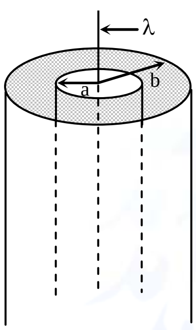
سؤالات

فیزیک پایه ۲ ویژه دانشگاه علم و صنعت ایران

۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲



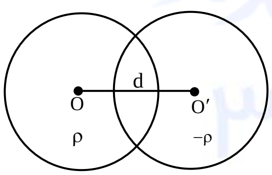
روی محور یک پوسته استوانه‌ای دی الکتریک به شعاع داخلی a، شعاع خارجی b و ضریب دی الکتریک k_e، میله بسیار طویل به چگالی بار خطی یکنواخت λ قرار گرفته است.

الف) میدان الکتریکی را در فواصل $O < \rho < a$، $a < \rho < b$ و $\rho > b$ به‌دست آورید.

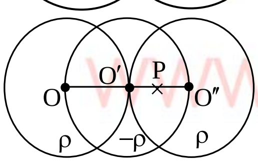
ب) ضریب دی الکتریک k_e را به گونه‌ای تعیین کنید که میدان الکتریکی در فاصله $a < \rho < b$ ثابت باشد.

ج) چگالی بار سطحی پلاریزه روی سطوح داخلی و خارجی پوسته دی الکتریک را به‌دست آورید.

۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲



الف) دو کره به شعاع‌های R و به چگالی های ρ و $-\rho$ یکدیگر را مطابق شکل قطع کرده‌اند. چه مقدار کار لازم است تا بار Q را از بی‌نهایت انتقال داده و در نقطه O' قرار دهیم.

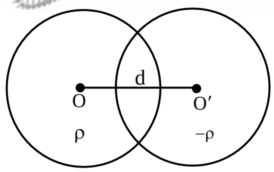


ب) سه کره به شعاع‌های R به چگالی های حجمی یکنواخت ρ، $-\rho$ و ρ یکدیگر را مطابق شکل قطع کرده‌اند. چه مقدار کار لازم است تا بار Q را از بی‌نهایت انتقال داده و در نقطه O' قرار دهیم.

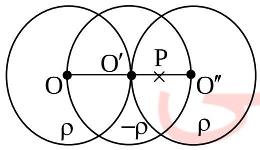
۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف) میدان الکتریکی داخل و خارج یک کره به شعاع R و به چگالی یکنواخت حجمی ρ را به‌دست آورید.

ب) دو کره به شعاع‌های R و به چگالی های ρ و $-\rho$ یکدیگر را مطابق شکل مقابل قطع کرده‌اند. میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه در ناحیه همپوشانی به دست آورید. فاصله مراکز دو کره را d بگیرید.



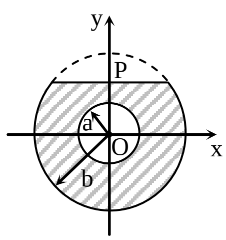
ج) سه کره به شعاع‌های R به چگالی های حجمی یکنواخت ρ، $-\rho$ و ρ یکدیگر را مطابق شکل مقابل قطع کرده‌اند. میدان الکتریکی در نقطه P و در فاصله $\frac{R}{۲}$ از O'' (مرکز کره سمت راست) را به دست آورید.



۴ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دیسکی تو خالی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و با چگالی بار سطحی یکنواخت σ در نظر بگیرید. اگر بخشی از لبه این دیسک مطابق شکل برداشته شود، میدان الکتریکی را در مرکز دیسک O به‌دست آورید.

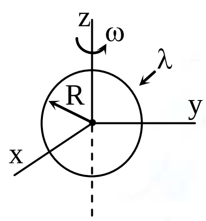
$(OP = \frac{\sqrt{۲}}{۲} b)$



۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

الف) میدان مغناطیسی یک حلقه به شعاع R و حامل جریان I را روی محور تقارنش (عمود به صفحه حلقه) و در فاصله z از مرکز آن به‌دست آورید.

