۰۰ قدت اسب تولید می‌کند نیرویی که این موتور به هواپیما وارد می‌کند را به هنگام بلند شدن وقتی سرعت هواپیما ۲۰ میل در ساعت، ۱۰۰ میل در ساعت و ۳۰۰ میل در ساعت است، حساب کنید.

$E_k = \frac{p^2}{2m}$ $\qquad$ K = kinetic (جنبشی)

حل:

الف)

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{p}\right) = \frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{V}\cdot\vec{F}$$

زیرا که

$$\vec{p} = m\vec{V} \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$1\ \text{lb - Wt} = 4.448\ \text{N}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\ \text{mile} \cong 1609\ \text{meters} \\ 1\ \text{hour} = 3600\ \text{seconds} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{mile}}{\text{hour}} \cong 0/4469\left(\frac{m}{s}\right)$$

I hour power = ۷۴۶ watts (hp ≡ hourse power)

$$\begin{cases} V_۱=۲۰(\frac{mile}{hour})=۸/۹۳۸(\frac{m}{s}) \\ V_۲=۱۰۰(\frac{mile}{hour})=۵V_۱=۴۴/۶۹(\frac{m}{s}) \\ V_۳=۳۰۰(\frac{mile}{hour})=۳V_۲=۱۳۴.۰۷(\frac{m}{s}) \end{cases}$$

$$F = ۳۰۰۰\ (lb\text{-}wt) = ۳۰۰۰ \times ۴/۴۴۸\ N = ۱۳۳۴۴\ N$$

$$\begin{cases} P_۱=\vec{F}_۱.\vec{V}_۱=F_۱V_۱=۱۶۰\ hp \\ P_۲=F_۲V_۲=FV_۲=۸۰۰\ hp \\ P_۳=F_۳V_۳=FV_۳=۲۴۰۰\ hp \end{cases}$$

ب)

$$P = P_۱ = P_۲ = P_۳ = ۵۰۰\ hp$$

$$\begin{cases} F_۱=P_۱/V_۱=(۵۰۰\times ۷۴۶w)/۸/۹۳۸(m/s)=۴۱۷/۳۲N \\ F_۲=P_۲/V_۲=P/V_۲=۸۳۴۶\ N \\ F_۳=P_۳/V_۳=P/V_۳=۲۷۸۲N \end{cases}$$

۲. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی ثابت F است. در لحظه‌ای $t = ۰$ سرعتش صفر است. با استفاده از قضیه اندازه حرکت، سرعت آن را در هر زمان بعدی t پیدا کنید. انرژی ذره را در هر زمان بعدی از معادلات (۲ـ۷) و (۲ـ۸) حساب کرده و توافق نتایج را بررسی کنید.

حل:

الف)

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}=۰ \qquad \vec{V}(t=۰)=۰\frac{m}{s}$$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}\Rightarrow d\vec{P}=\vec{F}dt\Rightarrow \int_۰^t d\vec{P}(t')=\int_۰^t \vec{F}dt'$$

$$\vec{P}(t)-\vec{P}(۰)=\vec{F}(t-۰)\Rightarrow m(\vec{V}(t)-\vec{V}(۰))=\vec{F}t$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t)=\frac{\vec{F}}{m}t$$

$$T=\frac{۱}{۲}m(\vec{V}.\vec{V})=\frac{۱}{۲}m\frac{\vec{F}.\vec{F}}{m^۲}t^۲=\frac{F^۲}{۲m}t^۲$$

$$dT=(\vec{F}.\vec{V})dt \quad (۷-۲)$$

به دلیل ثابت بودن نیروی اعمالی، حرکت ذره با شتاب ثابت می‌باشد $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=cte$

$$\vec{V}=\vec{a}t+\vec{V}_۰ \qquad \vec{V}_۰=\vec{V}(t=۰)=۰\Rightarrow \vec{V}(t)=\vec{a}t$$

$$dT=(\vec{F}.\vec{a})tdt=\frac{۱}{m}(\vec{F}.\vec{F})tdt=\frac{F^۲}{m}tdt$$

$$\int_۰^t dT(t')=\int_۰^t \frac{F^۲}{m}t'dt'$$

$$T(t)-T(۰)=\frac{F^۲}{۲m}(t^۲-۰) \quad , \quad T(۰)=\frac{۱}{۲}mV^۲(۰)=۰$$

$$T(t)=\frac{F^۲}{۲m}t^۲$$

$$dT=\vec{F}.d\vec{r} \qquad (۸-۲)$$

این معادله نیز در واقع همان معادله (۲ـ۷) است که $\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}$

ولی اگر بخواهیم از فرمول (۲ـ۸) شروع کنیم برای حرکت با شتاب ثابت داریم

$$\vec{r}(t)=\frac{۱}{۲}\frac{\vec{F}}{m}t^۲+\vec{V}(۰)t+\vec{r}(۰)=\frac{۱}{۲}\frac{\vec{F}}{m}t^۲+\vec{r}(۰)$$

$$d\vec{r}(t)=(\vec{F}/m)tdt$$

$$d\tau=\vec{F}.d\vec{r}=\frac{\vec{F}.\vec{F}}{m}tdt=\frac{F^۲}{m}tdt$$

مطابق مورد قبلی با انتگرال‌گیری از معادله اخیر به‌دست می‌آید $T(t)=\frac{F^۲}{۲m}t^۲$

۳. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی قرار گرفته که به‌وسیله معادله (۲ـ ۱۹۲) داده می‌شود (در معادله (۲ـ ۱۹۲) زمان $-\infty < t < \infty$ ، δt فاصله زمانی کوچک ثابتی است) ضربه کلی تولید شده توسط این نیرو را در $-\infty < \infty$ حساب کنید. اگر سرعت اولیه‌اش (در $t \to -\infty$) V_0 باشد، سرعت نهایی‌اش (وقتی $t \to +\infty$) چقدر است؟ قضیه اندازه حرکت را به‌کار ببرید.

حل:

$$F(t) = \frac{P_0 \delta t}{\pi} \frac{1}{(t-t_0)^2 + (\delta t)^2} \qquad -\infty < t < \infty$$

$$d\vec{P} = \vec{F}(t)dt$$

$$\Delta p = \lim_{t\to\infty} P(\tau) - p(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt$$

$$\Delta p = \left(\frac{p_0 \delta t}{\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t-t_0)^2 + (\delta t^2)} = \left(\frac{p_0}{\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1}$$

$$u = \frac{t-t_0}{\delta t} \Rightarrow \text{if } -\infty < t < \infty \Rightarrow -\infty < u < \infty$$

$$\Delta p = (p_0/\pi)[\tan^{-1}(u)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{p_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = p_0$$

توجه کنید که

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}(u) + C$$

پس ضربه کلی تولید شده $\Delta p = p_0$ است.

$$V(-\infty) = V_0 \Rightarrow p(-\infty) = mV_0$$

$$p(\infty) = \Delta p + p(-\infty) = p_0 + mV_0$$

سرعت ذره در $t \to \infty$ برابر است با

$$V(\infty) = \frac{p_0}{m} + V_0$$

۴. یک پروتون سریع به بار الکتریکی e با سرعت ثابت V_0 در امتداد مسیری مستقیم از کنار الکترونی به جرم m و با الکتریکی e- که در ابتدا ساکن است، می‌گذرد، الکترون به فاصله a از مسیر حرکت پروتون قرار گرفته است.

الف) فرض کنید که پروتون به قدری سریع حرکت می‌کند که الکترون تا زمانی که پروتون به قدرکافی دور شده است، فرصت حرکت قابل ملاحظه‌ای از مکان اولیه خود ندارد. نشان دهید

که مؤلفه نیرو در جهت عمود بر مسیر حرکت پروتون عبارت است از

$$F = \frac{e^2 a}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + V_0^2 t^2)^{1.5}} \quad \text{(mks)}$$

که در آن $t = 0$ لحظه‌ای است که پروتون و الکترون نزدیک‌ترین فاصله را دارند.

ب) ضربه‌ای را که توسط این نیرو وارد می‌شود را محاسبه کنید.

پ) مؤلفه نیرو را در جهت موازی با سرعت پروتون بنویسید و نشان دهید که ضربه خالص در جهت آن صفر است.

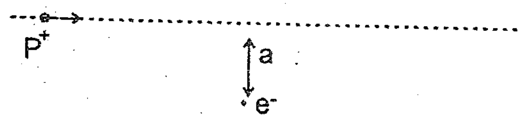
ت) با استفاده از این نتایج اندازه حرکت نهایی (تقریبی) و انرژی جنبشی نهایی الکترون را محاسبه کنید.

ث) نشان دهید برای آنکه فرض اولیه در قسمت (الف) برقرار باشد شرط زیر لازم است:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} << \frac{1}{2} mV_0^2$$

حل:

الف) مسیر حرکت پروتون

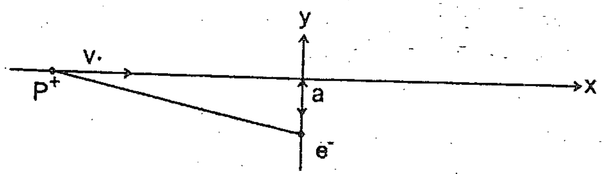


فرض‌ها:

۱ـ الکترون در جای خود ثابت است (همان فرض قسمت الف)

۲ـ الکترون تأثیری بر حرکت پروتون ندارد (این فرض را نیز می‌توان با یادآوری این نکته که $M_p >> m_e$ قابل قبول دانست)

۳ـ از کلیه نیروهای مغناطیسی در این مسئله صرف‌نظر می‌کنیم. شایان ذکر است که ذره باردار متحرک میدان مغناطیسی تولید می‌کند.



نیروی الکترواستاتیکی مابین دو ذره e^-، P^+ عبارت است از

$$\vec F = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r_e-\vec r_p}{|\vec r_e-\vec r_p|^3} = \vec F(p^+\to e^-)$$

$$\vec r_e = -a\hat x \qquad \vec r_p = \vec V_0 t\hat y$$

$$\vec r_e-\vec r_p = -a\hat x - v_0 t\hat y \Rightarrow |\vec r_e-\vec r_p| = \sqrt{(a^2+V_0^2t^2)}$$

$$\vec F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{V_0 t}{(a^2+V_0^2t^2)^{1.5}} = F_x\hat x+F_y\hat y$$

چون سرعت ثابت پروتون عبارت است از $\vec V_p = V_0\hat x$

پس مؤلفه‌ای از نیرو که موازی این سرعت است عبارت است از

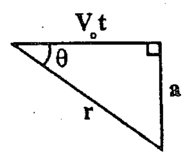
$$F_x = F_{\parallel} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{V_0 t}{(a^2+V_0^2t^2)^{1.5}}$$

و مؤلفه‌ای از نیرو که بر سرعت یادشده عمود است از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$F_y = F\perp = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2+V_0^2t^2)^{1.5}}$$

توجه کنید که حل ساده‌تر عبارت است از $|\vec F_E| = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

قضیه فیثاغورث $r^2 = a^2 + V_0^2t^2$



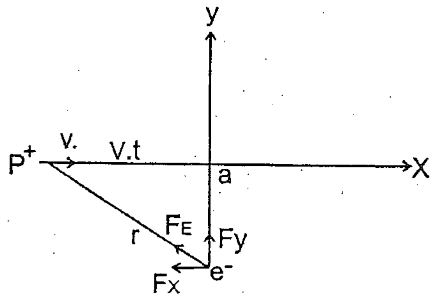
$$F_x=F_{\parallel}=F\cos\theta=F\left(\frac{V_0 t}{r}\right)=F\frac{V_0 t}{\sqrt{a_2+V_0^2t^2}}$$

بنابراین

$$F_x = F_{\parallel} = \frac{e^2}{4\pi.}\frac{V_0 t}{(a^2+V_0^2t^2)^{1.5}}$$

$$F_y=F_\perp=F\sin\theta=F\left(\frac{a}{r}\right)=F\left(\frac{a}{r}\right)=F\frac{a}{\sqrt{a^2+V_0^2t^2}}$$

بنابراین



$$F_y=f_\perp=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2+V_0^2t^2)^{1.5}}$$

ب) نیرو به صورت روبه‌رو است

$$F_y(t) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2+V_0^2t^2)^{1.5}}$$

$$\Delta P_y=\int_{t=-\infty}^{t=\infty}F_y(t)dt=\frac{e^2a}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t=-\infty}^{t=\infty}\frac{dt}{(a^2+V_0^2t^2)^{1.5}}$$

if $-\infty < t < \infty$ then $\frac{-\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

$$\Delta p_y=\frac{e^2a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2V_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2\theta)d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{1.5}}$$

$$\Delta p_y=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 aV_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 aV_0}[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Delta p_y=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 aV_0}(1-(-1))=\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 aV_0}$$

پ) با توجه به رابطه به‌دست آمده در قسمت الف برای F_x داریم:

$$F_x=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{V_0 t}{(a^2+V_0^2t^2)^{1.5}}$$

$$\Delta p_x=\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(t)dt$$

$F_x(t)$ تابع فردی از t است و انتگرال آن در یک بازهٔ متقارن صفر است. بنابراین:

$$\Delta p_x = 0$$

ت) فرض کرده بودیم مبنی بر عدم تأثیر الکترون از پروتون ولی اکنون سرعت نهایی الکترونی

را که آن را دائماً در حال سکون فرض کرده بودیم، می‌خواهیم

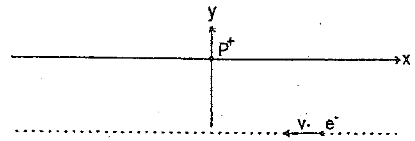
$$\vec{p}_e(0)=0$$

$$\vec{p}_e(\infty)=\vec{p}_e(0)+\Delta p_y\hat{y}+\Delta p_x\hat{x}=\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 aV_0}$$

$$T_\infty=\frac{1}{2m}\left(\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 aV_0}\right)^2=\frac{e^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2 ma^2V_0^2}$$

ث) برای برقراری این فرض باید انرژی جنبشی الکترون نسبت به پروتون خیلی بزرگتر از انرژی الکتروستاتیکی باشد که الکترون در اثر مجاورت با پروتون حس می‌کند و برای اینکه شرط به خوبی برقرار باشد می‌گوییم انرژی جنبشی الکترون نسبت به پروتون باید از ماکزیمم انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی بین آن دو بیشتر باشد.

از دستگاه سکون الکترون به دستگاه سکون پروتون می‌رویم.



دلیلش هم این است که ما می‌خواهیم انحرافات الکترون را هنگام شلیک شدن در میدان پروتون (پروتون تقریباً ثابت است چون بدلیل جرم بالای خود شتاب‌های عکس‌العمل کمتری را متحمل می‌شود) مشاهده کنیم. پس انرژی جنبشی الکترون در این میدان الکتروستاتیکی باید از انرژی الکتروستاتیکی که قرار است الکترون را به دام بیندازد خیلی بزرگتر باشد.

$$\frac{1}{2}mV_0^2 >> \max\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 >> \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0[\min(r)]}$$

$$r=(a^2+V_0^2t^2)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow \min(r)=r(t=0)=a$$

(توجه: به min(n) فاصله حضیض (Perigee Distance) گویند)

$$\frac{1}{2}mV_0^2 >> \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

توجه کنید که در متن کتاب پارامتر a در شرط اخیر از قلم افتاده است.

۸. یک میکروفون دارای دیافراگمی به جرم m و مساحات A است. این میکروفون طوری کار گذاشته شده است که می‌تواند آزادانه در جهت عمود بر دیافراگم حرکت کند. یک موج صوتی به دیافراگم چنان برخورد می‌کند که فشار روی سطح جلوی آن عبارت است از:

$$p = p_0 + p'\sin(\omega t)$$

فرض کنید که فشار بر سطح پشتی‌اش به اندازه فشار جوی p_0 باقی می‌ماند. با صرف‌نظر کردن از تمام نیروهای دیگر به جز نیروی حاصل از اختلاف فشار سراسر دیافراگم حرکتش را پیدا کنید. در یک میکروفون واقعی نیروی برگشتی روی دیافراگم وجود دارد که آن را از حرکت خیلی دور باز می‌دارد. نظر به اینکه از این نیرو در اینجا صرف‌نظر می‌شود، هیچ چیزی از حرکت دور دیافراگم با سرعت ثابت جلوگیری نمی‌کند. برای نداشتن چنین مشکلی سرعت اولیه را چنان انتخاب کنید که حرکت خالصاً نوسانی باشد. اگر قرار باشد که ولتاژی که از میکروفون خارج می‌شود متناسب با فشار صوتی p' و مستقل از ω باشد، چگونه باید به فرکانس و دامنه حرکت دیافراگم بستگی داشته باشد.

حل:

$$F(t) = (p(t) - p_0)A = Ap'\sin(\omega t)$$

$$m\frac{dv}{dt} = p'A\sin(\omega t)$$

بنابراین

$$v(t) = -\frac{p'A}{m\omega}\cos(\omega t) + C_0$$

و

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

بنابراین

$$x(t) = -\frac{p'A}{m\omega^2}\sin(\omega t) + C_0 t + C_1$$

برای سادگی تنظیم می‌کنیم $C_1 = 0$ که لطمه‌ی به کار ما وارد نمی‌کند. و چون قرار است دیافراگم دور نشود باید حرکت خطی آن را حذف کرده تا حرکت بطور خالص نوسانی شود.

$$C_0 = 0 \Rightarrow v(t) = -\frac{p'A}{m\omega}\cos(\omega t)$$

پس با صفر قرار دادن C_0 می‌توان گفت که سرعت در لحظه صفر چقدر است.

$$v(0) = \frac{-p'A}{m\omega}$$

اگر ما همین استدلال را به‌صورت معکوس دنبال کنیم (استدلال بازگشتی) می‌فهمیم که سرعت

دیافراگم در لحظه اول باید $\frac{-p'A}{m\omega}$ تنظیم شود تا دیافراگم منحرف نشود.

اگر دامنه حرکت را L بنامیم $|L| = \frac{p'A}{m\omega}$ و چون ولتاژ مربوط به سیگنال خروجی از میکرون با p' متناسب است. ($\Delta v_s =$ ولتاژ سیگنال خروجی)

$$\Delta v_s \propto p' \Rightarrow \Delta v_s \propto \frac{1}{A} m\omega^2 |L|$$

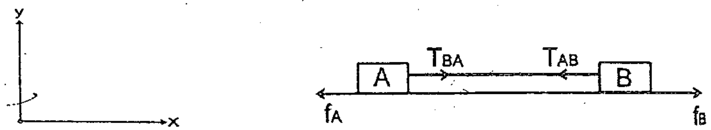
۹. در یک مسابقه طناب‌کشی، دو گروه ۵ نفری دو سر طنابی را در دست گرفته‌اند. وزن هریک از آنها ۱۶۰ پوند است و در ابتدا می‌توانند طناب را با نیروی ۲۰۰ پوند-وزن بکشند. در شروع مسابقه نیروی کشیدن دو گروه مساوی است ولی وقتی افراد خسته می‌شوند، نیروی کشیدن آنها طبق فرمول زیر کاهش می‌یابد

$$F(t) = [200\ \text{lb - wt}] \exp(-t/\tau)$$

که در آنها τ میانگین زمان خستگی برای یک گروه ۱۰ ثانیه و برای گروه دیگر ۲۰ ثانیه است. معادله حرکت را بیابید. ($g = 32\ \text{ft - sec}^{-2}$) سرعت نهایی هر گروه چقدر است؟ کدامیک از این فرض‌ها موجب چنین نتیجه غیرمعقولی شده است؟

حل:

ابتدا هر دو گروه را نامگذاری می‌کنیم. A و B که $\tau_B = 20\ s$ $\tau_A = 10\ s$



۱) فرض اول: برای جلوگیری از پیچیدگی‌های مربوط به گشتاور آرایش بدنی هر دو گروه را دقیقاً با هم یکی می‌گیریم.

۲) فرض دوم: سیستم کل BA را صلب می‌گیریم یعنی گروه A و B نسبت به هم حرکت نسبی ندارند که دو شرط برای برقراری این فرض لازم است.

الف) طناب کش نمی‌آید.

ب) نیروی پیشران که هر گروه به زمین وارد می‌کند نباید از نیروی اصطکاک ایستایی آن گروه با زمین بیشتر باشد. برای مثال اگر F_{AE} که نیروی پیشران وارده از طرف گروه A بر زمین است از F_{As} بزرگتر باشد و $F_{BE} < F_{As}$ پس در همان لحظه گروه A به طرف گروه B می‌لغزد و طناب شل می‌شود. (F_{As} و F_{Bs} نیروی اصطکاک ایستایی گروه‌های A و B با زمین می‌باشند) و اگر در لحظه‌ای

$$F_{BE} > F_{Bs} \quad F_{AE} > F_{As}$$

پس بطور لحظه‌ای دو گروه به سمت می‌لغزند و طناب شل می‌شود. پس گزاره دوم در کل می‌گوید:

$$F_{BE} < F_{Bs} \ \&\ F_{AE} < F_{As}$$

با برقراری فرض دوم می‌توان گفت $T_{AB} = T_{BA}$.

F_A و F_B نیروهای عکس‌العمل مربوط به نیروهای پیشران وارده بر زمین توسط گروه‌های A و B هستند و چون فرض دوم برقرار است کف کفش افراد هر دو گروه نسبت به زمین حرکت نسبی ندارد (نمی‌لغزد) و پس در کل می‌توان نوشت

$$(m_A+m_B)a_x = F_B - F_A = F_{BE} - F_{AE}$$

$$F_{BE} = F_\circ \exp\left(\frac{-t}{\tau_B}\right) \qquad F_{AE} = F_\circ \exp\left(\frac{-t}{\tau_A}\right)$$

$$m_A = m_b = 5M\ ,\ M = 160\ lb$$

$$\Rightarrow \int_\circ^t dv(t') = \int_\circ^t (F_\circ/10\times M)(\exp(-t'/\tau_B) - \exp(-t'/\tau_A))dt'$$

$$\Rightarrow v(t) - v(\circ) = \frac{F_\circ}{10M}\left(\tau_B(1-e^{\frac{-t}{\tau_B}}) - \tau_A(1-e^{\frac{-t}{\tau_A}})\right)$$

و چون در لحظه اول هر دو گروه ساکن بوده‌اند $V(\circ) = \circ$

پس

$$v(t) = \frac{F_\circ}{10M}(\tau_B(1-e^{\tau_B}) - \tau_A(\tau_A(1-e^{\tau_A}))$$

می‌دانیم $F_\circ = 200(\text{lb - wt})$ است. و می‌دانیم اگر $m_\circ = 1\ lb$ پس در تعریف (lb - wt) است که

$1\ lb - wt = m.g$ و یا به عبارتی

$$1\ lb\text{-}wt = 1\ lb \times g$$

پس

$$\frac{F_\circ}{M} = \frac{F_\circ}{mg}g = \frac{200(\text{lb - wt})}{160(\text{lb - wt})} \times 32\left(\frac{ft}{s^2}\right)$$

پس

$$\frac{F_\circ}{M} = 40\frac{Ft}{s^2}$$

البته از نتایج کتاب معلوم است که مقداری که برای کمیت اخیر به‌دست آورده ۵ برابر مقداری است که ما به‌دست آورده‌ایم و این احتمالاً برای کتاب یک اشتباه در حل این مسئله است و معقول است که وزن هر فرد ۱۶۰ پوند (≈ 80 kg) باشد و نه وزن هر ۵ نفر گروه. با توجه به اینکه $\tau_A = 10\ s$ و $\tau_B = 20\ s$

$$V(t) = (40ft - sec^{-1})[2(1 - \exp(\frac{-t}{20})) - (1 - \exp(\frac{-t}{10}))]$$

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = 40(ft\text{-}sec^{-1})$$

معادله مربوط به x را هم به‌دست می‌آوریم با فرض $x(0) = 0$

$$x(t) = (40ft\text{-}sec^{-1})[t-40(1-e^{\frac{-t}{20}})+10(1-e^{\frac{-t}{20}})]$$

پس داریم

$$H = 1-e^{\frac{-t}{20}}$$

$$x(t) = (40ft\text{-}sec^{-1})[t-40H+10H(1+e^{\frac{-t}{20}})]$$

$$x(t) = (40ft\text{-}sec^{-1})[t-H(30+10e^{\frac{-t}{20}})]$$

و در نهایت خواهیم داشت

$$x(t) = (40ft\text{-}sec^{-1})[t-10\times(1-e^{\frac{-t}{20}})(3-e^{\frac{-t}{20}})]$$

در مورد سرعت نهایی دو گروه که

$$v_\infty = 40ft\text{-}sec^{-1} \cong 13(m/s)$$

این مقدار برای سرعت نهایی گروه‌ها در مسابقه طناب‌کشی خیلی بزرگ است. دلیل این عدم تطابق با واقعیت آن است که افراد دو گروه با توجه به سرعتی که به آن رسیده‌اند، الگوی نیروی خود را اصلاح می‌کنند که بتواند مقاومت کنند یا جلوی مقاومت گروه مقابل را بگیرند.

۱۰. ذره‌ای که در ابتدا ساکن است. در لحظه شروع $t = 0$ تحت تأثیر نیروی زیر قرار می‌گیرد.

$$F(t) = F_\circ e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\theta)$$

الف) معادله حرکت را به‌دست آورید.

ب) سرعت نهایی چگونه به θ و ω بستگی دارد؟

(راهنمایی: اگر توابع نهایی مختلط را به جای توابع مثلثاتی بنویسید. عملیات جبری ساده‌تر می‌شود)

حل:

الف) چونکه داریم $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

و چون $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ و $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$

پس

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad \& \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

اگر قرار دهیم $\varphi = \omega t + \theta$

پس برای معادله حرکت داریم

$$m\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{2}F_\circ e^{-\gamma t}\cosh(i\varphi)$$

پس

$$\int_\circ^t dv(t') = \frac{F_\circ}{2m}\int_\circ^t e^{-\gamma t}(e^{i(\omega t'+\theta)}+e^{-i(\omega t'+\theta)})dt'$$

$$v(t)-v(\circ) = \frac{F_\circ}{2m}\left[\frac{e^{i\theta}}{i\omega-\gamma}(e^{(i\omega-\gamma)t}-1)-\frac{e^{-i\theta}}{i\omega+\gamma}(e^{-(i\omega+\gamma)t}-1)\right]$$

بنابراین چون $v(\circ) = \circ$ است داریم

$$v(t) = \frac{F_\circ}{m(\omega^2+\gamma_2)}[e^{-\gamma t}(\omega\sin\varphi - \gamma\cos\varphi) + (\gamma\cos\theta - \omega\sin\theta)]$$

و با توجه به اینکه

$$\begin{cases} \int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)+C \\ \int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)+C' \end{cases}$$

و با تنظیم $x(\circ) = \circ$

$$x(t) = \frac{F_\circ}{m(\gamma^2+\omega^2)}[(\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2+\omega^2})(\gamma^2\cos(\omega t+\theta)-\omega^2\sin(\omega t-\theta)-2\gamma\omega$$

$$\sin(\omega t+\theta))+(\gamma\cos\theta-\omega\sin\theta)t]+C$$

$$x(\circ) = \frac{F_\circ}{m(\gamma^2+\omega^2)}(\frac{1}{\gamma^2+\omega^2}(\gamma^2\cos\theta + \omega^2\sin\theta - 2\gamma\omega\sin\theta)) + C$$

پس در نهایت داریم

$$x(t)=\frac{F_0}{m(\gamma^2+\omega^2)}[(\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2+\omega^2})(\gamma^2(\cos(\omega t+\theta)-\cos(\theta))-\omega^2)$$

$$(\sin(\omega t-\theta)+\sin\theta)-2\gamma\omega(\sin(\omega t+\theta)-\sin\theta)+(\gamma\cos\theta-\omega\sin\theta)t]$$

و در مورد $v(t)$ اگر نیروی L غیرفیزیکی باشد یعنی $\gamma < 0$ باشد که $\lim_{t\to\infty}F(t)=\infty$

نیروی غیرفیزیکی

$$v(\infty)=\lim_{t\to\infty}v(t)=\infty \qquad (\gamma<0)$$

نیروی غیرمیرا

$$v(\infty)=\lim_{t\to\infty}v(t)= \text{نامعلوم} \qquad (\gamma=0)$$

نیروی میرا

$$v(\infty)=\lim_{t\to\infty}v(t)=\frac{F_0(\gamma\cos\theta-\omega in\theta)}{m(\gamma^2+\omega^2)} \qquad (\gamma>0)$$

۱۱. حرکت قایقی با سرعت اولیه V_0 تحت تأثیر نیروی اصطکاک زیر کند می‌شود.

$F(v) = -b\exp(\alpha v)$

الف) معادله حرکت آن را بیابید.

ب) زمان و مسافت لازم برای توقف را پیدا کنید.

حل:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\Rightarrow m\frac{dv}{dt}=-be^{-\alpha v}\Rightarrow\int_{v_0}^{v}e^{-\alpha v'}dv'=\int_0^t\frac{-b}{m}dt'$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha v_0}-e^{-\alpha v})=\frac{-b}{m}t$$

و با ساده کردن

$$v(t)=\frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{m}{me^{-\alpha v_0}+b\alpha t}\right]$$

و با قرار دادن $V(0)=0$ داریم

$$m=me^{-\alpha v_0}+b\alpha t_0$$

پس

$$t_0=\frac{m}{\alpha b}(1-e^{-\alpha v_0})$$

مثلاً اگر قایقی با سرعت اولیه $v_0 \ll \frac{1}{\alpha}$ حرکت کند.

$$x\ll 1\Rightarrow e^{-x}\cong 1-x\Rightarrow t_0=\frac{m}{\alpha b}(1-1+\alpha v_0)=\frac{mv_0}{b}$$

و اگر قایقی با سرعتی که $v_0 \gg \frac{1}{\alpha}$ شروع کند پس $e^{-1}\gg e^{-\alpha v_0}\approx 0$

$$t_0\cong\frac{m}{b\alpha}(1-0)=\frac{m}{b\alpha}\ll\frac{mv_0}{b}$$

پس اگر قایق با سرعت کمی نسبت به $\frac{1}{\alpha_1}$ شروع کند، زمان توقف متناسب با v_0 خواهد بود. ولی اگر قایق با همان سرعت v_0 در محیط دومی قرار گیرد که $v_0 \gg \frac{1}{\alpha_2}$ به شرطی که $b_1\le b_2$ باشد پس قایق زودتر می‌ایستد.

داریم $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

بنابراین

$$dx(t)=\frac{-1}{\alpha}\ln(e^{-\alpha v_0}+\frac{b\alpha}{m}t)dt$$

$$x(t)-x(0)=\frac{-1}{\alpha}\int_0^t\ln(e^{-\alpha v_0}+\frac{b\alpha}{m}t')dt'$$

$$u'=e^{-\alpha v_0}+\frac{b\alpha}{m}t'\Rightarrow du'=\frac{b\alpha}{m}dt'\Rightarrow dt'=\frac{m}{\alpha b}du'$$

با تنظیم $x(0)=0$

$$x(t)=\frac{-m}{b\alpha^2}\int_{u(0)}^{u(t)}\ln u'du'=\frac{-m}{b\alpha^2}(u'\ln u'-u')_{u(0)}^{u(t)}$$

و

$$x(t)=\frac{m}{b\alpha^2}[(e^{-\alpha v_0}+\frac{b\alpha}{m}t)(1-\ln(e^{-\alpha v_0}+\frac{b\alpha}{m}t))-e^{-\alpha v_0}(1+\alpha v_0)]$$

برای یافتن x در محل توقف $x(t_0)$ را پیدا می‌کنیم.

$$x(t_0)=\frac{m}{b\alpha^2}((1)(1-0)-e^{-\alpha v_0}(1+\alpha v_0))$$

$$x(t_0)=(m/\alpha^2 b)[1-e^{-\alpha v_0}-\alpha v_0e^{-\alpha v_0}]$$

که می‌توان t_0 را جایگذاری کرد اما راه ساده‌تر آن است که به جای $f(t_0)=e^{-\alpha v_0}+\frac{b\alpha t_0}{m}$ یک قرار دهیم زیرا

$$v(t)=\frac{1}{\alpha}\ln(f(t))\Rightarrow \text{if}\quad v(t_0)=0\Rightarrow f(t_0)=1$$

۱۲. قایقی توسط نیروی اصطکاکی $F(v)$ کند می‌شود. سرعتش برحسب فرمول

$$v(t) = C(t - t_1)^2$$

که در آن C یک ثابت است و t_1 زمانی است که متوقف می‌شود، کاهش می‌یابد. نیروی $F(v)$ را پیدا کنید.

حل:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = F(t)$$

$$\Rightarrow F(t)=2mC(t-t_1)=-2mC\sqrt{v/C}=-2m\sqrt{Cv}$$

زیراکه در $t \leq t_1$

$$t - t_1 < 0$$

پس

$$t-t_1=-|t-t_1|=-\sqrt{\frac{V}{C}}$$

در نهایت داریم

$$F(v)=-2m\sqrt{CV}$$

۱۳. موتور جتی با نیروی پیشران حداکثر ثابت می‌تواند به هواپیمایی قدرتی بدهد که موجب ایجاد اصطکاکی کشش متناسب با مربع سرعت بشود. اگر هواپیما در لحظه $t = 0$ با سرعت ناچیزی شروع کند و با حداکثر نیروی پیشران شتاب یابد. سرعت $v(t)$ آن را بیابید.

حل:

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 + F(v) \qquad F(v) = -bv^2$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 - bv^2 \Rightarrow \frac{mdv}{F_0 - bv^2} = dt$$

$$\frac{m}{F_0}\sqrt{\frac{F_0}{b}}\int_{v_0}^{v}\frac{du'}{1-u'^2}=\int_0^t dt'=t-0 \qquad u=\sqrt{\frac{b}{F_0}}v$$

$$u=\sin\theta \Rightarrow \int\frac{du}{1-u^2}=\int\sec\theta d\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

if $u=\sin\theta$

$$\sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{m}{\sqrt{F_0 b}}\left[\ln\left[\frac{1+u'}{1-u'}\right]\right]_{u_0}^{u}=t$$

$$\ln\left[\frac{1+u}{1-u}\right]-\ln\left[\frac{1+u_0}{1-u_0}\right]=\frac{2\sqrt{F_0 b}}{m}t$$

$$u_0=\sqrt{\frac{b}{F_0}}v_0 \ \ \& \ \ V_0\ll\sqrt{\frac{F_0}{b}}\Rightarrow u\ll 1$$

(u بی بعد است)

وقتی می‌گوییم سرعت ابتدایی ناچیز است یعنی در ابتدا هواپیما نیروی مقاوم خیلی کوچکی نسبت به نیروی محرک F_0 احساس می‌کند

$$F >> bv_0^2$$

$$(F_0/b) >> V_0^2 \Rightarrow \sqrt{F_0/b} >> V_0 \Rightarrow u_0 << 1$$

$$u_0\ll 1\Rightarrow \ln\left[\frac{1+u_0}{1-u_0}\right]\approx\ln\left[\frac{1}{1}\right]=\ln(1)=0$$

پس در نهایت داریم

$$\ln\left[\frac{1+u}{1-u}\right]\cong\frac{2\sqrt{F_0 b}}{m}t$$

تعریف می‌کنیم

$$\tau=\frac{m}{2\sqrt{F_0 b}}$$

$$\ln\left[\frac{1+u}{1-u}\right]=\frac{t}{\tau}\Rightarrow\frac{1+u}{1-u}=e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$(1+u)=(1-u)e^{\frac{t}{\tau}}\Rightarrow u(1+e^{\frac{t}{\tau}})=e^{\frac{t}{\tau}}-1$$

$$u(t)=\frac{e^{\frac{t}{\tau}}-1}{e^{\frac{t}{\tau}}+1}\Rightarrow v(t)=\sqrt{\frac{F_0}{b}}\left[\frac{e^{\frac{t}{\tau}}-1}{e^{\frac{t}{\tau}}+1}\right]$$

$$v(t)=\sqrt{\frac{F_0}{b}}\left[\frac{e^{\frac{t}{2\tau}}}{e^{\frac{t}{2\tau}}}\right]\left[\frac{e^{\frac{t}{2\tau}}-e^{\frac{t}{2\tau}}}{e^{\frac{t}{2\tau}}+e^{\frac{t}{2\tau}}}\right]=\sqrt{\frac{F_0}{b}}\tanh(\frac{t}{2\tau})$$

$$\tau=\frac{m}{2\sqrt{F_0 b}}\Rightarrow \qquad v(t)=\sqrt{\frac{F_0}{b}}\tanh\left[\frac{\sqrt{F_0 b}}{m}t\right]$$

که هواپیما در نهایت یعنی $(t >> \tau)$ به سرعت $v(\infty)$ می‌رسد که

$$v(\infty)=\lim_{t\to\infty}v(t)=\sqrt{\frac{F_0}{b}}$$

یعنی هواپیما در نهایت با محیط به تعادل می‌رسد که

$$bu^2 = F_0$$

که در این حالت به سرعت ثابتی رسیده است که همان $v(\infty)=\sqrt{F_0/b}$ است.

۱۴. فرض کنید که موتورهای یک هواپیمای ملخی به جرم m در حداکثر سوخت (دود خارج کردن) توان ثابت p را تولید می‌کند. نیروی $F(v)$ را پیدا کنید. با نادیده گرفتن اصطکاک روش بخش ۲ـ ۴ را به‌کار برده، سرعت و مکان هواپیما را روی باند وقتی شتاب می‌گیرد، از لحظه سکون $t = 0$ پیدا کنید. نتیجه خود را در مورد سرعت با به‌کار گرفتن قضیه انرژی بررسی کنید. به چه صورتی فرض‌های این مسئله بطور فیزیکی غیرواقعی هستند؟ به چه صورتی تحت فرض‌های واقعی‌تری، جواب تغییر خواهد کرد.

حل:

تعریف توان

$$k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad p_k=\frac{dk}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{V}$$

سرعت و نیروی پیشران در یک جهت $\quad \vec{F}(v)\parallel\vec{v} \Rightarrow P=vF(v)$

بنابراین:

$$F(v) = \frac{P}{v}$$

با نوشتن معادله نیوتن:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v) = \frac{P}{v}$$

$$\int_0^v v'dv'=\frac{P}{m}\int_0^t dt'\Rightarrow\frac{1}{2}(v^2-0)=\frac{P}{m}(t-0)$$

$$\Rightarrow\frac{mv^2}{2} = pt \quad\Rightarrow v = \left(\frac{2pt}{m}\right)^{0.5}$$

$$\int_0^t dx(t')=\sqrt{\frac{2p}{m}}\int_0^t\sqrt{t'}dt'\Rightarrow x(t)-x(0)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2p}{m}}t^{1.5}$$

قرار می‌دهیم $x(0) = 0$

$$x(t)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2p}{m}}t^{1.5}$$

ب) می‌دانیم $p = \frac{dk}{dt}$ (تعریف اول) پس

$$\int_0^k dk'=\int_0^t pdt'$$

بنابراین:

$$K = 0 = P(t - 0)$$

پس:

$$K = Pt$$

و

$$\frac{mv^2}{2}=Pt\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2pt}{m}}$$

سؤال: در لحظه $t = 0$ که سرعت صفر است، نیروی $F(0)$ برابر است با ∞ که نباید اینطور باشد باید با v عددی غیرصفر را قرار داد تا این حالت غیرفیزیکی رخ ندهد

$$F(v) = \frac{p}{v + v_c} \qquad v,v_c \geq 0$$

(البته فرض عدم وجود اصطکاک شاید غیرواقعی باشد ولی غیرفیزیکی نیست).

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{p}{v + v_c}$$

ولی الگوی توان ثابت در سرعت‌های قابل ملاحظه باید برقرار باشد.

$$F = \frac{p}{v + v_c F(v)}$$

که $F(v)$ تابعی است که خیلی سریع به سمت صفر میل می‌کند.

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{p}{v + v_c F(v)}$$

$$m(v+v_cF(v))dv=Pdt\Rightarrow\frac{Pt}{m}=\int_0^v(v'+v_c F(v'))dv'$$

که این به ما می‌گوید توابع $x(t),\ v(t)$ در بازه زمانی ابتدایی حرکت باید اصلاح شوند ولی در زمان‌هایی که سرعت به حد قابل ملاحظه‌ای رسیده همان توابع v و x قبلی درست است.

۱۵. موتور یک ماشین کورسی به جرم m در حداکثر سوخت (دود خارج کردن)، توان ثابت p را تولید می‌کند. با فرض اینکه متناسب با سرعت است، فرمولی برای $v(t)$ وقتی ماشین از

خط شروع و حداکثر سوخت (دود خارج کردن) شتاب می‌گیرد پیدا کنید. آیا جواب شما وقتی $t \to \infty$ درست عمل می‌کند.

حل:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{p}{v} - bv = F + f \qquad (b > 0)$$

نیروی اصطکاکی: $f(v) = -bv$

نیروی رانشی $F(v) = \frac{P}{v}$

پس:

$$\frac{vdv}{p - bv^2} = \frac{1}{m}dt$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = P - bv^2 \Leftarrow du = -2bvdv$ پس:

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du'}{u'} = \frac{-2b}{m}\int_0^t dt' \Rightarrow u(t) = u(0)e^{\frac{-2bt}{m}}$$

$$p - bv^2 = (p - b\times 0)e^{\frac{-2bt}{m}}$$

$$P(1-\exp(\frac{-2bt}{m})) = bv^2 \Rightarrow v^2(t) = \frac{p}{b}(1-e^{\frac{-2bt}{m}})$$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{P}{b}}(1-\exp(\frac{2bt}{m}))^{0.5}$$

در $t \to \infty$ ماشین کورسی خود را با محیط به تعادلی رسانده و هیچ نیروی خالصی روی آن عمل نمی‌کند و به سرعت ثابتی می‌رسد.

$$m(\frac{dv}{dt}) = \frac{P}{v_\infty} - bv_\infty = 0$$

پس:

$$= \frac{P}{v_\infty} - bv_\infty = 0$$

در نتیجه:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{P}{b}}$$

و برای فرمول $v(t)$ هم خواهیم داشت (از طرف دیگر)

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{P}{b}}(1-0)^{0.5} = \sqrt{\frac{P}{b}}$$

یعنی فرمولی که برای $v(t)$ به‌دست می‌آوریم حداقل در زمان‌های بسیار بزرگتر از $\tau = \frac{m}{2b}$ بر واقعیت منطبق است ولی مثل مسئله قبل در بازه زمانی ابتدایی حرکت باید اصلاح شود.

۱۶. جسمی به جرم m بر روی صفحه افقی ناصافی می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی μ_s و ضریب اصطکاک لغزشی μ است. تابع تحلیلی مانند $F(v)$ را پیدا کنید که در سرعت‌های قابل ملاحظه دارای مقدار ثابت مناسب باشد و در سرعت‌های بسیار کم به نیروی اصطکاک ایستایی ساده بشود. ب) معادله حرکت جسم را تحت تأثیر این نیرو اگر سرعت اولیه آن v_0 باشد، پیدا کنید.

حل:

چون سطح افقی است برای نیروی عمودی سطح داریم $N = mg$ قرار می‌دهیم:

$$F(v) = -mg(\mu_s G(v) + \mu_k(1 - G(v)))(\frac{v}{|v|})$$

که $G(v)$ تابعی است که دارای خواص زیر است:

۱) $G(0) = 1$ ۲) خیلی سریع به سمت صفر میل می‌کند

۳) بی بعد است ۴) فرم $G(v)$ فعلاً معلوم نیست.

معادله حرکت را می‌نویسیم:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg(\mu_s G + \mu_k(1 - G))(\frac{v}{|v|})$$

مثلاً در سرعت‌های مثبت

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{\mu_s G(v') + \mu_k(1-G(v'))} = -gt$$

نکته:

البته در اصل تابع $F(v)$ باید به‌صورت زیر مشخص می‌شد

$$F(v) = (\mu_s G(v) + \mu_k H(v))(-mg\frac{v}{|v|})$$

که

$$G(0) = 1 \qquad H(0) = 0$$

(v_e یک سرعت معیار است)

$$(v \gg v_e)\quad G(v) \cong 0 \ \&\ H(v) \cong 1$$

و داریم:

$$\mu_s > \mu_k$$

پس:

$$\mu_s \geq \mu_s G + \mu_k H \quad (*)$$

بنابراین:

$$\mu_s (1 - G) \geq \mu_k H$$

پس H و G می‌توانند سه حالت نسبت به هم داشته باشند.

I) $1 - G > H$

II) $1 - G = H$

III) $1 - G < H$

- در حالت سوم $1 - G(v)$ را طوری تنظیم کرده‌ایم که نامساوی (*) برقرار باشد، اما اگر یک شخص سطح را طوری دستکاری کند که فاصله μ_s, μ_k کمتر شود. می‌تواند تا جایی این کار را انجام دهد که شرایط در معادله III نامعادله (*) را نقض کند (توجه کنید که فرض این است که توابع G و H تابعی از خصوصیات حرکت هستند و نه خصوصیات محیط، پس با عوض کردن جنس محیط نباید H و G تغییر کنند).

در حالت اول نیز اگر شخصی سطح را طوری دستکاری کند که $\mu_s \geq \mu_k$ (یعنی μ_k کمی کوچکتر از μ_s باشد) و این دستکاری می‌تواند تا جایی ادامه یابد که با وجود شرط اول (I) نامساوی (*) دیگر برقرار نباشد.

پس اگر بخواهیم H(v) و G(v) فقط تابع حرکت و مستقل از پارامترهای مربوط به محیط باشند باید تابع عمومی F(v) به فرم زیر باشد

$$F(v) = (\mu_s - \mu_k)G(v) + \mu_k$$

و یا به عبارتی

$$H(v) + G(v) = 1$$

مثلاً با پیشنهاد دادن $G(v) = e^{-av}$ (a تابع ابعاد است و تابع μها نیست).
خواهیم داشت

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{(\mu_s-\mu_k)e^{-av'}+\mu_k} = -gt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{be^{-av'}+1} = -\mu_k gt \qquad b = \frac{1}{\mu_k}(\mu_s - \mu_k)$$

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du'}{u'(u'-1)} = \mu_k gbt \qquad u' = be^{-av'}+1$$

$$-\left[\ln\left(\frac{u'}{u'-1}\right)\right]_{u_0}^{u} = \mu_k gbt \Rightarrow \left[\ln(1+b^{-1}e^{av'})\right]_{v_0}^{v} = -\mu_k gbt$$

$\beta = \mu_k gb$

$$\ln\left[\frac{1+b^{-1}e^{av}}{1+b^{-1}e^{av_0}}\right] = -\mu_k gbt \Rightarrow (1+b^{-1}e^{av}) = (1+b^{-1}e^{av_0})e^{-\beta t}$$

$$e^{av} = b((1+b^{-1}e^{av_0})e^{-\beta t} - 1) \Rightarrow v(t) = \frac{1}{a}\ln((b+e^{av_0})e^{-\beta t} - b)$$

۱۹. ذره‌ای به جرم m با نیروی متناسب با عکس مکعب فاصله‌اش از مبدأ دفع می‌شود، اگر در ابتدا ذره در فاصله x_0 از مبدأ ساکن باشد، معادله حرکت را بنویسید و آن را حل کنید.

حل:

$$F(x) = \frac{K}{x^3} \qquad k > 0$$

$$v(x) = -\int_{x_{ref}}^{x} F(x')dx' = -\int_{x_{ref}}^{x} \frac{K}{x'^3}dx' = \frac{1}{2}\left[\frac{K}{x'^2}\right]_{x_{ref}}^{x}$$

بنابراین

$$V(x) = K\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2_{ref}}\right)$$

برای حذف جمله مربوط به x_{ref} قرار می‌دهیم $x_{ref} = \infty$، یعنی مبدأ پتانسیل در ∞ قرار دارد و
$v(\infty) = 0$

پس

$$v(x) = \frac{1}{2}(K/x^2)$$

ذره در لحظه $t_0 = 0$ در x_0 ساکن است ($V_0 = 0$)

$$E = K_0 + V(x_0) = 0 + \frac{1}{2}(K/x_0^2)$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-v)}} = \pm t \quad \& \quad E - v(x) = \frac{1}{2}K\frac{x^2 - x_0^2}{x^2 x_0^2}$$

پس

$$\sqrt{\frac{m}{K}}\int_{x_0}^{x} \frac{|x'|\, x_0\, dx'}{\sqrt{x'^2 - x_0^2}} = \pm t$$

در $x_0 > 0$ اولاً $x = |x|$ و ثانیاً چون نیرو دفعی است پس $\frac{dx}{dt} > 0$ و با سرعت مثبت باید علامت + در معادله را انتخاب می‌کنیم.

در $x_0 < 0$ اولاً $|x| = -x$ و ثانیاً بدلیل نیروهای دفعی علامت منفی را انتخاب کرده زیرا که نیروهای دفعی در $x_0 < 0$ باعث ایجاد سرعت منفی می‌شوند و از بین دو علامت $\pm$ باید علامت - را اختیار کرد. پس با توجه به توضیحات داده شده یک معادله برای هر x_0 دلخواه (مثبت یا منفی) حاکم است.

$$\int_{x_0}^{x}\frac{x.x'dx'}{\sqrt{x'^2-x_0^2}}=\sqrt{\frac{K}{m}}t$$

اگر تغییر متغیر روبرو را استفاده کنیم $G' = (\frac{x'}{x_0})^2 - 1$

در نهایت داریم

$$\int_{0}^{G}\frac{dG'}{2\sqrt{G'}}=\frac{1}{x_0^2}\sqrt{\frac{K}{m}}t$$

پس

$$\sqrt{G}=\frac{1}{x_0^2}\sqrt{\frac{K}{m}}t\Rightarrow G=\frac{1}{x_0^4}\frac{K}{m}t^2$$

$$\frac{x^2-x_0^2}{x_0^2}=\frac{1}{x_0^4}\frac{Kt^2}{m}\Rightarrow x^2=\frac{1}{x_0^2}\frac{Kt^2}{m}+x_0^2$$

اگر $x_0 > 0$ باشد بدلیل نیروی دفعی در لحظات بعد $x > 0$ پس

$$x(t) = (x_0^2 + \frac{Kt^2}{mx_0^2})^{0.5} \qquad x_0 > 0$$

اگر $x_0 < 0$ باشد، باز هم بدلیل نیروی دفعی در لحظات بعد $x < 0$ پس

$$x(t) = -(x_0^2 + \frac{Kt^2}{mx_0^2})^{0.5} \qquad x_0 < 0$$

توجه کنید که $x = 0$ نقطه‌ای است که پتانسیل در آن ∞ است و چون مدل نیروی ما در $x = 0$ نقص دارد، جهت نیرو معلوم نیست و اندازه نیرو ∞ است زیرا در $x = 0$ ذره معلوم نیست که به کدام طرف دفع می‌شود، پس از بررسی $x_0 = 0$ امتناع می‌کنیم ولی با مقدارگذاری داریم:

$$x(t) = \pm\infty \qquad x_0 = 0$$

که همان نیروی بزرگ که جهت دوگانه دارد باعث این واقعیت می‌شود.

۲۴. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی زیر قرار می‌گیرد:

$$F(x) = B(\frac{a}{x})^2(1 - 28(\frac{a}{x})^3 + 27(\frac{a}{x})^6)$$

ذره فقط در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند.

الف) تابع انرژی پتانسیل را یافته و آن را رسم کنید ($a,B > 0$)

ب) انواع حرکات ممکن را توصیف کنید. تمام نقاط تعادل را مشخص کنید، و فرکانس نوسان‌های کوچک حول هریک از نقاط تعادل را که پایدارند، معین کنید.

پ) ذره‌ای در نقطه $x = \frac{3a}{2}$ با سرعت $V = -V_0$ ($V_0 > 0$) شروع به حرکت می‌کند.

کوچکترین مقدار V_0 چقدر باشد تا ذره بتواند سرانجام به فاصله‌ای بسیار دور فرار کند؟ حرکت را در آن حالت توصیف کنید. حداکثر سرعت ذره چیست؟ وقتی ذره از نقطه شروع بسیار دور باشد، سرعت آن چقدر خواهد بود؟

حل:

الف)

$$V(x) = -\int_{x_{ref}}^{x}F(x')dx'$$

با استفاده از تغییر متغیر $u' = \frac{x'}{a}$ با $x_{ref} = \infty$ داریم:

$$V(x) = -Ba\int_{\infty}^{u}(\frac{1}{u'^2} - \frac{28}{u'^5} + \frac{27}{u'^8})du'$$

$$V(x) = -Ba(\frac{1}{u^2} - \frac{28}{-4}\frac{1}{u^4} + \frac{27}{-7}\frac{1}{u^7})$$

$$V(x) = \frac{Ba^2}{x}(1 - 7\frac{a^3}{x^3} + \frac{27}{7}\frac{a^6}{x^6})$$

ب)

$$F(x) = 0 \Rightarrow 1 - 28(\frac{a}{x})^3 + 27(\frac{a}{x})^6 = 0 \Rightarrow$$

$$x^6 - 28a^3x^3 - 27a^6 = 0 \Rightarrow T = x^3 \Rightarrow T^2 - 28a^3T - 27a^6 = 0$$

$$\Delta = (-28)^2 - 4(1)(27) = 676$$

پس برای مختصات نقاط تعادل داریم

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{T_1} = \left[\frac{1}{2}(28 + \sqrt{676})\right]^{1/3}a = +3a \\ x_2 = \sqrt[3]{T_2} = \left[\frac{1}{2}(28 - \sqrt{676})\right]^{1/3}a = +a \end{cases}$$

حال وضعیت نقاط تعادل را از لحاظ پایداری بررسی می‌کنیم و برای سادگی محاسبات از یک سری تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. $S = \frac{a}{x}$

$$s_1 = \frac{1}{3} \qquad s_2 = 1$$

$$\begin{cases} F(s) = Bs^2(1 - 28s^3 + 27s^6) \\ M(s) = \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{dF}{dx} = -\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{a}s^2\frac{dF}{ds} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(s_1)=\frac{2B}{a}(s_1)(1-70s_1^3+108s_1^6)=\frac{28}{a}(-0/48)<0 \\ M(s_2)=\frac{2B}{a}s_2(1-70s_2^3+108s_2^6)=\frac{2B}{a}(39)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(s_1)=\frac{2B}{a}(1/11\times10^{-12}) \\ F(s_2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} V(s_1)>0 \\ V(s_2)<0 \end{cases}$$

چون $0 < B$ و $0 < a$ پس نقطه x_1 دارای تعادل ناپایدار و نقطه x_2 دارای تعادل پایدار است.

برای جرمی که متصل به فنر است و با فرکانس $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ نوساناتی با دامنه کوچک داشت، داریم

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

که نیروی فنر عبارت بود از $F(x) = -k(x - x_0)$ که x_0 نقطه تعادل (و نه آزاد) سیستم جرم ـ فنر است که

$$V(x) = \frac{1}{2} m\, \omega^2 (x - x_0)^2$$

که ω فرکانس نوسان است.

وقتی یک منحنی $V(x)$ اختیاری داریم که در $x = x_b$

$$\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_b}=0 \qquad \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_b}>0$$

یعنی اگر $x = x_b$ یک نقطه تعادل پایدار برای منحنی $V(x)$ باشد، حول نقطه تعادل اگر به اندازه کافی به x_b نزدیک شویم می‌توان پتانسیل را با پتانسیل سهمی حاصل از نوسانگر تقریب زد، یعنی در نقطه تعادل اگر ذره کمی منحرف شود نوسان‌های آن با تقریب خوبی همان نوسان‌های نوسانگر هماهنگ ساده $(F(x) = -kx)$ است. در توضیح آنکه

$$V(x)=V(x_b)+\frac{1}{1!}\cdot\frac{dV}{dx}\Big|_{x_b}(x-x_b)+\frac{1}{2!}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x_b}(x-x_b)^2$$

یعنی پتانسیل را حول $x = x_b$ یا همان نقطه تعادل پایدار بسط داده و تا سه جمله اول آن را نگه می‌داریم زیرا پتانسیل سهموی نوسانگر را می‌خواهیم و به اندازه کافی نزدیک شده‌ایم تا جملات $|O|(x = x_b)^3$ (درجه سوم از $(x = x_b)$) قابل اغماض باشند (مرتبه $O \equiv Order$) و همینطور درجه سوم به بالا. پس طبق کل معادلاتی که ذکر شد.

$$V(x)=V(x_b)+\frac{1}{2}\left[\frac{d_2V}{dx^2}\right]_{x_b}(x-x_b)^2$$

و در نوسانگر هماهنگ $V(x) = V(x_b) + \frac{1}{2} m\,\omega^2 (x - x_b)^2$ $(V(x_b) = 0)$

با مقایسه فرکانس ارتعاش متحرک با دامنه‌های کوچک حول نقطه تعادل $(x - x_b)$ را خواهیم یافت

$$\omega^2=\frac{1}{m}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_b}$$

اگر بخواهیم $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ دقیقتر شویم معادله حرکت نوسانگر هماهنگ را می‌نویسیم

$$m\ddot{x}=-kx$$

یا

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad \frac{k}{m}=\omega$$

$$X(t) = Ae^{rt} \Rightarrow r^2 + w^2 = 0 \Rightarrow r_1 = i\omega \ \& \ r_2 = -i\omega$$

که

$$X(t)=A_1e^{i\omega t}+A_2e^{-i\omega t}$$

که ω همان فرکانس نوسانات است. و اگر برای حرکتی $0 > \omega^2$ شد مثلاً در $V(x)$ برای x_b داشتیم $(\frac{d^2V}{dx^2})_{x_b}<0\Rightarrow\omega^2<0$ پس با فرض اینکه ذره از $x = x_b$ زیاد فاصله نگیرد، یک ω از این طریق برایش تعریف و پس داریم $\omega'=i\omega \Rightarrow X(t)=A_1e^{-\omega t}+A_2e^{+\omega t}$ و جوابی که در حالت کلی نوشته شده، فرض اولیه ما مبنی بر عدم فاصله گرفتن ذره از نقطه تعادل باطل می‌شود، و این به معنی می‌باشد که ذره منحرف شده و از نقطه تعادل بسیار فاصله می‌گیرد. که با تعابیر ما از نقاط غیرپایدار تعادلی در منحنی $V(x)$ سازگار است. (توجه کنید که $e^{\omega t}$ در tهای بزرگ، بزرگ می‌شوند و نیز $e^{-i(i\omega)t}$ تبدیل می‌شود به $e^{\omega t}$) پس فقط برای نقطه x_2 که $0 < M(x_2)$ شد داریم

$$M(x_2) = \left(\frac{d^2x}{dx^2}\right) \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{M}{m}}$$

و برای فرکانس نوسان‌های کوچک ذره حول x_2 داریم $\omega=\sqrt{\frac{B}{ma}}\sqrt{78}$

در نتیجه $\omega\cong 8/83\sqrt{\frac{M}{ma}}$ (برای نقطه تعادل x_2)

توجه کنید: بدون رسم توسط نرم‌افزارها باید تحلیل کردن را بلد باشید، یعنی رسم منحنی به صورت تقریبی و کیفی طوری که خواص مهم آن عوض نشود به ما کمک می‌کند، صرف‌نظر از

منحنی $V(x)$ که در بالا رسم شده است، شروع به ترسیم $V(x)$ در ذهن خود می‌کنیم

۱ـ ابتدا $V(x_1)$ و $V(x_2)$ را از لحاظ علامت مشخص می‌کنیم.

که

$$V(x_1) > 0 \qquad V(x_2) = 0$$

۲ـ اگر $x \to 0^+$ عبارت مهم در $V(x)$ که همان $(a/x)^7$ است دارای علامت مثبت است پس

$$\lim_{x\to 0^+} V(x) = +\infty$$

۳ـ اگر $x \to 0^+$ عبارت مهم در $V(x)$ که همان $(a/x)^7$ است دارای علامت منفی است پس

$$\lim_{x\to 0^+} V(x) = -\infty$$

۴ـ اگر $x \to +\infty$ عبارت مهم در $V(x)$ که همان $(\frac{a}{X})$ است دارای علامت مثبت است پس

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = 0^+$$

۵ـ اگر $x \to -\infty$ عبارت مهم در $V(x)$ که همان $(\frac{a}{X})$ است دارای علامت منفی است، پس

$$\lim_{x\to -\infty} V(x) = 0^-$$

(منظور از جمله مهم، جمله‌ای است که اندازه بزرگتری دارد.)

که با داده‌های شش‌گانه به راحتی می‌توان نمودار در ذهن ترسیم کرد که با نمودار ترسیمی ما توافق خوبی دارد، توجه کنید که شما همیشه به نرم‌افزارهای ترسیمی دسترسی ندارید.

حالات ممکن حرکت:

۱ـ اگر $x_0 < 0$ باشد و $v_0 > 0$، ذره به سمت $x \to 0^-$ می‌رود.

۲ـ اگر $x_0 < 0$ باشد و $v_0 < 0$، ذره به سمت $+\infty$ می‌رود و در صورتی که $E > 0$ باشد.

۳ـ اگر $x_0 < 0$ باشد و $v_0 < 0$ و $V(x_0) < E < 0$ ذره به سمت نقطه بازگشت می‌رود پس از بازگشت به $x \to 0^-$ سقوط می‌کند.

۴ـ اگر $x_0 > 3a$ و $V_0 > 0$، پس ذره به سمت $+\infty$ فرار می‌کند.

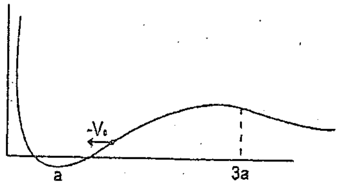
۵ـ اگر $x_0 > 3a$ و $V_0 < 0$ و $0 < E < V(3a)$، ذره از روی نقطه‌ای در روی سد مربوط به $x_1 = 3a$ باز می‌گردد و باز به ∞ فرار می‌کند.

۶ـ اگر $x_0 > 3a$ و $V_0 < 0$ و $E > V(3a)$، ذره از سد عبور کرده، و از نقطه‌ای در $0 < x < a$ بازمی‌گردد و بدلیل بقای انرژی باز سد را رد می‌کند و بعد از آن به ∞ فرار می‌کند.

۷ـ اگر $0 < x_0 < 3a$ و $V_0 > 0$ و $V_0 < 0$ باشد به گونه‌ایکه $E < V(3a)$، ذره در گودی پتانسیل مربوط به $x_2 = a$ نوسان می‌کند.

۸ـ اگر $0 < x_0 < 3a$ و $V_0 > 0$ و $V_0 < 0$ باشد و $E > V(3a)$ و پس به ترتیب ذره از سد مربوط به $x_1 = 3a$ عبور کرده و به ∞ فرار می‌کند و یا بعد از بازتابی از یک $0 < x < a$، از سد عبور کرده و به ∞ فرار می‌کند (منظور از بازتاب همان بازگشت است)

پ) $x_0 = \frac{3a}{2}$ پس ذره در چاله پتانسیل مربوط به $x_2 = a$ در $0 < x < 3a$ قرار دارد.



$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(\frac{3a}{2}) > V(3a) > 0$$

$$v_0 > \sqrt{\frac{2}{m}(V(3a) - V(\frac{3a}{2}))} \Rightarrow c_{0min} = \sqrt{\frac{2}{m}(V(3a) - V(\frac{3a}{2}))}$$

ذره به سمت 0^+ می‌رود و در نقطه x_2 که $V(x_r) = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(\frac{3a}{2})$ که البته $0 < x_r < a$، توقف کرده و به سمت نقطه شروع بازمی‌گردد و اگر $v_0 > v_{min}$ باشد ذره در بازگشت از سد عبور می‌کند و اگر $v_0 = v_{min}$ باشد ذره در $x = 3a$ توقف می‌کند و روی قله می‌ایستد و اگر $v_0 < v_{min}$ باشد، x_r یک مقدار دیگر برای $a < x_r < 3a$ دارد و ذره بین دو نقطه بازگشت نوسان می‌کند.

انرژی ذره ثابت است و ذره با رسیدن به $x = a$ که $v(x)$ در آنجا مینیمم است، انرژی جنبشی به ماکزیمم می‌رسد.

$$v_{max} = ?$$

$$K_{max} + V(a) = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(\frac{3a}{2})$$

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 + V(a) = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(\frac{3a}{2})$$

$$v_{max} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}(V(\frac{3a}{2}) - V(a))}$$

$$V(\frac{3a}{2}) \cong -0/49Ba \quad \text{و} \quad V(3a) = 0/25Ba \quad \text{و} \quad V(a) = -2/14Ba$$

اگر ذره از سد عبور کند و به سمت ∞ فرار کند

انرژی ذره ثابت است پس $\frac{1}{2} m v_0^2 + V(\frac{3a}{2}) = \frac{1}{2} m v^2 + V(x)$

اگر $x << \frac{3a}{2}$ پس $v(x) \approx 0$ پس

$$v^2 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m}V(\frac{3a}{2})}$$

۲۵. معادله (۲ ـ ۶۵) را به‌وسیله هریک از روش‌های بحث شده در بخش‌های ۲ ـ ۳ و ۲ ـ ۴ و ۲ ـ ۵ حل کنید:

حل:

$$mx = -mg \quad t_0 = 0 \qquad (۶۵ ـ ۲)$$

روش بخش (۲ ـ ۳) (روش تکانه)

$$\Delta p = \int_{t_0}^{t} F(t')dt'$$

$$F(t) = mg \Rightarrow mv(t) - mv_0 = -mg(t - t_0)$$

$$v(t) = v_0 - g(t - t_0)$$

$$dx(t) = (v_0 - g(t - t_0))dt$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx'(t) = \int_{t_0}^{t} (v_0 - g(t' - t_0))dt'$$

$$x(t) - x(0) = v_0(t - t_0) - g(\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0))$$

$$x(t) = x(0) + v_0(t - t_0) - g(\frac{t^2}{t2} - \frac{t_0^2}{2} - tt_0 + t_0^2)$$

محور x در جهت $-\vec{g}$

$$x(t) = x(0) + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

روش بخش (۲ ـ ۴) (روش کاهش مرتبه) $mx = -mg \quad (F(v) = -mg)$

$$x = v \Rightarrow mv = -mg \Rightarrow v = -g \quad v \equiv \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv' = -g\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow v(t) - v(0) = -g(t - t_0)$$

$$v(t) = v_0(t) - g(t - t_0)$$

پس از انتگرال‌گیری مجدد مانند مورد قبلی

$$x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

روش بخش (۲ ـ ۵)

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}} = \pm(t - t_0)$$

$$v(x) = -\int_{x_{ref}}^{x} F(x')dx' = -mg(x - x_{ref}) \quad x_{ref} = 0$$

$$V(x) = -mgx$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{1 - \lambda x'}} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}(t - t_0) \qquad u = 1 - \lambda x$$

$$\lambda = (mg/E) \quad du = -\lambda dx$$

$$-\frac{2}{\lambda}\int_{x_0}^{x}\frac{du}{2\sqrt{u}} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}(t - t_0)$$

$$-\frac{2}{\lambda}(\sqrt{1 - \lambda x} - \sqrt{1 - \lambda x_0}) = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}(t - t_0)$$

اگر قرار دهیم $E = mgx_0$ پس $\lambda x_0 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1 - \lambda x_0$

$$\frac{-2}{\lambda}(\sqrt{1 - \lambda x}) = \pm\sqrt{2gx_0}(t - t_0)$$

در صعود سرعت + است و علامت + را انتخاب می‌کنیم و برای سرعت - علامت منفی.

$$\frac{4}{\lambda^2}(1 - \lambda x) = 2gx_0(t - t_0)^2$$

$$\lambda = x_0^{-1}$$

$$4x_0^2(1 - \frac{x}{x_0}) = 2gx_0(t - t_0)^2$$

$$1 - \frac{x}{x_0} = \frac{1}{2}g(\frac{1}{x_0})(t - t_0)^2$$

فرمول رها شدن جسم از x_0 به‌دست می‌آید. $(v_0 = 0)$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \Rightarrow x(t) = x_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

که چون $E = mgx_0$ یعنی جسم را بطور ساکن در ارتفاع x_0 از مبدأ پتانسیل $x_{ref} = 0$ قرار داده‌ایم

$$\frac{1}{2}m v_0^2 + V(x_0) = 0 + mgx_0$$

مثلاً اگر قرار دهیم $v_0 \neq 0$ $\quad E = \frac{1}{2}m v_0^2 + mgx_0$

$$\lambda = \frac{mg}{E} = (x_0 + \frac{v_0^2}{2g})^{-1} \Rightarrow 1 - \lambda x_0 = \frac{(v_0^2/2g)}{x_0 + (v_0^2/2g)}$$

با توجه به مقدار λ ثابت‌های ظاهر شده در معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda x_0} = \left[\frac{v_0^2}{2g}\left(x_0+\frac{v_0^2}{2g}\right)\right]^{0.5} \\ \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{mg}{2E}\sqrt{\frac{2E}{m}} = g(m/2E)^{0.5} = \sqrt{\frac{g}{2}}\left(x_0+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{-0.5} \end{cases}$$

$$\sqrt{1-\lambda x} = \mp\sqrt{\frac{g}{2}}\left(x_0+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{-0.5}(t-t_0)+\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^{0.5}\left(x_0+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{-0.5}$$

$$1-\lambda x = \left(x_0+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{g}{2}}(t-t_0)+\sqrt{\frac{v_0^2}{2g}}\right)^2$$

$$\left(x_0+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{-1}\left[\frac{v_0^2}{2g}+(x_0-x)\right] = \left(x_0+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{g}{2}}(t-t_0)+\sqrt{\frac{v_0^2}{2g}}\right)^2$$

$$\frac{v_0^2}{2g}+(x_0-x) = \frac{g}{2}(t-t_0)^2+\frac{v_0^2}{2g}\mp 2\frac{|v_0|}{2}(t-t_0)$$

علامت بالایی برای سرعت مثبت و علامت پایینی برای سرعت منفی است.

$$v(t) = x_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \pm |v_0|(t-t_0)$$

اگر علامت بالا را برای مقادیر - و علامت پایین را برای مقادیر + $|w| = |\pm w|$ بگیریم خاصیت قدرمطلق این است.

$$\sqrt{w^2} = |w| = \pm w$$

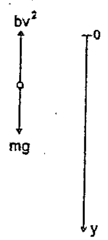
$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \pm (\pm v_0)(t-t_0)$$

پس در نهایت داریم

$$vx(t) = x_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + (v_0)(t-t_0)$$

۲۹. معادله (۲ـ۷۴) و (۲ـ۷۵) را برای جسمی افتان که تحت نیروی اصطکاکی متناسب با مربع سرعت قرار گرفته است، بیابید.

حل:



$$m\ddot{y} = mg - b\dot{y}^2 \quad V = \dot{y}$$

$$m\dot{V} = mg - bv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v^2$$

$$\frac{dv}{g-(b/m)v^2} = dt$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{1-\lambda v'^2} = g\int_0^t dt' \qquad \lambda = \frac{b}{mg}$$

$$u' = \sqrt{\lambda}v' \Rightarrow du' = \sqrt{\lambda}dv'$$

$$u = \sin\theta \Rightarrow \int\frac{du}{1-u^2} = \int\sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln((1+u)/(1-u)) + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{u_0}^{u}\frac{du'}{1-u'^2} = gt \Rightarrow \ln\left[\frac{1+\sqrt{\lambda}v}{1-\sqrt{\lambda}v}\right] - \ln\left[\frac{1+\sqrt{\lambda}v_0}{1-\sqrt{\lambda}v_0}\right] = Bt$$

$$B = 2\sqrt{\lambda}g = 2\sqrt{\frac{b}{mg}}g = 2\sqrt{\frac{bg}{m}}$$

$$\ln\left[\frac{1+\sqrt{\lambda}v}{1-\sqrt{\lambda}v}\right] = Bt + \ln\left[\frac{1+\sqrt{\lambda}v_0}{1-\sqrt{\lambda}v_0}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{\lambda}v}{1-\sqrt{\lambda}v} = \left[\frac{1+\sqrt{\lambda}v_0}{1-\sqrt{\lambda}v_0}\right]e^{Bt} = T_0e^{Bt} \qquad T_0 = \frac{1+\sqrt{\lambda}v_0}{1-\sqrt{\lambda}v_0}$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{T_0e^{Bt}-1}{T_0e^{Bt}+1}\right]$$

مثلاً برای رها شدن (سرعت اولیه صفر) داریم

$$v_0 = 0 \Rightarrow T_0 = 1$$

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{e^{Bt}-1}{e^{Bt}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\tanh(Bt/2)$$

پس در نهایت

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{b}}\tan h\left[\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right]$$

البته با فرمول (۲ ـ ۷۴) در یک علامت منفی تفاوت است که دلیلش این است که محور y را رو به پایین تعریف کردیم و در کتاب رو به بالا (در خلاف جهت $\vec{g}$).

$$\begin{cases}\tan h(x)\cong x & |x|\ll 1\\ \tan h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\tan h(x)=1\end{cases}$$

دو خاصیت از تابع $\tan\ h(x)$ ما را در یافتن $v(t)$ بطور تقریبی در ابتدای حرکت و نیز زمان‌های خیلی بزرگ که پارامتر $\sqrt{\frac{bg}{m}}t$ در آن بزرگ می‌شود، کمک می‌کند.

اگر $\sqrt{\frac{bg}{m}}t\ll 1$ و در واقع $t\ll\sqrt{\frac{m}{bg}}$ پس

$$v(t)\cong\sqrt{\frac{mg}{b}}\left[\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right]==(\sqrt{g})^2t=gt$$

اگر $\sqrt{\frac{bg}{m}}t\gg 1$ و در واقع $t\gg\sqrt{\frac{m}{bg}}$ پس

$$v(t)\cong\sqrt{\frac{mg}{b}}\times 1=\sqrt{mg/b}$$

یک نکته خیلی مهم:

در تمام مسائل فیزیکی بزرگ و کوچک شمردن یک کمیت، باید آن را با یک پارامتر سیستم که هم دیمانسیون با کمیت ما است، مقایسه کنیم و نیز مقایسه ما باید بجا و با معنی باشد. برای مثال یک سال نوری در ابعاد کهکشانی و بین‌کهکشانی خیلی کوچک است ولی در ابعاد زمینی مقایسه می‌کنیم. خیلی بزرگ، در ابتدا ما آن را با فواصل کهکشان و سپس آن را با ابعاد و فواصل زمینی، در مسئله ما هم اگر کسی بگوید که $t\to 0$ یا $t\to\infty$ چون t (زمان) یک پارامتر دیمانسیون‌دار است، اینطور ادعاها خیلی غیرمنطقی هستند، زیرا اگر ما بگوییم در $t=10^{-6}$ s وضعیت سرعت سیستم را می‌سنجیم، فرد دیگری می‌تواند بگوید ۱۰۶ ps زمان خیلی بزرگی است (یک ps عبارت است از یک میلیاردیم ثانیه)، به عبارت ساده‌تر باید یک موجود ثابت از سیستم برگزید و کمیت را با آن مقایسه کرد.

پس داشتیم

$$v(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{T_0e^{Bt}-1}{T_0e^{Bt}+1}$$

$$\int_{y_0}^{y}dy'(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t\frac{T_0e^{Bt}-1}{T_0e^{Bt}+1}dt'$$

$$\int\frac{ae^x-1}{ae^x+1}dx=\int\frac{au-1}{au+1}\frac{du}{u}\quad(u=e^x),(x=Bt)$$

$$\int\frac{au-1}{au+1}\left(\frac{du}{u}\right)=\int\left(1-\frac{2}{au+1}\right)\frac{du}{u}=\ln u-2\int\frac{du}{u(au+1)}$$

$$=\ln u-2\left(\int\frac{du}{u}-\int\frac{adu}{au+1}\right)=$$

$$=\ln u-2\ln u+2\ln(au+1)=\ln\left[\frac{(au+1)^2}{u}\right]+C$$

$$y(t)-y(0)=\frac{B^{-1}}{\sqrt{\lambda}}\left[\ln\left[\frac{(T_0e^{Bt}+1)^2}{e^{Bt}}\right]\right]-\ln\left[(T_0+1)^2\right]$$

$$B^{-1}/\sqrt{\lambda}=m/2b$$

با قرار دادن $y_0=0$

$$y(t)=\left(\frac{m}{2b}\right)(\ln[T_0^2e^{Bt}+2T_0+e^{-Bt}]-\ln[(T_0+1)^2])$$

اگر $v_0=0$ ⇐ $T_0=1$ $\quad T_0=\dfrac{1+\sqrt{\lambda}v_0}{1-\sqrt{\lambda}v_0}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$

پس برای $y(t)$ عبارت ساده‌تر می‌شود

$$y(t)=\left(\frac{m}{2b}\right)\ln\left[\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)^2\right]\qquad \alpha=\frac{1}{2}Bt$$

$$y(t)=\left(\frac{m}{2b}\right)\times 2\ \ln[\cos h\alpha]=\frac{m}{b}\ln\left[\cos h\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right)\right]$$

$h(x)$ را حول صفر بسط می‌دهیم $x_0=0$ $\quad h(x)=\ln(\cos\ hx)$

$$h(x)\approx h(0)+\frac{1}{1!}(\tan\ h(x))_{x=0}\,x+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\cos h^2x}\right)_{x=0}x^2+O|x^3|$$

$$h(x)\cong\frac{1}{2}x^2\qquad |x|\ll 1$$

پس اگر $t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}$ پس

$$y(t) \cong \frac{m}{b}\left[\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{bg}{m}}\,t\right]^{2}\right]$$

پس

$$y(t) \cong \frac{1}{2} g t^{2} \qquad t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}} \quad , \quad v_0 = 0$$

نیز اگر $x >> 1$ پس

$$\cos hx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \cong \frac{1}{2} e^{x}$$

پس در

$$(t) \cong (m/b) \quad \ln\left[\frac{1}{2}\exp\left[\sqrt{\frac{bg}{m}}\,t\right]\right] \quad t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}}$$

$$(t) \cong -\frac{m}{b}\ln 2 + \left[\frac{m}{b} \times \sqrt{\frac{bg}{m}}\right] t = \frac{-m}{b}\ln 2 + \sqrt{\frac{mg}{b}}\,t$$

باز هم توجه کنید که محور y را در خلاف جهت کتاب تعریف کرده‌ایم (در جهت $\vec{g}$ گرفته‌ایم)

۳۰. جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که بدان نیروی اصطکاک کششی $be^{\alpha|v|}$ را وارد می‌کند، رها می‌شود. الف) سرعت $v(t)$ جسم را بیابید. ب) سرعت نهایی آن چیست؟ پ) جواب را برحسب t به‌صورت سری نهایی سبط دهید و جملات بالابر از t^2 را حذف کنید. ت) چرا جواب ولو برای زمان‌های کوتاه t با معادله (۱ ـ ۲۸) وفق نمی‌دهد؟

حل:

جسم در محیط سقوط کرده و محور را در خلاف $m\dot{v} = -mg + be^{-\alpha v}$ جهت g می‌گیریم.

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \qquad |v| = -v$$

$$dv(t) = -(g - \frac{b}{m} e^{-\alpha v})dt$$

پس

$$\int_{0}^{v} \frac{dv'}{1 - \lambda \exp(-\alpha v')} = -g\int_{0}^{t} dt' = -gt \qquad \lambda = \frac{b}{mg}$$

فرم انتگرال سمت چپ را ساده کرده تا آن را محاسبه کنیم. $v' \to x$

$$? = \int \frac{dx}{1 - au} = \frac{-1}{c}\int \frac{du}{u(1 - au)} \qquad u = e^{-cx}$$

$$? = \frac{-1}{c}\left(\int \frac{du}{u} + \int \frac{adu}{1 - au}\right) = \frac{1}{c}\ln(u^{-1} - a)v$$

$$a = \lambda \quad c = \alpha \Rightarrow \ln\left(\frac{e^{\alpha v} - \lambda}{1 - \lambda}\right) = -g\alpha t$$

$$\ln(e^{\alpha v} - \lambda) = -g\alpha t + \ln(1 - \lambda)$$

$$e^{\alpha v} - \lambda = e^{-g\alpha t}(1 - \lambda) \Rightarrow v(t) = \frac{1}{\alpha}\ln(Me^{-g\alpha t} + \lambda)$$

و در نهایت

$$M = 1 - \lambda$$

$$v(t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\left(\frac{-b}{mg} + 1\right)e^{-g\alpha t} + \frac{b}{mg}\right)$$

if $t >> (\alpha g)^{-1}$ what happens?

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\left(\frac{-b}{mg} + 1\right)(\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha g t}) + \frac{b}{mg}\right)$$

پس

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{b}{mg}\right) \quad t >> \frac{1}{\alpha g}$$

که این مورد انتظار است زیرا که در زمان بزرگ $t >> t_0$ (t_0 زمان معیار) سیستم باید با محیط به تعادل مکانیکی برسد و سرعت سیستم (جسم) باید ثابت شود.

یعنی

$$mg = be^{-\alpha v}$$

که

$$v = \frac{-1}{\alpha}\ln\left(\frac{mg}{b}\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{b}{mg}\right)$$

توجه کنید که شرط لازم برای شروع حرکت این است که $b < mg$ باشد، زیرا در شروع حرکت $v = 0$ و اگر $mg < b$ باشد باشد، نیروی جاذبه بر نیروی کششی غلبه نکرده و حرکت شروع نمی‌شود. پس در نهایت داریم

$$v(t) = \frac{+1}{\alpha}\ln\left(\frac{b}{mg} + \left(1 - \frac{b}{mg}\right)\exp(-g\alpha t)\right) \qquad \text{(سقوط آزاد)}$$

اگر $b = 0$ قرار داده شود به معادله سقوط آزاد در هوا می‌رسیم:

$$v(t) = \frac{+1}{\alpha}\ln(\exp(-g\alpha t)) = -gt$$

پ) بسط $v(t)$ برحسب t

$$v(t) = v(0) + \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)_{t=0} t^2 + \dots$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{(1-\frac{b}{mg})(-g\alpha)e^{-g\alpha t}}{\frac{b}{mg}+(1-\frac{b}{mg})e^{-g\alpha t}} = \left(\dfrac{b}{m}-g\right)\dfrac{e^{-g\alpha t}}{\frac{b}{mg}+(1-\frac{b}{mg})e^{-\alpha g t}} \\[2ex] \dfrac{d^2v}{dt^2} = \left(\dfrac{b}{m}-g\right)\left[\dfrac{-g\alpha e^{-g\alpha t}}{\frac{b}{mg}+(1-\frac{b}{mg})e^{-g\alpha t}} - \dfrac{\alpha(\frac{b}{m}-g)e^{-\alpha g t}}{\left(\frac{b}{mg}+(1-\frac{b}{mg})e^{-\alpha g t}\right)^2}\right] \end{cases}$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{b}{m}-g\right) \quad \& \quad \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)_{t=0} = -\alpha\frac{b}{m}\left(\frac{b}{m}-g\right) \quad \& \quad v(0) = 0$$

$$v(t) \cong \left(\frac{b}{m}-g\right)\left(t-\frac{\alpha b}{2m}t^2\right) = \left(\frac{b}{m}-g\right)t\left(1-\frac{\alpha b}{2m}t\right)$$

اگر b را صفر قرار دهیم خواهیم داشت (۱-۲۸) $v(t) = -gt$

در نهایت داریم

$$v(t) \cong \left(\frac{b}{m}-1\right)(\alpha g t)\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{b}{2mg}(\alpha g t)\right)$$

حتی در $\alpha g t << 1$ که جملات درجه دوم را نگه داشته به (۱ ـ ۲۸) نرسیدیم و اثر α و b پاک نشد. اگر به مسئله قبل توجه کنید نیروی مقاوم $F = bv^2$ بود و در اوایل حرکت چون v بزرگ نشده بود از bv^2 در مقابل mg صرف نظر کرده و برای

$$v(t) \cong -gt \qquad t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}$$

ولی در مسئله ما در لحظات اولیه که سرعت نزدیک به صفر است نیروی مقاوم کششی یک حداقل b دارد که نمی‌توان از آن در مقابل mg صرف‌نظر کرد، مگر آنکه ذکر شود.

یعنی اگر $t <<< \frac{1}{\alpha g}$ باشد فقط b خودش را به نمایش می‌گذارد و چون سرعت خیلی نزدیک به صفر است، α خودش را نشان نمی‌دهد، و باید طبق شرط زمانی از جملات درجه دوم صرف‌نظر کرد

$$v(t) \cong \left(\frac{b}{mg}-1\right)gt$$

ولی صرف‌نظر از ملاحظات زمانی اگر ذکر شود که $b < mg$ پس از $\frac{b}{mg}$ نیز می‌توان صرف‌نظر کرد که

$$v(t) \cong -gt$$

که در مورد مسئله ما رسیدن به این با غیر از شرط $b << mg$، در هیچ زمانی امکان ندارد.

۳۱.گلوله‌ای با سرعت اولیه v_0 بطور قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود، اگر نیروی اصطکاکی را متناسب با مربع سرعت فرض کنیم، معادله حرکت گلوله را بیابید (g ثابت) (جهت محور در خلاف جهت $\vec{g}$ $m\frac{dv}{dt} = -mg - bv^2$ $(b > 0)$

$$dv = -\left(g + \frac{b}{m}v^2\right)dt$$

حل:

نفس این مسئله همان مسئله ۲۹ است و موضوع جدیدی نیست در آن مسئله سقوط آزاد مطرح بود ولی در این مسئله صعود با سرعت اولیه ولی فرم معادله حرکت و جواب فرق دارد.

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{1+\lambda v'^2} = -g\int_0^t dt' = -gt \qquad \lambda = \frac{b}{mg}$$

$$u' = \sqrt{\lambda}\,V' \Rightarrow du' = \sqrt{\lambda}\,dv' \qquad u = \tan\theta$$

$$\int\frac{du}{1+u^2} = \int d\theta = \theta + C = \tan^{-1}u + C$$

$$\left[\tan^{-1}u'\right]_{u_0}^{u} = -\sqrt{\lambda}\,gt = -\sqrt{\frac{bg}{m}}\,t$$

$$\tan^{-1}u - \tan^{-1}u_0 = -\sqrt{\frac{bg}{m}}\,t$$

$$\tan^{-1}(\sqrt{\lambda}\,v(t)) - \tan^{-1}(\sqrt{\lambda}\,v_0) = -\sqrt{\frac{bg}{m}}\,t$$

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\tan\left(-\sqrt{\frac{bg}{m}}\,t + \tan^{-1}(\sqrt{\lambda}\,v_0)\right)$$

و در زمان t_0 گلوله متوقف می‌شود و بعد از آن سقوط آزاد می‌کند که معادلات مورد بحث در مسئله ۲۹ بر آن حاکم است.

$$-\sqrt{\frac{bg}{m}}\,t_0 + \tan^{-1}(\sqrt{\lambda}\,v_0) = 0$$

$$t_0=\sqrt{\frac{m}{bg}}+\tan^{-1}(\sqrt{\frac{b}{mg}}v_0)$$ و $$\text{if } v_0>>>\sqrt{\frac{mg}{b}}\Rightarrow t_0\cong\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{bg}}$$

$$\&\text{ if } v_0<<<\sqrt{\frac{mg}{b}}\quad t_0\cong\frac{v_0}{g}$$

که این همان زمان توقف پرتاب در محیط با $b = 0$ است، زیرا که در زمان‌های بعد از زمان پرتاب سرعت از v_0 کم می‌شود و کمتر شده تا به صفر برسد و اگر v_0 خیلی خیلی کمتر از $\sqrt{\frac{mg}{b}}$ باشد، محیط در مقابل حرکت مقاومتی نشان نداده و گویی $b = 0$ است.