ب) حلقه‌ای به شعاع R دارای بار خطی به چگالی یکنواخت λ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z مطابق شکل می‌چرخد. میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه محاسبه نمایید.

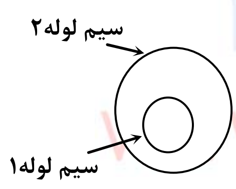


۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

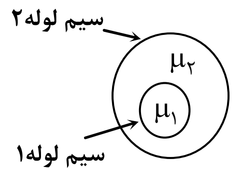
الف) میدان مغناطیسی سیم‌لوله استوانه‌ای ایده‌آل با n دور بر واحد طول، جریان I و طول l را به‌دست آورید.

ب) ضریب خودالقایی سیم‌لوله قسمت (الف) اگر با ماده مغناطیسی به ضریب μ پر شود را به‌دست آورید. (سطح مقطع سیم لوله را A بگیرید).

ج) ضریب القاء متقابل دو سیم‌لوله ایده‌آل استوانه‌ای مطابق شکل را به‌دست آورید. سیم لوله ۱ داخل سیم‌لوله ۲ قرار دارد و محورهای آن‌ها موازیند. سیم لوله ۱ دارای $n_۱$ دور بر واحد طول، جریان $I_۱$، سطح مقطع $A_۱$ و طول l است. سیم‌لوله ۲ دارای $n_۲$ دور بر واحد طول، جریان $I_۲$، سطح مقطع $A_۲$ و طول l است.



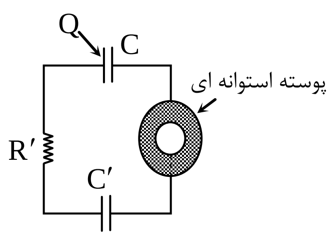
د) اگر در سیم‌لوله ۱ ماده مغناطیسی به ضریب $\mu_۱$ و در باقی‌مانده فضای سیم‌لوله ۲ ماده مغناطیسی به ضریب $\mu_۲$ قرار گیرد، نیروی محرکه القایی $\varepsilon_{۱۲}$ ایجاد شده در سیم لوله ۱ به دلیل جریان وابسته به زمان $I_۲(t) = bt$ در سیم‌لوله ۲ را به‌دست آورید.



۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

الف) پوسته استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به طول L از ماده‌ای به مقاومت ویژه ρ ساخته شده است. اگر پتانسیل V بین سطح داخلی و سطح خارجی پوسته استوانه‌ای برقرار شود، مقاومت پوسته را محاسبه کنید.

ب) این پوسته در مداری متشکل از یک خازن C که تا بار Q شارژ شده، یک خازن خالی C' و مقاومت R' مطابق شکل قرار می‌گیرد. بار لحظه‌ای خازن‌ها و جریان لحظه‌ای مدار را به‌دست آورید.



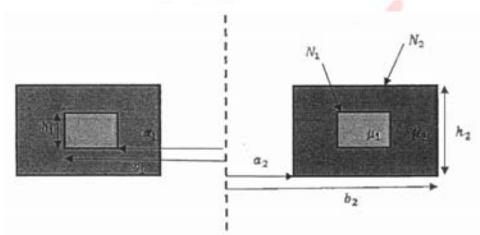
ج) میدان الکتریکی $\vec{E}$ و چگالی $\vec{j}$ در یک نقطه داخل پوسته

د) بار نهایی خازن‌ها

ه) در مورد بقاء انرژی بعد از زمان طولانی بحث کنید.

(مقاومت پوسته استوانه‌ای را R بگیرید)

۸ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱



دو تروئید با تعداد دورهای کل $N_۱$ (تروئید ۱) و $N_۲$ (تروئید ۲) با سطح مقطع مستطیلی در نظر بگیرد. تروئید ۱ مطابق شکل داخل تروئید ۲ قرار دارد. محور هر دو تروئید یکی است.