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{b}}\tan(-\sqrt{\frac{bg}{m}}t+\tan^{-1}(\sqrt{\frac{b}{mg}}v_0))$$

$$dx(t)=v(t)dt\quad u=\tan^{-1}(\sqrt{b/mg}\,v_0-\sqrt{bg/m}\,t)$$

$$\int_0^x dx'(t)=-\sqrt{\frac{mg}{b}}(\int_0^t\tan(u)du)\times\sqrt{\frac{m}{bg}}$$

$$G=\cos u$$

$$\int\tan u\,du=\int\frac{\sin u\,du}{\cos u}=-\int\frac{dG}{G}=-\ln G+C$$

$$x(t)=+\frac{m}{b}\ \ln\left[\cos(-\sqrt{\frac{bg}{m}}t+\tan^{-1}(\sqrt{\frac{b}{mg}}v_0))\right]+$$
$$-\frac{m}{b}\ln\left[\cos(\tan^{-1}(\sqrt{\frac{b}{mg}}v_0))\right]$$

پس در کل داریم (محور مکان رو به بالا در خلاف جهت g)

$$\begin{cases} v(t)=\sqrt{\frac{mg}{b}}\tan(\sqrt{\frac{bg}{m}}(t_0-t)) & t\le t_0\\ v(t)=-\sqrt{\frac{mg}{b}}\tanh(\sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_0)) & t\ge t_0\end{cases}$$

که $t_0=\sqrt{\frac{m}{bg}}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{b}{mg}}v_0)$ همان زمان اوج است.

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

پس

$$\cos(\tan^{-1}(\sqrt{\frac{b}{mg}}v_0))=(1+\sqrt{\frac{b}{mg}}v_0)^2)^{-0/5}$$

$$x(t)=\frac{m}{b}(\ln\left[\cos(\sqrt{\frac{bg}{m}}(t_0-t))\right]+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{bv_0^2}{mg}))$$

و چون در $t = t_0$ مکان اولیه برای حرکت داریم (ارتفاع اوج)

$$x_0=\frac{m}{2b}\ln(1+\frac{bv_0^2}{mg})$$

با توجه به جواب مسئله ۲۹ برای $t \ge t_0$ داریم، (جهت محور برای این مسئله رو به بالا)

$$x(t)=\frac{m}{b}\ln(1+\frac{bv_0^2}{mg})-\frac{m}{b}\ln(\cosh(\sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_0)))$$

پس در حالت کلی

$$\begin{cases} x(t)=\frac{m}{b}\ln(\cos(\sqrt{\frac{bg}{m}}(t_0-t)))+\frac{m}{2b}\ln(1+\frac{bv_0^2}{mg}) & t\le t_0\\ x(t)=\frac{m}{b}\ln(1+\frac{bv_0^2}{mg})-\frac{m}{2b}\ln(\cosh(\sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_0))) & t\ge t_0\end{cases}$$

بحث بعدی راجع به x_0، ارتفاع اوج است.

$$x_0=\frac{m}{2b}\ln(1+\frac{bv_0^2}{mg})$$

بسط تابع $\ln(1+x)$ را حول صفر با روش زیر به‌دست می‌آوریم $|x|<<1$

$$\ln(1+x)=\int\frac{dx}{1+x}=\int dx\frac{1}{1-(-x)}=\int dx\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\dots$$

اگر

$$x_0=\frac{m}{2b}\times\frac{bv_0^2}{mg}=\frac{v_0^2}{2g}\quad\Rightarrow\quad v_0\ll\sqrt{\frac{mg}{b}}$$

یعنی اگر سرعت اولیه آنچنان کم باشد که نیروی مقاومت هوا در مقابل صعود، نسبت به mg خیلی می‌شود و چون در لحظات بعد تا لحظه اوج این شرط برقرار است گویی که گلوله در حال صعود اصلاً مقاومتی احساس نمی‌کند و گویی $b = 0$ است.

ولی اگر

$$x_0 >>> \frac{m}{g} \quad \Rightarrow v_0 \gg \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{b}}\tan\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}(t_0-t)\right) \qquad 0\le t\le t_0$$

در لحظات نزدیک به اوج، عبارت $(t_0=t)$ $\sqrt{bg/m}\,(t_0=t)$ خیلی کوچک می‌شود

$$\sqrt{\frac{mg}{b}}(t_0-t)\ll 1 \quad \Rightarrow t_0-t\ll\sqrt{\frac{m}{bg}} \quad \Rightarrow t\gg t_0-\sqrt{\frac{m}{bg}}$$

$$\Rightarrow t\gg\sqrt{\frac{m}{bg}}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{mg}}v_0\right)-1\right)$$

$$|x|\ll 1 \quad \Rightarrow \tan x\cong x$$

برای لحظات نهایی حرکت $v(t)\cong\sqrt{\frac{mg}{b}}\times\sqrt{\frac{bg}{m}}(t_0-t)=g(t_0-t)$

و برای $x(t)$ داریم

$$x(t)=\frac{m}{b}\ln\left(\cos\sqrt{\frac{bg}{m}}\times\sqrt{\frac{bg}{m}}(t_0-t)\right)+\frac{m}{2b}\ln\left(1+\frac{bv_0^2}{mg}\right)$$

برای تابع

$$h(x) = \ln(\cos x) \qquad |x| << 1$$

داریم

$$h(x) \cong h(0) + \left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2h}{dx^2}\right)_{x=0} x^2 + o|x^3|$$

$$h(0) = \ln(1) = 0$$

$$\frac{dh}{dx} = -\tan x \quad \Rightarrow \left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

$$\frac{d^2h}{dx^2} = -(1 + \tan^2 x) \quad \Rightarrow \left(\frac{d^2h}{dx^2}\right)_{x=0} = -1$$

پس

$$h(x) = \frac{1}{2}(-1)x^2 = \frac{-1}{2}x^2$$

پس اگر $t_0-t\ll\sqrt{\frac{m}{bg}}$ یعنی نزدیک به لحظه اوج باشیم پس

$$x(t)\cong\frac{m}{b}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}\right)^2(t_0-t)^2+C_0$$

$$x(t) \cong \frac{-1}{2}g(t_0 - t)^2 + V_0 \qquad \& \qquad C_0 = \frac{m}{2b}\ln\left(1 + \frac{bv_0^2}{mg}\right)$$

ولی برای برقراری حالت مقابل $t_0-t\ll\sqrt{\frac{m}{bg}}$، بایستی شرط $t_0\gg\sqrt{\frac{m}{bg}}$ هم برقرار باشد که لازم است $\tan^{-1}\sqrt{\frac{bv_0^2}{mg}}$ خیلی بزرگتر از یک باشد که ممکن نیست.

(۳۳) مطلوب است معادله حرکت جسمی که با سرعت مساوی فرار بطور قائم از زمین به سمت بالا پرتاب شده باشد. از مقاومت صرف‌نظر کنید.

حل:

جسم پیوسته سرعتی مثبت دارد و علامت + را $\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{\sqrt{E-V(x')}}=+(t-t_0)$

انتخاب می‌کنیم و از طرفی چون $v = v_e$ پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E$$

$$v = v_e \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{-mMG}{x} = E \qquad v_e = \left(\frac{2MG}{x}\right)^{0/5}$$

بنابراین E ذره صفر است

$$\Rightarrow \frac{mMG}{x} - \frac{mMG}{x} = E = 0$$

پس ذره با فواصل دور از جرم M هم انرژی است.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-mMG}{x}=0^-$$

و می‌تواند تا آنجا (یعنی ∞) برود. پس اگر $t_0 = 0$

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{x'}\,dx'=\sqrt{2MG}\,t \quad \Rightarrow x^{1.5}-x_0^{1.5}=\frac{3}{2}\sqrt{2MG}\,t$$

اگر جسم از سطح زمین پرتاب شده باشد

$$x_0=R_e \quad \Rightarrow x(t)=\left(1.5\sqrt{2MG}\,t+R_e^{1.5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

و سرعت جسم از $v_e(R_e) = \left(\frac{2MG}{R_e}\right)^{0.5}$ در $x = \infty$ به سرعت حدی $v_\ell = 0$ می‌رسد زیرا

$$v(x) = \left(\frac{2MG}{x}\right)^{0.5}$$

$$\lim_{x\to\infty}v(x)=0 \qquad \text{(در واقع } x >> R_e\text{)}$$

ولی این $x \to \infty$ را باید به بیان صحیحی بنویسیم. می‌دانیم که چون $E = 0$ است پس $x_T = \infty$

پس می‌توان گفت وقتی $x = x_T$، جسم در فضا ساکن می‌شود، با بیان ملموس‌تر جسم آنقدر از زمین دور می‌شود تا در فواصل بسیار بسیار دور به سکون برسد.

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\sqrt{2MG}\left(1.5\sqrt{2MG}\,t+R_e^{1.5}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

سؤال اینجاست که $E = 0$ چگونه برقرار شود؟

اگر سرعت اولیه موشک را برابر با سرعت فرار در $x = R_e$ تنظیم کنیم در واقع انرژی اولیه موشک، همانطور که در ابتدای مسئله نشان دادیم برابر با صفر می‌شود. $E_0 = 0$

و با فرض عدم اتلاف انرژی، انرژی موشک در ادامه نیز صفر می‌ماند

$v_0(R_e) \equiv$ سرعت فرار موشک در $x = R_e$

$R_e \equiv$ شعاع زمین $\qquad v_e \to e \equiv$ escape فرار

با داشتن شعاع زمین R_e و G و نیز جرم زمین می‌توان $v_e(R_e)$ را محاسبه کرد

$$v_e(R_e) = \left(\frac{2MG}{R_e}\right)^{0.5}$$

و اگر سرعت اولیه موشک همین مقدار را دارا باشد،

$$v_0 = v_e(R_e)$$

پس شرط $E = 0$ برقرار است. ولی اگر بدانیم موشک در جو زمین به اندازه δE انرژی از دست می‌دهد باید انرژی اولیه برابر با δE تنظیم شود که در خارج از جو شرط $E = 0$ برقرار باشد، ولی در این حالت با توجه به بزرگی δE در مقابل انرژی گرانشی در سطح زمین معادلات تفاوت خواهند کرد.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{-mMG}{R_e} = \delta E \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{2}{m}\left(\delta E + \frac{-mMG}{R_e}\right)^{0.5}$$

که همانطور که گفته شد در صورت کوچکی پارامتر

$$\eta = \frac{R_e\delta E}{mMG}$$

معادلات مکان و سرعت تفاوت چندانی نخواهند کرد،

(توجه کنید که به میان آمدن اتلاف، هم شرایط اولیه یعنی v_0، E_0 را تغییر می‌دهد و هم بدلیل نیروهای اتلافی در جو که بر موشک اعمال می‌شوند معادلات مکان و سرعت را تغییر می‌دهد)

۳۴. از تساوی $e^{2i\theta}=(e^{i\theta})^2$ شروع کرده و فرمول‌های $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ را برحسب $\sin\theta$، $\cos\theta$ به‌دست آورید.

حل:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$\begin{cases} e^{2i\theta}=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta) \\ (e^{i\theta})^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2i\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

چون اگر

$$a=c \ \ \& \ \ b=d \Leftarrow a+bi=c+di$$

و چون $e^{2i\theta}=(e^{i\theta})^2$ پس

$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \qquad \sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$$

۳۵. از راه نوشتن $\cos\theta$ به کمک معادله (۲ـ۱۲۲) فرمول زیر را به‌دست آورید.

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos\theta$$

$$\cos\theta=\cosh(i\theta)=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \qquad (۱۲۲ـ۲)$$

$$\cos^3\theta=\left(\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right)^3=\frac{1}{8}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$$

$$(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3=e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta} \qquad (e^{i\theta}e^{-i\theta}=1)$$

$$\Rightarrow \cos^3\theta=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos\theta$$

۳۶. جواب‌های عمومی معادلات زیر را پیدا کنید

الف) $m\ddot{x}+b\dot{x}-kx=0$

ب) $m\ddot{x}-b\dot{x}+kx=0$

به فرض آنکه اینها معادلات حرکت ذره باشند، درباره تعبیر فیزیکی آنها و جواب‌های آنها بحث کنید.

فرض می‌کنیم که $m,k,b > 0$ و m جرم ذره است.

حل:

الف)

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}+kx$$

با نوشتن معادله دیفرانسیل به‌صورت معادله حرکت خواهیم دید دو نوع نیرو به جسم وارد می‌شود یک نیروی اتلافی متناسب با سرعت و در خلاف جهت سرعت و یک نیروی دافعه خطی (متناسب با جابجایی) قرار می‌دهیم

$$x(t) = Ae^{rt} \qquad A \neq 0$$

و از جایگذاری خواهیم داشت $A(mr^{2} + br - k) = 0$

پس

$$mr^{2} + br - k = 0$$

$$\Delta = b^{2} - 4m(-k) = b^{2} + 4mk$$

$$\begin{cases} r_1=-\left(\frac{b}{2m}\right)+\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^{2}+\frac{k}{m}}=-\lambda+\sigma \\ r_2=-\left(\frac{b}{2m}\right)-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^{2}+\frac{k}{m}}=-\lambda-\sigma \end{cases} \qquad \sigma\geq\lambda>0$$

$$x(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$$

$$x(t)=e^{-\lambda t}(Ae^{\sigma t}+Be^{-\sigma t})$$

یادآور می‌شویم که نیروهای اتلافی و دافعه خطی به جسم وارد می‌شوند،

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=e^{-\lambda t}(\sigma(Ae^{\sigma t}-Be^{-\sigma t})-\lambda(Ae^{\sigma t}+Be^{-\sigma t}))$$

$$v(t)=e^{-\lambda t}(A(\sigma-\lambda)e^{\sigma t}-B(\sigma+\lambda)e^{-\sigma t})$$

$$\sigma = \left(\left(\frac{b}{2m}\right)^{2} + \frac{k}{m}\right)^{0.5} \qquad \lambda = \left(\frac{b}{2m}\right)$$

$$k > 0 \Rightarrow \sigma > \lambda > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\lambda}$$

یا

یا

$$\text{if } t>>\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} v(t)>>A(\sigma-\lambda) & \sigma\neq\lambda \quad k>0 \\ v(t)<<-B(\sigma+\lambda) & \sigma\neq\lambda \quad k=0 \end{cases}$$

پس با توجه به بررسی بالا بودن یا نبودن نیروی دفع خطی در سرعت متحرک در زمان‌های بزرگ مؤثر است.

برای مثال اگر $k = 0$ و $v_0 \neq 0$ پس

$$v(t)=v_0 e^{-\frac{bt}{m}}$$

که در زمان‌های بزرگ $t >> \frac{m}{b}$ جسم ساکن می‌شود (بدلیل کار منفی نیروی اتلافی)

و اگر $k \neq 0$ و $v_0 = 0$ پس

$$v(t)=\alpha e^{-\lambda t}\sinh(\sigma t)$$

و حتی در زمان‌های بزرگ $t >> \frac{1}{\lambda}$ سرعت بسیار بزرگ می‌شود $v >> \alpha$

جسم نمی‌تواند با محیط به تعادل برسد زیرا ابتدا جسم در x_0 است و نیروی kx_0 به آن وارد شده و در dt ثانیه بعد جسم به سرعت $\dot{x}_0$ می‌رسد و نیروی $b\dot{x}_0$ در خلاف جهت حرکت اعمال می‌شود ولی در این dt ثانیه جسم به اندازه $\dot{x}_0 dt$ از مبدأ فاصله گرفته و به اندازه $k\dot{x}_0 dt$ بر نیروی دافعه خطی اضافه شده است و در کل اثر نیروی دافعه خطی همیشه یک قدم جلوتر از اثر نیروی اتلافی است، پس سرعت جسم در حال افزایش می‌باشد.

ولی اگر ما در x_0 مناسبی جسم را با سرعت $\dot{x}_0$ داشته باشیم که $b\dot{x}_0 > kx_0$ باشد (به شرطی که برای $x_0 > 0$ و $x_0 < 0$ به ترتیب سرعت اولیه $\dot{x}_0$، منفی و مثبت باشد) چه رخ خواهد داد؟

برای مثال اگر $x_0 > 0$ باشد نیروی دافعه خطی در جهت مثبت است و اگر اتلافی بزرگتری در لحظه $t = 0$ ایجاد کنیم، اینجا دیگر نیروی اتلافی بر نیروی دافعه غلبه می‌کند، ولی باید این را هم درنظر بگیریم که برای اینکه نیروی اتلافی در خلاف جهت نیروی دفع باشد، مجبوریم $\dot{x}_0$ را در جهت مثبت انتخاب کنیم، درست است که بدلیل غلبه موقتی نیروی اتلافی بر نیروی دافعه، بعد از dt ثانیه $\dot{x}_0$ کاهش می‌یابد ولی بعد از چند dt مقدار $\dot{x}$ به حدی کاهش می‌یابد و مقدار x به حدی افزایش می‌یابد که دوباره نیروی غالب، همان نیروی دافعه خطی می‌شود، که قبلاً در مورد آن صحبت کردیم.

ب)

$$m\ddot{x}=b\dot{x}-kx \qquad k,b > 0$$

به جسم ما به جرم m یک نیروی بازگرداننده خطی و یک نیروی تقویت‌کننده متناسب با سرعت وارد می‌شود. در این حالت با فرض $b^{2} > 4mk$ داریم:

-۱

$$\begin{cases} r_1=\left(\frac{b}{2m}\right)+\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^{2}-\frac{k}{m}}=\lambda+p \\ r_2=\left(\frac{b}{2m}\right)-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^{2}-\frac{k}{m}}=\lambda-p \end{cases} \qquad \lambda\geq p>0$$

پس در نتیجه برای مکان و سرعت متحرک داریم:

$$\begin{cases} x(t)=e^{\lambda t}(Ae^{pt}+Be^{-pt}) \\ v(t)=e^{\lambda t}(A(\lambda+p)e^{pt}+B(\lambda-p)e^{-pt}) \end{cases}$$

که اگر $k=0$ باشد (نیروی بازگرداننده حذف شود)

$$v(t)=\alpha e^{\frac{bt}{m}}$$

و اگر $b=0$ باشد (نیروی تقویت‌کننده حذف شود) $v(t)=\gamma\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta_0)$ ولی اگر هر دو نیرو حاضر باشند، نیروی تقویت‌کننده نقش تعیین‌کننده‌تری نسبت به نیروی بازگرداننده دارد، برای اینکه اثر نیروی $-kx$ در جواب، نوسانی نیست و بعد از رسیدن از نقطه x به مبدأ، نیروی تقویت‌کننده از بازگشت دوباره ذره به مبدأ جلوگیری می‌کند و در زمان‌های بزرگ $t \gg \frac{1}{p}$ خواهیم داشت $v(t) \gg A(\lambda+p)$ و

۲ـ با فرض $b^2=4mk$ داریم $p=0$ و فرم جواب به زیر تغییر می‌کند:

$$x(t)=Ae^{\lambda t} \qquad v(t)=A\lambda e^{\lambda t}$$

۳ـ با فرض $b^2<4mk$ داریم $p\to i\omega$ که $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-(\frac{b}{2m})^2}$

و فرم جواب به زیر تغییر می‌یابد.

$$\begin{cases} x(t)=e^{\lambda t}(Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}) \\ v(t)=e^{\lambda t}(A(\lambda+i\omega)e^{i\omega t}+B(\lambda-i\omega)e^{-i\omega t}) \end{cases}$$

که جواب‌ها حاکی از یک حرکت نوسانی هستند که دامنه این حرکت در حال افزایش است و اگر $b=0$ شود حرکت در این حالت نوسانی خالص می‌شود و اگر در این حالت b منفی شود، حرکت به حرکت کند میرا تبدیل می‌شود.

۳۸. یک واگن باری به وزن 10^4 kg که آزادانه روی خط حرکت می‌کند، با سرعت ۲ متر در ثانیه به انتهای خطش می‌رسد، در انتهای خط یک متوقف‌کننده‌ای وجود دارد که از فنری با $k=1.6\times10^4\frac{kg}{s^2}$ تشکیل شده که بطور محکم به جایی بسته شده است، واگن فنر را متراکم می‌کند. اگر اصطکاک متناسب با سرعت باشد، ثابت میرایی b_c را برای میرایی بحرانی پیدا کنید. حرکت x(t) را طراحی کنید و حداکثر فاصله‌ای را که فنر متراکم می‌شود (برای $b=b_c$) پیدا کنید. نشان دهید اگر $b\ge b_c$ واگن در نهایت متوقف می‌شود و اگر $b\le b_c$ واگن دوباره متحرک می‌شود و روی خط به عقب برمی‌گردد. (توجه کنید که واگن به فنر بسته نشده است. تا

زمانی که به فنر فشار می‌آورد، حرکتش طبق معادله نوسانگر است، با این تفاوت که به کای کشیدن فنر، روی خط به عقب حرکت می‌کند).

حل:

$$m=10^4\ kg \qquad k=1.6\times10^4(\frac{kg}{s^2}) \qquad v_0=2(\frac{m}{s})$$

$$\omega_0=(\frac{k}{m})^{0.5}=1.256\ (Hz)$$

$$\gamma=\frac{b}{2m}\ ,\quad \gamma_c=\frac{bc}{2m}\ ,\quad \omega_1=(\omega_0^2-\gamma^2)^{0.5}$$

برای اینکه حالت کند میرا پیش نیاید (نوسان همراه با افت دامنه) باید

$$\omega^2\le\gamma^2$$

یا

$$(\frac{k}{m})\le(\frac{b}{2m})^2 \Rightarrow 4mk\le b^2$$

که نتیجه می‌دهد $b\ge\sqrt{4mk}$ که با نامگذاری $b_c=\sqrt{4mk}$ می‌توان گفت اگر $b\ge b_c$ باشد واگن در نهایت متوقف می‌شود ولی اگر $b<b_c$، بعد از فشرده شدن فنر، واگن روی خط به عقب بازمی‌گردد. که $b_c=4\sqrt{10}\times10^4(\frac{kg}{s})$ محوری با مبدأ نقطه تماس واگن با فنر در $t=0$ و جهت خلاف حرکت واگن می‌گیریم:

$$x_0=0 \qquad v_0=-2(\frac{m}{s})$$

و چون $b=b_c$ پس

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-\gamma_c t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \\ v(0)=c_2=-2(\frac{m}{s}) \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)=-2te^{-1.256t}$$

$$\gamma_c=\frac{bc}{2m}=\omega_0\cong1.256\ \ Hz$$

و اگر $b\ge b_c$ پس

$$x(t)=c_1e^{-\gamma_1t}+c_2e^{-\gamma_2t}$$

$$\gamma_1=\gamma+(\gamma^2-\omega_0^2)^{0.5} \qquad \gamma_2=+\gamma-(\gamma^2-\omega_0^2)^{0.5}$$

$$x(0)=0 \Rightarrow c_1=-c_2 \Rightarrow x(t)=ce^{-\gamma t}\sinh((\gamma^2-\omega_0^2)^{0.5}t)$$

$$v(0)=c(\gamma^2-\omega_0^2)^{0.5}=-2(\frac{m}{s}) \Rightarrow c=\frac{-2}{(\gamma^2-\omega_0^2)^{0.5}}$$

$$x(t)=\frac{-2e^{-\gamma t}}{(\gamma^2-\omega_0^2)^{0.5}}\sinh((\gamma^2-\omega_0^2)^{0.5}t)$$

که ω_0 مقداری معلوم دارد و باید $\gamma^2 > \omega_0$ باشد.

در نهایت حداکثر فاصله‌ای را که فنر برای $b = b_c$ جمع می‌شود را می‌یابیم، در آن نقطه باید سرعت صفر شود

$$\frac{dx}{dt} \cong (-2 + 1.265 \times 2t)e^{-1.265t} = 0$$

$$\Rightarrow t_0=\frac{1}{1.256}=\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x_{max} = |x(t_0)| = \frac{2}{1.265}e^{-1} \quad (m)$$

$$x_{max} \cong 58 \text{ cm}$$

۳۹. جرم m که تحت تأثیر نیروی بازگرداننده kx و نیروی میرایی bx قرار گرفته است به اندازه x_0 از حالت تعادل خود جابجا می‌شود و سپس با سرعت اولیه‌ای برابر با صفر رها می‌گردد، معادله حرکت کند میرا و میرای بحرانی و تند میرا را پیدا کنید.

حل:

کند میرا $x(t)=Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta)$

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-Ae^{-\gamma t}(\gamma\cos(\omega t+\theta)+\omega\sin(\omega t+\theta))$$

$$\begin{cases} v(0)=0 \Rightarrow \gamma\cos\theta-\omega\sin\theta=0 \\ x(0)=x_0 \Rightarrow A\cos\theta=x_0 \end{cases}$$

$$coc(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$x(t)=Ae^{-\gamma t}(\cos\omega t\cos\theta-\sin\omega t\sin\theta)=$$

$$=e^{-\gamma t}((A\cos\theta)\cos\omega t-(A\sin\theta)\sin(\omega t))=$$

$$=e^{-\gamma t}(x_0\cos\omega t+(\frac{A\cos\theta}{\omega}\gamma)\sin(\omega t))=$$

در نهایت خواهیم داشت

کند میرا

$$x(t)=\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}(\omega\cos(\omega t)+\gamma\sin(\omega t))$$

$\gamma=b/2m$ $\quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ $\quad \omega_0=\sqrt{k/m}$

برای میرای بحرانی:

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-\gamma t} \qquad \gamma=\frac{b}{2m}$$

$$x(0) = c_1 = x_0$$

$$v(t)=e^{-\gamma t}((c_2-\gamma c_1)-\gamma c_2 t)$$

$$v(0)= 0 \Rightarrow c_2 = \gamma c_1 = \gamma x_0$$

$$x(t)=x_0(1+\gamma t)e^{-\gamma t}$$

برای تند میرا:

$$x(t)=c_1e^{-\gamma_1 t}+c_2e^{-\gamma_2 t}$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_1 + c_2 = x_0$$

$$v(t)=-\gamma_1c_1e^{-\gamma_1 t}-\gamma_2c_2e^{-\gamma_2 t}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow \gamma_1c_1 = -\gamma_2c_2$$

$$c_1 + c_2 = x_0 \Rightarrow -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}c_2 + c_2 = x_0$$

$$c_2 = \frac{x_0\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \quad \& \quad c_1 = \frac{x_0\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

$$x(t)=(\frac{x_0}{\gamma_1-\gamma_2})(\gamma_1e^{-\gamma_2 t}-\gamma_2e^{-\gamma_1 t})$$

با توجه به اینکه

$$\gamma_1=\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} \qquad \gamma^2=\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$$

$$\gamma=b/2m \qquad \omega_0=\sqrt{k/m} \qquad \sigma=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$$

تند میرا

$$x(t)=\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}(\gamma\sinh(\sigma t)+\sigma\cosh(\sigma t))$$

پس در حالت کلی: (اگر $\omega_0=\sqrt{k/m}$, $\gamma=\frac{b}{2m}$):

کند میرا

$$x_{ud}(t)=\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}(\gamma\sin(\omega t)+\omega\cos(\omega t))$$

تند میرا

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

$$x_{od}=\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}(\gamma\sinh(\sigma t)+\sigma\cosh(\sigma t))$$

میرای بحرانی

$$\sigma=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$$

$$x_{cd}(t)=x_0(1+\gamma t)e^{-\gamma t}$$

و هر سه معادله در شرایط $x(0)=x_0$ و $v(0)=0$ صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} ud\equiv \text{under damped} \\ cd\equiv \text{critical damping} \\ od\equiv \text{over damped} \end{cases}$$

A: در فازهای کوچک $\gamma t \ll 1$ یا $\sigma t \ll 1$ یا $\omega t \ll 1$ هر سه معادله یک نتیجه می‌دهند

$$\sin(\omega t)\cong\omega t \quad , \quad \cos(\omega t)\cong 1$$

$$\sinh(\sigma t)\cong\sigma t \quad , \quad \cosh(\sigma t)\cong 1 \quad , \quad e^{-\gamma t}\cong 1$$

$$x(t)=x_0(1+\gamma t)e^{-\gamma t}$$

که این در مسئله ۳۷ برای یک حالت کلی از شرایط اولیه نشان داده شد.

B:

می‌دانیم:

$$\begin{Bmatrix} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta=\cosh(i\theta) \\ \sin\theta=-i\sinh(i\theta) \end{cases}$$

$$\sigma=i\omega \Leftarrow \sigma=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} \quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

$$x_{od}(t)=\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\sigma}(\gamma\sinh(\sigma t)+\sigma\cosh(\sigma t)$$

$$x_{od}^T(t)=\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{i\omega}(\gamma\sinh(i\omega t)+i\omega\cosh(i\omega t))$$

$$x_{od}^T(t)=\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\omega}(\gamma\sin(\omega t)+\omega\cos(\omega t))=x_{ud}(t)$$

یعنی با قرار دادن $i\omega$ به جای σ در x_{od} می‌توان x_{od}^T (تبدیل x_{od}) را پیدا کرد که همان x_{ud} است. برای یافتن x_{od} از x_{ud} باید به جای ω در x_{ud} قرار داد $i\sigma$ و x_{ud}^T (تبدیل x_{ud}) را پیدا کرد که همان x_{od} است.

C: با میل دادن ω به سمت صفر می‌توان از x_{ud}، x_{cd} را تولید کرد.

$$\lim_{\omega\to 0} x_{ud}(t)=x_{cd}(t)$$

چرا؟

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}=t \qquad \lim_{\omega\to 0}\cos(\omega t)=1$$

D: با میل دادن σ به سمت صفر می‌توان از x_{od}، x_{cd} را تولید کرد.

$$\lim_{\sigma\to 0} x_{cd}(t)=x_{cd}(t)$$

چرا؟

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sinh(\sigma t)}{\sigma}=t \qquad \lim_{\sigma\to 0}\cosh(\sigma t)=1$$

البته در قسمت A نشان دادیم که منحنی‌ها در فازهای کوچک روی هم می‌افتند ولی در قسمت‌های C و D با میل دادن ω و σ به صفر، از جواب‌های ud و od به جواب cd رسیدیم، توجه کنید که کار ما در A با C و D فرق دارد زیرا حتی در γ و ω و σهای خیلی کوچک اگر زمان به ∞ برود، تفاوت بین x_{ud} و x_{od} و x_{cd} نمایان می‌شود، چون در این شرایط فاز متناهی و غیرصفر داریم.

۴۱. مسئله ۳۹ را برای حالتی حل کنید که جرم دارای جابجایی x_0 و سرعت اولیه v_0 است. که به طرف پشت به سمت نقطه تعادل توجیه شده است. نشان دهید اگر $|V_0| > |\gamma_1 x_0|$ باشد، جرم تعادل را در حالت‌های میرایی بحرانی و تند میرا، فرا جست خواهد کرد، و در نتیجه ملاحظات آخر بخش ۲ـ۹ کاربرد ندارد، حرکت را در این حالت‌ها طراحی کنید. جمع کردن جواب‌های مسئله ۳۹ و ۴۰ با هم نتیجه را به ما خواهد کرد.

حل:

$$x_{cd}(t)=x_0(1+\gamma t)e^{-\gamma t}+v_0 t e^{-\gamma t}$$

$$=(x_0(1+\gamma t)+v_0 t)e^{-\gamma t}=(x_0+(x_0\gamma+v_0)t)e^{-\gamma t}$$

$$x_{ud}(t)=\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}(\gamma\sin(\omega t)+\omega\cos(\omega t))+\frac{x_0 e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\sin(\omega t)$$

$$=\frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}((x_0\gamma+v_0)\sin(\omega t)+\omega x_0\cos(\omega t))$$

$$x_{od}(t)=\frac{x_\circ e^{-\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2-\omega_\circ^2}}(\gamma\sinh(\sigma t)+\sigma\cosh(\sigma t))+\frac{v_\circ e^{-\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2-\omega_\circ^2}}\sinh(\sigma t)$$

$$=\frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2-\omega_\circ^2}}((x_\circ\gamma+v_\circ)\sinh(\sigma t)+x_\circ\sigma\cosh(\sigma t))$$

و همانطور که در مسائل ۳۹ و ۴۰ اشاره شد:

$$i=\sqrt{-1}$$

$$\sigma=\sqrt{\gamma^2-\omega_\circ^2}=i\omega \quad \& \quad \gamma=\frac{b}{2m} \quad \& \quad \omega_\circ=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

از این خاصیت که اگر $h(x)=f(x)+g(x)$

پس در $x=a$ $h(a)=f(a)+g(a)$

و در $x=a$ $\frac{dh}{dx}|_{x=a}=\frac{df}{dx}|_{x=a}+\frac{dg}{dx}|_{x=a}$

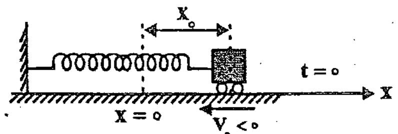
استفاده کردیم و با جمع زدن جواب‌های حاصل از هر دو مسئله، هر دو شرط $x(\circ)=x_\circ$ و $\dot{v}(\circ)=v_\circ$ برقرار شد زیرا با مقدارگذاری $t=\circ$ در معادلات x داریم

$$x_\circ=x_\circ+\circ$$

و با مقدارگذاری در معادلات $v(t)$ در $t=\circ$ خواهیم داشت

$$v_\circ=\circ+v_\circ$$

آنچه در مسئله توصیف شده در شکل زیر است.



در حالت‌هایی که فراجست (Over shoot) وجود نداشته باشد، اگر $x_\circ>\circ$ باشد در حالت‌های میرای بحرانی و تند میرا، جرم نوسانگر در همان xهای مثبت باقی می‌ماند ولی اگر فراجست وجود داشته باشد، در حالت‌های میرای بحرانی و تند میرا، علامت x عوض می‌شود برای مثال جرم m به آن سمت نقطه صفر رفته و با گذشت زمان از طرف منفی به $x=\circ$ نزدیک می‌شود.

برای حالت میرای بحرانی: $x(t)=(at+b)e^{-\gamma t}$

با توجه به آنچه که گفتیم، اگر شیب خط منفی باشد، منظور خط $(at+b)$ است فراجست

خواهیم داشت. (در حالت $x_\circ<\circ$) ولی علامت خاصی برای $x_\circ$ قائل نشویم شرط فراجست این است که اگر

if $x_\circ>\circ$ & $a<\circ$ $\Rightarrow$ فراجست

$\Rightarrow x_\circ a<\circ$ فراجست

if $x_\circ<\circ$ & $a>\circ$ $\Rightarrow$ فراجست

$a=x_\circ\gamma+v_\circ \Rightarrow$ if $x_\circ a=x_\circ(x_\circ\gamma+v_\circ)<\circ$

if $x_\circ>\circ \Rightarrow x_\circ\gamma+v_\circ<\circ \Rightarrow x_\circ\gamma<-v_\circ \Rightarrow |x_\circ\gamma|<|v_\circ|$

if $x_\circ<\circ \Rightarrow x_\circ\gamma+v_\circ>\circ \Rightarrow x_\circ\gamma>-v_\circ$

پس اگر $x_\circ>\circ$ باشد شرط لازم فراجست $v_\circ<\circ$ و شرط کافی برای آن $|x_\circ\gamma|<|v_\circ|$ است.

$$\left.\begin{array}{ll} x_\circ>\circ, v_\circ<\circ & -1 \\ |v_\circ|>|x_\circ\gamma| & \\ x_\circ<\circ, v_\circ>\circ & -2 \end{array}\right\}$$ حالت‌های فراجست برای نوسانگر میرایی بحرانی

$$|v_\circ|>|x_\circ\gamma|$$

دلیل این ادعای ما در مورد دوم این است که

$x_\circ\gamma>-v_\circ \Rightarrow$ عدد منفی $>$ (?)

مطمئناً سمت راست یک عدد مثبت نیست یعنی در حالت $x_\circ<\circ$ باید $v_\circ>\circ$ باشد یا باشد و یا ضرایب یک عدد منفی در دو طرف نامساوی جهت نامساوی عوض می‌شود

$|x_\circ\gamma|<|v_\circ| \Rightarrow -x_\circ\gamma<v_\circ$

پس شرط $|x_\circ\gamma|<|v_\circ|$ برای هر دو حالت کافی است.

برای مورد نوسانگر تند میرا، واضح است که علامت ضریب $e^{\sigma t}$ در تعیین علامت کل عبارت در tهای به حد کافی بزرگ نامساوی

$$|x_\circ(\sigma+\gamma)+v_\circ|e^{\sigma t}>|x_\circ(\sigma+\gamma)-v_\circ|e^{-\sigma t}$$

برقرار می‌شود، برایمان مهم است یا به عبارتی دیگر با افزایش t، بطور واضح سهم عبارت $e^{\sigma t}$ در تعیین عبارت کل بیشتر و بیشتر می‌شود و علامت ضریب خود را به کل عبارت می‌دهد چون جمله بزرگتری است. پس ما به عبارت ضریب $e^{\sigma t}$ توجه می‌کنیم که باز باید شرط

$$x_\circ(x_\circ(\sigma+\gamma)+v_\circ)<\circ$$

برای فراجهش، طبق توضیحات قبلی لازم است. $\sigma+\gamma=\gamma_1$

if $x_\circ>\circ \Rightarrow x_\circ\gamma_1+v_\circ<\circ \Rightarrow x_\circ\gamma_1<-v_\circ$

$\Rightarrow |x_\circ \gamma_1| < |v_\circ|$

if باشد $\Rightarrow$ باید $v_\circ > \circ \Rightarrow x_\circ\gamma_1 > -v_\circ$

$\Rightarrow \quad + \quad v_\circ \Rightarrow -x_\circ\gamma_1 < v_\circ \Rightarrow |x_\circ \gamma_1| < |v_\circ \gamma|$

$\gamma_1 = \sigma + \gamma \quad \sigma > \circ \Rightarrow \gamma_1 > \gamma \Rightarrow |x_\circ \gamma_1| > |v_\circ|$

بنابراین

$|x_\circ \gamma| < |v_\circ \gamma_1| < |v_\circ|$

پس اگر هر دو نوسانگر شرط $|x_\circ \gamma_1| < |v_\circ|$ را برقرار کنیم، این شرط ریاضی، شرط فراجست را برای هر دو نوسانگر تأمین می‌کند.

۴۲. علاقمندیم یک ترازوی حمام با یک سکوی انحراف یک اینچی زیر مردی ۲۰۰ پوندی طرح‌ریزی کنیم. اگر حرکت قرار است میرای بحرانی باشد، ثابت فنر لازم k و ثابت میرایی b را پیدا کنید. نشان دهید که برای یک آدم سبکتر حرکت تند میرا خواهد بود. اگر مردی ۲۰۰ پوندی پا روی ترازو بگذارد، نیروی بالایی حداکثر تولید شده توسط سکوی ترازو در مقابل پاهای او به هنگامی که سکو به حالت ساکن برمی‌گردد، چقدر است؟

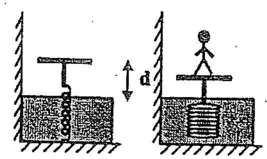
حل:

$m = 200 \quad lb = 200 \times 0.4536\ kg = 90.72\ kg$

$d = 1\ inch = 2.540 \times 10^{-2}\ m$

$x_{cd}(t)=d(1+\gamma t)e^{-\gamma t}$

نقطه تعادل سیستم مرد ـ فنر را صفر نامیدیم، بنابراین در لحظه شروع $x_\circ = d$، $v_\circ = \circ$



پس فرمول نوسانگر میرای بحرانی عبارت است از

$x_{cd}(t)=d(1+\gamma t)e^{-\gamma t}$

پس جابجایی کل d- را داریم چون $t >> \frac{1}{\gamma}$ $x_{cd}(t) \cong \circ$ و در $t = \circ$ $x_{cd}(\circ) = d$,

اولاً چون x نقطه تعادل است.

$-k(-d) + (-mg) = \circ$

پس

$k = (mg/d)$

توجه کنید که در $x = \circ$ تعادل استاتیکی داریم، یعنی $\ddot{x} = \circ$ ، $\dot{x} = \circ$ و بنابراین نیروی $b\dot{x}$ سهمی در دیاگرام نیرو ندارد.

و شرط میرای بحرانی بودن $b_c^2 = 4mk$ است $\Leftarrow b_c^2 = 4m^2 g/d$

برای نوسانگر میرای بحرانی b_c را تعریف کردیم. و شرط حالت تند میرا، عبارت است از

$b > b_c = \sqrt{4mk}$

اگر برای حالت میرای بحرانی برای فردی با جرم m_1، b را برابر با b_c تنظیم کنیم

$b = b_c = \sqrt{4m_1 k}$

و بعد فردی سبکتر به جرم m_2 $(m_2 < m_1)$ روی ترازو بیاید، ماده‌ای که برای ما b را تأمین می‌کرده ثابت است ولی b_c برای سیستم فرد سبکتر ـ فنر کاهش می‌یابد

$\sqrt{4m_1 k} > \sqrt{4m_2 k}$

$b > b'_c$

پس ترازو در حالت تند میرا قرار می‌گیرد.

محاسبات:

نیروی وارده از سکو به فرد در حال تعادل

$F = mg$

$F = (90.72\ kg)\ (9.8\ m/s^2) \cong 889 \quad N$

ثابت فنر لازم برای فنر ترازو $= \quad k = (mg/d)$

$k \cong 35000\ (kg/s^2)$

b لازم برای محیط میرانده، طوری که ترازو و میرای بحرانی باشد.

$b_c^2 = 4m^2 g/d = 4mk =$

$b_c^2 \cong 1270 1600 \quad (kg/s)^2 \Rightarrow b_c \cong 3564 \quad (kg/s)$

۴۳. جرمی ۱۰۰۰ کیلوگرمی از ارتفاعی ۱۰ متری بر روی سکویی با جرم ناچیز رها می‌شود. فنر و ضربه‌گیری طرح کنید که سکو بر روی آن نصب شود. در حداقل فاصله زمانی پس از برخورد و بی فراجست به محل تعادل جدیدی ۰/۲ متر زیر محل تعادل اولیه متوقف شود.

الف) k ضریب فنر و b ضربه‌گیر را پیدا کنید؟ (b ضریب میرایی ضربه‌گیر است) بطور حتم جواب‌های پیشنهادی x(t) خود را امتحان کنید تا مطمئن شوید که شرایط اولیه درست را برقرار می‌کند و فراجست نمی‌کند.

ب) زمان لازم را برای آنکه سکو به فاصله یک میلیمتری تعادل خود برسد، تا دو رقم معنی‌دار تقریب حساب کنید.

حل:

اول سرعت جرم را در لحظه تماس با سکو پیدا می‌کنیم که (دستگاه روبه‌بالا)

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgd$$

$$v_0 = -\sqrt{2gd} = -(2\times 9.8(m/s^2)\times 10\,m)^{0.5} = -14(m/s)$$

$$m = 10^3\ kg \quad , \quad \Delta y = 0.2\ m \quad , \quad g = 9.8(m/s^2)$$

الف)

$$k = mg/\Delta y = 49\times 10^3\ (kg/s^2)$$

ضربه‌گیر و فنر را در حالت میرای بحرانی طراحی می‌کنیم

$$b_c = \sqrt{4mk} = (4\times 1000\times 49\times 10^3)^{0.5}\ kg/s$$

$$b_c = 14\times 10^3\ (kg/sec)$$

در لحظه $t = 0$، جرم دارای سرعت اولیه و مکان اولیه است، از نتیجه مسئله ۴۱ استفاده می‌کنیم

$$x_{cd}(t) = (x_0 + (x_0\gamma + v_0)t)e^{-\gamma_c t}, \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$$

$$x_0 = 0{,}2\ m \qquad v_0 = 14(m/s) \qquad \gamma_c = b_c / 2m = 7(\frac{1}{s})$$

شرط عدم فراجست

$$|x_0\gamma| > |v_0|$$

شرط برقرار نیست $\Rightarrow$ $\quad x_0\gamma = 1{,}4\ (\frac{m}{s}) \qquad v_0 = 14(\frac{m}{s})$

پس ضربه‌گیر و فنر را در حالت تند میرا گرفته و مقدار b را از روی شرط فراجست به‌دست می‌آوریم ولی ابتدا دلتا را محاسبه می‌کنیم

$$\omega_0 = \sqrt{K/m} = (49\times 10^3/10^3)^{0.5} s^{-1} = 7 s^{-1}$$

شرط عدم فراجست

$$|x_0\gamma| \geq |v_0|$$

$$x_0(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \geq 14(\frac{m}{s})$$

$$\gamma^2 - \omega_0^2 \geq (70 - \gamma)^2 \Rightarrow 140\gamma \geq 4900 + 49 \Rightarrow \gamma \geq 35.35\ s^{-1}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} \Rightarrow b = 2m\gamma \geq (35.35\times 2000) = 70.7\times 10^3\ (\frac{kg}{s})$$

بااستفاده از نتایج مسئله ۴۱ داریم:

$$x_{od}(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}[(\gamma x_0 + v_0)\sinh(\sigma t) + \sigma x_0 \cosh(\sigma t)]$$

از نامساوی عدم فراجست، تساوی را انتخاب می‌کنیم $\quad \psi_1 x_0 + v_0 = 0$

$$x_{od}(t) = \frac{1}{2\sigma}(x_0(\sigma - \gamma) - v_0)\exp(-(\sigma + \gamma)t)$$

$$x_{od} = 10^{-3}\ m \qquad x_0 = 0.2\ m \qquad \gamma = 35.35\ s^{-1}$$

$$\sigma = 34.65\ s^{-1}$$

$$x_{od}(t) = 0.2\ e^{-70t} \quad \Rightarrow \quad 10^{-3} = 0.2e^{-70t}$$

$$t = \frac{1}{70}\ln(\frac{0.2}{10^{-3}}) \cong 0.0757\ s \quad \cong 0.076\ s$$

در واقع در $T = \frac{1}{\sigma + \gamma} << t$ داریم $x_{od}(t) \approx 0$ و هر چه T کوچکتر باشد، سیستم زودتر به حالت تعادلش می‌رسد.

$$T = (\gamma + \sigma)^{-1} = (f(\gamma))^{-1}$$

پس باید $f(\gamma)$ ماکزیمم شود

$$f(\gamma) = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\frac{df}{d\gamma} = 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} > 0 \Rightarrow \max(f) = f(\max(\gamma))$$

و دلیل اینکه γ از γ_{min} بزرگتر را انتخاب نکردیم، این است که مسئله از ما عدد می‌خواهد و ما ناچار عدد ابتدای بازه γ یعنی γ_{min} را به کار بردیم.

حال با جواب‌های ما:

۱ـ فراجست رخ نمی‌دهد. ۲ـ فنر و ضربه‌گیر در حالت تند میرا هستند.

۳ـ برخلاف خواست مسئله، حداکثر فاصله زمانی ممکن که بعد از برخورد با سکو، با طی این فاصله زمانی جسم با سکو تعادل به مکانیکی برسد را محاسبه کردیم و نه حداقل؛ البته جواب ما برای یک ضربه‌گیر مناسب‌تر است، زیرا هرچه این زمان بیشتر باشد، ضربه متوسطی که سکو دریافت می‌کند کمتر است.

۴۴. نیروی $F_\circ e^{-at}$ به یک نوسانگر هماهنگ به جرم m، ثابت فنر K و ثابت میرایی b وارد می‌شود. با شروع این حدس که جوابی باید موجود باشد که همانند نیروی وارد به زمان وابسته باشد، یک جواب خصوصی معادله حرکت را بیابید.

حل:

$m\ddot{x}=-Kx-b\dot{x}+F_\circ e^{-at} \qquad x_p(t)=Ae^{-at}$

با جایگذاری جوابی که حدس زده‌ایم در معادله $A(ma^2-ba+K)=F_\circ$

$$A=F_\circ(ma^2-ba+K)^{-1} \Rightarrow x_p(t)=\frac{F_\circ e^{-at}}{(ma^2-ba+K)}$$

که فرض کردیم که ma^2-ba+K ریشه حقیقی ندارد

زیرا چون نیروی مختلط از لحاظ فیزیکی بی‌معنی است ،$F_\circ$، a هر دو حقیقی هستند پس با فرض

$\Delta=b^2-4mk=b^2-b_c^2<0 \Rightarrow b<b_c$

و با این فرض برای جواب همگن داریم

$x_n(t)Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t+\theta)$

که

$$\omega_\circ=\sqrt{\frac{K}{m}} \quad , \quad \omega=\sqrt{\omega_\circ^2-\gamma^2} \quad , \quad \gamma=b/2m$$

و برای جواب کل داریم

$$x_{ud}(t)=Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t+\theta)+\frac{F_\circ e^{-at}}{(ma^2-ba+K)}$$

اگر $b=b_c$ برای مخرج یک کسر ریشه داریم که همان $\gamma=\frac{b}{2m}$ است.

پس اگر $a\neq\frac{b}{2m}$ داریم

$$x_{cd}(t)=(C_1+C_2t)e^{-\gamma t}+\frac{F_\circ e^{-at}}{ma^2-ba+K}$$

اگر $b>b_c$ برای a دو ریشه حقیقی داریم که $\gamma-\sigma$ ،$\gamma+\sigma$ هستند که $\sigma=\sqrt{\gamma^2-\omega_\circ^2}$

$\gamma_1=\gamma+\sigma$ و $\gamma_2=\gamma-\sigma$

پس اگر $a\neq\sigma+\gamma$ و $a\neq\sigma-\gamma$ داریم

$$x_{od}(t)=(C_1e^{-\gamma t}+C_2e^{-\gamma t})+\frac{F_\circ e^{-at}}{ma^2-ba+K}$$

یعنی بسته به وضعیت نسبی پارامترهای سیستم (K,b,m) یکی از جواب‌ها را انتخاب می‌کنیم.

برای مثال اگر $b_c>b$ باشد، در تابع نیرو پارامتر a هرچه باشد جواب خصوصی داریم ولی اگر $b=b_c$ و a ظاهر شده در تابع نیرو دقیقاً برابر γ بود x_p، دارای مخرج صفر و ∞ می‌شود، پس حدس ما در این مورد خاص باید غلط باشد. در حالت $b_c<b$ هم اگر a ظاهر شده در تابع نیرو دقیقاً با γ_1 یا γ برابر بود، باز حدس اولیه ما در مورد جواب اشتباه است و باید حدس دیگری بزنیم.

پس در حالت‌های خاص که $a=\gamma$ یا $a=\gamma_1$ یا $a=\gamma_2$ نمی‌توان به مسئله جواب داد.

۴۵. الف) با حدس جواب پاینده معادله غیرهمگن (۲ـ ۹۱) و با اضافه کردن جواب معادله همگن به آن حرکت یک نوسانگر هارمونیک میرا را پیدا کنید که تحت تأثیر نیروی ثابت $f_\circ$ قرار گرفته باشد.

ب) همین مسئله را با تغییر $x'=x-a$ و انتخاب ثابت a بطوریکه معادله برحسب x' به معادله همگن (۲ـ ۹۰) تبدیل شود، حل کنید. و از آنجا نشان دهید که اثر به‌کار بردن نیروی ثابت فقط جابجا کردن مکان تعادل است بی‌آنکه در ماهیت نوسان‌ها اثری بگذارد.

حل:

الف)

$m\ddot{x}=-Kx-b\dot{x}+F(t)$

$m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=F(t) \quad (۱۹ـ۲)$

$\text{if } F(t)=F_\circ \Rightarrow m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=F_\circ$

حدس می‌زنیم که

$$x_p(t)=\frac{F_\circ}{K}$$

پس

$$b=b_c \quad x(t)=(C_1+C_2t)e^{-\gamma t}+\frac{F_\circ}{K}$$

$$b>b_c \quad x(t)=C_1e^{-\gamma_1 t}+C_1e^{-\gamma_2 t}+\frac{F_\circ}{K}$$

$$b<b_c \quad x(t)=Ae^{-\gamma_1 t}\cos(\omega t+\theta)+\frac{F_\circ}{K}$$

ب)

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2} \Leftarrow \frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt} \Leftarrow x'=x-a$$

با جایگذاری در معادله اصلی داریم

$$m\ddot{x}'+b\dot{x}'+Kx'+Ka=F_0$$

که اگر قرار دهیم $F_0 = Ka$ معادله همگن می‌شود که داریم

$$b=b_c \;\Rightarrow\; x'(t)=x(t)-\frac{F_0}{K}=(c_1+c_2t)e^{-\gamma t}$$

$$b>b_c \;\Rightarrow\; x'(t)=x(t)-\frac{F_0}{K}=c_1e^{-\gamma t}+c_2e^{-\gamma t}$$

$$b<b_c \;\Rightarrow\; x'(t)=x(t)-\frac{F_0}{K}=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t+\theta)$$

که این جواب‌ها دقیقاً همان جواب‌های قبلی هستند که نسبت به یک مبدأ دیگر نوشته شده‌اند که این مبدأ همان نقطه‌ای است که اگر نوسانگر را ثابت نگه دارد (به سکون برسانیم) تعادل استاتیکی سیستم جرم فنر در این نقطه است که مختصات آن با $\frac{F_0}{k}$ نسبت به دستگاه قدیم داده می‌شود حال اگر مبدأ دستگاه جدید را به نقطه مذکور ببریم همان نوسانات قبلی را می‌بینیم. مثلاً یک جرم را درنظر بگیرید که به فنر متصل به سقف وصل کرده‌ایم در اینجا $F_0 = -mg$ است و با توصیف نوسانات حول نقطه

$$x = -mg/K$$

می‌توان نوسانات را به همان حالتی که سیستم اگر روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌بود، نوسان می‌کرد، مشاهده کرد. البته اگر فنر از نقطه تعادل خود، به اندازه بزرگی، منحرف شود (نقطه تعادل جدید نسبتاً دور باشد) مطمئناً نوسانات فنر تأثیر می‌پذیرد و ما با فرض اینکه نسبت به طول آزاد فنر خیلی کوچک است کار می‌کنیم. $a << l$

۴۶. نوسانگر هارمونیک میرایی تحت تأثیر زیر قرار می‌گیرد:

$$F(t) = F_0e^{-at}\cos(\omega t + \theta)$$

با درنظر گرفتن F به‌عنوان قسمت حقیقی یک تابع نمایی مختلط و تجسس جوابی که دارای همان بستگی نمایی به باشد، یک جواب خاص به‌دست آورید.

حل:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=F_0e^{-at}\cos(\omega t+\theta)=F(t)$$

$$\begin{cases} F(t)=\mathrm{Re}[e^{-at}F_0e^{i\phi}] & \phi=i\omega+\theta \quad i=\sqrt{-1} \\ x_p(t)=\mathrm{Re}[Ae^{-at}e^{i\omega t}] & Z_p(t)=Ae^{-at}e^{i\omega t} \end{cases}$$

بعد از جایگذاری جواب در معادله خواهیم داشت:

$$A(m(i\omega-a)^2b(i\omega-a)+K)=F_0e^{i\theta}$$

قبل از تقسیم دو طرف بر ضریب A باید مطمئن شویم که ناصفر است

$$mp^2 + bp + K = 0 \;\Rightarrow\; \Delta = b^2 - 4mK$$

می‌دانیم در حالت تند میرا هستیم که $b^2 < 4mK$ پس $\Delta < 0$

$$p_1 = \gamma + i\sigma \qquad p_2 = \gamma - i\sigma$$

ولی اگر $i\omega - a$ با یکی از p_1 یا p_2 برابر باشد، حدس ما اشکال دارد، زیرا جواب ما ∞ می‌شود. پس برای اینکه راه ما درست باشد، یکی از ناتساوی‌های زیر باید حتماً برقرار باشد.

$\omega \neq \pm\sigma$ یا $a \neq -\gamma$

پس

$$A=\frac{(m(a+i\omega)^2-b(a+i\omega)+K)}{[(m(a^2-\omega^2)-ab+K)^2+(b-2ma)^2\omega^2]}F_0e^{i\theta}$$

پس

$$z_p(t)=\frac{(m(a+i\omega)^2-b(a+i\omega)+K)e^{-at}e^{i\omega t}}{[(m(a^2-\omega^2)-ab+K)^2+(b-2ma)^2\omega]}F_0e^{i\theta}$$

و در نهایت داریم

$$x_p(t) = F_0e^{-at}\left(\frac{m(a^2-\omega^2)-ab+K)\cos\varphi+(b-2ma)\,\omega\sin\varphi}{(m(a^2-\omega^2)-ab+K)^2+(b\omega-2ma\omega)^2}\right.$$

که $\varphi = \omega t + \theta$ و درستی جواب در گرو برقراری حداقل یکی از ناتساوی‌های روبرو است

$a \neq -\gamma$ یا $\omega \neq \pm\sigma$

۴۷. یک نوسانگر هارمونیک نامیرا که در ابتدا ساکن است، در زمان $t = 0$ تحت تأثیر نیروی وارده $F_0\sin(\omega t)$ قرار می‌گیرد، حرکت $x(t)$ را پیدا کنید.

حل:

با معلوم کردن پارامترهای b,a,θ مربوط به مسئله قبل برای این مسئله از نتیجه نهایی مسئله قبل استفاده می‌کنیم، نیرو را به فرم زیر می‌نویسیم

$$F(t) = F_0e^{-at}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

چونکه داریم

$$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{2} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{2} = \sin\theta$$

با پارامترهای

$$K = m\omega_0^2\,,\quad \theta = \frac{\pi}{2}\,,\quad a = 0\,,\ b = 0$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega t)$$

و جواب همگن مسئله عبارت است از

$$x_h(t) = A\sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega t) + A\sin(\omega_0 t)$$

$$v(t) = \frac{F_0}{m\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t) + \frac{A}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)$$

$$v(0) = \left(\frac{A}{\omega_0} + \frac{F_0}{m\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad A = \frac{-F_0\omega_0}{m\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}[\omega\sin(\omega t) - \omega_0\sin(\omega_0 t)]$$

۴۸. یک نوسانگر هارمونیک نامیرا ($b = 0$) تحت تأثیر نیروی وارده $F_0\cos\omega t$ است، نشان دهید که اگر $\omega = \omega_0$ باشد، جواب حالت پاینده وجود ندارد. با شروع کردن از جوابی برای $\omega = \omega_0 + \varepsilon$ و سپس حد گرفتن وقتی $\varepsilon \to 0$، یک جواب مخصوص پیدا کنید. [راهنمایی: اگر با جواب حالت پایدار شروع کنید و $\varepsilon \to 0$ میل کند، جواب بیش از اندازه بزرگ می‌شود. سعی کنید با جوابی شروع کنید که مناسب با شرط اولیه $x_0 = 0$ است. در نتیجه در لحظه $t_0 = 0$ نتواند بیش از اندازه بزرگ شود.]

حل:

دوباره از نتیجه مسئله ۴۶ استفاده می‌کنیم $\theta = 0$, $a = 0$, $b = 0$

$$\begin{cases} x_p(t) = (F_0/m(\omega_0^2 - \omega^2))\cos(\omega t) \\ x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

خصوصی P = Private همگن $h \equiv$ homogeneous

$$x_\varepsilon(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t) + A\cos(\omega_0 t)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon$$

$$x_\varepsilon(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - (\omega_0^2 - \varepsilon)^2)}\cos((\omega_0 + \varepsilon)t) + A\cos(\omega_0 t)$$

$$\text{if } x(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad A = -F_0/m(\omega_0^2 - \omega^2)$$

اگر $q = \frac{\varepsilon}{\omega_0}$، مسئله این است که باید پارامتر بی‌بعد q را به سمت صفر میل دهد.

$$x_q(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[\frac{\sin(\omega_0 t)\sin(q\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)(1 - \cos(q\omega_0 t))}{q(q+2)}\right]$$

با دانستن

$$\lim_{q\to 0}\frac{1 - \cos(q\omega_0 t)}{q(q+2)} = \lim_{q\to 0}\frac{\omega_0 t\sin(q\omega_0 t)}{2(q+1)} = 0$$

و

$$\lim_{q\to 0}\frac{\sin(q\omega_0 t)}{q} = \lim_{q\to 0}\frac{q\omega_0 t}{q} = \omega_0 t$$

خواهیم داشت

$$\lim_{q\to 0}x_q(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[\left(\lim_{q\to 0}\frac{\sin(q\omega_0 t)}{q}\right)\left(\lim_{q\to 0}\frac{\sin(\omega_0 t)}{q+2}\right) + \cos(\omega_0 t)\left[\lim_{q\to 0}\frac{1 - \cos(q\omega_0 t)}{q(q+2)}\right]\right]$$

بنابراین

$$\lim_{q\to 0}x_q(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0^2}(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)$$

داریم که $F_0 = 0 \times A$ و A و F_0 هر دو متناهی باشند، و چون به تناقض خوردیم نتیجه‌گیری می‌کنیم که روش ما مبتنی بر همشکل بودن توابع $F(t)$ و $x_p(t)$ در اینجا نامناسب است و $x_p(t)$ را نمی‌توان در این حالت هم فرم با $F(t)$ پیدا کرد، یعنی جواب حالت پاینده وجود ندارد. یعنی $x_q(t)$ با شرط $x(0) = 0$ در حالت $q = 0$ وجود ندارد ولی حد به سمت صفر آن موجود است.

اگر $x(0) \neq 0$ بود و می‌گرفتیم $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

با حد $\lim_{q\to 0}\frac{C - \cos(q\omega_0 t)}{q(q+2)}$ برخورد می‌کردیم

$$\lim_{q\to 0}\frac{C - \cos(q\omega_0 t)}{q(q+2)} = \lim_{q\to 0}\frac{1 - \cos(q\omega_0 t)}{q(q+2)} + \lim_{q\to 0}\frac{C - 1}{q(q+2)}$$

و چاره‌ای نبود جز آنکه $C = 1$ اختیار شود که $\lim_{q\to 0}x_q(t) \neq \infty$ شود و معنای انتخاب $C = 1$ همان $x(0) = 0$ می‌باشد.

۴۹. یک نوسانگر هارمونیک میرای بحرانی با جرم m و ثابت فنری K تحت تأثیر یک نیروی وارده $F_\circ\cos(\omega t)$ است. اگر در $t = \circ$ و $x = x_\circ$، $v = v_\circ$ باشد، $x(t)$ چیست؟

حل:

برای جواب همگن در حالت میرای بحرانی داریم $x_h(t)=(c_1+c_2t)e^{-\gamma t}$ و با مراجعه به جواب خصوصی کلی معادله ۴۶ و با توجه به $a = \circ$, $b \neq \circ$ داریم: $(\theta = \circ)$

$$s_p(t)=F\left[\frac{m(\omega_\circ^2-\omega^2)\cos\omega t+b\omega\sin\omega t}{[m^2(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2]}\right]_\circ$$

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

$$\begin{cases} x_h(\circ)=c_1 \\ x_p(\circ)=\dfrac{F_\circ m(\omega_\circ^2-\omega^2)}{m^2(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2} \end{cases}$$

$$x(\circ)=x_h(\circ)+x_p(\circ)=x_\circ \Rightarrow C_1=x_\circ-\frac{F_\circ m(\omega_\circ^2-\omega^2)}{m^2(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2}$$

$$\begin{cases} v_h(t)=\dfrac{dx_h}{dt}((c_2-\gamma c_1)-\gamma c_2 t)e^{-\gamma t} \\ v_p(t)=\dfrac{dx_p}{dt}=F_\circ\left[\dfrac{b\omega\cos(\omega t)-m(\omega_\circ^2-\omega^2)\sin(\omega t)}{[m(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2]}\right]\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_h(\circ)=c_2-\gamma c_1 \\ v_p(\circ)=\dfrac{F_\circ b\omega^2}{m^2(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2} \end{cases}$$

$$v(\circ) = v_h(\circ) + v_p(\circ) = v_\circ \Rightarrow v_\circ = c_2 - \gamma c_1 + \frac{F_\circ b\omega^2}{m^2(\omega^2_\circ - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow c_2 = v_\circ + \gamma x_\circ - F_\circ\frac{m\gamma(\omega^2_\circ - \omega^2) + b\omega^2}{m^2(\omega^2_\circ - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

برای ساده کردن مخرج، در حالت میرای بحرانی داریم

$$\frac{b}{2m} = \gamma = \omega_\circ$$

$$m^2(\omega^2_\circ - \omega^2)^2 + b^2\omega^2 = m^2(\omega^4_\circ + \omega^4 - 2\omega^2_\circ\omega^2 + 4\omega^2_\circ\omega^2)$$

$$\Rightarrow m^2(\omega^2_\circ - \omega^2)^2 + b^2\omega^2 = m^2(\omega^2_\circ + \omega^2)^2 = m^2(\gamma^2 + \omega^2)^2$$

پس

$$\begin{cases} c_1=-(\dfrac{F_\circ}{m})\dfrac{(\gamma^2-\omega^2)}{(\gamma^2+\omega^2)^2}+x_\circ \\ c_2=-(\dfrac{F_\circ\gamma}{m})\dfrac{\omega^2+\gamma^2}{(\omega^2+\gamma^2)^2}+v_\circ+\gamma x_\circ \end{cases}$$

و حتی x_p را می‌توان ساده‌تر کرد.

$$x_p(t) = \frac{F_\circ}{m}(\gamma^2 + \omega^2)^{-2}[(\gamma^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\gamma\omega\sin(\omega t)]$$

$$x(t) = \frac{F_\circ}{m(\gamma^2 + \omega^2)^2}[(\gamma^2-\omega^2)\cos\omega t + 2\gamma\omega\sin(\omega t) + -((\gamma^2-\omega^2) + \gamma t(\omega^2 + \gamma^2))e^{-\gamma t}] +$$

$$+((\gamma x_\circ + v_\circ)t + x_\circ)e^{-\gamma t}$$

و جوابی که در جواب‌نامه کتاب سایمون درج شده، صحیح نمی‌باشد.

$$x(\circ) = \frac{F_\circ}{m(\gamma^2 + \omega^2_\circ)^2}((\gamma^2 - \omega^2) + \circ - (\gamma^2 \ \omega^2) + \circ + x_\circ$$

که شرط $x(\circ) = x_\circ$ را ارضا می‌کند.

$$v(\circ) = \frac{F_\circ}{m(\gamma^2 + \omega^2_\circ)^2}(\circ + 2\gamma\omega^2 + \gamma^3 - \gamma\omega^2 + \circ - \gamma\omega^2 - \gamma^3) +$$

$$+ (\gamma x_\circ + v_\circ) + \circ - x_\circ\gamma = v_\circ$$

و جواب ما شرط $v(\circ) = v_\circ$ را نیز ارضا می‌کند.

۵۰. نیروی $F_\circ\cos(\omega t + \theta)$ از لحظه $t = \circ$ بر نوسانگر هارمونیک میرایی وارد می‌شود، الف) x و v باید چه مقادیر اولیه‌ای داشته باشند تا گذرا وجود نداشته باشد؟ ب) اگر $x_\circ = v_\circ = \circ$ باشد، دامنه A و فاز θ گذرا برحسب θ و $F_\circ$ به‌دست آورید.

حل:

هر نوسانگر هماهنگ واداشته یک جمله از معادله حرکت دارد که با گذشت زمان کاهش می‌یابد، به آن قسمت از معادله حرکت که با گذشت زمان کاهش می‌یابد، گذرا گویند.

این جمله مربوط به خود نوسانگر است و بقیه جملات که مربوط به نیرو بوده و فرکانس نیرو در آن ظاهر شده را حالت پایدار گویند.

حالت پایدار ≡ Steady state گذرا ≡ Transient

بدون توجه به اینکه نوسانگر در چه حالتی قرار دارد (تند میرا ـ کند میرا ـ میرای بحرانی) جواب خصوصی را از مسئله ۴۶ داریم:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi + 2\omega\gamma\sin\varphi}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2]} \qquad \varphi = \omega t + \theta_0$$

که ω فرکانس نیروی واداشته است و ω_0 فرکانس طبیعی نوسانگر است.

برای نوسانگر تند میرا: $x_h(t)=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\theta)$

که ω_1 فرکانس مربوط به نوسانگر است و به ω ربطی ندارد.

$$x_{ud}(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{F_0}{m}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi + 2\omega\gamma\sin\varphi}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2]}$$

تنها راهی که برای حذف گذرا وجود دارد این است که نوسانگر در ابتدا تحریک نشود که بعد از آن با فرکانس خودش هم نوسان کند. یعنی $x_0 = 0 \quad , \quad v_0 = 0$

$$x(0) = A\cos\theta + \frac{F_0}{m}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\theta_0 + 2\omega\gamma\sin\theta_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2]}$$

$$v(t)=-Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\theta)-A\omega_1 e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t+\theta)+$$

$$+\frac{F_0}{m}\frac{2\omega\gamma\cos\varphi - (\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2]}$$

$$v(0) = -A\gamma\cos\theta - A\omega_1\sin\theta + \left(\frac{F_0\omega}{m}\right)\frac{2\omega\gamma\cos\theta_0 - (\omega_0^2-\omega^2)\sin\theta_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2]}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = \frac{-1}{\cos\theta}\frac{F_0}{m}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\theta_0 + 2\omega\gamma\sin\theta_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2]} \quad (*)$$

$$v(0)=0 \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$-(\gamma + \omega_1 \operatorname{atn}\theta)((\omega_0^2-\omega^2)\cos\theta_0 + 2\omega\gamma\sin\theta_0) =$$

$$= \omega(2\omega\gamma\sin\theta_0 - (\omega_0^2-\omega^2)\sin\theta_0)$$

$$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left[\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\tan\theta_0-2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)+2\gamma\omega\tan\theta_0}\right]-\frac{\gamma}{\omega_1}\right]=\tan^{-1}B$$

$$\Rightarrow A=\frac{-F_0}{m}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\theta_0+2\gamma\omega\sin\theta_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2]}\sqrt{1+B^2}$$

برای نوسانگر میرای بحرانی:

$$x_{cd}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t} + \frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi + 2\gamma\omega\sin\varphi}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2]}\left(\frac{F_0}{m}\right)$$

$$v_{cd}(t) = ((c_2 - \gamma c_1) + c_2 t)e^{-\gamma t} + \left(\frac{F_0\omega}{m}\right)\frac{2\omega\gamma\cos\varphi - (\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2]}$$

$$\begin{cases} x(0)=c_1+\dfrac{F_0}{m}\dfrac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\theta_0+2\omega\gamma\sin\theta_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)+(2\omega\gamma)^2]}=0 \\ v(0)=(c_2-\gamma c_1)+\left(\dfrac{F_0\omega}{m}\right)\dfrac{2\omega\gamma\cos\theta_0-(\omega_0^2-\omega^2)\sin\theta_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\gamma)^2]}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1=-\dfrac{F_0}{m}\left[\dfrac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\theta_0+2\omega\gamma\sin\theta_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\gamma)^2}\right] \\ c_2=\dfrac{F_0}{m}\left[\dfrac{(\omega(\omega_0^2-\omega^2)-2\omega\gamma^2)\sin\theta_0-(\omega^2\gamma+\gamma\omega_0^2)\cos\theta_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\gamma^2)^2]}\right] \end{cases}$$

که باشرط $\gamma = \omega_0$ داریم:

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{-F_0}{m}\left[\dfrac{(\gamma^2-\omega^2)\cos\theta_0+2\omega\gamma\sin\theta_0}{(\omega^2+\gamma^2)^2}\right] \\ c_2=\dfrac{-F_0}{m}\left[\dfrac{(\omega^2+\gamma^2)\omega\sin\theta_0+\gamma(\omega^2+\gamma^2)\cos\theta_0}{(\omega_0^2+\omega^2)^2}\right] \end{cases}$$

برای نوسانگر تند میرا:

$$x_h(t)=c_1e^{-\gamma_1 t}+c_2e^{-\gamma_2 t}$$

$$\begin{cases} x_{od}(t) = (c_1e^{-\gamma_1 t} + c_2e^{-\gamma_2 t}) + \dfrac{F_0\,(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi + 2\omega\gamma\sin\varphi}{m\,[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2]} \\ v_{od}(t) = -(c_1\gamma_1e^{-\gamma_1 t} + c_2\gamma_2e^{-\gamma_2 t}) + \dfrac{F_0\omega\;2\omega\gamma\sin\varphi - (\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi}{m\,[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{od}(0)=c_1+c_2+\dfrac{F_0}{m}\dfrac{[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\theta_0+2\omega\gamma\sin\theta_0]}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\gamma)^2]}=0 \\ v_{od}(0)=-(c_1\gamma_1+c_2\gamma_2)+\dfrac{F_0\omega}{m}\dfrac{2\omega\gamma\cos\theta_0-(\omega_0^2-\omega^2)\sin\theta_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\gamma)^2]} \end{cases}$$

در نهایت داریم:

$$c_1=\frac{F_0}{m(\gamma_1-\gamma_2)}\{\frac{\omega((\omega_0^2-\omega^2)-2\gamma\gamma_1)\sin\theta_0-[\gamma_1(\omega_0^2-\omega^2)+}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\gamma)^2]}\dots$$

$$\dots\frac{+2\omega^2\gamma]\cos\theta_0}{}\}$$

$$c_2=\frac{F_0}{m(\gamma_2-\gamma_1)}\{\frac{\omega((\omega_0^2-\omega^2)-2\gamma\gamma_2)\sin\theta_0-[\gamma_2(\omega_0^2-\omega^2)+}{}\dots$$

$$\frac{+2\omega^2\gamma]\cos\theta_0}{}\}$$

۵۱. جرم m به فنری وصل است که دارای ثابت K و طول آزاد ℓ است که در شکل ۲ـ ۱۱ نشان داده شده است. انتهای چپ فنر ثابت نیست، بلکه طوری ساخته شده است که با دامنه a و فرکانس ω ، آنچنان نوسان کند که:

$$X = a\sin(\omega t)$$

و x از مرجع ثابت o اندازه‌گیری می‌شود. معادله حرکت را بنویسید و نشان دهید که معادله (۲ـ ۱۴۸)، بانیروی ثابت $K a\sin(\omega t)$ است. اگر اصطکاک به‌وسیله معادله (۲ـ ۳۱) داده شده باشد، نشان دهید که، اگر اصطکاک از یک ارتعاش‌سنج که به دو انتهای فنر وصل شده است بیاید و در نتیجه نیروی اصطکاکی $-b(\dot{x}-\dot{X})$ است. معادله حرکت دارای نیروی وارده اضافی $\omega b a\cos(\omega t)$ است.

حل:

معادله حرکت رابرای جرم m می‌نویسیم:

$$m\ddot{x}=-K\Delta\ell-b(\dot{x}-\dot{X})$$

$$\Delta l=(x+\ell)-X-\ell=x-X$$

$$X = a\sin(\omega t)$$

توجه کنید که x و X از هم مستقلند و هیچ ربطی به هم ندارند و بدون داشتن X کاری نمی‌توان کرد. در ضمن معادله حرکت نیوتن باید نسبت به یک چارچوب لخت نوشته شود، که انتهای آزاد فنر اینطور نیست. پس می‌توانیم نسبت به نقطه o ، معادلات را بنویسیم، زیرا که هم لخت است و هم تغییرات زمانی $X(t)$ را نسبت به o در دست داریم:

$$m\ddot{x}+K(x-X)+b(\dot{x}-\dot{X})=0$$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=Ka\sin(\omega t)+ab\omega\cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=a\sqrt{K^2+b^2\omega^2}\sin(\omega t+\theta)$$

$$\cos\theta=\frac{K}{\sqrt{K^2+b^2\omega^2}} \qquad \sin\theta=\frac{b\omega}{\sqrt{K^2+b^2\omega^2}}$$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=F_0\sin(\omega t+\theta) \qquad F_0=a\sqrt{K^2+b^2\omega^2}$$

که به همان معادله ۲ـ ۱۴۸ رسیدیم.

تعبیر این نتیجه این است که، نیروی واردارنده، مستقیماً به جرم m وارد نمی‌شود، بلکه به انتهای فنر وارد می‌شود، و انتهای فنر را با دامنه a به ارتعاش درمی‌آورد و از این طریق جرم m را وادار به حرکت با همان بسامد خود می‌کند، که البته بین فاز نوسان نیرو که همان فاز نوسان انتهای فنر است، فاز نیروی وارده بر جرم m یک اختلاف است که این اختلاف فاز θ ناشی از اصطکاک سیستم بامحیط و کشایند بودن فنر است.

یعنی ناصفر بودن b و متناهی بودن K که داریم $\theta = \tan^{-1}(b\omega/K)$ و دامنه نیروی وارده با دامنه جابجایی نوسان انتهای آزاد فنر متناسب است.

$$F_0=a\sqrt{K^2+b^2\omega^2}$$

یعنی اگر انتهای فنر نوسان نمی‌کرد $(a = 0)$ نیرویی به جرم m را وادار به نوسان با بسامد ω نمی‌کرد.

۵۲. اتومبیلی به وزن یک تن (که با مسافرین و بدون درنظر گرفتن وزن چرخ‌ها و هر چیز دیگری که در زیر فنرهاست، ۲۰۰۰ پوند است) برای هر ۲۰۰ پوند وزن مسافرها، یک اینچ نزدیکتر به جاده نشست می‌کند. این اتومبیل روی یک جاده، موج‌دار با موج‌های سینوسی، که دارای فاصله‌ای برابر یک پا بین برجستگی‌ها و دامنه‌ای برابر ۱۲ اینچ (ارتفاع برجستگی‌ها و عمق سوراخ‌ها از سطح متوسط جاده) هستند، با سرعت ۲۹ میل در ساعت رانده می‌شود. با

فرض آنکه حرکت عمودی اتومبیل حرکت یک نوسانگر هارمونیک ساده بی‌میرایی است (بدون دستگاه ارتعاش‌گیر) دامنه نوسان اتومبیل را پیدا کنید. (از وزن چرخ‌ها و فنرها صرف‌نظر کنید.) اگر دستگاه ارتعاش‌گیر اضافه شود که میرایی ایجاد کند، سواری بهتر یا بدتر می‌شود؟ نتیجه مسئله ۵.۱ را به‌کار ببرید.)

حل:

از نتیجه مسئله قبل استفاده می‌کنیم:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=F_\circ \sin(\omega t+\theta)$$

$$\theta = \tan^{-۱}(b\omega/K) \qquad F_\circ = a(K^۲ + b^۲\omega^۲)^{۰.۵}$$

$$lb - wt = ۴.۴۴۸(N) \qquad inch \equiv ۲.۵۴۰ \times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$K = \frac{m.g}{d_\circ} = \frac{۲۰۰\ lb - wt}{1\ inch} = \frac{۴.۴۴۸ \times ۲۰۰}{۲.۵۴ \times ۱۰^{-۲}} (\frac{N}{m}) \cong ۳۵۰۲۴ (\frac{N}{m})$$

$ft = ۰.۳۰۴۸\ m \qquad mph = mileperhour \equiv$ مایل بر ساعت

$$\omega = ۲\pi\upsilon = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\lambda}V = \frac{۲\pi \times ۲۰\ mph}{1\ \ ft} \cong ۱۸۴\ s^{-۱}$$

$$M=۲۰۰۰lb=۲۰۰۰\times۰.۴۵۳۶\cong۹۰۷(Kg)$$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=F_\circ \sin(\omega t+\theta) \qquad b=۰$$

$$x_h(t) = A\sin(\omega_\circ t) \qquad x_p(t) = B\sin(\omega t)$$

$$B(-M\omega^۲ + M\omega^۲_\circ) = aK = aM\omega^۲_\circ \Rightarrow B = \frac{\omega^۲_\circ}{\omega^۲_\circ - \omega^۲} a\sin(\omega t)$$

$$\omega_\circ=\sqrt{K/M}=۶.۲\ s^{-۱}$$

$$v(t) = A\omega_\circ \cos(\omega_\circ t) + a\omega \frac{\omega^۲_\circ}{\omega^۲_\circ - \omega^۲} \cos(\omega t)$$

$$v(۰) = ۰ \Rightarrow A = -a(\frac{\omega\omega_\circ}{\omega^۲_\circ - \omega^۲})$$

شرط $v(۰) = ۰$ از آنجا است که اتومبیل قبل از حرکت بر روی سطح مواج جاده در راستای قائم حرکتی نداشته است.

می‌دانیم که

$$A = -a(\frac{\omega\omega_\circ}{\omega^۲_\circ - \omega^۲}) = \qquad \omega >> \omega_\circ$$

$$= +a(\frac{\omega_\circ}{\omega})(۱ - \frac{\omega^۲_\circ}{\omega^۲})^{-۱} \cong a(\frac{\omega_\circ}{\omega})(۱ + \frac{\omega^۲_\circ}{\omega^۲}) \cong a\frac{\omega_\circ}{\omega}$$

یعنی دامنه نوسانات با فرکانس طبیعی نسبت به دامنه موج سینوسی جاده خیلی خیلی کوچک است.

$$\gamma = \frac{\omega_\circ}{\omega} = ۰.۰۳۴$$

پس

$$x(t) \cong (\frac{-a\omega^۲_\circ}{\omega^۲ - \omega^۲_\circ})\sin(\omega t) = B\sin(\omega t)$$

پس برای دامنه نوسان واداشته:

$$\begin{cases} |B| = a\frac{\omega^۲_\circ}{\omega^۲}(۱-\frac{\omega^۲_\circ}{\omega^۲})^{-۱} \cong a\frac{\omega^۲_\circ}{\omega^۲} \\ |A| = a(\frac{\omega_\circ}{\omega}) \end{cases}$$

و برای دامنه نوسانگر گذرا:

و چون $|A| >> |B|$ از نوسانات واداشته صرف‌نظر می‌کنیم و منظور از دامنه نوسان همان $|A|$ است.

$$a = ۲\ inch = ۰.۰۵۰۸\ m$$

$$|A| = ۵.۰۸\ cm \times ۰.۰۳۴ = ۱.۷۳\ mm$$

یعنی مسافران در اتومبیل لرزه‌ای به دامنه تقریباً ۲ میلی‌متر و فرکانس $s^{-۱}$ ۶ حس می‌کنند.

جواب همگن را در سه حالت داریم:

$$x_h(t)=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_۱ t+\theta') \quad (ud)$$

$$x_h(t)=(c_۱+c_۲ t)e^{-\gamma t} \quad (cd)$$

$$x_h(t)=c_۱e^{-\gamma_۱ t}+c_۲e^{-\gamma_۱ t} \quad (od)$$

در حالتی که $b \neq ۰$

اولاً برای جواب گذرا یک عامل $\exp(\frac{-bt}{۲m})$ در جواب گذرا است که دامنه آن را رو به کاهش می‌برد.

ثانیاً: برای جواب خصوصی داریم:

$$x_p(t) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi + 2\gamma\omega\sin\varphi}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}\omega_0^2 + 4\gamma^2\omega^2)^{0.5} \times a$$

که ضریب $\sin\varphi$ با افزایش γ به ω، به سمت a میل می‌کند (a دامنه پستی و بلندی جاده) که اصلاً خوب نیست و لرزه‌هایی با دامنه a و فرکانس $180\ s^{-1} \approx$ تولید می‌کند.

پس باید γ تا حدی بزرگ انتخاب شود که دامنه نوسانات گذرا سریعاً افت کند و نیز دامنه نوسانات پاینده کوچک باشد، و در انتخاب مقدار γ باید هر دو محدودیت را درنظر گرفت.

۵۳. نوسانگر هارمونیک نامیرایی $(b = 0)$ به جرم m و فرکانس طبیعی ω_0، در ابتدا ساکن است و در لحظه $t = 0$ ضربتی بر آن وارد می‌شود و از $x_0 = 0$ با سرعت v_0 شروع به حرکت و تا $t = 3\pi/2\omega_0$ به آزادی نوسان می‌کند. از این لحظه به بعد نیروی $F = B\cos(\omega t + \theta)$ وارد می‌شود، معادله حرکت را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta_0) \\ v(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\theta_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} v(0)=v_0 \\ x(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_0=\frac{-\pi}{2} \\ A=v_0/\omega_0 \end{cases}$$

در $t \geq \frac{3\pi}{2\omega_0}$ طبق نتیجه مسئله ۴۶ برای $a = 0$، $b = 0$ داریم:

$$x_p(t) = \frac{B}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t + \theta)$$

پس

$$\begin{cases} x_s(t)=A'\cos(\omega_0 t+\theta'_0)+\dfrac{B}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t+\theta) \\ v_s(t)=-A'\omega_0\sin(\omega_0 t+\theta')-\dfrac{B\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin(\omega t+\theta) \end{cases}$$

هر دو جواب باید در $t = \frac{3\pi}{2\omega_0}$، یک نتیجه بدهند و جواب‌ها باید پیوسته باشند:

$$\begin{cases} x_s(\frac{3\pi}{2\omega_0})=x(\frac{3\pi}{2\omega_0})=v_0/\omega_0 \\ v_s(\frac{3\pi}{2\omega_0})=v(\frac{3\pi}{2\omega_0})=0 \end{cases}$$

پس اگر $\alpha = \frac{3\pi\omega}{2\omega_0} + \theta$ و $T = [B/m(\omega_0^2 - \omega^2)]$

$$\begin{cases} A'\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta'_0)+T\sin\alpha=\frac{v_0}{\omega_0} \\ A'\omega_0\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta'_0)+T(\sin\alpha)\omega=0 \end{cases}$$

و بطور ساده‌تر:

$$\begin{cases} A'\sin\theta'_0+T\cos\alpha=\frac{v_0}{\omega_0} \\ A'\omega_0\cos\theta'_0=+T\sin\alpha\omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow A' = \frac{+\omega}{\omega_0}\sin\alpha(\sec\theta'_0)T \Rightarrow T((\frac{\omega}{\omega_0})\sin\alpha\tan\theta'_0 + \mathrm{coa}\alpha) = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \tan\theta_0 = (\frac{\omega}{\omega_0})\csc\alpha(\frac{v_0}{\tau\omega_0} - \cos\alpha)$$

$$x_s(t) = A'\cos(\omega_0 t)\cos(\theta'_0) - A'\sin(\omega_0 t)\sin(\theta'_0) + T\cos(\omega t + \theta)$$

با استفاده از معادلات صفحه قبل، $A'\sin\theta'_0$, $A'\cos\theta'_0$ داریم:

$$x_s(t) = T(\frac{\omega}{\omega_0}\sin\alpha(\omega_0 t) + \sin((\omega_0 t)\cos\alpha + \cos(\omega t + \theta))$$

$$- \frac{v_0}{\omega_0}\sin((\omega_0 t)$$

ω و ω_0 و A معلوم هستند $T = \frac{B}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$, $\alpha = \frac{3\pi\omega}{2\omega_0}$

توجه کنید که جمله $\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ در کتاب علامت مثبت دارد و ما برای آن علامت منفی به‌دست آوردیم که جواب کتاب غلط است. ف(شرایط مرزی را چک کنید).

۵۴. جرم m تحت تأثیر نیروی بازگرداننده Kx- و نیروی میرایی $(\mp\mu mg)$ ناشی از اصطکاک لغزشی خشک قرار گرفته است، معادله حرکت جسم را پیدا کنید؟ نشان دهید که نوسان‌ها یک زمان‌اند (زمان تناوب مستقل از دامنه) و دامنهٔ نوسان در هر نصف دور به اندازه $2\mu g/\omega_0^2$ کاهش می‌یابد، تا آنکه متوقف شود.

[راهنمایی: نتیجه مسئله ۴۵ را به‌کار ببرید، هرگاه نیرو مانند این حالت در زمان‌های مختلف حرکت صور جبری مختلفی داشته باشد و علامت نیروی میرایی ناچار چنان باید اختیار شود که همیشه نیرو با سرعت مختلف‌الجهت باشد، لازم است معادله حرکت را که طی آن عبارت خاصی برای نیرو باید به‌کار رود، بطور جداگانه پیدا کرد و شرایط اولیه را برای هر فاصله زمانی و مکان و سرعت نهایی فاصله زمانی قبلی اختیار کرد].