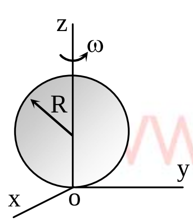
الف) ضریب القاء متقابل بین دو تروئید را بدست آورید.

(با محاسبه میدان حالص از تروئید ۲ روی تروئید ۱ شار کل گذرنده از تروئید ۱ را محاسبه نمایید.)

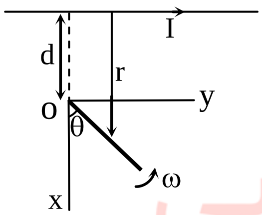
ب) اگر در تروئید ۱ ماده مغناطیسی $\mu_۱$ و در تروئید ۲ ماده مغناطیسی به ضریب $\mu_۲$ قرار گیرد، ضریب القاء متقابل بین دو تروئید را محاسبه نمایید.

۹ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

کره‌ای به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ مطابق شکل حول محور z با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. میدان مغناطیسی را روی لبه کره در نقطه O به دست آورید.



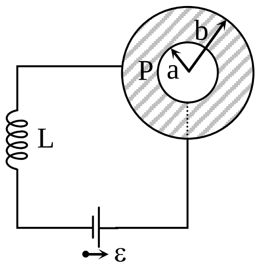
۱۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱



الف)میدان یک سیم بسیار طویل حامل جریان I را در نقطه‌ای به فاصله r از آن به‌دست آورید.

ب) سیم بسیار طویل حامل جریان I را در نظر بگیرید. میله‌ای هادی به طول L در صفحه‌ای که سیم در آن قرار دارد، مطابق شکل با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول نقطه O می‌چرخد. نیروی محرکه القایی بین دو سر میله را به‌دست آورید.

۱۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱



الف) مقاومت یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b را که جنس آن از ماده‌ای به مقاومت ویژه ρ است، محاسبه نمایید.

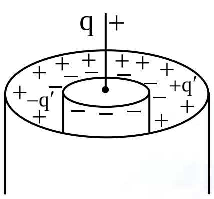
ب) اگر این پوسته کروی در مداری مطابق شکل قرار گرفته باشد، معادله مدار را برای جریان مدار بنویسید. (مقاومت پوسته کروی را R فرض نمایید)

ج) جریان لحظه‌ای مدار، چگالی جریان و میدان الکتریکی لحظه‌ای را در یک نقطه داخل پوسته کروی به‌دست آورید.

پاسخها

فیزیک پایه ۲ ویژه دانشگاه علم و صنعت ایران

۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲



الف) $0 < \rho < a \Rightarrow \varepsilon_0 \oint E.ds = Q$

$$\varepsilon_0 E(2\pi\rho\ell) = q = \lambda\ell \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

$a < \rho < b$ در این ناحیه در دی‌الکتریک بار سطحی القایی داریم:

برای طول ℓ از میله طویل

$$\begin{cases} q = \lambda\ell \\ q' = q(1-\frac{1}{k}) = \lambda\ell(1-\frac{1}{k_e}) \end{cases}$$

$$\varepsilon_0 E(2\pi\rho\ell) = q - q' = \frac{\lambda\ell}{k_e} \to E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 k_e \rho}$$

$$\rho > b \Rightarrow \varepsilon_0 E(2\pi\rho\ell) = q - q' + q' = q = \lambda\ell \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

ب) برای این‌که E در ناحیه $a < \rho < b$ ثابت باشد باید: $k_e = \frac{k_0}{\rho}$

ج) همان‌طور که در شکل نشان داده شد، روی سطح داخلی پوسته دی‌الکتریک $(\rho = a)$ چگـالی بـار سـطحی برابـر $-\lambda(1-\frac{1}{k_e})$ و روی سطح خارجی پوسته دی‌الکتریک $(\rho = b)$ چگالی بار سطحی برابر $\lambda(1-\frac{1}{k_e})$ می‌باشد.