حل:

معادله حرکت را می‌نویسیم

$$m\ddot{x}=-Kx\pm\mu mg$$

ابتدا جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega_0=\sqrt{K/m}$$

$$\begin{cases}\dot{x}>0 \Rightarrow m\ddot{x}+Kx=-\mu mg\Rightarrow x=A\sin(\omega_0 t+\theta)-\dfrac{\mu g}{\omega_0^2}\\ \dot{x}<0 \Rightarrow m\ddot{x}+Kx=+\mu mg\Rightarrow x=A\sin(\omega_0 t+\theta)+\dfrac{\mu g}{\omega_0^2}\end{cases}$$

برای سادگی قرار می‌دهیم

$$x_0=0 \quad , \quad v_0=0$$

(A

$$0\le t\le\tau \quad \Rightarrow v_I(\tau)=0 \quad \& \quad v_I(t)\ge 0$$

$$\begin{cases}x_I(t)=-\mu g/\omega_0^2+A\sin(\omega t+\theta)\\ v_I(t)=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_I(0)=v_0>0 \Rightarrow \omega_0\tau+\theta=\dfrac{\pi}{2}\\ V_I(\tau)=0 \quad \Rightarrow A\omega_0\cos\theta=v_0\end{cases}$$

$$x_I(0)=0 \quad\Rightarrow\quad A\sin\theta=\mu g/\omega_0^2$$

$$\Rightarrow \tan\theta=v_0\omega_0/\mu g\Rightarrow\tau=\frac{\pi}{2\omega_0}-\frac{1}{\omega_0}\tan^{-1}\left(\frac{\mu g}{\omega_0 v_0}\right)$$

$$\Rightarrow A=\omega_0^{-2}((\mu g)^2+v_0^2\omega_0^2)^{0.5}$$

$$\text{if } \mu=0$$

$$\Rightarrow A=v_0/\omega_0 \quad \& \quad \tau=\frac{\pi}{2\omega_0}$$

$$x_I(t)=-\mu g/\omega_0^2+A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=A-\mu g/\omega_0^2=\omega_0^{-2}\left(\sqrt{(\mu g)^2+(v_0\omega_0)^2}-\mu g\right)$$

(B

$$\tau\le t\le\tau' \quad\Rightarrow v_{II}(\tau')=0 \quad \& \quad v_{II}(t)\le 0$$

$$\begin{cases}x_{II}(t)=\mu g/\omega_0^2+A'\sin(\omega_0 t+\theta'')\\ v_{II}(t)=A'\omega_0\cos(\omega_0 t+\theta')\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_{II}(\tau')=0\Rightarrow\omega_0\tau'+\theta'=3\pi/2\\ v_{II}(\tau)=0\Rightarrow\omega_0\tau+\theta'=\pi/2\end{cases}\Rightarrow\tau'-\tau=\frac{\pi}{\omega_0}$$

$$x_{II}(\tau)=x_I(\tau)=A-\mu g/\omega_0^2=A'\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mu g/\omega_0^2$$

$$A'=A-2\mu g/\omega_0^2$$

$$\tau'=\frac{\pi}{\omega_0}+\tau=\frac{\pi}{\omega_0}+\frac{1}{\omega_0}\tan^{-1}\left(\frac{v_0\omega_0}{\mu g}\right)$$

$$\theta'=\frac{\pi}{2}-\omega_0 T=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{v_0\omega_0}{\mu g}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mu g}{v_0\omega_0}\right)$$

$$x_{II}(\tau')=\mu g/\omega_0^2+A'\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\mu g/\omega_0^2-A'=$$

$$=2\mu g/\omega_0^2-A$$

(C

$$T'\le t\le T''\Rightarrow x_{III}(T'')=0 \quad \& \quad V_{III}(t)>0$$

$$\begin{cases}x_{III}(t)=-\mu g/\omega_0^2+A''\sin(\omega_0 t+\theta'')\\ v_{III}(t)=A''\omega_0\cos(\omega_0 t+\theta'')\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_{III}(\tau')=0 \Rightarrow\omega_0\tau'+\theta''=\dfrac{3\pi}{2}\\ v_{III}(\tau'')=0 \Rightarrow\omega_0\tau''+\theta''=2\pi\end{cases}\Rightarrow \tau''-\tau'=\frac{\pi}{2\omega_0}$$

$$x_{III}(\tau')=X_{II}(\tau')\Rightarrow -A''-\mu g/\omega_0^2=2\mu g/\omega_0^2-A$$

$$\Rightarrow A''=-3\mu g/\omega_0^2+A$$

$$\tau''=\frac{\pi}{2\omega_0}+\tau'=\frac{\pi}{2\omega_0}+\frac{\pi}{\omega_0}+\frac{1}{\omega_0}\tan^{-1}\left(\frac{v_0\omega_0}{\mu g}\right)$$

$$\tau'' = \frac{3\pi}{2\omega_0} + \frac{1}{\omega_0}\tan^{-1}\left(\frac{v_0\omega_0}{\mu g}\right) \Rightarrow \text{if } \mu = v \Rightarrow \tau'' = \frac{2\pi}{\omega_0} = T$$

$$v_{III}(\tau'') = A''\omega_0\cos(\omega_0\tau'' + \theta'') = A''\omega_0\cos(2\pi) = A''\omega_0$$

$$A'' = A - 3\mu g/\omega_0^2 \Rightarrow v_{III}(\tau') = A\omega_0 - 3\mu g/\omega_0$$

$$v_{III}(\tau') = v_0 - 3\mu g/\omega_0$$

اتلاف انرژی جنبشی را محاسبه می‌کنیم (در یک رفت و برگشت):

$$\Delta K = K(\tau'') - K(0) =$$

$$= \frac{1}{2}m(v_0^2 + (3\mu g/\omega_0)^2 - 6\mu g v_0/\omega_0) - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Delta K = \frac{3}{2}\frac{\mu mg}{\omega_0}\left(\frac{3\mu g}{\omega_0} - 2v_0\right) = \Delta E$$

$$\mu = 0 \Rightarrow \Delta K = 0$$

اگر زمان تناوب را تعریف کنیم، زمانی که در آن فاز نوسانگر از ۰ تا 2π تغییر می‌کند به‌دست آورده‌ایم

$$\tau'' = \frac{3T}{2} + \frac{1}{\omega_0}\tan^{-1}(v_0\omega_0/\mu g)$$

$$\text{if } \mu = 0 \Rightarrow \tau'' = T = 2\pi/\omega_0$$

یعنی در حضور اصطکاک زمان تناوب کاهش می‌یابد و با بزرگ شدن μ، زمان تناوب کوچکتر می‌شود ولی نشان داده شده که μ هرچه باشد زمانی که نوسانگر فاز خود را از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{3\pi}{2}$ تغییر می‌دهد و یا به نوعی دو برابر یک دامنه ظاهری را طی می‌کند، $\frac{\pi}{\omega_0}$ است.

و نیز نشان داده شد که زمانی که نوسانگر فاز خود را از $\frac{3\pi}{2}$ به 2π تغییر می‌دهد، برابر است با $\frac{\pi}{2\omega_0}$، و هر دو رفتار اخیر، در حضور یا در غیاب اصطکاک وجود دارند.

دیدیم که در زمان τ''، سرعت نوسانگر مثبت بود، مکان آن مبدأ بود. پس اگر انتقال فاز را از 2π به 4π بررسی کنیم، مادامی که سرعت اولیه ما صفر نشود، همین رفتارها ادامه دارد و چون v_0 کوچکتر از قبلی است، تفاوت زمان تناوب و T کمتر می‌شود.

شرط توقف:

اولاً توقف زودتر از آنکه انرژی کل، صفر شود رخ می‌دهد، در انتهای دامنه‌ها، در فازهای $\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$، $\frac{5\pi}{2}$ و ... سرعت بطور لحظه‌ای صفر می‌شود ولی اینجا نیروی بازگرداننده فنر، جرم را

می‌کشند و با غلبه بر اصطکاک خشک، آن را به حرکت وا می‌دارد، اگر در یکی از مکان‌های سکون که در فازهای $(2K+1)\frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد، دامنه به حدی کاهش پیدا کند که نیروی فنر بر نیروی اصطکاک ایستایی غلبه نکند، جسم دیگر حرکت نمی‌کند و متوقف شده و اگر در همان حال اصطکاک را از بین ببریم، جرم شروع به نوسان با دامنه‌ای ثابت می‌کند.

۵۵. نوسانگر هارمونیک نامیرایی ($\gamma = 0$) تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که به‌وسیله معادله (۲ـ۱۹۱) داده شده است. الف) x(t) را پیدا کنید.

ب) اگر p_0 ثابت باشد برای چه مقدار δt دامنه نهایی نوسان بزرگترین خواهد شد؟ پ) نشان دهید از $\delta t \to 0$ میل کند، جواب شما به جواب داده شده توسط معادله (۲ـ۱۹۰) میل می‌کند.

حل:

$$F(t)=\begin{cases} 0 & t<t_0 \\ p_0/\delta t & t_0 \le t \le t_0+\delta t \\ 0 & t>t_0+\delta t \end{cases}$$

(۱۹۰ـ۲)

$$x(t)=\begin{cases} 0 \\ \dfrac{p_0}{m\omega_1}\exp(-\gamma(t-t_0))\sin(\omega_1(t-t_0)) \end{cases}$$

$$m\ddot{x}+Kx=F(t)=\begin{cases} 0 & t<t_0 \\ p_0/\delta t & t_0 \le t \le t_0+\delta t \\ 0 & t>t_0+\delta t \end{cases}$$

که معادله دیفرانسیل حرکت را در بازه‌های زمانی مختلف داریم.

پس برای $t > t_0$

$$x_I(t) = A'\sin(\omega_0 t + \theta')$$

چونکه نوسانگر ساکن است و جابجایی اولیه هم ندارد پس $x_I(t) = 0$

و نیز برای

$$x_{II}(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta) + \frac{P_0}{K\delta t} \quad t_0 \le t \le t_0 + \delta t$$

در مکان پیوستگی داریم و در سرعت نیز:

$$x_{II}(t_0) = 0 \Rightarrow A\sin(\omega_0 t + \theta) + \frac{P_0}{K\delta t} = 0$$

$$v_{II}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$v_{II}(t_0) = 0 \Rightarrow \omega_0 t_0 + \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} - \omega_0 t_0$$

هر جا سرعت صفر بود و بعد از آن بطور قراردادی سرعت مثبت بود باید فاز $\frac{3\pi}{2}$ گرفته شود و در غیر این صورت صورت

$$\begin{cases} v_{II}(t_0+\delta t) = \frac{p_0}{m\omega_0}\left(\frac{\sin(\omega_0 \delta t)}{\delta t}\right) \\ v_{III}(t_0+\delta t) = A''\omega_0 \cos(\omega_0(t_0+\delta t)+\theta'') \end{cases}$$

مناسب است.

پس

$$-A + \frac{p_0}{K\delta t} = 0 \Rightarrow A = p_0/K\delta t$$

پس

$$x_{II}(t) = (p_0/K\delta t)[1 + \sin(\omega_0(t - t_0) + \frac{3\pi}{2})]$$

و از آنجا که

$$\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) = \cos\alpha$$

پس

$$x_{II}(t) = (p_0/m\omega^2 \delta t)[1 - \cos(\omega_0(t - t_0))]$$

و در

$$X_{III}(t) = A''\sin(\omega_0 t + \theta'') \qquad t > t_0 + \delta t$$

$$\begin{cases} x_{II}(t_0+\delta t) = \frac{p_0}{m\omega^2}\left(\frac{1-\cos(\omega_0 \delta t)}{\delta t}\right) \\ x_{III}(t_0+\delta t) = A''\sin(\omega_0(t_0+\delta t)+\theta'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{II}(t_0+\delta t) = \frac{p_0}{m\omega_0}\left(\frac{\sin(\omega_0 \delta t)}{\delta t}\right) \\ v_{III}(t_0+\delta t) = A''\omega_0 \cos(\omega_0(t_0+\delta t)+\theta'') \end{cases}$$

از پیوستگی سرعت و مکان دو تساوی به‌دست می‌آید که تقسیم این دو تساوی بر هم نتیجه می‌دهد. (اگر $\alpha = \omega_0(t_0 + \delta t) + \theta''$, $(\beta = \omega_0 \delta t)$)

$$\tan\alpha = (1 - \cos\beta)/\sin\beta$$

و چون داریم $1 - \cos\beta = 2\sin^2\frac{\beta}{2}$ در نهایت

$$\sin\alpha = \sin(\beta/2) \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \theta'' = -\omega_0 t_0 + \frac{1}{2}\beta$$

پس از تساوی پیوستگی مکان داریم

$$A'' = \frac{p_0}{m\omega_0}\frac{1}{\beta}\left(\frac{1 - \cos\beta}{\sin(\beta/2)}\right) = \frac{2p_0}{m\omega_0}\frac{1}{\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

حال تابع $A''(\beta)$ را در اختیار داریم.

تابع $\sin K(x) = \frac{\sin x}{x}$

در $x = 0$ مقدار ندارد ولی حد دارد که

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

پس برای ماکزیمم بودن A''، $\delta t \to 0$ میل می‌کند

$$\lim_{\delta t \to 0} A'' = \frac{p_0}{m\omega_0} = \max(A'')$$

در نهایت داریم

$$x_{III}(t) = \left(\frac{2p_0}{K\delta t}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\omega_0 \delta t\right)\sin(\omega_0 t + \theta'')$$

$$x_{III}(t) = \left(\frac{2p_0}{K\delta t}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\omega_0 \delta t\right)\sin\left(\omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\omega_0 \delta t\right)$$

و اگر $\delta t \to 0$ میل کند برای جواب x داریم:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \le t_0 \\ \frac{p_0}{m\omega_0}\sin[\omega_0(t - t_0)] & t \ge t_0 \end{cases}$$

با $\gamma = 0$ چون $\omega_1 = \omega_0$، به فرم معادله (۲ـ۱۹۰) رفته‌ایم.

۵۶. جواب مسئله معادله (۲ـ۱۹۰) را برای یک نوسانگر هارمونیک میرای بحرانی پیدا کنید که در لحظه $t = t_0$ تحت ضربه p_0 قرار گرفته است.

حل:

بدیهی است که

$$x_I(t) = 0 \qquad t < t_0$$

$$\begin{cases} x_{II}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t} + \frac{p_0}{K\delta t} \\ v_{II}(t) = ((c_2 - \gamma c_1) - \gamma c_2 t)\exp(-\gamma t) \quad (t_0 = 0) \end{cases}$$

$$x_{II}(t_0) = 0 \Rightarrow c_1 = -p_0/K\delta t$$

$$v_{II}(t_0) = ((c_2 - \gamma c_1) - \gamma c_2 t_0)e^{-\gamma t_0} = 0$$

برای سادگی $t_0 = 0$ می‌گیریم $c_2(1 - \gamma t_0) = \gamma c_1$

$c_2 = \gamma c_1 = -p_0\gamma/K\delta t$

و در نهایت

$$x(t) = (p_0/K\delta t)(1-(1+\gamma t)e^{-\gamma t})$$

و با قرار دادن $t - t_0$ به جای t به حالت اول برمی‌گردیم

$$x_{II}(t) = (p_0/K\delta t)[1-(1+\gamma(t-t_0))\exp(-\gamma(t-t_0))]$$

و در $t > t_0 + \delta t$

$$\begin{cases} x_{III}(t)=(c'_1+c'_2 t)e^{-\gamma t} \\ v_{III}(t)=((c'_2-\gamma c'_1))-\gamma c'_2 t)e^{-\gamma t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{II}(t_0+\delta t)=(p_0/K\delta t)(1-(1+\gamma\delta t)e^{-\gamma\delta t}) \\ x_{III}(t_0+\delta t)=(c'_1+c'_2(t_0+\delta t))\exp(-\gamma(t_0+\delta t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{II}(t_0+\delta t)=(p_0\gamma^2/K)e^{-\gamma\delta t} \\ v_{III}(t_0+\delta t)=((c'_2-\gamma c'_1)-\gamma c'_2(t_0+\delta t))e^{-\gamma(t_0+\delta t)} \end{cases}$$

باز هم برای سادگی $t_0 = 0$ قرار دهید و بعد با تبدیل $t_0 \to t_0 + \delta t$ اوضاع را بـه حالت اول برگردانید.

از معادله پیوستگی سرعت داریم:

$$c'_2(1-\gamma\delta t) - \gamma c'_1 = p_0\gamma^2/K = (p_0/K\delta t)(\gamma^2\delta t)$$

و از معادله پیوستگی x داریم

$$c'_1+c'_2\delta t=\frac{p_0}{K\delta t}[e^{\gamma\delta t}-(1+\delta t\gamma)]$$

از دو معادله پیوستگی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} c'_1=\frac{p_0}{K\delta t}[e^{\gamma\delta t}(1-\gamma\delta t)-1] \\ c''_2=\frac{p_0}{K\delta t}\gamma[e^{\gamma\delta t}-1] \end{cases}$$

بنابراین:

$$x_{III}(t)=\frac{p_0}{K\delta t}[e^{\gamma\delta t}(1-\gamma\delta t)-1+(e^{\gamma\delta t}-1)\gamma t]\exp(-\gamma t)$$

با توجه به اینکه

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

اگر $\delta t \to 0$ میل داده شود

$$x_{III}(t)=\frac{p_0\gamma^2}{m\omega_0^2}(t-t_0)e^{-\gamma(t-t_0)}$$

در نهایت

$$x(t)=\begin{cases} 0 & t\le t_0 \\ \frac{p_0\gamma^2}{m\omega_0^2}(t-t_0)e^{-\gamma(t-t_0)} & t\ge t_0 \end{cases}$$

۵۷) الف) با استفاده از قانون ترکیب، حرکت نوسانگر کند میرای ساکن با $\gamma = \omega_0/3$ را به‌دست آورید که در $t = 0$ تحت تأثیر نیروی: $F = A\sin\omega_0 + B\sin 3\omega_0 t$ قرار گرفته باشد. ω_0 بسامد طبیعی نوسانگر است. ب) نسبت B به A چقدر باشد تا نوسان واداشته با بسامدهای $3\omega_0$ و ω_0 دارای دامنه‌های مساوی باشد؟

حل:

الف) معادله دیفرانسیل نوسان به‌صورت زیر است:

$$m\ddot x+b\dot x+kx=F\Rightarrow m\ddot x+b\dot x+kx=A\sin\omega_0 t+B\sin 3\omega_0 t\Rightarrow$$

$$\ddot x+\frac{b}{m}\dot x+\frac{k}{m}x=\frac{A}{m}\sin\omega_0 t+\frac{B}{m}\sin 3\omega_0 t\Rightarrow$$

$$\ddot x+2\gamma\dot x+\omega_0^2 x=\frac{A}{m}\sin\omega_0 t+\frac{B}{m}\sin 3\omega_0 t\Rightarrow \ddot x+\frac{2\omega_0}{3}\dot x+\omega_0^2 x=\frac{A}{m}\sin\omega_0 t+\frac{B}{m}\sin 3\omega_0 t$$

با توجه به اینکه $\gamma < \omega_0$ است پس نوسان از نوع کند میرا است.

جواب معادله‌ی همگن $\ddot x+\frac{2\omega_0}{3}\dot x+\omega_0^2 x=0$ به‌صورت زیر است:

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\Rightarrow\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\left[\frac{\omega_0}{3}\right]^2}\Rightarrow\omega_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0$$

$$x_h=Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\phi)\Rightarrow x_h=Ce^{-\frac{\omega_0}{3}t}\cos\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t+\phi\right]\Rightarrow$$

$$x_h=Ce^{\frac{-\omega_0}{3}t}\left[\cos\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right]\cos\phi-\sin\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right]\sin\phi\right]\Rightarrow$$

$$x_h = Ce^{-\frac{\omega_0}{3}t}\cos\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right]\cos\phi - Ce^{-\frac{\omega_0}{3}t}\sin\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right]\sin\phi \Rightarrow$$

$$x_h = C_1 e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\cos\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right] - C_2 e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\sin\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right]$$

یکی از جواب‌های معادله دیفرانسیل غیرهمگن $\ddot{x}+\frac{2\omega_0}{3}\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{A}{m}\sin\omega_0 t$ به‌صورت زیر است:

$$x_1 = A_1\sin\omega_0 t + A_2\cos\omega_0 t \Rightarrow \dot{x}=\omega_0 A_1\cos\omega_0 t - \omega_0 A_2 \sin\omega_0 t \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 A_1 \sin\omega_0 t - \omega_0^2 A_2\cos\omega_0 t$$

روابط فوق را در معادله دیفرانسیل غیرهمگن، جاگذاری می‌کنیم:

$$-\omega_0^2 A_1\sin\omega_0 t - \omega_0^2 A_2\cos\omega_0 t + \frac{2}{3}\omega_0^2 A_1\cos\omega_0 t - \frac{2}{3}\omega_0^2 A_2 \sin\omega_0 t + \omega_0^2 A_1 \sin\omega_0 t$$

$$+\omega_0^2 A_2\cos\omega_0 t = \frac{A}{m}\sin\omega_0 t \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\omega_0^2 A_1\cos\omega_0 t - \frac{2}{3}\omega_0^2 A_2\sin\omega_0 t = \frac{A}{m}\sin\omega_0 t\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{2}{3}\omega_0^2 A_1\cos\omega_0 t = 0\\ -\frac{2}{3}\omega_0^2 A_2\sin\omega_0 t = \frac{A}{m}\sin\omega_0 t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1 = 0\\ A_2 = \frac{-3A}{2m\omega_0^2}\end{cases}$$

پس: $x_1 = -\frac{3A}{2m\omega_0^2}\cos\omega_0 t$ است.

یکی از جواب‌های معادله دیفرانسیل غیرهمگن: $\ddot x + \frac{2\omega_0}{3}\dot x+\omega_0^2 x = \frac{B}{m}\sin 3\omega_0 t$ به‌صورت زیر است:

$$x_2 = B_1\sin3\omega_0 t + B_2\cos 3\omega_0 t \Rightarrow \dot x = 3\omega_0 B_1\cos3\omega_0 t - 3\omega_0 B_2 \sin 3\omega_0 t\Rightarrow$$

$$\ddot x_2 = -9\omega_0^2 B_1 \sin 3\omega_0 t - 9\omega_0^2 B_2\cos3\omega_0 t$$

روابط فوق را در معادله دیفرانسیل غیرهمگن، جاگذاری می‌کنیم:

$$-9\omega_0^2 B_1\sin3\omega_0 t - 9\omega_0^2 B_2\cos 3\omega_0 t + 2\omega_0^2 B_1\cos3\omega_0 t - 2\omega_0^2 B_2 \sin3\omega_0 t +$$

$$\omega_0^2 B_1 \sin 3\omega_0 t + \omega_0^2 B_2\cos3\omega_0 t = \frac{B}{m}\sin3\omega_0 t\Rightarrow$$

$$-8\omega_0^2 B_1\sin3\omega_0 t - 2\omega_0^2 B_2\sin 3\omega_0 t - 8\omega_0^2 B_2\cos3\omega_0 t$$

$$+ 2\omega_0^2 B_1\cos3\omega_0 t = \frac{B}{m}\sin3\omega_0 t\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-8\omega_0^2 B_2\cos3\omega_0 t + 2\omega_0^2 B_1\cos3\omega_0 t = 0\\ -8\omega_0^2 B_1\cancel{\sin3\omega_0 t} - 2\omega_0^2 B_2\cancel{\sin3\omega_0 t} = \frac{B}{m}\cancel{\sin3\omega_0 t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B_1 = 4B_2\\ -8\omega_0^2 B_1 - 2\omega_0^2 B_2 = \frac{B}{m}\end{cases}\Rightarrow$$

$$-32\omega_0^2 B_2 - 2\omega_0^2 B_2 = \frac{B}{m}\Rightarrow -34\omega_0^2 B_2 = \frac{B}{m}\Rightarrow B_2 = -\frac{B}{34m\omega_0^2}$$

$$B_1 = 4B_2 \Rightarrow B_1 = 4\times -\frac{B}{34m\omega_0^2}\Rightarrow B_1 = \frac{-2B}{17m\omega_0^2}$$

پس: $x_2 = \frac{-2B}{17m\omega_0^2}\sin3\omega_0 t - \frac{B}{34m\omega_0^2}\cos3\omega_0 t$ است.

$$x(t) = x_h(t)+x_1(t)+x_2(t)\Rightarrow$$

$$x = C_1e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\cos\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right] - C_2 e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\sin\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right]$$

$$-\frac{3A}{2m\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{2B}{17m\omega_0^2}\sin3\omega_0 t$$

$$-\frac{B}{34m\omega_0^2}\cos3\omega_0 t\Rightarrow$$

$$v = -\frac{\omega_0}{3}C_1 e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\cos\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right] - \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 C_1 e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\sin\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right]$$

$$+\frac{\omega_0}{3}C_2 e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\sin\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right]$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 C_2 e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t\right] + \frac{3\omega_0 A}{2m\omega_0^2}\sin\omega_0 t$$

$$-\frac{6\omega_0 B}{17m\omega_0^2}\cos3\omega_0 t + \frac{3\omega_0 B}{34m\omega_0^2}\sin3\omega_0 t$$

$$\begin{cases} t=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow C_1+0-\frac{3A}{2m\omega_0^2}-0-\frac{B}{34m\omega_0^2}=0 \Rightarrow C_1=\frac{3A}{2m\omega_0^2}+\frac{B}{34m\omega_0^2}$$

$$\begin{cases} t=0 \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{\omega_0}{3}C_1-0+0-\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 C_2+0-\frac{6\omega_0 B}{17m\omega_0^2}+0=0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\omega_0}{3}\left[\frac{3A}{2m\omega_0^2}+\frac{B}{34m\omega_0^2}\right]-\frac{6\omega_0 B}{17m\omega_0^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 C_2 \Rightarrow C_2=-\frac{3\sqrt{2}A}{8m\omega_0^2}-\frac{\sqrt{2}B}{136m\omega_0^2}-\frac{9\sqrt{2}B}{34m\omega_0^2} \Rightarrow$$

$$C_2=-\frac{3\sqrt{2}A}{8m\omega_0^2}-\frac{37\sqrt{2}B}{136m\omega_0^2}$$

مقادیر فوق را در رابطه‌ی x جاگذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{m\omega_0^2}[(\frac{3}{2}A+\frac{1}{34}B)e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\cos(\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t)+(\frac{3\sqrt{2}}{8}A+\frac{37\sqrt{2}}{136}B)e^{-\frac{\omega_0}{3}t}\sin(\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 t)$$

$$-\frac{3}{2}A\cos(\omega_0 t)-\frac{2}{17}B\sin(3\omega_0 t)-\frac{1}{34}B\cos(3\omega_0 t)]$$

ب) یک جمله، شامل بسامد ω_0 یعنی: $A_A=-\frac{3A}{2m\omega_0^2}$ است. دو جمله دارای بسامد $3\omega_0$ است:

$$y=-\frac{2B}{17m\omega_0^2}\sin(3\omega_0 t)-\frac{B}{34m\omega_0^2}\cos(3\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$y-\frac{2B}{17m\omega_0^2}\left[\sin(3\omega_0 t)+\frac{1}{4}\cos(3\omega_0 t)\right]$$

برای راحتی محاسبات، فرض می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow \tan^2\alpha=\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{17}{16} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{17}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$y=-\frac{2B}{17m\omega_0^2}[\sin(3\omega_0 t)+\tan\alpha\cos(3\omega_0 t)] \Rightarrow y=$$

$$-\frac{2B}{17m\omega_0^2}[\sin(3\omega_0 t)+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos(3\omega_0 t)] \Rightarrow$$

$$y=-\frac{2B}{17m\omega_0^2\cos\alpha}[\sin(3\omega_0 t)\cos\alpha+\sin\alpha\cos(3\omega_0 t)] \Rightarrow$$

$$y=-\frac{2B}{17m\omega_0^2\cos\alpha}\sin(3\omega_0 t+\alpha) \Rightarrow$$

$$y=-\frac{2B}{17m\omega_0^2\frac{4}{\sqrt{17}}}\sin(3\omega_0 t+\alpha) \Rightarrow A_B=-\frac{\sqrt{17}B}{34m\omega_0^2}$$

$$A_A=A_B \Rightarrow -\frac{3A}{2m\omega_0^2}=-\frac{\sqrt{17}B}{34m\omega_0^2} \Rightarrow B=3\sqrt{17}A$$

۵۸. نیروی $F_0(1-e^{-at})$ به نوسانگر هماهنگی وارد می‌شود که در $t=0$ ساکن است. جرم نوسانگر m، ثابت فنر $k=4ma^2$ و ضریب میرایی $b=ma$ است. معادله‌ی حرکت را به‌دست آورید و $x(t)$ را رسم کنید.

حل:

معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت زیر است:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F \Rightarrow m\ddot{x}+ma\dot{x}+4ma^2x=F_0(1-e^{-at}) \Rightarrow \ddot{x}+a\dot{x}+4a^2x=\frac{F_0}{m}(1-e^{-at})$$

$$\begin{cases} \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \gamma=\frac{b}{2m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0=\sqrt{\frac{4ma^2}{m}} \\ \gamma=\frac{ma}{2m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0=2a \\ \gamma=0/5a \end{cases} \Rightarrow \omega_0>\gamma$$

پس نوسان از نوع کند میرا است بنابراین:

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \Rightarrow \omega_1=\sqrt{(2a)^2-(0/5a)^2} \Rightarrow \omega_1=1/94a$$

جواب معادله دیفرانسیل همگن $\ddot{x}+a\dot{x}+4a^2x=0$ به‌صورت زیر است:

$$x_h=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\theta) \Rightarrow x_h=Ae^{-0/5at}\cos(1/94at+\theta)$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیل غیرهمگن $\ddot{x}+a\dot{x}+4a^2x=\frac{F_0}{m}$ به‌صورت $x_1=\frac{F_0}{4ma^2}$ است.

جواب معادله‌ی دیفرانسیل غیرهمگن: $\ddot{x}+a\dot{x}+4a^2x=-\frac{F_0}{m}e^{-at}$ به صورت $x_2=Be^{-at}$ است.

$$x_2=Be^{-at} \Rightarrow \dot{x}_2=-aBe^{-at} \Rightarrow \ddot{x}_2=a^2Be^{-at}$$

روابط فوق را در معادله‌ی دیفرانسیل غیرهمگن، قرار می‌دهیم:

$$a^2Be^{-at} - a^2Be^{-at} + 4a^2Be^{-at} = -\frac{F_0}{m} \Rightarrow 4a^2B = -\frac{F_0}{m} \Rightarrow B = -\frac{F_0}{4ma^2}$$

پس: $x_2 = -\frac{F_0}{4ma^2}e^{-at}$ است.

$$x(t) = x_h(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow x = Ae^{-0.5at}\cos(1.94\,at + \theta) + \frac{F_0}{4ma^2} - \frac{F_0}{4ma^2}e^{-at}$$

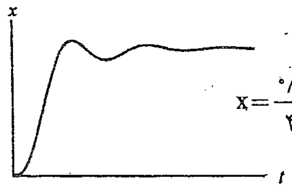
$$\dot x = -0.5aAe^{-0.5at}\cos(1.94\,at + \theta) - 1.94aAe^{-0.5at}\sin(1.94\,at + \theta) + \frac{F_0}{4ma^2}e^{-at}$$

$$\begin{cases}t=0\\ x=0\end{cases} \Rightarrow A\cos\theta + \frac{F_0}{4ma^2} - \frac{F_0}{4ma^2} = 0 \Rightarrow A\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}t=0\\ \dot x=0\end{cases} \Rightarrow -0.5aA\cos\theta - 1.94aA\sin\theta + \frac{F_0}{4ma} = 0 \Rightarrow$$

$$-0.5aA\cos\frac{\pi}{2} - 1.94aA\sin\frac{\pi}{2} + \frac{F_0}{4ma} = 0 \Rightarrow -1.94aA = -\frac{F_0}{4ma} \Rightarrow A = \frac{0.51F_0}{4ma^2}$$

مقادیر فوق را در رابطهٔ جاگذاری می‌کنیم:



$$x = \frac{0.51F_0}{4ma^2}e^{-0.5at}\cos\left[1.94at + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{F_0}{4ma^2} - \frac{F_0}{4ma^2}e^{-at} \Rightarrow$$

$$x = \frac{F_0}{4ma^2}\left(1 - 0.51e^{-0.5at}\sin 1.94at - e^{-at}\right)$$

۵۹. مسئله ۵۸ را به ازای $k = ma^2$ و $b = 2ma$ حل کنید.

حل:

معادله‌ی دیفرانسیل نوسانگر به‌صورت زیر است:

$$m\ddot x + b\dot x + kx = F \Rightarrow m\ddot x + 2ma\dot x + ma^2x = F_0(1 - e^{-at}) \Rightarrow \ddot x + 2a\dot x + a^2x = \frac{F_0}{m}(1 - e^{-at})$$

$$\begin{cases}\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\\ \gamma = \frac{b}{2m}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_0 = \sqrt{\frac{ma^2}{m}}\\ \gamma = \frac{2ma}{2m}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_0 = a\\ \gamma = a\end{cases} \Rightarrow \omega_0 = \gamma$$

پس نوسان از نوع میرای بحرانی است:

جواب معادله دیفرانسیل همگن $\ddot x + 2a\dot x + a^2x = 0$ به‌صورت زیر است:

$$x_h = (C_1 + C_2t)e^{-\gamma t} \Rightarrow x_h = (C_1 + C_2t)e^{-at}$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیل غیرهمگن: $\ddot x + 2a\dot x + a^2x = \frac{F_0}{m}$ به‌صورت: $x_1 = \frac{F_0}{ma^2}$ است.

جواب معادله‌ی دیفرانسیل غیرهمگن: $\ddot x + 2a\dot x + a^2x = -\frac{F_0}{m}e^{-at}$ به‌صورت: $x_2 = Be^{2-at}$ است.

$$x_2 = Bt^2e^{-at} \Rightarrow \dot x_2 = 2Bt^{-at} - aBt^2e^{-at} \Rightarrow \ddot x_2 = 2Be^{-at} - 2aBte^{-at} - 2aBte^{-at} + a^2Bt^2e^{-at}$$

مقادیر فوق را در معادله‌ی دیفرانسیل غیرهمگن، جاگذاری می‌کنیم:

$$2Be^{-at} - 2aBte^{-at} - 2aBte^{-at} + a^2Bt^2e^{-at} + 4aBte^{-at} - 2a^2Bt^2e^{-at} + a^2Bt^2e^{-at} = -\frac{F_0}{m}e^{-at}$$

$$2B = -\frac{F_0}{m} \Rightarrow B = -\frac{F_0}{2m}$$

پس: $x_2 = -\frac{F_0}{2m}t^2e^{-at}$ است.

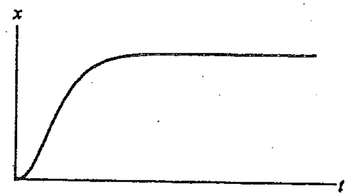
$$x(t) = x_h(t) + x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow x = (C_1 + C_2t)e^{-at} + \frac{F_0}{2ma^2} - \frac{F_0}{2m}t^2e^{-at}$$

$$\dot x = C_2e^{-at} - a(C_1 + C_2t)e^{-at} - \frac{F_0}{m}te^{-at} + \frac{F_0a}{2m}t^2e^{-at}$$

$$\begin{cases}t=0\\ x=0\end{cases} \Rightarrow C_1 + \frac{F_0}{ma^2} - 0 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{F_0}{ma^2}$$

$$\begin{cases}t=0\\ \dot x=0\end{cases} \Rightarrow C_2 - aC_1 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow C_2 = aC_1 \Rightarrow C_2 = -\frac{F_0}{ma}$$

مقادیر فوق را در رابطه‌ی x جاگذاری می‌کنیم:



$$x = \left[-\frac{F_0}{ma^2} - \frac{F_0}{ma}t\right]e^{-at} + \frac{F_0}{ma^2} - \frac{F_0}{2m}t^2e^{-at} \Rightarrow$$

$$x = \frac{F_0}{ma^2}\left[1 - \left[1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2\right]e^{-at}\right]$$

۶۰. با استفاده از روش فوریه، جواب حالت پایای نوسانگر هماهنگ میرایی را پیدا کنید که تحت تأثیر نیروی:

$$F(t)=\begin{cases} 0 & ,nT<t\leq \left(n+\frac{1}{2}\right)T \\ F_0 & ,\left(n+\frac{1}{2}\right)T<t\leq (n+1)T \end{cases}$$

قرار گرفته است. n عدد صحیح و $T=\frac{6\pi}{\omega_0}$ و ω_0 بسامد همسازی نوسانگر است. نشان دهید اگر $\omega_0 >> \gamma$ باشد حرکت تقریباً سینوسی با زمان تناوب T/۳ است.

حل:

$$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt \Rightarrow A_n=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} 0\times\cos\frac{2n\pi t}{T}dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T} F_0\cos\frac{2n\pi t}{T}dt\right]\Rightarrow$$

$$A_n=\frac{2F_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}dt$$

$$n=0\Rightarrow A_0=\frac{2F_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}dt\Rightarrow A_0=\frac{2F_0}{T}t\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\Rightarrow A_0=\frac{2F_0}{T}\left[T-\frac{T}{2}\right]\Rightarrow A_0=F_0$$

$$n>0\Rightarrow A_n=\frac{2F_0}{T}\frac{T}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi t}{T}\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\Rightarrow A_n\frac{F_0}{n\pi}(\sin 2n\pi-\sin n\pi)\Rightarrow A_n=0$$

$$B_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}dt\Rightarrow B_n\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}\times\sin\frac{2n\pi t}{T}dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}F_0\sin\frac{2n\pi t}{T}dt\right]\Rightarrow$$

$$B_n=\frac{2F_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}\sin\frac{2n\pi t}{T}dt\Rightarrow B_n=\frac{2F_0}{T}\left(-\frac{T}{2n\pi}\right)\cos\frac{2n\pi t}{T}\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\Rightarrow$$

$$B_n=-\frac{F_0}{n\pi}(\cos 2n\pi-\cos n\pi)$$

$$\begin{cases} n=1,3,5,\cdots\Rightarrow B_n=-\frac{F_0}{n\pi}[1-(-1)] \\ n=0,2,4,\cdots\Rightarrow B_n=-\frac{F_0}{n\pi}(1-) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B_n=-\frac{F_0}{n\pi} \\ B_n=0 \end{cases}$$

$$F(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+B_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right]\Rightarrow F(t)=\frac{F_0}{2}+\sum_{n=1,3,\cdots}\left[-\frac{2F_0}{n\pi}\sin\frac{2n\pi t}{T}\right]$$

جمله دوم رابطه‌ی فوق را با رابطه‌ی (۲ ـ ۱۹۸) مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} F(t)=\sum_n C_n\cos(\omega_n t+\theta_n) \\ F(t)=\sum_{n=1,3,\cdots}\left[-\frac{2F_0}{n\pi}\sin\frac{2n\pi t}{T}\right] \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_n=-\frac{2F_0}{n\pi} \\ \omega_n=\frac{2n\pi}{T} \\ \theta_n=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$T=\frac{6\pi}{\omega_0}\Rightarrow\omega_n=2n\pi\frac{\omega_0}{6\pi}\Rightarrow\omega_n=\frac{n\omega_0}{3}$$

حال معادله‌ی نوسانی به‌صورت زیر است:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=\frac{F_0}{2}+\sum_{n=1,3,\cdots}\left[-\frac{2F_0}{n\pi}\sin\frac{2n\pi t}{T}\right]\Rightarrow$$

$$x=\frac{F_0}{2k}+\sum_{n=1,3,\cdots}\frac{C_n}{m}\frac{1}{\left[(\omega_n^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_n^2\right]^{\frac{1}{2}}}\sin(\omega_n t+\theta_n+\beta)$$

مقادیر C_n، ω_n و θ_n قبلاً محاسبه شده‌اند: $\beta=\tan^{-1}\frac{\omega_0^2-\omega_n^2}{2\gamma\omega_n}$ است.

$$\omega_0 >> \gamma\Rightarrow\beta\cong\tan^{-1}\infty\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}$$

$$\omega_0\gg\gamma\Rightarrow\left[\left(\frac{n^2\omega_0^2}{9}-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\left(\frac{n\omega_0}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cong\omega_0^2\left[\left(\frac{n^2}{9}-1\right)^2+\frac{4n^2\gamma^2}{9\omega_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cong\omega_0^2\left(\frac{n^2}{9}-1\right)$$

مقادیر فوق را در رابطه‌ی x جاگذاری می‌کنیم:

$$x=\frac{F_0}{2k}+\sum_{n=1,3,\dots}\frac{C_n}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2\left[\frac{n^2}{9}-1\right]}\sin\left[\frac{n\omega_0}{3}t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\frac{F_0}{2k}+\sum_{n=1,3,\dots}\frac{C_n\sin\frac{n\omega_0 t}{3}}{m\omega_0^2\left[\frac{n^2}{9}-1\right]}$$

حرکت فوق، تقریباً سینوسی است.

۶۲. مسئله‌ی ۵۸ را با استفاده از جواب گرین (۲ـ ۲۱۰) حل کنید.

حل:

$$F=F_0(1-e^{-\alpha t})\Rightarrow F=F_0-F_0e^{-\alpha t}$$

نیروی فوق را به قسمت مجزای $F_1(t')=F_0$ و $F_2(t')=-F_0e^{-\alpha t'}$ تجزیه کرده و جواب هر معادله را به دست می‌آوریم سپس جواب‌ها را با هم، جمع می‌کنیم. تغییر زیر را در تابع گرین، جاگذاری می‌کنیم:

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\Rightarrow \sin\omega_1(t-t')=\frac{e^{i\omega_1(t-t')}-e^{-i\omega_1(t-t')}}{2i}$$

برای $F_1(t')$ می‌توان نوشت:

$$x_1(t)=\int_0^t\frac{F_1(t')}{m\omega_1}G(t,t')dt'\Rightarrow x_1=\int_0^t\frac{F_0}{m\omega_1}e^{-\gamma(t-t')}\times\frac{e^{i\omega_1(t-t')}-e^{-i\omega_1(t-t')}}{2i}dt'\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{F_0}{2im\omega_1}\int_0^t\left[e^{(i\omega-\gamma)t}e^{-(i\omega_1-\gamma)t'}-e^{-(i\omega_1+\gamma)t}e^{(i\omega_1+\gamma)t'}\right]dt'\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{F_0}{2im\omega_1}\left[\frac{e^{(i\omega_1-\gamma)t}}{-(i\omega-\gamma)}e^{-(i\omega-\gamma)t'}-\frac{e^{-(i\omega_1+\gamma)t}}{i\omega_1+\gamma}e^{(i\omega+\gamma)t'}\right]\Bigg|_0^t\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{F_0}{2im\omega_1}\left[\frac{1}{\gamma-i\omega_1}-\frac{1}{\gamma+i\omega_1}-\frac{e^{(i\omega-\gamma)t}}{\gamma-i\omega_1}+\frac{e^{-(i\omega_1+\gamma)t}}{\gamma+i\omega_1}\right]\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{F_0}{2im\omega_1}\,\frac{\gamma+i\omega_1-\gamma+i\omega_1-(\gamma+i\omega_1)e^{(i\omega_1-\gamma)t}+(\gamma-i\omega_1)e^{-(i\omega_1+\gamma)t}}{(\gamma-i\omega_1)(\gamma+i\omega_1)}\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{F_0}{2im\omega_1}\,\frac{2i\omega_1-i\omega_1\left[e^{(i\omega_1-\gamma)t}+e^{-(i\omega_1+\gamma)t}\right]}{\gamma^2+\omega_1^2}\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{F_0}{2m}\,\frac{2-e^{-\gamma t}(e^{i\omega_1 t}+e^{-i\omega_1 t})}{\gamma^2+\omega_1^2}\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{F_0}{2m}\,\frac{2-2e^{-\gamma t}\cos\omega_1 t}{\gamma^2+\omega_1^2}\Rightarrow x_1=\frac{F_0}{m}\,\frac{1-e^{-\gamma t}\cos\omega_1 t}{\gamma^2+\omega_1^2}$$

برای $F_2(t')$ می‌توان نوشت:

$$x_2(t)=\int_0^t\frac{F_2(t')}{m\omega_1}G(t,t')dt'\Rightarrow x_2=\int_0^t\frac{-F_0e^{-\alpha t'}}{m\omega_1}e^{-\gamma(t-t')}\times\frac{e^{i\omega_1(t-t')}-e^{-i\omega_1(t-t')}}{2i}dt'\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-F_0}{2im\omega_1}\int_0^t\left[e^{(i\omega_1-\gamma)t}e^{(\gamma-\alpha-i\omega_1)t'}-e^{-(i\omega+\gamma)t}e^{(\gamma-\alpha+i\omega_1)t'}\right]dt'\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-F_0}{2im\omega_1}\left[\frac{e^{(i\omega_1-\gamma)t}e^{(\gamma-\alpha-i\omega_1)t'}}{\gamma-\alpha-i\omega_1}-\frac{e^{-(i\omega_1+\gamma)t}e^{(\gamma-\alpha+i\omega)t'}}{\gamma-\alpha+i\omega_1}\right]\Bigg|_0^t\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-F_0}{2im\omega_1}\left[\frac{e^{-\alpha t}-e^{(i\omega_1-\gamma)t}}{\gamma-\alpha-i\omega_1}-\frac{e^{-\alpha t}-e^{-(i\omega_1+\gamma)t}}{\gamma-\alpha+i\omega_1}\right]\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-F_0}{2im\omega_1}\left[\frac{2i\omega_1e^{-\alpha t}-(\gamma-\alpha)e^{-\gamma t}(e^{i\omega_1 t}-e^{-i\omega_1 t})-i\omega_1e^{-\gamma t}(e^{i\omega_1 t}+e^{-i\omega_1 t})}{(\gamma-\alpha-i\omega_1)(\gamma-\alpha+i\omega_1)}\right]\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-F_0}{2im\omega_1}\,\frac{2i\omega_1e^{-\alpha t}-(\gamma-\alpha)e^{-\gamma t}2i\sin\omega_1 t-2i\omega_1e^{-\gamma t}\cos\omega_1 t}{(\gamma-\alpha)^2+\omega_1^2}\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-F_0}{m\omega_1}\,\frac{\omega_1e^{-\alpha t}-\omega_1e^{-\gamma t}\cos\omega_1 t-(\gamma-\alpha)e^{-\gamma t}\sin\omega_1 t}{(\gamma-\alpha)^2+\omega_1^2}$$

جواب کلی به صورت: $x=x_1+x_2$ است.

سؤالات کارشناسی ارشد

۱. ذره‌ای به جرم m در لحظه‌ی $t=0$ در حالت سکون در مبدأ مختصات قرار دارد. این ذره تحت تأثیر نیروی دافعه $F=kx^{-\frac{1}{2}}$ $(k>0)$ قرار دارد که x فاصله‌ی ذره از مبدأ مختصات است. زمان رسیدن ذره به نقطه‌ی $x=b$ چقدر است؟ (سراسری ـ ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{3}{4}}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{5}{4}}$ ۳) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{5}{4}}$ ۴) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{3}{4}}$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$F=kx^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow m\frac{dv}{dt}=kx^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow m\frac{dv}{dt}dx=kx^{-\frac{1}{2}}dx\Rightarrow mv\,dv=kx^{-\frac{1}{2}}dx\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2=2kx^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$v=2\sqrt{\frac{k}{m}}x^{\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=2\sqrt{\frac{k}{m}}x^{\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}\Big|_0^b=2\sqrt{\frac{k}{m}}t\Big|_0^t\Rightarrow\frac{2}{3}b^{\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{k}{m}}t\Rightarrow t=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{3}{4}}$$

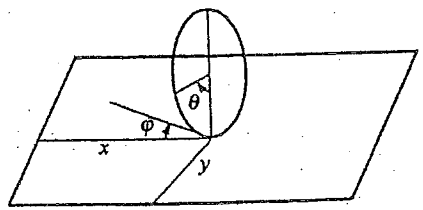
۲. قرصی به شعاع a روی میزی افقی می‌غلتد. فرض می‌کنیم که قرص نمی‌افتد و قطری که با میز در تماس است همیشه قائم است. اگر x و y نقطه‌ی تماس میز بر روی سطح و φ طرز قرارگیری صفحه‌ی قرص را نسبت به محور x و زاویه‌ی θ زاویه‌ی بین یک شعاع ثابت در قرص و امتداد قائم باشد، شرط آن که قرص بدون لغزیدن بغلتد، کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)

۱) $\dot{x}^2+\dot{y}^2=a^2\dot{\theta}^2$

۲) $\begin{cases}\dot{x}=a\dot{\theta}\cos\varphi\\ \dot{y}=a\dot{\theta}\sin\varphi\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\dot{x}\sin\varphi+\dot{y}\cos\varphi=0\\ \dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi=a\dot{\theta}\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\dot{x}\sin\varphi+\dot{y}\cos\varphi=0\\ \dot{x}\cos\varphi-\dot{y}\sin\varphi=a\dot{\theta}\end{cases}$



گزینه‌ی (۴) صحیح است.

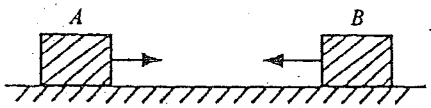
۳. سرعت ذره‌ای به جرم m در حرکت مستقیم‌الخط در راستای x مطابق معادله‌ی $\dot{x}=bx^{-3}$ تغییر می‌کند که در آن b ثابت مثبتی است. نیروی وارد بر این ذره کدام است؟ (سراسری ـ ۸۶)

۱) $\frac{-mb}{3x^2}$ ۲) $\frac{mb^2}{x^4}$ ۳) $\frac{-3mb^2}{x^7}$ ۴) $\frac{-3mb}{x^4}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$F=m\ddot{x}\Rightarrow F=m\frac{d}{dt}(bx^{-3})\Rightarrow F=-3mb\dot{x}x^{-4}\Rightarrow F=-3mb^2x^{-7}$$

۴. دو متحرک A و B روی یک خط مستقیم به سمت یکدیگر در حرکتند. تندی متحرک A، ۱۶ $\frac{m}{s}$ و تندی متحرک B، ۸ $\frac{m}{s}$ است. در لحظه‌ای که فاصله‌ی دو متحرک از هم ۴۵ m است هر دو ترمز می‌کنند. متحرک A با شتاب ثابت ۲ $\frac{m}{s^2}$ و متحرک B با شتاب ۴ $\frac{m}{s^2}$ ترمز می‌کنند پس از چند ثانیه از شروع به ترمز، دو متحرک به یکدیگر برخورد می‌کنند و تندی متحرک B در لحظه‌ی برخورد تقریباً کدام است؟ (سراسری ـ ۸۶)



۱) ۲/۸ s و صفر ۲) ۱۳/۲ s و صفر

۳) ۳ s و ۴ $\frac{m}{s}$ ۴) ۵ s و ۱۲ $\frac{m}{s}$

گزینه‌ی (هیچکدام) صحیح است.

در لحظه بهم رسیدن داریم

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t+x_0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\times(-2)t^2+16t=-\frac{1}{2}\times(-4)t^2+(-8)t+45\Rightarrow t^2-8t+15=0$$

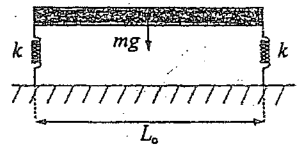
$$t=4\pm1\Rightarrow\begin{cases}t=5\ s\\ t=3\ s\end{cases}$$

از طرفی

$$v_B=a_Bt+v_{0B}\Rightarrow\begin{cases}v_B=-4\times5+8\\ v_B=-4\times3+8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_B=-12\ \frac{m}{s}\\ v_B=-4\ \frac{m}{s}\end{cases}$$

یعنی قطار B قبل از برخورد متوقف می‌شود.

۵. یک میله‌ی یکنواخت به طول L_0 و جرم m بطور افقی از دو انتها روی دو فنر کاملا مشابه سبک با ثابت فنر k قرار گرفته است (طبق شکل). طول هر فنر آزاد را l_0 بگیرید. هرگاه یک طرف میله را به پایین فشار داده و رها کنیم، معادله‌ی حرکت مرکز جرم میله کدام است؟ ($Y(t)$ فاصله‌ی مرکز جرم میله تا سطح افق در لحظه‌ی t و $b = l_0 - \frac{mg}{2k}$ است.)
(سراسری ـ ۸۶)



۱) $\ddot{Y} - \frac{2k}{m} Y = \frac{2k}{m} l_0$

۲) $\ddot{Y} + \frac{2k}{m} Y = \frac{2k}{m} b$

۳) $\ddot{Y} + \frac{2k}{m} Y = -g$

۴) $\ddot{Y} + \frac{2k}{m} Y = \frac{2k}{m} l_0$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$m\ddot{y} = -2k(y-l_0)-mg \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{2k}{m}y+\frac{2k}{m}l_0-g \Rightarrow \ddot{y}+\frac{2k}{m}y=\frac{2k}{m}\left[l_0-\frac{mg}{2k}\right]=\frac{2kb}{m}$$

۶. معادله‌ی حرکت یک نوسانگر کندمیرا به جرم m، $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $(\beta > 0)$ است. در حالتی که میرایی بسیار کوچک است یعنی $\beta << \omega_0$ و بیشینه‌ی دامنه در $t = 0$، x_0 است، میانگین (در مدت یک تناوب) اتلاف انرژی این نوسانگر تقریباً برابر است با:
(سراسری ـ ۸۶)

۱) صفر   ۲) $-m\omega_0^2\beta x_0^2$ ۳) $-2m\omega_0^2\beta x_0^2$ ۴) $\frac{1}{2}m\omega_0^2\beta x_0^2$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\Delta E = -\gamma m\omega_0^2 A^2 e^{\gamma t}T_d \Rightarrow \Delta E = -m\omega_0^2\beta x_0^2$$

۷. تغییرات سرعت ذره‌ای به جرم m برحسب فاصله، به‌صورت $v(x)=\alpha x^{-3}$ است. به فرض آن که در $t = 0$، $x_0 = v_0 = 0$ باشد معادله‌ی نیرو، $F(t)$، کدام است؟ α عدد ثابتی است.
(سراسری ـ ۸۷)

۱) $\frac{-3}{16}\frac{m}{t^2}(4\alpha t)^{\frac{1}{4}}$ ۲) $\frac{-3}{16}\frac{m}{t^2}(2\alpha t)^{\frac{1}{4}}$ ۳) $\frac{-1}{16}\frac{m}{t^2}(2\alpha t)^{\frac{1}{4}}$ ۴) $\frac{-1}{16}\frac{m}{t^2}(4\alpha t)^{\frac{1}{4}}$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$v=\alpha x^{-3} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\alpha x^{-3} \Rightarrow x^3dx=\alpha dt \Rightarrow \frac{1}{4}x^4=\alpha t \Rightarrow x=(4\alpha t)^{\frac{1}{4}}$$

$$v = \alpha x^{-3} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}(\alpha x^{-3}) \Rightarrow F = -3m\alpha x^{-4}\frac{dx}{dt} \Rightarrow F = -3m\alpha x^{-4}(\alpha x^{-3}) \Rightarrow$$

$$F=-3m\alpha^2x^{-7} \Rightarrow F=-3m\alpha^2x^{-8}x \Rightarrow F=-3m\alpha^2(4\alpha t)^{-2}(4\alpha t)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow F=-\frac{3m}{16t^2}(4\alpha t)^{\frac{1}{4}}$$

۸. در یک حرکت یک بعدی، ذره‌ای به جرم ۱۰ kg با سرعت اولیه $v_0 = 10\ \frac{m}{s}$ تحت تاثیر نیروی اصطکاک $F = -be^{av}$ متوقف می‌شود که v سرعت لحظه‌ای ذره، $a = 0/1\ \frac{s}{m}$ و $b = 10\ N$ است. پس از چند ثانیه ذره ساکن می‌شود؟ (سراسری ـ ۸۷)

۱) ۲۵/۲   ۲) ۳/۱۵   ۳) ۶/۳۰   ۴) ۱۲/۶

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$F=-be^{\alpha v} \Rightarrow m\frac{dv}{dt}=-be^{\alpha v} \Rightarrow e^{-\alpha v}dv=-\frac{b}{m}t \Rightarrow \int_{10}^{0} e^{-\alpha v}dv=\int_0^t -\frac{b}{m}dt \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha v}\Big|_{10}^{0}=-\frac{b}{m}t\Big|_0^t \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\left[1-\frac{1}{e}\right]=\frac{b}{m}t \Rightarrow t=\frac{m}{\alpha b}\left[1-\frac{1}{e}\right] \Rightarrow t=\frac{10}{0/1\times 10}\left[1-\frac{1}{e}\right] \Rightarrow t=6/3s$$

۹. نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم m و ثابت فنر k تحت تاثیر نیروی اصطکاک $F = -b\dot{x}$ قرار دارد. هامیلتونی این نوسانگر برابر است با: (سراسری ـ ۸۷)

۱) $H = \frac{P^2}{2m}\exp(\frac{bt}{m}) + \frac{kx^2}{2}\exp(\frac{bt}{m})$ ۲) $H = \frac{P^2}{2m}\exp(\frac{bt}{m}) + \frac{kx^2}{2}\exp(-\frac{bt}{m})$

۳) $H = \frac{P^2}{2m}\exp(-\frac{bt}{m}) + \frac{kx^2}{2}\exp(\frac{bt}{m})$ ۴) $H = \frac{P^2}{2m}\exp(-\frac{bt}{m}) + \frac{kx^2}{2}\exp(-\frac{bt}{m})$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۱۰. ذره‌ای با تندی v در صفحه‌ی xy روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع R و به مرکز مبدأ مختصات حرکت می‌کند. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد حرکت این ذره صحیح است؟ ((a_x,a_y)، (v_x,v_y) و (x,y) به ترتیب مولفه‌های شتاب، سرعت و مکان ذره در لحظه‌ی دلخواه t هستند.) (سراسری ـ ۸۷)

۱) $v^2=x\left[\frac{v_x a_y+v_y a_x}{v_y}\right]$ ۲) $v^2=x\left[\frac{v_x a_y-v_y a_x}{v_y}\right]$

۳) $v^2=y\left[\frac{v_x a_y+v_y a_x}{v_x}\right]$ ۴) $v^2=y\left[\frac{v_x a_y-v_y a_x}{v_x}\right]$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_x=-R\sin\theta\dot{\theta}\\ v_y=R\cos\theta\dot{\theta}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_x=-R\cos\theta\dot{\theta}^2-R\sin\theta\ddot{\theta}\\ a_y=-R\sin\theta\dot{\theta}^2+R\cos\theta\ddot{\theta}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_x=-v_y\dot{\theta}-R\sin\theta\ddot{\theta}\\ a_y=v_x\dot{\theta}+R\cos\theta\ddot{\theta}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_y a_x=-v_y^2\dot{\theta}-v_y R\sin\theta\ddot{\theta}\\ v_x a_y=v_x^2\dot{\theta}+v_x R\cos\theta\ddot{\theta}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}v_y a_x=-v_y^2\frac{v_y}{x}-(R\cos\theta\dot{\theta})R\sin\theta\ddot{\theta}\\ v_x a_y=v_x^2\frac{v_y}{x}+(-R\sin\theta\dot{\theta})R\cos\theta\ddot{\theta}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_y a_x=-v_y^2\frac{v_y}{x}-R^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\ddot{\theta}\\ v_x a_y=v_x^2\frac{v_y}{x}+R^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\ddot{\theta}\end{cases}\Rightarrow$$

$$v_x a_y-v_y a_x=v_x^2\frac{v_y}{x}+v_y^2\frac{v_y}{x}\Rightarrow v_x a_y-v_y a_x=(v_x^2+v_y^2)\frac{v_y}{x}\Rightarrow v^2=x\left[\frac{v_x a_y-v_y a_x}{v_y}\right]$$

۱۱. پرتابه‌ای از ارتفاعی بالاتر از سطح زمین در غیاب مقاومت هوا در لحظه‌ی $t=0$ با سرعت اولیه‌ی v_0 به‌صورت افقی (موازی سطح زمین) پرتاب می‌شود. شعاع انحنای مسیر در لحظه‌ی دلخواه t، قبل از برخورد به زمین چقدر است؟ (سراسری ـ ۸۸)

۱) $\frac{v_0^2}{g}$ ۲) $\frac{v_0^2+g^2t^2}{g}$ ۳) $\frac{(v_0^4+g^4t^4)^{\frac{1}{2}}}{g}$ ۴) $\frac{(v_0^2+g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g}$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$v_x=v_{0x}\Rightarrow v_x=v_0\cos0\Rightarrow v_x=v_0$$

$$v_y=gt+v_{0y}\Rightarrow v_y=gt+v_0\sin0\Rightarrow v_y=gt$$

طبق مسأله (۱ ـ ۲۷ از کتاب فولز) داریم

$$|\vec{v}\times\vec{g}|=\frac{v^3}{r}\Rightarrow r=\frac{(v_x^2+v_y^2)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g\sin90}\Rightarrow r=\frac{(v_0^2+g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g}$$

۱۲. ذره‌ای در یک صفحه‌ی افقی (مماس بر سطح زمین) در عرض جغرافیایی λ می‌تواند بدون اصطکاک، حرکت کند. به این ذره، سرعت اولیه‌ی v_0 نسبت به زمین در جهت شمال، داده می‌شود. اگر سرعت دوران زمین حول محورش ω باشد با صرفنظر از نیروی گریز از مرکز (در چارچوب متصل به زمین) شعاع انحنای مسیر حرکت ذره و زمان تناوب این حرکت کدام است؟ (سراسری ـ ۸۷)

۱) $\frac{v_0}{2\omega\cos\lambda}$ و $\frac{\pi}{\omega\cos\lambda}$ ۲) $\frac{v_0}{2\omega\sin\lambda}$ و $\frac{\pi}{\omega\sin\lambda}$

۳) $\frac{v_0}{\omega\cos\lambda}$ و $\frac{2\pi}{\omega\cos\lambda}$ ۴) $\frac{v_0}{\omega\sin\lambda}$ و $\frac{2\pi}{\omega\sin\lambda}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

چون حرکت دایره‌ای بوده و شعاع انحنای ذره حاصل نیروی کوریولیس می‌باشد، پس

$$2m\vec{\omega}\times\vec{r}=m\frac{v_0^2}{r}\Rightarrow 2\omega v_0\sin\lambda=\frac{v_0^2}{r}\Rightarrow r=\frac{v_0}{2\omega\sin\lambda}$$

از طرفی

$$v_0=r\omega'\Rightarrow v_0=\frac{v_0}{2\omega\sin\lambda}\times\frac{2\pi}{T'}\Rightarrow T'=\frac{\pi}{\omega\sin\lambda}$$

فصل ۳

حرکت دو یا سه بعدی

۱. معادلات زیر را با استفاده از تعاریف هندسی اعمال جبر برداری ثابت کنید. در بسیاری از حالات ترسیم نمودار کافی است. الف) معادله (۳ـ ۷)، ب) معادله (۳ـ ۱۷)، پ) معادله (۳ـ ۲۶)، ت) معادله (۳ـ ۷) و ث) معادله (۳ـ ۳۵). پپ

حل:

الف) $C(\vec{A}+\vec{B})=C\vec{A}+C\vec{B}$ (۳ ـ ۷)

یک تجانس با ضریب روی اضلاع مثلث شکل (۳ ـ ۳) انجام دهید و یا

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\left(\left|\vec{A}\right|^{2}+\left|\vec{B}\right|^{2}+2\vec{A}.\vec{B}\right)^{0.5}$$

$$C\left|C\vec{A}+C\vec{B}\right|=\left(\left|C\vec{A}\right|^{2}+\left|C\vec{B}\right|^{2}+2(C\vec{A}).(C\vec{B})\right)^{0.5}=$$

$$=\left(C^{2}\left|\vec{A}\right|^{2}+C^{2}\left|\vec{B}\right|^{2}+2C^{2}\vec{A}.\vec{B}\right)^{0.5}=|C|\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$$

این یعنی که اندازه بردار برآیند را $|c|$ برابر می‌کند و اگر c منفی باشد جهت هر سه بردار را نیز تغییر می‌دهد. البته $C\vec{A}.C\vec{B}=C^{2}\vec{A}.\vec{B}$ را در قسمت بعد نشان می‌دهیم.

ب) $(C\vec{A}).\vec{B}=\vec{A}.(C\vec{B})=C(\vec{A}.\vec{B})$ (۳ ـ ۱۷)

$$\vec{A}.\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned}(C\vec{A}).\vec{B}&=\left|C\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta=|C|\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta=C(\vec{A}.\vec{B})\\ \vec{A}.(C\vec{B})&=\left|\vec{A}\right|\left|C\vec{B}\right|\cos\theta=|C|\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta=C(\vec{A}.\vec{B})\end{aligned}\right\}c>0$$

$$\left.\begin{aligned}(\vec{CA}).\vec{B} &= |\vec{CA}|\,|\vec{B}|\cos(\pi-\theta) = -C|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos(\pi-\theta)\\ (\vec{CB}).\vec{A} &= |\vec{A}|\,|\vec{CB}|\cos(\pi-\theta) = -C|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos(\pi-\theta)\end{aligned}\right\} C<0$$

یعنی اگر یکی از بردارها ثابت باشد و بردار دیگری معکوس شود زاویه بین آنها از θ به $\pi - \theta$ می‌رسد که با توجه به اینکه $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ حاصل دو عبارت اخیر نیز $c(\vec{A}.\vec{B})$ می‌شود.

پ) $(\vec{CA})\times\vec{B} = \vec{A}\times(\vec{CB}) = C(\vec{A}\times\vec{B})$ (۳ ـ ۲۶)

$$|\vec{A}*\vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta$$

$$|(\vec{CA})*\vec{B}| = |\vec{CA}|\,|\vec{B}|\sin\theta = |C|\,|\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta = |C|\,|\vec{A}*\vec{B}|$$

$$|\vec{A}*(\vec{CB})| = |\vec{A}|\,|\vec{CB}|\sin\theta = |C|\,|\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta = |C|\,|\vec{A}*\vec{B}|$$

اگر حتی $c < 0$ نیز باشد به جای θ در عبارت اخیر $\pi - \theta$ باید قرار دهیم که چون $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$ فرقی نمی‌کند. نتیجه بالا نشان می‌دهد که اندازه بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ در نهایت $|C|$ برابر می‌شود و اگر c منفی باشد جهت بردار حاصلضرب طبق قانون دست راست عوض می‌شود. پس گزاره را اثبات کردیم.

ت) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{A}\times\vec{C})$ (۳ ـ ۲۷)

$$|\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C})|^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}+\vec{C}|^2 - (\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}))^2 =$$

$$= |\vec{A}|^2(|\vec{B}|^2 + |\vec{C}|^2 + 2\vec{B}.\vec{C}) - (\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C})^2 =$$

$$= |\vec{A}|^2(|\vec{B}|^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2 + |\vec{A}|^2|\vec{C}|^2 - (\vec{A}.\vec{C})^2$$

$$+ |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2 + |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}.\vec{C})^2$$

$$+2|\vec{A}|^2(\vec{B}.\vec{C}) - 2(\vec{A}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{C}) =$$

$$= |\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\times\vec{C}|^2 + 2\vec{A}.(\vec{A}(\vec{B}.\vec{C}) - \vec{B}(\vec{A}.\vec{C})) =$$

$$= |\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\times\vec{C}|^2 + 2\vec{A}.\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{C}) =$$

$$= |\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\times\vec{C}|^2 + 2(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{C}) =$$

$$= |(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{A}\times\vec{C})|^2$$

$$\vec{M}.(\vec{N}\times\vec{Q}) = \vec{M}\times\vec{N}.\vec{Q}$$

که از دو اتحاد استفاده کردیم

$$\vec{M}\times(\vec{N}\times\vec{Q}) = \vec{N}(\vec{M}.\vec{Q}) - \vec{Q}(\vec{M}.\vec{N})$$

که اولی را در مسئله ۴ و دومی را در قسمت بعد اثبات می‌کنیم.

ث) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$ (۳ ـ ۳۵)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ بر $\vec{A}$ عمود است و مؤلفه‌ای در راستای آن ندارد.

$(\alpha = 0)$

$$\vec{A}.(\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})) = 0 \Rightarrow \beta(\vec{A}.\vec{B}) = -\gamma(\vec{A}.\vec{C})$$

در حالت کلی

$\beta = \pm(\vec{A}.\vec{C})$ $\qquad$ $\gamma = \pm(\vec{A}.\vec{B})$

یکی از ضرایب را در یک حالت خاص صفر می‌کنیم که علامت‌ها را معلوم کنیم

$\vec{A}.\vec{B} = 0$ $\qquad$ $\vec{A}.\vec{C} \neq 0$ $\qquad$ $\vec{A}.\vec{C} > 0$ (زاویه بین $\vec{A}$ $\vec{c}$ کمتر از ۹۰)

این حالت مثلاً وقتی رخ می‌دهد که سه بردار هم‌صفحه باشند. (برای تصور بهتر) در این حالت بردار $\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}$ در امتداد $\vec{B}$ است و نه $-\vec{B}$ پس علایم بالایی درست است.

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

توجه کنید که اثبات‌ها از تعاریف هندسی (مستقل از دستگاه مختصات) بودند.

۲. معادله زیر را بر پایه تعریف جبری اعمال جبر برداری برحسب مؤلفه‌ها ثابت کنید:

الف) معادله (۳ـ ۸)، ب) معادله (۳ـ ۱۷)، پ) معادله (۳ـ ۲۷) و ت) معادله (۳ـ ۳۴) و ث) معادله (۳ـ ۳۵)

حل:

الف) $(c+d)\vec{A}=c\vec{A}+d\vec{A}$ (۳ـ ۸)

$$\vec{A}=\sum_{i=1}^{3}A_i\hat{e}_i \qquad (c+d)\sum_{i=1}^{3}A_i\hat{e}_i=\sum_{i=1}^{3}(c+d)A_i\hat{e}_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(cA_i+dA_i)\hat{e}_i=c\sum_{i=1}^{3}A_i\hat{e}_i+d\sum_{i=1}^{3}A_i\hat{e}_i=c\vec{A}+d\vec{A}$$

ب) $(c\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(c\vec{B})=c\vec{A}\cdot\vec{B}$ (۳ـ ۱۷)

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i$$

$$(c\vec{A})\cdot\vec{B}=\sum_{i=1}^{3}(cA_i)\cdot B_i=\sum_{i=1}^{3}A_i\cdot(cB_i)=c\sum A_iB_i=c\vec{A}\cdot\vec{B}$$

پ) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ (۳ـ ۲۷)

$$(\vec{M}\times\vec{N})_q=\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\varepsilon_{k\ell q}M_kN_\ell$$

$$[\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})]_q=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{k\ell q}A_k(B+c)_\ell=$$

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\varepsilon_{k\ell q}A_q(B+C)_\ell=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\varepsilon_{k\ell q}A_kB_\ell+\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\varepsilon_{k\ell q}A_kc_{۴۹}=$$

$$=(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{A}\times\vec{C})$$

ت) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ (۳ـ ۳۴)

$$\vec{A}\times\vec{B}=\sum_{q}^{3}\sum_{k}^{3}\sum_{\ell}^{3}A_kB_\ell\cdot\varepsilon_{k\ell q}\hat{e}_q$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=\sum_{q}^{3}\sum_{k}^{3}\sum_{\ell}^{3}A_kB_\ell c_q\cdot\varepsilon_{k\ell q}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\sum_{n=1}^{3}\sum_{p=1}^{3}\sum_{t=1}^{3}B_qc_t\cdot\varepsilon_{qtn}A_n$$

با مقایسه $A_kB_\ell c_q\varepsilon_{k\ell q}$ و $B_qc_tA_n\varepsilon_{qtn}$ می‌بینیم که اندیس‌های مربوط به A و B و C در نماد Levi - Chevita بطور منظم جابجا شده‌اند پس جملات با هم برابرند ⇐

$$\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

ث) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ (۳ـ ۳۵)

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_m=\sum_b\sum_s A_b(\vec{B}*\vec{C})_s\varepsilon_{bsm}$$

$$(\vec{B}\times\vec{C})_s=\sum_f\sum_g B_f\varepsilon_{fgs}c_g$$

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_m=\sum_b\sum_s\sum_f\sum_g A_bB_fc_g\varepsilon_{bsm}\varepsilon_{fgs}$$

$$\varepsilon_{mbs}\,\varepsilon_{fgs}=\varepsilon_{bms}\,\varepsilon_{fgs}=\delta_{bg}\,\delta_{fm}-\delta_{gm}\,\delta_{bf}$$

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_m=\sum_b\sum_s\sum_f\sum_g A_bB_fc_j(\delta_{bg}\delta_{fm}-\delta_{gm}\delta_{bf})=$$

$$A(r)=\sum_h A(h)\delta_{hr}$$

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_m=B_m\sum_b A_bc_b-c_m\sum_f A_fc_f$$

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_m=B_m(\vec{A}\cdot\vec{C})-C_m(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$m=۱, ۲, ۳$

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_m=\sum_{m=1}^{3}(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))_m\hat{e}_m=$$

$$=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

۳. با استفاده از معادله (۳ـ ۱۰) برای نمایش بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و با استفاده از معادلات (۳ـ ۲۵) تا (۳ـ ۳۱)، معادله (۳ـ۳۲) را مستقیماً محاسبه کنید.

حل:

(۳ـ ۲۵) $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

(۳ـ ۲۶) $(c\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(c\vec{B})=c\vec{A}\times\vec{B}$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{A}\times\vec{C}) \qquad (۲۷-۳)$$

$$\vec{A}\times\vec{A}=۰ \qquad (۲۸-۳)$$

$$\vec{A}\parallel\vec{B}\Rightarrow\vec{A}\times\vec{B}=۰ \qquad (۲۹-۳)$$

$$\vec{A}\perp\vec{B}\Rightarrow\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \qquad (۳۰-۳)$$

$$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z} \qquad \hat{y}\times\hat{z}=\hat{x} \qquad \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y} \qquad (۳۱-۳)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})=$$

$$=A_xB_x(\hat{x}\times\hat{x})+A_xB_y(\hat{x}\times\hat{y})+A_xB_z(\hat{x}\times\hat{z})+$$

$$+A_yB_x(\hat{y}\times\hat{x})+A_yB_y(\hat{y}\times\hat{y})+A_yB_z(\hat{y}\times\hat{z})+$$

$$+A_zB_x(\hat{z}\times\hat{x})+A_zB_y(\hat{z}\times\hat{y})+A_zB_z(\hat{z}\times\hat{z})=$$

$$=(A_xB_y-A_yB_x)(\hat{x}\times\hat{y})+$$

$$+(A_zB_x-A_xB_z)(\hat{z}\times\hat{z})+(A_yB_z-A_zB_y)(\hat{y}\times\hat{z})=$$

$$=(A_xB_y-A_yB_x)\hat{z}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{y}+(A_yB_z-A_zB_y)\hat{x}$$

۴. ثابت کنید که $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ حجم متوازی‌السطوحی است که یال‌های آن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ هستند و بسته به آنکه پیچ راستگردی وقتی از $\vec{A}$ به سمت $\vec{B}$ دوران می‌کند، در امتداد $\vec{C}$ در جهت مثبت یا منفی پیشروی کند، علامت حجم مثبت یا منفی است. $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ سه بردار دلخواه‌اند که در یک صفحه قرار نگرفته باشند. ب) با استفاده از این نتیجه معادله (۳-۳۴) را از طریق هندسی، اثبات کنید. تحقیق کنید که طرف راست و چپ معادله (۳-۳۴) از حیث علامت و اندازه با هم مساویند.

حل:

$V \equiv$ حجم متوازی السطوح $= h \times a$

$h \equiv$ ارتفاع $\qquad a \equiv$ مساحت قاعده

اگر دو یال قاعده $\vec{B}$ و $\vec{C}$ باشند

$$a=\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|$$

مقدار h(ارتفاع) همان اندازه تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $B \times c$ است.

$$h=\left|proj_{\vec{B}\times\vec{C}}\vec{A}\right|=\frac{\left|\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\right|}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|}\left|\vec{A}\right|=\frac{۱}{\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|}\left|\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\right|$$

$$V=\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|\times\frac{\left|\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\right|}{\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|}=\left|\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\right|$$

اگر قاعده‌های شامل یال‌های $\vec{B}$ و $\vec{A}$ یا $\vec{C}$ و $\vec{A}$ را نیز درنظر بگیریم

$$V=\left|\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\right|=\left|\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})\right|=\left|\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})\right|$$

با قراردادن در حات خاص $\qquad \vec{C}=\hat{k} \qquad \vec{B}=\hat{j} \qquad \vec{A}=\hat{i}$

$$\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})=\hat{i}\times\hat{i}=+۱=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\hat{j}.(\hat{k}\times\hat{i})=\hat{j}.\hat{j}=+۱=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})=\hat{k}\times\hat{k}=+۱=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$$

پس در حالت کلی

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$$

و یا به عبارتی در مثال خاص اخیر

$$\hat{x}_i\times\hat{x}_k=\hat{x}_k\varepsilon_{ijk}$$

$$\hat{x}_k(\hat{x}_i\times\hat{x}_j)=\varepsilon_{ijk}$$

اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ سه بردار باشند که زاویه‌ای بین دو به دوی آنها لزوماً ۹۰ درجه نباشد و داشته باشیم

$$H=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$$

پس با قرار دادن $\vec{A}=\vec{A}_۱$ و $\vec{B}=\vec{A}_۲$ و $\vec{C}=\vec{A}_۳$

$$\vec{A}_i.(\vec{A}_j\times\vec{A}_k)=\varepsilon_{ijk}\times H \qquad (\varepsilon_{ijk}=\text{Levi - chevita})$$

مثلاً اگر ۲ = i، ۱ = j، ۳ = k

$$\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})=\varepsilon_{213}\times V=-H=-\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$$

۵. نامساوی‌های زیر را اثبات کنید. هریک از حالات زیر را با روش هندسی و جبری برحسب مؤلفه‌ها اثبات کنید.

حل:

الف) $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|$

ب) $\vec{A}.\vec{B} \le \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right|$

پ) $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right|$

الف)

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2 \ \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 + 2\vec{A}.\vec{B}$$

$$\left(\left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|\right)^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 + 2\left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right|$$

$$\left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \ge \vec{A}.\vec{B} \Rightarrow \left(\left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|\right)^2 \ge \left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2$$

$$\Rightarrow \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right| \ge \left|\vec{A}+\vec{B}\right|$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2 = (A_x+B_x)^2+(A_y+B_y)^2+(A_z+B_z)^2 =$$

$$= (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) + (B^2_x + B_y^2 + B_z^2) + 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

$$\left(\left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|\right)^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) + (B^2_x + B_y^2 + B_z^2) +$$

$$+ 2(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{0/5} + (B^2_x + B_y^2 + B_z^2)^{0/5} +$$

از استدلال بازگشتی استفاده می‌کنیم

$$(\vec{A}+\vec{B}) \le \left(\left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{0/5} + (B^2_x + B_y^2 + B_z^2)^{0/5} \ge (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

$$(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B^2_x + B_y^2 + B_z^2) \ge A_x^2B_x^2 + A_y^2B_y^2 + A_z^2B_z^2 +$$

$$2A_xA_yB_xB_y + 2A_xA_zB_xB_z + 2A_yA_zB_yB_z$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A_x^2B_y^2 + A_x^2B_z^2 + A_y^2B_x^2 + A_y^2B_z^2 + A_z^2B_x^2 + A_z^2B_y^2 \ge 2A_xA_yB_xB_y$$

$$+2A_xA_zB_xB_z + 2A_yA_zB_yB_z \quad \Leftrightarrow$$

$$(A_xB_y - B_xA_y)^2 + (A_xB_z - A_zB_x)^2 + (A_yB_z - A_zB_y)^2 \ge 0$$

این در واقع اثبات مؤلفه‌ای $\vec{A}.\vec{B} \le \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right|$ نیز است.

ب)

$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \text{Cos}\theta$$

$$\text{Cos}\theta \le 1 \Rightarrow \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \text{Cos}\theta \le \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \quad \Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B} \le \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right|$$

اثبات مؤلفه‌ای نیز در قسمت الف انجام شد.

ج)

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \text{Sin}\theta$$

$$\text{Sin}\theta \le 1 \Rightarrow \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right|$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z-A_zB_y, A_zB_x-A_xB_z, A_xB_y-A_yB_x)$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^2 = (A_yB_z-A_zB_y)^2 + (A_zB_x-A_xB_z)^2 + (A_xB_y-A_yB_x)^2$$

$$= (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_xB_x + B_yA_y + A_zB_z)^2$$

این را در قسمت الف انجام دادیم (پاراگراف آخر)

۶. الف) برای اندازه حاصل جمع سه نیروی $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ فرمولی مانند معادله (۳ـ۴۰) برحسب $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ و زوایای θ_{12}، θ_{23} و θ_{21} بین هر جفت نیرو به‌دست آورید. [از پیشنهادهایی که بعد از معادله (۳ـ ۴۰) داده شده است، استفاده کنید]

ب) معادله‌ای به همان کیفیت برای زاویه α_1 بین نیروی کل و نیروی مؤلفه‌ای $\vec{F}_1$ به‌دست آورید.

حل:

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$$

$$\vec{F}\cdot\vec{F}=(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3)\cdot(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3)=$$

$$=\vec{F}_1\cdot\vec{F}_1+\vec{F}_2\cdot\vec{F}_2+\vec{F}_3\cdot\vec{F}_3+2\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2+2\vec{F}_1\cdot\vec{F}_3+2\vec{F}_2\cdot\vec{F}_3=$$

$$= F_1^2+F_2^2+F_3^2+2(F_1F_2\cos\theta_{12}+F_2F_3\cos\theta_{23}+F_3F_1\cos\theta_{31})$$

$$\theta_{ij}\angle(\vec{F}_i,\vec{F}_j)$$

$$\alpha_{ij}\angle(\vec{F},\vec{F}_k)\Rightarrow \cos\alpha_k=\frac{\vec{F}\cdot\vec{F}_k}{FF_k}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{F}=\vec{F}\cdot\vec{F}_1+\vec{F}\cdot\vec{F}_2+\vec{F}\cdot\vec{F}_3\Rightarrow$$

$$F^2 = FF_1\cos\alpha_1 + FF_2\cos\alpha_2 + FF_3\cos\alpha_3$$

$$F = F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 + F_3\cos\alpha_3$$

۷. با استفاده از تعریف (۳ـ ۵۲) مشتق‌گیری برداری معادلات (۳ـ ۵۴) و (۳ـ ۵۵) را ثابت کنید.

حل:

$$(3-52)\quad \frac{d\vec{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$$

$$(3-54)\quad \frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$(3-55)\quad \frac{d}{dt}(f\vec{A})=\frac{df}{dt}\vec{A}+f\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)\vec{B}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)-\vec{B}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{B}(t+\Delta t)-\vec{B}(t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}\qquad (3-54)$$

$$\frac{d}{dt}(f\vec{A})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)A(t+\Delta t)-f(t)\vec{A}(t)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t)\left[\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)\right]+\vec{A}(t+\Delta t)\left[f(t+\Delta t)\right]-f(t)}{\Delta t}=$$

$$=f(t)\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\vec{A}(t+\Delta t)\times$$

$$\times\lim_{\Delta t\to=0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f(t)\times\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{A}(t)\frac{df}{dt}$$

۹. انتگرال تابع برداری $\vec{A}(t)$ نسبت به شماروازهٔ t:

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{A}(t)dt$$

بطور مناسبی همانند معادلات (۳ـ ۵۲) و (۳ـ ۵۳) تعریف کنید دستگاه معادلاتی را همانند معادلات (۳ـ ۵۴) تا (۳ـ ۵۷)، طوری بنویسید که مبین خواص جبری باشد که برای این انتگرال انتظار داشتید. ثابت کنید که براساس هریک از دو تعریف جبری و هندسی، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t\vec{A}(u)du\right)=\vec{A}(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{A}(t)dt=\hat{i}\int_{t_1}^{t_2}A_x(t)dt+\hat{j}\int_{t_1}^{t_2}A_y(t)dt+\hat{k}\int_{t_1}^{t_2}A_z(t)dt$$

حل:

مشابه (۳ـ۵۳): (تعریف مختصاتی)

$$\frac{d}{dt}\int_0^t\vec{A}(t)dt=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N+1}\vec{A}(t_k)\Delta t\qquad \Delta t=\frac{t_2-t_1}{N}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t\vec{A}(t)dt=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{t_2-t_1}{N}\right)\sum_{k=1}^{N+1}\vec{A}\left[t_1+\frac{k-1}{N}(t_2-t_1)\right]\qquad t_{N+1}\equiv t_2$$

مشابه (۳ـ۵۲) (تعریف هندسی)

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{A}+\vec{B})dt=\int_{t_1}^{t_2}\vec{A}dt+\int_{t_1}^{t_2}\vec{B}dt$$

مشابه (۳ـ۵۴)

$$\int_{t_1}^{t_2} f\vec{A}(t)dt=\left[f(t)\int_{0}^{t}\vec{A}(u)du\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\vec{A}(u)du\frac{df}{st}dt$$

مشابه (۳ـ۵۵)

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{A}.\vec{B})dt=\left[\vec{A}(t).\int_{0}^{t}\vec{B}(u)du\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{0}^{t}\vec{B}(u)du\right].\frac{d\vec{A}}{dt}dt$$

مشابه (۳ـ۵۶)

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{A}\times\vec{B})dt=\left[\vec{A}(t)\times\int_{0}^{t}\vec{B}(u)du\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{0}^{t}\vec{B}(u)du\right].\frac{d\vec{A}}{dt}dt$$

مشابه (۳ـ۵۷)

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{0}^{t}\vec{A}(u)du\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{0}^{t+\Delta t}\vec{A}(u)du-\int_{0}^{t}\vec{A}(u)du\right]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big[\lim_{N\to\infty}\left(\frac{t+\Delta t}{N}\right)\sum_{k=1}^{N+1}\vec{A}\left[\frac{k-1}{N}(t+\Delta t)\right]-$$

$$-\lim_{N\to\infty}\left(\frac{t}{N}\right)\sum_{k=1}^{N+1}\vec{A}\left[\frac{k-1}{N}t\right]\Big]$$

ولی با نگاه دیگری به مسئله:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{0}^{t}\vec{A}(u)du\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\vec{A}(u)du\right)=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t^{-1}\left[\lim_{N\to\infty}\frac{\Delta t}{N}\sum_{k=1}^{N+1}\vec{A}\left(t+\frac{k-1}{N}\Delta t\right)\right]=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta t}\right)*\sum_{k=1}^{N+1}\lim_{\Delta t\to 0}\vec{A}\left(t+\frac{k-1}{N}\Delta t\right)\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N+1}\vec{A}(t)=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1-1}{N}\vec{A}(t)=\vec{A}(t)$$

توجه کنید که t و Δt و N به کلی از هم مستقلند و ترتیب حدگیری نسبت به N یا Δt می‌تواند بهم بخورد،

اثباتی که انجام شد مستقل از دستگاه مختصات بود و به هندسی ربط داشت (اثبات هندسی)

اثبات مختصاتی:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{0}^{t}\vec{A}(u)du\right)=\sum_{p=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\int_{0}^{t}A_p(u)du\times\hat{e}_p=?\right.$$

اگر دستگاه مختصات ما طوری باشد که $\hat{e}_p$ ها از t مستقل باشند (دکارتی)

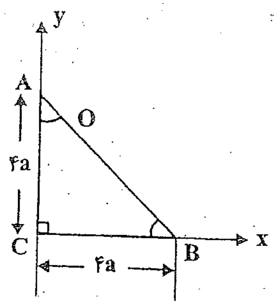
$$?=\sum_{p=1}^{3}\hat{e}_p\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}A_p(u)du=\sum_{p=1}^{3}\hat{e}_pA_p(t)$$

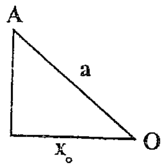
اثبات $\frac{d}{dt}\left[\int_{0}^{t}A_p(u)du\right]=A_p(t)$ قبلاً برای $\vec{A}$ انجام شده است.

۱۰. وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $(\hat{A}=\hat{B}=45^\circ)$ $4a$ طول دارد. ذره‌ای تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که آن را به طرف نقطه O واقع بر روی وتر به فاصله a از رأس A، جذب می‌کند. قدرمطلق این نیرو متناسب است با k/r^2 که r فاصله ذره از نقطه O است. مطلوبست محاسبه کار انجام شده به‌وسیله نیرو، وقتی ذره از A به C و از C به B در امتداد دو ساق مثلث حرکت می‌کند. محاسبات خود را به‌وسیله دو روشی که بر پایه دو معادله (۳ـ ۶۱) و (۳ـ ۶۳) نهاده شده است، انجام دهید.

حل:

در دستگاه مختصات مفروض مختصات ۴ نقطه را بیان می‌کنیم





$(0,0)$ $A(4a,0)$ $B(0,4a)$ $O(?,?)$

$$\begin{cases} x_0\, a\cos 45^\circ=\frac{a}{\sqrt{2}} \\ y_0=4a-a\sin(45^\circ)=a\left(4-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$$O\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}(4\sqrt{2}-1)\right)$$

$$w=\int\vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}\qquad d\vec{r}=dx\hat{x}+dy\hat{y}$$

این معادله علاوه بر تناسب یادشده، جهت را نیز ارضا می‌کند

$$\vec{F}(\vec{r})=k\frac{\vec{r}-\vec{r}_\circ}{|\vec{r}-\vec{r}_\circ|^3}$$

$$w=k\int_c\frac{\vec{r}-\vec{r}_\circ}{|\vec{r}-\vec{r}_\circ|^3}.d\vec{r}$$

برای محاسبه $w(A\to c)$:

C منحنی انتگرال‌گیری: $C:\ x=0\quad \&\quad y=t\quad t=4a\to 0$

t: پارامتر منحنی C

$$d\vec{r}=0\times\hat{x}+dy\hat{y}=dt\hat{y}$$

$$w=k\int_{4a}^{0}\frac{(y-y_\circ)}{((y-y_\circ)^2+\frac{a^2}{2})^{0.5}}dy=-k\int_{0}^{4a}\frac{(t-y_\circ)dt}{(\frac{a^2}{2}+(t-y_\circ)^2)^{1.5}}$$

$$=+k((\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2})^{-0.5}-(\frac{a^2}{2}+(4a-\frac{a}{\sqrt{2}})^2)^{-0.5})=$$

$$=\frac{k}{a}(1-(17-4\sqrt{2})^{-0.5})=w(a\to c)$$

برای محاسبه $w(c\to B)$:

$C:\ y=0\quad \&\quad y=t\quad t=0\to 4a$

t: پارامتر منحنی C

$$d\vec{r}=dx\hat{x}+0\hat{y}=dt\hat{x}$$

$$w=k\int_{0}^{4a}\frac{(x-x_\circ)}{((x-x_\circ)^2+y_\circ^2)^{1.5}}dx=k\int_{0}^{4a}\frac{(t-x_\circ)dt}{((t-x_\circ)^2+y_\circ^2)^{1.5}}$$

$$=-k((4a-\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(4a-\frac{a}{\sqrt{2}})^2)^{-0.5}-(\frac{a^2}{2}+(4a-\frac{a}{\sqrt{2}})^2)^{-0.5})$$

$$=\frac{-k}{a}((33-8\sqrt{2})^{-0.5}-(17-4\sqrt{2})^{-0.5})=w(c\to B)$$

که با محاسبات بالا طبق رهیافت معادله (۳ـ۶۳) می‌باشد.

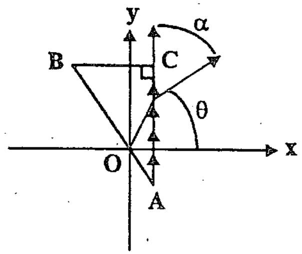
در رهیافت (۳ـ۶۱)

$$\vec{F}.d\vec{r}=FdrCos\theta\qquad \theta=\angle(\vec{F},d\vec{r})$$

$$w=\int_c\vec{F}.d\vec{r}=\int_c FCos\alpha ds\qquad \alpha=\angle(\vec{F},d\vec{r})$$

به مختصات قطبی می‌رویم. (چرخاندن مثلث تأثیری ندارد)

در محاسبه کار انجام شده از A به c:



$$C: x=rCos\theta=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

پس

$$r(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}Sec\theta$$

$$\begin{cases}F(\theta)=\frac{k}{r^2}=\frac{2k}{a^2}Cos^2\theta\\ ds=dy=d(rSin\theta)=d(\frac{a}{\sqrt{2}}\tan\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{d\theta}{Cos^2\theta}=|d\vec{r}|\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta\Rightarrow Cos\alpha=Sin\theta$$

$$w=\frac{\sqrt{2}k}{a}\int_{\theta_A}^{\theta_c}Sin\theta d\theta=\frac{k}{a}(1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(4\sqrt{2}-1)^2)^{-0.5})$$

$$\theta_A=-\frac{\pi}{4}\qquad \theta_c=\tan^{-1}(4\sqrt{2}-1)$$

$$w(c\to B)=?\qquad c: y=rSin\theta=4a-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$r(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}(4\sqrt{2}-1)csc\theta$$

$$d\vec{r}=dx\hat{x}$$

$$F(\theta)=\frac{2k}{a^2}(4\sqrt{2}-1)^{-2}Sin^2\theta\qquad \alpha=\pi-\theta$$

$$ds=|dx|=|d(r\cos\theta)|=\frac{+a}{\sqrt{2}}(4\sqrt{2}-1)\frac{d\theta}{\sin^2\theta}=|d\vec{r}|$$

$$w=\frac{-\sqrt{2}h}{a}(4\sqrt{2}-1)^{-1}\int_{\theta_c}^{\theta_B}\cos\theta d\theta$$

$$\theta_B=\frac{3\pi}{4} \qquad \theta_c=\tan^{-1}(4\sqrt{2}-1$$

$$w=\frac{-k}{a}(4-\frac{1}{\sqrt{2}})^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{(4\sqrt{2}-1)}{(17-4\sqrt{2})^{0/5}}\times\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$w=\frac{-k}{a}((33-8\sqrt{2})^{-0/5}-(17-4\sqrt{2})^{-0/5})$$

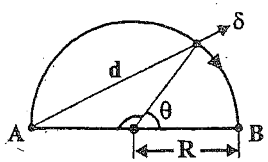
۱۱. ذره‌ای در نیم‌دایره‌ای به شعاع R از یک انتهای A، از وتر به انتهای دیگر B حرکت می‌کند. ذره توسط نیرویی متناسب با فاصله‌اش از A به سمت نقطه شروع A جذب می‌شود. وقتی ذره در نقطه B است، نیروی به سمت A برابر F_0 است. کار انجام شده در مقابل این نیرو را وقتی ذره دور نیم‌دایره از A به B می‌رود حساب کنید.

حل:

$$d^2=R^2+R^2-2R^2\cos(\pi-\theta)$$

$$d=R(1+\cos\theta)=2R\cos(\frac{\theta}{2})$$

$$|\vec{F}|=kd=2kR\cos(\theta/2)$$



$\vec{F}$ در جهت یکه دلخواه $\hat{\delta}$

$\vec{dr}$ در جهت یکه دلخواه $\hat{\theta}$ (در جهت افزایش θ)

$$\vec{dr}=Rd\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{F}\,2kR\cos(\theta/2)\hat{\delta} \qquad |\vec{F}|_{\theta=0}=2kR=F_0$$

$$\Rightarrow k=(F_0/2R)$$

$$\vec{F}=F_0\cos(\theta/2)\hat{\delta}\Rightarrow \vec{F}.\vec{dr}=F_0R\cos(\theta/2)d\theta(\hat{\theta}.\hat{\delta})$$

$$\hat{\theta}\hat{\delta}=?$$

$$\hat{\theta}\hat{\delta}=\cos(\pi-(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}))=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2})=-\sin(\frac{\theta}{2})$$

$$\vec{F}.\vec{dr}=-F_0R\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)d\theta$$

$$w=\int_{\pi}^{0}\vec{F}.\vec{dr}=+2F_0R\left[\frac{1}{2}\cos^2(\frac{\theta}{2})\right]_{\pi}^{0}$$

$$w(A\rightarrow B)=\frac{2F_0R}{2}(1-0)=2F_0R/2=F_0R$$

۱۲. ذره‌ای تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که مؤلفه‌هایش عبارتند از:

$$F_x(x,y,z)=ax^3+bxy^2+cz$$

$$F_y(x,y,z)=ay^3+bx^2y$$

$$F_z(x,y,z)=cx$$

کار انجام شده به‌وسیله این نیرو را وقتی ذره در امتداد یک خط مستقیم از مبدأ به نقطه (x_0,y_0,z_0) می‌رود، حساب کنید.

حل:

$$w=\int\vec{F}.\vec{dr}=(\hat{x})^2\int f_x dx+(\hat{y})^2\int f_y dy+(\hat{z})^2\int f_z dz$$

$$=\int f_x dx+\int f_y dy+\int f_z dz$$

$$w=\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{1}{2}x^2y^2+cxz+f_x(y,z)\right]_{\vec{O}}^{\vec{r}_0}+\left[\frac{1}{4}ay^4+\frac{1}{2}bx^2y^2+f_y(x,z)\right]_{\vec{O}}^{\vec{r}_0}+$$

$$+(cxz+f_z(x,y))_{\vec{O}}^{\vec{r}_0}\Rightarrow$$

اشکالی که وجود دارد توابع f_x، f_y، f_z (یعنی ثابت‌های انتگرال‌گیری) مجهولند.

راه دیگر آن است که طبق خواسته مسئله از طریق منحنی از $\vec{O}$ به $\vec{r}_0$ برسیم معادله پارامتری خط واصل $\vec{O}$ به $\vec{r}_0$: (پارامتر r) $0<r<r_0$

اگر $\alpha=\angle(\vec{r}_0,\hat{x}) \quad \beta=\angle(\vec{r}_0,\hat{y}) \quad \gamma=\angle(\vec{r}_0,\hat{z})$

$$x(r)=r\cos\alpha \qquad y(r)=r\cos\beta \qquad z(r)=r\cos\gamma$$

$$F_x(r)=(a\cos^3\alpha+b\cos\alpha\cos^2\beta)r^3+c\cos\gamma r$$

$$F_y(r)=(a\cos^3\beta+b\cos\beta\cos^2\alpha)r^3$$

$$\Phi_z(r)=c\cos\alpha r$$

$$dx=\cos\alpha dr \qquad dy=\cos\beta dr \qquad dz=\cos\gamma dr$$

$$w=\int_0^{r_0} F_x\,dx+\int_0^{r_0} F_y\,dy+\int_0^{r_0} F_z\,dz$$

$$w = (a\cos^4\alpha + b\cos^2\alpha\cos^2\beta)\left(\frac{r_0^4}{4}\right) + c\cos\gamma\cos\alpha\left(\frac{r_0^2}{2}\right) +$$
$$+ (a\cos^4\beta + b\cos^2\alpha\cos^2\beta)\left(\frac{r_0^4}{4}\right) +$$
$$+ c\cos\alpha\cos\gamma\left(\frac{r_0^2}{2}\right)$$

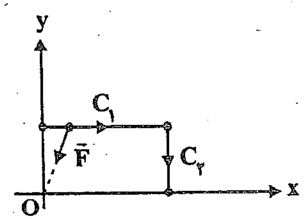
$$\cos\alpha = x_0/r_0 \quad \cos\beta = y_0/r_0 \quad \cos\gamma = z_0/r_0$$

$$w = \frac{1}{4}a(x_0^4 + y_0^4) + \frac{1}{2}bx_0^2y_0^2 + cx_0z_0$$

۱۳. الف) ذره‌ای در صفحه xy به‌وسیله نیروی $F = k/y$ (متناسب با عکس فاصله ذره تا محور x) به طرف مبدأ جذب می‌شود. مطلوبست محاسبه کار انجام شده به‌وسیله نیرو، وقتی که ذره، از نقطه $y = a$ و $x = a$ به نقطه $y = 0$ و $x = 2a$ در امتداد مسیری حرکت می‌کند که از دو ضلع مربع مستطیلی تشکیل شده است که یکی پاره‌خطی است موازی محور x از نقطه $x = 0$ و $y = a$ دیگری پاره‌خطی قائم از نقطه $x = 2a$ و $y = a$ تا محور x. ب) مطلوبست محاسبه کار انجام شده به‌وسیله همین نیرو وقتی که ذره در امتداد یک بیضی به اقطار a و $2a$ حرکت می‌کند [راهنمایی: از تغییر متغیر $y = 2a\cos\theta$، $y = a\sin\theta$ استفاده کنید.]

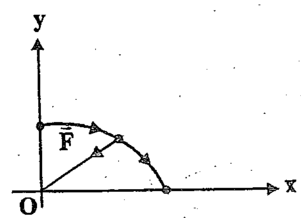
حل:

$$\vec{F}=\frac{-k}{y}\vec{r}=\frac{-k}{y}\,\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



$$\begin{cases} c_1: y=a \quad 0<x<2a \quad \vec{dr}=dx\hat{x} \\ c_2: x=2a \quad 0<y<a \quad \vec{dr}=dy\hat{y} \end{cases}$$

$$w=\int_{c_1}\vec{F}.\vec{dr}+\int_{c_2}\vec{F}.\vec{dr}$$



$$w=\frac{-k}{a}\int_0^{2a}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}-k\int_a\frac{dy}{\sqrt{y^2+4a^2}}$$

$$w=\frac{-k}{a}\left(\sqrt{5a^2}-\sqrt{a^2}\right)+k\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$w=-k\left(\sqrt{5}-1-\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$r(\theta)=(x^2+y^2)^{0.5}=a(1+3\cos^2\theta)^{0.5}$$

$$\begin{cases} \vec{F}(r,\theta)=\frac{-k}{r\sin\theta}\hat{r} \\ \vec{dr}=dr\hat{r}+rd\theta\hat{\theta} \qquad \hat{r}.\hat{\theta}=0 \end{cases}$$

$$dr = a\frac{-3\cos\theta\sin\theta}{(1+3\cos^2\theta)^{0.5}}d\theta$$

$$\vec{F}.\vec{dr}=\frac{-kdr}{r\sin\theta}=k\frac{3\cos\theta\sin\theta}{(1+3\cos^2\theta)}\,\frac{1}{\sin\theta}$$

در واقع θ را پارامتر منحنی در انتگرال‌گیری انتخاب کردیم می‌توانستیم r را انتخاب کنیم

$$w=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\vec{F}.\vec{dr}=+k\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{3\cos\theta d\theta}{(4-3\sin^2\theta)}=-3k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{4-3u^2}$$

$$w=\frac{-3k}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{1-\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right)^2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dv}{1-v^2}$$

$$V=\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

$$w=-\frac{\sqrt{3}}{2}k\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{2}k\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

۱۴. مطلوبست مؤلفه‌های r و θ برای $\frac{d\vec{a}}{dt}$ در مختصات قطبی صفحه‌ای، وقتی $\vec{a}$ شتاب‌زده است.

حل:

$$\vec{r}=r\hat{r} \qquad (\hat{r})^{\cdot}=\dot{\theta}\hat{\theta} \quad \& \quad (\hat{\theta})^{\cdot}=-\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\vec{v}=\frac{\vec{dr}}{dt}=\dot{r}\hat{r}+r\frac{\vec{dr}}{dt}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec a=\frac{d\vec V}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot r\hat r+r\dot\theta\hat\theta)=\ddot r\hat r+\dot r\dot{\hat\theta}+\dot r\dot\theta\hat\theta+r\ddot\theta\hat\theta+$$

$$+(+r\dot\theta)(-\dot\theta\hat r)=\hat r(\ddot r-r\dot\theta^2)+\hat\theta(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)$$

$$\frac{d\vec a}{dt}=\frac{d}{dt}(\hat r(\ddot r-r\dot\theta^2)+\hat\theta(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta))=?$$

$$?=\dot\theta\hat\theta(\ddot r-r\dot\theta^2)+\hat r(\dddot r-\dot r\dot\theta^2-2r\dot\theta\ddot\theta)+$$

$$+(-\dot\theta\hat r)(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)+\hat\theta(2\dot r\ddot\theta+2\ddot r\dot\theta+2\dot r\ddot\theta+r\dddot\theta)$$

$$\frac{d\vec a}{dt}=\hat r(\dddot r-3\dot r\dot\theta^2-3r\dot\theta\ddot\theta)+\hat\theta(3\ddot r\dot\theta+r\dddot\theta+3\dot r\ddot\theta-r\dot\theta^3)$$

۱۵. مطلوبست محاسبه مؤلفه‌های $d^2\vec A/dt^2$ در مختصات قطبی استوانه‌ای، وقتی بردار A، تابعی از t و در نقطه متحرکی قرار گرفته باشد.

حل:

$$\vec A=A_p\hat p+A_\theta\hat\theta+A_z\hat z$$

$$(\hat z)^{\cdot}=0 \qquad (\hat p)^{\cdot}=-\dot\theta\hat\theta \qquad (\hat\theta)^{\cdot}=+\dot\theta\hat p$$

$$\frac{d\vec A}{dt}=\dot A_p\hat p+(-\dot\theta\hat\theta)A_p+\dot A_\theta\hat\theta+(\dot\theta\hat p)A_\theta+\dot A_z\hat z$$

$$\frac{d\vec A}{dt}=\hat p(\dot A_p+\dot\theta A_\theta)+\hat\theta(\dot A_\theta-\dot\theta A_p)+\hat z(\dot A_z)$$

$$\frac{d^2\vec A}{dt^2}=\hat p(\ddot A_p+\ddot\theta A_\theta+\dot\theta\dot A_\theta)+(-\dot\theta\hat\theta)(\dot A_p+\dot\theta A_\theta)+$$

$$+\hat\theta(\ddot A_\theta-\ddot\theta A_p-\dot\theta\dot A_p)+(\dot\theta\hat p)(\dot A_\theta-\dot\theta A_p)+\hat z(\ddot A_z)$$

$$\frac{d^2\vec A}{dt^2}=\hat p(\ddot A_p+2\dot\theta\dot A_\theta+\ddot\theta A_\theta-\dot\theta^2A_p)+\hat\theta(\ddot A_\theta-2\dot\theta\dot A_p-\ddot\theta A_p-\ddot\theta A_p)+(\ddot A_z)\hat z$$

۱۶. مؤلفه‌های $d^3\vec r/dt^3$ را در مختصات کروی پیدا کنید.

حل:

$$\vec r=r\hat r \qquad \begin{cases}\hat r=\sin\theta\cos\varphi\hat i+\sin\theta\sin\varphi\hat j+\cos\theta\hat k\\ \hat\varphi=\cos\theta\cos\varphi\hat i+\cos\theta\sin\varphi\hat j+(-\sin\theta)\hat k\\ \hat\varphi=-\sin\varphi\hat i+\cos\varphi\hat j\end{cases}$$

$$\vec V=\frac{d\vec r}{dt}=\dot r\hat r+r\dot{\hat r}=?$$

$$(\dot{\hat r})=\dot\theta\hat\theta+\dot\varphi\sin\theta\hat\varphi$$

$$(\dot{\hat\theta})=-\dot\theta\hat r+\dot\varphi\cos\theta\hat\varphi$$

$$(\dot{\hat\varphi})=-\dot\varphi(\hat r\sin\theta+\hat\theta\cos\theta)$$

$$\vec V=\frac{d\vec r}{dt}=\dot r\hat r+(r\dot\theta)\hat\theta+r\dot\varphi\sin\theta\hat\varphi$$

$$aY=\frac{d^2rY}{dt}=\frac{dVY}{dt}=\ddot r\hat r+\dot r\dot\theta\hat\theta+\dot r\dot\varphi\sin\theta\hat\varphi+\dot r\dot\theta\hat\theta+r\ddot\theta\hat\theta+$$

$$+(-r\dot\theta^2)\hat r+r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\hat\varphi+\dot r\dot\varphi\sin\theta\hat\varphi+r\ddot\varphi\sin\theta\hat\varphi+r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\hat\varphi+r\dot\varphi\sin(-\dot\varphi)$$

$$(\hat r\sin\theta+\hat\varphi\cos\theta)$$

$$aY=\hat r(\ddot r-r\dot\theta^2-r\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\hat\theta(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)$$

$$+\hat\varphi(2\dot r\dot\varphi\sin\theta+2r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta+r\ddot\varphi\sin\theta)$$

$$\frac{daY}{dt}=\frac{d^3rY}{dt^3}=(\dot\theta\hat\theta+\dot\varphi\sin\theta\hat\varphi)(\ddot r-r\dot\theta^2-r\dot\varphi^2\sin^2\theta)+$$

$$+\hat r(\dddot r-\dot r\dot\theta^2-2r\dot\theta\ddot\theta-\dot r\dot\varphi^2\sin^2\theta-2r\dot\varphi\ddot\varphi\sin^2\theta-2r\dot\varphi^2\dot\theta\sin\theta\cos\theta)$$

$$+(-\dot\theta\hat r+\dot\varphi\cos\theta\hat\varphi)(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)+$$

$$+\hat\theta(\dot r\ddot\theta+\dddot\theta+2\ddot r\dot\theta+2\dot r\ddot\theta-\dot r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta-r\dot\varphi^2\dot\theta\cos(2\theta))+$$

$$+(-\dot\varphi)(\hat r\sin\theta+\hat\theta\cos\theta)(2\dot r\dot\varphi\sin\theta+2r\dot\theta\varphi\cos\theta+r\ddot\varphi\sin\theta)+$$

$$+\hat\varphi(2\ddot r\dot\varphi\sin\theta+2\dot r\ddot\varphi\sin\theta+2\dot r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta+\dot r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta+$$

$$+2\dot r\ddot\theta\dot\varphi\cos\theta+2r\dot\theta\ddot\varphi\cos\theta-2r\dot\theta^2\dot\varphi\sin\theta+\dot r\ddot\varphi\sin\theta+r\dddot\varphi\sin\theta+\dot r\ddot\theta\cos\theta)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d^3rY}{dt^3}=\hat r(\dddot r-3r\dot\theta\ddot\theta-\dot r\dot\varphi^2\sin^2\theta-2r\dot\varphi\ddot\varphi\sin^2\theta-2r\dot\varphi^2\dot\varphi\sin\theta\cos\theta+$$

$$-2\dot r\dot\theta^2+r\dot\theta\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta-2\dot r\dot\varphi^2\sin^2\theta-2r\theta\varphi\cos\dot\theta^2\sin\theta+$$

$$-2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\mathrm{Sin}^2\theta) +$$

$$+ \hat{\theta}\,(\ddot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\theta}\dot{\varphi}^2\,\mathrm{Sin}\theta + \dot{r}\ddot{\theta} + r\dddot{\theta} + 2\ddot{r}\dot{\theta} + 2\dot{r}\ddot{\theta} - \dot{r}\dot{\varphi}^2)$$

$$\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta - r\dot{\varphi}^2\dot{\theta}\mathrm{Cos}\,(2\theta) - 2\dot{r}\dot{\varphi}^2\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}^2\mathrm{Cos}^2\theta$$

$$-2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta)+$$

$$+ \hat{\varphi}\,(\ddot{r}\varphi\mathrm{Sin}\theta - r\dot{\theta}^2\dot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta - r\dot{\varphi}^3\mathrm{Sin}^3\theta + r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$\mathrm{Cos}\theta - r\dot{\varphi}^3\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}^2\theta + 2\dot{r}\ddot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta + 2\ddot{r}\dot{\varphi}\mathrm{sin}\theta +$$

$$+ 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta + 2r\ddot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta + 2r\dot{\theta}\ddot{\varphi}\mathrm{Cos} +$$

$$- 2r\dot{\theta}^2\dot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta + \dot{r}\ddot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta + r\dddot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta + r\ddot{\varphi}\dot{\theta}\mathrm{Cos}\theta)$$

۱۷. مختصات سهموی f و h برحسب مختصات دکارتی x و y به‌وسیله معادلات زیر تعریف می‌شوند

$$x = f - h \qquad y = 2(fh)^{0/5}$$

که در آن f و h هرگز منفی نمی‌شوند. F و h تعریف شده‌اند. بدین معنی که $\hat{f}$ بردار یکه‌ای است که جهتش، جهت حرکت نقطه‌ای است که مختصه f آن کمی افزایش یافته درحالی که مختصه h آن ثابت باقی مانده است. نشان دهید که $\hat{f}$ و $\hat{h}$ در هر نقطه بر هم عمودند.

[راهنمایی: وقتی $df > 0$، $dh = 0$، داریم:

$$\hat{f}=(\hat{x}dx+\hat{y}dy)[(dx)^2+(dy)^2]^{-0/5}$$

چرا؟]

ب) نشان دهید که $\hat{f}$ و $\hat{h}$ توابعی از f و h‌اند و مشتق آنها را نسبت به f و h، بدست آورید.

حل:

نشان دهید که $\vec{r}=f^{0/5}(f+h)^{0/5}\hat{f}+h^{0/5}(f+h)^{0/5}\hat{h}$

مؤلفه‌های سرعت و شتاب را در مختصات سهموی پیدا کنید.

با هر بیانی در هندسه اقلیدس باید $ds^2 = xs^2 + dy^2$ ثابت بماند و این یعنی که اگر در مختصات سهموی ds^2 را بنویسیم در نهایت به $(dx)^2 + (dy)^2$ باید برسیم و یا برعکس.

$$dx = df - dh \Rightarrow (dx)^2 = df^2 + dh^2 - 2dFdh$$

$$dy=\frac{1}{\sqrt{fh}}(fdh+hdf)\Rightarrow(dy)^2=\frac{1}{fh}(f^2dh^2+h^2df^2+2hfdfdh)$$

$$ds^2 = xs^2 + dy^2 = df^2 + dh^2 - 2df\,dh + \frac{f}{h}dh^2 + \frac{h}{f}df^2 + 2df\,dh$$

$$\Rightarrow ds^2 = df^2\left(1 + \frac{h}{f}\right) + dh^2\left(1 + \frac{f}{h}\right)$$

از اینکه در عبارت بدست آمده برای ds^2 حاصلضرب دو دیفرانسیل مربوط به مختصه‌های f و h ظاهر نشد، می‌فهمیم که دستگاه مختصات سهموی متعامد است.

$$\hat{f}.\hat{h}=0$$

$$x = f - h \qquad y = 2(fh)^{0.5} \qquad h,f \geq 0$$

$$x = f - (y^2/4f)$$

$$4fx = 4f^2 - y^2 \Rightarrow 4f^2 - 4f_x - y^2 = 0$$

$$\Delta = 16(x^2 + y^2)$$

$$f_1=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2}) \quad \& \quad f_2=\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2+y^2})$$

$f \geq \Rightarrow$ f_2 غیرقابل قبول است

$$\begin{cases} f=\frac{1}{1}(x+\sqrt{x^2+y^2} \\ h=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

و نیز اگر بردار جابجایی ما برای $dh = 0$ و $df > 0$ برابر با $\vec{dr}$ باشد، داریم

$$|\vec{dr}|=ds=(dx^2+dy^2)^{0/5}$$

$$\vec{dr}=|\vec{dr}|\hat{f}\Rightarrow\hat{f}\frac{\vec{dr}}{|\vec{dr}|}=\frac{\vec{dr}}{ds}=?$$

و از طرفی بردار $\vec{dr}$ را داریم $\vec{dr}=dx\hat{i}+dy\hat{j}$

$$\vec{dr}/ds=(ds\hat{x}+dy\hat{y})(dx^2+dy^2)^{-0/5}=\hat{f}$$

برای پیدا کردن بردارهای $\hat{f}$ و $\hat{h}$ کافی است بردارهای یکه عمود بر سطوح

$$h = h(x,y) \qquad f = f(x,y)$$

را پیدا کنیم یعنی

$$\vec{\nabla}h/|\vec{\nabla}h| \quad \text{و} \quad \vec{\nabla}h\neq|\vec{\nabla}F|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{f}{f+h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{\sqrt{fh}}{f+h}$$

$$\hat{f}=\frac{\sqrt{f}\hat{x}+\sqrt{h}\hat{y}}{\sqrt{f+h}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{-h}{f+h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{\sqrt{fh}}{f+h}$$

$$\hat{h}=\frac{-\sqrt{h}\hat{x}+\sqrt{f}\hat{y}}{\sqrt{f+h}}$$

و همانطور که یادآور شدیم

$$\hat{f}.\hat{h}=\frac{1}{f+h}(\sqrt{fh}-\sqrt{fh})=0$$

داریم:

$$\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$$

$$\begin{cases}\hat{x}=(\sqrt{f+h})^{-1}(\sqrt{f}\hat{f}-\sqrt{h}\hat{h})\\ \hat{y}=(\sqrt{f+h})^{-1}(\sqrt{h}\hat{f}-\sqrt{f}\hat{h})\end{cases}$$

$$\vec{r}=[(f-h)(\sqrt{f}\hat{f}-\sqrt{h}\hat{h})+2\sqrt{fh}(\sqrt{h}\hat{f}+\sqrt{f}\hat{h})](f+h)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r}=(\sqrt{f}\sqrt{f+h})\hat{f}+(\sqrt{h}\sqrt{f+h})\hat{h}$$

$$\vec{r}=(f+h)^{0.5}(\sqrt{f}\hat{f}+\sqrt{h}\hat{h})$$

$$\frac{\partial\hat{f}}{\partial f}=(f+h)^{-0.5}\left(\frac{\hat{x}}{2\sqrt{f}}\right)-0.5(f+h)^{-1.5}(\sqrt{f}\hat{x}+\sqrt{h}\hat{y})$$
$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{f+h}\right)\sqrt{h/f}\,\hat{h}$$

$$\frac{\partial\hat{f}}{\partial h}=(f+h)^{-0.5}\left(\frac{\hat{y}}{2\sqrt{h}}\right)-0.5(f+h)^{-1.5}(\sqrt{f}\hat{x}+\sqrt{h}\hat{y})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f+h}\right)\sqrt{f/h}\,\hat{h}$$

$$\frac{\partial\hat{h}}{\partial f}=(f+h)^{-0.5}\left(\frac{\hat{y}}{2\sqrt{f}}\right)-0.5(f+h)^{-1.5}(-\sqrt{h}\hat{x}+\sqrt{f}\hat{y})=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f+h}\right)\sqrt{h/f}\,\hat{f}$$

$$\frac{\partial\hat{h}}{\partial h}=+(f+h)^{-0.5}\left(\frac{-\hat{x}}{2\sqrt{f}}\right)-0.5(f+h)^{-1.5}(-\sqrt{h}\hat{x}+\sqrt{f}\hat{y})=$$
$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{f+h}\right)\sqrt{f/h}\,\hat{f}$$

از آنجاکه $\hat{f}.\hat{f}=1$ و $\hat{h}.\hat{h}=1$ پس

$$\frac{d}{dt}(\hat{h}.\hat{h})=2\hat{h}.\frac{d\hat{h}}{dt}=\frac{d}{dt}(1)=0\Rightarrow\hat{h}.\dot{\hat{h}}=0\quad\text{یا}\quad\hat{f}.\dot{\hat{f}}=0$$

این نشان می‌دهد که $\dot{\hat{h}}$ موازی $\hat{f}$ است و $\dot{\hat{f}}$ موازی $\hat{h}$، چون تنها معادله تعامد ما در سیستم (f-h) عبارتست از $\hat{f}.\hat{h}=0$

$$\hat{f}=\left(1+\frac{h}{f}\right)^{-0.5}\hat{x}+\left(1+\frac{f}{h}\right)^{-0.5}\hat{y}$$

$$\frac{d\hat{f}}{dt}=\dot{\hat{f}}=-0.5\left[\left(1\times\frac{h}{f}\right)^{-1.5}\left(\frac{\dot{h}f-\dot{f}h}{f^2}\right)\hat{x}+\left(1+\frac{f}{h}\right)^{-1.5}\left(\frac{\dot{f}h-\dot{h}f}{h^2}\right)\hat{y}\right]$$

$$\frac{d\hat{f}}{dt}=+0.5\left(\frac{h\dot{f}-f\dot{h}}{f+h}\right)\frac{1}{\sqrt{fh}}\left[-\left(\frac{h}{f+h}\right)^{0.5}\hat{x}+\left(\frac{f}{f+h}\right)^{0.5}\hat{y}\right]$$

$$\frac{d\hat{f}}{dt}=+0.5\left(\frac{h\dot{f}-f\dot{h}}{f+h}\right)\frac{1}{\sqrt{fh}}\hat{h}$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt}=-0.5\left[-\left(1+\frac{f}{h}\right)^{-1.5}\left(\frac{\dot{f}h-\dot{h}f}{h^2}\right)\hat{x}+\left(1+\frac{h}{f}\right)^{-1.5}\left(\frac{\dot{h}f-h\dot{f}}{h^2}\right)\hat{y}\right]$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt}=-0.5\left(\frac{h\dot{f}-\dot{h}f}{h+f}\right)\frac{1}{\sqrt{fh}}\left[\left(1+\frac{h}{f}\right)^{-0.5}\hat{x}+\left(1+\frac{f}{h}\right)^{0.5}\hat{y}\right]$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt}=-\frac{1}{2}\left(\frac{h\dot{f}-\dot{f}h}{f+h}\right)\frac{1}{\sqrt{fh}}\hat{f}$$

$$\vec{r}=(f+h)^{0/5}(\sqrt{f}\hat{f}+\sqrt{h}\hat{h})$$

$$\vec{v}=\frac{d\hat{h}}{dt}=(f+h)^{0.5}(\sqrt{f}(\hat{f})^{\cdot}+\sqrt{h}(\hat{h})^{\cdot})+(f+h)^{0/5}\left(\frac{\dot{f}\hat{f}}{2\sqrt{f}}+\frac{\dot{h}\hat{h}}{2\sqrt{h}}\right)+\frac{1}{2}(f+h)^{0/5}\left(\frac{\dot{f}+\dot{h}}{f+h}\right)(\sqrt{f}\hat{f}+\sqrt{h}\hat{h})$$

$$\vec{V}=V_f\hat{f}+V_h\hat{h}$$

$$V_f=(f+h)^{0/5}(0/5)(f+h)^{-1}\left(-\sqrt{f}\dot{h}+\frac{h}{\sqrt{f}}\dot{f}+\sqrt{f}\dot{f}+\frac{h}{\sqrt{f}}\dot{f}+\sqrt{f}\dot{f}+\dot{h}\sqrt{f}\right)=\sqrt{f+h}\frac{\dot{f}}{\sqrt{f}}$$

$$v_h=(f+h)^{0/5}(0/5)(f+h)^{-1}\left(\sqrt{h}\dot{f}+\sqrt{h}\dot{h}+\sqrt{h}\dot{h}+\frac{f}{\sqrt{h}}\dot{h}-\sqrt{h}\dot{f}+\frac{f}{\sqrt{h}}\dot{h}\right)=\sqrt{f+h}\frac{\dot{h}}{\sqrt{h}}$$

و با مشتق‌گیری مجدد $\vec{a}$ نیز به‌دست می‌آید و ...

۱۸. ذره‌ای با سرعت ثابت v در امتداد سهمی حرکت می‌کند:

$$y^2=4f_0^2-4f_0x$$

که در آن F_0 ثابت است. مؤلفه‌های سرعت و شتاب آن را در مختصات دکارتی و قطبی به‌دست آورید.نشان دهید که معادله سهمی در مختصات قطبی عبارتست از

$$r\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=f_0$$

معادله این سهمی در مختصات سهموی (مسئله ی ۱۷) چیست؟

حل:

در مختصات قطبی

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

$$r^2\sin^2\theta=4f_0^2-4f_0r\cos\theta \qquad u=r\cos\theta$$

$$r^2-u^2=4f_0^2-4f_0u \Rightarrow u^2-4f_0u+4f_0^2-r^2=0$$

$$\Delta=(4f_0)^2-4(4f_0^2-r^2)=4r^2$$

$$u_1=2f_0+r \qquad u_2=2f_0-r$$

$$\frac{1}{2}(u_1-r)=f_0 \qquad \frac{1}{2}(u_1+r)=f_0$$

$$\frac{r}{2}(\cos\theta-1)=f_0 \;\text{(I)} \qquad \frac{r}{2}(\cos\theta+1)=f_0 \;\text{(II)}$$

$$\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1 \qquad \cos\theta=1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{(I)} \Rightarrow -r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=f_0$$

$$\text{(I)} \Rightarrow r\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=f_0$$

چون $r\ge 0$ پس معادله (I) برای وقتی است که $f_0\le 0$ باشد و معادله (II) برای وقتی که $f_0\ge 0$ باشد. این دو معادله همتاهای قطبی معادله سهمی صورت مسئله می‌باشند.

در مختصات سهموی $\quad y^2=4fh \quad x=f-h \quad f,h\ge 0$

$$4fh=4f_0^2-4f_0(f-h)=4f_0^2-4f_0f+4f_0h$$

$$h(4f-4f_0)=4f_0(f_0-f) \quad *$$

$$h(f)=f_0\left(\frac{f_0-f}{f-f_0}\right)\Rightarrow h(f)=-f_0 \;\;\&\;\; f(h)=f_0$$

البته در به‌دست آوردن $h(f)$ یک اشتباه ممکن است انجام شود (که در بالا انجام شد)

$$h(f-f_0)=f_0(f_0-f) \qquad (f_0\ge 0)$$

به شرطی $-h=f_0$ است که $f\ne f_0$ باشد و چون در به‌دست آوردن $f=f_0$ هیچ مشکلی رخ نمی‌دهد

$$f(h+f_0)=f_0(h+f_0) \qquad (f_0\ge 0)$$

پس در حالت $f_0\ge 0$ فقط $f(h)=f_0$ معتبر است و در حالت $f_0\le 0$ نیز به‌دست آوردن $h=-f_0$ بدون مشکل است (زیرا $f-f_0$ ناصفر است) و $h(f)=-f_0$ برقرار است.

$$\begin{cases} f_0\ge 0\Rightarrow f(h)=f_0 \\ f_0\le 0\Rightarrow h(f)=-f_0 \end{cases}$$

نکته اساسی آن است که از معادله $ac=bc$ وقتی می‌توان $a=b$ را نتیجه گرفت که از ناصفر

بودن c مطمئن باشیم. در غیر این صورت ۰ = ۰ چیزی به ما نمی‌گوید.

در مختصات سهموی:

$$f_\circ \le 0 \Rightarrow h(f)=-f_\circ \Rightarrow \vec{V}=v\hat{f}=(f-f_\circ)^{-0/5}(\sqrt{f}\,\hat{i}+\sqrt{-f_\circ}\,\hat{j})v$$

$$f_\circ \ge 0 \Rightarrow f(h)=f_\circ \Rightarrow \vec{V}=v\hat{h}=(h+f_\circ)^{-0/5}(-\sqrt{h}\,\hat{i}+\sqrt{f_\circ}\,\hat{j})v$$

پس در صورتی که $f_\circ \ge 0$ باشد مؤلفه‌های کارتزین عبارتند از:

$$v_x=\left(\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x^2+y^2})\right)^{0.5}\left(\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x^2+y^2})+f_\circ\right)^{-0/5}V$$

$$v_y(x,y)=+\sqrt{f_\circ}\left(f_\circ+\frac{1}{2}(-x+\sqrt{x^2+y^2})\right)^{-0/5}V$$

و اگر $f_\circ \le 0$ باشد:

$$\begin{cases} v_x(x,y)=\left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]^{0/5}\left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2})-f_\circ\right]^{-0/5}v \\ v_y(x,y)=\sqrt{-f_\circ}\left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2})-f_\circ\right]^{-0/5}v \end{cases}$$

$$y^2 = 4f_\circ^2 - 4f_\circ x \Rightarrow 4f_\circ^2 - 4f_\circ x - y^2 = 0$$

اگر معادله بالا را برحسب $f_\circ$ حل کنیم $\Delta = 16(x^2+y^2)$

وقتی $f_\circ \ge 0$ است این معادله معتبر است $f_\circ=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+y^2})$

وقتی $f_\circ \le 0$ است این معادله معتبر است $f_\circ=\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2+y^2})$

پس برای $f_\circ \ge 0$ داریم:

$$\begin{cases} v_x(x,y)=\sqrt{f_\circ-x}\,(2f_\circ-x)^{-0/5}v \\ v_y(x,y)=\sqrt{f_\circ}\,(2f_\circ-x)^{-0/5}v \end{cases}$$

و برای $f_\circ \le 0$ داریم:

$$\begin{cases} v_x(x,y)=\sqrt{x-f_\circ}\,(x-2f_\circ)^{-0/5}v \\ v_y(x,y)=\sqrt{-f_\circ}\,(x-2f_\circ)^{-0/5}v \end{cases}$$

برای نوشتن بردار $\vec{v}$ در دستگاه مختصات قطبی باید تبدیل‌های زیر را روی مؤلفه‌های v_x و v_y انجام دهیم:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

و نیز بر روی بردارهای یکه باید تبدیل انجام دهیم:

$$\begin{cases} \hat{r}=\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j} \\ \theta=-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{i}=\hat{r}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta \\ \hat{j}=\hat{r}\sin\theta+\hat{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

در حالت $f_\circ \ge 0$:

$$\begin{cases} v_x(r,\theta)=\sqrt{f_\circ r\cos\theta}\,(2f_\circ-r\cos\theta)^{-0/5}v \\ v_y(r,\theta)=\sqrt{f_\circ}\,(2f_\circ-r\cos\theta)^{-0/5}v \end{cases}$$

$$\vec{v}=v_x(r,\theta)(\hat{r}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta)+v_y(r,\theta)(\hat{r}\sin\theta+\hat{\theta}\cos\theta)$$

$$\begin{cases} v_r(r,\theta)=(2f_\circ-r\cos\theta)^{-0/5}v(\sqrt{f_\circ-r\cos\theta}\,\cos\theta+\sqrt{f_\circ}\,\sin\theta) \\ v_\theta(r,\theta)=(2f_\circ-r\cos\theta)^{-0/5}v(-\sqrt{f_\circ-r\cos\theta}\,\sin\theta+\sqrt{f_\circ}\,\cos\theta) \end{cases}$$

در حالت $f_\circ \le 0$:

$$\begin{cases} v_r(r,\theta)=(r\cos\theta-2f_\circ)^{-0/5}v(\sqrt{r\cos\theta-f_\circ}\,\cos\theta+\sqrt{-f_\circ}\,\sin\theta) \\ v_\theta(r,\theta)=(r\cos\theta-2f_\circ)^{-0/5}v(-\sqrt{r\cos\theta-f_\circ}\,\sin\theta+\sqrt{-f_\circ}\,\cos\theta) \end{cases}$$

و اما شتاب‌ها:

در دستگاه مختصات سهموی شتاب صفر نیست. $\vec{a}\,\text{parabolic} \neq 0$

در دو دستگاه دیگر نیز با مشتق‌گیری نسبت به زمان و دانستن این نکته‌ها که $\dot{(\hat{x})}$ و $\dot{(\hat{y})}$ صفر هستند و نیز $\dot{(\hat{r})}=\dot{\theta}\hat{\theta}$ و $\dot{(\hat{\theta})}=-\dot{\theta}\hat{r}$ می‌توان شتاب را محاسبه کرده ولی جملات متعددند. و نیزی می‌توان شتاب را در دستگاه سهموی محاسبه کرد و بعد تبدیل کرد.

$$f_\circ \ge 0 \Rightarrow \vec{v}=v\hat{h} \qquad \dot{v}=0$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=v\dot{(\hat{h})}=v(-0.5)\left(\frac{h\dot{f}-f\dot{h}}{f+h}\right)\frac{1}{\sqrt{fh}}\hat{f}$$

$$\vec{a}=\frac{1}{2}\frac{v}{\sqrt{fh}}\left(\frac{h\dot{f}-f\dot{h}}{f+h}\right)\hat{f}$$

و چون در $f_0 \geq 0$ داریم $\dot f=0 \Leftarrow f=f_0$

$$\vec a=\frac{1}{2}\frac{v}{\sqrt{f_0 h}}\left(\frac{f_0\dot h}{f_0+h}\right)\hat f \qquad h=f_0-x,\ \dot h=-\dot x$$

$$\vec a=\frac{-1}{2}\frac{v}{\sqrt{f_0(f_0-x)}}\left(\frac{f_0\dot x}{2f_0-x}\right)\hat f \quad \& \quad \hat f=\frac{1}{\sqrt{2f_0-x}})\sqrt{f_0}\ \hat i+\sqrt{f_0-x}\ \hat j)$$

$$\vec a=\frac{-1}{2}\frac{v}{\sqrt{(f_0-x)}}\left(\frac{\sqrt{f_0}\dot x}{\sqrt{(2f_0-x)}^3}\right)(\sqrt{f_0}\hat x+\sqrt{f_0-x}\hat y)$$

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{-1}{2}\dfrac{v}{\sqrt{f_0-x}}\dfrac{f_0\dot x}{\sqrt{(2f_0-x)^3}} \\ a_y=\dfrac{-1}{2}\dfrac{v\sqrt{f_0}\dot x}{\sqrt{(2f_0-x)^3}} \end{cases}$$

پس برای مؤلفه‌های قطبی نیز داریم:

$$\begin{cases} a_r=\dfrac{-1}{2}\dfrac{v\sqrt{f_0}}{\sqrt{(2f_0-r\cos\theta)^3}}(\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta)\left(\dfrac{\sqrt{f_0}\cos\theta}{\sqrt{f_0-r\cos\theta}}+\sin\theta\right) \\ a_\theta=\dfrac{-1}{2}\dfrac{v\sqrt{f_0}}{\sqrt{(2f_0-r\cos\theta)^3}}(\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta)\left(\dfrac{-\sqrt{f_0}\sin\theta}{\sqrt{f_0-r\cos\theta}}+\cos\theta\right) \end{cases}$$

و در حالت $f_0 \leq 0$ برای مؤلفه‌ها داریم:

$$\vec v=v\hat f \qquad \dot v=0$$

$$\vec a=\frac{d\vec v}{dt}=v(\dot{\hat f})=+0/5v\left(\frac{h\dot f-f\dot h}{f+h}\right)\frac{1}{\sqrt{fh}}\hat h$$

چون در این حالت $h=-f_0 \Leftarrow \dot h=0 \quad , \quad f=x-f_0 \quad , \quad \dot f=\dot x$

$$\vec a=\frac{-1}{2}\frac{v}{\sqrt{f_0(f_0-x)}}\left(\frac{f_0\dot x}{x-2f_0}\right)\hat h \ \& \ \hat h=\frac{1}{\sqrt{x-2f_0}}(-\sqrt{-f_0}\ \hat x+\sqrt{x-f_0}\ \hat y)$$

بنابراین می‌گوییم

$$\begin{cases} a_x(x,y)=\dfrac{+1}{2}\dfrac{v}{\sqrt{x-f_0}}\dfrac{f_0\dot x}{\sqrt{(x-2f_0)^3}} \\ a_y(x,y)=\dfrac{-1}{2}\dfrac{v\sqrt{-f_0}}{\sqrt{(x-2f_0)^3}}\dot x \end{cases}$$

و برای مؤلفه‌های قطبی نیز داریم:

$$\begin{cases} a_r(r,\theta)=\dfrac{-1}{2}\dfrac{v\sqrt{-f_0}}{\sqrt{(r\cos\theta-2f_0)^3}}(\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta)\left(\dfrac{-\sqrt{-f_0}\cos\theta}{\sqrt{r\cos\theta-f_0}}+\sin\theta\right) \\ a_\theta(r,\theta)=\dfrac{-1}{2}\dfrac{v\sqrt{-f_0}}{\sqrt{(r\cos\theta-2f_0)^3}}(\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta)\left(+\dfrac{\sqrt{-f_0}\sin\theta}{\sqrt{r\cos\theta-f_0}}+\cos\theta\right) \end{cases}$$

یادآوری کنیم که a_θ و a_r و v_θ و v_r را با این تکنیک به‌دست می‌آوریم که

$$\vec A=A_x(x,y)\hat x+A_y(x,y)\hat y$$

$$\vec A=A_x(r,\theta)(\hat r\cos\theta-\hat\theta\sin\theta)+A_y(r,\theta)(\hat r\sin\theta+\hat\theta\cos\theta)$$

$$\begin{cases} A_r(r,\theta)=A_x(r,\theta)\cos\theta+A_y(r,\theta)\sin\theta \\ A_\theta(r,\theta)=-A_x(r,\theta)\sin\theta+A_y(r,\theta)\cos\theta \end{cases}$$

۱۹. ذره‌ای با تندی متغیری در امتداد منحنی دلخواهی که در صفحه xy قرار گرفته حرکت می‌کند. مکان ذره را باید به‌وسیله s (یعنی فاصله‌ای که ذره در امتداد منحنی از نقطه ثابتی بر روی منحنی طی کرده است.) مشخص کرد. فرض کنید که $\hat\tau(s)$ یک بردار یکه مماس بر منحنی در نقطه S و در جهت افزایش s باشد. نشان دهید که

$$\frac{d\hat\tau}{ds}=\frac{\hat\nu}{r}$$

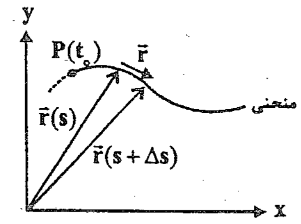
که در آن $\hat\nu$ بردار یکه‌ای است که در نقطه s بر منحنی عمود است و $r(s)$ شعاع انحنا در نقطه s است. که به صورت فاصله نقطه برخورد دو قائم نزدیک به هم بر منحنی تعریف شده است. فرمول‌های زیر را برای سرعت و شتاب ذره پیدا کنید.

$$\vec v=\dot s\hat\tau \qquad \vec a=\ddot s\hat\tau+\frac{\dot s^2}{r}\hat\nu$$

حل:

برای پیدا کردن بردار مماس می‌دانیم $\vec{dr}$ بر منحنی مماس است $\vec{\Delta r}=\vec{r}(s+\Delta s)-\vec{r}(s)$

و یا $\vec{r}(s+ds)=\vec{r}(s)+\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\Delta s$



پس

$$\hat\tau \,\|\, \frac{d\vec r}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec r(s+\Delta s)-\vec r(s)}{\Delta s}$$

و از طرفی می‌دانیم که $|\vec{dr}|=ds$ و یا

$$\vec{dr}=\hat\tau ds$$

پس $\hat\tau$ همان $\frac{d\vec r}{ds}$ است.

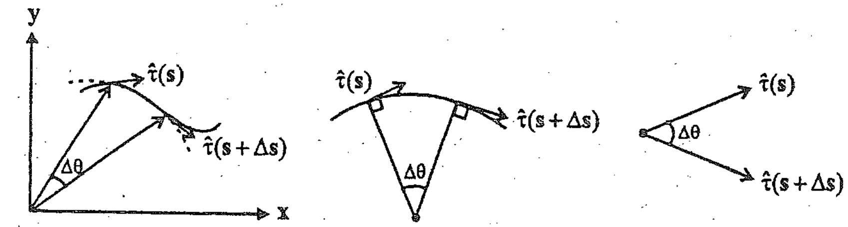
$$\hat\tau(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec r(s+\Delta s)-\vec r(s)}{\Delta s}$$

$$s(t)=\int_{t_0}^{t} ds=\int_{t_0}^{t}|\vec{dr}|=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\vec r}{du}\right|du$$

t پارامتر منحنی است یعنی $\vec r(t)$ به نقطه $p(t)=(x(t).y(t))$ ختم می‌شود t می‌تواند هر چه باشد در اینجا می‌تواند زمان باشد. تابع $s(t)$ فاصله‌ای را که روی منحنی طی شده تا از نقطه‌ای که در زمان t_0 در آن بوده‌ایم به نقطه‌ای که در لحظه فعلی t در آن هستیم، برسیم را نشان می‌دهد.

$$\frac{d\hat\tau}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\hat\tau(s+\Delta s)-\hat\tau(s)}{\Delta s}$$

که $\frac{d\hat\tau}{ds}$ برداری است عمودی بر منحنی به سمت مرکز انحنا که $ds = r(s)d\theta$



$$|\Delta\hat\tau|=(1+1-2\cos\Delta\theta)^{0/5}=2\sin(\frac{\Delta\theta}{2})=\Delta\theta$$

$$|d\hat\tau|=d\theta \Rightarrow ds=r(s)d\theta=r(s)\,|d\hat\tau|$$

$$r^{-1}(s)=\frac{|d\hat\tau|}{dt} \quad \& \quad d\hat\tau \,\|\, \hat v \;\Rightarrow\; \frac{d\hat\tau}{ds}=\frac{\hat v}{r(s)}$$

$$\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{dt}=\hat\tau s'$$

$$\vec a=\frac{d\vec v}{dt}=\ddot s\hat\tau+\dot s\frac{d\hat\tau}{dt}=\ddot s\hat\tau+\dot s\dot s\frac{d\hat\tau}{ds}$$

$$=\ddot s\hat\tau+\vec v(s^2/r(s))$$

۲۰. با استفاده از خواص علامت برداری $\vec\nabla$ تساوی‌های برداری زیر را به‌دست آورید.

$$\mathrm{curl}(\mathrm{curl}\vec A)=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec A)-\nabla^2\vec A$$

$$u\,\mathrm{grad}v=\mathrm{grad}(uv)-v\,\mathrm{grad}(u)$$

سپس مؤلفه‌های x دو طرف معادلات فوق را بنویسید و با محاسبه مستقیم ثابت کنید که در هریک از حالات با هم مساویند. (باید در به‌کار بردن اتحاد اول در) مختصات منحنی‌الخط، دقت بسیار کرد، بستگی بردارهای یکه به مختصات بطور صحیح درنظر گرفته شده باشند.)

حل:

$$du=\vec{dr}.\vec{\nabla u} \qquad dv=\vec{dr}.\vec{\nabla u}$$

$$d(uv)=udv+vdu=u\vec{dr}.\vec{\nabla v}+v\vec{dr}.\vec{\nabla u}=$$

$$=\vec{dr}.(u\vec{\nabla u})+\vec{dr}.(v\vec{\nabla u})$$

$$=\vec{dr}.(u\vec{\nabla v}+v\vec{\nabla u})=\vec{dr}.\vec\nabla(uv)$$

بنابراین

$$\vec\nabla(uv)=u\vec{\nabla v}+v\vec{\nabla u}$$

در جایی که عملگر $\vec\nabla$ فقط از یک بردار مشتق می‌گیرد خاصیت برداری دارد.

$$\vec A\times(\vec B\times\vec C)=\vec B(\vec A.\vec C)-\vec C(\vec A.\vec B)$$

$\vec{A}=\vec{\nabla} \quad \vec{B}=\vec{\nabla} \quad \vec{C}=\vec{F}$

تنها نکته‌ای که وجود دارد چون در سمت چپ از $\vec{F}$ دو بار مشتق گرفته شده باید در محل قرار دادن $\vec{F}$ در دو جمله سمت راست دقت کنیم. (مثلاً $\vec{C}.\vec{A}=\vec{A}.\vec{C}$ است ولی ...)

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{F})-(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$$

که به ∇^2 عملگر Laplacain گویند و وقتی در پشت بردار بیایند به آن لاپلاسی برداری گویند. هرطور دیگری که عملگر $\vec{\nabla}$ و بردار $\vec{F}$ را در سمت راست مرتب می‌کردیم (طبق آنچه تساوی از زمان برداری می‌گوید) به عبارت غلطی می‌رسیدیم زیرا در سمت چپ بردار داریم ولی در سمت راست یک عملگر که هنوز آماده مشتق گرفتن است.

ولی اگر این روابط را بطور غیرهندسی و در دستگاه مختصات درنظر بگیریم کافیست این روابط را برای یکی از مؤلفه‌ها اثبات کنیم، برای مؤلفه‌های دیگر نیازی نیست. (البته این حرف فقط در دستگاه مختصات کارتزین درست است و چون صورت مسئله از مختصه x سخن به میان آورده پس دستگاه مختصات ما کارتزین است.)

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow[\vec{\nabla}(uv)]_x=u[\vec{\nabla v}]_x+v[\vec{\nabla u}]_x$$

$$(\vec{\nabla}*\vec{\nabla}*\vec{A})_x=\frac{\partial}{\partial y}(\vec{\nabla}*\vec{A})_z-\frac{\partial}{\partial z}(\vec{\nabla}*\vec{A})_y=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=$$

$$=\partial_2\partial_1A_2-\partial_2\partial_2A_1-\partial_3\partial_3A_1+\partial_3\partial_1A_3=$$

$$=\partial_1\partial_1A_1+\partial_3\partial_1A_3+\partial_2\partial_1A_2-\partial_1\partial_1A_1-\partial_2\partial_2A_1-\partial_3\partial_3A_1=?$$

۱ ـ قرارداد می‌کنیم $\partial_1=\frac{\partial}{\partial x} \qquad \partial_2=\frac{\partial}{\partial y} \qquad \partial_3=\frac{\partial}{\partial z}$

۲ ـ عبارت $\partial_1\partial_2A_1$ را جمع و تفریق کردیم.

۳ ـ مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ باید از لحاظ مشتق خوش‌رفتار باشند، و اگر $\vec{A}$ یک بردار فیزیکی باشد این خاصیت در آن موجود است. پس می‌توانیم قرار دهیم

$$\partial_i\partial_jA_k=\partial_j\partial_iA_k \qquad i,j,k=1,2,3$$

$$(\vec{\nabla}*(\vec{\nabla}*\vec{A}))_x=\partial_1(\partial_2A_2+\partial_3A_3+\partial_1A_1)-\partial_1^2A_1-\partial_1^2A_2-\partial_3^2A_3=\partial_1(\vec{\nabla}.\vec{A})-\nabla^2A_1$$

زیرا در مختصات کارتزین

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\vec{A}=\partial_1A_1+\partial_2A_2+\partial_3A_3\\ \nabla^2=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^3\end{cases}$$

پس

$$(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}))_x=[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})]_x-\nabla^2A_x$$

پس

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

۲۱. کرل $\vec{A}$ را در مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

حل:

$$\vec{A}=A_\rho\hat{\rho}+A_\theta\hat{\theta}+A_z\hat{z}$$

$$\begin{cases}\hat{\rho}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}\\ \hat{\theta}=-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}\end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\times(A_\rho\hat{\rho})+\vec{\nabla}\times(A_\theta\hat{\theta})+\vec{\nabla}\times(A_z\hat{z})$$

با توجه به اینکه در حالت کلی A_ρ و A_θ و A_z ثابت نیستند:

$$A_\rho=A_\rho(p,\theta,z)$$
$$A_\theta=A_\theta(\rho,\theta,z)$$
$$A_z=A_z(\rho,\theta,z)$$

و از طرفی (می‌توان به واقعی راحتی نشان داد)

$$\vec{\nabla}\times(F\vec{F})=F(\vec{\nabla}\times\vec{F})-\vec{F}\times\vec{\nabla}F \quad *$$

$$\vec{\nabla}\times(A_\rho\hat{\rho})=A_\rho(\vec{\nabla}\times\hat{\rho})+\vec{\nabla A_\rho}\times\hat{\rho}$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

ولی در تعریف $\vec{\nabla u}$ داریم

$$du=\vec{\nabla u}.\vec{dr}$$

$$\vec{r}=\rho\hat{\rho}+z\hat{z}\Rightarrow\vec{dr}=d\rho\hat{\rho}+\rho d\hat{\rho}+dz\hat{z}+zd\hat{z}=$$

$$=d\rho\hat{\rho}+\rho d\theta\hat{\theta}+dz\hat{z}$$

چون $d\hat{z}=0$ و $d\hat{\rho}=d\theta\hat{\theta}$

پس

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho}(d\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho d\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(dz)$$

پس

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{z} \quad **$$

$$\hat{z} = c\hat{t}e \Rightarrow \vec{\nabla}\times\hat{z} = 0$$

$$\hat{\rho} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\hat{\rho} = \vec{\nabla}(\cos\theta)\times\hat{i} + \vec{\nabla}(\sin\theta)\times\hat{j}$$

$$= \frac{1}{\rho}(-\sin\theta)(\hat{\theta}\times\hat{i}) + \frac{1}{\rho}(\cos\theta)(\hat{\theta}\times\hat{j}) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\sin\theta\cos\theta\hat{k} - \frac{1}{\rho}\cos\theta\sin\theta\hat{k} = 0$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\hat{\theta} = -\vec{\nabla}(\sin\theta)\times\hat{i} + \vec{\nabla}(\cos\theta)\times\hat{j} =$$

$$= \frac{-1}{\rho}(\cos\theta)(\hat{\theta}\times\hat{i}) + \frac{-1}{\rho}(\sin\theta)(\hat{\theta}\times\hat{j}) =$$

$$= \frac{+\hat{k}}{\rho}\cos^2\theta + \frac{\hat{k}}{\rho}\sin^2\theta = \frac{\hat{k}}{\rho}$$

با استفاده از معادلات * و ** و نیز $\vec{\nabla}\times\hat{i} = \vec{\nabla}\times\hat{j} = 0$ به‌دست آوریم که

$$\vec{\nabla}\times\hat{\rho} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\hat{\theta} = \frac{1}{\rho}\hat{k}$$

در واقع معادلات * و ** به ما امکان می‌دهد که بدون دانستن عبارت لازم برای کرل بردار در مختصات استوانه‌ای (یعنی آنچه که می‌خواهیم به‌دست آوریم)، کرل این بردارهای یکه را محاسبه کنیم. (البته $\hat{k} = \hat{z}$)

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = A_\rho(\vec{\nabla}\times\hat{\rho}) + A_\theta(\vec{\nabla}\times\hat{\theta}) + A_z(\vec{\nabla}\times\hat{z}) +$$

$$+\overrightarrow{\nabla A_\rho}\times\hat{\rho} + \overrightarrow{\nabla A_\theta}\times\hat{\theta} + \overrightarrow{\nabla A_z}\times\hat{z} =$$

$$A_\rho(0) + A_\theta\left(\frac{\hat{z}}{\rho}\right) + A_z(0) + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial A}{\partial z}.\hat{z}\right)\times\hat{\rho}$$

$$+\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\hat{z}\right)\times\hat{\theta} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta}\hat{\theta}\right)\times\hat{z}$$

با توجه به اینکه

$$\hat{\rho}\times\hat{\theta} = \hat{z} \quad \& \quad \hat{\theta}\times\hat{z} = \hat{\rho} \quad \& \quad \hat{z}\times\hat{\rho} = \hat{\theta}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \hat{z}\left(\frac{1}{\rho}A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right) +$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\hat{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial z}\right) + \rho\hat{\theta}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\det\begin{bmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\theta & A_z \end{bmatrix}$$

۲۲. اگر ذره در مسئله ۱۲ با سرعت ثابت $\vec{V}$ حرکت کند، ضربه‌ای که توسط نیروی داده شده به آن وارد می‌شود چقدر است؟

حل:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\overrightarrow{\nabla p} = \int_0^{t_0}\vec{F}(t)dt = \hat{x}\int_0^{t_0}F_x(t)dt + \hat{y}\int_0^{t_0}F_y(t)dt + \hat{z}\int_0^{t_0}F_z(t)dt$$

$$\begin{cases} F_x(x,y,z) = ax^3 + bxy^2 + cz \\ F_y(x,y,z) = ay^3 + bx^2y \\ F_z(x,y,z) = cx \end{cases}$$

اگر زوایای هادی بردار $\vec{r}_0$ برابر با α و β و γ باشند که:

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{r_0}, \quad \cos\beta = \frac{y_0}{r_0}, \quad \cos\gamma = \frac{z_0}{r_0}$$

$$r(t) = vt \Rightarrow r_0 = vt_0$$

$$r(t) = v\times t$$

$$x(t) = (\cos\alpha)r(t) = (x_0 v/r_0)t$$

$$y(t) = (\cos\beta)r(t) = (y_0 v/r_0)t$$

$$x(t) = (\cos\gamma) r(t) = (z_0 v / r_0) t$$

$$F_x(t) = \frac{a v^3 x_0^3}{r_0^3} t^3 + \frac{b v^3 x_0 y_0^2}{r_0^3} t^3 + \frac{c z_0 v}{r_0} t$$

$$y_y(t) = \frac{a v^3 y_0^3}{r_0^3} t^3 + \frac{b v^3 x_0^2 y_0}{r_0^3} t^3$$

$$F_z(t) = \frac{c v x_0}{r_0} t$$

پس

$$\overrightarrow{\nabla\rho} = \hat{k}\left(\frac{c v x_0}{r_0}\right) \int_0^{t_0} t\,dt + \hat{j}\left(\frac{v^3 y_0}{r_0^3}\right)(a y_0^2 + b x_0^2) +$$

$$+ \hat{i}\left(\frac{v^3 x_0}{r_0^3}\right)(a x_0^2 + b y_0^2) \int_0^{t_0} t^3 dt + + \hat{i}\left(\frac{c z_0 v}{r_0}\right) \int_0^{t_0} t\,dt$$

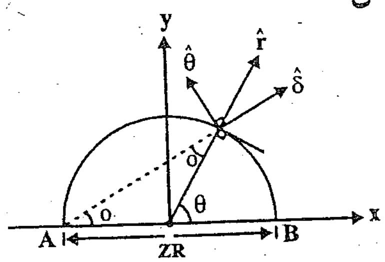
با توجه به اینکه

$$r_0 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{0/5} \quad , \quad t_0 = r_0 / v$$

$$\overrightarrow{\nabla\rho} = \frac{r_0}{v} \left[\hat{x}\left(\frac{1}{4} x_0 (a x_0^2 + b y_0^2) + \frac{1}{2} c z_0\right) + \hat{y}\left(\frac{1}{4} y_0 (a y_0^2 + b x_0^2)\right) + \hat{z}(c x_0)\right]$$

۲۳. به فرض آنکه ذره مسئله ۱۱ با تندی ثابت v دور نیم‌دایره حرکت کند، مؤلفه‌های قائم $F_x(t)$ و $F_y(t)$ نیروی اضافی، علاوه بر نیروی داده شده در مسئله ۱۱ را باید بر آن وارد شود، پیدا کنید. ب) مطلوبست ضربه‌ی مولد توسط این نیروی اضافی.

حل:



$$\vec{v} = -v\hat{\theta} \qquad (\hat{\theta})^{\circ} = -\overset{\circ}{\theta}\hat{r}$$

$$\vec{F}_1 = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m v \overset{\circ}{\theta} \hat{r}$$

$$\overset{\circ}{\theta} = -\frac{v}{R}$$

$$\vec{F}_1 = -(m v^2 / R)\hat{r}$$

با استفاده از مسئله ۱۱

$$\vec{F}(\theta) = F_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\delta}$$

و نیز

$$\hat{\delta} = \hat{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \hat{\theta}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

در کل نیروی اضافی عبارتست از:

$$\vec{F}_{extra} = \vec{F}_1$$

و با توجه به اینکه

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} \end{cases}$$

پس در حالت کلی داریم

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{extra} + \vec{F}(\theta)$$

$$\begin{cases} F_x = -(m v^2/R)\cos\theta + F_0 \cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta - F_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta \\ f_y = -(m v^2/R)\sin\theta + F_0 \cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta - F_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \end{cases}$$

$$F_x = -\frac{m v^2}{R}\cos\theta + F_0 \cos\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + F_0\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)$$

$$F_y = \frac{-m v^2}{R}\sin\theta + F_0 \sin\theta\left(\frac{1}{2}(1+\cos\theta) - \frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$\theta = \frac{-vt}{R} + \pi$$

$$F_x(t) = +\frac{1}{2}F_0 + \left(\frac{-F_0}{2} + \frac{m v^2}{R}\right)\cos\left(\frac{vt}{R}\right)$$

$$F_y(t) = \left(\frac{+F_0}{2} - \frac{m v^2}{R}\right)\sin\left(\frac{vt}{R}\right)$$

$$\Delta p_x = \int_0^T F_x(t)dt = \frac{F_0}{2}\left(\frac{\pi R}{v}\right) + \left(\frac{m v^2}{R} - \frac{F_0}{2}\right)\frac{R}{v}(0-0) = \frac{\pi R F_0}{2v}$$

$$\Delta p_y = \int_0^T F_y(t)dt = -\left(\frac{F_0}{2} - \frac{m v^2}{R}\right)\left(\frac{R}{v}\right)(-1-1) = \frac{2R}{v}\left(\frac{F_0}{2} - \frac{m v^2}{R}\right)$$

$$\overrightarrow{\Delta p} = \frac{\pi R}{v}\left(\frac{F_0}{2}, \frac{2}{\pi}\left(\frac{F_0}{2} - \frac{m v^2}{R}\right)\right)$$

۲۴. ذره‌ای به جرم m در لحظه $t = 0$ از نقطه p روی نیم‌دایره‌ای به شعاع R با سرعت ثابت v شروع به حرکت می‌کند. اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه p در هر زمان t، نیرو و گشتاور ـ

نیرو حول p را پیدا کنید و تأیید کنید که قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای (۳ـ۱۴۰) برقرار است.

حل:

حول مرکز دایره $\vec{v} = v\hat{\theta} \qquad \vec{r} = R\hat{r}$

حول مرکز دایره $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = mrv(\hat{r}\times\hat{\theta}) = mvR\hat{k}$

حول p: فرض که دایره در مبدأ، مرکز دارد و مختصات p عبارتست از: $(R, 0)$

$$\vec{r} = -R\hat{i} + R\hat{r} \quad \& \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 + R(\hat{r})^{\cdot} = R\dot{\theta}\hat{\theta} = v\hat{\theta}$$

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = mRv((-\hat{i}+\hat{r})\times\hat{\theta}) = mRv\hat{k}(1-\cos\theta)$$

$$v = R\dot{\theta}\ ? \qquad v = \frac{ds}{st} = R\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} \qquad s = R\theta$$

$$\theta = \frac{vt}{R}$$

$$\vec{L}(t) = mRv\hat{k}(1-\cos(\frac{vt}{R})) = +2mRv\sin^2(\frac{vt}{2R})$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = mRv\hat{k}(\frac{+v}{R}\sin(vt/R)) = +mv^2\hat{k}\sin(\frac{vt}{R})$$

و از طرفی

$$\vec{r} = -R\hat{i} + R\hat{r}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = mv(\hat{\theta})^{\cdot} = -mv\dot{\theta}\hat{r} = -\frac{mv^2}{R}\hat{r}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = -mv^2(-\hat{i}\times\hat{r}) = mv^2\hat{k}\sin(\frac{vt}{R})$$

۲۵. معادلات حرکت ذره‌ای به جرم m عبارتند از:

$$x(t) = x_0 + at^2$$

$$y(t) = bt^3$$

$$z(t) = ct$$

مطلوبست اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ در هر زمان t. نیروی $\vec{F}$ را پیدا کنید و از آن گشتاور نیروی $\vec{N}$ را که بر ذره عمل می‌کند، به‌دست آورید. تأیید کنید که قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای (۳ـ۱۴۴) برقرار است.

حل:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = (2at, 3bt^2, c)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2a, 6bt, 0) \quad \& \quad \vec{F} = m\vec{a} = m(2a, 6bt, 0)$$

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = m \det\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x(t) & y(t) & z(t) \\ 2a & 6bt & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N} = m[\hat{i}(-6btz(t) + \hat{j}(2az(t) + \hat{k}(6btx(t) - 2ay(t))]$$

$$\vec{N} = m[\hat{i}(-6bct^2) + \hat{j}(2act) + \hat{k}(6btx_0 + 4abt^3)]$$

$$\vec{L} = m(\vec{r}\times\vec{v}) = m \det\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x(t) & y(t) & z(t) \\ 2at & 3bt^2 & c \end{bmatrix}$$

$$\vec{L} = m[\hat{i}(-cy - 2bt^2z) + \hat{j}(2atz - cx) + \hat{k}(3bt^2x - 2aty)]$$

با استفاده از قضیه (۳ـ۱۴۴):

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = m[\hat{i}(c\dot{y} - 6btz - 3bt^2\dot{z}) + \hat{j}(2az + 2at\dot{z} - c\dot{x}) +$$

$$+\hat{k}(6btx + 3bt^2\dot{z} - 2ay - 2at\dot{y})]$$

$$\dot{x} = 2at \qquad \dot{y} = 3bt^2 \qquad \dot{z} = c$$

$$\vec{N} = m[\hat{i}(3bct^2 - 6bct^2 - 3bct^2) + \hat{j}(2act + 2act - 2act) +$$

$$+\hat{k}(6btx_0 - 2bat^3 + 6abt^3)]$$

$$\vec{N} = m[\hat{i}(-6bct^2) + \hat{j}(2act) + \hat{k}(6btx_0 + 4abt^3)]$$

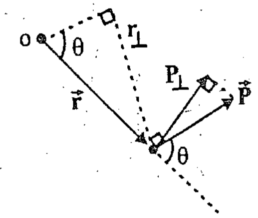
۲۶. تعریف مناسبی برای اندازه حرکت زاویه‌ای ذره‌ای حول محوری در فضا پیدا کنید. محور مشخص شده را محور z اختیار و اندازه حرکت زاویه‌ای را برحسب مختصات استوانه‌ای بیان کنید. اگر نیروی وارد بر ذره دارای مؤلفه‌های استوانه‌ای F_φ, F_ρ, F_z باشد، ثابت کنید که میزان تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای برحسب زمان حول محور z برابر گشتار ـ نیروی حول آن محور است.

حل:

$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{\rho}$

$|\vec{L}|=r\rho\sin\theta=\rho(r\sin\theta)=\rho r_\perp$

$|\vec{L}|=r(\rho\sin\theta)=r\rho_\perp$



اندازه حرکت زاویه‌ای را برداری تعریف می‌کنیم که اندازه آن برابر با فاصله ذره از محور دوران ضربدر مؤلفه‌ای از تکانه که بر این بازو عمود است و یا اندازه آن برابر است با اندازه بردار تکانه ضربدر مؤلفه‌ای از بازوی اتصال مرکز ـ ذره که بر بردار تکانه عمود است. جهت دوران نیز با جهت این بردار داده می‌شود، اگر طبق قانون دست راست، شصت خود را در جهت بردار بگیریم، و انگشتان باقیمانده را به طرف داخل دست خم کنیم، انگشتان سوی سرعت جسم را نسبت به مبدأ نشان می‌دهند.

در مختصات استوانه‌ای:

$$\vec r=\rho\hat\rho+z\hat z \qquad \dot{\hat\rho}=\dot\varphi\hat\varphi \qquad \dot{\hat z}=0 \qquad \dot{\hat\varphi}=-\dot\varphi\hat\rho$$

$$\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=\dot\rho\hat\rho+\rho\dot{\hat\rho}+\dot z\hat z+z\dot{\hat z}=\dot\rho\hat\rho+\rho\dot\varphi\hat\varphi+\dot z\hat z$$

$$\hat\rho\times\hat\varphi=\hat z \qquad \hat\varphi\times\hat z=\hat\rho \qquad \hat z\times\hat\rho=\hat\varphi$$

$$\vec L=m(\vec r\times\vec v)=m(z\dot\rho(\hat z\times\hat\rho)+\rho^2\dot\varphi(\hat\rho\times\hat\varphi)+\rho\dot z(\hat\rho\times\hat z)+(z\rho\dot\varphi)(\hat z\times\hat\varphi)$$

$$=m[-z\rho\dot\varphi\hat\rho+(z\dot\rho-\rho\dot z)\hat\varphi+\rho^2\dot\varphi\hat z]$$

$$\vec a=\frac{d\vec v}{dt}=\ddot\rho\hat\rho+\dot\rho\dot\varphi\hat\varphi+\dot\rho\dot\varphi\hat\varphi+\rho\ddot\varphi\hat\varphi+(-\rho\dot\varphi^2)\hat\rho+\ddot z\hat z$$

$$a_\rho=\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2 \qquad a_\varphi=\rho\ddot\varphi+2\dot\rho\dot\varphi \qquad a_z=\ddot z$$

و طبق قانون دوم نیوتن تساوی‌های زیر برقرار است.

$$\vec F=m\vec a$$

$$F_\rho=m(\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2)$$

$$F_\varphi=m(\rho\ddot\varphi+2\dot\rho\dot\varphi)$$

$$F_z=m(\ddot z)$$

و از طرفی داریم (قضیه ۳ـ۱۴۰)

$$\vec N=\frac{d\vec L}{dt}=\dot{\vec L}=m[-\dot z\rho\dot\varphi\hat\rho-z\rho\ddot\varphi\hat\rho-z\rho\dot\varphi^2\hat\varphi+$$

$$+\dot z\dot\rho\hat\varphi-z\ddot\rho\hat\varphi-\dot\rho\dot z\hat\varphi-\rho\ddot z\hat\varphi+\rho\dot z\dot\varphi\hat\rho+2\rho\dot\rho\dot\varphi\hat z+\rho^2\ddot\varphi\hat z]$$

$$\vec N=m[\hat\rho(-z\rho\ddot\varphi-2z\dot\rho\dot\varphi)+\hat\varphi(z\ddot\rho-z\rho\dot\varphi^2-\rho\ddot z)+\hat z(\rho^2\ddot\varphi+2\rho\dot\rho\dot\varphi)]$$

و اما از راه دیگر:

$$\vec N=\vec r\times\vec F$$

$$N_P=0-ZF_\varphi=m[-zp\ddot\varphi-2z\dot p\dot\varphi]$$

$$N_\varphi=zF_p-pF_z=m[z\ddot p-zp\dot\varphi^2-p\ddot z]$$

$$N_z=pF_\varphi-0=m[p^2\ddot\varphi+2p\dot p\dot\varphi]$$

۲۷. محل ذره متحرکی به جرم m به‌وسیله مختصات کروی $r(t)$، $\theta(t)$، $\varphi(t)$ معین شده است. نیروی وارده بر ذره دارای مؤلفه‌های کروی F_r، F_θ، F_φ است. مؤلفه‌های کروی بردار اندازه حرکت زاویه‌ای و بردار گشتاور ـ نیرو را حول مبدأ حساب و با محاسبه مستقیم تحقیق کنید که معادله زیر از معادله حرکت نیوتن نتیجه می‌شود.

$$\frac{d\vec L}{dt}=\vec N$$

حل:

با استفاده از نتایج حل مسئله ۱۶

$$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2-r\dot\varphi^2\sin^2\theta$$

$$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta$$

$$a_\varphi=2\dot r\dot\varphi\sin\theta+2r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta+r\ddot\varphi\sin\theta$$

حال طبق قانون دوم نیوتن:

$$F_r=ma_r=m(\ddot r-r\dot\theta^2-r\dot\varphi^2\sin\theta)$$

$$F_\partial=ma_\partial=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)$$

$$F_\varphi = ma_\varphi = m\,(2\dot{r}\dot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta + r\ddot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta)$$

بنابراین

$$\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F} \quad \& \quad \vec{r}=r\hat{r}$$

$$N_r = 0$$

$$N_\theta = -rF_\varphi = -mr\,(2\dot{r}\dot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta + r\ddot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta)$$

$$N_\varphi = +rF_\theta = +\,mr\,(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta)$$

با استفاده از نتایج حل مسئله ۱۶

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta$$

بنابراین:

$$\vec{L}=m(\vec{r}\times\vec{v}) \quad \& \quad \vec{r}=r\hat{r}$$

$$L = +\,mrv_\theta\,(\hat{r}\times\hat{\theta}) + mrv_\varphi\,(\hat{r}\times\hat{\varphi}) =$$

$$= mr^2\,(\dot{\theta}\hat{\varphi} - \dot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta\hat{\theta})$$

با استفاده از نتایج حل مسئله ۱۶:

$$(\hat{\varphi})^{\cdot} = -\,\dot{\varphi}\,(\hat{r}\mathrm{Sin}\theta + \hat{\theta}\mathrm{Cos}\theta)$$

$$(\hat{\theta})^{\cdot} = -\,\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta\hat{\varphi}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_r = mr^2\,(-\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\mathrm{Sin}\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\mathrm{Sin}\theta) = 0$$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_\theta = m\,(-2r\dot{r}\dot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta - r^2\ddot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta - r^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\mathrm{Cos}\theta - r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta)$$

$$= -\,mr\,(2\dot{r}\dot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\mathrm{Cos}\theta + r\ddot{\varphi}\mathrm{Sin}\theta)$$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_\varphi = m\,(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - r^2\dot{\varphi}^2\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta)$$

$$= +\,mr\,(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta)$$

بنابراین تحقیق کردیم که:

$$N_r = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_r \qquad N_\theta = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_\theta \qquad N_\varphi = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_\varphi$$

۲۹. با فرض $\sigma \ll 1$ **و** $(bv_{x_0} / mg) \gg 1$ **و قرار دادن** $x_m = (mv_{x_0} / b)(1 - \sigma)$ **در معادله (۲ـ ۱۷۵) و سپس حل آن برحسب** σ**، پایین‌ترین مرتبه تصحیح به معادله (۳ـ ۱۷۹) را به‌دست آورید.**

حل:

$$z = \left(\frac{mg}{bv_{x_0}} + \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}}\right)x + \frac{m^2g}{b^2}\ln\left(1 - \frac{bx}{mv_{x_0}}\right) \qquad (۱۷۵ـ۳)$$

$$x_m \cong \left(\frac{mv_{x_0}}{b}\right) \quad \text{if} \quad (bv_{z_0} / mg) \gg 1 \qquad (۱۷۹ـ۳)$$

$$\text{if } z = 0 \text{ so } x = x_m$$

$$\left(\frac{mg}{bv_{x_0}} + \frac{v_{z_0}}{b}\right)\left(\frac{mv_{x_0}}{b}\right)(1 - \sigma) = -\frac{m^2g}{b^2}\ln\sigma$$

$$\left(\frac{m^2g}{b^2} + \frac{mv_{z_0}}{b}\right)(1 - \sigma) = -\frac{m^2g}{b^2}\ln\sigma$$

$$\left(1 + \frac{bv_{z_0}}{mg}\right)(\sigma - 1) = \ln\sigma$$

اگر از σ در مقابل ۱ و از ۱ در مقابل $\frac{bv_{z_0}}{mg}$ صرف‌نظر کنیم

$$\sigma \cong \exp\left(-\frac{bv_{z_0}}{mg}\right)$$

۳۰. مطلوبست حداکثر ارتفاع Z_{max} **حاصله توسط گلوله‌ای که معادله حرکتش معادله (۳ـ ۱۶۹) باشد. نتیجه خود را به صورت یک سری توانی برحسب b، با نگه داشتن جملات تا مرتبه اول برحسب b در** z_{max} **بسط دهید و جمله پایین‌ترین مرتبه را در مقابله با معادله (۳ـ ۱۶۷) بررسی کنید.**

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-mg\hat{z}-b\frac{d\vec{r}}{dt}$$

حل:

این معادله حرکت برداری شامل سه معادله حرکت اسکالر است.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-b\frac{dx}{dt} \quad \& \quad v_x=\frac{dx}{dt}\Rightarrow v_x(t)=v_{x_0}e^{-bt/m}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-b\frac{dy}{dt} \quad \& \quad v_y=\frac{dy}{dt}\Rightarrow v_y(t)=v_{y_0}e^{-bt/m}=0 \quad (v_{y_0}=0)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg-b\frac{dz}{dt} \quad \& \quad v_z=\frac{dz}{dt}\Rightarrow \dot{v}_z+\frac{b}{m}v_z=-g$$

$$\Rightarrow d(v_z e^{bt/m})=-ge^{bt/m} \quad \Rightarrow \quad v_z e^{bt/m}=\frac{-mg}{b}e^{bt/m}+c$$

$$v_z(t)=\frac{-mg}{b}+Ce^{-bt/m} \quad \& \quad v_z(0)=v_{z_0} \quad \Rightarrow -\frac{mg}{b}+c=V_{z_0}$$

$$\Rightarrow C=v_{z_0}+\frac{mg}{b} \Rightarrow v_z(t)=-\frac{mg}{b}(1-e^{-bt/m})+v_{z_0}e^{-bt/m}$$

که برای صعود گلوله $b>0$ و $v_{z_0}\neq 0$ است و برای سقوط گلوله بعد از به اوج رسیدن $b>0$ و $v_z(t_0)=0$ است و برای به‌دست آوردن ارتفاع اوج: (t_0 زمان اوج):

$$\frac{dz}{dt}=\frac{-mg}{b}(1-e^{-bt/m})+v_{z_0}e^{-bt/m}$$

$$z=\frac{-mg}{b}t-\frac{m^2g}{b^2}e^{-bt/m}-\frac{mv_{z_0}}{b}e^{-bt/m}+C$$

$$z(0)=0 \Rightarrow c=(\frac{m^2g}{b^2}+\frac{mv_{z_0}}{b})$$

$$z(t)=(\frac{m^2g}{b}+\frac{mv_{z_0}}{b})(1-e^{-bt/m})-\frac{mg}{b}t$$

در ارتفاع اوج: (t_0 زمان اوج):

$$v_z(t_0)=0 \Rightarrow e^{-\frac{bt_0}{m}}=(1+\frac{bv_{z_0}}{mg})^{-1}$$

و یا:

$$t_0=\frac{m}{b}\ln(1+(bv_{z_0}/mg))$$

$$z(t_0)=(\frac{m^2g}{b}+\frac{mv_{z_0}}{b})(\frac{bv_{z_0}}{mg})(1+\frac{bv_{z_0}}{mg})^{-1}-\frac{mg}{b}(\frac{m}{b})\ln(1+\frac{bv_{z_0}}{mg})$$

از طرفی

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad |x|<1$$

و

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<1$$

و اگر $x=(bv_{z_0}/mg) \ll 1$ پس:

$$z(t_0)=(\frac{v_{z_0}^2}{xg}+\frac{v_{z_0}^2}{g})(1+x)^{-1}-(\frac{v_{z_0}^2}{x^2g})\ln(1+x)$$

و اگر از بسط‌ها استفاده کنیم: (در جایی که لازم است.)

$$z(t_0)=\frac{v_{z_0}^2}{g}(\frac{1+x}{x})(x+1)^{-1}-\frac{v_{z_0}^2}{x^2g}(x-\frac{x^2}{2}+\dots)\cong\frac{v_{z_0}^2}{2g}$$

فقط $\ln(1+x)$ را بسط دادیم و نیازی به بسط $(1+x)^{-1}$ نبود چون با $(1+x)^{+1}$ ساده شده و در بسط $\ln(1+x)$ تا اولین جمله تصحیح یعنی جمله دوم را درنظر گرفته بنابراین:

$\frac{v_{z_0}^2}{xg}$ با $\frac{v_{z_0}^2}{xg}$، ساده می‌شود. که این نتیجه همان بیان معادله (۳ ـ ۱۶۷) است.