۲ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف) در نقطه O' میدان الکتریکی ناشی از دو مجموعه بار را داریم. بنابراین:

$$V_{O'} = -\int_{\infty}^{d} E_1.d\ell - \int_{\infty}^{R} E_{2_{out}}.d\ell - \int_{R}^{0} E_{2_{in}}.d\ell = -\int_{\infty}^{d} \frac{-\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr - \int_{\infty}^{R} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr - \int_{R}^{0} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr$$

$$= -\left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right)\Big|_{\infty}^{d} + \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right)\Big|_{\infty}^{R} - \left(\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right)\Big|_{R}^{0} = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{3d}\right)$$

توجه شود که برای کره سمت چپ با توجه به این‌که از بی‌نهایت به سمت مرکز کره حرکت می‌کنیم $d\ell = -dr$ و برای کره سمت راست $d\ell = dr$ است.

ب) حل شبیه قسمت (الف) است با این تفاوت که در اینجا ۳ مجموعه بار داریم:

$$V_{O'} = -\int_{\infty}^{R} E_1 . d\ell - \int_{\infty}^{R} E_{2_{out}} . d\ell - \int_{R}^{0} E_{2_{in}} . d\ell - \int_{\infty}^{R} E_3 . d\ell$$

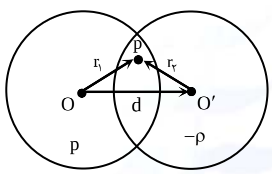
$$= -\int_{\infty}^{R} \frac{-\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{\infty}^{R} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{R}^{0} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr - \int_{\infty}^{R} \frac{-\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = -\left(\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right)\Big|_{R}^{0} - \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right)\Big|_{\infty}^{R} = \frac{-\rho R^2}{6\varepsilon_0}$$

۳ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف) $r < R \rightarrow \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3) \Rightarrow E_{in} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

$r > R \rightarrow \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho(\frac{4}{3}\pi R^3) \Rightarrow E_{out} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

ب) $E_\rho = E_1 + E_2$



E_1: میدان ناشی از کره اول در نقطه ρ.

E_2: میدان ناشی از کره دوم در نقطه ρ.

$$E_\rho = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0} + \frac{(-\rho) r_2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r_1 - r_2)$$

اگر به صورت برداری در نظر بگیریم $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{d}$ پس: $E_\rho = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}$

ج) $E_p = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 (\frac{3R}{2})^2} + \frac{(-\rho)(\frac{R}{2})}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho(\frac{-R}{2})}{3\varepsilon_0}$

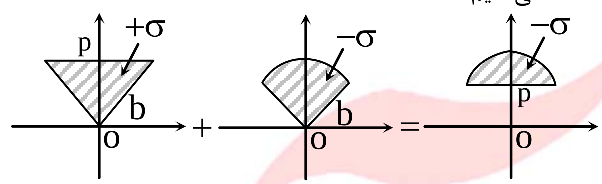
توجه شود که میدان ناشی از کره سمت چپ در نقطه ρ به سمت راست (و در راستای خط واصل مرکز سه کره) است و میدان ناشی از دو کره دیگر در نقطه ρ به سمت چپ می‌باشد که با علامت منفی منظور شده است.

$E_p = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}(\frac{4}{9} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{5\rho R}{27\varepsilon_0}$ به سمت چپ:

برای حل این مسئله ۲ بار به صورت زیر از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم.

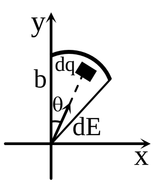
(۰)		(I)		(II)
دیسک مشخص شده در صورت سؤال با چگالی بار سطحی یکنواخت σ	$\equiv$	دیسک کاملی با شعاع داخلی a و خارجی b و چگالی بار سطحی σ (بدون برداشتن لبه بالایی)	+	لبه‌ای با چگالی بار سطحی $(-\sigma)$ درست در محل لبه‌ی برداشته شده در شکل صورت سؤال

بنابراین $E_{\circ} = E_I + E_{II}$، اما E_I به علت تقارن شکل نسبت به مبدأ صفر می‌باشد. می‌ماند E_{II} که مجدداً از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم.