۳۱. گلوله‌ای با سرعت اولیه $\vec{v}_0=(v_{x_0},v_{y_0},v_{z_0})$ از مبدأ پرتاب می‌شود. سرعت باد $\vec{v}_W=W\hat{y}$ است معادلات حرکت (۳ـ ۱۸۰) را در صورتی که x و y و z توابعی از t باشند، حل کنید. با درنظر گرفتن فقط جملات مرتبه اول b، نقطه (x_1,y_1) را که در آن گلوله به سطح افقی برمی‌گردد، پیدا کنید. نشان دهید که اگر در هدف‌گیری اثرات مقاومت هوا و سرعت باد رعایت نشود مقاومت هوا به تنهایی باعث خواهد شد که گلوله به اندازه $4bv_{z_0}/3mg$ از فاصله هدف، جلوتر از هدف فرود آید و باد باعث انحرافی به اندازه $2bWv_{z_0}^2/mg^2$ در مختصه y می‌شود.

اثر سرعت باد چیست؟

حل:

اگر هوا ساکن بود و سرعت گلوله نسبت به زمین $\vec{v}$ می‌بود نیروی اتلافی $-b\vec{v}$ توسط هوای ساکن به گلوله وارد می‌شود و اگر سرعت هوا $\vec{W}$ باشد نیروی رانشی $+b\vec{W}$ را به گلوله وارد می‌کند، تا در گذشت مدت زمان ($t=\infty$) زیادی سرعت گلوله $\vec{W}$ شود.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-b\frac{d\vec{r}}{dt}+b\vec{W}-mg\hat{z}$$

$$\vec{r}_0=(0,0,0,0) \quad \& \quad \vec{W}=W\hat{y} \quad \& \quad \vec{v}_0=(v_{x_0},v_{y_0},v_{z_0})$$

در راستای x:

$$m\ddot{x}=-b\dot{x} \Rightarrow v_x(t)=v_{x_0}e^{-bt/m}$$

$$x(t)=\frac{-mv_{x_0}}{b}e^{-bt/m}+C$$

$$x(0)=0 \Rightarrow C=mv_{x_0}/b$$

$$x(t)=(mv_{x_0}/b)(1-e^{-bt/m})$$

در راستای y:

$$m\ddot{y}=-b\dot{y}+bw \Rightarrow \dot{v}_y+\frac{b}{m}v_y=\frac{bw}{m}$$

$$v_y(t)=w+ce^{-bt/m}$$

$$v_y(t)=w+(v_{y_0}-w)e^{-bt/m}$$

$$y(t)=wt+\frac{m}{b}(w-v_{y_0})e^{-bt/m}+C$$

$$y(0)=0 \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{m}{b}(w-v_{y_0})$$

$$y(t)=wt+\frac{m}{b}(v_{y_0}-w)(1-e^{-bt/m})$$

در راستای z:

$$m\ddot{z}=-b\dot{z}-mg \qquad \text{(I)}$$ صعود

با استفاده از نتایج حل مسئله قبلی:

$$z(t)=\frac{-mg}{b}t+\left(\frac{m^2g}{b^2}+\frac{mv_{z_0}}{b}\right)(1-e^{-bt/m})$$

$$v_z(t)=-(mg/b)(1-e^{-bt/m})+v_{z_0}e^{-bt/m}$$

$$m\ddot{z}=+b\dot{z}-mg \qquad \text{(II)}$$ سقوط

اگر t_0 زمان اوج و H ارتفاع اوج باشد با توجه به نتیجه قسمت قبلی و اینکه b به $-b$ تبدیل شده و با توجه به شرایط مرزی:

$$v_z=+\frac{mg}{b}+ce^{+bt/m}$$

$$v_z(t_0)=0 \;\Rightarrow\; c=-\frac{mg}{b} \;\Rightarrow\; v_z(t)=\frac{mg}{b}(1-e^{bt/m})$$

$$z(t)=\frac{mg}{b}t-\frac{m^2g}{b^2}e^{bt/m}+C$$

$$z(t_0)=H \;\Rightarrow\; C=H-\frac{mg}{b}t_0+\frac{m^2g}{b^2}$$

$$\Rightarrow z(t)=H+\frac{mg}{b}(t-t_0)+\frac{m^2g}{b^2}(1-e^{bt/m})$$

$$z(t)=\begin{cases}-\dfrac{mg}{b}t+\left(\dfrac{m^2g}{b^2}+\dfrac{mv_{z_0}}{b}\right)\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right) & 0\le t\le t_0\\[2ex] H+\dfrac{mg}{b}(t-t_0)+\dfrac{m^2g}{b^2}(1-e^{+bt/m}) & t_\ell\ge t\ge t_0\end{cases}$$

و t_ℓ زمان رسیدن دوباره به سطح زمین است. برای H و t_0 با استفاده از نتایج حل مسئله قبلی داریم: $(x=bv_{z_0}/mg)$

۳۲. عبارت بعد از روابط (۳ـ ۱۷۶) و (۳ـ ۱۷۸) را به‌دست آورید.

حل:

$$-\frac{m^2g}{b^2}\ln\left[\frac{mv_{x_0}}{mv_{x_0}-bx}\right]=-\frac{m^2g}{b^2}\ln\left[1-\frac{bx}{mv_{x_0}}\right]^{-1}\Rightarrow$$

$$-\frac{m^2g}{b^2}\ln\left[\frac{mv_{x_0}}{mv_{x_0}-bx}\right]=\frac{m^2g}{b^2}\ln\left[1+\left[-\frac{bx}{mv_{x_0}}\right]\right]\Rightarrow$$

$$-\frac{m^2g}{b^2}\ln\left[\frac{mv_{x_0}}{mv_{x_0}-bx}\right]=\frac{m^2g}{b^2}\left[\frac{-1}{4}\right]\left[-\frac{bx}{mv_{x_0}}\right]^4\Rightarrow-\frac{m^2g}{b^2}\ln\left[\frac{mv_{x_0}}{mv_{x_0}-bx}\right]=-\frac{1}{4}\frac{b^2g}{m^2v_{x_0}^4}$$

$$z=0\Rightarrow\frac{v_{z_0}}{v_{x_0}}x-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}^2}x^2-\frac{1}{3}\frac{bg}{mv_{x_0}^3}x^3=0\Rightarrow\frac{1}{3}\frac{bg}{mv_{x_0}^3}x^2+\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}^2}x-\frac{v_{z_0}}{v_{x_0}}=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}^2}\pm\sqrt{\left[-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}^2}\right]^2-4\times\frac{1}{3}\frac{bg}{mv_{x_0}^3}\times\left[-\frac{v_{z_0}}{v_{x_0}}\right]}}{2\times\frac{1}{3}\frac{bg}{mv_{x_0}^3}}$$

جمله‌ی چهارم بسط $\ln(1+x)$ برابر $-\frac{x^4}{4}$ است. باید مثبت بعنوان جواب انتخاب شود، زیرا x منفی غیرقابل قبول می‌باشد، پس

$$x=\frac{-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}^2}+\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}^2}\left[1+\frac{16}{3}\frac{bv_{z_0}}{mg}\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}\frac{bg}{mv_{x_0}^3}}\Rightarrow$$

$$x=\frac{-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}^2}+\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x_0}^2}\left[1+\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\frac{bv_{z_0}}{mg}-\frac{1}{8}\times\frac{256}{9}\frac{b^2v_{z_0}^2}{m^2g^2}+\frac{1}{8}\times\frac{4096}{81}\frac{b^3v_{z_0}^3}{m^3g^3}\right]}{\frac{2}{3}\frac{bg}{mv_{x_0}^3}}\Rightarrow$$

$$x=\frac{\frac{8}{3}\frac{bv_{z_0}}{mg}-\frac{32}{9}\frac{b^2v_{z_0}^2}{m^2g^2}+\frac{512}{81}\frac{b^3v_{z_0}^3}{m^3g^3}}{\frac{4}{3}\frac{b}{mv_{x_0}}}\Rightarrow x=\frac{2v_{z_0}v_{x_0}}{g}-\frac{8}{3}\frac{bv_{z_0}^2v_{x_0}}{mg^2}+\frac{128}{27}\frac{b^2v_{z_0}^3v_{x_0}}{m^2g^3}$$

پس جمله‌ی بعدی رابطه‌ی (۳ ـ ۱۷۸) به صورت $\frac{128}{27}\frac{b^2 v_{0z}^3 v_{0x}}{m^2 g^3}$ است.

۳۳. می‌خواهیم گلوله‌ای را در صفحه xz (محور z، قائم فرض شود) با سرعت v_0 از مبدأ به طرف هدفی در نقطه $x = x_0$، $z = 0$ پرتاب کنیم. الف) اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر شود زاویه‌ی صحیح پرتاب چقدر باشد تا گلوله به هدف، برخورد کند. نشان دهید بطورکلی دو زاویه برای این کار وجود دارد گر اینکه هدف در بیشینه برد یا دورتر از آن باشد. ب) تصحیح مرتبه‌ی اول زاویه‌ی پرتاب، ناشی از مقاومت هوا را به‌دست آوردید.

حل:

الف) داریم $\vec{F} = -mg\hat{z}$ ؛ پس

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\hat{z} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z} = -g\hat{z}$$

محور xها:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow dv_x = 0 \Rightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = 0 \Rightarrow v_x \Big|_{v_{0x}}^{v_x} = 0 \Rightarrow v_x - v_{0x} = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0\cos\theta \Rightarrow dx = v_0\cos\theta dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_0\cos\theta\, dt \Rightarrow x\Big|_0^x = v_0\cos\theta\, t\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$x - 0 = v_0\cos\theta(t - 0) \Rightarrow x = v_0\cos\theta t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\theta} \quad (1)$$

محور zها:

$$\frac{dv_z}{dt} = -g \Rightarrow dv_z = -gdt \Rightarrow \int_{v_{0z}}^{v_z} dv_z = \int_0^t -gdt \Rightarrow v_z\Big|_{v_{0z}}^{v_z} = -gt\Big|_0^t$$

$$v_z - v_{0z} = -g(t - 0) \Rightarrow v_z = -gt + v_{0z} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -gt + v_0\sin\theta \Rightarrow$$

$$dz = (-gt + v_0\sin\theta)dt \Rightarrow$$

$$\int_0^z dz = \int_0^t (-gt + v_0\sin\theta)dt \Rightarrow z\Big|_0^z = \left[-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 tsun\theta\right]\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$z - 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta - 0 - 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta$$

هنگام برخورد گلوله به هدف: $z = 0$ است با استفاده از رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$z = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}g\left[\frac{x}{v_0\cos\theta}\right]^2 + v_0\sin\theta\left[\frac{x}{v_0\cos\theta}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}g\frac{x}{v_0\cos\theta} = v_0\sin\theta \Rightarrow$$

$$x = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} \Rightarrow x = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

حال اگر برای پرتاب تحت زاویه‌ی α نیز همان برد را داشته باشیم:

$$x = x' \Rightarrow \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\theta \Rightarrow 2\alpha = \pi - 2\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

پس برای هر پرتاب، دو زاویه وجود دارد که دارای بردهای مساوی هستند. این دو زاویه، متمم هم هستند.

ب) در این حالت، نیروی وارده بر ذره $\vec{F} = -b\vec{v} - mg\hat{z}$ است.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -b\vec{v} - mg\hat{z} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z} = -\frac{b}{m}v_x\hat{x} - \frac{b}{m}v_z\hat{z} - g\hat{z}$$

در راستای محور xها:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{b}{m}v_x \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{b}{m}dt \Rightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x}\frac{dv_x}{v_x} = \int_0^t -\frac{b}{m}dt \Rightarrow \ln v_x\Big|_{v_{0x}}^{v_x} = -\frac{b}{m}t\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\ln v_x - \ln v_{0x} = -\frac{b}{m}(t - 0) \Rightarrow \frac{v_x}{v_{0x}} = -\frac{b}{m}t \Rightarrow \frac{v_x}{v_{0x}} = e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow v_x = v_{0x}e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow dx = v_{0x}e^{-\frac{b}{m}t}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_{0x}e^{\frac{-b}{m}t}dt \Rightarrow$$

$$x\Big|_0^x = -\frac{m}{b}v_{0x}e^{-\frac{b}{m}t}\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$x - 0 = -\frac{m}{b}v_{0x}(e^{-\frac{b}{m}t} - 1) \Rightarrow x = \frac{m}{b}v_{0x}(1 - e^{-\frac{b}{m}t}) \Rightarrow 1 - e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{bx}{mv_{0x}} \Rightarrow 1 - \frac{bx}{mv_{0x}} = e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$-\frac{b}{m}t = \ln\left[1 - \frac{bx}{mv_{0x}}\right] \Rightarrow t = -\frac{m}{b}\ln\left[1 - \frac{bx}{mv_{0x}}\right] \quad (2)$$

در راستای محور zها:

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{b}{m}v_z - g \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = -\frac{b}{m}\left[v_z + \frac{mg}{b}\right] \Rightarrow \frac{dv_z}{v_z + \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m}dt \Rightarrow$$

$$\int_{\nu_{0z}}^{\nu_z}\frac{d\nu_z}{\nu_z+\frac{mg}{b}}=\int_0^t -\frac{b}{m}dt\Rightarrow\ln\left[\nu_z+\frac{mg}{b}\right]\Big|_{\nu_{0x}}^{\nu_z}=-\frac{b}{m}t\Big|_0^t\Rightarrow$$

$$\ln\left[\nu_z+\frac{mg}{b}\right]-\ln\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]=-\frac{b}{m}(t-0)\Rightarrow\ln\left[\frac{\nu_z+\frac{mg}{b}}{\nu_{0z}+\frac{mg}{b}}\right]=-\frac{b}{m}t\Rightarrow$$

$$\frac{\nu_z+\frac{mg}{b}}{\nu_{0z}+\frac{mg}{b}}=e^{-\frac{b}{m}t}\Rightarrow\nu_z+\frac{mg}{b}=\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]e^{-\frac{b}{m}t}\Rightarrow\frac{dz}{dt}=\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]e^{-\frac{b}{m}t}-\frac{mg}{b}\Rightarrow$$

$$dz=\left[\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]e^{-\frac{b}{m}t}-\frac{mg}{b}\right]dt\Rightarrow\int_0^z dz=\int_0^t\left[\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]e^{-\frac{b}{m}t}-\frac{mg}{b}\right]dt\Rightarrow$$

$$z\Big|_0^z=\left[-\frac{m}{b}\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]e^{-\frac{b}{m}t}-\frac{mg}{b}t\right]\Big|_0^t\Rightarrow z-0=-\frac{m}{b}\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right](e^{-\frac{b}{m}t}-1)-\frac{mg}{b}(t-0)$$

$$z=\frac{m}{b}\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right](1-e^{-\frac{b}{m}t})-\frac{mg}{b}t$$

هنگام برخورد گلوله به هدف: $z=0$ است با استفاده از رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$0=\frac{m}{b}\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]\left[1-\left[1-\frac{bx}{m\nu_{0x}}\right]\right]-\frac{mg}{b}\left[-\frac{m}{b}\ln\left[1-\frac{bx}{m\nu_{0x}}\right]\right]\Rightarrow$$

$$\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]\frac{x}{\nu_{0x}}+\frac{m^2g}{b^2}\ln\left[1-\frac{bx}{m\nu_{0x}}\right]=0$$

با استفاده از بسط $\ln(1+x)$ می‌توان نوشت:

$$\left[\nu_{0z}+\frac{mg}{b}\right]\frac{x}{\nu_{0x}}+\frac{m^2g}{b^2}\left[-\frac{bx}{m\nu_{0x}}-\frac{1}{2}\left[-\frac{bx}{m\nu_{0x}}\right]^2+\frac{1}{3}\left[-\frac{bx}{m\nu_{0x}}\right]^3\right]=0\Rightarrow$$

$$\nu_{0z}+\frac{mg}{b}-\frac{mg}{b}-\frac{gx}{2\nu_{0x}}-\frac{bgx^2}{3m\nu_{0x}^2}=0\Rightarrow\nu_{0x}-\frac{bgx^2}{2m\nu_{0x}^2}=\frac{gx}{2\nu_{0x}}\Rightarrow x=\frac{2\nu_{0x}\nu_{0z}}{g}-\frac{2bx^2}{3m\nu_{0x}}$$

رابطه‌ی x را در x^2 جاگذاری می‌کنیم و از جملات b^2 و بالاتر، صرف‌نظر می‌کنیم:

$$x=\frac{2\nu_{0x}\nu_{0z}}{g}-\frac{2b}{3m\nu_{0x}}\left[\frac{2\nu_{0x}\nu_{0z}}{g}-\frac{2bx^2}{3m\nu_{0x}}\right]^2\Rightarrow x=\frac{2\nu_{0x}\nu_{0z}}{g}-\frac{7b\nu_{0x}\nu_{0z}^2}{3mg^2}$$

اگر برد این پرتابه برابر برد پرتابه‌ی قسمت الف باشد:

$$\frac{\nu_0^2\sin2\theta}{g}=\frac{2\nu_{0x}\nu_{0z}}{g}-\frac{8b\nu_{0x}\nu_{0z}^2}{3mg^2}\Rightarrow\frac{\nu_0^2\sin2\theta}{g}=\frac{2\nu_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}-\frac{8b\nu_0^3\cos\alpha\sin\alpha}{3mg^2}\Rightarrow\sin2\theta=\sin2\alpha-\frac{4b\nu_0}{3mg}\cos\alpha\sin2\alpha$$

رابطه‌ی فوق، رابطه‌ی بین زاویه‌ی پرتاب بدون مقاومت هوا و زاویه‌ی پرتاب با مقاومت هوا است.

۳۴. نشان دهید نیروهای مسائل ۱۱ و ۱۲ پایسته هستند. انرژی پتانسیل را به‌دست آورده و با استفاده از آن، کار انجام شده را در هریک از حالات به‌دست آورید.

حل:

در مسأله ۱۱ داریم

$$\vec{F}=-\frac{F_0}{2R}\vec{r}\Rightarrow\vec{F}=-\frac{F_0}{2R}r\hat{r}$$

$$\vec\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat\phi & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\frac{F_0}{2R}r & 0 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow\vec\nabla\times\vec{F}=(0-0)\hat{r}+(0-0)\frac{1}{r}\hat\phi+(0-0)\hat{z}\Rightarrow\vec\nabla\times\vec{F}=0$$

یعنی نیرو، پایستار است.

$$\vec{F}=-\vec\nabla V\Rightarrow-\frac{F_0}{2R}r=\frac{dV}{dr}\Rightarrow V=-\frac{F_0}{4R}r^2$$

$$W=-\Delta V\Rightarrow W=V_i-V_f\Rightarrow W=-\frac{F_0}{4R}r^2\Big|_{r=0}-\left[-\frac{F_0}{4R}r^2\Big|_{r=2R}\right]\Rightarrow$$

$$W=\frac{F_0}{4R}(2R)^2\Rightarrow W=F_0R$$

در مسأله ۱۲ داریم

$$F_x = ax^3 + bxy^2 + cz \quad \text{و} \quad F_y = ay^3 + bx^2y \quad \text{و} \quad F_z = cx$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\hat{x} + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right]\hat{y} +$$

$$\left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]\hat{z} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = (0-0)\hat{x} + (c-c)\hat{y} + (2bxy - 2bxy)\hat{z} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

پس این نیرو نیز، پایستار است.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow F_x = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow ax^3 + bxy^2 + cz = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -(ax^3 + bxy^2 + cz)dx \Rightarrow$$

$$V = -\left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}bx^2y^2 + cxz + A\right] \quad (1)$$

$$F_y = -\frac{dV}{dy} \Rightarrow ay^3 + bx^2y = -\frac{dV}{dy} \Rightarrow dV = -(ay^3 + bx^2y)dy \Rightarrow$$

$$V = -\left[\frac{1}{4}ay^4 + \frac{1}{2}bx^2y^2 + B\right] \quad (2)$$

$$F_z = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow cx = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow dV = -cx\,dz \Rightarrow V = -(cxz + C) \quad (3)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) و (۳) دیده می‌شود:

$$A = \frac{1}{4}ay^4 \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{4}ax^4 + cxz \quad \text{و} \quad C = \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{4}ay^4 + \frac{1}{2}bx^2y^2$$

$$W = -\Delta V \Rightarrow W = V_i - V_f \Rightarrow$$

$$W = -\left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{4}ay^4 + \frac{1}{2}bx^2y^2 + cxz\right]\Big|_{x=y=z=0} -$$

$$\left[-\left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{4}ay^4 + \frac{1}{2}bx^2y^2 + cxz\right]\Big|_{x_0, y_0, z_0}\right]$$

$$W = \frac{1}{4}ax_0^4 + \frac{1}{4}ay_0^4 + \frac{1}{2}bx_0^2y_0^2 + cx_0z_0$$

۳۵. تعیین کنید کدام یک از نیروهای زیر، پایسته است. انرژی پتانسیل آن را به‌دست آورید.

الف) $F_x = 6abz^3y - 20bx^3y^2$، $F_y = 6abz^3 - 10bx^4y$، $F_z = 18abxz^2y$

ب) $F_x = 18abyz^3 - 20bx^3y^2$، $F_y = 18abxz^3 - 10bx^4y$، $F_z = 6abxyz^2$

ج) $\vec{F} = \hat{x}F_x(x) + \hat{y}F_y(y) + \hat{z}F_z(z)$

حل:

الف)

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = \frac{\partial}{\partial y}(18abxz^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(6abxz^3 - 10bx^4y) \Rightarrow$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = 18abxz^2 - 18abxz^2 + 0 \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = 0$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_y = \frac{\partial}{\partial z}(6abz^3y - 20bx^3y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(18abxz^2y) \Rightarrow$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_y = 18abz^2y - 0 - 18abz^2y \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_y = 0$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = \frac{\partial}{\partial x}(6abxz^3 - 10bx^4y) - \frac{\partial}{\partial y}(6abz^3y - 20bx^3y^2) \Rightarrow$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = 6abz^3 - 40bx^3y - 6abz^3 + 40bx^3y \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = 0$$

یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ است پس برای این نیرو می‌توان انرژی پتانسیل بصورت زیر تعریف کرد.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = 6abz^3y - 20bx^3y^2 \Rightarrow V = -6abxz^3y + 5bx^4y^2 + V_1(y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 6abxz^3 - 10bx^4y \Rightarrow V = -6abxz^3y + 5bx^4y^2 + V_2(x,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 18abxz^2y \Rightarrow V = -6abxz^3y + V_3(x,y)$$

با مقایسه روابط فوق: $V_1(y,z) = V_2(x,z)$، $V_3(x,y) = 5bx^4y^2$، $V = -6abxz^3y + 5bx^4y^2$

ب)

$$(\vec\nabla\times\vec F)_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_x=\frac{\partial}{\partial y}(6abxyz^2)-\frac{\partial}{\partial z}(18abxz^3-10bx^4y)\Rightarrow$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_x=6abxz^2-54abxz^2\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_x=-48abxz^2$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_y=\frac{\partial}{\partial z}(18abyz^3-20bx^3y^2)-\frac{\partial}{\partial x}(6abxyz^2)\Rightarrow$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_y=54abyz^2-0-6abyz^2\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_y=48abyz^2$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_z=\frac{\partial}{\partial x}(18abxz^3-10bx^4y)-\frac{\partial}{\partial y}(18abyz^3-20bx^3y^2)\Rightarrow$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_z=18abz^3-40bx^3y-18abz^3+40bx^3y\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_z=0$$

یعنی $\vec\nabla\times\vec F\neq 0$ است پس برای این نیرو نمی‌توان انرژی پتانسیل تعریف کرد.

ج)

$$(\vec\nabla\times\vec F)_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_x=\frac{\partial}{\partial y}[F_z(z)]-\frac{\partial}{\partial z}[F_y(y)]\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_x=0$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_y=\frac{\partial}{\partial z}[F_x(x)]-\frac{\partial}{\partial x}[F_z(z)]\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_y=0$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_z=\frac{\partial}{\partial x}[F_y(y)]-\frac{\partial}{\partial y}[F_x(x)]\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_z=0$$

یعنی $\vec\nabla\times\vec F=0$ است پس برای این نیرو می‌توان انرژی پتانسیل بصورت زیر تعریف کرد.

$$\vec F=-\vec\nabla V\Rightarrow F_x(x)\hat x+F_y(y)\hat y+F_z(z)\hat z=-\frac{\partial V}{\partial x}\hat x-\frac{\partial V}{\partial y}\hat y-\frac{\partial V}{\partial z}\hat z\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x(x)\Rightarrow V=-\int F_x(x)dx+V_1(y,z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y}=F_y(y)\Rightarrow V=-\int F_y(y)dy+V_2(x.z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z}=F_z(z)\Rightarrow V=-\int F_z(z)dz+V_3(x,y)$$

۳۶. انرژی پتانسیل را برای نیروهایی به‌دست آورید که پایستار هستند:

الف) $F_x = 2ax(z^3+y^3)$ ، $F_y = 2ay(z^3+y^3)+3ay^2(x^2+y^2)$ ، $F_z = 3az^2(x^2+y^2)$

ب) $F_\rho = a\rho^2\cos\varphi$ ، $F_\varphi = a\rho^2\sin\varphi$ ، $F_z = 2az^2$

ج) $F_r = -2ar\sin\theta\cos\varphi$ ، $F_\theta = -ar\cos\theta\cos\varphi$ ، $F_\varphi = ar\sin\theta\sin\varphi$

حل:

الف)

$$(\vec\nabla\times\vec F)_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\Rightarrow$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_x=\frac{\partial}{\partial y}[3az^2(x^2+y^2)]-\frac{\partial}{\partial z}[2ay(z^3+y^3)+3ay^2(x^2+y^2)]\Rightarrow$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_x=6az^2y-6az^2y\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_x=0$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_y=\frac{\partial}{\partial z}[2ax(z^3+y^3)]-\frac{\partial}{\partial x}[3az^2(x^2+y^2)]\Rightarrow$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_y=6axz^2-6axz^2\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_y=0$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\Rightarrow$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_z=\frac{\partial}{\partial x}[2ay(z^3+y^3)+3ay^2(x^2+y^2)]-\frac{\partial}{\partial y}[2ax(z^3+y^3)]\Rightarrow$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_z=0+6axy^2-0-6axy^2\Rightarrow(\vec\nabla\times\vec F)_z=0$$

یعنی $\vec\nabla\times\vec F=0$ است پس برای این نیرو می‌توان انرژی پتانسیل بصورت زیر تعریف کرد.

$$\vec F=-\vec\nabla V\Rightarrow F_x\hat x+F_y\hat y+F_z\hat z=-\frac{\partial V}{\partial x}\hat x-\frac{\partial V}{\partial y}\hat y-\frac{\partial V}{\partial z}\hat z\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=2ax(z^3+y^3)\Rightarrow V=-ax^2(z^3+y^3)+V_1(y,z)$$

$$\frac{-\partial V}{\partial y}=2ay(z^3+y^3)+3ay^2(x^2+y^2)\Rightarrow$$

$$V = -ay^2z^3 - \frac{2}{5}ay^5 - ax^2y^3 - \frac{3}{5}ay^5 + V_2(x,z) \Rightarrow V = -ay^2z^3 - ax^2y^3 - ay^5 + V_2(x,z)$$

$$\frac{-\partial V}{\partial y} = 3az^2(x^2+y^2) \Rightarrow V = -az^3(x^2+y^2) + V_3(x,y)$$

در نتیجه $V_1(y,z) = -ay^2z^3 - ay^5$ و $V_2(x.z) = -ax^2z^3$ و

$V_3(x,y) = -ax^2y^3 - ay^5$ و $V = -ax^2y^3 - ay^2z^3 - ax^2z^3 - ay^5$

ب)

$$(\nabla \times \vec{F})_\rho = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)\right] \Rightarrow (\nabla \times \vec{F})_\rho = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}(2az^2) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho a\rho^2\sin\varphi)\right] \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_\rho = \frac{1}{\rho}(0-0) \Rightarrow (\nabla \times \vec{F})_\rho = 0$$

$$(\nabla \times \vec{F})_\varphi = \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \Rightarrow (\nabla \times \vec{F})_\varphi = \frac{\partial}{\partial z}(a\rho^2\cos\varphi) - \frac{\partial}{\partial \rho}(2az^2) \Rightarrow (\nabla \times \vec{F})_\varphi = 0$$

$$(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right] \Rightarrow (\nabla \times \vec{F})_z = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a\rho^2\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(a\rho^2\cos\varphi)\right] \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{1}{\rho}(3a\rho^2\sin\varphi + a\rho^2\sin\varphi) \Rightarrow (\nabla \times \vec{F})_z = 4a\rho\sin\varphi$$

یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{F}\neq 0$ است پس برای این نیرو نمی‌توان انرژی پتانسیل تعریف کرد.

ج)

$$(\nabla \times \vec{F})_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta F_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(rF_\theta)\right] \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\; ar\sin\theta\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(rar\cos\theta\cos\varphi)\right] \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}(2ar^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi - ar^2\cos\theta\sin\varphi) \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_r = \frac{1}{\sin\theta}(2a\sin\theta\cos\theta\sin\varphi - a\cos\theta\sin\theta)$$

$$(\nabla \times \vec{F})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\, F_\varphi)\right] \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}(-2ar\sin\theta\cos\varphi) - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\; ar\sin\theta\sin\varphi)\right] \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_{r\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}(2ar\sin\theta\sin\varphi - 2ar\sin^2\theta\sin\varphi) \Rightarrow (\nabla \times \vec{F})_\theta = 2a\sin\varphi - 2a\sin\theta\sin\varphi$$

$$(\nabla \times \vec{F})_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right] \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-rar\cos\theta\cos\varphi) - \frac{\partial}{\partial \theta}(-2\,ar\sin\theta\cos\varphi 0\right] \Rightarrow$$

$$(\nabla \times \vec{F})_\theta = \frac{1}{r}(-2ar\cos\theta\cos\theta + 2ar\cos\theta\cos\varphi) \Rightarrow (\nabla \times \vec{F})_\varphi = 0$$

یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{F}\neq 0$ است پس برای این نیرو نمی‌توان انرژی پتانسیل تعریف کرد.

۳۷. انرژی پتانسیل را برای نیروهایی به‌دست آورید که پایستار هستند:

الف) $F_x = axr^{-R}$ ،$F_y = bye^{-R}$ ،$F_z = cze^{-R}$ که: $R = ax^2 + by^2 + cz^2$ است.

ب) $\vec{F}=\vec{A}f(\vec{A}.\vec{r})$ که $\vec{A}$ بردار ثابت و $f(s)$ تابع مناسبی از $s=\vec{A}.\vec{r}$ است.

ج) $\vec{F}=(\vec{r}\times\vec{A})f(\vec{A}.\vec{r})$

حل:

الف)

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = \frac{\partial}{\partial y}[cze^{-(ax^2+by^2+cz^2)}] - \frac{\partial}{\partial z}[bye^{-(ax^2+by^2+cz^2)}] \Rightarrow$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = -2bcyze^{-(ax^2+by^2+cz^2)} + 2bcyze^{-(ax^2+by^2+cz^2)} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = 0$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_y = \frac{\partial}{\partial z}[axe^{-(ax^2+by^2+cz^2)}] - \frac{\partial}{\partial x}[cze^{-(ax^2+by^2+cz^2)}] \Rightarrow$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_y = -2acxze^{-(ax^2+by^2+cz^2)} + 2acxze^{-(ax^2+by^2+cz^2)} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_y = 0$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = \frac{\partial}{\partial x}[bye^{-(ax^2+by^2+cz^2)}] - \frac{\partial}{\partial y}[axe^{-(ax^2+by^2+cz^2)}] \Rightarrow$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = 2abxye^{-(ax^2+by^2+cz^2)} + 2acxye^{-(ax^2+by^2+cz^2)} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = 0$$

یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ است پس برای این نیرو می‌توان انرژی پتانسیل بصورت زیر تعریف کرد.

$$\vec{F}=\vec{\nabla}V \Rightarrow F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial x} = axe^{-(ax^2+by^2+cz^2)} \Rightarrow V = \frac{1}{2}e^{-(ax^2+by^2+cz^2)} + V_1(y,z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y}=F_y \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial y}=bye^{-(ax^2+by^2+cz^2)} \Rightarrow V=\frac{1}{2}e^{-(ax^2by^2+cz^2)}+v_2(x,z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z}=F_z \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial z}=cze^{-(ax^2+by^2+cz^2)} \Rightarrow V=\frac{1}{2}e^{-(ax^2+by^2+cz^2)}+V_3(x,y)$$

یعنی $v_1(y,z)=v_2(x,z)=v_3(x,y)=0$ و $V=\frac{1}{2}e^{-(ax^2+by^2+cz^2)}$ است.

ب)

$$(\nabla\times\vec F)_\rho=\frac{1}{\rho}[\frac{\partial F_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)] \Rightarrow (\nabla\times\vec F)_\rho=\frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial\varphi}(2az^2)-\frac{\partial}{\partial z}(\rho a\rho^2\sin\varphi)] \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_\rho=0$$

$$(\nabla\times\vec F)_\varphi=\frac{1}{\rho}[\frac{\partial F_\rho}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial\rho}]\cdot(\nabla\times\vec F)_\varphi=\frac{1}{-\rho}[\frac{\partial}{\partial z}(a\rho^2\sin\varphi)-\frac{\partial}{\partial\rho}(2az^2)] \Rightarrow (\nabla\times\vec F)_\varphi=0$$

$$(\nabla\times\vec F)_z=\frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\varphi)-\frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}] \Rightarrow (\nabla\times\vec F)_z=\frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a\rho^2\sin\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(a\rho^2\cos\varphi)] \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_z=\frac{1}{\rho}(3a\rho^2\sin\varphi+a\rho^2\sin\varphi) \Rightarrow (\nabla\times\vec F)_z=\frac{1}{\rho}\times 4a\rho^2\sin\varphi \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_z=4a\rho\sin\varphi$$

یعنی $\vec\nabla\times\vec F\neq 0$ است پس برای این نیرو نمی‌توان انرژی پتانسیل تعریف کرد.

ج)

$$(\nabla\times\vec F)_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta F_\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(rF_\theta)] \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(ar^2\sin^2\theta\sin\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(-ar^2\cos\theta\cos\varphi)] \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}(2ar^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi-ar^2\cos\theta\sin\varphi) \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_r=2a\cos\theta\sin\varphi \; a\cot\theta\sin\varphi$$

$$(\nabla\times\vec F)_\theta=\frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta F_\varphi)] \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_\theta=\frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\varphi}(-2ar\sin\theta\cos\varphi)-\frac{\partial}{\partial r}(ar^2\sin^2\theta\sin\varphi)] \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_\theta=\frac{1}{r^2\sin\theta}(2ar\sin\theta\sin\varphi-2ar\sin^2\theta\sin\varphi) \Rightarrow (\nabla\times\vec F)_\theta=\frac{2a}{r}\sin\varphi-\frac{2a}{r}\sin\theta\sin\varphi$$

$$(\nabla\times\vec F)_\varphi=\frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}] \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_\varphi=\frac{1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial r}(-ar^2\cos\theta\cos\varphi)-\frac{\partial}{\partial\theta}(-2ar\sin\theta\cos\varphi)] \Rightarrow$$

$$(\nabla\times\vec F)_\varphi=\frac{1}{r^2\sin\theta}(-2ar\cos\theta\cos\varphi+2ar\cos\theta\cos\varphi) \Rightarrow (\nabla\times\vec F)_\varphi=0$$

یعنی $\vec\nabla\times\vec F\neq 0$ است پس برای این نیرو نمی‌توان انرژی پتانسیل تعریف کرد.

۳۸. ذره‌ای به‌وسیله نیروی متناسب با مجذور فاصله‌ی آن از صفحه‌ی xy و متناسب با عکس فاصله‌ی آن از محور zها به طرف این محور، جذب می‌شود نیروی دیگر و عمود بر آن، طوری اضافه کنید که نیروی برآیند، پایستار باشد. سپس انرژی پتانسیل را به‌دست آورید. مطمئن شوید عباراتی که برای نیروها و انرژی پتانسیل می‌نویسید از نظر ابعادی، سازگار باشند.

حل:

$\vec F=-\frac{kz^2}{\rho}\hat\rho+F_\varphi\hat\varphi+F_z\hat z$ این نیرو باید پایستار باشد پس:

$$(\nabla\times\vec F)_\rho=0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}[\frac{\partial F_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial z}(\rho F_\varphi)]=0 \Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial\varphi}-\rho\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}=0 \quad (1)$$

$$(\nabla\times\vec F)_\varphi=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(-\frac{kz^2}{\rho})-\frac{\partial F_z}{\partial\rho}=0 \Rightarrow -\frac{2kz}{\rho}-\frac{\partial F_z}{\partial\rho}=0 \Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial r}=-\frac{2kz}{\rho} \Rightarrow$$

$$F_z=-2kz\ln\rho+C_1(\varphi,z) \quad (2)$$

$$(\nabla\times\vec F)_z=0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\frac{kz^2}{\rho})]=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\varphi)-0=0 \Rightarrow$$

$$\rho F_\varphi=C_2(\varphi,z) \Rightarrow F_\varphi=\frac{C_2(\varphi m z)}{\rho} \quad (3)$$

روابط (۲) و (۳) را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}[-2kz\ln\rho+C_1(\varphi,z)]-\rho\frac{\partial}{\partial z}[\frac{C_2(\varphi,z)}{\rho}]=0 \Rightarrow \frac{\partial C_1(\varphi,z)}{\partial z}=0 \Rightarrow$$

$$C_1(\varphi,z)=C_2(\varphi,z)=0$$

یعنی $\vec F=-\frac{kz^2}{\rho}\hat\rho-2kz\ln\rho\hat z$ است.

$$\vec F=-\nabla V \Rightarrow -\frac{kz^2}{\rho}\hat\rho-2kz\ln\rho\hat z=-\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat\rho-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\hat\varphi-\frac{\partial V}{\partial z}\hat z \Rightarrow -\frac{kz^2}{\rho}=-\frac{\partial V}{\partial\rho} \Rightarrow$$

$$V = kz^2\ln\rho + C_2(\varphi,z)$$

$$-2kz\ln\rho = \frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow kz^2\ln\rho + C_3(\rho,\varphi)$$

یعنی $C_2(\varphi,z) = C_3(\rho,\varphi)$ و انرژی پتانسیل $V = kz^2\ln\rho$ است.

۳۹. با محاسبه‌ی مستقیم نشان دهید انتگرال $\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ در امتداد هر مسیر بین $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ فقط به r_1، r_2 بستگی دارد. سپس نشان دهید نیروی $\vec{F}=\hat{r}F(r)$ ($\hat{r}$ بردار یکه به طرف دور شدن از مبدأ) پایستار است. (راهنمایی: $\vec{F}$ و $d\vec{r}$ را در مختصات کروی بنویسید.)

حل:

$$\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2}(F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_\varphi\hat{\varphi})\cdot(\hat{r}\,dr + \hat{\theta}\,r d\theta + \hat{\varphi}\,r\sin\theta\,d\varphi) \Rightarrow$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2}F_r dr + \int_{\theta_1}^{\theta_2} rF_\theta d\theta + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\theta\,F_\varphi d\varphi \Rightarrow$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2}F_r dr + r\int_{\theta_1}^{\theta_2} F_\theta d\theta + r\sin\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_\varphi d\varphi$$

انتگرال‌های فوق به مسیر حرکت، بستگی ندارند و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارند.

$$\vec{F} = \hat{n}F(r) \Rightarrow \vec{F} = \hat{r}F(r) \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2}F(r)dr = -V(r)\Big|_{r_1}^{r_2} = V(r_1) - V(r_2)$$

یعنی برای $\vec{F}(r)$ توانستیم انرژی پتانسیل تعریف کنیم پس نیروی $\vec{F}(r)$ پایستار است.

۴۰. مؤلفه‌های نیروی هریک از توابع انرژی پتانسیل زیر را به‌دست آورید:

الف) $V = axy^2z^3$ ب) $V = \frac{1}{2}kr^2$ ج) $V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$

حل:

الف)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{F} = -\left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right](axy^2z^3) \Rightarrow \vec{F} = -kr\hat{r} + 0 + 0 \Rightarrow \hat{y} - 3axy^2z^2\hat{z}$$

ب)

$$\vec{F} = -\nabla V \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\hat{r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta\partial\varphi}\right)\left(\frac{1}{2}kr^2\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -kr\hat{r} + 0 + 0 \Rightarrow \vec{F} = -kr\hat{r}$$

ج)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{F} = -\left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2\right] \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\left[k_x x + x^2\frac{\partial k_x}{\partial x}\right]\hat{x} - \left[k_y y + y^2\frac{\partial k_y}{\partial y}\right]\hat{y} - \left[k_z z + z^2\frac{\partial k_z}{\partial z}\right]\hat{z}$$

۴۱. نیروی وارد بر الکترون در یون ملکول هیدروژن را در صورتی به‌دست آورید که انرژی پتانسیل آن: $V = \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}$ باشد. r_1 فاصله الکترون از نقطه‌ی $x = -a$، $y = z = 0$ و r_2 فاصله‌ی الکترون از نقطه‌ی $x = z$، $y = z = 0$ است.

حل:

اگر الکترون در مختصات (x,y,z) باشد، داریم

$$r_1 = [(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad r_2 = [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{F} = -\left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left\{-\frac{e^2}{[(x+a)+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{e^2}{[(x-a)+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$\vec{F} = \left\{-\frac{(x+a)e^2}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x-a)e^2}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}\hat{x}$$

$$+\left\{-\frac{ye^2}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{ye^2}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}\hat{y}$$

$$+\left\{-\frac{ze^2}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{\frac32}}-\frac{ye^2}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{\frac32}}\right\}\hat z$$

$$\vec F=-\frac{e^2}{r_1^3}[(x+a)\hat x+y\hat y+z\hat z]-\frac{e^2}{r_2^3}[(x-a)\hat x+y\hat y+z\hat z]$$

۴۲. تابع انرژی پتانسیلی، ابداع کنید که وقتی $r\to\infty$، تابع به صفر میل کند و وقتی $r\to 0$ نیروی $\vec F=-k\vec r$ را ایجاد کند. این نیرو را به‌دست آورید. با به‌کار بردن انتگرال‌های خطی مناسب، تایید کنید وقتی ذره از $\vec r=0$ به $\vec r=\vec r_0$ می‌رود کار این نیرو بر روی خط مستقیم برابر کاری است که ذره، مسیر شکل ۳ـ ۳۲ را طی کند.

حل:

فرض کنیم $V=-e^{-\frac12 kr^2}$ و $\vec F=-\vec\nabla V=-k\vec r e^{-\frac12 kr^2}$ خواهیم داشت

$$r\to\infty\Rightarrow V=0 \quad و \quad r\to 0\Rightarrow\vec F=-k\vec r$$

یعنی V شرایط مسأله را تأمین می‌کند.

$$w=-\Delta V\Rightarrow w=V_i-V_f$$

اگر ذره در مسیر مستقیم از $r=0$ به $r=r_0$ برود:

$$w=-e^{\frac12 kr^2}\Big|_{r=0}-\left[-e^{\frac12 kr^2}\right]\Big|_{r=r_0}\Rightarrow w=-1+e^{-\frac12 kr_0^2}\qquad (1)$$

اگر ذره مطابق شکل ۳ـ ۳۲ از $r=0$ به $r=r_0$ برود:

$$V=-e^{-\frac12 kr^2}\Rightarrow V=-e^{-\frac12 k(x^2+y^2+z^2)}$$

در امتداد مسیر C_1:

$$w_1=-e^{-\frac12 kr^2(x^2+y^2+z^2)}\Big|_{x=y=z=0}-\left[-e^{-\frac12 k(x^2+y^2+z^2)}\right]\Big|_{x=x_0,\ y=z=0}\Rightarrow w_1=-1+e^{-\frac12 kx_0^2}$$

در امتداد مسیر C_2:

$$w_2=-e^{-\frac12 k(x^2+y^2+z^2)}\Big|_{x=x_0,\ y=z=0}-\left[-e^{-\frac12 k(x^2+y^2+z^2)}\right]\Big|_{x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0}\Rightarrow$$

$$w_2=-e^{-\frac12 kx_0^2}+e^{-\frac12 k(x_0^2+y_0^2)}$$

در امتداد مسیر C_3:

$$w_3=-e^{-\frac12 k(x^2+y^2+z^2)}\Big|_{x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0}-\left[-e^{-\frac12 k(x^2+y^2+z^2)}\right]\Big|_{x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0}\Rightarrow$$

$$w_3=-e^{-\frac12 k(x_0^2+y_0^2)}+e^{-\frac12 k(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$$

$$w=w_1+w_2+w_3\Rightarrow w=-1+e^{-\frac12 k(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}\qquad (2)$$

یعنی (۱) و (۲) برابرند

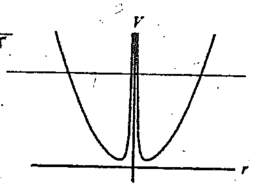
۴۳. انرژی پتانسیل برای نوسانگر هماهنگ همسانگرد: $V=\frac12 kr^2$ است. وقتی ذره‌ای به جرم m با این انرژی پتانسیل و با تکانه‌ی زاویه‌ای L حول مبدأ حرکت می‌کند منحنی انرژی پتانسیل مؤثر را برای حرکت r رسم کنید. روی انواع حرکات ممکن بحث کنید بدون اینکه مساله را حل کنید. تا جایی که امکان دارد حرکات را کاملا توصیف کنید. بسامد چرخش حرکت دایره‌ای و بسامد نوسان‌های کوچک شعاعی حول این حرکت دایره‌ای را به‌دست آورید. چگونگی مدارهایی را توصیف کنید که با مدارهای دایره‌ای، تفاوت کمی دارند.

حل:

$$'V(r)'=V(r)+\frac{L^2}{2mr^2}\Rightarrow 'V(r)'=\frac12 kr^2+\frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\frac{d'V(r)'}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac12 kr^2+\frac{L^2}{2mr^2}\right)\Rightarrow\frac{d'V(r)'}{dr}=kr-\frac{L^2}{mr^3}$$

$$\frac{d^2\,'V(r)'}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(kr-\frac{L^2}{mr^3}\right)\Rightarrow\frac{d^2\,'V(r)'}{dr^2}=k+\frac{3L^2}{mr^4}$$



اگر $E \leq {}'V'_1$ باشد ذره در یکی از چاه‌ها حول نقطه‌ی تعادل، حرکت نوسانی، انجام می‌دهد.

اگر $E < {}'V'_1$ باشد ذره در مجموع دو چاه حول مبدأ حرکت نوسانی، انجام می‌دهد.

برای نقاط تعادل می‌توان نوشت:

$$\frac{d'V(r)'}{dr} = 0 \Rightarrow kr - \frac{L^2}{mr^3} = 0 \Rightarrow kr = \frac{L^2}{mr^3} \Rightarrow r^4 = \frac{L^2}{mk} \Rightarrow r = \pm\left[\frac{L^2}{mk}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2{}'V(r)'}{dr^2}\Big|_{r=r_0}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(k + \frac{3L^2}{m\frac{L^2}{mk}}\right)} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4k}{m}} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{m\left[\frac{L^2}{mk}\right]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

پس $\omega = 2\dot{\theta}$ است پس نوسانگر به ازای هر چرخش، ۲ نوسان انجام می‌دهد.

۴۴. بسامد نوسان‌های کوچک شعاعی حول حرکت دایره‌ای پایا را برای انرژی پتانسیل مؤثری به‌دست آورید که به‌وسیله‌ی رابطه‌ی (۳ـ ۲۳۲) برای نیروی جاذبه‌ی متناسب با $\frac{1}{r^2}$ داده می‌شود. نشان دهید این بسامد برابر بسامد چرخش است.

حل:

$$\vec{F} = -\nabla\vec{V} \Rightarrow \frac{k}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = \frac{k}{r}$$

$${}'V(r)' = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \Rightarrow {}'V(r)' = \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\frac{d'V(r)'}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}\right] \Rightarrow \frac{d'V(r)'}{dr} = -\frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}$$

$$\frac{d^2{}'V(r)'}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left[-\frac{k}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}\right] \Rightarrow \frac{d^2{}'V(r)'}{dr^2} = -\frac{2k}{r^3} - \frac{3L^2}{mr^4}$$

در نقطه تعادل:

$$\frac{d'V(r)'}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0 \Rightarrow -\frac{k}{r^2} = \frac{L^2}{mr^3} \Rightarrow r = -\frac{L^2}{mk}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2{}'V(r)'}{dr^2}\Big|_{r=r_0}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{2k}{\left(-\frac{L}{mk}\right)^3} + \frac{3L^2}{m\left(-\frac{L}{mk}\right)}\right]}\ \omega = \sqrt{\frac{m^2k^4}{L^6}} \Rightarrow \omega = \frac{mk^2}{L^3}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{m\left(-\frac{L^2}{mk}\right)^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{mk^2}{L^3}$$

پس $\omega = \dot{\theta}$ است پس نوسانگر به ازای هر چرخش، یک نوسان انجام می‌دهد.

۴۵. $r(t)$ و $\theta(t)$ را برای مدار ذره مساله ۴۳ به‌دست آورید. آن را با مدارهای بخش (۳ـ ۱۰) برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی، مقایسه کنید.

حل:

برای محاسبه $r(t)$ با استفاده از روابط (۳ـ ۲۱۴) می‌توان نوشت:

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\left[E - V(r) - \left(\frac{L^2}{2mr^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \Rightarrow \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\left[E - \frac{1}{2}kr^2 - \frac{L^2}{2mr^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \Rightarrow$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\left[\frac{k}{2r^2}\left(\frac{2E}{k}r^2 - r^4 - \frac{L^2}{mk}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \Rightarrow \int_{r_0}^{r}\frac{\sqrt{2}\,r\,dr}{\sqrt{k}\left(\frac{2E}{k}r^2 - r^4 - \frac{L^2}{mk}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \Rightarrow$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{\left(\frac{2E}{k}r^2 - r^4 - \frac{L^2}{mk}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t \Rightarrow \int_{r_0}^{r}\frac{\dfrac{r\,dr}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{mk}}}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{r^2 - \frac{E}{k}}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{L^2}{mk}}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t \Rightarrow$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{r^2-\frac{E}{k}}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2}-\frac{L^2}{mk}}}\right)\Bigg|_{r_0}^{r}=2\sqrt{\frac{k}{m}}t\Rightarrow\cos^{-1}\left(\frac{r^2-\frac{E}{k}}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2}-\frac{L^2}{mk}}}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{r_0^2-\frac{E}{k}}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2}-\frac{L^2}{mk}}}\right)=2\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

با درنظر گرفتن: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ و $\cos^{-1}\left(\frac{r_0^2-\frac{E}{k}}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2}-\frac{L^2}{mk}}}\right)=2\alpha$ داریم

$$\cos^{-1}\left(\frac{r_0^2-\frac{E}{k}}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2}-\frac{L^2}{mk}}}\right)=2\omega t+2\alpha\Rightarrow\frac{r^2-\frac{E}{k}}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2}-\frac{L^2}{mk}}}=\cos(2\omega t+2\alpha)\Rightarrow$$

$$r^2=\frac{E}{k}+\sqrt{\frac{E^2}{k^2}-\frac{L^2}{mk}}\cos(2\omega t+2\alpha)$$

برای محاسبه $\theta(t)$ با استفاده از روابط حاصله و رابطه‌ی (۳ ـ ۲۱۵) می‌توان نوشت:

$$\theta=\theta_0+\int_0^t\frac{L}{mr^2}dt\Rightarrow\theta=\theta_0+\int_0^t\frac{L}{m\left[\frac{E}{k}+\sqrt{\frac{E^2}{k^2}-\frac{L^2}{mk}}\cos(2\omega t+2\alpha)\right]}dt\Rightarrow$$

$$\theta-\theta_0=\int_0^t\frac{L}{\frac{m}{k}\left[E+\sqrt{E^2-\frac{L^2k}{m}}\cos(2\omega t+2\alpha)\right]}dt\Rightarrow$$

$$\theta-\theta_0=\int_0^t\frac{L\omega^2}{E+\sqrt{E^2-L^2\omega^2}\cos(2\omega t+2\alpha)}dt\Rightarrow$$

$$\theta-\theta_0=\frac{L\omega}{\sqrt{E^2-L^2\omega^2}}\int_0^t\frac{\omega dt}{\frac{E}{\sqrt{E^2-L^2\omega^2}}+\cos(2\omega t+2\alpha)}\Rightarrow$$

$$\tan(\theta-\theta_0)=\frac{\left(E-\sqrt{E^2-L^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{L\omega}\tan(\omega t+\alpha)$$

۴۶. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی مرکزی با پتانسیل: $V(r)=kr^4$ و $k>0$ حرکت می‌کند. به ازای چه انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای، مدار حرکت، دایره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات خواهد بود؟ زمان تناوب حرکت دایره‌ای را به‌دست آورید. اگر حرکت دایره‌ای ذره، کمی تغییر کند زمان تناوب نوسان‌های شعاعی کوچک حول $r=a$ چقدر می‌شود؟

حل:

طبق رابطه‌ی (۳ ـ ۲۱۸) داریم (پتانسیل مؤثر)

$$V'(r)=V(r)+\frac{L^2}{2mr^2}\Rightarrow V'(r)=kr^4+\frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\frac{dV'(r)}{dr}=0\Rightarrow 4kr^3-\frac{L^2}{mr^3}=0\Rightarrow r^6=\frac{L^2}{4mk}$$

$$r=a\Rightarrow a^6=\frac{L^2}{4mk}\Rightarrow L^2=4mKa^6\Rightarrow L=2a^3\sqrt{mk}$$

حرکت بر روی دایره‌ای به شعاع ثابت $r=a$ انجام می‌گیرد ($\dot{r}=0$) با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۱۲) برای انرژی می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=E\Rightarrow 0+\frac{4mKa^6}{2ma^2}+Ka^4=E\Rightarrow E=3Ka^4$$

برای محاسبه زمان تناوب با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۲۳) می‌توان نوشت:

$$\omega^2=\frac{1}{m}\frac{d^2V'}{dr^2}\Bigg|_{r=r_0}\Rightarrow\omega^2=\frac{1}{m}\left[12Kr^2+\frac{3L^2}{mr^4}\right]\Bigg|_{r=a}\Rightarrow\omega^2=\frac{1}{m}\left[12Ka^2+\frac{3\times4mKa^6}{ma^4}\right]\Rightarrow$$

$$\omega^2=\frac{24K}{m}a^2\Rightarrow\omega=a\sqrt{\frac{24K}{m}}\quad(1)$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{m}{24K}}\Rightarrow T=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi m}{6K}}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۲۴) برای سرعت زاویه‌ای حول مرکز نیرو در $r=a$ می‌توان نوشت:

$$\dot{\theta}=\frac{L}{ma^2}\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{2a^3\sqrt{mK}}{ma^2}\Rightarrow\dot{\theta}=a\sqrt{\frac{4K}{m}}$$

طبق رابطه (۱) $\omega=\sqrt{6}\,\dot{\theta}$ است یا ذره به ازای هر چرخش تقریباً ۲/۵ نوسان می‌کند.

۴۷. بنا به نظریه‌ی نیروهای هسته‌ای یوکاوا نیروی جاذبه بین نوترون و پروتون دارای پتانسیل: $V(r)=\frac{Ke^{-\alpha r}}{r}$ و $K > 0$ است. الف) نیرو را به‌دست آورید و آن را با نیروی متناسب با $\frac{1}{r^2}$ مقایسه کنید. ب) اگر ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر این نیرو حرکت کند در مورد انواع حرکت ممکن، بحث کنید. ج) چگونه حرکات از انواع حرکت متناظر با نیروی متناسب با $\frac{1}{r^2}$ فرق خواهند داشت. د) L و E را برای حرکت روی دایره‌ای به شعاع a به‌دست آورید. هـ) زمان تناوب حرکت دایره‌ای و نوسان‌های شعاعی کوچک را به‌دست آورید. و) نشان دهید a خیلی کوچک باشد مدارها نسبتاً دایره‌ای‌شکل و تقریباً بسته هستند.

حل:

الف) از تعریف گرادیان و کرل در مختصات کروی داریم

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}V\Rightarrow\vec{F}=-\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}\Rightarrow\vec{F}=-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{Ke^{-\alpha r}}{r}\right]\hat{r}\Rightarrow\vec{F}=Ke^{-\alpha r}\left[\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{r^2}\right]\hat{r}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi\end{vmatrix}\Rightarrow$$

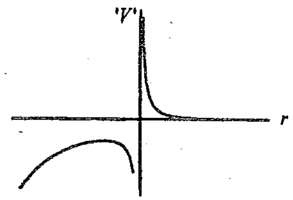
$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{1}{\sin^2\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ Ke^{-\alpha r}\left[\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{r^2}\right] & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{F}=0$$

این نیرو با نیروی متناسب با $\frac{1}{r^2}$ تفاوت دارد ولی کرل آن برابر صفر است پس از نوع نیروهای مرکزی است.

ب و ج)

$$V'(r)=V(r)+\frac{L^2}{2mr^2}\Rightarrow V'(r)=\frac{Ke^{-\alpha r}}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}$$



اگر انرژی ذره منفی باشد و:

ذره نزدیک نقطه‌ی تعادل پایدار باشد حول آن نقطه، حرکت نوسانی، انجام می‌دهد.

ذره دور از نقطه‌ی تعادل پایدار باشد به شدت به طرف مرکز نیرو جذب می‌شود.

اگر انرژی ذره مثبت باشد و:

فاصله ذره، کوچکتر از نقطه‌ی تعادل ناپایدار باشد ذره به طرف مرکز نیرو، جذب می‌شود.

فاصله ذره، بزرگتر از نقطه‌ی تعادل ناپایدار باشد ذره سریعاً از مرکز نیرو، دور می‌شود.

د) با استفاده از رابطه‌ی پتانسیل مؤثر می‌توان نوشت:

$$\frac{dV'}{dr}\Big|_{r=a}=0\Rightarrow -Ke^{-\alpha r}\left[\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{r^2}\right]\Big|_{r=a}-\frac{L^2}{mr^2}\Big|_{r=a}=0\Rightarrow\frac{L^2}{ma^2}=-Ke^{-\alpha a}\left[\frac{\alpha}{a}+\frac{1}{a^2}\right]\Rightarrow$$

$$L^2=-mKa(1+\alpha a)e^{-\alpha a}$$

چون حرکت روی دایره‌ای با شعاع ثابت $r = a$ انجام می‌شود پس $\dot{r}=0$ است. با استفاده از رابطه‌ی فوق رابطه‌ی (۳ـ۲۱۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=E\Rightarrow 0+\frac{-mKa(1+\alpha a)e^{-\alpha a}}{2ma^2}+\frac{Ke^{-\alpha a}}{a}=E\Rightarrow E=\frac{K(1-\alpha a)}{2a}e^{-\alpha a}$$

هـ) برای زمان تناوب حرکت دایره‌ای با استفاده از رابطه‌ی (۳ـ۲۲۴) در $r = a$ می‌توان نوشت:

$$\dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}\Big|_{r=a}\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{[-mKa(1+\alpha a)e^{-\alpha a}]^{\frac{1}{2}}}{ma^2}\Rightarrow\dot{\theta}=\left[-\frac{K}{ma^3}(1+\alpha a)e^{-\alpha a}\right]^{\frac{1}{2}}$$

برای زمان تناوب نوسان‌های شعاعی کوچک با استفاده از رابطه‌ی (۳ـ۲۲۳) در $r = a$ می‌توان نوشت:

$$\omega^2=\frac{1}{m}\frac{d^2V'}{dr^2}\Big|_{r=a}\Rightarrow\omega^2=\frac{1}{m}\frac{d^2}{dr^2}\left[\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{Ke^{-\alpha r}}{r}\right]\Big|_{r=a}\Rightarrow$$

$$\omega^2=\frac{1}{m}\left[\frac{3L^2}{2mr^4}+K\alpha^2\frac{e^{-\alpha r}}{r}+2K\alpha\frac{e^{-\alpha r}}{r^2}+2K\frac{e^{-\alpha r}}{r^3}\right]\Big|_{r=a}\Rightarrow$$

$$\omega^2=\frac{1}{m}\left[\frac{-3mKa(1+\alpha a)e^{-\alpha a}}{2ma^4}+Ka^2\frac{e^{-\alpha a}}{a}+2Ka\frac{e^{-\alpha a}}{a^2}+2K\frac{e^{-\alpha a}}{a^3}\right]\Rightarrow$$

$$\omega^2=\frac{-K(-\alpha^2a^2+\alpha a+1)}{ma^3}e^{-\alpha a}$$

و)

$$-\alpha^2a^2+\alpha a+1=0\Rightarrow a=\frac{-a\pm\sqrt{5\alpha^2}}{-2\alpha^2}\Rightarrow a=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2\alpha}$$

برای اینکه حرکت دایره‌ای باشد باید: $\frac{1-\sqrt{5}}{2\alpha}\le a\le\frac{1+\sqrt{5}}{2\alpha}$ پس a باید خیلی کوچک باشد.

۴۸. معادله‌ی مداری (۳ـ ۲۲۲) را برای حالت $F = 0$ حل کنید. نشان دهید جواب با قانون اول نیوتن، سازگار است.

حل:

$$F=0\Rightarrow\frac{d^2u}{d\theta^2}=-u\Rightarrow u=A\sin\theta\Rightarrow\frac{1}{r}=A\sin\theta\Rightarrow r=\frac{1}{A\sin\theta}$$

برای اینکه به ذره نیرو وارد نشود باید:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}=0\Rightarrow\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{A\sin\theta}\right)=0\Rightarrow\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{\sin\theta\times\sin^2\theta+\cos\theta\times 2\sin\theta\cos\theta}{A\sin^4\theta}=0$$

$$\sin\theta(\sin^2+\theta\,2\cos^2\theta)=0\Rightarrow\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta)=0\Rightarrow$$

$$\sin\theta(1+\cos^2\theta)=0\Rightarrow\sin\theta=0\Rightarrow\theta=n\pi$$

به ازای مقدار $\theta = n\pi$، مقدار r به سمت بی‌نهایت میل می‌کند یعنی وقتی به ذره نیرو، وارد نمی‌شود ذره تا بی‌نهایت می‌رود این موضوع، مطابق قانون اول نیوتن است.

۴۹. در فصل ششم (مساله ۷) نشان خواهیم داد اثر پخش یکنواخت غبار با چگالی ρ حول خورشید این است که به نیروی جاذبه‌ی گرانش خورشید به سیاره‌ای به جرم m نیروی مرکزی و جاذبه‌ی $F' = -mkr$ را اضافه می‌کند. $k = \frac{4\pi}{3}\rho G$ است. الف) اگر جرم خورشید M باشد

سرعت زاویه‌ای چرخش سیاره را در مدار دایره‌ای با شعاع r_0 به‌دست آورید. بسامد زاویه‌ای نوسان‌های شعاعی کوچک حول r_0 را به‌دست آورید و نشان دهید اگر F' بسیار کوچکتر از نیروی جاذبه‌ی گرانش خورشید باشد مدار نسبت به دایره‌ای شکل تقریباً یک بیضی خواهد بود که محور بزرگ آن به آهستگی با سرعت زاویه‌ای $\omega_p=2\pi\rho\left[\frac{r_0^3G}{M}\right]^{\frac{1}{2}}$ حرکت تقدیمی، انجام می‌دهد. ب) حرکت تقدیمی محور در جهت و یا خلاف جهت سرعت زاویه‌ای مداری است؟ جرم M خورشید و شعاع مدار سیاره‌ی عطارد را در مرجع پیدا کنید و سپس چگالی لازم غبار برای حرکت تقدیمی برابر ۴۱ ثانیه‌ی قوسی در قرن را به‌دست آورید.

حل:

الف) $F = -\frac{GmM}{r^2} - mkr$ است.

$$F=-\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow V(r)=-\int_{r_s}^{r}\vec{F}\cdot d\vec{r}\Rightarrow V(r)=-\int_{r_s}^{r}\left[-\frac{GmM}{r^2}-mkr\right]dr\Rightarrow$$

$$V(r)=GmM\int_{r_s}^{r}\frac{dr}{r^2}+mk\int_{r_s}^{r}r\,dr\Rightarrow V(r)=-\frac{GmM}{r}\Big|_{r_s}^{r}+\frac{mkr^2}{2}\Big|_{r_s}^{r}\Rightarrow$$

$$V(r)=-\frac{GmM}{r}+\frac{GmM}{r_s}+\frac{1}{2}mkr^2-\frac{1}{2}mkr_s^2$$

طبق تعریف پتانسیل مؤثر داریم

$$'V'(r)=V(r)+\frac{L^2}{2mr^2}\Rightarrow\ 'V'(r)=-\frac{GmM}{r}+\frac{GmM}{r_s}+\frac{1}{2}mkr^2-\frac{1}{2}mkr_s^2$$

$$+\frac{L^2}{2mr^2}\Rightarrow\ 'V'(r)=\ 'V'(r)-\frac{GmM}{r}+\frac{1}{2}mkr^2+\frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\frac{dV'}{dr}\Big|_{r=r_0}=0\Rightarrow\frac{GmM}{r_0^2}+mkr_0-\frac{L^2}{mr_0^3}=0\Rightarrow L^2=Gm^2Mr_0+m^2kr_0^4$$

برای بسامد زاویه‌ای نوسان‌های شعاعی کوچک حول $r = r_0$ با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۲۳) می‌توان نوشت:

$$\omega_r^2=\frac{1}{m}\left[\frac{d^2V'}{dr^2}\right]_{r=r_0}\Rightarrow\omega_r^2=\frac{1}{m}\left[\frac{-2GMm}{r_0^3}+mk+\frac{3L^2}{mr_0^4}\right]\Rightarrow$$

$$\omega_r^2=\frac{1}{m}\left[-\frac{2GMm}{r_0^3}+mk+\frac{3(Gm^2Mr_0+m^2kr_0^4)}{mr_0^4}\right]\Rightarrow\omega_r^2=4k+\frac{GM}{r_0^3}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۲۴) داریم

$$\omega_\theta^2=\dot{\theta}^2\Rightarrow\omega_\theta^2=\left[\frac{L}{mr^2}\Big|_{r=r_0}\right]^2\Rightarrow\omega_\theta^2=\frac{Gm^2Mr_0+m^2kr_0^4}{m^2r_0^4}\Rightarrow\omega_\theta^2=k+\frac{GM}{r_0^3}$$

با توجه به اینکه: $\omega_r\neq\omega_\theta$ پس مدار، بسته نیست.

اگر فرض کنیم: $\omega_p=\omega_r-\omega_\theta$ باشد

$$\omega_p=\left[4k+\frac{GM}{r_0^3}\right]^{\frac{1}{2}}-\left[k+\frac{GM}{r_0^3}\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega_p=\left[\frac{GM}{r_0^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left[1+\frac{4kr_0^3}{GM}\right]^{\frac{1}{2}}-\left[1+\frac{kr_0^3}{GM}\right]^{\frac{1}{2}}\right]\Rightarrow$$

$$\omega_p=\left[\frac{GM}{r_0^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left[1+\frac{1}{2}\times\frac{4kr_0^3}{GM}\right]-\left[1+\frac{1}{2}\times\frac{kr_0^3}{GM}\right]\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega_p=\left[\frac{GM}{r_0^3}\right]^{\frac{1}{2}}\times\frac{3kr_0^3}{2GM}$$

طبق مقدار k داریم

$$\Rightarrow\omega_p=\left[\frac{GM}{r_0^3}\right]^{\frac{1}{2}}\times\frac{3\times4\pi\rho Gr_0^3}{3GM}\Rightarrow\omega_p=2\pi\rho\left[\frac{r_0^3G}{M}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ب) چون $\omega_r>\omega_\theta$ است دوران کامل r قبل از اتمام یک دوران در θ پایان می‌یابد. پس کل مدار درخلاف جهت ω_θ با فرکانس ω_p می‌چرخد.

۵۰. الف) با استفاده از روش انرژی پتانسیل مؤثر در مورد انواع حرکت ممکن برای نیروی مرکزی جاذبه متناسب با عکس مکعب شعاع به‌صورت: $F(r)=-\frac{k}{r^3}$ و $k>0$ بحث کنید. ب) دامنه‌های انرژی و تکانه‌ای زاویه‌ای را برای هریک از حرکات ممکن به‌دست آورید. ج) معادله‌ی مداری (۳ ـ ۲۲۲) را حل کنید و نشان دهید جواب آن به صورت یکی از معادلات زیر است:

۱) $\frac{1}{r}=A\cos[\beta(\theta-\theta_0)]$ ۲) $\frac{1}{r}=A\cosh[\beta(\theta-\theta_0)]$

۳) $\frac{1}{r}=A\sinh[\beta(\theta-\theta_0)]$ ۴) $\frac{1}{r}=A(\theta-\theta_0)$

۵) $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}e^{\pm\beta\theta}$

د) هریک از انواع حرکت فوق به ازای چه مقادیری از E و L رخ می‌دهد؟ در هریک از حالات فوق، ضرایب A و β را برحسب E و L به‌دست آورید. هـ) شکل عمومی مدار هر حالت را رسم کنید.

حل:

$$F(r)=-\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow V(r)=-\int F(r)dr\Rightarrow V(r)=-\int-\frac{K}{r^3}dr\Rightarrow V(r)=-\frac{K}{2r^2}$$

طبق پتانسیل مؤثر داریم

$$'V'(r)=V(r)+\frac{L^2}{2mr^2}\Rightarrow{}'V'(r)=-\frac{K}{2r^2}+\frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\frac{d'V'}{dr}\Big|_{r=r_0}=0\Rightarrow\frac{K}{r^3}-\frac{L^2}{mr^3}=0\Rightarrow L^2=mK$$

حالت اول: اگر $L^2<mK$ باشد در این حالت $'V'(r)<0$ می‌شود و برای $E<0$ یک نقطه‌ی برگشت در $r=r_0$ وجود دارد. با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۱۲) می‌توان نوشت:

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)\Rightarrow E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{K}{2r^2}\Rightarrow E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2r^2}\left[K-\frac{L^2}{m}\right]$$

با فرض: $\beta^2=\frac{mK}{L^2}-1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}-\beta^2u=0\Rightarrow\begin{cases}u=A\cosh(\beta\theta+c)\\u=A\sinh(\beta\theta+c)\end{cases}\qquad(1)$$

چون $r = r_1$ نقطه‌ی برگشت است پس: $\dot{r}_\circ = 0$

$$E = \frac{1}{2r_\circ^2}\left[K - \frac{L^2}{m}\right] \Rightarrow r_\circ = \sqrt{\frac{\frac{L^2}{m}-K}{2E}} \qquad (۲)$$

اگر $r^{-1} \neq 0$ باشد آنگاه: $u = A\cosh(\beta\theta + c)$ است پس:

$$\frac{1}{r} = A\cosh(\beta\theta + c) \Rightarrow \frac{dr}{r^2} = A\beta\sinh(\beta\theta + c)d\theta$$

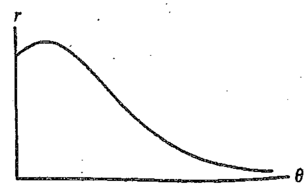
در $r = r_\circ$ و $\theta = \theta_\circ$، dr برابر صفر است پس:

$$dr = 0 \Rightarrow A\beta\sinh(\beta\theta_\circ + c) = 0 \Rightarrow \beta\theta_\circ + c = 0 \Rightarrow c = -\beta\theta_\circ$$

$$\frac{1}{r} = A\cosh(\beta\theta - \beta\theta_1) \Rightarrow \frac{1}{r} = A\cosh[\beta(\theta - \theta_\circ)]$$

در $r = r_\circ$ و $\theta = \theta_\circ$ و با استفاده از رابطه‌ی (۲) داریم:

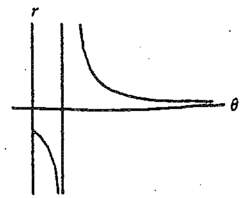
$$\frac{1}{r_\circ} = A\cosh[\beta(\theta_\circ - \theta_\circ)] \Rightarrow A = \frac{1}{r_\circ} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{\frac{L^2}{m}-K}}$$



حالت دوم: اگر $L^2 < mK$ باشد در این حالت $V'(r) > 0$ می‌شود و برای $E > 0$ نقطه‌ی برگشتی وجود ندارد. با توجه به روابط (۱) اگر: $u \to 0$ میل کند آنگاه $r \to \infty$ میل می‌کند پس: $\frac{1}{r} = A\sinh(\beta\theta + c)$ اگر $r \to \infty$ باشد آنگاه: $\theta \to \theta_\circ$ و می‌توان نوشت:

$$0 = A\sinh(\beta\theta_\circ + c) \Rightarrow \beta\theta_\circ + c = 0 \Rightarrow c = -\beta\theta_\circ$$

$$\frac{1}{r} = A\sinh(\beta\theta - \beta\theta_\circ) \Rightarrow \frac{1}{r} = A\sinh[\beta(\theta - \theta_\circ)] \Rightarrow$$



$$\frac{dr}{r^2} = A\beta\cosh[\beta(\theta - \theta_\circ)]d\theta \Rightarrow -\frac{\dot{r}}{r^2} = A\beta\cosh[\beta(\theta - \theta_\circ)]$$

با جاگذاری رابطه‌ی $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ در رابطه‌ی فوق داریم:

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = A\beta\cosh[\beta(\theta-\theta_\circ)]\frac{L}{mr^2} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{A\beta L\cosh[\beta(\theta-\theta_\circ)]}{m}$$

با جاگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی انرژی می‌توان نوشت:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\frac{A^2\beta^2L^2\cosh^2[\beta(\theta-\theta_\circ)]}{m^2} - \frac{1}{2r^2}\left[K - \frac{L^2}{m}\right]$$

$$\begin{cases} r \to \infty \\ \theta \to \theta_\circ \end{cases} \Rightarrow E = \frac{A^2\beta^2L^2}{2m} \Rightarrow A^2 = \frac{2mE}{\beta^2L^2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2mE}}{\beta L}$$

حالت سوم: اگر $L^2 = mK$ باشد:

$$V'(r) = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

با جاگذاری در معادله‌ی (۳ ـ ۲۲۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{mKu^2}(-Ku^2) \Rightarrow$$

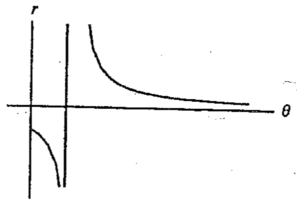
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow u = A\theta + c \Rightarrow \frac{1}{r} = A\theta + c$$

اگر $r \to \infty$ میل کند آنگاه $\theta = \theta_\circ$ است پس:

$$0 = A\theta_\circ + c \Rightarrow c = -A\theta_\circ \Rightarrow \frac{1}{r} = A\theta - A\theta_\circ \Rightarrow \frac{1}{r} = A(\theta - \theta_\circ)$$

$$-\frac{dr}{r^2} = Ad\theta \Rightarrow -\frac{\dot{r}}{r^2} = A\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = A\frac{L}{mr^2} \Rightarrow -\dot{r} = \frac{AL}{m}$$



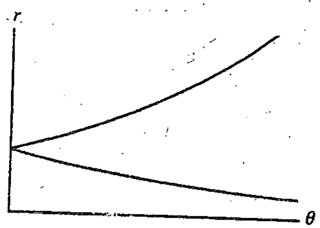
از طرفی: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ و در نتیجه $\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ است پس:

$$-\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{AL}{m} \Rightarrow A = -\frac{\sqrt{2mE}}{L}$$

حالت چهارم: اگر $L^2 < mK$ و $E = 0$ باشد پس:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2r^2}\left[K - \frac{L^2}{m}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{L^2\beta^2}{2mr^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} - \beta^2u = 0 \Rightarrow u = u_\circ e^{\pm\beta\theta} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r_\circ}e^{\pm\beta\theta}$$



۵۱. الف) در مورد انواع حرکت ممکن برای نیروی مرکزی: $F(r)=-\frac{K}{r^2}+\frac{K'}{r^3}$ بحث کنید. $K>0$ و برای K' هر دو علامت (مثبت و منفی) را درنظر بگیرید. ب) معادله‌ی مداری را حل کنید و نشان دهید اگر $L^2>-mK'$ مدارهای کراندار به‌صورت: $r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\alpha\theta}$ خواهند بود. ج) نشان دهید این مسیر، یک مسیر بیضی تقدیمی است و سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی را به‌دست آورید. حرکت تقدیمی با سرعت زاویه‌ای مداری هم‌جهت است یا مختلف‌الجهت؟

حل:

الف)

$$F(r)=-\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow V(r)=-\int F(r)dr\Rightarrow V(r)=-\int\left[-\frac{K}{r^2}+\frac{K'}{r^3}\right]dr\Rightarrow V(r)=-\frac{K}{r}+\frac{K'}{2r^2}$$

طبق پتانسیل مؤثر داریم

$$'V'(r)=V(r)+\frac{L^2}{2mr^2}\Rightarrow 'V'(r)=-\frac{K}{r}+\frac{K'}{2r^2}+\frac{L^2}{2mr^2}$$

با استفاده از معادله‌ی (۳ـ۲۲۲) که در آن $u=\frac{1}{r}$ خواهیم داشت

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=-u-\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)\Rightarrow\frac{d^2u}{d\theta^2}=-u-\frac{m}{L^2u^2}(-Ku^2+K'u^3)\Rightarrow$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(1+\frac{mK'}{L^2}\right)u=\frac{mK}{L^2}$$

با فرض: $\alpha^2=1+\frac{mK'}{L^2}$ ادامه می‌دهیم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\alpha^2u=\frac{mK}{L^2}\Rightarrow u=A\cos\alpha\theta+\frac{mK}{\alpha^2L^2}\Rightarrow\frac{1}{r}=A\cos\alpha\theta+\frac{mK}{\alpha^2L^2}\quad(1)$$

در $r=r_0$ که $\dot r=0$ است با استفاده از رابطه‌ی (۳ـ۲۱۲) می‌توان نوشت

$$E=\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)\Rightarrow E=\frac{L^2}{2mr_0^2}-\frac{K}{r_0}+\frac{K'}{2r_0^2}\Rightarrow\frac{1}{r_0^2}\left[\frac{L^2+mK'}{2m}\right]-\frac{K}{r_0}-E=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_0^2}-\left[\frac{2mK}{L^2+mK'}\right]\frac{1}{r_0}-\frac{2mE}{L^2+mK'}=0\Rightarrow\frac{1}{r_0}=\frac{mK}{L^2+mK'}\pm\sqrt{\left[\frac{-mK}{L^2+mK'}\right]^2+\frac{2mE}{L^2+mK'}}\quad(2)$$

در $r=r_0$ با استفاده از رابطه‌ی (۱) و جاگذاری مقدار α^2 می‌توان نوشت

$$\frac{1}{r_0}=A+\frac{mK}{\alpha^2+L^2}\Rightarrow\frac{1}{r_0}=A+\frac{mK}{\left(1+\frac{mK'}{L^2}\right)}\Rightarrow\frac{1}{r_0}=A+\frac{mK}{L^2+mK'}$$

با مساوی قرار دادن رابطه‌ی فوق با رابطه‌ی (۲) بدست می‌آوریم که

$$A=\sqrt{\left[\frac{-mK}{L^2+mK'}\right]^2+\frac{2mE}{L^2+mK'}}$$

ب) معادله‌ی یک بیضی ساکن به‌صورت: $r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}$ می‌باشد. با تبدیل θ به $\alpha\theta$ معادله‌ی یک بیضی در حال دوران به‌صورت: $r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\alpha\theta}$ خواهد بود.

ج) با استفاده از رابطه‌ی پتانسیل مؤثر می‌توان نوشت:

$$\frac{d'V'}{dr}\Big|_{r=r_0}=0\Rightarrow\frac{K}{r_0^2}-\frac{K'}{r_0^3}-\frac{L^2}{mr_0^3}=0\Rightarrow L^2=mKr_0-mK'$$

با جاگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۳ـ۲۲۴) می‌توان نوشت:

$$\dot\theta=\frac{L}{mr^2}\Rightarrow\dot\theta=\frac{\sqrt{mKr_0-mK'}}{mr^2}$$

اگر $K'>0$ باشد آنگاه: $\alpha>1$ و $\dot\theta$ و r هم جهت هستند.

اگر $K'<0$ باشد آنگاه: $\alpha<1$ و $\dot\theta$ و r درخلاف جهت یکدیگر هستند.

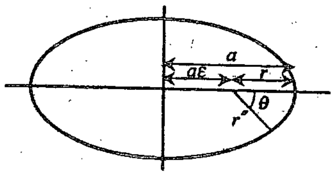
۵۳. ماهواره‌ی اکسپلورر I یک نقطه‌ی حضیض ۳۶۰ km و یک نقطه‌ی اوج ۲۵۴۹ km بالای سطح زمین داشت. وقتی ماهواره از نقطه‌ای می‌گذرد که ۹۰° (دور زمین) از نقطه‌ی حضیض‌اش فاصله دارد فاصله‌ی ماهواره از سطح زمین چقدر است؟

حل:

$(r_{earth}=6360\ km)$

$r'+r=2a\Rightarrow(6360+360)+(6360+2549)=2a\Rightarrow$

$15629=2a\Rightarrow a=7814/5\ km$



حال طبق شکل، داریم

$$a = a\varepsilon + r' \Rightarrow ۷۸۱۴/۵ = ۷۸۱۴/۵\varepsilon + (۶۳۶۰ + ۳۶۰) \Rightarrow ۱۰۹۴/۵$$

$$= ۷۸۱۴/۵\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = ۰/۱۴$$

$$r'' = \frac{a(۱ - \varepsilon^۲)}{۱ + \varepsilon\cos\theta} \Rightarrow ۶۳۶۰ + h = \frac{۷۸۱۴/۵ \times (۱ - ۰/۱۴^۲)}{۱ + ۰/۱۴ \times \cos ۹۰^\circ} \Rightarrow$$

$$۶۳۶۰ + h = ۷۶۶۱ \Rightarrow h = ۱۳۰۱ \text{ km}$$

۵۴. ستاره‌ی دنباله‌داری در فاصله‌ی $۱/۰ \times ۱۰^۸$ km از خورشید رصد شده که با سرعت ۵۱/۶ km/s در امتدادی که با شعاع ترسیمی از خورشید، زاویه‌ی ۴۵° می‌سازد به طرف خورشید، حرکت می‌کند. معادله‌ی مدار ستاره‌ی دنباله‌دار را در مختصات قطبی طوری بنویسید که خورشید درکانون باشد و محور xها هنگام رصد از مکان ستاره‌ی دنباله‌دار بگذرد. (جرم خورشید $۲/۰ \times ۱۰^{۳۰}$ kg است.)

حل:

طبق رابطه‌ی انرژی کل داریم

$$\begin{cases} ۱ \text{ km} = ۱۰^۳ \text{ m} \\ \dot r = ۵۱/۶ \text{ km/s} \\ r = ۱ \times ۱۰^۸ \text{ km} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot r = ۵۱/۶ \times ۱۰^۳ \\ r = ۱ \times ۱۰^۸ \times ۱۰^۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot r = ۵/۱۶ \times ۱۰^۴ \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ r = ۱ \times ۱۰^{۱۱} \text{ m} \end{cases}$$

$$E = E_k + V(r) \Rightarrow E = \frac{۱}{۲} m\dot r^۲ - \frac{GmM}{r} \Rightarrow$$

$$E = \frac{۱}{۲} \times m \times (۵/۱۶ \times ۱۰^۴)^۲ - \frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times m \times ۲ \times ۱۰^{۳۰}}{۱ \times ۱۰^{۱۱}}$$

$$E = -۲/۷۲ \times ۱۰^۶ \text{ m}$$

از طرفی طبق تعریف تکانه‌ی زاویه‌ای داریم:

$$\vec L = \vec r \times \vec p \Rightarrow L = rmv\sin\theta \Rightarrow L = ۱ \times ۱۰^{۱۱} \times m \times ۵/۱۶ \times ۱۰^۴ \times \sin(۴۵ + ۹۰) \Rightarrow$$

$$L = ۴/۵۶ \times ۱۰^{۱۴} \text{ m}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی (۳ـ۲۵۹) می‌توان نوشت:

$$B = \frac{mK}{L^۲} \Rightarrow B = \frac{m \times GmM}{L^۲} \Rightarrow B = \frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times ۲ \times ۱۰^{۳۰} \text{ m}^۲}{(۴/۵۶ \times ۱۰^{۱۴} \text{ m})^۲}$$

$$\Rightarrow B = ۶/۴۱ \times ۱۰^{-۱۰}$$

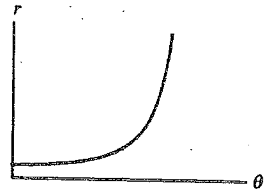
$$A = \left[B^۲ + \frac{۲mE}{L^۲}\right]^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow A = (۶/۴۱ \times ۱۰^{-۱۰})^۲ + \frac{۲m \times (-۲/۷۲ \times ۱۰^۶ \text{m})}{(۴/۵۶ \times ۱۰^{۱۴} \text{m})^۲}$$

$$\Rightarrow A = ۶/۴۱ \times ۱۰^{-۱۰} = B$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳ـ۲۵۶) و با فرض $\theta_۰ = ۰$ داریم

$$\frac{۱}{r} = B + A\cos(\theta - \theta_۰) \Rightarrow \frac{۱}{r} = ۶/۴۱ \times ۱۰^{-۱۰} + ۶/۴۱ \times ۱۰^{-۱۰} \cos\theta$$

$$\frac{۱}{r} = ۶/۴۱ \times ۱۰^{-۱۰}(۱ + \cos\theta) \Rightarrow r = \frac{۱/۵۶ \times ۱۰^۹}{۱ + \cos\theta}$$



۶۰. الف) ماهواره‌ای باید از سطح زمین پرتاب شود. فرض کنید زمین کره‌ای به شعاع R و اصطکاک جو، ناچیز است. ماهواره با سرعت زاویه‌ی α نسبت به قائم طوری پرتاب می‌شود که در ارتفاع $h_۱$ از سطح زمین بدون صرف توان، سرعتش افقی می‌شود. سپس به‌وسیله‌ی موشک، پیشرانی افقی به آن وارد می‌شود بطوری که سرعت ماهواره به اندازه‌ی $\Delta v_۱$ افزایش می‌یابد. مدار نهایی یک بیضی خواهد بود که ارتفاع نقاط حضیض (نزدیک‌ترین نقطه) و اوج (دورترین نقطه) آن از سطح زمین به ترتیب $h_۱$ و $h_۲$ است. سرعت اولیه‌ی $v_۰$ و سرعت اضافی $\Delta v_۱$ را برحسب R، α، $h_۱$، $h_۲$ و g (شتاب ثقل در سطح زمین) به‌دست آورید. ب) رابطه‌ای برای تغییر $\delta h_۱$ در نقطه‌ی حضیض ناشی از خطای $\delta\beta$ در امتداد پیشران نهایی تا مرتبه‌ی $(\delta\beta)^۲$ بنویسید.

حل:

طبق رابطه‌ی نیروی جاذبه‌ی گرانشی داریم

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int F(r)dr \Rightarrow V(r) = -\int -\frac{GmM}{r^۲}dr \Rightarrow V(r) = -\frac{GmM}{r}$$

در $r = r_۱$ سرعت ماهواره افقی می‌شود یعنی سرعت در راستای شعاع صفر می‌شود پس $\dot r_۱ = ۰$ است. از طرفی ماهواره هیچ توانی مصرف نمی‌کند پس انرژی کل، پایسته می‌ماند. با

استفاده از پایستگی انرژی در سطح زمین $r = R$ و در $r = r_1$ می‌توان نوشت

$$K_0+V_0=K_1+V_1\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}m\dot{r}_1^2+\frac{L_1^2}{2mr_1^2}-\frac{GMm}{r_1}\quad (1)$$

با استفاده از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای بین این دو نقطه می‌توان نوشت

$$L_0 = L_1 \Rightarrow mv_0R\sin\alpha = L_1$$

با جاگذاری رابطه‌ی فوق و همچنین رابطه‌ی شتاب گرانش: $g = GM/R^2$ در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{(mv_0R\sin\alpha)^2}{2mr_1^2} - \frac{mgR^2}{r_1} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{(mv_0R\sin\alpha)^2}{2m(R+h_1)^2} - \frac{mgR^2}{R+h_1} \Rightarrow$$

$$\frac{m^2v_0^2R^2\sin^2\alpha}{2m(R+h_1)^2}-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{mgR^2}{R+h_1}-mgR\Rightarrow v_0=\left[\frac{2gRh_1(R+h_1)}{(R+h_1)^2-R^2\sin^2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$$

با استفاده از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای داشتیم:

$$L_0=L_1\Rightarrow mv_0R\sin\alpha=mv_1r_1\Rightarrow v_1=\frac{R\sin\alpha}{r_1}v_0\Rightarrow v_1=\frac{R\sin\alpha}{R+h_1}\left[\frac{2gRh_1(R+h_1)}{(R+h_1)^2-R^2\sin^2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$$

با توجه به رابطه‌ی (۳ـ ۲۴۴) معادله‌ی حرکت بیضی به‌صورت: $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}$ است.

در نقطه‌ی حضیض (نزدیک‌ترین نقطه به مرکز بیضی) $\theta = 0$ و $r = R + h_1$ است پس:

$$R + h_1 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} \Rightarrow R + h_1 = a(1-\varepsilon)\quad (2)$$

در نقطه‌ی اوج (دورترین نقطه از مرکز بیضی) $\theta = \pi$ و $r = R + h_2$ است پس:

$$R + h_2 = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon} \Rightarrow R + h_2 = a(1+\varepsilon)\quad (3)$$

با جمع طرفین روابط (۲) و (۳) می‌توان نوشت:

$$R + h_1 + R + h_2 = a(1-\varepsilon) + a(1+\varepsilon) \Rightarrow a = \frac{2R + h_1 + h_2}{2}$$

با تقسیم طرفین روابط (۲) و (۳) بر هم می‌توان نوشت:

$$\frac{R+h_1}{R+h_2}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\Rightarrow \varepsilon=\frac{h_2-h_1}{2R+h_1+h_2}$$

برای محاسبه‌ی سرعت نهایی v_2 با استفاده از روابط (۳ـ ۲۶۰) و (۳ـ ۲۶۱) و تعریف تکانه‌ی زاویه‌ای داریم:

$$\varepsilon=\left[1+\frac{2EL_2^2}{mK^2}\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow \varepsilon^2-1=\frac{2EL_2^2}{mK^2}\Rightarrow \varepsilon^2-1=\frac{\frac{K}{a}\times L_2^2}{mK^2}\Rightarrow L_2^2=mKa(\varepsilon^2-1)\Rightarrow$$

$$L_2 = mr_1v_2 \Rightarrow L_2^2 = m^2r_1^2v_2^2 \Rightarrow mKa(\varepsilon^2-1) = m^2r_1^2v_2^2$$

با توجه به اینکه انرژی پتانسیل این مساله: $V(r) = -\frac{GmM}{r}$ است پس: $K = -GmM$ است:

$$m\times(-GmM)\times a(\varepsilon^2-1) = m^2r_1^2v_2^2 \Rightarrow -GMa(\varepsilon^2-1) = r_1^2v_2^2 \Rightarrow$$

$$-gR^2a(\varepsilon^2-1) = r_1^2v_2^2$$

$$v_2=\left[\frac{-gR^2a(\varepsilon^2-1)}{(R+h_1)}\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Rightarrow v_2=\left\{\frac{-gR^2\left[\frac{2R+h_1+h_2}{2}\right]\left[\left[\frac{h_2-h_1}{2R+h_1+h_2}\right]^2-1\right]}{(R+h_1)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$v_2=R\left[2g\frac{R^2+Rh_1+Rh_2+h_1h_2}{(R+h_1)^2(2R+h_1+h_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow v_2=R\left[2g\frac{R+h_2}{(R+h_1)(2R+h_1+h_2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta v=v_2-v_1\Rightarrow \Delta v=R\left[2g\frac{R+h_2}{(R+h_1)(2R+h_1+h_2)}\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{R\sin\alpha}{R+h_1}\left[\frac{2gRh_1(R+h_1)}{(R+h_1)^2-R^2\sin^2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$$

۶۲. موشکی در مداری بیضی‌شکل با فاصله‌ی حضیض r_1 و فاصله‌ی اوج r_2 از مرکز به دور زمین می‌چرخد. در نقطه‌ی معینی از مدار، موتور آن به مدت کوتاهی روشن می‌شود، تا سرعتش به اندازه‌ی Δv افزایش یابد و موشک در مداری قرار گیرد که با سرعت نهایی v_0 نسبت به زمین از میدان جاذبه فرار کند. (از اثرات خورشید و ماه، صرفنظر کنید.) نشان دهید

اگر در نقطه‌ی حضیض، پیشران به موازات سرعت مداری اعمال شود Δv کمینه مقدار را خواهد داشت. Δv را برحسب پارامترهای مدار بیضی‌شکل ε، a، شتاب g در فاصله‌ی R از مرکز زمین و سرعت نهایی v_0 به‌دست آورید. آیا می‌توانید از نظر فیزیکی توضیح دهید چرا هرقدر ε، بزرگتر باشد Δv کوچکتر است؟

حل:

اگر در نقطه‌ی r و θ سرعت موشک v باشد و سپس سرعتش به اندازه‌ی Δv افزایش یابد با استفاده از پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v + \Delta v)^2 - \frac{GmM}{r} \Rightarrow (v + \Delta v)^2 = \frac{2GM}{r} + v_0^2$$

شتاب گرانش در سطح زمین: $g = GM/R^2$ است پس:

$$(v+\Delta v)^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 \Rightarrow v+\Delta v = \left[\frac{2gR^2}{r} + v_0^2\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \Delta v = \left[\frac{2gR^2}{r} + v_0^2\right]^{\frac{1}{2}} - v \quad (1)$$

برای نقاط اوج $(r = r_1)$ و حضیض $(r = r_2)$ با استفاده از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای و پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow m_1 r_1 v_1 = m_2 r_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM}{r_2} \Rightarrow v_1^2 - \frac{2gR^2}{r_1} =$$

$$= v_2^2 - \frac{2gR^2}{r_2} \Rightarrow$$

$$v_1^2 - \frac{2gR^2}{r_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1^2 - \frac{2gR^2}{r_2} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2gR^2 r_1}{r_1(r_1 + r_2)} \quad (2)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳ـ۲۴۴) برای نقطه‌ی حضیض: $\theta = 0$ و نقطه‌ی اوج: $\theta = \pi$ داریم:

$$\theta = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos 0} \Rightarrow r_1 = \frac{a(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \times 1} \Rightarrow r_1 = a(1 - \varepsilon)$$

$$\theta = \pi \Rightarrow r_2 = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\pi} \Rightarrow r_2 = \frac{a(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \times (-1)} \Rightarrow r_2 = a(1 + \varepsilon)$$

مقادیر فوق را در رابطه‌ی (۲) جاگذاری می‌کنیم:

$$v_1^2 = \frac{2gR^2 a(1 + \varepsilon)}{a(1 - \varepsilon)[a(1 - \varepsilon) + a(1 + \varepsilon)]} \Rightarrow v_1^2 = \frac{gR^2(1 + \varepsilon)}{a(1 - \varepsilon)}$$

با استفاده از تعریف تکانه‌ی زاویه‌ای در $r = r_1$ می‌توان نوشت:

$$L = mr_1v_1 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = mr_1v_1 \Rightarrow \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\dot{\theta} = r_1v_1 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r_1v_1(1+\varepsilon\cos\theta)^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}$$

$$r = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta} \Rightarrow \dot{r} = \frac{a(1-\varepsilon^2)\varepsilon\theta\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$$

با استفاده از رابطه‌ی سرعت در این مختصات می‌توان نوشت:

$$v = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{a^2(1-\varepsilon^2)\varepsilon^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^4} + \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2\dot{\theta}^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}} \Rightarrow$$

$$v = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$v = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \times \frac{r_1v_1(1+\varepsilon\cos\theta)^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} \Rightarrow v = \frac{r_1v_1\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}}{a(1-\varepsilon^2)}$$

با جاگذاری v در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\Delta v = \left[\frac{2gR^2}{\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}} + v_0^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{r_1v_1(1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{a(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow$$

$$\Delta v = \left[\frac{2gR^2(1+\varepsilon\cos\theta)}{a(1-\varepsilon^2)} + v_0^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{r_1v_1(1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{a(1-\varepsilon^2)}$$

با جاگذاری r_1 و v_1 محاسبه شده در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$\Delta v = \left[\frac{2gR^2(1+\varepsilon\cos\theta)}{a(1-\varepsilon^2)} + v_0^2\right]^{\frac{1}{2}} - a(1-\varepsilon)\left[\frac{gR^2(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{(1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{a(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow$$

$$\Delta v=\left[\frac{2gR^2(1+\varepsilon\cos\theta)}{a(1-\varepsilon^2)}+v_0^2\right]^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{gR^2(1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta)}{a(1-\varepsilon^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial(\Delta V)}{\partial\theta}=0\,\frac{\varepsilon gR^2}{a(1-\varepsilon^2)}\sin\theta\left\{\left[\frac{2gR^2(1+\varepsilon\cos\theta)}{a(1-\varepsilon^2)}+v_0^2\right]^{-\frac{1}{2}}-\left[\frac{gR^2(1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta)}{a(1-\varepsilon^2)}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}=0$$

$$\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0$$

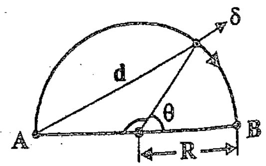
پس در $\theta=0$ مقدار Δv، کمینه است:

$$\Delta v=\left[\frac{2gR^2(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}+v_0^2\right]^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{gR^2(1+\varepsilon)^2}{a(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta v=\left[\frac{2gR^2}{a(1-\varepsilon)}+v_0^2\right]^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{gR^2(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

۶۴. ذره‌ای به جرم m در مداری بیضی‌شکل با محور بزرگتر $2a$ و ضریب خروج از مرکز ε، طوری حرکت می‌کند که شعاع ذره از مرکز بیضی، سطحی را با مقدار ثابت $C=\frac{dS}{dt}$ و زمان تناوب τ مستقل از a و ε می‌روبد. الف) معادله‌ی بیضی را در مختصاتی قطبی بنویسید که مبدا آن در مرکز بیضی باشد. ب) نشان دهید نیروی وارد بر ذره، مرکزی است و F(r) را برحسب m و τ به‌دست آورید.

حل:

الف) در بیضی زیر $OF=\varepsilon a$ و $OF'=\varepsilon a$ می‌باشد حال طبق شکل



$$r_1=\sqrt{r^2+(\varepsilon a)^2-2\varepsilon ar\cos\theta}$$

$$r_2=\sqrt{r^2+(\varepsilon a)^2-2\varepsilon ar\cos(\pi-\theta)}$$

با توجه به رابطه‌ی (۳ ـ ۲۴۲) می‌توان نوشت:

$$r_1+r_2=2a\Rightarrow(r_1+r_2)^2=4a^2\Uparrow r_1^2+r_2^2+2r_1r_2=4a^2\Rightarrow$$

$$(r^2+\varepsilon^2a^2-2\varepsilon ar\cos\theta)+(r^2+\varepsilon^2a^2+2\varepsilon ar\cos\theta)$$

$$+2\sqrt{r^2+\varepsilon^2a^2-2\varepsilon ar\cos\theta}\sqrt{r^2+\varepsilon^2a^2+2\varepsilon ar\cos\theta}=4a^2\Rightarrow$$

$$\sqrt{r^2+\varepsilon^2a^2-2\varepsilon ar\cos\theta}\sqrt{r^2+\varepsilon^2a^2+2\varepsilon ar\cos\theta}=2a^2-r^2-\varepsilon^2a^2\Rightarrow$$

$$(r^2+\varepsilon^2a^2-2\varepsilon ar\cos\theta)(r^2+\varepsilon^2a^2+2\varepsilon ar\cos\theta)=(2a^2-r^2-\varepsilon^2a^2)^2\Rightarrow$$

$$r^4+2\varepsilon^2a^2r^2+\varepsilon^4a^4-4\varepsilon^2a^2r^2\cos^2\theta=4a^4+r^4+\varepsilon^4a^4-4a^2r^2-4\varepsilon^2a^4+2\varepsilon^2a^2r^2$$

$$\Rightarrow-4\varepsilon^2a^2r^2\cos^2\theta=4a^4-4a^2r^2-4\varepsilon^2a^4\Rightarrow r^2-\varepsilon^2r^2\cos^2\theta=a^2-\varepsilon^2a^2\Rightarrow$$

$$r^2(1-\varepsilon^2\cos^2\theta)=a^2(1-\varepsilon^2)\Rightarrow r^2=\frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}\quad(1)$$

ب) اگر سطح جاروب شده برای زاویه‌ی $d\theta$ برابر dS باشد می‌توان نوشت:

$$dS=\frac{1}{2}r^2d\theta\Rightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۲۴) می‌توان نوشت:

$$C=\frac{1}{2}r^2\times\frac{L}{mr^2}\Rightarrow L=2mC$$

چون L برابر مقدار ثابتی است پس نیروی وارد بر این ذره از نوع نیروی مرکزی است. بنابراین E ثابت بوده و با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۱۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=E\Rightarrow\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right]-\frac{L^2}{mr^3}+\frac{dV}{dr}=\frac{dE}{dr}\Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dr}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right]-\frac{L^2}{mr^3}+\frac{dV}{dr}=0$$

$$\frac{1}{\dot{r}}\times\frac{1}{2}\times2\dot{r}\ddot{r}-\frac{L^2}{mr^3}=-\frac{dV}{dr}\Rightarrow m\ddot{r}-\frac{L^2}{mr^3}=F(r)$$

با توجه به معلوم بودن r، رابطه‌ی (۱) می‌توان F(r) را به‌دست آورد.

۶۵. نشان دهید اگر یکی از بارها منفی باشد فرمول سطح مقطع رادرفورد (۳ـ ۲۷۶) برقرار است.

حل:

اگر یکی از بارها مثبت باشد نیروی بین بارها از نوع جاذبه است پس فقط شکل پراکندگی عوض می‌شود. چون در روابط از اندازه‌ی کمیت‌ها استفاده شده است پس روابط، عوض نمی‌شوند در نتیجه، رابطه‌ی نهایی تغییر نمی‌کند و روش اثبات به همان صورتی است که در متن درس، بیان شده است.

۷۰. موشکی با سرعت اولیه‌ی v_0 به طرف ماه با جرم M و شعاع r_0، حرکت می‌کند. سطح مقطع برخورد با ماه را به‌دست آورید. ماه را ساکن درنظر بگیرید و از اثرات اجسام دیگر، صرف‌نظر کنید.

حل:

با توجه به رابطه‌ی (۳ ـ ۲۴۸) معادله‌ی هذلولوی به شکل $r = \frac{a(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos\theta}$ است

$$\theta = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{a(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos 0} \Rightarrow r_0 = \frac{a(\varepsilon-1)(\varepsilon+1)}{1+\varepsilon} \Rightarrow r_0 = a(\varepsilon-1) \Rightarrow a\varepsilon = r_0 + a$$

با توجه به اشکال ۳ ـ ۴۱ و ۳ ـ ۴۲ برای زاویه‌ی α داریم

$$\sin\alpha = \frac{s}{a\varepsilon} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{s}{r_0+a}$$

θ زاویه‌ی انحراف است و با توجه به شکل ۴ برای آن

$$\theta = \pi - 2a \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{s}{a+r_0} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{s}{a+r_0} \Rightarrow$$

$$s = (a+r_0)\cos\frac{\theta}{2} \quad (1)$$

با استفاده از روابط (۳ ـ ۲۳۰) و (۳ ـ ۲۶۱)

$$a = \left|\frac{K}{2E}\right| \Rightarrow a = \left|\frac{-GmM}{2E}\right| \Rightarrow E = \frac{GmM}{2a}$$

اگر ماهواره در نقطه‌ی پرتاب فقط دارای انرژی جنبشی باشد پس:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow \frac{GmM}{2a} = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow a = \frac{GM}{v_0^2} \quad (2)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۷۵) برای سطح مقطع برخورد و با استفاده از روابط (۱) و (۲)

$$d\sigma = 2\pi s\,ds \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi s\frac{ds}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi(a+r_0)\cos\frac{\theta}{2}\times\left[-\frac{1}{2}(a+r_0)\sin\frac{\theta}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -\pi(a+r_0)^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow d\sigma = -\pi\left(\frac{GM}{v_0^2}+r_0\right)^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\sigma = -\pi\left(\frac{GM}{v_0^2}+r_0\right)\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \Rightarrow \sigma = \pi\left(\frac{GM}{v_0^2}+r_0\right)^2$$

۷۱. نیروی دافعه مرکزی $F(r) = K/r^3$ و $K > 0$ (متناسب با عکس مکعب فاصله) مفروض است. نشان دهید مدارها به‌صورت مدار (۱) در مساله‌ی ۵۰ است و عدد ثابت β را برحسب K و E و L و جرم m ذره تابنده بنویسید. نشان دهید اگر ذره‌ای تحت تأثیر این نیرو باشد سطح مقطع پراکندگی $d\sigma$ بین زاویه Θ و $\Theta + d\Theta$ برابر: $d\sigma = \frac{2\pi^2K}{mv_0^2}\frac{\pi-\Theta}{\Theta^2(2\pi-\Theta)^2}d\Theta$

حل:

با فرض $u = \frac{1}{r}$ و با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۲۲) برای معادله‌ی حرکت داریم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}\times Ku^3 \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1+\frac{mK}{L^2}\right)u = 0$$

با فرض: $\beta^2 = 1 + \frac{mK}{L^2}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\beta^2u = 0 \Rightarrow u = A\cos\beta\theta \Rightarrow \frac{1}{r} = A\cos\beta\theta \quad (1)$$

با استفاده از تعریف نیرو می‌توان نوشت:

$$\vec{F}(r) = -\vec{\nabla}V(r) \Rightarrow V(r) = -\int F(r)dr \Rightarrow V(r) = -\int\frac{K}{r^3}dr \Rightarrow V(r) = \frac{K}{2r^2}$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) اگر: $\theta = 0$ باشد: $A = \frac{1}{r_0}$ است.

اگر حرکت بر روی دایره‌ای با شعاع ثابت r_0 باشد آنگاه: $\dot{r}_0 = 0$ است و با استفاده از رابطه‌ی (۳ ـ ۲۱۲) داریم:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}+V(r) = E \Rightarrow 0 + \frac{L^2}{2mr_0^2}+\frac{K}{2r_0^2} = E \Rightarrow \frac{1}{r_0^2} = \frac{2E}{\frac{L^2}{m}+K} \Rightarrow A = \left[\frac{2mE}{L^2+mK}\right]^{\frac{1}{2}}$$

با جاگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۱) برای معادله‌ی حرکت می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r} = \left[\frac{2mE}{L^2+mK}\right]^{\frac{1}{2}}\cos\beta\theta$$

$$r \to \infty \Rightarrow \cos\beta\theta = 0 \Rightarrow \beta\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{\beta}$$

با استفاده از رابطه‌ی فوق و تعریف زاویه‌ای انحراف θ' می‌توان نوشت:

$$\theta' = \pi - 2\theta \Rightarrow \theta' = \pi - \frac{\pi}{\beta} \Rightarrow \frac{\pi}{\beta} = \pi - \theta' \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{\pi-\theta'}$$

با استفاده از روابط به‌دست آمده برای β و با توجه به اینکه: $L = mr\nu_0$ است

$$\beta=\sqrt{1+\frac{mK}{L^2}}\Rightarrow\beta=\sqrt{1+\frac{mK}{m^2r^2\nu_0^2}}\Rightarrow\beta=\sqrt{1+\frac{K}{mr^2\nu_0^2}}\Rightarrow\beta^2-1=\frac{K}{mr^2\nu_0^2}\Rightarrow$$

$$r^2=\frac{K}{m\nu_0^2(\beta^2-1)}\Rightarrow r^2=\frac{K}{m\nu_0^2\left[\left(\frac{\pi}{\pi-\theta'}\right)^2-1\right]}\Rightarrow r^2=\frac{K(\pi-\theta')^2}{m\nu_0^2[\pi^2-(\pi-\theta')^2]}\Rightarrow$$

$$r^2=\frac{K(\pi-\theta')^2}{m\nu_0^2(2\pi\theta'-\theta'^2)}\Rightarrow 2rdr=\frac{K}{m\nu_0^2}\left[\frac{-2(\pi-\theta')(2\pi\theta'-\theta'^2)-(2\pi-2\theta')(\pi-\theta')^2}{(2\pi\theta'-\theta'^2)^2}\right]d\theta'\Rightarrow$$

$$2rdr=\frac{2\pi^2K}{m\nu_0^2}\,\frac{\pi-\theta'}{\theta'^2(2\pi-\theta')^2}d\theta'$$

حال طبق تعریف سطح مقطع پراکندگی

$$d\sigma = 2\pi rdr \Rightarrow d\sigma = \frac{2\pi^3K}{m\nu_0^2}\,\frac{\pi-\theta'}{\theta'^2(2\pi-\theta')^2}d\theta'$$

۷۴. ذره‌ی بارداری در میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی یکنواخت ثابت، حرکت می‌کند. نشان دهید اگر متغیر جدید: $\vec{r}'=\vec{r}-\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}ct$ را معرفی کنیم معادله‌ی حرکت r' همان معادله‌ی حرکت r می‌شود با این تفاوت که مولفه‌ی E عمود بر B، حذف شده است.

حل:

$$\vec{r}'=\vec{r}-\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}ct\Rightarrow\dot{\vec{r}}'=\dot{\vec{r}}-\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}c\Rightarrow\ddot{\vec{r}}'=\ddot{\vec{r}}\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}'=m\ddot{\vec{r}}\Rightarrow\vec{F}'=\vec{F}$$

نیروی وارده در هر دو حالت یکی است پس معادلات حرکت نیز یکسان خواهند بود.
با توجه به اینکه در $\vec{r}'$، حاصل‌ضرب خارجی، وجود دارد که این حاصل‌ضرب خارجی، باعث ایجاد جمله‌ای می‌شود که شامل مؤلفه‌ای از $\vec{E}$ است که عمود بر $\vec{B}$ است و علامت منها باعث حذف این جمله می‌شود.

۷۵. ذره‌ای با بار θ در مگنترون استوانه‌ای تحت تاثیر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=B\hat{k}$ و میدان الکتریکی ناشی از سیم واقع در مرکز در امتداد zها قرار گرفته است. اندازه و جهت میدان الکتریکی شعاعی (به طرف داخل یا خارج) برابر: $\vec{E}=a\hat{\rho}/\rho$ است. ρ فاصله‌ی ذره از

محور zها و $\hat{\rho}$ بردار یکه‌ای است که بطور شعاعی به طرف خارج محور z است. ضرایب ثابت a و B ممکن است مثبت یا منفی باشند. الف) معادلات حرکت را در مختصات استوانه‌ای بنویسید. ب) نشان دهید کمیت: $m\rho^2\dot{\varphi}+\frac{qB}{2c}\rho^2=K$، ثابت حرکت است. ج) با استفاده از این نتیجه و براساس انتگرال انرژی بطور کیفی درباره‌ی انوا حرکت ممکن، بحث کنید. تمام حالات را با تمام مقادیر ممکن a، B، K و E درنظر بگیرید. د) تحت چه شرایطی ممکن است حرکت ذره حول محور، حرکت دایره‌ای باشد؟ هـ) بسامد نوسان‌های شعاعی کوچک حول حرکت دایره‌ای را به‌دست آورید.

حل:

الف) نیروی وارد بر ذره از نوع نیروی لورنتس $\vec{F}=a\vec{E}+\frac{q}{c}\vec{\nu}\times\vec{B}$ است. در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\vec{\nu}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z}\\ \dot{\rho} & \rho\dot{\phi} & \dot{z}\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix}\Rightarrow\vec{\nu}\times\vec{B}=\rho B\dot{\phi}\hat{\rho}+\hat{\phi}(-\dot{\rho}B)\Rightarrow\vec{\nu}\times\vec{B}=\rho B\dot{\phi}\hat{\rho}-\dot{\rho}B\hat{\phi}\Rightarrow$$

$$\vec{F}=\frac{qa}{\rho}\hat{\rho}+\frac{q}{c}(\rho B\dot{\phi}\hat{\rho}-\dot{\rho}B\hat{\phi})\Rightarrow\vec{F}=\left[\frac{qa}{\rho}+\frac{q\rho B}{c}\right]\hat{\rho}-\frac{qB}{c}\dot{\rho}\hat{\phi}$$

طبق قانون دوم نیوتن در مختصات استوانه‌ای

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi})\hat{\rho}+m(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}+m\ddot{z}\hat{z}=\left[\frac{qa}{\rho}+\frac{q\rho B\dot{\phi}}{c}\right]\hat{\rho}-\frac{qB}{c}\dot{\rho}\hat{\phi}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)=\dfrac{qa}{\rho}+\dfrac{q\rho B\dot{\phi}}{c} & (1)\\ m(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})=-\dfrac{qB}{c}\dot{\rho} & (2)\end{cases}$$

ب) با ضرب طرفین رابطه‌ی (۲) در ρ داریم

$$m\rho(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})=-\frac{qB}{c}\rho\dot{\rho}\Rightarrow m(\rho^2\ddot{\phi}+2\rho\dot{\rho}\dot{\phi})=-\frac{qB}{c}\rho\dot{\rho}\Rightarrow$$

$$m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})=-\frac{qB}{2c}\frac{d}{dt}(\rho^2)\Rightarrow m\rho^2\dot{\phi}+q=-\frac{qB}{2c}\rho^2+c^2\Rightarrow m\rho^2\dot{\phi}+\frac{qB}{2c}\rho^2=K$$

ج) با توجه اینکه نیرو مستقل از زمان است با استفاده از تعریف توان داریم.

$$p=\frac{dW}{dt}\Rightarrow P=\frac{d}{dt}(\vec{F}\times\vec{r})\Rightarrow P=\vec{F}.\vec{\nu}\Rightarrow\frac{dT}{dt}=\vec{F}.\vec{\nu}\Rightarrow T=\int\vec{F}.\vec{\nu}\,dt\Rightarrow$$

$$T=\int(q\vec{E}+\frac{q}{c}\vec{\nu}\times\vec{B}).\vec{\nu}\,dt\Rightarrow T=\int q\vec{E}.\vec{\nu}\,dt\Rightarrow T=q\int\vec{E}.\frac{dr}{dt}dt\Rightarrow T=q\int\vec{E}.d\vec{r}\Rightarrow$$

$$T=q\int\frac{a}{\rho}\hat{\rho}.(\hat{\rho}d\rho+\rho\hat{\phi}d\phi+\hat{z}dz)\Rightarrow T=qa\int\frac{d\rho}{\rho}\Rightarrow T=qa\ln\rho+c$$

اگر $\rho = 0$ باشد آنگاه $c = E$ خواهد شد. با جایگذاری $\dot{\phi}$ از نتیجه قسمت ب بدست می‌آید که

$$T=qa\ln\rho+E\Rightarrow\frac{1}{2}m\nu^2=qa\ln\rho+E\Rightarrow\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m(\rho\dot{\phi})^2-qa\ln\rho=E\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\left[\frac{K}{m\rho}-\frac{qB}{2mc}\rho\right]^2-qa\ln\rho=E\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\left[\frac{K^2}{m^2\rho^2}-\frac{qBK}{m^2c}+\frac{q^2B^2}{4m^2c^2}\rho^2\right]-qa\ln\rho=E\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{K^2}{2m\rho^2}-\frac{qBK}{2mc}+\frac{q^2B^2}{8mc^2}\rho^2-qa\ln\rho=E\Rightarrow\quad(3)$$

د) اگر حرکت بر روی دایره‌ای به شعاع ρ_0 باشد $\rho = \rho_0$ آنگاه $\dot{\rho}=\ddot{\rho}=0$ خواهد بود پس در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت

$$-m\rho_0\dot{\phi}^2=\frac{qa}{\rho_0}+\frac{q\rho_0B}{c}\dot{\phi}\Rightarrow\dot{\phi}^2+\frac{qB}{mc}\dot{\phi}^2+\frac{qa}{m\rho_0^2}=0\Rightarrow\dot{\phi}=-\frac{qB}{2mc}\pm\sqrt{\frac{q^2B^2}{4m^2c^2}-\frac{qa}{m\rho_0^2}}$$

هـ) طبق رابطه (۳) و دو رابطه (۳ـ ۲۱۲) و (۳ـ ۲۱۸) داریم

$$V'(\rho)=\frac{K^2}{2m\rho^2}-\frac{qBK}{2mc}+\frac{q^2B^2}{8mc^2}\rho^2-qa\ln\rho$$

$$\frac{dV'(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}=0\Rightarrow-\frac{K^2}{m\rho_0^3}+\frac{q^2B^2}{4mc^2}\rho_0-\frac{qa}{\rho_0}=0\Rightarrow\quad(4)$$

$$\frac{q^2B^2}{4mc^2}\rho_0^4-qa\rho_0^2-\frac{K^2m}{=0}\Rightarrow\rho_0^2=\frac{2mac^2}{qB^2}+\sqrt{\left[\frac{2mac^2}{qB^2}\right]^2+\frac{4K^2c^2}{q^2B^2}}$$

حال برای بسامد نوسان‌های کوچک (طبق ۳ـ ۲۲۳) داریم

$$\omega^2=\frac{1}{m}\frac{d^2V'(\rho)}{d\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0}\Rightarrow\omega^2=\frac{1}{m}\left[\frac{3K^2}{m\rho_0^4}+\frac{q^2B^2}{4mc^2}+\frac{qa}{\rho_0^2}\right]$$

سؤالات کارشناسی ارشد

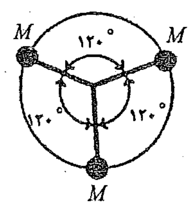
۱. براساس قانون سوم کپلر، چنانچه نیم قطر اطول سیاره‌ی زحل حدود ۱۰ واحد نجومی باشد، دوره‌ی تناوب زحل حدود چند سال است؟ (سراسری ـ ۸۵)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۴۰

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow \frac{\tau^2}{\tau^2_E} = \frac{a^3_E}{a^3} \Rightarrow \frac{\tau^2}{1} = \frac{(10a_E)^3}{a^3_E} \Rightarrow \tau \cong 30 \quad \text{yr}$$

۲. یک منظومه‌ی سه سیاره‌ای شامل سه ستاره با جرم‌های یکسان M و فواصل مساوی از یکدیگر است که در یک مدار مشترک دایره‌ای به شعاع R، حرکت می‌کنند. اگر تندی حرکت سه سیاره یکسان باشد، دوره‌ی تناوب حرکت هریک از سیارات کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\left[\dfrac{6\pi^2 R^3}{GM}\right]^{\frac{1}{2}}$ ۲) $\left[\dfrac{2\sqrt{3}\pi^2 R^3}{GM}\right]^{\frac{1}{2}}$

۳) $\left[\dfrac{4\sqrt{3}\pi^2 R^3}{GM}\right]^{\frac{1}{2}}$ ۴) $\left[\dfrac{2\pi^2 R^3}{GM}\right]^{\frac{1}{2}}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

طبق شکل

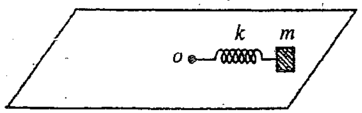
$$d^2 = R^2 + R^2 - 2RR\cos 120 \Rightarrow d^2 = 3R^2$$

از طرفی

$$F_t = 2F\cos\frac{60}{2} \Rightarrow MR\omega^2 = 2\frac{GMM}{d^2}\cos 30 \Rightarrow$$

$$\omega = \left[\frac{\sqrt{3}GM}{3R^3}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T = 2\pi\left[\frac{3R^3}{\sqrt{3}GM}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T = \left[\frac{4\sqrt{3}\pi^2 R^3}{GM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

۳. ذره‌ای به جرم m به فنری سبک با ثابت k وصل شده و فنر به نقطه‌ی ثابت o متصل است. این ذره با بسامد زاویه‌ای ω_θ حول نقطه‌ی o در چرخش است. اگر ذره در حین چرخش، حول شعاع تعادل، نوسانات شعاعی کم‌دامنه با بسامد زاویه‌ای ω_r انجام دهد، کدام رابطه درست است؟ راهنمایی: $V_{eff} = \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\omega_\theta = \omega_r$ ۲) $\omega_\theta = 2\omega_r$

۳) $\omega_r = 2\omega_\theta$ ۴) $\omega_r = 4\omega_\theta$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$V = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \Rightarrow V' = -\frac{L^2}{mr^3} + kr \Rightarrow V'' = \frac{3L^2}{mr^4} + k$$

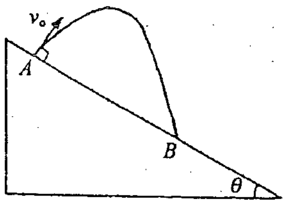
$$V'|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{mr_0^3} + kr_0 = 0 \Rightarrow kr_0^4 = \frac{L^2}{m} \Rightarrow r_0 = \left[\frac{L^2}{mk}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''}{m}}\Big|_{r=r_0} \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{3L^2}{mr_0^4} + k\right]} \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{4k}{m}} \Rightarrow \omega_r = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_\theta = \dot\theta = \frac{L^2}{mr_0^2} \Rightarrow \omega_\theta = \frac{L^2}{m}\left[\frac{mk}{L^2}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \omega_\theta = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_r = 2\omega_\theta$$

۴. پرتابه‌ای از بالای تپه‌ای مطابق شکل، عمود بر سطح تپه، پرتاب شده است. اندازه‌ی سرعت اولیه‌ی V_0 چند $\frac{m}{s}$ است؟ (سراسری ـ ۸۶)

(از مقاومت هوا چشم‌پوشی شود و $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، $AB = 75\ m$ و $g = 10\ \frac{m}{s^2}$)

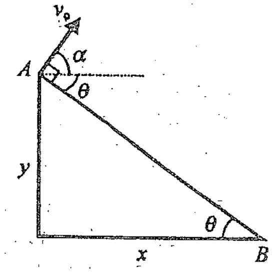


۱) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ۲) ۱۰

۳) ۱۵ ۴) ۲۰

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

طبق شکل $(\alpha = 90 - \theta)$



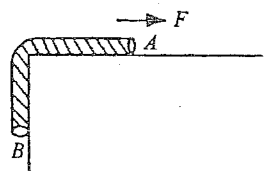
$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

$$AB\sin\theta = AB\cos\theta\frac{\sin(90-\theta)}{\cos(90-\theta)} - \frac{g(AB\cos\theta)^2}{2v^2\cos^2(90-\theta)}$$

$$\Rightarrow v_0 = 20\frac{m}{s}$$

۵. مطابق شکل، ریسمانی همگن به طول ۴ m و جرم ۳ kg بر روی میز نگه داشته شده، بطوری که نصف طول ریسمان از لبه‌ی میز آویزان است. ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین میز و ریسمان برابر است با $\mu_s = \frac{7}{10}$ و $\mu_k = \frac{1}{2}$ نیروی F به انتهای A چنان وارد می‌شود که ریسمان با سرعت ثابت روی میز کشیده شود تا تمامی ریسمان روی میز قرار گیرد. کار نیروی F در این انتقال چند ژول است؟ $(g = 10\ m/s^2)$ (سراسری ـ ۸۶)

۱) ۹ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۴۶/۵ ۴) ۸۴



گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$m=\lambda L \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 0/75\\ dm=\lambda dx\end{cases}$$

$$W_{mg} = \int_2^4 g\,dm \Rightarrow W_g = \int_2^4 g\lambda dx \Rightarrow W_g = 10\times 0/75x|_2^4 \Rightarrow W_g = 15\ J$$

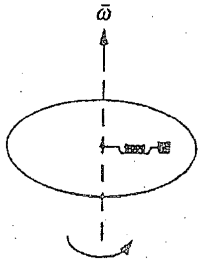
$$W_{f_k} = -\int_2^4 f_k x \Rightarrow W_f = -\int_2^4 \mu gx\,dm \Rightarrow W_f = -\int_2^4 \mu gx\lambda dx \Rightarrow W_f = -0/5\mu gx^2|_2^4 \Rightarrow$$

$$W_{f_k} = -0/5\times 0/75\times 10\times x^2|_2^4 \Rightarrow W_f = -22/5\ J$$

در نتیجه

$$W_{total} = |W_g| + |W_f| \Rightarrow W_t = 15+22/5 \Rightarrow W_t = 37/5\ J$$

۶. مطابق شکل بر روی قرصی افقی به شعاع R، جسمی متصل به فنری است که یک سر آن در مرکز قرص، ثابت شده است. قرص با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در حال دوران حول محور قائم گذرنده از مرکز قرص است. جسم متصل به فنر در امتداد شعاع، حول نقطه‌ی $\frac{R}{2}$ حرکت نوسانی با معادله‌ی $r = \frac{R}{10}\sin(\frac{\omega}{2}t)$ انجام می‌دهد. بیشینه اندازه شتاب شعاعی جسم متصل به فنر نسبت به زمین کدام است؟ (سراسری ـ ۸۶)



۱) $\frac{1}{8}R\omega^2$ ۲) $\frac{5}{8}R\omega^2$

۳) $\frac{23}{40}R\omega^2$ ۴) $R\omega^2$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

برای شعاع دوران در a_{max} به ازای $r = \frac{R}{10}$ داریم

$$R' = \frac{R}{2} + \frac{R}{10} \Rightarrow R' = \frac{6R}{10}$$

از طرفی برای شتاب شعاعی داریم

$$a_{max} = A\omega'^2 \Rightarrow a_{max} = \frac{R}{10}\times\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \Rightarrow a_{max} = \frac{R\omega^2}{40}$$

در نتیجه

$$A = a + a_{max} \Rightarrow A = R'\omega^2 + a_{max} \Rightarrow A = \frac{6R}{10}\omega^2 + \frac{R\omega^2}{40} \Rightarrow A = \frac{5}{8}R\omega^2$$

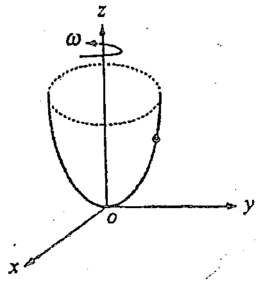
۷. مطابق شکل، مهره‌ای به جرم m روی سیم سهمی شکلی که حول محور تقارنش، یعنی محور oz با تندی دورانی ثابت ω در حال چرخیدن است می‌تواند بدون اصطکاک حرکت کند. معادله‌ی سیم $z = \alpha r^2$ است که α ثابت و r فاصله تا محور دوران است. در چه شرایطی مهره روی سیم در حال تعادل است؟ (سراسری ـ ۸۶)

۱) شرط وجود تعادل این است که $\omega > \sqrt{2\alpha g}$ باشد و در این صورت مهره در ارتفاع z_0 از مبدا $z_0 = \frac{\alpha}{\left[\frac{\omega^2}{g}\right]^2 - (2\alpha)^2}$ تعادل دارد.

۲) برای هر ω اختیاری، در هیچ نقطه‌ای روی سیم مهره تعادل ندارد.

۳) برای هر ω اختیاری، در هر نقطه روی سیم مهره می‌تواند در تعادل باشد.

۴) وقتی $\omega=\sqrt{2\alpha g}$ باشد، در هر نقطه روی سیم مهره می‌تواند در تعادل باشد.



گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$V = mgz \Rightarrow V = mg\alpha r^2$$

$$F=-\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow F=-2mg\alpha r\Rightarrow m\ddot{r}=-2mg\alpha r\Rightarrow \omega^2=2g\alpha\Rightarrow \omega=\sqrt{2g\alpha}$$

۸. در سوال ۲۱، اگر مهره در موقعیت (r,z) در حالت تعادل قرار داشته باشد، $N(r)$ نیرو عکس‌العمل سیم به مهره چقدر است؟ (سراسری ـ ۸۶)

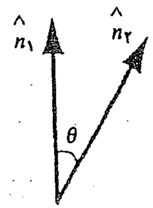
۱) $mg\sqrt{1+4\alpha^2r^2}$ ۲) $mg\sqrt{1+2\alpha r}$

۳) $mg(1+4\alpha^2r^2)$ ۴) $mg(1+2\alpha r)$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$N=\sqrt{F^2+(mg)^2}\Rightarrow N=\sqrt{(2mg\alpha r)^2+(mg)^2}\Rightarrow N=mg\sqrt{1+4\alpha^2r^2}$$

۹. $\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ دو بردار یکه‌اند که با هم زاویه‌ی θ می‌سازند. کدام گزینه یک مجموعه بردارهای یکه و دو به دو متعامد را مشخص می‌کند؟ (سراسری ـ ۸۷)



۱) $\hat{n}_1$ و $\frac{\hat{n}_1\times\hat{n}_2}{\sin\theta}$ و $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin\theta}$

۲) $\hat{n}_1$ و $\frac{\hat{n}_1\times\hat{n}_2}{\sin\theta}$ و $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin^2\theta}$

۳) $\hat{n}_2$ و $\frac{\hat{n}_2\times\hat{n}_1}{\sin\theta}$ و $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin\theta}$

۴) $\hat{n}_2$ و $\frac{\hat{n}_2\times\hat{n}_1}{\sin\theta}$ و $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin^2\theta}$

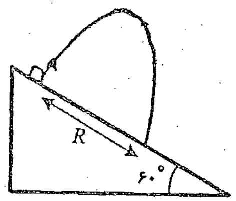
گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$\frac{\hat{n}_2\times\hat{n}_1}{\sin\theta}$ هم بر $\hat{n}_1$ و هم بر $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin\theta}$ عمود است.

$$\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin\theta}\times\hat{n}_1=\frac{\hat{n}_1\cos\theta-\hat{n}_2}{\sin\theta}\times\hat{n}_1=\frac{0-(-\sin\theta)}{\sin\theta}=1$$

زیرا در ضرب‌برداری $\vec{A}\times\vec{B}$ هم بر $\vec{A}$ و هم بر $\vec{B}$ عمود است.

۱۰. گلوله‌ای با سرعت v_0 با زاویه‌ای قائم نسبت به سطح تپه از روی تپه‌ای که شیب آن نسبت به افق 60° است شلیک می‌شود. برد پرتابه، R برابر است با: (سراسری ـ ۸۷)



۱) $4\frac{v_0^2}{g}$ ۲) $4\sqrt{3}\frac{v_0^2}{g}$

۳) $2\sqrt{3}\frac{v_0^2}{g}$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{v_0^2}{g}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

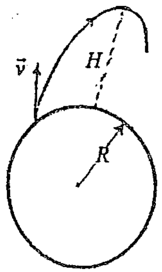
شبیه مسأله (۴) داریم $\alpha = 90-60=30$

$$y = x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\Rightarrow$$

$$-R\sin 60 = R\cos 60\tan 30-\frac{g(R\cos 60)^2}{2v_0^2\cos^2 30}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R=\frac{4\sqrt{3}v_0^2}{g}$$

۱۱. موشکی از سطح زمین (به جرم M و شعاع R) با سرعت اولیه‌ی $\vec{v}=(v_r,v_\theta)$ (که $v_\theta=r\dot{\theta}$ و $v_r=\dot{r}$) پرتاب می‌شود. با صرف‌نظر از مقاومت هوا و دوران زمین، بیشینه ارتفاع از سطح زمین، H، $(H << R)$ که موشک در مسیرش به آن می‌رسد تقریبا برابر است با: (سراسری ـ ۸۷)



۱) $\frac{v_r^2R}{2\left[\frac{GM}{R}-v_\theta^2\right]}$ ۲) $\frac{2v_r^2R}{\left[\frac{GM}{R}-v_\theta^2\right]}$

۳) $\frac{v_r^2R}{\left[\frac{GM}{R}-2v_\theta^2\right]}$ ۴) $\frac{v_r^2R}{\left[\frac{GM}{R}+2v_\theta^2\right]}$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$g = \frac{GM}{R^2} - \frac{v_\theta^2}{R}$ می‌باشد، پس

$$h=\frac{v_r^2}{2gh}\Rightarrow h=\frac{v_r^2}{2\left[\frac{GM}{R^2}-\frac{v_\theta^2}{R}\right]}\Rightarrow h=\frac{v_r^2R}{2\left[\frac{GM}{R}-v_\theta^2\right]}$$

۱۲. هرگاه بردار $\vec{V} = (x+2y+az)\hat{i} + (bx-3y-z)\hat{j} + (4x+cy+2z)\hat{k}$ غیر چرخشی باشد، می‌توان آن را به‌صورت گرادیان یک تابع نرده‌ای مانند φ نوشت $\vec{V} = \nabla\varphi$، φ عبارت است از: (سراسری ـ ۸۷)

۱) $\frac{x^2}{2}-\frac{3y^2}{2}+z^2-2xy+4yz+xz$

۲) $x^2-3y^2+z^2+2xy-4xz+yz$

۳) $\frac{x^2}{2}-\frac{3y^2}{2}+2z^2+2xz+xy-yz$

۴) $\frac{x^2}{2}-\frac{3y^2}{2}+z^2+2xy+4xz-yz$

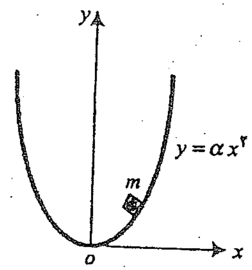
گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\vec{v}=\vec{\nabla}\varphi\Rightarrow\begin{cases}V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ V_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ V_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=\int V_x\,dx\\ \varphi=\int V_y\,dy\\ \varphi=\int V_z\,dz\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=\int(x+2y+az)dx\\ \varphi=\int(bx-3y-z)dy\\ \varphi=\int(4x+cy-2z)dz\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\varphi=\frac{1}{2}x^2+2xy+axz+c_1\\ \varphi=bxy-\frac{3}{2}y^2-yz+c_2\\ \varphi=4xz+cyz-z^2+c_3\end{cases}$$

در نتیجه $\varphi = \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}y^2-z^2+4xz+2xy-yz$

۱۳. جسم کوچکی به جرم m می‌تواند داخل یک کاسه‌ی سهمی شکل ساکن بدون اصطکاک مطابق شکل در یک صفحه‌ی قائم نوسان کند. بسامد زاویه‌ای نوسانات کوچک ذره حول نقطه‌ی تعادل‌اش چه‌قدر است؟ (سراسری ـ ۸۷)



۱) $\sqrt{g\alpha}$

۲) $\sqrt{\frac{g\alpha}{2}}$

۳) $\sqrt{2g\alpha}$

۴) $2\sqrt{g\alpha}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$V = mg\alpha x^2 \to V' = 2mg\alpha x \to V'' = 2mg\alpha$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2V}{dx^2}}\bigg|_{x=x_0}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{1}{m}(2mg\alpha)}=\sqrt{2g\alpha}$$

۱۴. ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل یک بعدی $V(x) = \frac{V_0a^2(a^2+x^2)}{8a^4+x^4}$ حرکت می‌کند. کدام یک از نقاط زیر نقطه‌ی تعادل ناپایدار ذره است؟ V_0 و a مقادیر ثابت حقیقی هستند.

(سراسری ـ ۸۷)

۱) $x = 0$

۲) $x=\sqrt{2}a$

۳) $x=-\sqrt{2}a$

۴) $x = a$

گزینه‌ی (۲) و (۳) صحیح است.

$$V(x) = \frac{V_0a^2(a^2+x^2)}{8a^4+x^4}\Rightarrow V' = -V_0a^2\times\frac{2x(8a^4+x^4)-(a^2+x^2)4x^3}{(8a^4+x^4)^2}$$

$$V'=0\Rightarrow 2x(8a^4+x^4)-(a^2+x^2)4x^3=0\Rightarrow\begin{cases}2x=0\Rightarrow x=0\\ 8a^4+x^4-2a^2x^2-2x^4=0\end{cases}$$

$$-x^4-2a^2x^2+8a^4=0\Rightarrow x^2=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4+8a^4}}{-1}\Rightarrow x^2=-a^2\mp 3a^2\Rightarrow x^2=2a^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}a$$

حال تعیین علامت زیر را انجام می‌دهیم، پس

		$-\sqrt{2}a$		۰		$\sqrt{2}a$	
$2x$	−		−	۰	+		+
$-x^2-2a^2x+8a^4$	−	۰	+		+	۰	−
V'	+	۰	−	۰	+	۰	−

۱۵. دوره‌ی تناوب حرکت سیاره‌ای به دور خورشید ۲۷ سال است. طول نیم قطر بزرگ مدار این سیاره به دور خورشید چند واحد نجومی است؟ (سراسری ـ ۸۷)

۱) ۰/۰۰۹ ۲) ۹ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰۰۰

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}a^3\Rightarrow\left[\frac{T'}{T}\right]^2=\left[\frac{a'}{a}\right]^3\Rightarrow\left[\frac{27}{1}\right]^2=\left[\frac{a'}{1}\right]^3\Rightarrow a'=9\ AU$$

$a=1\ AU$

۱۶. دو ذره با جرم یکسان، یکی در مسیر دایره‌ای و دیگری در مسیر سهمی در یک میدان نیروی مرکزی جاذبه‌ی $\frac{k}{r^2}$ $(k>0)$ با تکانه‌ی زاویه‌ای یکسان حرکت می‌کنند. اگر شعاع مسیر دایره‌ای R و فاصله‌ی نقطه‌ی حضیض سهمی از مرکز نیرو r_0 باشد، $\frac{R}{r_0}$ کدام است؟ (سراسری ـ ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$r_0=\frac{ml^2}{k(\epsilon+1)}\Rightarrow\begin{cases}R=\frac{ml^2}{k(0+1)}\\ r_0=\frac{ml^2}{k(1+1)}\end{cases}\Rightarrow\frac{R}{r_0}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}=2$$

۱۷. ذره‌ای به جرم m و تکانه‌ی زاویه‌ای L در یک مسیر مارپیچی به معادله‌ی $r=k\theta$ (که k ثابت است) حرکت می‌کند. شکل تابع نیروی مرکزی مدار فوق کدام است؟ (سراسری ـ ۸۷)

۱) $F(r)=\frac{-L^2}{m}\left[\frac{1}{r^3}+\frac{2k^2}{r^5}\right]$

۲) $F(r)=\frac{-L^2}{m}\left[\frac{1}{r^5}+\frac{2k^2}{r^3}\right]$

۳) $F(r)=\frac{-L^2}{m}\left[\frac{1}{r^5}+\frac{k^2}{r^3}\right]$

۴) $F(r)=\frac{-L^2}{m}\left[\frac{1}{r^3}+\frac{k^2}{r^5}\right]$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$r=\frac{1}{u}\Rightarrow u=\frac{1}{k\theta}\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=\frac{\theta^{-2}}{k}\Rightarrow\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{2}{k\theta^3}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{1}{ml^2u^2}f(u^{-1})\Rightarrow\frac{2}{k\theta^3}+\frac{1}{k\theta}=-\frac{k^2\theta^2}{ml^2}f(r)\Rightarrow\frac{2k^2}{r^3}+\frac{1}{r}=-\frac{r^2}{ml^2}f(r)\Rightarrow$$

$$f(r)=-\frac{m\left[\frac{l}{m}\right]^2}{r^2}\left[\frac{2k^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right]\Rightarrow f(r)=-\frac{L^2}{m}\left[\frac{2k^2}{r^5}+\frac{1}{r^3}\right]$$

۱۸. در صفحه‌ای که دو بردار $\hat{i}+\hat{j}$ و $\hat{j}+\hat{k}$ در آن قرار دارند بردار یکه‌ای بیابید که بر بردار $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ عمود باشد؟ (سراسری ـ ۸۸)

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}-\hat{k})$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{j}-\hat{k})$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

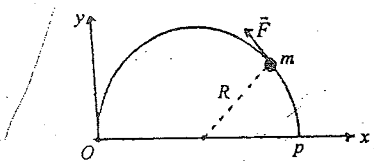
پس

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=0$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

۱۹. مهره‌ای به جرم m مقید است بر روی نیم‌دایره‌ای به شعاع R که در صفحه‌ی افق واقع است بدون اصطکاک حرکت کند. از p تا o یک نیروی مماسی متناسب با طول قوس پیموده شده به جسم وارد می‌کنیم. اگر مهره از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد تندی نهایی آن چقدر است؟ (سراسری ـ ۸۸)

فرض کنید در نقطه‌ی o نیروی مماسی برابر است با: $\vec{F}(0,0) = -F_0\hat{j}$



۱) $\sqrt{\frac{F_0\pi R}{2m}}$ ۲) $\sqrt{\frac{F_0\pi R}{m}}$

۳) $\sqrt{\frac{2F_0\pi R}{m}}$ ۴) $\sqrt{\frac{4F_0\pi R}{m}}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

طبق مسأله $\vec{F} = ks\hat{\theta}$ می‌باشد، پس در نقطه O داریم

$$\vec{F} = k(\pi R)\hat{\theta} \Rightarrow F_0\hat{\theta} = k(\pi R)\hat{\theta} \Rightarrow k = \frac{F_0}{\pi R}$$

از طرفی

$$W = \Delta K \Rightarrow \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow \int_0^\pi ks\hat{\theta}\cdot Rd\theta\hat{\theta} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi \frac{F_0}{\pi R}R^2\theta d\theta = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{F_0 R}{\pi}\frac{1}{2}\theta^2\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_0\pi R}{m}}$$

۲۰. جسمی از روی سطح زمین (به جرم M و شعاع R) با زاویه‌ی ۳۰° نسبت به راستای قائم (بر سطح زمین و با سرعت اولیه‌ی $v_0 = \sqrt{\frac{5GM}{4R}}$ پرتاب می‌شود. بیشینه فاصله‌ی جسم از سطح زمین چقدر خواهد بود؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید) (سراسری ـ ۸۸)

۱) R ۲) $\frac{3}{2}R$ ۳) 2R ۴) $\frac{5}{2}R$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$E = \frac{k}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{k}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{5GM}{4R} - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2a} \Rightarrow$$

$$-\frac{3}{8R} = -\frac{1}{2a} \Rightarrow a = \frac{4R}{3}$$

$$\alpha = (1-\varepsilon^2)a \Rightarrow \frac{ml^2}{k} = (1-\varepsilon^2)a \Rightarrow \frac{m(Rv_0\sin 30)^2}{GMm} = (1-\varepsilon^2)\frac{4R}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{m}{GMm}\times R^2\frac{5GM}{4R}\sin^2 30 = (1-\varepsilon^2)\times\frac{4R}{3} \Rightarrow (1-\varepsilon^2) = \frac{15}{64} \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{49}{64}$$

$$h = r - R \Rightarrow h = (1+\varepsilon)a - R \Rightarrow h = (1+\frac{7}{8})\times\frac{4}{3R} - R \Rightarrow h = \frac{5R}{2} - R$$

$$h = \frac{3}{2}R$$

۲۱. ذره‌ای تحت تاثیر یک نیروی جاذبه‌ی مرکزی به‌صورت $\vec{F}(r) = C_0\frac{e^{-r/a}}{r^2}(-\hat{e}_r)$ و $C_0 > 0$ روی مسیر دایره‌ای در حرکت است. کدام یک از بیانات زیر در مورد پایداری مدار دایره‌ای شکل این ذره درست است؟ (سراسری ـ ۸۸)

۱) به ازای همه‌ی مقادیر شعاع دایره، مدار ناپایدار است.

۲) به ازای همه‌ی مقادیر شعاع دایره، مدار پایدار است.

۳) در حالت شعاع دایره بزرگتر از a مدار پایدار ولی کوچکتر از a مدار ناپایدار است.

۴) در حالت شعاع دایره بزرگتر از a مدار ناپایدار ولی کوچکتر از a مدار پایدار است.

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

شرط تعادل مدار دایره‌ای

$$F(r)+\frac{r}{3}F'(r) < 0 \Rightarrow -C_0\frac{1}{r^2}e^{-\frac{r}{a}} + \frac{r}{3}\left[-C_0\left[-\frac{2}{r^3}e^{-\frac{r}{a}} - \frac{1}{a}\frac{1}{r^2}e^{-\frac{r}{a}}\right]\right] < 0$$

$$-1 + \frac{2}{3} + \frac{r}{3a} < 0 \Rightarrow \frac{r}{3a} < \frac{1}{3} \Rightarrow r < a$$

۲۲. یک نوترون به جرم m روی یک ستاره نوترونی به جرم M و شعاع R تحت تاثیر دو نیرو یکی نیروی جاذبه‌ی گرانشی $\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{e}_r$ (به سمت مرکز ستاره) و دیگری نیروی دافعه‌ی مرکزی ناشی از اصل طرد پائولی (به سمت خارج از مرکز ستاره) $\vec{F} = C_0\left[\frac{M^2}{m^5}\right]^{\frac{1}{3}}\frac{1}{R^3}\hat{e}_r$ قرار دارد که $C_0 = \left[\frac{9\pi}{4}\right]^{\frac{2}{3}}h^2$ است. از دوران ستاره‌ی نوترونی به دور خودش صرف‌نظر

کنید. مقدار شعاع تعادلی $R = R_0$ ستاره‌ی نوترونی و بسامد Ω_0 نوسانات شعاعی (یا تپش) سطحی ستاره کدام است؟ (سراسری ـ ۸۸)

۱) $R_0 = \dfrac{C_0}{G(Mm^8)^{\frac{1}{3}}}$ و $\Omega_0 = \dfrac{G^2 Mm^4}{c_0^{\frac{3}{2}}}$

۲) $R_0 = \dfrac{C_0}{G(2Mm^8)^{\frac{1}{3}}}$ و $\Omega_0 = 2\dfrac{G^2 Mm^4}{c_0^{\frac{3}{2}}}$

۳) $R_0 = \dfrac{C_0}{G(4Mm^8)^{\frac{1}{3}}}$ و $\Omega_0 = 4\dfrac{G^2 Mm^4}{c_0^{\frac{3}{2}}}$

۴) $R_0 = \dfrac{C_0}{2G(Mm^8)^{\frac{1}{3}}}$ و $\Omega_0 = 8\dfrac{G^2 Mm^4}{C_0^{\frac{3}{2}}}$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\Sigma F = 0 \to F = F_g \Rightarrow C_0 \left[\frac{M^2}{m^5}\right]^{\frac{1}{3}} \frac{1}{R_0^3} = G\frac{Mm}{R_0^2} \Rightarrow R_0 = \frac{C_0}{G(Mm^8)^{\frac{1}{3}}}$$

در $r = R_0$ داریم

$$F = mr\omega^2 \Rightarrow C_0 \left[\frac{M^2}{m^5}\right]^{\frac{1}{3}} \frac{1}{R_0^3} = mR_0\Omega_0^2 \Rightarrow \Omega_0^2 = C_0 \left[\frac{M^2}{m^5}\right]^{\frac{1}{3}} \frac{1}{mR_0^4}$$

$$\Rightarrow \Omega_0^2 = C_0 \left[\frac{M^2}{m^5}\right]^{\frac{1}{3}} \frac{G^4(Mm^8)^{\frac{4}{3}}}{mC_0^4} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{G^2Mm^2}{C_0^{\frac{3}{2}}}$$

فصل ۴

حرکت دستگاهی از ذرات

۱. قانون بقایی برای اندازه حرکت زاویه‌ای حول مبدأ دستگاهی از ذرات که در صفحه‌ای محدودند، به‌صورت ریاضی بیان کنید و سپس آن را ثابت کنید.

حل:

طبق قانون دوم نیوتن

$$\vec{F}_k = +\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)} = \frac{d\vec{P}_k}{dt}$$

طبق فرض نیروی خارجی صفر است و فقط نیروی داخلی داریم

$$\vec{F}_k^{(e)} = \vec{0}$$

اگر تعریف کنیم $\vec{P} = \sum_{k=1}^{N} \vec{P}_k$ بنابراین:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(i)} + \vec{F}^{(e)}$$

فرض اخیر را قوی‌تر می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم که:

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} = \vec{O}$$

جمله اول سمت راست تساوی را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{\ell\to k}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} [\sum_{\ell=1}^{k=1} \vec{F}_{\ell\to k}^{(i)} + \sum_{\ell=k+1}^{N} \vec{F}_{\ell\to k}^{(i)}]$$

طبق یک اصل ریاضی یعنی جابجاپذیری عمل جمع می‌توان عمل جمع را از سطری، به ستونی تغییر داد.

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=k+1}^{N} \vec{F}_{\ell\to k}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{k-1} \vec{F}_{\ell\to 1}^{(i)}$$

بنابراین

$$\frac{d\vec P}{dt}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{k-1}(\vec F^{(i)}_{k\to\ell}+\vec F^{(i)}_{\ell\to k})=\vec 0$$

زیرا طبق قانون سوم نیوتن $\vec F^{(i)}_{k\to\ell}=-\vec F^{(i)}_{\ell\to k}$

و این یعنی که $\vec P=cte$ یعنی در حالتی که حتی سیستم تحت اثر میدان نیروی خارجی است ولی در عین حال مجموع نیروی اعمال از طرف میدان نیروی خارجی صفر است، تکانه کل سیستم یعنی $\sum_{k=1}^{N}\vec P_k$ ثابت است و تغییری نمی‌کند.

تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای:

$$\vec L_k=\vec r_k\times\vec P_k$$

$\vec r_k$ بردار مکان ذره kام نسبت به مبدأ اختیاری و یکتای o است.

$$\vec L=\sum_{k=1}^{N}\vec L_k=\sum_{k=1}^{N}(\vec r_k\times\vec P_k)$$

$$\frac{d\vec L}{dt}=\sum_{k=1}^{N}(\dot{\vec r}_k\times\vec P_k)+\sum_{k=1}^{N}(\vec r_k\times\dot{\vec P}_k)\qquad(\dot{\vec r}_k\times\vec P_k=m\dot{\vec r}_k\times\dot{\vec r}_k=\vec 0)$$

$$\frac{d\vec L}{dt}=\sum_{k=1}^{N}(\vec r_k\times\dot{\vec P}_k)=\sum_{k=1}^{N}(\vec r_k\times(\vec F^{(i)}_k+\vec F^{(e)}_k))$$

بدلیل آنکه پیش‌فرض خاصی در مورد هندسه سیستم نکرده‌ایم، پس حتی اگر $\sum_{k=1}^{N}\vec F^{(e)}_k=\vec 0$ معلوم نیست که $\sum_{k=1}^{N}\vec r_k\times\vec F^{(e)}_k=\vec 0$ برقرار باشد. پس باید حتماً فرض کنیم که میدان نیروی خارجی صفر است.

$$\text{for}\quad k=1,\dots,N\quad \vec F^{(e)}_k=\vec 0$$

و طبق اثبات قبلی:

$$\frac{d\vec L}{dt}=\sum_{k=1}^{N}(\vec r_k\times\vec F^{(i)}_k)=\sum_{k=1}^{N}\vec r_k\times\Big(\sum_{\ell=1}^{k-1}(\vec F^{(i)}_{k\to\ell}+\vec F^{(i)}_{\ell\to k})\Big)=\vec 0$$

بنابراین:

$$\text{if}\quad \sum_{k=1}^{N}\vec F^{(e)}_k=\vec F^{(e)}=\vec 0\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{N}\vec P_k=\vec{cte}$$

$$\text{if for}\quad k=1,\dots,N\quad \vec F^{(e)}_k=\vec 0\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{N}\vec L_k=\vec L=\vec{cte}$$

در دو بعد، برای مثال x - y داریم $z=0$ ، $\dot z=0$

$$\text{if}\quad\sum_{k=1}^{N}(F^{(e)}_{x_k}\hat x+F^{(e)}_{y_k}\hat y)=\vec 0\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{N}m_k(\dot x_k\hat x+\dot y_k\hat y)=cte$$

$$\text{if}\quad F^{(e)}_{x_k}=F^{(e)}_{y_k}=0\quad(\text{for } k=1,\dots,N)\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{N}m_k(x_k y_k)=cte$$

۲. آب به میزان ۱۲۰ پوند بر دقیقه از ارتفاع ۱۶ فوتی به داخل بشکه‌ای ریخته می‌شود. وزن بشکه ۲۵ پوند است و بر روی ترازویی قرار گرفته است. پس از آن که آب به مدت یک دقیقه به درون بشکه ریخت، ترازو چه وزنی را نشان می‌دهد؟

حل:

اگر نیرویی که در لحظه t (غیر نیروی وزن بشکه) بر ترازو وارد می‌شود، نیروی F(t) بنامیم.

$$F(t)=\frac{dP}{dt}$$

$$F(t)=m(t)v(t)\quad\Rightarrow\quad F(t)=\dot m(v)+m(\dot v)\qquad \dot v=g$$

$$F(t)=\dot m v(t)+m(t)g\qquad m(t)=\int_0^t\dot m\,dt$$

$$\dot m=cte\quad\Rightarrow\quad m(t)=\dot m(t)$$

$$F(t)=\dot m(v+gt)$$

t زمانی است که از شروع ریزش آب می‌گذرد.

V(t) سرعت المان جرم‌ها در جریان آب درست در محل سطح آب در بشکه است.

برای به‌دست آوردن v(t) از قضیه بقای انرژی استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=mgh$$

با فرض اینکه سرعت اولیه صفر است. (آب رها می‌شود)

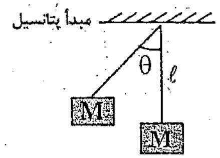
$$v(t)=\sqrt{2gh}$$

$$F(t)=\dot m(\sqrt{2gh}+gt)$$

$$w=w_0+F(1\,min)=[25(lb)+120\Big(\frac{lb}{min}\Big)(1\,min)+\sqrt{\frac{2\times16(ft)}{9.8(m/s^2)}}$$
$$\times\Big(120\Big(\frac{lb}{min}\Big)\Big)[9.8(m/s^2)]\cong1162(N)$$

۳. یک آونگ پرتابیکی که قرار است برای اندازه‌گیری سرعت گلوله به‌کار می‌رود و به‌وسیله معلق نگه‌داشتن مانعی چوبی به جرم M توسط ریسمانی به طول ℓ درست شده است. آونگ در ابتدا، به طول عمودی به حالت سکون آویزان است. گلوله‌ای به جرم m به مانع شلیک می‌شود و در آن فرو می‌رود. سپس آونگ شروع به نوسان می‌کند و بالا می‌رود تا اینکه ریسمان زاویه حداکثر θ را با محور عمودی می‌سازد، با به‌کار بردن قوانین بقای مناسب، سرعت اولیه گلوله را برحسب M و m و ℓ و θ به‌دست آورید.

حل:



$$\frac{1}{2}mv_0^2 = (M + m)g\ell\cos\theta - Mg\ell - mg\ell$$

$$v_0 = \left(\frac{2g\ell}{m}((M+m)\cos\theta-(M+m))\right)^{0.5}$$

برخورد گلوله با آونگ بالستیک طبق توصیف مسئله کاملاً غیرکشسان است.

انرژی جنبشی سیستم در حالت اولیه $\frac{1}{2}mv_0^2$ است و در حالت نهایی صفر، انرژی پتانسیل سیستم در حالت اولیه $(m + M)g\ell$ و در حالت نهایی $(m + M)g\ell\cos\theta$ (توجه کنید که گلوله در آونگ فرو رفته است)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + (m + M)g\ell = 0 + (m + M)g\ell\cos\theta$$

بنابراین

$$v_0 = 2\sqrt{g\ell}\left(\frac{M+m}{m}\right)^{0/5}\sin(\theta/2)$$

با توجه به فرمول:

$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2(\beta/2)$$

۴. جعبه‌ای به جرم m روی تسمه انتقال متحرکی می‌افتد که با سرعت ثابت V_0 حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک لغزشی بین جعبه و تسمه μ است. جعبه چقدر در امتداد تسمه می‌لغزد قبل از آنکه با همان سرعت تسمه به حرکتش ادامه دهد؟ چه نیروی F، باید به تسمه وارد شود تا حرکت آن را بعد از اینکه جعبه روی آن افتاد، با سرعتی ثابت نگه دارد و برای چه مدتی؟ ضربه حاصله توسط این نیرو را حساب کنید و بررسی کنید که اندازه حرکت بین زمان قبل از افتادن جعبه روی تسمه و زمانی که جعبه با تسمه حرکت می‌کند، نگه داشته می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی F جهت کشیدن تسمه را محاسبه کنید. کار هدر رفته به خاطر اصطکاک بین جعبه و تسمه را محاسبه کنید. بررسی کنید که انرژی داده شده به تسمه

توسط نیروی F درست برابر افزایش انرژی جنبشی جعبه به علاوه انرژی هدر رفته به خاطر اصطکاک است.

حل:

انرژی جنبشی جعبه از صفر به $\frac{1}{2}mv_0^2$ می‌رسد یک عامل خارجی وجود دارد و آن کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک بین جعبه و تسمه است که سطح انرژی جعبه را به این میزان بالا برده است.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu mg(\Delta x)$$

$\Delta x \equiv$ جابجایی لغزشی جعبه در امتداد تسمه

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

پس اولین خواسته مسئله توسط قضیه کار و انرژی جنبشی برآورد شد. $(W = \Delta K)$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^{\Delta x} F_f dx$$ که در واقع

یا می‌توان متصور شد که در دستگاه تسمه اتلاف $\frac{1}{2}mv_0^2$ توسط نیروی F_f در جابجایی Δx صورت گرفته که F_f نیروی اصطکاکی است که

$$F_f = \frac{dP}{dt} = \mu mg$$

و dx المان جابجایی جعبه در راستای سرعت تسمه است و ...

قسمت دوم از ما می‌خواهد که نیرویی را که باید بر تسمه وارد شود تا ضربه حاصل از افتادن جعبه روی آن توسط تسمه حس نشود را محاسبه کنیم.

$$\Delta P = mv_0 - 0 = mv_0$$

ضربه‌ای که حاصل از هم سرعت شدن جعبه با تسمه است و در راستای خلاف $\vec{v}_0$ به تسمه وارد می‌شود را محاسبه کردیم.

$$\Delta p = \int_{t_0}^{t_b} F(t)dt$$

یعنی ضربه Δp وارده به تسمه باید با ضربه $-\Delta p$ که توسط عامل خارجی دیگری به تسمه وارد می‌شود، خنثی شده تا تسمه در حالت کلی ضربه‌ای احساس نکند. نیروی $f(t)$ توسط یک منبع خارجی دیگری وارد می‌شود و تابعیت زمانی آن معلوم نیست (فعلاً). ولی بدیهی است که این نیرو، باید در طی فرآیند هم سرعت شدن جعبه با تسمه وارد شود.

$t_0 \equiv$ زمان قرار گرفتن جعبه ساکن روی تسمه متحرک

$t_h \equiv$ زمان هم سرعت شدن جعبه و تسمه

البته چون می‌خواهیم تسمه در هر المان زمانی dt ضربه‌ای احساس نکند می‌توان صورتی مفیدتر و دقیقتر از معادلهٔ اخیر را به‌کار برد.

$$dp = F(t)dt$$

که در حقیقت

$$F_f = \frac{dp}{dt} = F(t)$$

یعنی نیروی اعمال شده از منبع خارجی به تسمه دقیقاً در هر زمان t باید با نیروی اصطکاکی که از طرف جعبه به تسمه وارد می‌شود، برابر باشد، تا اینکه تسمه هیچ شتاب و ضربه‌ای را حس نکند.

$$F(t) = \frac{dp}{dt} = \mu mg$$

اگر معادله حرکت جعبه را درحالی توسط نیرو شتاب می‌گیرد بنویسیم، خواهیم داشت:

$$x(t) = \frac{1}{2}\mu g t^2 + x_0$$

که x محوری در راستای تسمه است و

$$a = \frac{1}{m}F_f = \frac{1}{m}\mu mg = \mu g$$

اگر قرار دهیم

$$\Delta x = \frac{1}{2}\mu g t_h^2 \Rightarrow t_h = (2\Delta x/\mu g)^{0.5} \qquad t_0 = 0$$

و یا توجه به نتیجه‌ای که برای Δx به‌دست آمد:

$$t_h = \frac{v_0}{\mu g}$$

که اگر معادله ابتدایی را به کار بگیریم:

$$\Delta p = \int_0^{t_h} F(t)dt = \int_0^{t_h} \mu mg\,dt = \mu mg t_h = mv_0$$

که مطابق انتظار بود. یعنی ضربه نیروی $F(t)$ بر تسمه با ضربه به جرم بر تسمه دقیقاً برابر است.

کار انجام شده جهت کشیدن تسمه توسط نیروی $\vec{F}$:

$$w_e = \int_0^{t_h} (\vec{F}.\vec{v})dt = +\mu mg v_0 t_h = mv_0^2$$

افزایش انرژی جنبشی جعبه توسط کاری که نیروی اصطکاک با تسمه روی جعبه انجام شده:

$$\Delta k_b = \int_0^{t_h} (\mu mg)(\mu g t)dt = (\mu g)^2 m \times \frac{1}{2} t_h^2 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

که البته به راحتی قابل محاسبه بود ولی می‌خواستیم از راه $W = \int (\vec{F}.\vec{v})dt$ به‌دست آید.

و نیز

$$E_W = \frac{1}{2} mv_0^2$$

که E_W انرژی تلف شده جرم m است در فرایند هم سرعت شدن با تسمه که این انرژی به حرارت مبدل شده است. که E_W در هر دستگاه لخت دلخواه یکسان است. $E_W = \int_0^{\Delta x} F_f dx$

بنابراین:

$$mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_e = \Delta k_b + E_W$$

۵. بیلچه‌ای به جرم m_1 به بازوی بی‌وزنی به طول ℓ وصل شده است، انتهای بازو در نقطه‌ای لولا شده است. بطورکه بیلچه می‌تواند آزادانه در صفحه قائم روی کمانی به شعاع ℓ نوسان کند. در فاصله ℓ زیر لولا تلی ازشن قرار دارد. بیلچه را آنقدر بلند می‌کنیم که با امتداد قائم زاویه ۴۵° بسازد. بیل آونگ‌وار فرود می‌آید و مشتی شن به جرم m_2 از زمین برمی‌دارد. حساب کنید که بازو پس از برداشتن شن تا چه اندازه‌ای نسبت به قائم بالا می‌رود. باید به دقت درنظر داشت که هر قسمت از نوسان بیلچه تابع کدام یک از قوانین بقا است، از اصطکاک به جز آنچه برای نگهداری شن در درون بیلچه لازم است صرف‌نظر کنید.

حل:

اگر θ_0 در حالت کلی زاویه ماکزیمم ابتدایی باشد:

$$k_i = 0 \qquad V_i = -m_1 g\ell \cos\theta_0$$

و θ در حالت کلی ماکزیمم زاویه پس نوسان بعدی باشد:

$$k_f = 0 \qquad V_f = -(m_1 + m_2)g\ell\cos\theta$$

مبدأ پتانسیل سطح نقطه آویز است.

با نوشتن بقای انرژی و اتلاف حاصل از ضربه جرم ساکن m_2 قبل از یادگیری:

$$\vec{L} = \vec{r} + \vec{p} \qquad \vec{r} = \ell\vec{r} \qquad \vec{p} = m\ell\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{L} = m\ell^2\dot\theta\hat{k} \qquad \Rightarrow m_1\dot\theta_i = (m_1+m_2)\dot\theta_f$$

۱ـ اولاً از گشتاور حاصل از اصطکاک بیلچه با شن‌ها صرف‌نظر کردیم.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ext} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{L} = c\vec{t}e$$

۲ـ اندیس f برای لحظه درست بعد از یادگیری شن و I برای لحظه درست قبل از بارگیری شن به کار رفته است.

$$E = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2 \qquad I = m\ell^2$$

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2}\ell^2(m_f\dot\theta_f^2 - m_i\dot\theta_i^2)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\ell^2[\frac{m_1^2}{m_1+m_2}\dot\theta_i^2 - m_1\dot\theta_i^2] = -E_i[m_2/(m_1+m_2)]$$

که قرار دادیم:

$$m_f = m_1 + m_2 \quad \& \quad m_i = m_1$$

if $m_1 >> m_2 \Rightarrow \Delta E \cong 0$

if $m_2 >> m_1 \Rightarrow \Delta E \cong E_i$

if $m_2 \sim m_1 \Rightarrow \Delta E \cong \frac{1}{2}E_i$

بقای انرژی را در نیمه اول راه (قبل از بارگیری) می‌نویسیم:

$$-m_1 g\ell\cos\theta_0 = -m_1 g\ell + E_i$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta E = -(\frac{m_2}{m_1+m_2})E_i = -(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2})g\ell(1-\cos\theta_0)$$

بقای انرژی را در نیمه دوم راه (قبل از یادگیری) می‌نویسیم:

$$-(m_1+m_2)g\ell\cos\theta = -(m_1+m_2)g\ell + E_f$$

$$\Rightarrow \Delta E = E_f - E_i = -(m_1+m_2)g\ell\cos\theta + -(m_1+m_2)g\ell + (-m_1 g\ell) + m_1 g\ell\cos\theta_0$$

$$\Rightarrow \Delta E = m_2 g\ell + m_1 g\ell\cos\theta_0 - (m_1+m_2)g\ell\cos\theta$$

$$\& \Rightarrow \Delta E = -[(m_1m_2)/(m_1+m_2)]g\ell(1-\cos\theta_0)$$

$$\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}(1-\cos\theta_0) = -m_2 - m_1\cos\theta_0 + (m_1+m_2)\cos\theta$$

$$\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}(1-\cos\theta_0) + m_2\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} + m_1\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos\theta_0 = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 1 - (1-\cos\theta_0)(\frac{m_1}{m_1+m_2})^2$$

$$\theta = \cos^{-1}[1 - (1-\cos\theta_0)(\frac{m_1}{m_1+m_2})^2]$$

که در مورد مسئله ما $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

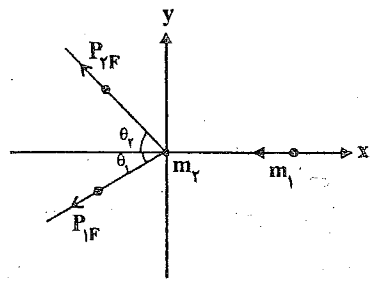
۱۵. ذره‌ای به جرم m_1، و انرژی T_{1I} بطور الاستیک (کشوار) با ذره ساکنی به جرم m_2 برخورد می‌کند. اگر ذره m_2 پس از برخورد تحت زاویه θ_2 نسبت به جهت اولیه حرکت ذره m_1 از آن دور شود، انرژی T_{2f} داده شده به آن را حساب کنید.

نشان دهید که T_{2f} برای برخورد رویاروی بزرگترین مقدار را دارد و در این حالت انرژی از دست رفته به‌وسیله ذره وارده عبارت است از:

$$T_{1I} - T_{2f} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}T_{1I}$$

حل:

فرض اولیه: برخورد غیرنسبیتی است.



$$\sum_{k=1}^{2} P_{yk} = 0 \Rightarrow P_{2f}\sin\theta_2 = P_{1F}\sin\theta_1$$

$$(II)\sum_{k=1}^{2} P_{xk} = P_{1I} \Rightarrow P_{2F}\cos\theta_2 + P_{1F}\cos\theta_1 = P_{1I} = \sqrt{2m_1T_{1I}}$$

$$\frac{P_{1f}^2}{2m_1} + \frac{P_{2f}^2}{2m_2} = T_{1f} = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$$

$$(m_1v_{1i} - m_2v_{2f}\cos\theta_2)^2 + (m_2v_{2f}\sin\theta_2)^2 = (m_1v_{1f}\cos\theta_1)^2 + (m_2v_{2f}\sin\theta_1)^2$$

$$\Rightarrow m_1^2v_{1i}^2 + m_2^2v_{2f}^2\cos^2\theta_2 - 2m_1m_2v_{1i}v_{2f}\cos\theta_2 + m_2^2v_{2f}^2\sin^2\theta_2$$

$$= m_1^2v_{1f}^2\cos^2\theta_1 + m_2^2v_{2f}^2\sin^2\theta_1$$

$$\Rightarrow m_1^2v_{1i}^2 + m_2^2v_{2f}^2 - 2m_1m_2v_{1i}v_{2f}\cos\theta_2 = m_1^2v_{1f}^2$$

$$\Rightarrow v_{1f} = \frac{1}{m}(m_1^2v_{1i}^2 + m_2^2v_{2f}^2 - 2m_1m_2v_{1i}v_{2f}\cos\theta_2)^{1/2}$$

$$m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{m}(m_1^2 v_{1i}^2 + m_2^2 v_{2f}^2 - 2m_1 m_2 v_{1i} v_{2f}\cos\theta_2) + m_2^2 v_{2f}^2$$

$$\Rightarrow v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}\cos\theta_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$T_{2f} = \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = 2\frac{m_1^2 v_{1i}^2\cos^2\theta_2}{(m_1 + m_2)^2}m_2$$

$$T_{2f} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}T_{1I}\cos^2\theta_2$$

$$\text{if } \theta_2 = 0 \Rightarrow T_{2f} = T_{2f_{max}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}T_{1I}$$

۱۶. عکس که از مسیر یک ذره وارد در اتاق ابر ویلسون برداشته شده است نشان می‌دهد که ذره پس از برخورد با زاویه θ_1 پراکنده شده است. مسیر ذره با جهت حرکت ذره وارد زاویه θ_2 می‌سازد. با فرض الاستیک بودن برخورد و اینکه ذره هدف در آغاز ساکن بوده است، نسبت اجرام (m_1/m_2) را به‌دست آورید. (فرض کنید که سرعت‌ها آن قدر کم بوده‌اند که می‌توان روابط کلاسیک را برای انرژی و اندازه حرکت به‌کار برد)

حل:

بقای اندازه حرکت در راستای x و y:

$$x:\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}\cos\theta_1 = m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\cos\phi$$

$\phi \equiv$ زاویه سرعت جرم m_2 بعد از برخورد با سرعت اولیه جرم m_1
$\theta_1 \equiv$ زاویه سرعت ذره ورودی پس از برخورد با راستای x
$\theta_2 \equiv$ زاویه سرعت جرم m_2 قبل از برخورد با سرعت اولیه جرم m_1

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}\cos\theta_1 - m_1 v_{1f}\cos\theta_1 = m_2 v_{2f}\cos\phi \qquad (I)$$

$$y:\ m_2 v_{2i}\sin\theta_2 = m_1 v_{1f}\sin\theta_1 - m_2 v_{2f}\sin\phi$$

$$m_1 v_{1f}\sin\theta_1 - m_2 v_{2i}\sin\theta_2 = m_2 v_{2f}\sin\phi \qquad (II)$$

اگر قانون بقای انرژی جنبشی را برای قبل از برخورد و بعد از برخورد بنویسیم داریم

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

$$(m_1/m_2)v_{1i}^2 + v_{2i}^2 - (m_1/m_2)v_{1f}^2 = v_{2f}^2$$

اگر طرفین رابطه (I) و (II) را به توان دوم برسانیم و v_{2f}^2 را حساب کنیم و در رابطه‌ی قبل قرار دهیم:

$$(m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i}\cos\theta_2 - m_1 v_{1f}\cos\theta_1)^2 + (m_1 v_{1f}\sin\theta_1 - m_2 v_{2i}\sin\theta_2)^2$$

$$= (M_2 v_{2f}\cos\phi)^2 + (m_2 v_{2f}\sin\phi)^2$$

$\Rightarrow$

$$(m_1 v_{1i})^2 + (m_2 v_{2i}\cos\theta_2)^2 + (m_1 v_{1f}\cos\theta_1)^2 + 2(m_1 v_{1i})(m_2 v_{2i}\cos\theta_2) + 2(m_1 v_{1i})(-m_1 v_{1f}\cos\theta_1) + 2(m_2 v_{2i}\cos\theta_2)(--m_1 v_{1f}\cos\theta_1) + (m_1 v_{1f}\sin\theta_1)^2 + (m_2 v_{2i}\sin\theta_2)^2 + 2(m_1 v_{1f}\sin\theta_1)(-m_2 v_{2i}\sin\theta_2) = m_2 v_{2f}^2$$

$$\Rightarrow (m_1 v_{1i})^2 + (m_2 v_{2i})^2 + (m_1 v_{1f})^2 + 2m_1 m_2 v_{1i} v_{2i}\cos\theta_2 - 2m_1^2 v_{1i} v_{1f}\cos\theta_1 - 2m_1 m_2 v_2 v_{i1f}\cos(\theta_1 - \theta_2) = m_2 v_{2f}$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_{1i}^2 + v_{2i}^2 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_{1f}^2 + 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_{1i}v_{2i}\cos\theta_2 - 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_{1i}v_{2i}\cos\theta_1 - 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_{2i}v_{2f}\cos(\theta_1 - \theta_1) = v_{2f}^2$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_{1i}^2 + v_{2i}^2 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_{1f}^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_{1i}^2 + v_{2i}^2 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_{1f}^2 + 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_{1i}v_{2i}\cos\theta_2 - 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_{1i}\cos\theta_1 - 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_{2i}v_{1f}\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$\Rightarrow$

$$v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_{1i}^2 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_{1f}^2 + 2v_{1i}v_{2i}\cos\theta_2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta_1 - 2v_{2i}v_{1f}\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)(v_{1i}^2 + v_{1f}^2) = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{2i}\cos\theta_2 + 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta_1 + 2v_{2i}v_{1f}\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\Rightarrow x = (m_1/m_2) \qquad s = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$x = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{2i}\cos\theta_2 + 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta_1 + 2v_{2i}v_{1f}s}{(v_{1i}^2 + v_{1f}^2)}$$

۱۹. نشان دهید که ضریب برگشت در یک برخورد الاستیک (کشوار) برابر واحد است. یعنی نشان دهید که در یک برخورد الاستیک (کشوار) رویاروی بین دو ذره معادله (۴ـ۵۸) با $\varepsilon = 1$ برقرار است.

$$v_{2f} - v_{1f} = \varepsilon(V_{1I} - V_{2I}) \qquad (۵۸ـ۴)$$

$$P_i=P_f\Rightarrow m_1\vec{v}_{1i}m_2\vec{v}_{2i}=m_1\vec{v}_{1f}+m_2\vec{v}_{2f} \qquad (I)$$

حل:

با استفاده از قانون بقای انرژی جنبشی و تعریف ضرب داخلی می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2+\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2$$

$$\Rightarrow$$

$$m_1(v_{1i}^2-v_{1f}^2)=m_2(v_{2f}^2-v_{2i}^2)$$

$$\Rightarrow$$

$$m_1(\vec{v}_{1i}-\vec{v}_{1f}).(\vec{v}_{1i}+\vec{v}_{1f})=m_2(\vec{v}_{2f}-\vec{v}_{2i}).(\vec{v}_{2f}+\vec{v}_{2i})$$

با جایگذاری I در رابطه‌ی اخیر می‌توان نتیجه گیری کرد:

$$\vec{v}_{1i}+\vec{v}_{1f}=\vec{v}_{2f}+\vec{v}_{2i}$$

$$\vec{v}_{2f}-\vec{v}_{1f}=(1)(\vec{v}_{1i}-\vec{v}_{2i})\Rightarrow\varepsilon=1$$

۲۰. اگر ضریب برگشت e باشد، انرژی Q- ازدست رفته در یک برخورد رویاروی بین ذره‌ای به جرم m_1 با سرعت $\vec{v}_1$ و ذره ساکنی به جرم m_2، حساب کنید.