(IV) (III) (II)

پس برای بدست آوردن $E_{\circ}$ کافی است E_{III} و E_{IV} را بدست آوریم. ابتدا E_{III}، به علت تقارن نسبت به محور y داریم:

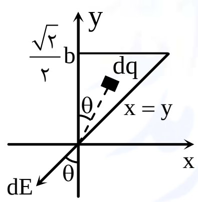


$$E_{III} = E_{IVy} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\int \frac{dq}{r^2}\cos\theta$$

$$dq = -\sigma r dr d\theta$$

$$E_{III} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\varepsilon}^{b}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sigma r\cos\theta d\theta dr}{r^2} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{b}{\varepsilon}$$

اکنون محاسبه E_{IV}: مجدداً به علت تقارن داریم:



$$E_{IV} = E_{IVy} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}}\int\frac{dq}{r^2}\cos\theta$$

$$dq = \sigma dx dy$$

$$r^2 = x^2 + y^2 , \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

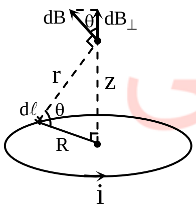
$$E_{IV} = \frac{-1}{2\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\varepsilon}^{\frac{\sqrt{2}}{2}b}\int_{\circ}^{y}\frac{\sigma y dx dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\sigma}{2\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\varepsilon}^{\frac{\sqrt{2}}{2}b}\left\{\left(\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Bigg|_{\circ}^{y}\right\}dy$$

$$= \frac{-\sigma}{2\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\varepsilon}^{\frac{\sqrt{2}}{2}b}\frac{1}{\sqrt{2}|y|}dy = \frac{-\sigma}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_{\circ}}\ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}b}{\varepsilon}$$

در نهایت داریم: $\vec{E}_\circ = E_{III} + E_{IV} = \dfrac{\sigma\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_\circ}\hat{j}$

(میدان الکتریکی در نقطه O در جهت منفی محور y است.)

۵ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱



الف)

$$dB = \frac{\mu_\circ i}{4\pi}\frac{d\ell\sin\phi}{r^2}$$

$$B = \int dB_\perp = \int dB\cos\theta$$

با توجه به تقارن موجود $B_{\|}$ صفر است.

$$r = \sqrt{Z^2 + R^2}\ ;\ \phi = 90\ ;\ \cos\theta = \frac{R}{r}$$

بنابراین:

$$B = \int_\circ^{2\pi R}\frac{\mu_\circ i}{4\pi}\frac{R}{(Z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}d\ell = \frac{\mu_\circ i R^2}{2(Z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ب) طبق رابطه‌ای که در قسمت (الف) به‌دست آوردیم چگالی میدان در مرکز یک حلقه به شعاع R و جریان di برابر است با: $dB = \dfrac{\mu_\circ di}{2R}$

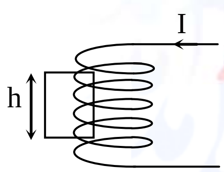
اکنون در اینجا داریم:

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\lambda d\ell}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}d\ell$$

بنابراین:

$$B = \int_\circ^{2\pi R}\frac{\mu_\circ\lambda\omega}{4\pi R}d\ell = \frac{\mu_\circ\lambda\omega}{2}$$

۶ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱



الف) سیم‌لوله ایده‌آل است پس میدان مغناطیسی در خارج سیملوله صفر است. از طرفی $\vec{B}$ و $\vec{d\ell}$ روی دو ضلع بالایی و پایینی مستطیل مفروض عمود هستند پس داریم:

$$\oint B.d\ell = \mu_\circ I$$

$$Bh = \mu_\circ NI\ ;\ N = nh \Rightarrow B = \mu_\circ nI$$

ب) در اینجا $B = \mu nI$ می‌باشد بنابراین:

$$L = \frac{N\phi_B}{I} = \frac{(N)(BA)}{I} = \frac{(n\ell)(\mu nI)}{I} = \mu n^2\ell A$$