حل:

$$\vec{P}_i=\vec{P}_f\Rightarrow m_1\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_{2i}=m_1\vec{v}_{1f}+m_2\vec{v}_{2f}$$

$$m_1\vec{v}_{1i}-m_1\vec{v}_{1f}=m_2\vec{v}_{2f}$$

$$\vec{v}_{2f}=\frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_{1i}-\vec{v}_{1f}) \qquad (I)$$

از طرفی طبق (۴ ـ ۵۸):

$$\vec{v}_{2f}-\vec{v}_{1f}=e\vec{v}_{1i} \qquad (II)$$

با جایگذاری رابطه فوق در (I)

$$e\vec{v}_{1i}+\vec{v}_{1f}=\frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_{1i}-\vec{v}_{1f})$$

$$:m_1\vec{v}_{1i}-m_1\vec{v}_{1f}=em_2\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_{1f}$$

$$\Rightarrow(m_1-em_2)\vec{v}_{1i}=(m_1+m_2)\vec{v}_{1f}\Rightarrow\vec{v}_{1f}=(\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2})\vec{v}_{1i}$$

با جایگذاری در رابطه اخیر در (II)، $\vec{v}_{2f}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{v}_{2f}=e\vec{v}_{1i}+[(m_1-em_2)/(m_1+m_2)]\vec{v}_{1i}$$

$$\Rightarrow\vec{v}_{2f}=[(em_1+em_2+m_1-em_2)/(m_1+m_2)]\vec{v}_{1i}$$

$$\Rightarrow\vec{v}_{2f}=(e+1)(\frac{m_1}{m_1+m_2})\vec{v}_{1i} \qquad (III)$$

از طرفی طبق بقای انرژی می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$T_{1i}+T_{2i}=T_{1f}+T_{2f}+Q\Rightarrow Q=[T_{1i}+T_{2i}-(T_{1f}+T_{2f})]$$

$$Q=\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2-\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2-\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

$$\vec{v}_{2i}=\vec{0} \quad \& \quad \vec{v}_{1i}=\vec{v}_1$$

$$Q=\frac{1}{2}[m_1v_1^2-m_1v_{1f}^2-m_2v_{2f}^2]$$

$$Q=\frac{1}{2}[m_1v_1^2-m_1(\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2})^2v_1^2-m_2(\frac{m_1+em_1}{m_1+m_2})^2v_1^2$$

$$Q=\frac{1}{2}m_1v_1^2[1-(\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2})^2-\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}(1+e)^2]$$

$$Q = T_{1i}[\frac{m_2}{m_1+m_2}](1-e^2)$$

$$\begin{cases}\text{if} \quad e=1 \Rightarrow Q=0\\ \text{if} \quad m_2=0 \Rightarrow Q=0\end{cases}$$

۲۱. ذره‌ای به جرم m_1 و اندازه حرکت P_{1I} با ذره دیگری به جرم m_2 و اندازه حرکت P_{2I} که در جهت مخالف حرکت می‌کند، بطور الاستیک (کشوار) برخورد می‌کند، اگر ذره m_1 بعد از برخورد تحت زاویه θ_1 نسبت به مسیر اصلی خود حرکت کند، اندازه حرکت نهایی آن را پیدا کنید.

حل:

زاویه اندازه حرکت $\vec{P}_{1f}$ با محور x $\equiv \theta_1$

زاویه اندازه حرکت $\vec{P}_{2f}$ با محور x $\equiv \theta_2$

با نوشتن قانون بقا برای اندازه حرکت خطی:

راستای x : $P_{1i} - P_{2i} = P_{1f}\cos\theta_1 - P_{2f}\cos\theta_2$

$$\Rightarrow P_{1i} - P_{2i} - P_{1f}\cos\theta_1 \qquad (I)$$

راستای y : $0 = P_{1f}\sin\theta_1 - P_{2f}\sin\theta_2$

$$\Rightarrow P_{1f}\sin\theta_1 = P_{2f}\sin\theta_2 \qquad (II)$$

با نوشتن بقا برای انرژی جنبشی:

$$T_{1i} + T_{2i} = T_{1f} + T_{2f}$$

$$\Rightarrow (P_{1f}^2/2m_1)+(P_{2f}^2/2m_2)=(P_{1i}^2/2m_1)+(P_{2i}^2/2m_2)$$

اگر (I) و (II) را به توان ۲ برسانیم و سپس با هم و در رابطه اخیر قرار دهیم:

$$(P_{1i} - P_{2i} - P_{1f}\cos\theta_1)^2 + (P_{1f}\sin\theta_1)^2 = (-P_{2f}\cos\theta_2)^2 + (P_{2f}\sin\theta_2)^2$$

$$P_{1i}^2+P_{2i}^2+P_{1f}^2\cos^2\theta_1-2P_{1i}P_{1f}\cos\theta_1-2P_{1i}P_{2i}+P_{1f}^2\sin^2\theta_1=$$

$$=P_{2f}^2\cos^2\theta_2+P_{2f}^2\sin^2\theta_2=P_{2f}^2$$

$$\Rightarrow$$

$$P_{2f}^2=P_{1i}^2+P_{2i}^2+P_{1f}^2-2P_{1i}P_{2i}-2P_{1i}P_{1f}\cos\theta_1+2P_{1f}P_{2i}\cos\theta_1$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{P_{1i}^2}{2m_1}+\frac{P_{2i}^2}{2m_2}=\frac{P_{1f}^2}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}[P_{1i}^2+P_{2i}^2+P_{1f}^2-2P_{1i}P_{2i}-2P_{1i}P_{1f}\cos\theta_1+2P_{1f}P_{2i}\cos\theta_1]$$

اگر رابطه قبل را در m_2 ضرب کنیم:

$$(\frac{m_2}{m_1})P_{1i}^2+P_{2i}^2=(\frac{m_2}{m_1})P_{1f}^2+P_{1i}^2-2P_{1i}P_{2i}-2P_{1i}P_{1f}\cos\theta_1+P_{1f}+2P_{2i}P_{1f}\cos\theta_1$$

$$k=(m_2/m_1)$$

$$(k-1)P_{1i}^2=(k+1)P_{1f}^2-2P_{1f}(P_{1i}-P_{2i})\cos\theta_1-2P_{1i}P_{2i}$$

$$(k+1)P_{1f}^2-2P_{1f}(P_{1i}-P_{2i})\cos\theta_1-[(k-1)P_{1i}^2+2P_{1i}P_{2i}]=0$$

$$P_{1f}=\frac{1}{(k+1)}[(P_{1i}-P_{2i})\cos\theta_1\pm((P_{1i}-P_{2i})^2\cos^2\theta_1-(k^2-1)P_{1i}^2+2P_{1i}P_{2i})^{1/2}]$$

۲۲. اصلاحات نسبیتی رابطه‌ی (۴ ـ ۸۱) را وقتی به‌دست آورید که ذره ورودی m_1 و ذره خروجی m_3 با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کنند. فرض کنید ذره‌ی پس‌زده‌ی m_4 آن قدر آهسته حرکت کند که بتوان از رابطه‌ی کلاسیک بین انرژی و تکانه‌ی خطی، استفاده کرد.

حل:

طبق معادلات (۴ ـ ۸۰) و (۴ ـ ۷۵) داریم

$$Q = \frac{P_3^2}{2m_3} + \frac{P_1 2 + P_3^2 - 2P_1P_3\cos\theta_3}{2m_4} - \frac{P_1^2}{2m_1}$$

$$Q = \frac{P_3^2}{2m_3} + (\frac{m_1}{m_4})\frac{P_1^2}{2m_1} + (\frac{m_3}{m_4})\frac{P_3^2}{2m_3} - \frac{P_1^2}{2m_1} - \frac{2P_1P_3\cos\theta_3}{2m_4} \Rightarrow$$

$$Q=T_3+\frac{T_3^2}{2m_3c^2}+\left[\frac{m_1}{m_4}\right]\left[T_1+\frac{T_1^2}{2m_1c^2}\right]+\left[\frac{m_3}{m_4}\right]\left[T_3+\frac{T_3^2}{2m_3c^2}\right]-T_1-\frac{T_1^2}{2m_1c^2}$$

$$-\frac{1}{m_4}\left[2m_1\left[T_1+\frac{T_1^2}{2m_1c^2}\right]\right]^{\frac{1}{2}}\left[2m_3\left[T_3+\frac{T_3^2}{2m_3c^2}\right]\right]^{\frac{1}{2}}\cos\theta_3\Rightarrow$$

$$Q=\left[\frac{m_1}{m_4}-1\right]\left[T_1+\frac{T_1^2}{2m_1c^2}\right]+\left[1-\frac{m_3}{m_4}\right]\left[T_3+\frac{T_3^2}{2m_3c^2}\right]$$

$$-\frac{2\sqrt{m_1m_3}}{m_4}\left[T_1+\frac{T_1^2}{2m_1c^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[T_3+\frac{T_3^2}{2m_3c^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cos\theta$$

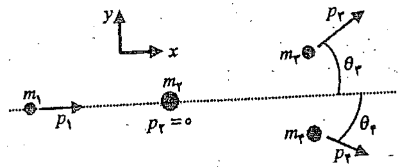
۲۳. ذره‌ای به جرم m_1 و تکانه‌ی p_1 با ذره‌ی ساکنی به جرم m_2 برخورد می‌کند. واکنشی رخ می‌دهد که دو ذره به جرم‌های m_3 و m_4 تولید می‌شوند که بعد از برخورد تحت زوایای θ_3 و θ_4 نسبت به مسیر اولیه m_1 حرکت می‌کنند. انرژی تولیدی را برحسب جرم ذرات، زوایای و p_1 به‌دست آورید.

حل:

طبق پایستگی تکانه خطی داریم

در راستای xها

$$p_1 = p_3\cos\theta_3 + p_4\cos\theta_4 \qquad (1)$$



در راستای yها

$$0 = p_3\sin\theta_3 - p_4\sin\theta_4 \Rightarrow p_3\sin\theta_3 = p_4\sin\theta_4 \Rightarrow p_3 = \frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}p_4 \qquad (2)$$

طبق (۱) و (۲) داریم

$$p_1 = p_4\frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}\cos\theta_3 + p_4\cos\theta_4 \Rightarrow p_1\sin\theta_3 = p_4\sin\theta_4\cos\theta_3 + p_4\cos\theta_4\sin\theta_3 \Rightarrow$$

$$P_1\sin\theta_3 = p_4\sin(\theta_3+\theta_4) \Rightarrow p_4 = \frac{\sin\theta_3}{\sin(\theta_3+\theta_4)}p_1$$

$$p_3 = \frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}p_4 \Rightarrow p_3 = \frac{\sin\theta_4}{\sin(\theta_3+\theta_4)}p_1$$

حال با استفاده از پایستگی انرژی می‌توان نوشت

$$E_i = E_f \Rightarrow T_1 + T_2 = T_3 + T_4 + Q \Rightarrow T_1 = T_3 + T_4 + Q \Rightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} =$$

$$= \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_4^2}{2m_4} + Q \Rightarrow$$

$$Q = \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{p_3^2}{2m_3} - \frac{p_4^2}{2m_4} \Rightarrow Q = \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{\sin^2\theta_3}{2m_4\sin^2(\theta_3+\theta_4)}p_1^2 \Rightarrow$$

$$Q = \left[\frac{1}{2m_1} - \frac{\sin^2\theta_4}{2m_3\sin^2(\theta_3+\theta_4)} - \frac{\sin^2\theta_3}{2m_4\sin^2(\theta_3+\theta_4)}\right]p_1^2$$

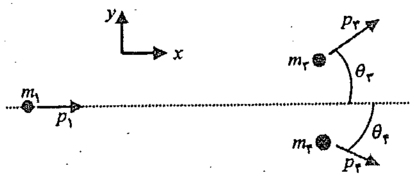
۲۴. یک واکنش هسته‌ای با Q معلوم در یک صفحه‌ی حساس عکاسی، رخ می‌دهد و در آن مسیرهای ذره‌ی ورودی m_1 و دو ذره‌ی m_3 و m_4 حاصل از واکنش را می‌توان دید. انرژی ذره ورودی را برحسب m_1، m_3، m_4 و Q و زوایای θ_3 و θ_4 بین مسیر ذره‌ی ورودی و مسیر نهایی دو ذره به‌دست آورید. اگر $Q = 0$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

حل:

طبق پایستگی تکانه خطی داریم

در راستای xها

$$p_1 = p_3\cos\theta_3 + p_4\cos\theta_4 \qquad (1)$$



در راستای yها

$$0 = p_3\sin\theta_3 - p_4\sin\theta_4 \Rightarrow p_3\sin\theta_3 = p_4\sin\theta_4 \Rightarrow p_3 = \frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}p_4 \qquad (2)$$

طبق (۱) و (۲) داریم

$$p_1 = p_4\frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}\cos\theta_3 + p_4\cos\theta_4 \Rightarrow p_1\sin\theta_3 = p_4\sin\theta_4\cos\theta_3 + p_4\cos\theta_4\sin\theta_3 \Rightarrow$$

$$P_1\sin\theta_3 = p_4\sin(\theta_3+\theta_4) \Rightarrow p_4 = \frac{\sin\theta_3}{\sin(\theta_3+\theta_4)}p_1$$

$$p_3 = \frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}p_4 \Rightarrow p_3 = \frac{\sin\theta_4}{\sin(\theta_3+\theta_4)}p_1$$

حال با استفاده از پایستگی انرژی داریم

$$E_i = E_f \Rightarrow T_1 = T_3 + T_4 + Q \Rightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_4^2}{2m_4} + Q \Rightarrow$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1^2\sin^2\theta_4}{2m_3\sin^2(\theta_3+\theta_4)} - \frac{p_1^2\sin^2\theta_3}{2m_4\sin^2(\theta_3+\theta_4)} + Q$$

$$Q = \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{p_1^2\sin^2\theta_4}{2m_3\sin^2(\theta_3+\theta_4)} - \frac{p_1^2\sin^2\theta_3}{2m_4\sin^2(\theta_3+\theta_4)} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{p_1^2}{2m_1}\left[1 - \frac{m_1\sin^2\theta_4}{m_3\sin^2(\theta_3+\theta_4)} - \frac{m_1\sin^2\theta_3}{m_4\sin^2(\theta_3+\theta_4)}\right] \Rightarrow Q = T_1\left[1 - \frac{\frac{m_1}{m_3}\sin^2\theta_4 + \frac{m_1}{m_4}\sin^2\theta_3}{\sin^2(\theta_3+\theta_4)}\right] \Rightarrow$$

$$Q = \frac{\sin^2(\theta_3+\theta_4) - \frac{m_1}{m_3}\sin^2\theta_4 - \frac{m_1}{m_4}\sin^2\theta_3}{\sin^2(\theta_3+\theta_4)}T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{Q\sin^2(\theta_3+\theta_4)}{\sin^2(\theta_3+\theta_4) - \frac{m_1}{m_3}\sin^2\theta_4 - \frac{m_1}{m_4}\sin^2\theta_3}$$

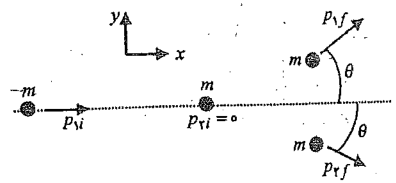
۲۵. یک توپ بیلیارد روی میز بدون اصطکاکی می‌لغزد و به توپ ساکن مشابهی، برخورد می‌کند. توپ‌ها محل برخورد را با زوایای $\pm\theta$ با جهت اصلی حرکت، ترک می‌کنند. نشان دهید پس از برخورد، توپ‌ها باید دارای انرژی چرخشی برابر $1-\frac{1}{2}\cos^{-2}\theta$ انرژی جنبشی اولیه باشند. فرض کنید هیچ انرژی در اثر اصطکاک، هدر نرفته است.

حل:

طبق پایستگی تکانه خطی داریم

در راستای yها

$$P_{iy} = P_{fy} \Rightarrow 0 = P_{1f}\sin\theta - P_{2f}\sin\theta \Rightarrow$$



$$P_{1f}\sin\theta = P_{2f}\sin\theta \Rightarrow P_{1f} = P_{2f} = P_f$$

در راستای xها

$$P_{ix} = P_{fx} \Rightarrow P_{1i} = P_{1f}\cos\theta + P_{2f}\cos\theta \Rightarrow P_{1i} = 2P_f\cos\theta \Rightarrow P_f = \frac{P_{1i}}{2\cos\theta}$$

حال با استفاده از پایستگی انرژی داریم

$$E_i = E_f \Rightarrow T_i = T_f + Q \Rightarrow T_{1i} = T_{1f} + T_{2f} + Q \Rightarrow$$

$$\frac{P_{1i}^2}{2m_1} = \frac{P_{1f}^2}{2m_1} + \frac{P_{2f}^2}{2m_2} + Q \Rightarrow$$

$$\frac{P_{1i}^2}{2m_1} = \frac{P_f^2}{2m} + \frac{P_f^2}{2m} + Q \Rightarrow \frac{P_i^2}{2m} = \frac{2P_f^2}{2m} + Q \Rightarrow Q = \frac{P_i^2}{2m} - \frac{2P_f^2}{2m} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{P_i^2}{2m} - \frac{P_i^2}{4m\cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{P_i^2}{2m}\left[1 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right] \Rightarrow Q = \left[1 - \frac{1}{2}\cos^{-2}\theta\right] T_i$$

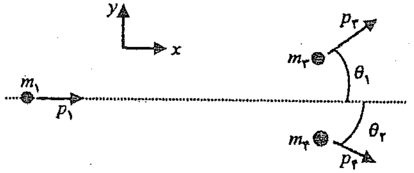
۲۶. یک ذره‌ی خنثی با جهت و تکانه‌ی خطی نامشخص در اتاقک حباب، واکنشی را ایجاد می‌کند که از آن دو ذره‌ی باردار به جرم‌های m_3 و m_4 با تکانه‌ی P_3 و P_4 تولید می‌شوند. زاویه بین مسیرها α است. جهت و تکانه‌ی ذره‌ی تابیده را به‌دست آورید. اگر جرم m_1 ذره‌ی تابیده، معلوم باشد یا بتوان حدس زد انرژی Q آزاد شده در واکنش را به‌دست آورید.

حل:

با فرض $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ و پایستگی تکانه خطی داریم

در راستای xها

$$P_{1x} = P_3\cos\theta_1 + P_4\cos\theta_2 \Rightarrow$$



$$P_{1x} = P_3\cos\theta_1 + P_4\cos(\alpha - \theta_1) \qquad (1)$$

در راستای yها

$$P_{1y} = P_3\sin\theta_1 - P_4\sin\theta_2 \Rightarrow P_{1y} = P_3\sin\theta_1 - P_4\sin(\alpha - \theta_1) \qquad (2)$$

با جمع مجذورات (۱) و (۲) داریم

$$P_{1x}^2 + P_{1y}^2 = P_3^2\cos^2\theta_1 + P_4^2\cos^2(\alpha - \theta_1) + 2P_3P_4\cos\theta_1\cos(\alpha - \theta_1)$$

$$+ P_3^2\sin^2\theta_1 + P_4^2\sin^2(\alpha - \theta_1) - 2P_3P_4\sin\theta_1\sin(\alpha - \theta_1) \Rightarrow$$

$$P_{1x}^2 + P_{1y}^2 = P_3^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + P_4^2[\cos^2(\alpha - \theta_1) + \sin^2(\alpha - \theta_1)]$$

$$+ 2P_3P_4[\cos\theta_1\cos(\alpha - \theta_1) - \sin\theta_1\sin(\alpha - \theta_1)] \Rightarrow$$

$$P_1^2 = P_3^2 + P_4^2 + 2P_3P_4\cos(\alpha - \theta_1 + \theta_1) \Rightarrow P_1^2 = P_3^2 + P_4^2 + 2P_3P_4\cos\alpha \Rightarrow P_1^2 = (\vec{P}_3 + \vec{P}_4)^2$$

در پایان طبق پایستگی انرژی داریم

$$E_i = E_f \Rightarrow T_1 = T_3 + T_4 + Q \Rightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_4^2}{2m_4} + Q \Rightarrow$$

$$Q = \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{p_3^2}{2m_3} - \frac{p_4^2}{2m_4} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{(\vec{P}_3 + \vec{P}_4)^2}{2m_1} - \frac{P_3^2}{2m_3} - \frac{P_4^2}{2m_4}$$

۲۷. پراکندگی کامپتون اشعه‌ی x را می‌توان به‌صورت برخورد کشسان فوتون‌های اشعه‌ی x و الکترون‌های آزاد، تعبیر کرد. طبق نظریه‌ی کوانتوم، انرژی و تکانه‌ی خطی فوتونی با طول موج λ به ترتیب $\frac{hc}{\lambda}$ و $\frac{h}{\lambda}$ است. h ثابت پلانک و c سرعت نور است. در پدیده‌ی کامپتون، اشعه‌ی x با طول موج معلوم λ_1 با جهت معلوم، هنگام عبور از ماده، پراکنده می‌شود و طول

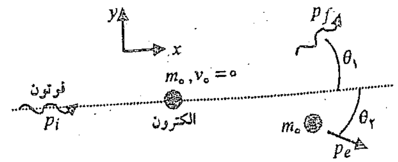
موج فوتون پراکنده شده λ_f تحت زاویه‌ی θ_1، نسبت به اشعه‌ی ورودی دارای طول موج بزرگتری است که تابع زاویه‌ی پراکندگی است. فرض کنید فوتون ورودی با الکترون ساکنی به جرم m برخورد کشسان انجام دهد. روابطی به‌دست آورید که پایستگی انرژی و تکانه‌ی خطی را بیان کند. با استفاده از روابط نسبیتی انرژی و تکانه‌ی خطی الکترون، نشان دهید که تغییر طول موج اشعه‌ی x به‌صورت: $\lambda_f - \lambda i = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta_1)$

و زاویه‌ی الکترون پراکنده شده: $\tan\theta_2 = \dfrac{\sin\theta_1}{\left[1+\frac{h}{\lambda_i mc}\right](1-\cos\theta_1)}$ است.

حل:

همانند مسائل قبلی داریم (طبق پایستگی تکانه خطی)

در راستای xها



$$P_i = P_f\cos\theta_1 + P\cos\theta_2 \Rightarrow$$

$$P_i - P_f\cos\theta_1 = P\cos\theta_2 \Rightarrow \qquad (1)$$

در راستای yها

$$0 = P_f\sin\theta_1 - P\sin\theta_2 \Rightarrow P_i = P_f\sin\theta_1 = P\cos\theta_2 \qquad (2)$$

با جمع مجذورات (۱) و (۲) داریم

$$(P_i - P_f\cos\theta_1)^2 + P_f^2\sin^2\theta_1 = P^2\cos^2\theta_2 + P^2\sin^2\theta_2 \Rightarrow$$

$$(P_i - P_f\cos\theta_1)^2 + P_f^2\sin^2\theta_1 = P^2 \Rightarrow P^2 = P_i^2 + P_f^2\cos^2\theta_1 - 2P_iP_f\cos\theta_1$$

$$+ P_f^2\sin^2\theta_1 \Rightarrow$$

$$P^2 = P_i^2 + P_f^2 - 2P_iP_f\cos\theta_1 \Rightarrow P^2c^2 = P_i^2c^2 + P_f^2c^2 - 2P_iP_f\cos\theta_1 c^2 \qquad (3)$$

انرژی سکون الکترون $E_0 = m_0c^2$ می‌باشد و طبق پایستگی انرژی داریم

$$E_i + E_0 = E_f + E \Rightarrow E_f - E_i = E_0 - E \Rightarrow (E_f - E_i)^2 = (E_0 - E)^2 \Rightarrow$$

$$E_f^2 + E_i^2 - 2E_iE_f = E_0^2 + E^2 - 2EE_0$$

از طرفی $E^2 = E_0^2 + P^2c^2$، $E_i = P_ic$ و $E_f = P_fc$ پس

$$E_f^2 + E_i^2 - 2E_iE_f = E_0^2 + E_0^2 + P^2c^2 - 2EE_0 \Rightarrow E_f^2 + E_i^2 - 2E_iE_f =$$

$$= 2E_0(E_0 - E) + P^2c^2 \Rightarrow$$

$$P_f^2c^2 + P_i^2c^2 - 2P_iP_fc^2 = 2E_0(E_f - E_i) + P^2c^2 \Rightarrow$$

$$P_f^2c^2 + P_i^2c^2 - 2P_iP_fc^2 = 2m_0c^2(P_fc - P_ic) + P^2c^2 \qquad (4)$$

از تفاضل (۳) و (۴) داریم

$$2m_0c^3(P_f - P_i) = 2P_iP_fc^2(1 - \cos\theta_1) \Rightarrow m_0c(P_f - P_i) = P_iP_f(1 - \cos\theta_1)$$

$$P = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow m_0 c\left[\frac{h}{\lambda_f} - \frac{h}{\lambda_i}\right] = \frac{h^2}{\lambda_f\lambda_i}(1-\cos\theta_1) \Rightarrow \frac{m_0c}{h}\left[\frac{\lambda_i - \lambda_f}{\lambda_i\lambda_f}\right] = \frac{1}{\lambda_f\lambda_i}(1-\cos\theta_1) \Rightarrow$$

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_0c}(\cos\theta_1 - 1)$$

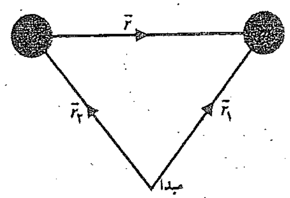
با تقسیم روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{P\sin\theta_2}{P\cos\theta_2} = \frac{P_f\sin\theta_1}{P_i - P_f\cos\theta_1} \Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{\frac{h}{\lambda_f}\sin\theta_1}{\frac{h}{\lambda_i} - \frac{h}{\lambda_f}\cos\theta_1} \Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{\frac{\lambda_f}{\lambda_i} - \cos\theta_1} \Rightarrow$$

$$\tan\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{1 + \frac{h}{\lambda_i m_0 c}(1-\cos\theta_1) - \cos\theta_1} \Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{\left[1 + \frac{h}{\lambda_i m_0 c}\right](1-\cos\theta_1)}$$

۲۸. رابطه‌ی (۳ـ ۲۶۷) را طوری اصلاح کنید که حرکت جرم مرکزی M در اثر جرم چرخان m درنظر گرفته شود. یک جفت ستاره به دور هم می‌چرخند و آن قدر به هم نزدیک هستند که در دوربین نجومی به‌صورت ستاره‌ی واحد، دیده می‌شوند. به‌وسیله مشاهدات طیف‌شناختی، معلوم می‌شود τ و سرعت v بر روی مسیر دایره‌ای به دور دیگری می‌گردد. با استفاده از رابطه‌ی اصلاح شده‌ی خود، جرم هریک از ستاره‌ها را به‌دست آورید.

حل:



$$\vec F = \frac{GmM}{r^3}\vec r \quad \text{و} \quad \vec r = \vec r_1 - \vec r_2$$

برای نیروهای وارد بر هریک از اجرام

$$\vec F_1 = -\frac{GmM}{r^3}\vec r \Rightarrow m\frac{d^2\vec r_1}{dt^2} = -\frac{GmM}{r^3}\vec r \Rightarrow \frac{d^2\vec r_1}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec r$$

$$\vec F_2 = -\vec F_1 \Rightarrow \vec F_2 = \frac{GmM}{r^3}\vec r \Rightarrow M\frac{d^2\vec r_2}{dt^2} = \frac{GmM}{r^3}\vec r \Rightarrow \frac{d^2\vec r_2}{dt^2} = \frac{Gm}{r^3}\vec r$$

از تفاضل این دو داریم

$$\frac{d^2\vec r_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec r_2}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec r - \frac{Gm}{r^3}\vec r \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\vec r_1 - \vec r_2) = -\frac{G(m+M)}{r^3}\vec r \Rightarrow \frac{d^2\vec r}{dt^2} = -\frac{G(m+M)}{r^3}\vec r$$

از طرفی، طبق حرکت دایره‌ای

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -\omega^2\vec r \Rightarrow \frac{G(m+M)}{r^3}\vec r = -\omega^2\vec r \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(m+M)}{r^3} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G(m+M)}$$

طبق $m = M$ داریم

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r} \Rightarrow r = \frac{vT}{2\pi}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2\left(\frac{vT}{2\pi}\right)^3}{G(m+M)} \Rightarrow m = \frac{Tv^3}{4\pi G} \Rightarrow M = \frac{Tv^3}{4\pi G}$$

۳۱. نشان دهید اگر ذره‌ی ورودی، بسیار سنگین تر از ذره‌ی هدف (یعنی: $m_1 >> M_2$) باشد سطح مقطع موثر رادرفورد، $d\sigma$ رابطه‌ی (۳ـ ۲۷۶) در مختصات آزمایشگاهی بطور تقریب برابر است با:

$$d\sigma = \left[\frac{q_1q_2}{2m_2v_0^2}\right]^2 \frac{4\gamma^2}{\left[1-(1-\gamma^2\theta_1^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2 (1-\gamma^2\theta_1^2)^{\frac{1}{2}}} 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$$

در صورتی که $\gamma\theta_1 < 1$ و $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$ است. در غیر این صورت $d\sigma = 0$ است.

حل:

طبق مختصات آزمایشگاهی و $\tan\theta_1 = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + \frac{m_1}{m_2}}$ داریم

$$m_1 >> m_2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{m_1}{m_2} >> \cos\Theta \\ \tan\theta_1 \cong \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\sin\Theta}{\frac{m_1}{m_2}} \Rightarrow \sin\Theta = \frac{m_1}{m_2}\theta_1 \Rightarrow \cos\Theta d\Theta = \frac{m_1}{m_2}d\theta_1 \Rightarrow$$

$$d\Theta = \frac{m_1}{m_2\cos\Theta}d\theta_1$$

$$\cos^2\Theta = 1-\sin^2\Theta \Rightarrow \cos^2\Theta = 1-\left[\frac{m_1}{m_2}\theta_1\right]^2 \Rightarrow \cos\Theta = \sqrt{1-\left[\frac{m_1}{m_2}\theta_1\right]^2}$$

از طرفی، برای μ (جرم کاهیده)

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = m_2$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳ـ ۲۷۶) و $\gamma = m_1 / m_2$ داریم

$$d\sigma = \left[\frac{q_1q_2}{2\mu v_0^2}\right]^2 \frac{2\pi\sin\Theta}{\sin^4\frac{\Theta}{2}} d\Theta \Rightarrow d\sigma = \left[\frac{q_1q_2}{2\mu v_0^2}\right]^2 \frac{2\pi\gamma\theta_1}{\left[\frac{1-\cos\Theta}{2}\right]^2} \frac{\gamma}{\cos\Theta} d\theta_1 \Rightarrow$$

$$d\sigma = \left[\frac{q_1q_2}{2\mu v_0^2}\right]^2 \frac{4\times 2\pi\gamma^2}{\left[1-\sqrt{1-\gamma^2\theta_1^2}\right]^2 \sqrt{1-\gamma^2\theta_1^2}} \frac{\theta_1}{\cos\Theta} d\theta_1 \Rightarrow$$

$$d\sigma = \left[\frac{q_1q_2}{2\mu v_0^2}\right]^2 \frac{4\gamma^2}{\left[1-(1-\gamma^2\theta_1^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2 (1-\gamma^2\theta_1^2)^{\frac{1}{2}}} 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$$

۳۲. رابطه‌ای مشابه رابطه‌ی (۴ـ ۱۱۶) برای زاویه‌ی پس زدن ذره‌ی هدف (یعنی θ_2 شکل ۴ـ ۷) برحسب زاویه‌ی پراکندگی Θ در مساله‌ی یک جسمی معادل به‌دست آورید. نشان دهید برای برخورد کشسان: $\theta_2=\frac{1}{2}(\pi-\Theta)$ است.

حل:

برای پس از برخورد با استفاده از رابطه‌ی (۴ ـ ۱۱۰) می‌توان نوشت:

$$\vec r_{2f}=\vec r^{\,i}_{2f}+\vec R\Rightarrow\frac{d\vec r_{2f}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec r^{\,i}_{2f}+\vec R)\Rightarrow\vec v_{2f}=\vec v^{\,i}_{2f}+\vec v$$

فرض کنید جرم m_1 قبل از برخورد در راستای x حرکت می‌کند:

$$\begin{cases}\vec v=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_{1i}\hat i\\[2mm] \vec v_{2f}=\vec v^{\,i}_{2f}+\vec v\end{cases}\Rightarrow\vec v^{\,i}_{2f}+\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{1f}\hat i\qquad(1)$$

با استفاده از شکل (۴ ـ ۶) و رابطه‌ی برداری: $\vec v^{\,i}_{2f}=v^i_{2f}\cos\theta_2\hat i+v^i_{2f}\sin\theta_2\hat j$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\theta_2=\pi-\theta_1\\ \vec v^{\,i}_{2f}=v^i_{2f}\cos\theta_2\hat i+v^i_{2f}\sin\theta_2\hat j\Rightarrow\vec v^{\,i}_{2}\cos(\pi-\Theta)\hat i+v^i_{2f}\sin(\pi-\Theta)\hat j\Rightarrow\\ \theta_1=\Theta\end{cases}$$

$$\vec v^{\,i}_{2f}=-v^i_{2f}\cos\Theta\hat i+v^i_{2f}\sin\Theta\hat j$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$\vec v_{2f}=-v^i_{2f}\cos\Theta\hat i+v^i_{2f}\sin\Theta\hat j+\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{1i}\hat i\Rightarrow$$

$$\vec v_{2f}=\left[\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{1i}-v^i_{2f}\cos\Theta\right]\hat i+v^i_{2f}\sin\Theta\hat j\Rightarrow\tan\theta_2=\frac{v^i_{2f}\sin\Theta}{\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{1i}-v^i_{2f}\cos\Theta}\qquad(2)$$

برای برخورد کشسان: ۱ = e است پس:

$$\vec v_{2f}-\vec v_{1f}=e(\vec v_{1i}-\vec v_{2i})\Rightarrow\vec v_{2f}-\vec v_{1f}=1\times\vec v_{1i}\Rightarrow\vec v_{1i}=\vec V_{2f}-\vec v_{1f}$$

با استفاده از پایستگی تکانه‌ی خطی می‌توان نوشت:

$$\vec P_{1i}=\vec P_{1f}+\vec P_{2f}\Rightarrow m_1\vec v_{1i}=m_1\vec v_{1f}+m_2\vec v_{2f}\Rightarrow m_1v_{1i}\hat i=m_1\vec v_{1f}+m_2\vec v_{2f}$$

روابط فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$\vec v_{2f}=\vec v^{\,i}_{2f}+\frac{m_1\vec v_{1f}+m_2\vec v_{2f}}{m_1+m_2}\Rightarrow\vec v^{\,i}_{2f}=\vec v_{2f}-\frac{m_1\vec v_{1f}+m_2\vec v_{2f}}{m_1+m_2}\Rightarrow$$

$$\vec v^{\,i}_{2f}=\frac{(m_1+m_2)\vec v_{2f}-(m_1\vec v_{1f}+m_2\vec v_{2f})}{m_1+m_2}\Rightarrow\vec v^{\,i}_{2f}=\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec v_{2f}-\vec v_{1f})\Rightarrow\vec v^{\,i}_{2f}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec v_{1i}\Rightarrow$$

روابط فوق را در رابطه‌ی (۲) جاگذاری می‌کنیم:

$$\tan\theta_2=\frac{\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec v_{1i}\sin\Theta}{\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec v_{1i}-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec v_{1i}\cos\Theta}\Rightarrow\tan\theta_2=\frac{\sin\Theta}{1-\cos\Theta}\Rightarrow\tan\theta_2=\frac{2\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}}{2\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Rightarrow$$

$$\tan\theta_2=\cot\frac{\Theta}{2}\Rightarrow\tan\theta_2=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta}{2}\right]\Rightarrow\theta_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta}{2}\Rightarrow\theta_2=\frac{1}{2}(\pi-\Theta)$$

۳۵. جرم‌های m_1 و m_2 توسط فنری با نیروی ثابت k به هم وصل شده‌اند و روی سطح بدون اصطکاک در امتداد محور xها می‌لغزد. نشان دهید مرکز جرم با سرعت یکنواخت، حرکت می‌کند و جرم‌ها با بسامد $\left[\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}\right]^{\frac{1}{2}}$ نوسان می‌کنند.

حل:

معادلات حرکت به‌صورت: $m_1\ddot x_1=-k(x_2-x_1)$ و $m_2\ddot x_2=k(x_2-x_1)$ است. با استفاده از جواب‌های فرضی: $x_1=A_1e^{i\omega t}$ و $x_2=A_2e^{i\omega t}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}m_1A_1\omega^2e^{i\omega t}=-k(A_2e^{i\omega t}-A_1e^{i\omega t})\\ m_2A_2\omega^2e^{i\omega t}=k(A_2e^{i\omega t}-A_1e^{i\omega t})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_1\omega^2A_1-kA_1+kA_2=0\\ m_2\omega^2A_2-kA_2+kA_1=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(m_1\omega^2-k)A_1+kA_2=0\\ kA_1+(m_2\omega^2-k)A_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}m_1\omega^2-k & k\\ k & m_2\omega^2-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}=0$$

برای اینکه A_1 و A_2 جواب‌های غیرصفر داشته باشند باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix}m_1\omega^2-k & k\\ k & m_2\omega^2-k\end{vmatrix}=0\Rightarrow(m_1\omega^2-k)(m_2\omega^2-k)-k^2=0\Rightarrow$$

$$m_1 m_2\omega^4 - m_1\omega^2 k - m_2\omega^2 k + k^2 - k^2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2\omega^4 - (m_1 + m_2)k\omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 m_2\omega^2 = (m_1+m_2)k \Rightarrow \omega^2 = \frac{(m_1+m_2)k}{m_1 m_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)k}{m_1 m_2}}$$

۳۶. معادلات حرکت را برای شکل ۴ـ ۱۰ بنویسید فرض کنید طول آزاد هر فنر l و فاصله بین دیوارها $3l + a$ است بطوری که حتی در حالت تعادل، فنرها کشیده شده‌اند. نشان دهید معادلات را می‌توان به همان صورت روابط (۴ـ ۱۳۵) و (۴ـ ۳۶) نوشت.

حل:

در حالت آزاد فنرها

$$l_1 + l_2 + l_3 = 3(l + a) \Rightarrow l_3(l + a) - l_1 - l_2$$

اگر فنر k_1 و k_2 به اندازه x_1 و x_2 کشیده شوند، داریم

$$l_1 + x_1 + l_2 + x_2 + l'_3 = 3(l + a) \Rightarrow l'_3 = 3(l + a) - l_1 - x_1 - l_2 - x_2$$

در نتیجه

فنر k_1: $\Delta x_1 = l_1 + x_1 - l_1 \Rightarrow \Delta x_1 = x_1$

فنر k_2: $\Delta x_2 = l_2 + x_2 - l_2 \Rightarrow \Delta x_2 = x_2$

فنر k_3: $l_3 - l'_3 = 3(l + a) - l_1 - l_2 - 3(l + a) + l_1 + x_1 + l_2 + x_2 \Rightarrow$

$\Delta x_3 = x_1 + x_2$

با توجه به تغییر طول فنرها و فاصله‌ی بین دیوارها، تغییر طول فنرها در حالتی که در تعادل هستند با حالت کشیده برابر است. همچنین با توجه به قانون دوم نیوتن داریم

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_3(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_3)x_1 - k_3x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 - k_3x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k'_1x_1 - k_3x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k'_2x_2 - k_3x_1 = 0 \end{cases}$$

که همان روابط (۴ ـ ۱۳۵) و (۴ ـ ۱۳۶) هستند.

۳۷. برای وجه طبیعی ارتعاش داده شده به‌وسیله‌ی روابط (۴ـ ۱۶۲) و (۴ـ ۱۶۳)، نیروی وارد بر m_1 از طریق فنر جفت‌کننده را به‌دست آورید و نشان دهید حرکت x_1 در معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای، صدق می‌کند که تحت تأثیر این نیروی محرک باشد.

حل:

اگر فنر k_3 به اندازه‌ی $(x_1 + x_2)$ فشرده شود برای نیروی وارده داریم

$$F_3 = -k_3(x_1 + x_2) \Rightarrow F_3 = -k_3\left[A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{\Delta\omega^2}{2k^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1)\right] \Rightarrow$$

$$F_3 = -k_3\left[1 + \frac{\Delta\omega^2}{2k^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right]A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) \Rightarrow F_3 = -k_3\left[1 + \frac{\Delta\omega^2}{2k^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right]x_1 \Rightarrow F_3 = -k'x_1$$

که $k' = -k_3\left[1 + \frac{\Delta\omega^2}{2k^2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right]$ است. نیروی حاصله شبیه نیروی نوسانگر هماهنگ ساده است.

۳۹. در شکل ۴ـ ۱۰، $m_1 = m_2 = m$، $k_1 = k$، $k_2 = 0.9k$، $k_3 = 0.1k$ و جرم m_2 ابتدا در محل تعادلش ثابت است. جرم m_1 به اندازه‌ی A از محل تعادلش کشیده شده و سپس هر دو جرم رها می‌شوند. $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به‌دست آورید و نشان دهید جوابتان بطور کیفی با شکل ۴ـ ۱۳ سازگار است.

حل:

باتوجه به شکل ۴ ـ ۱۰ و جابجایی‌های انجام گرفته برای معادلات حرکت داریم

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_3(x_2 - x_1) \quad \text{و} \quad m_2\ddot{x}_2 = -k_3(x_2 - x_1) + k_2x_2$$

با فرض جواب‌های: $x_1 = A_1e^{i\omega t}$ و $x_2 = A_2e^{i\omega t}$ می‌توان نوشت

$$\begin{cases} m_1A_1\omega^2e^{i\omega t} = -k_1A_1e^{i\omega t} + k_3(A_2e^{i\omega t} - A_1e^{i\omega t}) \\ m_2A_2\omega^2e^{i\omega t} = -k_3(A_2e^{i\omega t} - A_1e^{i\omega t}) + k_2A_2e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\omega^2A_1 - k_1A_1 + k_3(A_2 - A_1) = 0 \\ m_2\omega^2A_2 + k_3(A_2 - A_1) - k_2A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_1\omega^2A_1 + k_1A_1 + k_3A_1 - k_3A_2 = 0 \\ m_2\omega^2A_2 + k_3A_2 - k_3A_1 - k_2A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m_1\omega^2 + k_1 + k_3)A_1 - k_3A_2 = 0 \\ -k_3A_1 + (m_2\omega^2 + k_3 - k_2)A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} m_1\omega^2 + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & m_2\omega^2 + k_3 - k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

برای اینکه A_1 و A_2 جواب‌های غیر صفر داشته باشند باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد

$$\begin{vmatrix} m_1\omega^2 + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & m_2\omega^2 + k_3 - k_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (m_1\omega^2 + k_1 + k_3)(m_2\omega^2 + k_3 - k_2) - k_3^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(m\omega^2 + k + 0.1k)(m\omega^2 + 0.1k - 0.9k) - (0.1k)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(m\omega^2 + 1.1k)(m\omega^2 - 0.8k) - 0.01k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(m^2\omega^4 - 0.8mk\omega^2 + 1.1mk\omega^2 - 0.88k^2 - 0.01k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$m^2\omega^4 + 0.3mk\omega^2 - 0.89k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{-0.3mk \pm \sqrt{(0.3mk^2) + 4m^2 \times (0.89)k^2}}{2m^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1.1k}{m} \\ \omega_2 = \dfrac{0.8k}{m} \end{cases}$$

۴۰. معادلات حرکت دستگاه شکل ۴ـ ۱۶ را بنویسید. طول آزاد فنرها l_1 و l_2 است. مسأله را به صورت دو مسأله از هم، جدا کنید که یکی شامل حرکت مرکز جرم و دیگری، شامل حرکت داخلی باشد که به‌وسیله‌ی دو مختصه‌ی x_1 و x_2 بیان می‌شوند. وجوه طبیعی ارتعاش را به‌دست آورید.

حل:

با توجه به شکل ۴ ـ ۱۶ با فرض اینکه جرم m_1 در جهت x و جرم m_2 در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند برای جابجایی جرم‌ها و با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}(x - l_1 - x_1) = k_1x_1 \Rightarrow m_1(\ddot{x} - \ddot{x}_1) = k_1x_1 \Rightarrow m_1\ddot{x} - m_1\ddot{x}_1 = k_1x_1 \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}(x + l + x_2) - k_2x_2 \Rightarrow m_2(\ddot{x} + \ddot{x}_2) = -k_2x_2 \Rightarrow m_2\ddot{x} + m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 \quad (2)$$

$$m_3\ddot{x} = k_2x_2 - k_1x_1$$

برای قسمت دوم مسأله، یا حرکت مرکز جرم داریم

$$x_{cm} = \frac{m_1(x - l - x_1) + m_2(x + l_2 + x_2) + m_3x}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{(m_1+m_2+m_3)\ddot{x} - m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2}{m_1+m_2+m_3} \Rightarrow \ddot{x}_{cm} = \ddot{x} - \frac{m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{m_1+m_2+m_3} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{m_1+m_2+m_3}$$

در رابطه‌ی فوق $\ddot{x}_{cm} = 0$ است. با جاگذاری رابطه‌ی فوق در روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت

$$\begin{cases} m_1\ddot{x} - m_1\ddot{x}_1 = k_1x_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 \\ \ddot{x} = \dfrac{m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{m_1+m_2+m_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\left[\dfrac{m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{m_1+m_2+m_3}\right] - m_1\ddot{x}_1 = k_1x_1 \\ m_2\left[\dfrac{m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{m_1+m_2+m_3}\right] + m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 \\ M = m_1+m_2+m_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1^2}{M}\ddot{x}_1 - \dfrac{m_1m_2}{M}\ddot{x}_2 - m_1\ddot{x}_1 = K_1x_1 \\ -\dfrac{m_1m_2}{M}\ddot{x}_1 + \dfrac{m_2^2}{M}\ddot{x}_2 - m_2\ddot{x}_2 = K_2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\dfrac{m_1^2}{M} - m_1\right]\ddot{x}_1 - \dfrac{m_1m_2}{M}\ddot{x}_2 = K_1x_1 \\ \left[\dfrac{m_2^2}{M} - m_2\right]\ddot{x}_2 - \dfrac{m_1m_2}{M}\ddot{x}_1 = K_2x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{m_1^2}{M} - m_1\right]\ddot{x}_1 - \dfrac{m_1m_2}{M}\ddot{x}_2 - K_1x_1 = 0 \\ \left[\dfrac{m_2^2}{M} - m_2\right]\ddot{x}_2 - \dfrac{m_1m_2}{M}\ddot{x}_1 - K_2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1e^{i\omega t} \\ x_2 = A_2e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\dfrac{m_1^2}{M} - m_1\right]A_1\omega^2e^{i\omega t} - \dfrac{m_1m_2}{M}A_2\omega^2e^{i\omega t} - K_1A_1e^{i\omega t} = 0 \\ -\dfrac{m_1m_2}{M}A_1\omega^2e^{i\omega t}\left[\dfrac{m_2^2}{M} - m_2\right]A_2\omega^2e^{i\omega t} - K_2A_2e^{i\omega t} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1^2 - m_1(m_1+m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}A_1\omega^2 - \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2+m_3}A_2\omega^2 - K_1A_1 = 0 \\ -\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2+m_3}A_1\omega^2 + \dfrac{m_2^2 - m_2(m_1+m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_{\#}}A_2\omega^2 - K_2A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{-m_1(m_2+m_3)}{M}\omega^2 - K_1\right]A_1 - \dfrac{m_1m_2}{M}A_2\omega^2 = 0 \\ -\dfrac{m_1m_2}{M}A_1\omega^2 + \left[\dfrac{-m_2(m_1+m_3)}{M}\omega^2 - K_2\right]A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{-(m_2+m_3)}{M}\omega^2 - \dfrac{MK_1}{m_1}\right]A_1 - m_2\omega^2A_2 = 0 \\ -m_1\omega^2A_1 + \left[\dfrac{-(m_1+m_3)}{M}\omega^2 - \dfrac{MK_2}{m_2}\right]A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{(m_2+m_3)}{M}\omega^2-\frac{MK_1}{m_1} & -m_2\omega^2 \\ -m_1\omega^2 & -\frac{(m_1+m_3)}{M}\omega^2-\frac{MK_2}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}=0$$

برای اینکه A_1 و A_2 جواب غیر صفر داشته باشند دترمینان ضرایب باید برابر صفر باشد

$$\begin{vmatrix} -\frac{(m_2+m_3)}{M}\omega^2-\frac{MK_1}{m_1} & -m_2\omega^2 \\ -m_1\omega^2 & -\frac{(m_1+m_3)}{M}\omega^2-\frac{MK_2}{m_2}\end{vmatrix}=0$$

با حل دترمینان فوق، ω به دست می‌آید. (به عهده‌ی دانشجو)

۴۱. دستگاه نوسانگرهای جفت‌شده در شکل ۴ـ ۱۰ تحت تأثیر نیروی $F = F_0\cos\omega t$ که به جرم m_1 اعمال شده است قرار گرفته است. معادلات حرکت را بنویسید و جواب حالت پاینده را پیدا کنید. دامنه و فاز نوسان‌های هر نوسانگر را به‌صورت تابعی از ω رسم کنید.

حل:

چون نیرو به جرم m_1 وارد شده است پس برای معادلات (۴ـ ۱۳۵) و (۴ـ ۱۳۶) داریم

$$m_1\ddot x_1+k'_1x_1+k_2x_2=F_0\cos\omega t \quad \text{و} \quad m_2\ddot x_2+k'_2x_2+k_3x_1=0$$

که جواب خاص آنها $x_1 = A\cos(\omega t + \theta)$ و $x_2 = B\cos(\omega t + \phi)$ می‌باشد، پس

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x_{10}=A\cos\theta \\ x_{20}=B\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta=\frac{x_{10}}{A} \\ \cos\phi=\frac{x_{20}}{B} \end{cases}$$

حال معادلات x_1 و x_2 را در معادله‌ی $\ddot x_2$ قرار می‌دهیم

$$-m_2\omega^2B\cos(\omega t + \phi) + k'_2B\cos(\omega t + \phi) + k_3A\cos(\omega t + \theta) = 0 \Rightarrow$$

$$k_3A\cos(\omega t + \theta) = (m_2\omega^2 - k'_2)B\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow B = \frac{k_3\cos(\omega t + \theta)}{(m_2\omega^2 - k'_2)B\cos(\omega t + \phi)}A$$

و در ادامه معادلات x_1 و x_2 را در معادله‌ی $\ddot x_1$ قرار می‌دهیم

$$-m_1\omega^2A\cos(\omega t + \theta) + k'_1A\cos(\omega t + \theta) + k_2B\cos(\omega t + \phi) = F_0\cos\omega t \Rightarrow$$

$$(k'_1 - m_1\omega^2)A\cos(\omega t + \theta) + k_2\frac{k_3\cos(\omega t + \theta)}{(m_2\omega^2 - k'_2)}A = F_0\cos\omega t \Rightarrow$$

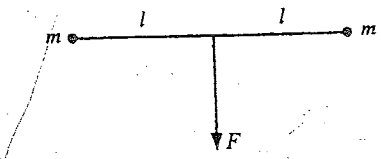
$$\left[k'_1-m_1\omega^2+\frac{k_2k_3}{m_2\omega^2-k'_2}\right]A\cos(\omega t+\theta)=F_0\cos\omega t\Rightarrow$$

$$A=\left[\left[k'_1-m_1\omega^2+\frac{k_2k_3}{m_2\omega^2-k'_2}\right]\cos(\omega t+\theta)\right]^{-1}F_0\cos\omega t$$

یعنی A و B و θ و ϕ تعیین شده‌اند

سؤالات کارشناسی ارشد

۱. دو جسم به جرم m توسط نخی به طول ۲l به هم وصل شده‌اند. مطابق شکل نیروی ثابت F به وسط نخ عمود بر آن وارد می‌شود. فرض کنید که دو جسم بعد از برخورد به یکدیگر می‌چسبند. چه مقدار انرژی جنبشی در این برخورد هدر می‌رود. (از جرم نخ صرف‌نظر کنید.) (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\frac{Fl}{2}$ ۲) Fl ۳) $2Fl$ ۴) $2Flm$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$F = (m + m)a \Rightarrow a = \frac{F}{2m}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 0 = 2\frac{F}{2m} \times l \Rightarrow v^2 = \frac{Fl}{m} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Fl}{2}$$

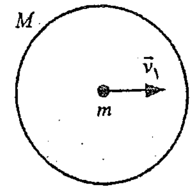
طبق پایستگی تکانه‌ی خطی

$$mv - mv = (m + m)v' \Rightarrow v' = 0$$

$$\Delta E = K' - K \Rightarrow \Delta E = 0 - (\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2) \Rightarrow \Delta E = -\frac{Fl}{2} - \frac{Fl}{2} \Rightarrow \Delta E = -Fl$$

علامت منفی نشان‌دهنده‌ی اتلاف انرژی است.

۲. حلقه‌ای همگن به جرم M و شعاع R روی یک سطح تخت بدون اصطکاک بطور افقی قرار دارد. از مرکز حلقه گلوله‌ای به جرم m با تندی v_1 به سمت دیواره‌ای حلقه پرتاب می‌شود. فرض کنید گلوله بطور کاملا کشسان با دیواره‌ی حلقه برخورد می‌کند و در امتداد همان مسیر اولیه برمی‌گردد و با دیواره‌ی مقابل حلقه برخورد می‌کند. فاصله‌ی زمانی بین دو برخورد چقدر است؟ (سراسری ـ ۸۵)



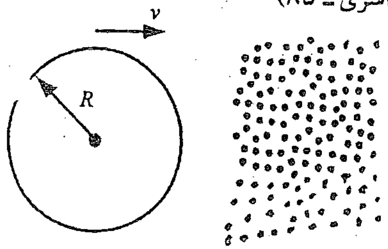
۱) $\frac{2R}{v_1}$ ۲) $\frac{2RM}{(m + M)v_1}$ ۳) $\frac{2RM}{(2m + M)v_1}$ ۴) $\frac{2R(M + m)}{(M - m)v_1}$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$v_{rel} = v_1$$

$$x = v_{rel}t \Rightarrow 2R = v_1 t \Rightarrow t = \frac{2R}{v_1}$$

۳. در یک محیط تعداد n ذره‌ی ریز ساکن به جرم m، در واحد حجم وجود دارد. کره‌ای به جرم M و شعاع R را با سرعت V در این محیط به حرکت درمی‌آوریم. برخورد بین این ذرات و کره الاستیک فرض کنید. نیروی اصطکاک وارد بر کره کدام است؟ (فرض کنید ذرات ریز هیچ برهم‌کنشی با هم ندارند و $m << M$) (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\pi R^2 nmV^2$ ۲) $2\pi R^2 nmV^2$ ۳) $\pi R^5 n^2 mV^2$ ۴) $2\pi R^5 n^2 mV^2$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

طبق پایستگی تکانه‌ی خطی

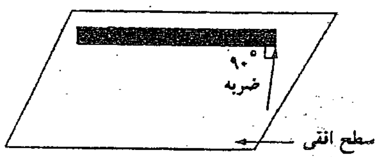
$$v' = \frac{2M}{m + M}V + \frac{M - m}{m + M} \times 0 \Rightarrow v' = \frac{2M}{m + M}V$$

از طرفی

$$W = \Delta K \Rightarrow -f_k d = 0 - \frac{1}{2}nm(\frac{2M}{m + M}V)^2\frac{\pi R^2 d}{2}$$

طبق $\frac{\pi R^2}{2}$ و $m << M$ داریم $f_k = nmV^2\pi R^2$

۴. میله‌ای همگن به طول l روی سطح یک قطعه یخ بطور افقی قرار دارد و بر یک انتهای آن ضربه‌ای در جهت عمود بر میله وارد می‌شود. میله حول نقطه‌ای شروع به چرخش خواهد کرد. فاصله‌ی این نقطه تا مرکز میله کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\frac{l}{6}$ ۲) $\frac{l}{3}$ ۳) $\frac{l}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}l$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\Delta p = J \Rightarrow mv_{cm} = J \Rightarrow mx\omega = J$$

$$\Delta L = J\frac{l}{2} \Rightarrow I_{cm}\omega = J\frac{l}{2} \Rightarrow \frac{1}{12}ml^2\omega = mx\omega\frac{l}{2} \Rightarrow x = \frac{l}{6}$$

که در این رابطه x فاصله‌ی مرکز چرخش تا مرکز میله می‌باشد.

۵. نهری با عرض ۸ m و عمق ۳ m و سرعت $2\ \frac{m}{s}$، با نهر دیگری به عرض ۶ m و عمق ۲ m و سرعت $3\ \frac{m}{s}$ به یکدیگر پیوند خورده و رودخانه‌ای به عرض ۱۴ m و سرعت $2/5\ \frac{m}{s}$ را ایجاد می‌کنند. عمق رودخانه چند متر است؟ (سراسری ـ ۸۵)

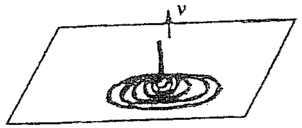
۱) ۲ ۲) ۲/۳ ۳) ۲/۴ ۴) ۲/۵

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$p_1 + p_2 = p \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = mv \Rightarrow \rho V_1 v_1 + \rho V_2 v_2 = \rho V v \Rightarrow l h_1 x_1 v_1 + l h_2 x_2 v_2 = l h x v \Rightarrow$$

$$3 \times 8 \times 2 + 2 \times 6 \times 3 = h \times 14 \times 2/5 \Rightarrow h = 2/4\ m$$

۶. کلاف نخی به طول L و چگالی جرمی همگن λ روی سطح افقی قرار دارد. یک سر این نخ را با دست گرفته و چنان بالا می‌کشیم که این سر همواره با سرعت ثابت v در امتداد قائم در حرکت باشد تا هنگامی که طناب کاملا از روی میز بلند شود. در این لحظه طناب را به حالت سکون درمی‌آوریم. در طی این کار، چه مقدار انرژی به گرما تبدیل می‌شود؟ (سراسری ـ ۸۵)



۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}\lambda v^2 L$ ۳) $\lambda v^2 L$ ۴) $2\lambda v^2 L$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$m = \lambda L \Rightarrow dm = \lambda dx$$

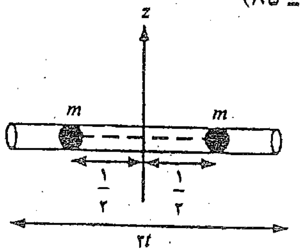
از طرفی

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow F = \frac{d}{dt}(mv) \Rightarrow F = v\frac{dm}{dt} \Rightarrow F = v\lambda\frac{dx}{dt} \Rightarrow F = \lambda v^2$$

و در ادامه

$$Q = W \Rightarrow Q = Fd \Rightarrow Q = \lambda v^2 L$$

۷. لوله‌ای استوانه‌ای شکل با سطح مقطع ناچیز، دارای جرم ۳ m و طول ۲ l است. دو گلوله‌ی کوچک به جرم m توسط دو نخ به فاصله‌ی $\frac{l}{2}$ از وسط لوله، نگه داشته شده‌اند. لوله با سرعت زاویه‌ای ω آزادانه حول محور عمود بر لوله که از وسط آن می‌گذرد، می‌چرخد. اگر در یک لحظه نخ‌ها قطع شود، هنگام خروج گلوله‌ها از لوله، سرعت شعاعی هریک از آنها کدام است؟ (از اصطکاک بین گلوله و لوله صرفنظر کنید.) (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\frac{1}{2}l\omega$ ۲) $\sqrt{\frac{5}{8}}l\omega$ ۳) $\sqrt{\frac{8}{3}}l\omega$ ۴) $\sqrt{\frac{3}{8}}l\omega$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow$$

$$\left[m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m(l)^2 + \frac{1}{12}\times 3m\times(2l)^2\right]\omega = \left[ml^2 + ml^2 + \frac{1}{12}\times 3m\times(2l)^2\right]\omega_2 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}\omega = 3\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2}\omega$$

از طرفی

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_1^2 = \frac{1}{2}(I'_1 + I)\omega_2^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$\left[m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\times 3m\times(2l)^2\right]\omega^2 = \left[ml^2 + ml^2 + \frac{1}{12}\times 3m\times(2l)^2\right]\times\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 2mv^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{8}}l\omega$$

۸. دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 در یک امتداد به ترتیب با سرعت $\vec{v}$ و $\alpha\vec{v}$ $(0 < \alpha < 1)$ در حرکتند. در یک لحظه این دو به‌صورت کاملا کشسان به هم برخورد می‌کنند. اگر پیش از برخورد انرژی جنبشی جرم m_1 هشت برابر انرژی جنبشی جرم m_2 باشد، نسبت $\frac{m_2}{m_2}$ چقدر باشد تا جرم m_1 پس از برخورد ساکن شود؟ (سراسری ـ ۸۶)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$K_1 = 8K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v^2 = 8\times\frac{1}{2}m_2(\alpha v)^2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 8\alpha^2 \qquad (1)$$

طبق برخورد کشسان داریم

$$v'_1 = 0 \Rightarrow \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\alpha v = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 + 2\alpha m_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{m_2} = 1-2\alpha \qquad (2)$$

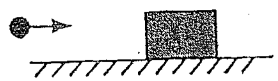
از (۱) و (۲) داریم

$$8\alpha^2 = 1-2\alpha \Rightarrow 8\alpha^2+2\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{8} \Rightarrow \alpha=\frac{-1\pm3}{8}\Rightarrow \begin{cases}\alpha=0/25\\ \alpha=-0/5\end{cases}$$

مقدار بالا را در رابطه‌ی (۲) قرار می‌دهیم

$$\frac{m_1}{m_2} = 1-2\times 0/25 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=0/5$$

۹. گلوله‌ای که موازی سطح افق در حرکت است به مکعبی که روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد برخورد کرده و به آن می‌چسبد. اگر ۴۰ درصد انرژی جنبشی اولیه تلف شود جرم مکعب چند برابر جرم گلوله است؟ (سراسری ـ ۸۶)



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$p = p' \Rightarrow mv = (m+M)v' \Rightarrow v' = \frac{m}{m+M}v$$

از طرفی

$$\Delta K = -0/4K \Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)v'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -0/4\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

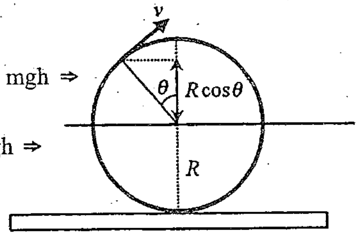
$$(m+M)\left(\frac{m}{m+M}\right)^2v^2 = 0/6mv^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m}{m+M} = 0/6 \Rightarrow 1+\frac{M}{m} = \frac{10}{6} \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{2}{3}$$

۱۰. چرخی به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ثابت $\sqrt{\frac{2g}{R}}$، حول محور افقی ثابتی که از مرکز چرخ می‌گذرد در یک صفحه‌ی قائم در حال دوران است. بیشینه‌ی ارتفاعی که یک سنگریزه چسبیده به لبه‌ی چرخ، پس از کنده شدن می‌تواند نسبت به پایین‌ترین نقطه چرخ بالا رود، کدام است؟ (سراسری ـ ۸۶)

۱) $\frac{7R}{4}$ ۲) $2R$ ۳) $\frac{9R}{4}$ ۴) $3R$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(R + R\cos\theta) = \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2 + mgh \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}R^2\omega^2 + gR(1+\cos\theta) - \frac{1}{2}R^2\omega^2\cos^2\theta = gh \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}R^2\times\frac{2g}{R} + gR(1+\cos\theta) - \frac{1}{2}R^2\times\frac{2g}{R}\cos^2\theta = gh \Rightarrow h = R(2+\cos\theta-\cos^2\theta)$$

برای h_{max} داریم

$$\frac{dh}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}[R(2+\cos\theta-\cos^2\theta)] = 0 \Rightarrow -\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

پس

$$h = R(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) \Rightarrow h = \frac{9R}{4}$$

۱۱. یک کره‌ی توپر همگن به جرم ۲ kg و شعاع ۱۰ cm بر روی سطح افقی، بدون لغزش، می‌غلتد. این کره با پله‌ای به ارتفاع ۷ cm مواجه می‌شود. سرعت مرکز جرم کره چقدر باشد تا از پله بالا برود و بلافاصله پس از بالا رفتن بایستد؟ (فرض کنید لبه‌ی پله، طوری است که کره با لبه‌ی پله، تماس پیدا می‌کند و نقطه‌ی تماس کره با لبه‌ی تیز پله در حین بالا رفتن، ساکن بماند.) لختی دورانی یک کره‌ی توپر همگن، حول قطرش، $\frac{2}{5}MR^2$ است. ($g = 10\ \frac{m}{s^2}$ فرض شود.) (سراسری ـ ۸۶)

۱) $0/5\ \frac{m}{s}$ ۲) $1\ \frac{m}{s}$ ۳) $2\ \frac{m}{s}$ ۴) $\sqrt{\frac{17}{7}}\ \frac{m}{s}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\nu^2 = mgh \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}mR^2\frac{\nu^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\nu^2 = mgh$$

$$\nu = 1\ \frac{m}{s}$$

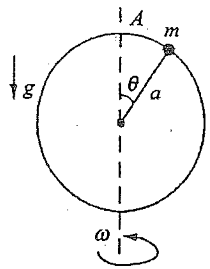
۱۲. سرعت فرار از سطح سیاره‌ای که جرم آن ۸ برابر جرم زمین و شعاع آن ۲ برابر شعاع زمین است، چند برابر سرعت فرار از سطح زمین است؟ (سراسری ـ ۸۶)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$\nu=\sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow \frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{\frac{M'r}{Mr'}} \Rightarrow \frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{\frac{8M\times r}{M\times 2r}} \Rightarrow \frac{\nu'}{\nu}=2$$

۱۳. یک سیم دایره‌ای شکل به شعاع a از داخل مهره‌ای به جرم m گذشته و مطابق شکل حول یک محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت ω و در حضور نیروی جاذبه‌ی گرانشی زمین می‌چرخد. اگر مهره از نقطه‌ی A بدون سرعت اولیه رها شده باشد و از اصطکاک بین مهره و سیم صرفنظر کنیم، انرژی جنبشی مهره در وضعیت نشان داده شده در شکل کدام است؟ (سراسری ـ ۸۶)



۱) $ma^2\omega^2\sin^2\theta + 2mga\sin^2\frac{\theta}{2}$

۲) $mga(1-\cos\theta)$

۳) $\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta + mga(1-\cos\theta)$

۴) $\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta + 2mga(1-\cos\theta)$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \Rightarrow mga(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

پس

$$K_{total}=\frac{1}{2}mr^2\omega^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow k_t=\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta+mga(1-\cos\theta)$$

۱۴. سرعت فرار یک ذره در راستای قائم در فاصله‌ی r $(r > R_e)$ از مرکز زمین ν_e است و سرعت همان ذره در یک مدار دایره‌ای پایدار حول زمین با همان شعاع r، ν_c است. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم رابطه‌ی بین ν_e و ν_c کدام است؟ (سراسری ـ ۸۷)

۱) $\nu_e = \nu_c$ ۲) $\nu_e=\sqrt{2}\nu_c$ ۳) $\nu_e = \frac{3}{2}\nu_c$ ۴) $\nu_e = 2\nu_c$

گزینه‌ی (۲)

$$\begin{cases} \nu_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}} \\ \nu_c=\sqrt{\frac{GM}{R}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\nu_e}{\nu_c}=\sqrt{2} \Rightarrow \nu_e=\sqrt{2}\nu_c$$

۱۵. سرعت خروج گاز از موشکی (نسبت به موشک) بردار ثابت $\vec{u}$ است. اگر این موشک در لحظه‌ی $t = 0$ با جرم M_0 از حالت سکون و در فضای تهی (از نیروی خارجی) شروع به حرکت کند بیشینه‌ی انرژی جنبشی موشک برابر است با: (سراسری ـ ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}\frac{M_0u^2}{e^2}$ ۲) $\frac{M_0u^2}{e^2}$ ۳) $\frac{2M_0u^2}{e}$ ۴) $\frac{2M_0u^2}{e^2}$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$F_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow M\frac{d\nu}{dt}-u\frac{dM}{dt} = 0\ d\nu = u\frac{dM}{m} \Rightarrow \nu = u\ln M\Big|_{M_0}^{M} \Rightarrow \nu = u\ln\frac{M}{M_0}$$

$$K=\frac{1}{2}M\nu^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}M\left[u\ln\frac{M_0}{M}\right]^2 \Rightarrow K=\frac{u^2}{2}M\left[\ln\frac{M}{M_0}\right]^2$$

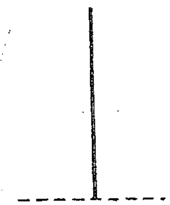
برای k_{max} داریم

$$\frac{dK}{dM}=0 \Rightarrow \frac{u^2}{2}\left\{\left[\ln\frac{M}{M_0}\right]^2+M\times 2\ln\frac{M}{M_0}\times\frac{1}{M}\right\}=0 \Rightarrow \ln\frac{M}{M_0}+2=0 \Rightarrow \frac{M}{M_0}=e^{-2} \Rightarrow$$

$$M = M_0e^{-2}$$

$$K=\frac{u^2}{2}M_0e^{-2}\left[\ln\frac{M_0e^{-2}}{M_0}\right]^2 \Rightarrow K=\frac{2u^2M_0}{e^2}$$

۱۶. جرم واحد طول طناب یکنواختی λ و طول آن a است. این طناب بر بالای یک میز به‌صورت قائم طوری آویخته شده که انتهای آن با سطح میز در تماس است. اگر طناب از حال سکون رها شود، نیروی وارد بر میز هنگامی که نصف طول طناب بر روی میز افتاده است، چقدر است؟ فرض کنید هر قسمت از طناب پس از افتادن روی سطح میز ساکن می‌شود و از توده شدن طناب صرف‌نظر کنید. (سراسری ـ ۸۷)



۱) $\frac{1}{3}\lambda ga$ ۲) $\frac{2}{3}\lambda ga$

۳) $\frac{3}{2}\lambda ga$ ۴) $3\lambda ga$

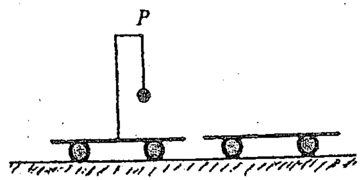
گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\begin{cases} m = \lambda a \Rightarrow dm = \lambda dy \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \lambda\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \lambda v \\ v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0) \Rightarrow v^2 - 0 = 2g\frac{a}{2} \Rightarrow v = \sqrt{ag} \end{cases}$$

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow F = m'\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \Rightarrow F = \lambda \times \frac{a}{2} \times g + \lambda v^2 \Rightarrow F = \frac{\lambda ag}{2} + \lambda ag$$

$$F = \frac{3}{2}\lambda ag$$

۱۷. در واگنی به جرم M گلوله‌ای به جرم m $(m << M)$ به‌وسیله‌ی ریسمان سبکی از نقطه‌ی P آویزان شده است. واگن و گلوله دارای سرعت اولیه‌ی V می‌باشند. واگن حاصل آونگ به واگن ساکن دیگری با همان جرم M برخورد کرده و به آن می‌چسبد. اگر طول ریسمان R باشد کمترین مقدار سرعت اولیه، چقدر باشد تا گلوله یک دایره‌ی کامل را حول نقطه‌ی P طی کند بدون اینکه نخ شل شود. از اصطکاک بین واگن‌ها و سطح افقی صرف‌نظر کنید. (سراسری ـ ۸۷)



۱) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}Rg}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{5Rg}$

۳) $\sqrt{5Rg}$ ۴) $2\sqrt{5Rg}$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

در بالاترین نقطه باید $T = 0$ شود، پس

$$T + mg = \frac{mv'^2}{R} \Rightarrow 0 + mg = \frac{mv'^2}{R} \Rightarrow v'^2 = Rg$$

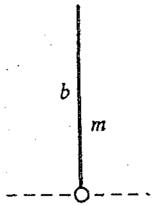
از طرفی

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2 + mg(2R)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mRg + 2mgR \Rightarrow v^2 = 5Rg$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{5Rg}$$

۱۸. میله‌ی همگنی به جرم m و طول b می‌تواند بدون اصطکاک حول محوری که از انتهای پایینی آن می‌گذرد، بچرخد. میله را از حالت عمودی به مقدار ناچیز جابه‌جا نموده و رها می‌کنیم. تندی مرکز جرم میله در هنگام برخورد با سطح زمین چقدر است؟ (سراسری ـ ۸۷)



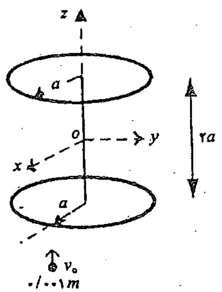
۱) $\frac{1}{2}\sqrt{3gb}$ ۲) $\sqrt{3gb}$

۳) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{b}}$ ۴) $\sqrt{\frac{gb}{2}}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$K_1+U_1=K_2+U_2 \Rightarrow mg\frac{b}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mg\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}mb^2\left(\frac{v}{b}\right)^2 \Rightarrow v^2=3gb \Rightarrow v=\sqrt{3gb}$$

۱۹. دو قرص یکنواخت نازک هریک به جرم $\frac{m}{2}$ و شعاع a به‌وسیله‌ی میله‌ی سبکی به طول 2a به هم وصل شده‌اند. این مجموعه آزادانه با سرعت زاویه‌ای ω_0 حول محور z می‌چرخد. جسم کوچکی به جرم $0/001\ m$ با سرعت $\vec{v}_0$ موازی محور z مطابق شکل به لبه‌ی قرص پایینی برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. بردار سرعت زاویه‌ای مجموعه پس از برخورد کدام است؟ لختی دورانی یک قرص به جرم M و شعاع R حول محور گذرنده از مرکزش و عمود بر صفحه آن $\frac{1}{2}MR^2$ است. (سراسری ـ ۸۷)



۱) $-8 \times 10^{-4}\frac{v_0}{a}\hat{j} + \omega_0\hat{k}$

۲) $-4 \times 10^{-4}\frac{v_0}{a}\hat{j} + \omega_0\hat{k}$

۳) $4 \times 10^{-4}\frac{v_0}{a}\hat{i} - 4 \times 10^{-4}\frac{v_0}{a}\hat{j} + \omega_0\hat{k}$

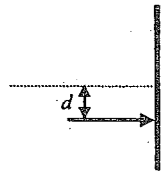
۴) $8 \times 10^{-4}\frac{v_0}{a}\hat{i} - 8 \times 10^{-4}\frac{v_0}{a}\hat{j} + \omega_0\hat{k}$

گزینه‌ی (هیچکدام) صحیح است.

$$L_0 = L \Rightarrow I\omega_0\hat{k} + I\omega_0\hat{k} - 0/001 m a \nu_0 \hat{j} = (I + I + 0/001 m a^2)\omega$$

$$2\times\frac{1}{2}\frac{m}{2}a^2\omega_0\hat{k} - 0/001 m a \nu_0\hat{j} = \left[2\times\frac{1}{2}\frac{m}{2}a^2 + 0/001 m a^2\right]\omega \Rightarrow \omega = \omega_0\hat{k} - 2\times 10^{-3}\frac{\nu_0}{a}\hat{j}$$

۲۰. میله‌ی همگنی به طول l به‌صورت افقی روی سطح بدون اصطکاکی در حال سکون قرار دارد. ضربه‌ای به فاصله‌ی d از مرکز جرم میله به‌صورت عمود بر میله وارد می‌کنیم. بعد از این که میله دو دور حول مرکز جرمش چرخید، مرکز جرم چه مسافتی را روی سطح افقی طی می‌کند؟ لختی دورانی میله‌ای همگن به طول L و جرم M حول محور گذرنده از مرکز جرم میله و عمود بر میله $\frac{1}{12}ML^2$ است. (سراسری ـ ۸۷)



۱) $\frac{\pi}{3}\frac{l^2}{d}$ ۲) $\frac{\pi}{6}\frac{l^2}{d}$

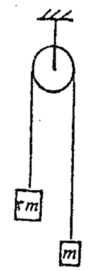
۳) $2\pi\frac{l^2}{d}$ ۴) $4\pi\frac{l^2}{d}$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\begin{cases} \bar{L} = \vec{r}\times\bar{F} \Rightarrow I\omega = Jd \Rightarrow \frac{1}{12}ml^2\omega = Jd \Rightarrow \omega = \frac{12Jd}{ml^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi ml^2}{12Jd} \\ F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow m\nu_{cm} = j \Rightarrow \nu_{cm} = \frac{J}{m} \end{cases}$$

$$x = \nu_{cm}t \Rightarrow x = \frac{J}{m}\times 2T \Rightarrow x = \frac{\pi l^2}{3d}$$

۲۱. در ماشین آتوود نشان داده شده در شکل، جرم‌های m و 3m متصل به سر نخ سبکی هستند که می‌تواند بدون اصطکاک روی قرقره بلغزد. در حالی که جرم 3m را نگه داشته‌ایم، جرم m را به اندازه‌ی ارتفاع h بالا می‌آوریم و از حالت سکون رها می‌کنیم. درست در لحظه‌ای که نخ متصل به جرم m می‌خواهد کشیده شود، جرم 3m را که نگه داشته بودیم، رها می‌کنیم. جرم 3m حداکثر تا چه ارتفاعی از محل اولیه‌اش می‌تواند بالا رود؟ فرض کنید جرم 3m در موقع بالاآمدن به قرقره نمی‌رسد. همچنین از ضربه‌ی نیروی وزن در مدت زمانی که نخ از حالت شل به حالت کشیده درمی‌آید، صرف‌نظر کنید. (سراسری ـ ۸۸)



۱) $\frac{h}{8}$

۲) $\frac{h}{4}$

۳) $\frac{h}{2}$

۴) $2h$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

برای m داریم

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\nu_0^2 \Rightarrow \nu_0^2 = 2gh \Rightarrow \nu_0 = \sqrt{2gh}$$

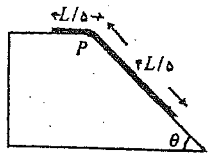
برای 3m داریم

$$p_1 = p_2 \Rightarrow m\nu_0 = (m+3m)\nu \Rightarrow m\sqrt{2gh} = 4m\nu \Rightarrow \nu = \frac{\sqrt{2gh}}{4}$$

برای 3m داریم

$$E'_1 = E'_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\nu^2 + mgh + \frac{1}{2}(3m)\nu^2 = (3m)gh \Rightarrow 2\nu^2 = 2gh \Rightarrow \frac{2gh}{16} = gh \Rightarrow H = \frac{h}{8}$$

۲۲. مطابق شکل طنابی می‌تواند روی سطح شیبدار ساکنی، بدون اصطکاک به پایین بلغزد. اگر طناب در وضعیت نشان داده شده از حالت سکون رها شود، وقتی انتهای آن به نقطه‌ی P می‌رسد، تندی آن چند متر بر ثانیه است؟ (طول طناب $L = 80\ cm$، $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ و $\theta = 30^\circ$ است.) (سراسری ـ ۸۸)



۱) ۱/۲ ۲) ۱/۷

۳) ۲/۸ ۴) ۳/۶

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\nu_{rel} = 0 \Rightarrow T = m'a \Rightarrow T = \lambda\frac{L}{5}a$$

$$\vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{\nu}}{dt} - \vec{\nu}_{rel}\frac{dm}{dt} \Rightarrow mg\sin\theta - T = m\frac{d\nu}{dt}$$

$$\Rightarrow \lambda\frac{4L}{5}g\sin\theta - \lambda\frac{L}{5}a = \lambda\frac{4L}{5}a \Rightarrow 4g\sin\theta = 5a$$

$$\Rightarrow a = 4\ \frac{m}{s^2}$$

هرگاه انتهای طناب به نقطه p برسد، در واقع $\frac{L}{5}$ طناب جابجا شده است، پس

$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2} m \\ L = 80\ cm \end{cases} \Rightarrow L = 80\times 10^{-2} \Rightarrow L = 0/8\ m$$

$$\nu^2 - \nu_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \nu^2 - 0 = 2\times 4\times \frac{L}{5} \Rightarrow \nu^2 = 2\times 4\times \frac{0/8}{5}$$

$$\Rightarrow \nu = 1/14\ \frac{m}{s}$$

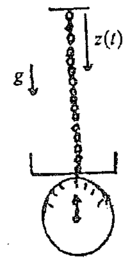
۲۳. زنجیر با توزیع جرم یکنواخت λ در واحد طول از سقفی که بالای کفه‌ی ترازویی آویزان است بطوری که در ابتدا نوک زیرین زنجیر بر کفه‌ی ترازو مماس است و عقربه‌ی ترازو، وزن صفر را نشان می‌دهد. در یک لحظه، نوک بالایی زنجیر از سقف کنده شده و زنجیر، سقوط آزاد می‌کند و به تدریج بر کفه‌ی ترازو می‌نشیند. در لحظه‌ای که نوک بالایی زنجیر به اندازه‌ی طول z(t) از سقف فاصله گرفته باشد (یا بر کفه‌ی ترازو، نشسته باشد) ترازو چه وزنی را نشان می‌دهد؟ فرض کنید همه‌ی دانه‌های زنجیر به کف ترازو می‌خورند. (سراسری ـ ۸۸)

۱) $\lambda gz(t)$

۲) صفر

۳) $3\lambda gz(t)$

۴) $2\lambda gz(t)$



گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\begin{cases} u^2 - \nu_0^2 = 2gz(t) \Rightarrow u^2 - 0 = 2gz(t) \Rightarrow u = \sqrt{2gz(t)} \\ \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{\nu}}{dt} + (\vec{\nu} - \vec{u})\frac{dm}{dt} \Rightarrow \lambda z(t)g - N = 0 + 0 + (0 - u)\frac{d}{dt}[\lambda z(t)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = \lambda z(t)g + u\lambda\frac{dz(t)}{dt} \Rightarrow N = \lambda z(t)g + u^2\lambda \Rightarrow N = \lambda z(t)g + 2gz(t)\lambda$$

$$\Rightarrow N = 3\lambda gz(t)$$

۲۴. باریکه‌ای از ذرات به جرم m از هدف‌هایی به جرم M که ابتدا ساکنند به‌صورت کاملا کشسان، پراکنده می‌شوند .در دستگاه مرکز جرم، توزیع زاویه‌ای پراکندگی ذرات، همسانگرد است یعنی سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی در دستگاه مرکز جرم: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_0}{4\pi}$ است. سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی هدف‌هایی به جرم M برحسب زاویه‌ی پراکندگی آنها در دستگاه آزمایشگاه ξ چگونه است؟ (سراسری ـ ۸۸)

۱) $\frac{\sigma_0}{4\pi}$ ۲) $\frac{2\sigma_0}{\pi}\cos\xi$ ۳) $\frac{2\sigma_0}{\pi}\sin\xi$ ۴) $\frac{\sigma_0}{\pi}\cos\xi$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

طبق رابطه‌ی (۳ـ۲۷۶) کتاب سایمون

$$d\sigma = \left[\frac{q_1q_2}{2m\nu_0^2}\right]^2 \frac{2\pi\sin\Theta}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}d\Theta \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{q_1q_2}{2m\nu_0^2}\right]^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}} \Rightarrow \frac{\sigma_0}{4\pi} = \left[\frac{q_1q_2}{2m\nu_0^2}\right]^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}$$

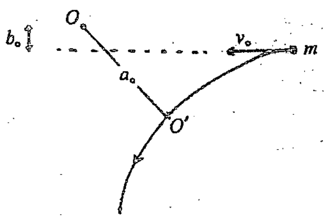
طبق رابطه‌ی (۴ـ۱۱۹) کتاب سایمون

$$d\sigma = \left(\frac{q_1q_2}{2\mu\nu_0^2}\right)^2 \frac{4\cos\xi}{\sin^4\xi} 2\pi\sin\xi d\xi \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_1q_2}{2\mu\nu_0^2}\right)^2 \frac{4\cos\xi}{\sin\xi}$$

پس

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_0}{4\pi}4\cos\xi \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_0}{\pi}\cos\xi$$

۲۵. ذره‌ای به جرم m از فاصله‌ی بسیار دور با تندی اولیه‌ی ν_0 و با پارامتر برخورد b_0 به سمت یک مرکز نیرو که نقطه‌ی o می‌باشد به این نقطه نزدیک شده و به علت نیروی دافعه‌ی $F(r) = \frac{m\nu_0^2c_0^2}{r^3}$ (r فاصله از نقطه‌ی o است) از نزدیک‌ترین فاصله یعنی نقطه‌ی o' به فاصله‌ی $a_0 = oo'$ از مرکز o عبور می‌کند. مقدار a_0 چقدر است؟ (سراسری ـ ۸۸)



۱) $a_0 = b_0 \pm c_0$ ۲) $a_0 = \sqrt{b_0^2 + c_0^2}$

۳) $a_0 = \frac{b_0c_0}{\sqrt{b_0^2+c_0^2}}$ ۴) $\frac{1}{a_0} = \frac{1}{b_0} + \frac{1}{c_0}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$V = \int_{a_0}^{\infty} F(r)dr \Rightarrow V = \int_{a_0}^{\infty}\frac{m\nu_0^2c_0^2}{r^3}dr \Rightarrow V = -\frac{m\nu_0^2c_0^2}{2r^2}\Big|_{a_0}^{\infty} \Rightarrow V = \frac{m\nu_0^2c_0^2}{2a_0^2}$$

از طرفی

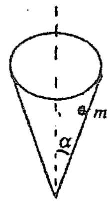
$$L_1 = L_2 \Rightarrow m b_0 v_0 = m a_0 v \Rightarrow v = \frac{b_0 v_0}{a_0}$$

و نیز $E_1 = E_2 \Rightarrow$

$$K_1 = K_2 + V \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{m v^2 c_0^2}{2 a_0^2} \Rightarrow v_0^2 = \left(\frac{b_0 v_0}{a_0}\right)^2 + \frac{v^2 c_0^2}{a_0^2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{b_0^2}{a_0^2} + \frac{c_0^2}{a_0^2} \Rightarrow a_0 = a_0 = \sqrt{b_0^2 + c_0^2}$$

۲۶. مطابق شکل ذره‌ای به جرم m در میدان گرانشی زمین، مقید به حرکت بر روی یک دایره‌ی افقی روی سطح داخلی مخروط قائم وارونه با نیم‌زاویه‌ی راس α می‌باشد. اگر تکانه‌ی زاویه‌ای ذره، مقدار ثابت l_0 باشد شعاع مسیر r_0 دایره‌ای حرکت ذره و تندی زاویه‌ای ω_0 چرخیدن ذره روی این مسیر چقدر هستند؟ (سراسری ـ ۸۸)



۱) $r_0 = \left[\frac{l_0^2 \cos\alpha}{m^2 g}\right]^{\frac{1}{3}}$ و $\omega_0 = \left[\frac{m}{l_0} g^2 \sin^2\alpha\right]^{\frac{1}{3}}$

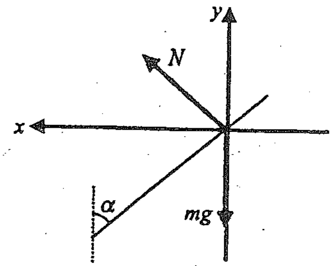
۲) $r_0 = \left[\frac{l_0^2 \sin\alpha}{m^2 g}\right]^{\frac{1}{3}}$ و $\omega_0 = \left[\frac{m}{l_0} g^2 \cos^2\alpha\right]^{\frac{1}{3}}$

۳) $r_0 = \left[\frac{l_0^2 \tan\alpha}{m^2 g}\right]^{\frac{1}{3}}$ و $\omega_0 = \left[\frac{m}{l_0} g^2 \cot^2\alpha\right]^{\frac{1}{3}}$

۴) $r_0 = \left[\frac{l_0^2 \cot\alpha}{m^2 g}\right]^{\frac{1}{3}}$ و $\omega_0 = \left[\frac{m}{l_0} g^2 \tan^2\alpha\right]^{\frac{1}{3}}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\begin{cases} F_x = m a_x \\ F_y = m a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N\cos\alpha = \frac{m v^2}{r_0} \\ N\sin\alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{g r_0}{v^2}$$



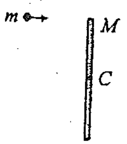
حالا داریم

$$l_0 = m r_0 v \Rightarrow v = \frac{l_0}{m r_0} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{m^2 g r_0^3}{l_0^2} \Rightarrow r_0 = \left[\frac{l_0^2 \tan\alpha}{m^2 g}\right]^{\frac{1}{3}}$$

در نتیجه

$$v = r_0 \omega_0 \Rightarrow \frac{l_0}{m r_0} = r_0 \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{l_0}{m r_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{l_0}{m}\left[\frac{m^2 g}{l_0^2 \tan\alpha}\right]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \omega_0 = \left[\frac{m g^2 \cot^2\alpha}{l_0}\right]^{\frac{1}{3}}$$

۲۷. مطابق شکل، ذره‌ای به جرم m بطور کاملا کشسان با انتهای یک میله‌ی نازک به جرم یکنواخت M واقع در سطح افقی میز، برخورد می‌کند و به سکون درمی‌آید. میله روی سطح میز صاف و بدون اصطکاک به حرکت انتقالی و دورانی به دور مرکز جرمش یعنی نقطه‌ی C در وسط میله درمی‌آید. رابطه‌ی M و m چیست؟ لختی دورانی میله‌ای به طول L و جرم M حول محور گذرنده از مرکز جرم و عمود بر میله $ML^2/12$ است. (سراسری ـ ۸۸)



۱) $M = m$ ۲) $M = 2m$

۳) $M = 3m$ ۴) $M = 4m$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\begin{cases} \Sigma F_{ext} = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow m v_0 = M v_{cm} \Rightarrow v_{cm} = \frac{m v_0}{M} & \text{(گلوله و میله)} \\ \Sigma \tau_{ext} = 0 \Rightarrow L_1 = L_2 \Rightarrow m v_0 d = I_{cm}\omega \Rightarrow m v_0 \frac{L}{2} = \frac{1}{12} M L^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{6 m v_0}{ML} \end{cases}$$

چون برخورد کشسان می‌باشد، پس انرژی جنبشی سیستم پایسته بوده و داریم

$$K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M \left[\frac{m v_0}{M}\right]^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} M L^2 \left[\frac{6 m v_0}{ML}\right]^2$$

$$\Rightarrow M = 4m$$

فصل ۵

اجسام صلب دوران حول یک محور ـ استاتیک

۱. ثابت کنید که انرژی جنبشی کل دستگاهی از ذرات که جسم صلبی را می‌سازند و به‌وسیله معادله (۴ ـ ۳۷) تعریف می‌شوند. وقتی جسم حول محور ثابتی دوران کند، به‌وسیله‌ی معادله‌ی (۵ـ ۱۶) بطور صحیح داده می‌شود. ب) اگر N_z مجموع گشتاور ـ نیروهای ناشی از نیروهای خارجی حول محور دوران باشد، ثابت کنید که وقتی جسم از θ_s به θ دوران می‌کند، انرژی پتانسیل داده شده به‌وسیله معادله (۵ ـ ۱۴) همان کارکل انجام شده در مقابل نیروهای خارجی است.

حل:

$$T=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k v_k^2 \qquad (۳۷ـ۴)$$

$$T=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \qquad (۱۶ـ۵)$$

$$V(\theta)=-\int_{\theta_0}^{\theta}N_z(\theta)d\theta \qquad (۱۴ـ۵)$$

اگر r_k فاصله نقطه kام از محور دوران باشد داریم:

$$V_k=r_k\dot{\theta}_k$$

و برای یک جسم صلب در حال دوران با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ حول محور مذکور داریم:

$$\dot{\theta}_1=\dot{\theta}_2=\ldots=\dot{\theta}_N=\dot{\theta}$$

بنابراین

$$V_k=r_k\dot{\theta}$$

با جایگذاری در (۴ ـ ۳۷) خواهیم داشت:

$$T=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k r_k^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{N}m_k r_k^2\Big)\dot{\theta}^2$$

و طبق تعریف لختی جسم حول محور دوران مذکور:

$$T=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \qquad I=\sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2$$

ب)

$$N_{z_{ext}}=\sum_{k=1}^{N} N_{z_{ext}}=\sum_{k=1}^{N} r_k F_{k_{ext}}$$

$$V_k=-\int_{c_k} (\vec{F}_{ext})_k \cdot d\vec{e}_k$$

اگر ذره k در مسیر c_k را تحت نیروی خارجی اعمالی $(\vec{F}_{ext})_k$ طی کند.

به مقدار V_k تغییر انرژی پتانسیل می‌دهد و تغییر انرژی پتانسیل کل جسم عبارتست از:

$$V=\sum_{k=1}^{N} V_k=-\sum_{k=1}^{N}\int_{c_k} (\vec{F}_{ext})_k \cdot d\vec{e}_k$$

$\hat{\theta}_k$ بردار یکه در جهت افزایش θ_k است.

$$d\vec{e}_k=r_k d\theta_k \hat{\theta}_k$$

اگر $\vec{r}_k$ برداری باشد عمود بر محور دوران که محور دوران را به ذره kام وصل می‌کند.

$$\vec{r}_k \perp \hat{\theta}_k$$

برای یک جسم صلب داریم:

$$d\theta_1 = d\theta_2 = \dots = d\theta_N$$

اگر $(\vec{F}_{ext})_k \cdot d\vec{e}_k$ را محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$(\vec{F}_{ext})_k \cdot r_k d\theta\hat{\theta}_k=F_{ext_k} r_k d\theta=N_{z_k} d\theta$$

اگر F_{ext_k} مؤلفه‌ای از $\vec{F}_{xet_k}$ است که بر $\vec{r}_k$ عمود است.

$$V=-\sum_{k=1}^{N}\int_{c_k} N_{z_k} d\theta$$

اگر فقط دوران داشته مسیر c_k را می‌تواند با تغییر پارامتر θ از θ_s به θ نمایش داد. (جسم صلب)

$$V=-\int_{\theta_s}^{\theta}\left(\sum_{k=1}^{N} N_{z_k}\right)d\theta=-\int_{\theta_s}^{\theta} N_z d\theta$$

که (۵ ـ ۱۴) اثبات شد.

۲. طرح تشابهی بخش (۵ ـ ۲) را به‌کار برده قضیه‌ای مشابه قضیه داده شده به‌وسیله (۲ ـ ۸) تنظیم کنید و با شروع از معادله (۵ ـ ۱۳) آن را اثبات کنید.

حل:

$$\frac{dL}{dt}=I_z\ddot{\theta}=N_z \quad (۱۳-۵)$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \quad \& \quad T_2-T_1=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} \quad (۸-۲)$$

$$\int N_z d\theta=\int I_z\ddot{\theta}d\theta=I_z\int\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta})\dot{\theta}dt=I_z\int\dot{\theta}d(\dot{\theta})$$

$$=\frac{1}{2}I_z(\dot{\theta})^2+C$$

$$\frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_2^2-\dot{\theta}_1^2)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}N_z d\theta$$

$$T=\frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2 \quad \& \quad T_2-T_1=\int_{\theta_1}^{\theta_2}N_z d\theta$$

که همان رابطه‌ی حانسته (۲ ـ ۸) است.

۳. با در دست داشتن معادله حرکت دورانی (۵ ـ ۱۳) ثابت کنید که اگر N_z فقط تابعی از θ باشد، در این صورت $T + V$ ثابت است.

حل:

$$\frac{dL}{dt}=I_z\ddot{\theta}=N_z \quad (۱۳-۵)$$

$$\Delta V=-\int_{\theta_1}^{\theta_2}N_z(\theta)d\theta=V(\theta_2)-v(\theta_1) \quad (۱۴-۵)$$

اثبات مسأله قبل

$$T_2-T_1=+\int_{\theta_1}^{\theta_2}N_z(\theta)d\theta=\Delta T$$

$$\Delta T+\Delta V=\Delta(T+V)+\int_{\theta_1}^{\theta_2}N_z(\theta)d\theta-\int_{\theta_1}^{\theta_2}N_z(\theta)d\theta=0$$

$T + V =$ conws tan t

۴. چرخ رقاصک یک ساعت شامل حلقه‌ای به جرم M و شعاع a و پره‌هایی به جرم ناچیز است. فنر تنظیم‌کنندهٔ گشتاور ـ نیروی بازگرداننده‌ی $N_z = -k\theta$ را به آن وارد می‌کند. اگر چرخ تا زاویه θ_0 چرخاننده و سپس رها شود، معادله حرکت را پیدا کنید.

حل:

$$I\ddot{\theta}=N=-k\theta \qquad I\cong Ma^2$$

$$\ddot{\theta}+\frac{k}{I}\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t)=\theta'_0\,\mathrm{Sin}\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t\right)+\theta''_0\,\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t\right)$$

$$\left.\begin{cases}\theta(t=0)=\theta_0 & \Rightarrow \quad \theta''_0=\theta_0 \\ \dot{\theta}(t=0)=0 & \Rightarrow \quad \theta'_0=0\end{cases}\right\}\Rightarrow \theta(t)=\theta_0 \mathrm{Cos}(\sqrt{\frac{k}{I}}t)$$

۵. چرخ به جرم M و شعاع چرخشی k، به نرمی حول محور افقی ثابتی به شعاع a می‌چرخد ده از سوراخ مرکز چرخ که شعاع آن اندکی بزرگتر است، می‌گذرد. ضریب اصطکاک بین سطوح یاطاقان هم است. اگر چرخ از ابتدا با سرعت اولیه زاویه‌ای ω_0 بچرخد، زمان و تعداد دوران را تا هنگام توقف پیدا کنید.

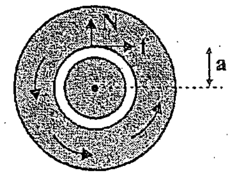
حل:

چرخ به آهستگی می‌چرخد و در راستای عمود بر میله افقی تماماً در تعادل است.

$N = Mg$

$f = \mu Mg \qquad I = Mk^2$

$\Delta E = w$



تغییری در انرژی پتانسیل کل سیستم نداریم.

$$\Delta E = \Delta T + \Delta V \qquad \Delta V = 0$$

$$\Delta E = \Delta T = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - 0 = w$$

$$w=\int_{\theta_0}^{\theta_s} N_f d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_s}\mu Mg(a+\delta)d\theta=\mu Mg(a+\delta)\Delta\theta$$

که θ_0 مقدار $\theta(t)$ از مبدأ اندازه‌گیری θ در $t = 0$ و θ_s مقدار $\theta(t)$ در لحظه توقف است.

$$\Delta\theta = \theta_s - \theta_0$$

(گشتاور ـ نیروی اصطکاک)

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}Mk^2\omega_0^2 = [\mu Mg(a + \delta)]\Delta\theta$$

توجه کنید که $(a + \delta)$ شعاع داخلی چرخ است $(a) >> (\delta)$ (δ میزان لقی چرخ است)

تعداد دور تا توقف $N = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi} = \dfrac{k^2\omega_0^2}{4\mu Mg(a + \delta)}$

برای پیدا کردن t_s(زمان توقف) باید معادله حرکت را بنویسیم:

$$I\ddot{\theta}=\mu Mg(a+\delta)$$

$$\dot{\theta}=\frac{1}{k^2}\mu g(a+\delta)t+C$$

$$\dot{\theta}(t=0)\omega_0\Rightarrow\dot{\theta}(t)=\frac{1}{k^2}\mu g(a+\delta)+\omega_0$$

$$\theta(t)=\frac{1}{2k^2}\mu g(a+\delta)t^2+\omega_0 t+\theta_0 \qquad \theta(t=0)=\theta_0$$

$$\theta(t=t_s)=\theta_s=\frac{1}{2k^2}\mu g(a+\delta)t_s^2+\omega_0 t_s+\theta_0$$

$$\frac{1}{2k^2}\mu g(a+\delta)t_s^2+\omega_0 t_s-\Delta\theta=0$$

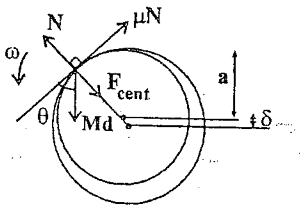
$$\Delta=\omega_0^2+4(\Delta\theta)(\frac{1}{2k^2}\mu g(a+\delta))$$

$$t_s=\frac{k^2}{\mu g(a+\delta)}(-\omega_0\pm\sqrt{2}\,\omega_0)$$

$$t_s=\frac{\omega_0 k^2}{\mu g(a+\delta)}(-1\pm\sqrt{2})$$

که فقط $t_s > 0$ قابل قبول است.

$$t_s=\frac{\omega_0 k^2}{\mu g(a+\delta)}(\sqrt{2}-1)$$



ما در بررسی دیاگرام نیروها فرض کردیم $(\theta = 0)$ است. با جهت ω معلوم برای نقطه تماس‌های سمت راست نقطه تماس $(\theta = 0)$ تعادل مماسی نداریم، حتی این تعادل مماسی (tangential) در $(\theta = 0)$ هم برای نیروها وجود ندارد و نیروی μN چرخ را به سمت راست می‌کشد، تنها حالت ممکن این است که در شکل نشان داده شده، آنگاه امکان برقراری تعادل مماسی وجود دارد.

پس تا حد ممکن باید نتایج را اصلاح کنیم.

radial equilibrium: $N = M(a + \delta)\omega^2 + Mg\mathrm{Sin}\theta$

tangential equilibrium: $\mu N = Mg\mathrm{Cos}\theta$

θ برای ما برحسب پارامترهای سیستم مفیدتر است.

$$\mathrm{Cos}\theta = \frac{\mu N}{Mg}$$

در نهایت خواهیم داشت

$$N = M(a+\delta)\omega^2 + mg(1 - (\mu N/mg)^2)^{0.5}$$

اگر از نیروی جانب به مرکز صرف‌نظر کنیم (طبق فرض مسأله چرخ به آهستگی می‌چرخند و نیروی N و μN و Mg خیلی بزرگتر از جانب به مرکز هستند.)

$$N^2 \cong M^2g^2 - \mu^2N^2 \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}Mg$$

پس هر جا که در نتایج g داشتیم آن را بر $\sqrt{1+\mu^2}$ تقسیم می‌کنیم چونکه قبلاً داشتیم

$$\Delta\theta = \frac{k^2\omega_0^2}{4\pi\mu g(a+\delta)}\sqrt{1+\mu^2}$$

$$t_s = \frac{k^2\omega_0}{\mu g(a+\delta)}\sqrt{1+\mu^2}$$

۶. چرخی به جرم M و شعاع چرخش k روی محوری افقی سوار شده است. فنر مدوری که به محور وصل است، گشتاور ـ نیروی $N = -k\theta$ را اعمال می‌کند، که منجر به برگرداندن چرخ به مکان تعادلش در $\theta = 0$ می‌شود. جرم m روی حاشیه چرخ در نقطه‌ای که بطور عمودی بالای محور و به فاصله 2k از محور است، وقتی $\theta = 0$ است، قرار داده شده است. انواع حرکت‌هایی که می‌توانند رخ دهند را توصیف کنید. مکان تعادل پایدار یا ناپایدار چرخ را در صورت وجود مشخص کنید و فرکانس نوسان‌های کوچک حول نقاط تعادل را به‌دست آورید. دو حالت را درنظر بگیرید: الف) $k > 2mgk$

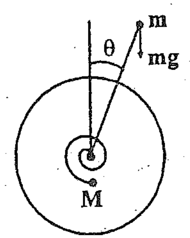
ب) $k = \frac{4mgk}{\pi}$ اگر $k < (4mgk/5\pi)$ چه؟ [راهنمایی: معادله مثلثاتی را بطور ترسیمی حل کنید.]

حل:

ابتدا تابع $V'(\theta)$ را به‌دست می‌آوریم

$$[V(\theta) = -\int N d\theta]$$

$$N = 2kmg\sin\theta - k\theta = \frac{dV}{d\theta}$$



پس نقاط تعادل از حل معادله زیر پیدا می‌شوند

$$2kmg\sin\theta = k\theta \qquad \text{(I)}$$

و پایداری و یا ناپایداری تعادل‌ها را می‌توان با یافتن $V''(\theta)$ پیدا کرد:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 2kmg\cos\theta - k$$

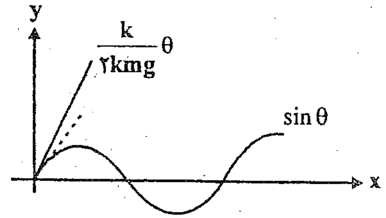
$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 0$ (تعادل خنثی) $\cos\theta = \frac{k}{2kmg}$ (II)

$\frac{d^2V}{d\theta^2} < 0$ (تعادل ناپایدار) $\cos\theta < \frac{k}{2kmg}$ (III)

$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$ (تعادل پایدار) $\cos\theta > \frac{k}{2kmg}$ (IV)

البته θای را که جواب معادله I است باید در یکی از معادلات II و III و IV قرار داد تا دید، تعادل از چه نوعی است.

ابتدا به انواع جواب‌های معادله I می‌پردازیم



حالت اول: در این خط $\frac{k}{2kmg}\theta$ ، $\sin\theta$ همدیگر را در $\theta = 0$ قطع می‌کنند. زیرا که $\frac{k}{2kmg} > 1$ و خط مماس بر $\sin\theta$ در $\theta = 0$ شیبی برابر با ۱ دارد. در این حالت فقط معادله II در مورد این نقطه تعادل صادق است، پس: (نوع تعادل: et & نقطه تعادل: ep)

ناپایدار: et $\quad$ if $\frac{k}{2kmg} > 1$ ep: $\theta = 0$

در حالت $\frac{k}{2kmg} = 1$ هم $\theta = 0$ نقطه تعادل است که این نقطه تعادل خنثی است.

خنثی: et $\quad$ if $\frac{k}{2kmg} = 1$ ep: $\theta = 0$

حالت دوم: در این حالت $\frac{k}{2kmg} < 1$

اگر بخواهیم خط $\alpha\theta$ قله $\sin\theta$ بعد از $\theta = 0$ را قطع کند درحالیکه قله $1 + n\pi$ را قطع نکند باید معادلات زیر برقرار باشند.

$\alpha\pi(\frac{2n-1}{2}) < 1$ & $\alpha(\frac{2n+1}{2}) > 1$

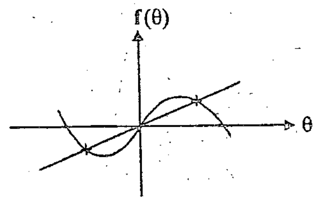
در مسأله ما $\alpha = k/2mkg$ بنابراین اگر:

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} < (k/2mgk) < \frac{22}{(2n-1)\pi}$$

n: 1,2,3,...

در کل ما $(1-2n)\times 2$ نقطه تعادل غیر از $\theta = 0$ خواهیم داشت

n = 1



پس معادله I در حالتی که $2/((2n+1)\pi) < [k/2mgk] < (\frac{2}{(2n-1)}\pi)$ باشد
$1 + 2((2n-1))$ جواب دارد

n: 1,2,3,...

جواب‌ها را با اندیس p نشان می‌دهیم

$$2kmg\sin\theta_p = k\theta_p$$

که:

p: $-(2n-1), -(2n-2), \ldots 0, \ldots, (2n-2), (2n-1)$

که $\theta_0 = 0$ است. حال می‌خواهیم سعی کنیم نوع تعادل θ_p را مشخص کنیم.

معادلات II و III و IV را بازنویسی می‌کنیم. (θ_p و θ_{-p} یک وضعیت تعادل دارند):

$\cos\theta_p = \frac{k}{2kmg}$ (Neutral equilibrium) II

$\cos\theta_p > \frac{k}{2kmg}$ (stable equilibrium) IV

$\cos\theta_p < \frac{k}{2kmg}$ (non _ stable equilibrium) III

پس هر θ_pای که در I صدق کرد اگر در شرط بالا صدق می‌کرد، آن تعادل را داشت.

ب)

$$\alpha = \frac{k}{2mgk} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{-\pi}{2}, \theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$0 < \alpha < 1$

$\cos\theta_1 = \cos\theta_{-1} = 0 \Rightarrow$ معادله III برقرار است

تعادل نقاط ۱ و ۱- ناپایدار است.

تعادل نقطه ۰ پایدار است.

$\cos\theta_0 = 1 \Rightarrow$ معادله IV برقرار است

حول صفر برای جابجایی‌های کوچک θ داریم:

$\sin\theta_0 \approx \theta$

$N(\theta) \cong -(2mgk - k)\theta$

$$I\ddot{\theta} = N \Rightarrow \ddot{\theta} + (\frac{-k+2mgk}{I})\theta = 0$$

$I = m(2k)^2 + Mk^2$

$$\omega = (\frac{2mgk-k}{4mk^2+Mk^2})^{0.5} = \sqrt{2mgk}(\frac{1-(2/\pi)}{4mk^2+Mk^2})^{0.5}$$

if $k < (4mgk/5\pi) \Rightarrow \alpha = \frac{k}{2mgk} = \frac{2}{5\pi} = \frac{2}{(2(3)-1)\pi}$

n = 3

$\theta_3 = \frac{5\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_{-p} = -\theta_p$

$0 < \alpha < 1$

$\cos\theta_{\pm3} = \cos\theta_{\pm2} = \cos\theta_{\pm1} = 0$

نقاط تعادل $p = \pm1, \pm2, \pm3$

$\cos\theta_0 = 1$

نقطه θ_0 پایدار است.

و فرکانس نوسانات پایدار حول $\theta_0 = 0$:

$$\omega = (\frac{2mgk-k}{4mk^2+Mk^2})^{0.5} = \sqrt{2mgk}(\frac{1-(2/5\pi)}{4mk^2+Mk^2})^{0.5}$$

اما در حالت

$k < (4mgk/5\pi)$

حالت‌های

$$\frac{2}{(2(3)+1)\pi} < \alpha < \frac{2}{(2(3)-1)\pi}$$

و

$$\frac{2}{(2(2)+1)\pi} < \alpha < \frac{2}{(2(2)-1)\pi}$$

و

$$\frac{2}{(2(1)+1)\pi} < \alpha < \frac{2}{(2(1)-1)\pi}$$

در حالت اول ۱۱ نقطه تعادل داریم که طبق بحث صفحه قبلی فقط $\theta_0 = 0$ تعادل پایدار دارد که فرکانس نوسان‌های پایدار حول $\theta_0 = 0$ برابر

$$\omega = \sqrt{2mgk}\left(\frac{1-\alpha}{4mk^2+Mk^2}\right)^{0/5}$$

۷. ملخ هواپیمایی به گشتاور ماند I تحت تأثیر گشتاور ـ نیروی رانندهٔ

$$N(t) = N_0(1 + \alpha\cos(\omega_0 t))$$

و گشتاور نیروی اصطکاکی ناشی از مقاومت هوا $N_f = -b\dot\theta$ قرار می‌گیرد، حرکت حالت پاینده آن را پیدا کنید.

حل:

معادله حرکت را می‌نویسیم

$$I\ddot\theta = N_0(1+\alpha\cos(\omega_0 t)) - b\dot\theta$$

$$\dot\theta = \alpha$$

$$\dot\alpha + \frac{b}{I}\varphi = \frac{N_0}{I}(1 + \alpha\cos(\omega_0 t))$$

$$(\varphi e^{bt/I}) = \frac{N_0}{I} e^{bt/I}(\alpha\cos(\omega_0 t) + 1)$$

بنابراین:

$$\varphi e^{bt/I} = \frac{N_0}{I}\int e^{bt/I}(\alpha\cos(\omega_0 t)+1)dt$$

$$\int e^{\gamma x}\cos(\beta x)dx = \frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}\cos(\beta x) + \frac{\beta}{\gamma}\int e^{\gamma x}\sin(\beta x)dx$$

$$\int e^{\gamma x}\sin(\beta x)dx = \frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}\sin(\beta x) - \frac{\beta}{\gamma}\int e^{\gamma x}\cos(\beta x)dx$$

$$\Rightarrow \int e^{\gamma x}\cos(\beta x)dx = \left[\frac{\gamma}{\gamma^2}e^{\gamma x}\cos(\beta x) + \frac{\beta}{\gamma^2}e^{\gamma x}\sin(\beta x)\right]\left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2}\right)$$

$$\int e^{bt/I}\cos(\omega_0 t)dt = \frac{e^{bt/I}}{(\omega_0^2+(b/I)^2)}\left[\left(\frac{b}{I}\right)\cos(\omega_0 t) + \omega_0\sin(\omega_0 t)\right]$$

$$\varphi e^{bt/I} = \left(\frac{N_0}{I}\right)\left[\frac{e^{bt/I}}{\omega_0^2+(b/I)^2}\left(\left(\frac{b}{I}\right)\cos(\omega_0 t)+\omega_0\sin(\omega_0 t)\right) + \frac{I}{b}e^{bt/I}\right] + c$$

$$\dot\theta(t) = \left(\frac{N_0}{I}\right)\left[\frac{1}{\omega_0^2+(b/I)^2}\left(\left(\frac{b}{I}\right)\cos(\omega_0 t)+\omega_0\sin(\omega_0 t)\right) + \frac{I}{b}\right] + ce^{\frac{-bt}{I}}$$

جواب حالت پاینده آن قسمتی از جواب است که استهلاک ندارد و به شرایط اولیه بستگی ندارد

$$\text{if } t >> \frac{I}{b} \Rightarrow \dot\theta(t) \cong \frac{N_0}{I}\left[\frac{(b/I)\cos(\omega_0 t)+\omega_0\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2+(b/I)^2}\right] + \frac{N_0}{b}$$

و اگر تابع $\theta(t)$ هم مهم باشد:

$$\theta(t) = \int\dot\theta dt = C + \frac{N_0}{I\omega_0}\left[\frac{\omega_0\cos(\omega_0 t)-(b/I\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2+(b/I)^2}\right] + \frac{N_0}{b}t$$

اگر قرار دهیم:

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{(N_0 I/\omega_0)}{(I\omega_0)^2+b^2}\right) + \frac{N_0}{I\omega_0}\left[\frac{\omega_0\cos(\omega_0 t)-(b/I)\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2+(b/I)^2}\right] + \frac{N_0}{b}t$$

۱۰. فرض کنید که آونگ ساده‌ای تحت تأثیر گشتاور ـ نیروی اصطکاکی $-mb_1\dot\theta$ ناشی از اصطکاک نقطه آویزش و نیروی اصطکاکی $-b_2\vec{v}$ (وارد بر گلوله) ناشی از مقاومت هوا قرار گرفته است که در آن $\vec{v}$ سرعت گلوله است. گلوله دارای جرم m است و به‌وسیله ریسمانی به طول ℓ آویزان شده است. زمان لازم برای آنکه دامنه نوسان به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه (کوچک) خود برسند، چقدر است؟ m و ℓ چقدر باید اختیار شوند تا آونگ تا جایی که ممکن است بیشتر دور بزند؟

حل:

$$\vec{N} = \vec{N}_T + \vec{N}_w + \vec{N}_f + \vec{N}_A = I\ddot\theta\hat{k}$$

$$\begin{cases} \vec{N}_T = \vec{r} * \vec{T} = 0 \\ \vec{N}_w = \vec{r} * \vec{w} = -mg\ell\sin\theta\hat{k} \\ \vec{N}_A = -mb_1\dot\theta\hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{w} = -mg\hat{j}$$

$$\vec{T} = -T\hat{r}$$

$$\vec{r} = \ell\hat{r}$$

$$\vec{v} = -v\theta a\hat{\theta} = -\ell\dot\theta = -\ell\dot\theta\hat\theta$$

$$\vec{f}_k = b_2 v\hat\theta$$

$$\vec{N}_f=\vec{r}\times\vec{f}_k=-\ell b_2 v\hat{k}$$

$$(-mg\ell\sin\theta)+(-mb_1\dot{\theta})+(-\ell^2\dot{\theta}b_2)=I\ddot{\theta}$$

$$\theta\approx 0\ \Rightarrow\ \sin\theta\approx\theta$$

$$I\ddot{\theta}+mg\ell\theta+mb_1\dot{\theta}+\ell^2 b_2\dot{\theta}=0$$

$$I\ddot{\theta}+(mb_1+\ell^2 b_2)\dot{\theta}+mg\ell\theta=0 \qquad I=m\ell^2$$

$$\ddot{\theta}+((b_1/\ell^2)+(b_2/m)\dot{\theta}+(g/\ell)\theta=0$$

$$\theta(t)=ce^{rt}\Rightarrow r^2+Ar+B=0$$

$$\Delta=[(b_1/\ell^2)+(b_2/m)]^2-4(g/\ell)$$

$$r_{1,2}=\frac{1}{2}[-[(\frac{b_1}{\ell^2})+(\frac{b_2}{m})]\mp([(\frac{b_1}{\ell^2})+(\frac{b_2}{m})]^2-4[\frac{g}{\ell}])^{1/2}]$$

$$\gamma=\frac{1}{2}(\frac{b_1}{\ell^2}+\frac{b^2}{m}) \qquad \sigma^2=\frac{g}{\ell}$$

$$\begin{cases} r_1=[-\gamma+(\gamma^2-\sigma^2)^{1/2}]=-\gamma+\omega' \\ r_2=[-\gamma-(\gamma^2-\sigma^2)^{1/2}]=-\gamma-\omega' \end{cases}$$

حالت اول: $(\gamma>\sigma)$

$$\theta(t)=A_0e^{-\gamma t}(B_0e^{\omega' t}+c_0e^{\omega' t})$$

حالت دوم: $(\gamma<\sigma)$

$$\theta(t)=A_0e^{-\gamma t}(B_0e^{i\omega_0 t}+c_0e^{-i\omega_0 t}) \qquad (i\omega_0=\omega')$$

حالت سوم: $(\gamma=\sigma)$

در این حالت معادله شاخص ریشه مضاعف دارد و یکی از جواب‌ها $te^{-\gamma t}$ و دیگری $e^{-\gamma t}$ است.

$$\theta(t)=Ae^{-\gamma t}(B_0+c_0t)$$

اگر بخواهیم نوسانات بیشتری داشته باشیم باید حالت دوم حاکم باشد:

$$\frac{g}{\ell}>\frac{1}{2}[\frac{b_1}{\ell^2}+\frac{b_2}{m}]$$

بزرگ بودن m و ℓ در کل باعث کوچک شدن γ می‌شوند (البته در صورتی که شرط بالا هم برقرار باشد) تعداد نوسانات بالا می‌رود. زمان لازم برای $\frac{1}{e}$ شدن دامنه:

$$e^{-\gamma t}=e^{-1}$$

$$t=\frac{1}{\gamma}$$

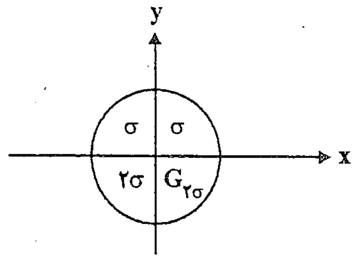
در نهایت زمان لازم برای $\frac{1}{e}$ شدن دامنه نسبت به دامنه اولیه از زیر به‌دست می‌آید:

$$t_0=2(\frac{b_1}{\ell^2}+\frac{b_2}{m})^{-1}$$

۱۵. قرص دایره‌ای شکل به شعاع a در صفحه xy چنان قرار دارد که مرکز آن در مبدأ مختصات است. نیمه بالای محور قرص دارای چگالی σ به واحد سطح و نیمه پایین محور x آن دارای چگالی 2σ است. مرکز جرم G و گشتاورهای ماند حول محورهای x و y و z و حول محورهای موازی مار بر G پیدا کنید، تا آنجا که می‌توانید از قضایای ساده‌کننده محاسبات استفاده کنید.

حل:

$$\vec{r}_{cm}=\frac{1}{M}\int\vec{r}\,dm$$



$$dm=\sigma(\theta)rdrd\theta$$

$$\begin{cases}\sigma(\theta)=\sigma & 0<\theta<\pi \\ \sigma(\theta)=2\sigma & \pi<\theta<2\pi\end{cases}$$

انتگرال را دو نیم می‌کنیم: $\Rightarrow\vec{r}_{cm}=\frac{\sigma}{M}(\int_0^a r^2(\int_0^\pi\hat{r}d\theta+2\int_\pi^{2\pi}\hat{r}d\theta)dr)$

$$\begin{cases}\int_0^\pi\hat{r}d\theta=\int_0^\pi(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})d\theta=2\hat{j} \\ \int_\pi^{2\pi}\hat{r}d\theta=\int_\pi^{2\pi}(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})d\theta=-2\hat{j}\end{cases}$$

$$\vec{r}_{cm}=-2\frac{\sigma}{M}\hat{j}\int_0^a r^2dr=\frac{-2}{3}a^3\hat{j}\frac{\sigma}{M}$$

$$\sigma(\frac{1}{2}\pi a^2)+2\sigma(\frac{1}{2}\pi a^2)=M\Rightarrow\sigma=\frac{2M}{3\pi a^2}$$

$$\vec{r}_{cm}=-(\frac{2}{3})^2(\frac{a}{\pi})\hat{j}$$

$$I_x=\int y^2dm=\int_0^a r^3(\int_0^\pi\sin^2\theta d\theta+2\int_\pi^{2\pi}\sin^2\theta d\theta)dr$$

$$I_x = \sigma(\frac{1}{4}a^4)(\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{8}\sigma a^4$$

$$I_x = \frac{3\pi}{8}(\frac{2M}{3\pi a^2})a^4 = \frac{1}{4}Ma^2$$

$$I_y = \int x^2 dm = \sigma(\frac{1}{4}a^4)(\int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta + 2\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2\theta d\theta)$$

$$I_y = \frac{1}{4}Ma^2$$

طبق قضیه محورهای عمود

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{2}Ma^2$$

و یا

$$I_z = \int (x^2+y^2)dm = I_x + I_y$$

در نهایت:

$$I_x = I_y = \frac{3\pi}{8}\sigma a^4 = \frac{1}{4}Ma^2 \qquad I_z = \frac{3\pi}{4}\sigma a^4 = \frac{1}{2}Ma^2$$

محورهای مار بر G مطرح شده‌اند که در xy این محورها بی‌نهایت تعداد دارند که بررسی ما را پیچیده می‌کند، مثلاً باید زاویه محور با محور x و y معلوم باشد و...

محورهای عمود مار بر G موازی محور z را درنظر می‌گیریم:

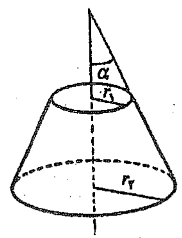
$$I_z = I_G + M(\frac{4}{9}\frac{a}{\pi})^2$$

ابتدا با این کار خود از روی I_z، I_G را محاسبه می‌کنیم:

$$I_G = \frac{1}{2}Ma^2 - \frac{16}{81}(\frac{1}{\pi})^2 Ma^2$$

$$I_G = \frac{1}{2}Ma^2 (1 - \frac{32}{81\pi^2})$$

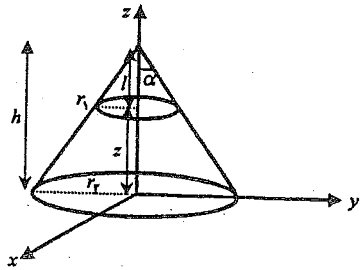
۱۶. الف) گشتاورهای ماند مخروطی به جرم m و ارتفاع h و زاویه‌ی مولد α را حول محور تقارن و حول محوری عبوری از رأس و عمود بر محور تقارن به‌دست آورید. مرکز جرم مخروط را پیدا کنید.



ب) با استفاده از این نتایج، مرکز جرم مخروط ناقص مقابل را پیدا کنید. گشتاورهای ماند آن را حول محورهای افقی عبوری از هر قاعده و مرکز جرم به‌دست آورید. جرم مخروط ناقص را M فرض کنید.

حل:

الف)



$$\tan\alpha = \frac{r_1}{h-z} \Rightarrow r_1 = (h-z)\tan\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{r_2}{h} \Rightarrow r_2 = h\tan\alpha$$

از طرفی

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \rho = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h} \Rightarrow \rho = \frac{3M}{\pi h^3 \tan^2\alpha}$$

$$I_z = \int \frac{1}{2} r_1^2 dm \Rightarrow I_z = \int_0^h \frac{1}{2} r_1^2 (\rho\pi r_1^2 dz) \Rightarrow I_z = \int_0^h \frac{1}{2}\pi\rho r_1^4 dz \Rightarrow$$

$$I_z = \int_0^h \frac{1}{2}\pi\rho(h-z)^4 \tan^4\alpha dz \Rightarrow I_z = \frac{1}{2}\pi\rho\tan^4\alpha \int_0^h (h-z)^4 dz \Rightarrow$$

$$I_z = \frac{1}{2}\pi \frac{3M}{\pi h^3 \tan^2\alpha} \tan^4\alpha \left[-\frac{1}{5}(h-z)^5\right] \Big|_0^h \Rightarrow I_z = \frac{3}{10} Mh^2 \tan^2\alpha$$

طبق تقارن مخروط $I_x = I_y$ و با استفاده از قضیه‌ی محورهای متعامد می‌توان نوشت:

$$I_x + I_y = I_z \Rightarrow 2I_x = \frac{3}{10}Mh^2\tan^2\alpha \Rightarrow I_x = I_y = \frac{3}{10}Mh^2\tan^2\alpha$$

با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی می‌توان نوشت

$$dI_p = dI_x + (h-z)^2 dm \Rightarrow \int dI_p = \int dI_x + \int_0^h (h-z)^2 dm \Rightarrow I_p = I_x + \int_0^h (h-z)^2 \rho\pi r_1^2 dz$$

$$I_p = I_x + \int_0^h (h-z)^4 \pi\rho\tan^2\alpha dz \Rightarrow I_p = I_x + \pi\rho\tan^2\alpha \int_0^h (h-z)^4 dz \Rightarrow$$

$$I_p = I_x + \pi\frac{3M}{\pi h^3\tan^2\alpha}\tan^2\alpha \left[-\frac{1}{5}(h-z)^5\right] \Big|_0^h \Rightarrow I_p = \frac{3}{20}Mh^2\tan^2\alpha + \frac{3}{5}Mh^2 \Rightarrow$$

$$I_p = \frac{3}{20}Mh^2(4 + \tan^2\alpha)$$

با توجه به تقارن مخروط، مرکز جرم بر روی محور zها قرار دارد پس

$$z_{cm}=\frac{1}{M}\int z\,dm\Rightarrow z_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^h z\rho\pi r^2 dz\Rightarrow z_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^h z\pi\rho(h-z)^2\tan^2\alpha\, dz\Rightarrow$$

$$z_{cm}=\frac{\pi\rho\tan^2\alpha}{M}\int_0^h z(h^2+z^2-2hz)dz\Rightarrow$$

$$z_{cm}=\frac{1}{M}\pi\frac{3M}{\pi h^3\tan^2\alpha}\tan^2\alpha\left[\frac{1}{2}h^2z^2+\frac{1}{4}z^4-\frac{2}{3}hz^2\right]\Big|_0^h\Rightarrow z_{cm}=\frac{h}{4}$$

ب) قسمت بریده شده در مخروط ناقص، مخروطی به ارتفاع l و شعاع قاعده‌ی r_1 است پس

$$\tan\alpha=\frac{r_2}{h}=\frac{r_1}{l}\Rightarrow\begin{cases} l=\dfrac{r_1}{\tan\alpha}\\ h=\dfrac{r_2}{\tan\alpha}\end{cases}$$

جرم مخروط کامل برابر است با

$$m=\rho\frac{1}{3}\pi r_2^2h\Rightarrow m=\frac{1}{3}\pi\rho r_2^2\frac{r_2}{\tan\alpha}\Rightarrow m=\frac{\pi\rho r_2^3}{3\tan\alpha}$$

جرم مخروط بریده شده: $m'=\frac{\pi\rho r_1^3}{3\tan\alpha}$ است بنابراین جرم مخروط ناقص برابر است با

$$M=m-m'\Rightarrow M=\frac{\pi\rho r_2^3}{3\tan\alpha}-\frac{\pi\rho r_1^3}{3\tan\alpha}\Rightarrow M=\frac{\pi\rho(r_2^3r_1^3)}{3\tan\alpha}$$

با استفاده از روابط مرکز جرم می‌توان نوشت

$$m\frac{h}{4}=Mz_{cm}+(m-M)\left[h-\frac{3l}{4}\right]\Rightarrow z_{cm}=-\frac{3m}{4M}(h-l)+\left[h-\frac{3l}{4}\right]\Rightarrow$$

$$z_{cm}=-\frac{3}{4}\frac{r_2^3}{r_2^3-r_1^3}\left[\frac{r_2}{\tan\alpha}-\frac{r_1}{\tan\alpha}\right]+\left[\frac{r_2}{\tan\alpha}-\frac{3r_1}{4\tan\alpha}\right]\Rightarrow$$

$$z_{cm}=-\frac{3}{4}\frac{r_2^3(r_2-r_1)}{4(r_2^3-r_1^3)\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\alpha}\left[r_2-\frac{3}{4}r_1\right]$$

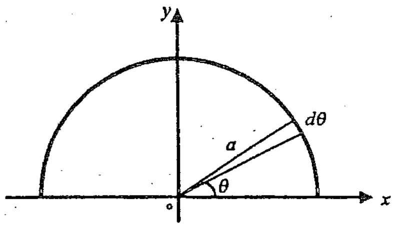
۲۲. مرکز جرم سیمی را پیدا کنید که به شکل نیم دایره‌ای با شعاع a خم شده است. شعاع‌های چرخش حول محورهای x، y و z عبوری از مرکز جرم را وقتی به‌دست آورید که z بر صفحه‌ی نیم دایره، عمود است و x نیم دایره را نصف می‌کند، ابتکاری به‌کار برده و محاسبات لازم را کمینه کنید.

حل:

با توجه به تقارن شکل، مرکز جرم بر روی محور yها قرار دارد. با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$\sin\theta=\frac{y}{a}\Rightarrow y=a\sin\theta$$

با استفاده از تعریف چگالی خطی می‌توان نوشت



$$\lambda=\frac{M}{l}\Rightarrow\lambda=\frac{M}{\pi a}$$

$$dm=\lambda dl\Rightarrow dm=\lambda a d\theta$$

$$y_{cm}=\frac{1}{M}\int y\,dm\Rightarrow y_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^\pi a\sin\theta a\lambda d\theta\Rightarrow y_{cm}=\frac{a^2\lambda}{M}\int_0^\pi\sin\theta d\theta\Rightarrow$$

$$y_{cm}=\frac{a^2\lambda}{M}(-\cos\theta)|_0^\pi\Rightarrow y_{cm}=\frac{a^2}{M}\times\frac{M}{\pi a}\times2\Rightarrow y_{cm}=\frac{2a}{\pi}$$

با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی و گشتاور ماند برای یک حلقه‌ی کامل ($I_z=Ma^2$)

$$I=I_{cm}+Ma^2\Rightarrow I_{Gz}=I_z-M\left[\frac{2a}{\pi}\right]^2\Rightarrow I_{Gz}=Ma^2-\frac{4a^2M}{\pi^2}\Rightarrow I_{Gz}=\left[1-\frac{4}{\pi^2}\right]Ma^2$$

$$k_{Gz}=\sqrt{\frac{I_{Gz}}{M}}\Rightarrow k_{Gz}=\sqrt{\frac{1}{M}\left[1-\frac{4}{\pi^2}\right]Ma^2}\Rightarrow k_{Gz}=a\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$$

با استفاده از قضیه‌ی محورهای متعامد و $I_x=\frac{1}{2}ma^2$ برای یک حلقه‌ی کامل می‌توان نوشت:

$$I_z=I_x+I_y\Rightarrow I_z=2I_x$$

پس برای نیم حلقه

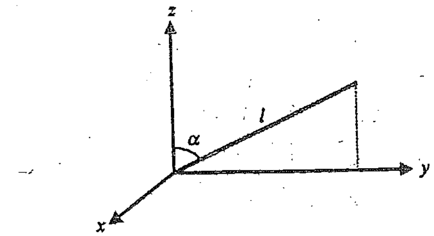
$$I'_x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}ma^2\right]\Rightarrow I'_x=\frac{1}{2}Ma^2$$

$$I_{Gx}=I_x-M\left[\frac{2a}{\pi}\right]^2\Rightarrow I_{Gx}=\frac{1}{2}Ma^2-\frac{4a^2}{\pi^2}M\Rightarrow I_{Gx}=\left[\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right]Ma^2$$

$$k_{Gx}=\sqrt{\frac{I_{Gx}}{M}}\Rightarrow k_{Gx}=\sqrt{\frac{1}{M}\left[\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right]Ma^2}\Rightarrow k_{Gx}=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}}$$

۲۳. الف) رابطه‌ای برای شعاع چرخش میله‌ی یکنواختی به طول l حول محوری عبوری از یک انتهای آن به‌دست آورید که با آن، زاویه‌ی α می‌سازد. ب) هرم مثلث‌القاعده‌ای منتظمی از شش میله‌ی یکنواخت ساخته شده است. با استفاده از قسمت الف، گشتاور ماند این هرم را حول محور عبوری از شبه مرکز و یکی از رأس‌های آن به‌دست آورید.

حل:



$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\alpha$$

$$M = \lambda l \Rightarrow \lambda = \frac{M}{l}$$

$$dm = \lambda dr$$

$$I=\int y^2 dm \Rightarrow I=\int r^2\sin^2\alpha\, dm \Rightarrow I=\int r^2\sin^2\alpha\,\lambda dr \Rightarrow I=\lambda\sin^2\alpha\int_0^l r^2 dr \Rightarrow$$

$$I=\lambda\sin^2\alpha\,\frac{1}{3}r^3\Big|_0^l \Rightarrow I=\frac{1}{3}\frac{M}{l}l^3\sin^2\alpha \Rightarrow I=\frac{1}{3}Ml^2\sin^2\alpha$$

$$k=\sqrt{\frac{I}{M}} \Rightarrow k=\sqrt{\frac{1}{M}\times\frac{1}{3}Ml^2\sin^2\alpha} \Rightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{3}l\sin\alpha$$

۲۴. شعاع‌های چرخشی یک لایه مسطح بیضی شکل که نصف قطر بزرگ آن a و ضریب خروج از مرکزش ε است، حول محورهای بلندتر و کوتاهتر و نیز حول محور دیگری مار بر یکی از کانون‌ها و عمود بر سطح لایه، را پیدا کنید.

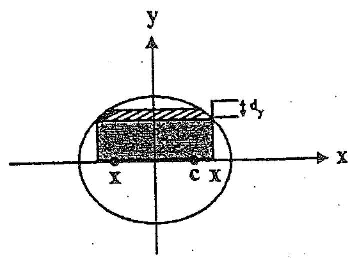
حل:

$$I_x=\int y^2 dm$$

$$dm = 2\sigma x dy$$

$$\sigma = \frac{m}{\pi ab} \Rightarrow dm = \frac{2m}{\pi ab}x dy$$

$$b=a(1-\varepsilon^2)^{1/2} \Rightarrow dm=\frac{2m}{\pi a^2(1-\varepsilon^2)^{1/2}}x dy$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}=1 \Rightarrow x=\left(a^2-\left(\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}\right)\right)^{1/2}$$

$$I_x=\frac{2m}{\pi a^2(1-\varepsilon^2)}\int_{-a\sqrt{1-\varepsilon^2}}^{a\sqrt{1-\varepsilon^2}} y^2\left(a^2(1-\varepsilon^2)-y^2\right)^{1/2}dy$$

$$y/a\sqrt{1-\varepsilon^2}=\sin\theta$$

$$I_x=\frac{2m}{\pi}a^2(1-\varepsilon^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta=\frac{1}{4}ma^2(1-\varepsilon^2)$$

$$I_x = \frac{1}{4}ma^2(1-\varepsilon^2) = mk_L^2 \Rightarrow k_L = \frac{1}{2}a(1-\varepsilon)$$

$$I_y = \frac{1}{4}ma^2 \Rightarrow k_w = \frac{1}{2}a$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{4}ma^2(1-\varepsilon^2+1) = \frac{1}{4}ma^2(2-\varepsilon^2)$$

و محوری موازی محور z مار بر c (کانون): (قضیه محورهای موازی)

$$I_c = I_{cm} + m(a\varepsilon)^2 = ma^2\left(\frac{2-\varepsilon^2}{4}+\varepsilon^2\right)$$

مرکز جرم در همان (۰،۰) واقع است.

$$(X_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) = (0, 0, 0)$$

$$I_c = ma^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3\varepsilon^2}{4}\right) = \frac{1}{2}ma^2\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)$$

۲۵. نیروهای ۱، ۲، ۳ و ۴ کیلوگرم ـ نیرو به‌صورت دنباله‌ای در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در امتداد چهار ضلع مربعی به مساحت ۰/۵ × ۰/۵ مترمربع وارد می‌شوند. جهت نیروها نیز در امتداد جهت حرکت عقربه‌های ساعت به دور مربع است، نیروهای متعادل‌کننده را پیدا کنید.

حل:

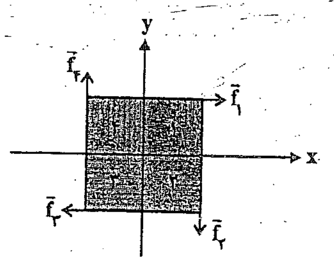
$$\vec{f}_1=f\hat{i}$$

$$\vec{f}_2=-2f\hat{j}$$

$$\vec{f}_3=-3f\hat{i}$$

$$\vec{f}_4=4f\hat{j}$$

$$f\equiv 1(\text{kg-wt})$$



تعادل نیروها:

$$\Sigma\vec{F}=0\Rightarrow\vec{F}_0+\vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3+\vec{f}_4=\vec{0}$$

$$\vec{F}_0=-(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4)$$

$$\vec{F}_0=-f(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{i}+4\hat{j})$$

$$\vec{F}_0=-f(-2\hat{i}+2\hat{j})=+2f(\hat{i}-\hat{j})$$

$$\left|\vec{F}_0\right|=2\sqrt{2}f=2\sqrt{2}\,(kg\text{-}wt)$$

اگر نیرویی به اندازه $2\sqrt{2}f$ در جهت $\theta_0=\frac{7\pi}{4}$ یا بردار یکه $\frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}$ وارد کنیم مرکز جرم شتاب نمی‌گیرد ولی ما باید از چرخش مربع حول مرکز جرم نیز جلوگیری کنیم. گشتاورها را حول محور z محاسبه و جهت مثبت آنها در جهت $\hat{k}$ است.

$$\Sigma\vec{N}=\vec{0}$$

$$\vec{N}_0+(\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{N}_3+\vec{N}_4)=0$$

$$\vec{N}_0=-(\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{N}_3+\vec{N}_4)$$

$$\vec{N}_0=\frac{+1}{2}af\hat{k}(1+2+3+4)=+5af\hat{k}$$

$$\left|\vec{N}_0\right|=\left|\vec{r}_0\right|\perp\left|\vec{F}_0\right|\Rightarrow\left|\vec{r}_0\right|=(5af)/2\sqrt{2}f=\frac{5}{2\sqrt{2}}a$$

یک میله به طول $(\frac{5}{2\sqrt{2}})a$ به مرکز مربع جوش می‌دهیم طوری که سر دیگر میله در جهت (-۱,-۱) باشد. اگر نیروی $\vec{F}_0$ را به نوک میله وارد کنیم، مربع بی جابجایی و چرخش می‌ماند.

۲۶. نیروهای ۲ و ۳ و ۴ پوندی به‌صورت متوالی در جهت عقربه‌های ساعت در امتداد سه ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع، وارد می‌شوند. طول ضلع مثلث ft است. نیروی برآیند را به‌دست آورید.

حل:

طبق شکل

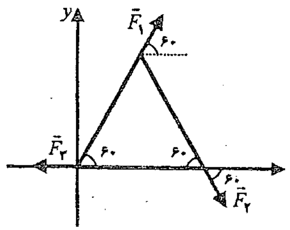
$$\vec{F}_1=F_1\cos60\hat{x}+F_1\sin60\hat{y}\Rightarrow$$

$$\vec{F}_1=2\times\cos60\hat{x}+2\sin60\hat{y}\Rightarrow$$

$$\vec{F}_1=\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y}$$

$$\vec{F}_2=F_2\cos60\hat{x}-F_2\sin60\hat{y}\Rightarrow\vec{F}_2=3\times\frac{1}{2}\hat{x}-3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y}\Rightarrow\vec{F}_2=\frac{3}{2}\hat{x}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{y}$$

$$\vec{F}_3=-F_3\hat{x}\Rightarrow\vec{F}_3=-4\hat{x}$$



برای نیروی برآیند داریم

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3\Rightarrow\vec{F}=(\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y})+\left[\frac{3}{2}\hat{x}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{y}\right]-4\hat{x}\Rightarrow\vec{F}=-\frac{3}{2}\hat{x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y}$$

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow F=\sqrt{\left[-\frac{3}{2}\right]^2+\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2}\Rightarrow F=\sqrt{3}\ \text{lb}$$

$$\tan\theta=\frac{F_y}{F_x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}}\Rightarrow\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=30^\circ$$

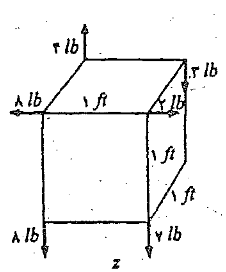
با توجه به علامت منفی F_x و علامت منفی F_y، بردار $\vec{F}$ در ربع سوم، قرار دارد. پس زاویه‌ی آن با بردار $\vec{F}_3$ در جهت ساعتگرد برابر °۳۰ است.

۲۷. الف) دستگاه نیروهای وارد بر مکعبی در شکل زیر، نشان داده شده است. این دستگاه را به یک نیروی معادل وارد بر مرکز مکعب و یک جفت متشکل از دو نیروی وارد بر دوگوشه‌ی مجاور مربع، تبدیل کنید. ب) این دستگاه را به یک دستگاه دو نیرویی، تبدیل کرده و نقاط اعمال آنها را مشخص کنید. پ) این دستگاه را به یک نیرو و یک گشتاور نیروی موازی با آن، تبدیل کنید.

حل:

فرض کنید مبدأ دستگاه مختصات در مرکز مکعب است.

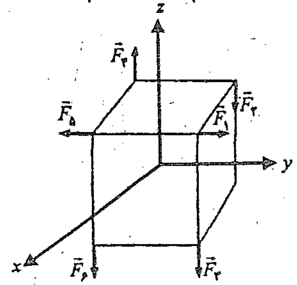
الف) طبق شکل



$$\begin{cases}\vec{F}_1=2\hat{y}\\ \vec{r}_1=+\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\vec{F}_2=-3\hat{z}\\ \vec{r}_2=-\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{F}_3=-7\hat{k}\\ \vec{r}_3=\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\vec{F}_4=4\hat{z}\\ \vec{r}_4=-\frac{1}{2}\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{F}_5=-8\hat{y}\\ \vec{r}_5=\frac{1}{2}\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\vec{F}_6=-8\hat{z}\\ \vec{r}_6=\frac{1}{2}\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z}\end{cases}$$



برای $\vec{R}$ (نیروی برآیند) داریم

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5+\vec{F}_6\Rightarrow\vec{R}=2\hat{y}-3\hat{z}-7\hat{z}+4\hat{z}-8\hat{y}-8\hat{z}\Rightarrow\vec{R}=-6\hat{y}-14\hat{z}$$

پس نیروی $\vec{R}=-6\hat{y}-14\hat{z}$ به مرکز مربع، وارد می‌شود. برای گشتاور کل وارد بر مکعب داریم

$$\sum\vec{\tau}=\sum\vec{r}\times\vec{F}\Rightarrow\vec{\tau}=\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2+\vec{r}_3\times\vec{F}_3+\vec{r}_4\times\vec{F}_4+\vec{r}_5\times\vec{F}_5+\vec{r}_6\times\vec{F}_6\Rightarrow$$

$$\vec{\tau}=\left[\left(\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\right)\times(2\hat{y})\right]+\left[\left(-\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\right)\times(-3\hat{z})\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z}\right)\times(-7\hat{z})\right]$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\right)\times(4\hat{z})\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\right)\times(-8\hat{y})\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z}\right)\times(-8\hat{z})\right]\Rightarrow$$

$$\vec{\tau}=(\hat{z}+0-\hat{x})+(-1/5\hat{y}-1/5\hat{x}+0)+(3/5\hat{y}-3/5\hat{x}+0)+(2\hat{y}-2\hat{x}+0)+(-4\hat{z}+0+4\hat{x})+$$
$$+(4\hat{y}+4\hat{x}+0)\Rightarrow$$
$$\vec{\tau}=8\hat{y}-3\hat{z}$$

با فرض اینکه $\vec{F}$ به نقطه‌ی ۱ و $\vec{F'}=-\vec{F}$ به نقطه‌ی ۲ وارد شود. برای گشتاور کل داریم

$$\sum\vec{\tau}=\sum\vec{r}\times\vec{F}\Rightarrow8\hat{y}-3\hat{z}=\vec{r}_1\times\vec{F}+\vec{r}_2\times\vec{F'}\Rightarrow$$

$$8\hat{y}-3\hat{z}=\left[\left(\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\right)\times(F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z})\right]+\left[\left(-\frac{1}{2}\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{1}{2}\hat{z}\right)\times(-F_x\hat{x}-F_y\hat{y}-F_z\hat{z})\right]$$

$$8\hat{y}-3\hat{z}=\left[\frac{1}{2}(F_z-F_y)\hat{x}+\frac{1}{2}(F_x-F_z)\hat{y}+\frac{1}{2}(F_y-F_x)\hat{z}\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2}(-F_z+F_y)\hat{x}+\frac{1}{2}(-F_x-F_z)\hat{y}+\frac{1}{2}(F_y+F_x)\hat{z}\right]\Rightarrow$$

$$8\hat{y}-3\hat{z}=-F_z\hat{y}+F_y\hat{z}\Rightarrow\begin{cases}F_z=-8\\F_y=-3\end{cases}\Rightarrow\vec{F}=-3\hat{y}-8\hat{z}\Rightarrow F'=3\hat{y}+8\hat{z}$$

ب) فرض کنید نیروی $\vec{F}=2\hat{z}$ به مبدأ وارد شود

$$\vec{R}=\vec{F}+\vec{F'}\Rightarrow-6\hat{y}-14\hat{z}=2\hat{z}+\vec{F'}\Rightarrow\vec{F'}=-6\hat{y}-16\hat{z}$$

برای گشتاور کل وارد بر مکعب

$$\sum\vec{\tau}=\sum\vec{r}\times\vec{F}\Rightarrow8\hat{y}-3\hat{z}=0\times\vec{F}+\vec{r}\times\vec{F'}\Rightarrow8\hat{y}-3\hat{z}=(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})\times(-6\hat{y}-16\hat{z})\Rightarrow$$

$$8\hat{y}-3\hat{z}=(-16y-6z)\hat{x}+(0+16x)\hat{y}+(-6x-0)\hat{z}\Rightarrow\begin{cases}-(16y+6z)=0\\16x=8\\-6x=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0/5\\y=0\\z=0\end{cases}$$

ج) گشتاور $\vec{\tau}_1$ موازی $\vec{R}=-6\hat{y}-14\hat{z}$ است

$$\vec{\tau}_1=\alpha\vec{R}\Rightarrow\vec{\tau}_1=-6\alpha\hat{y}-14\alpha\hat{z}$$

برای گشتاور کل وارد بر مکعب داریم

$$\sum\vec{\tau}=\sum\vec{r}\times\vec{F}\Rightarrow\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{R}+\vec{\tau}_1\Rightarrow$$
$$8\hat{y}-3\hat{z}=(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})\times(-6\hat{y}-14\hat{z})+(-6\alpha\hat{y}-14\alpha\hat{z})\Rightarrow$$
$$8\hat{y}-3\hat{z}=(-14y+6z)\hat{x}+(14x-0)\hat{y}+(-6x-0)\hat{z}+(-6\alpha\hat{y}-14\alpha\hat{z})\Rightarrow$$

$$8\hat{y}-3\hat{z}=(-14y+6z)\hat{x}+(+14x-6\alpha)\hat{y}+(-6x-14\alpha)\hat{z}\Rightarrow\begin{cases}-14y+6z=0\\14x-6\alpha=8\\-6x-14\alpha=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{65}{116}\\y=0\\z=0\\\alpha=-\frac{3}{116}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\vec{r}=\frac{65}{116}\hat{x}\\\vec{\tau}_1=\frac{9}{58}\hat{x}+\frac{21}{58}\hat{z}\end{cases}$$

سؤالات کارشناسی ارشد

۱. گلوله‌ای آونگی یک کره‌ی توخالی است که با آب پر شده و یک سوراخ در زیر آن ایجاد شده است. فرض کنید این آونگ شروع به نوسان کند و ابتدا کره از آب پر باشد. با گذشت زمان و ریزش آب از سوراخ، زمان تناوب آونگ چه تغییراتی پیدا می‌کند؟ (سراسری ـ ۸۵)

۱) ابتدا کوچک شده و سپس بزرگ می‌شود.

۲) ابتدا بزرگ شده و سپس کوچک می‌شود.

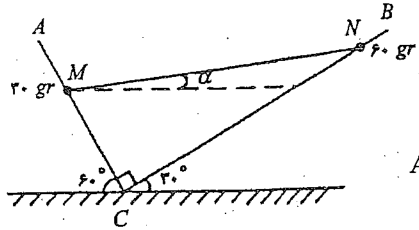
۳) کوچک می‌شود.

۴) بزرگ می‌شود.

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

طبق $T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$

۲. در شکل زیر AC و BC دو سیم نازک عمود بر هم و بدون اصطکاک هستند که در نقطه‌ی C بر روی زمین به هم لولا شده‌اند. دو دانه‌ی تسبیح به جرم‌های ۳۰ gr و ۶۰ gr که توسط سیم نازک MN به هم متصلند، مطابق شکل روی سیم‌های AC و BC می‌توانند آزادانه حرکت کنند. اگر مجموعه در حال تعادل باشد، زاویه‌ی α زاویه‌ی سیم MN با افق، کدام است؟ (از جرم سیم‌ها و اصطکاک در لولا صرف‌نظر شود.) (سراسری ـ ۸۵)



۱) 30°

۲) $\mathrm{Arctg}\left[\frac{5}{\sqrt{3}}\right]$

۳) $\mathrm{Arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{5}\right]$

۴) $\mathrm{Arctg}\left[\frac{5}{3\sqrt{3}}\right]$

گزینه‌ی (هیچکدام) صحیح است.

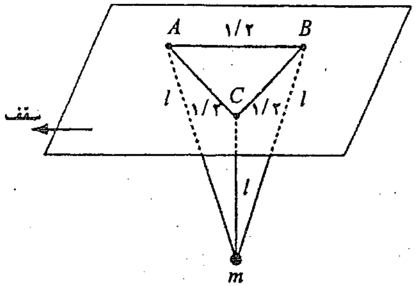
$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \tau_1 - \tau_2 = 0 \Rightarrow$$

$$NCm_1 g\sin 60 = MCm_2 g\sin 30 \Rightarrow \frac{NC}{MC} = \frac{m_2\sin 30}{m_1\sin 60}$$

$$\frac{NC}{MC} = \frac{30\times\frac{1}{2}}{60\times\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \tan(\alpha+60) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan 60}{1-\tan\alpha\tan 60} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 2\sqrt{3}\tan\alpha+6 = 1-\sqrt{3}\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

۳. گلوله‌ی m، مطابق شکل، توسط سه نخ سبک به طول‌های مساوی l به سقف متصل شده است. نقاط اتصال نخ‌ها به سقف تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $\frac{l}{2}$ می‌دهند. کشش نخ در هریک از نخ‌ها کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\frac{2mg}{\sqrt{33}}$

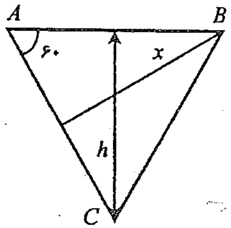
۲) $\frac{mg}{\sqrt{33}}$

۳) $\frac{2mg}{\sqrt{30}}$

۴) $\frac{mg}{\sqrt{30}}$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

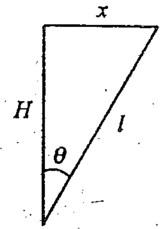
طول نخ‌ها یکسان است یعنی گلوله زیر مرکز مثلث ABC قرار دارد پس



$$x = \frac{2}{3}h \Rightarrow x = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\sin 60 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{6}l$$

$$H=\sqrt{l^2-x^2} \Rightarrow H=\sqrt{l^2-\frac{3}{36}l^2} \Rightarrow H=\sqrt{\frac{11}{12}}l$$

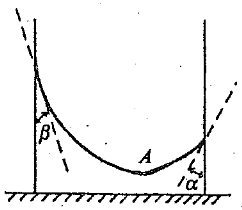
از طرفی



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow 3T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow 3T\frac{H}{l} = mg \Rightarrow$$

$$3T\times\sqrt{\frac{11}{12}}=mg \Rightarrow T\sqrt{\frac{33}{4}}=mg \Rightarrow T=\frac{2mg}{\sqrt{33}}$$

۴. ریسمان یکنواختی به جرم m در حال تعادل است و $\frac{2}{3}$ جرم طناب در سمت چپ پایین‌ترین نقطه‌ی طناب (نقطه‌ی A) قرار دارد. رابطه‌ی بین زوایای α و β کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\sin\alpha = 2\cos\beta$

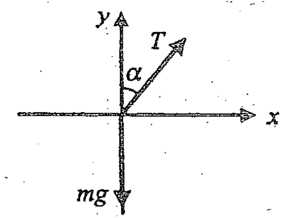
۲) $\sin\alpha = 2\sin\beta$

۳) $tg\alpha = 2tg\beta$

۴) $tg\alpha = \frac{2}{3}tg\beta$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

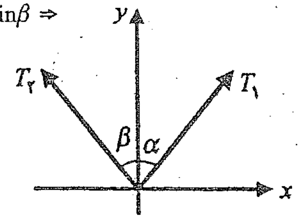
برای سمت راست طناب داریم



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1\cos\alpha = m_1 g \Rightarrow T_1 = \frac{m_1 g}{\cos\alpha}$$

و همینطور در سمت چپ طناب $T_2 = \frac{m_2 g}{\cos\beta}$ می‌باشد

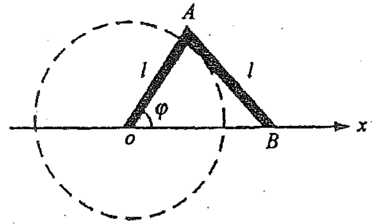
برای نقطه‌ی A در حال تعادل داریم



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1\sin\alpha = T_2\sin\beta \Rightarrow \frac{m_1 g}{\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{m_2 g}{\cos\beta}\sin\beta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}m\tan\alpha = \frac{2}{3}m\tan\beta \Rightarrow \tan\alpha = 2\tan\beta$$

۵. در شکل زیر دو میله‌ی یکسان هریک به طول l و جرم m در نقطه‌ی A به هم لولا شده‌اند. میله‌ی OA حول نقطه‌ی ثابت O با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. نقطه‌ی B در انتهای میله‌ی AB می‌تواند آزادانه روی محور x حرکت کند. میله‌ی AB می‌تواند روی میله‌ی OA قرار گرفته یا از روی آن بگذرد. انرژی جنبشی مجموعه‌ی دو میله کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)



۱) $\frac{1}{3}ml^2(1+2\sin^2\varphi)\omega^2$

۲) $\frac{1}{2}ml^2(1+3\sin^2\varphi)\omega^2$

۳) $\frac{1}{3}ml^2(1+3\sin^2\varphi)\omega^2$

۴) $\frac{1}{2}ml^2(1+2\sin^2\varphi)\omega^2$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

طبق قضیه‌ی محورهای موازی داریم

$$K=\frac{1}{2}I_1\omega^2+\frac{1}{2}(I_2+mx^2)\omega^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\omega^2+\frac{1}{2}[\frac{1}{3}ml^2\omega^2+m(l\sin\varphi)^2]\omega^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{3}ml^2(1+3\sin^2\varphi)\omega^2$$

۶. در مرکز یک کره‌ی توپر و همگن به شعاع R، حفره‌ای کروی به شعاع $\frac{R}{2}$ وجود دارد. جرم این جسم M است. ممان اینرسی جسم حول یکی از قطرهای آن کدام است؟ (سراسری ـ ۸۵)

۱) $\frac{3}{10}MR^2$ ۲) $\frac{2}{5}MR^2$ ۳) $\frac{31}{80}MR^2$ ۴) $\frac{31}{70}MR^2$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

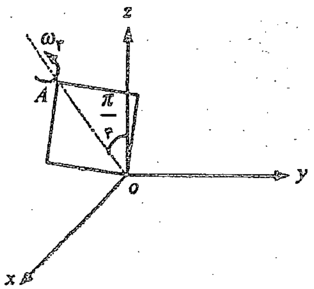
$$\rho=\rho' \Rightarrow \frac{M_t}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left[\frac{R}{2}\right]^3} \Rightarrow m=\frac{M_t}{8}$$

$$M = M_t - m \Rightarrow M = M_t - \frac{M_t}{8} \Rightarrow M = \frac{7}{8}M_t \Rightarrow M_t = \frac{8}{7}M \Rightarrow m = \frac{1}{7}M$$

$$I = I_t - I' \Rightarrow I = \frac{2}{5}M_tR^2 - \frac{2}{5}m(\frac{R}{2})^2 \Rightarrow I = \frac{2}{5}\times\frac{8}{7}MR^2 - \frac{2}{5}\times\frac{1}{7}\times\frac{R^2}{4}$$

$$I = \frac{31}{70}MR^2$$

۷. صفحه‌ای همگن و مربعی شکل به ضلع a، در راس ثابت O به زمین متصل است. این جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت $2\sqrt{\frac{g}{a}}$ حول محور قائم حرکت تقدیمی انجام می‌دهد و با سرعت زاویه‌ای ω_2 حول قطر OA، که زاویه‌ی آن با محور z همواره $\frac{\pi}{4}$ است، می‌چرخد. اندازه‌ی ω_2 کدام است؟ (ممان اینرسی نسبت به محورهای اصلی برای مربع: $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{12}MA^2$) (سراسری ـ ۸۵)

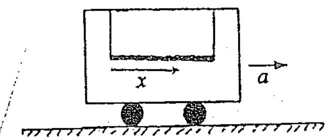


۱) $\sqrt{\frac{g}{a}}$ ۲) $2\sqrt{\frac{g}{a}}$

۳) $\sqrt{\frac{g}{2a}}$ ۴) $\sqrt{\frac{2g}{a}}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۸. مطابق شکل میله‌ای نازک به جرم M و طول L از سقف یک واگن آویزان است. چگالی خطی توزیع جرم در طول میله $\lambda(x)=\frac{۲M}{L^{۲}}x$ است که x فاصله تا انتهای چپ میله است. اگر واگن با شتاب a به سمت راست حرکت کند نسبت کشش نخ سمت راست به کشش نخ سمت چپ چقدر است؟ میله در حالت افقی قرار دارد. (سراسری ـ ۸۶)



۱) ۲ ۲) $۱+\frac{a}{g}$

۳) ۱ ۴) $\sqrt{۱+\frac{a^{۲}}{g^{۲}}}$

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$x_{cm}=\frac{\int_{۰}^{L}\lambda x\,dx}{\int_{۰}^{L}\lambda\,dx}\Rightarrow x_{cm}=\frac{\int_{۰}^{L}\frac{۲M}{L^{۲}}x^{۲}dx}{\int_{۰}^{L}\frac{۲M}{L^{۲}}x\,dx}\Rightarrow x_{cm}=\frac{\frac{۲M}{۳L^{۲}}x^{۳}|_{۰}^{L}}{\frac{M}{L^{۲}}x^{۲}|_{۰}^{L}}\Rightarrow x_{cm}=\frac{۲L}{۳}$$

از طرفی

$$\Sigma\tau=۰\Rightarrow\vec{\tau}_{۱}+\vec{\tau}_{۲}+\vec{\tau}_{۳}=۰\Rightarrow T_{۱}\times\frac{۲L}{۳}\sin۹۰+۰-T_{۲}\times\frac{L}{۳}\sin۹۰=۰\Rightarrow\frac{T_{۲}}{T_{۱}}=۲$$

۹. سر و ته یک قوطی نوشابه استوانه‌ای شکل همگن را سوراخ می‌کنیم و آن را قائم نگه می‌داریم تا مایع از داخل آن خالی شود. جرم قوطی خالی ۲۵ g، سطح مقطع آن ۲۵ $cm^{۲}$ و ارتفاع داخلی قوطی ۱۵ cm است. اگر چگالی مایع $۱\ \frac{g}{cm^{۳}}$ باشد، کمینه ارتفاع مرکز جرم مشترک قوطی و مایع داخل آن $(Y_{C.M})$ نسبت به ته قوطی چقدر است و به ازای چه ارتفاعی (h) از مایع داخل آن اتفاق می‌افتد؟ (سراسری ـ ۸۶)

۱) $h=۰$ و $Y_{C.M}=\frac{۱۵}{۲}$ cm ۲) $h=۲$ cm و $Y_{C.M}=\frac{۱۹}{۶}$ cm

۳) $h=۳$ cm و $Y_{C.M}=۳$ cm ۴) $h=۷$ cm و $Y_{C.M}=۴$ cm

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$m=\rho V\Rightarrow m=\rho A\Rightarrow m=۱\times۲۵h\Rightarrow m=۲۵h$$

از طرفی

$$y_{cm}=\frac{m_{۱}y_{۱}+m_{۲}y_{۲}}{m_{۱}+m_{۲}}\Rightarrow y_{cm}=\frac{۲۵h\frac{h}{۲}+۲۵\times\frac{۱۵}{۲}}{۲۵+۲۵}\Rightarrow y_{cm}=\frac{۰/۵h^{۲}+۷/۵}{h+۱}$$

در $y_{cm,min}$ داریم

$$\frac{dy_{cm}}{dh}=۰\Rightarrow\frac{h(h+۱)-(۰/۵h^{۲}+۷/۵)\times۱}{(h+۱)^{۲}}=۰\Rightarrow h^{۲}+h-۰/۵h^{۲}-۷/۵=۰$$

$$\Rightarrow h^{۲}+۲h-۱۵=۰\Rightarrow$$

$$h=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۱۵}}{۱}\Rightarrow h=-۱\pm۴\Rightarrow\begin{cases}h=۳\ cm\\h=-۵\ cm\end{cases}$$

در پایان

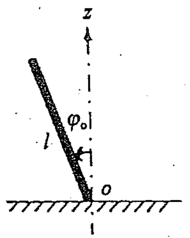
$$y_{cm}=\frac{۰/۵\times۳^{۲}+۷/۵}{۳+۱}\Rightarrow y_{cm}=۳\ cm$$

۱۰. لختی دورانی استوانه توپر و همگنی به جرم M، شعاع R و ارتفاع R حول محوری که از مرکز جرم استوانه و عمود بر محور استوانه می‌گذرد، کدام است؟ (سراسری ـ ۸۶)

۱) $\frac{MR^{۲}}{۱۲}$ ۲) $\frac{MR^{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{MR^{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{MR^{۲}}{۲}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱۱. مطابق شکل میله‌ای فلزی با توزیع جرم یکنواخت m و طول l روی میز افقی بدون اصطکاکی با زاویه ی اولیه $\varphi_{۰}$ نسبت به امتداد قائم بر سطح میز، از حالت سکون رها می‌شود و سقوط می‌کند. در همان ابتدای سقوط میله، چه نیرویی از طرف میز بر میله وارد می‌شود؟ (لختی دورانی میله‌ی همگنی به طول l و جرم m حول محورگذرنده از مرکز جرم میله و عمود بر آن $\frac{۱}{۱۲}ml^{۲}$ است.) (سراسری ـ ۸۶)

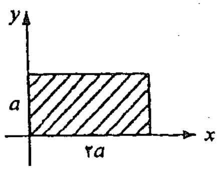


۱) mg ۲) $\frac{mg}{۱+۶\sin\varphi_{۰}}$

۳) $\frac{۴mg}{۴+۷\sin^{۲}\varphi_{۰}}$ ۴) $\frac{mg}{۱+۳\sin^{۲}\varphi_{۰}}$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۱۲. صفحه‌ی مستطیل شکل یکنواخت نازکی به جرم m و به ابعاد ۲a و a در صفحه‌ی xy قرار دارد. مقدار لختی دورانی I_{xx} آن کدام است؟ (سراسری ـ ۸۶)



۱) $\frac{۱}{۳}ma^{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}ma^{۲}$

۳) $\frac{۱}{۱۲}ma^{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}ma^{۲}$

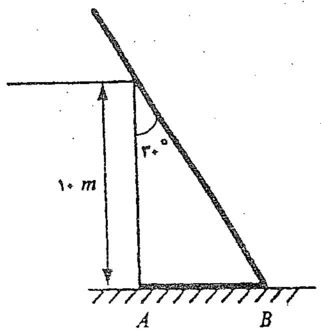
گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$m = \sigma 2a \times a \Rightarrow dm = 2a\sigma dy$$

پس

$$I=\int_0^a y^2 dm \Rightarrow I=\int_0^a 2a\sigma y^2 dy \Rightarrow I=2a\sigma\frac{1}{3}y^3\Big|_0^a \Rightarrow I=2a\sigma\frac{1}{3}a^3 \Rightarrow I=\frac{1}{3}ma^2$$

۱۳. میله‌ی همگنی به جرم ۸ kg و طول ۲۰ m به دیواری به طول ۱۰ m تکیه دارد. انتهای میله B روی سطح افقی قرار دارد و توسط نخ افقی AB به پای دیوار بسته شده است. میله در حال تعادل است. از اصطکاک میله با زمین و لبه‌ی دیوار چشم‌پوشی کنید. کشش نخ چند نیوتن است؟ ($g = 10\frac{m}{s^2}$) (سراسری ـ ۸۶)



۱) $10\sqrt{3}$

۲) ۱۵

۳) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

۴) ۳۰

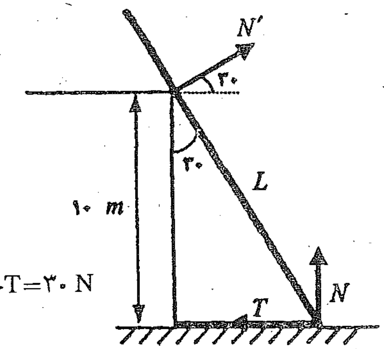
گزینه‌ی (۴) صحیح است.

$$\cos 30 = \frac{10}{L} \Rightarrow L = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

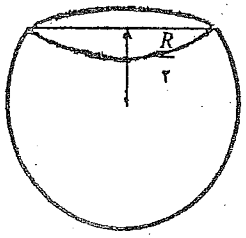
$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \frac{L}{2}mg\sin 30 - LN' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{20}{2}\times 8\times 10\times\frac{1}{2} = \frac{20}{\sqrt{3}}N' \Rightarrow N' = 20\sqrt{3}\ N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N'\cos 30 - T = 0 \Rightarrow 20\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = T \Rightarrow T = 30\ N$$



۱۴. کره‌ای همگن به جرم m و شعاع R را درنظر بگیرید. اگر قسمتی از کره توسط صفحه‌ای به فاصله‌ی $\frac{R}{2}$ از مرکزش قطع شود. فاصله‌ی مرکز جرم قسمت باقی مانده از مرکز کره کدام است؟ (سراسری ـ ۸۷)



۱) $z = -\frac{3}{16}R$

۲) $z = -\frac{1}{7}R$

۳) $z = -\frac{1}{8}R$

۴) $z = -\frac{1}{9}R$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

برای بخش جدا شده داریم

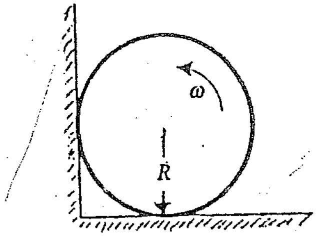
$$\begin{cases} m=\int_{\frac{R}{2}}^{R}\rho\pi(R^2-y^2)dy \Rightarrow m=\rho\pi\left[R^2y-\frac{1}{3}y^3\right]\Big|_{\frac{R}{2}}^{R} \Rightarrow m=\rho\pi\left[R^3-\frac{1}{3}R^3-\frac{R^3}{2}+\frac{1}{3}\frac{R^3}{8}\right] \\ m=\frac{5}{24}\rho\pi R^3 \end{cases}$$

$$Y_{cm}=\frac{\int_{\frac{R}{2}}^{R}y(R^2-y^2)dy}{\int_{\frac{R}{2}}^{R}\rho\pi(R^2-y^2)dy} \Rightarrow mY_{cm}=\rho\pi\left[\frac{1}{2}R^2y^2-\frac{1}{4}y^4\right]\Big|_{\frac{R}{2}}^{R}$$

$$\Rightarrow mY_{cm}=\rho\pi\left[\frac{1}{2}R^4-\frac{1}{4}R^4-\frac{1}{2}R^2\frac{R^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{R^4}{16}\right] \Rightarrow mY_{cm}=\frac{9}{64}\rho\pi R^4$$

$$\Rightarrow Y_{cm}=\frac{M\times 0-my_{cm}}{M+m} \Rightarrow Y_{cm}=\frac{-\frac{9}{64}\rho\pi R^4}{\frac{4}{3}\rho\pi R^3-\frac{5}{24}\rho\pi R^3} \Rightarrow Y_{cm}=-\frac{R}{8}$$

۱۵. در شکل روبه‌رو کره‌ی توپری به جرم m و شعاع R را حول قطر افقی‌اش با سرعت زاویه‌ای ω، به دوران درآورده‌ایم و سپس آن را در مقابل دیوار و زمین قرار می‌دهیم. اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین تمام سطوح تماس μ باشد و کره هیچگاه از زمین یا دیوار جدا نشود، اندازه‌ی شتاب زاویه‌ای چقدر است؟ لختی دورانی یک کره‌ی همگن توپر حول قطرش $\frac{2}{5}mR^2$ است. (سراسری ـ ۸۷)



۱) $\frac{5}{2}\left[\frac{1+\mu}{1-\mu}\right]\frac{g}{R}$
۲) $\frac{5}{2}\left[\frac{1+\mu}{1+\mu^2}\right]\frac{\mu g}{R}$
۳) $\frac{5}{2}\left[\frac{1+\mu^2}{1-\mu}\right]\frac{g}{R}$
۴) $\frac{5}{2}\left[\frac{1+\mu^2}{1+\mu}\right]\frac{\mu g}{R}$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

چون جسم از سطح جدا نشده است، پس

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 - f_1 = 0 \Rightarrow N_2 - \mu N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = \mu N_1$$

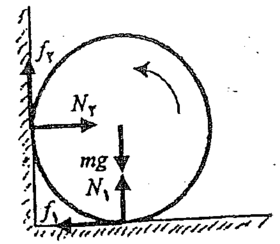
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_2 + N_1 - mg = 0 \Rightarrow \mu N_2 + N_1 - mg = 0 \Rightarrow$$

$$\mu(\mu N_1) + N_1 = mg \Rightarrow N_1 = \frac{1}{1+\mu^2}mg$$

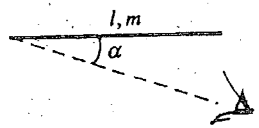
$$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow -Rf_1 - Rf_2 = I\alpha \Rightarrow -R\mu N_1 - R\mu N_2 = \frac{2}{5}mR^2\alpha \Rightarrow$$

$$-\mu(N_1 + \mu N_1) = \frac{2}{5}mR\alpha \Rightarrow$$

$$-\mu\left[\frac{1}{1+\mu^2} + \frac{\mu}{1+\mu^2}\right]mg = \frac{2}{5}mR\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{2}\left[\frac{1+\mu}{1+\mu^2}\right]\frac{\mu g}{R}$$



۱۶. لختی دورانی میله‌ای باریک و یکنواخت به طول l و جرم m حول محور Δ که از انتهای میله گذشته و با آن زاویه‌ی α می‌سازد، کدام است؟ (سراسری ـ ۸۷)

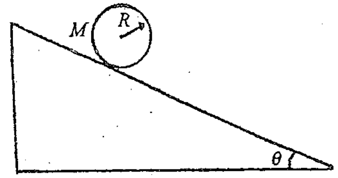


۱) $\frac{2}{3}ml^2\sin^2\alpha$
۲) $\frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha$
۳) $\frac{2}{3}ml^2\sin\alpha$
۴) $\frac{1}{6}ml^2\sin^2\alpha$

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$I = \frac{1}{3}ml'^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}m(l\sin\alpha)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha$$

۱۷. استوانه‌ی توپر همگنی به جرم M، شعاع R و گشتاور لختی $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ (حول محور دوران) از بالای سطح شیب‌داری با ضریب اصطکاک ایستایی μ و زاویه‌ی متغیر θ (نسبت به سطح افقی) به طرف پایین سطح، حرکت می‌کند. به ازای چه مقادیری از θ استوانه فقط با حرکت غلتشی روی سطح شیبدار به طرف پایین می‌آید؟ (سراسری ـ ۸۸)



۱) $\theta \le \arctan\left(\frac{1}{3}\mu\right)$
۲) $\theta \ge \arctan\left(\frac{1}{3}\mu\right)$
۳) $\theta \ge \arctan(3\mu)$
۴) $\theta \ge \arctan\left(\frac{1}{3}\mu\right)$

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

در امتداد yها داریم

$$\Sigma F_y = Ma_y \Rightarrow N - Mg\cos\theta = M \times 0 \Rightarrow N = Mg\cos\theta$$

از طرفی

$$\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}\alpha \Rightarrow f_sR = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{2f_s}{M}$$

و همینطور در امتداد xها داریم

$$\Sigma F_x = Ma_x \Rightarrow Mg\sin\theta - f_s = M \times \frac{2f_s}{M} \Rightarrow$$

$$Mg\sin\theta = 3f_s \Rightarrow Mg\sin\theta = 3\mu N \Rightarrow Mg\sin\theta = 3\mu Mg\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = 3\mu \Rightarrow$$

$$\theta = \arctan(3\mu)$$

پس، باید $\theta \le \mathrm{Arctan}(3\mu)$ باشد، تا از نیروی اصطکاک کم شده و استوانه دچار لغزش نشود.