ج)

$$M = M_{12} = \frac{N_1\phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1B_2A_1}{I_2} = \frac{(n_1\ell)(\mu_\circ n_2 I_2)(A_1)}{I_2} = \mu_\circ n_1 n_2 \ell A_1$$

د)

$$\varepsilon_{12} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt} = -\frac{N_1\phi_{12}}{I_2}\frac{dI_2}{dt}$$

$$= \frac{-(n_1\ell)(\mu_1 n_2 I_2)(A_1)}{I_2}.\frac{d(bt)}{dt} = -\mu_\circ n_1 n_2 b\ell A_1$$

۷ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

الف)

$$y=\frac{E}{\rho}$$

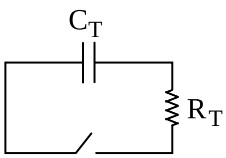
$$I=\int y.ds=\int_{0}^{L}\int_{0}^{2\pi}\frac{E_r}{\rho}rd\phi d\ell=\frac{2\pi LrE_r}{\rho}$$

$$E_r=\frac{\rho I}{2\pi Lr}$$

$$V=-\int_{b}^{a}E_r.dr=\frac{\rho I}{2\pi L}\ln(\frac{b}{a})\Rightarrow R=\frac{V}{I}=\frac{\rho}{2\pi L}\ln(\frac{b}{a})$$

ب) پوسته استوانه‌ای در نقش یک مقاومت با اندازه R عمل می‌کند. بنابراین

با ساده‌سازی مدار به صورت زیر داریم:



$$V_{C_T}+V_{R_T}=0$$

$$\frac{Q(t)}{C_T}+R_T\frac{dQ(t)}{dt}=0$$

$$\begin{cases}C_T=\dfrac{CC'}{C+C'}\\ R_T=R+R'\end{cases}\quad ;\quad Q=\text{بار اولیه خازن‌ها}$$

بنابراین:

$$Q(t)=Qe^{\frac{-t}{\tau}}\ ;\ \tau=R_TC_T=\frac{CC'(R_1+R')}{C+C'}$$

$$i_{(t)}=\frac{dQ_{(t)}}{dt}=\frac{Q(C+C')}{CC'(R+R')}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

ج)

$$\vec{E}=\frac{\rho I}{2\pi rL}\hat{a}_r=\frac{\rho V}{2\pi rLR}\hat{a}_r=\frac{V}{\ln(\frac{b}{a})}.\frac{1}{r}\hat{a}_r$$

$$\vec{j}=\frac{\vec{E}}{\rho}=\frac{V}{\rho\ln(\frac{b}{a})}.\frac{1}{r}\hat{a}_r$$

د) بار نهایی خازن‌ها صفر است.

ه) در این مدار بار اولیه روی خازن C تأمین کننده جریان در مدار است. این جریان رفته رفته بصورت انرژی گرمایی در مقاومت‌ها (R',R) تلف می‌شود تا سرانجام پس از گذشت مدت زمان طولانی $(t>5\tau)$ جریان در مدار به صفر می‌رسد.

۸ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

الف)

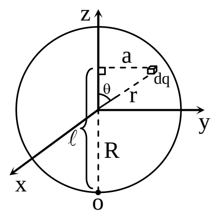
$$\oint B_2.dl=\mu_0 I\Rightarrow B_2=\frac{\mu_0 N_2 i_2}{2\pi r}$$

$$\phi_a=\oint B_2.ds_1=\int_0^{h_1}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\mu_0N_2i_2}{2\pi x}dxdy=\frac{\mu_0N_2i_2h_1}{2\pi}\ln\frac{b_1}{a_1}$$

$$L_{12}=\frac{\oint B_2.ds_1}{i_2}=\frac{\mu_0N_2h_1}{2\pi}\ln\frac{b_1}{a_1}$$

ب)
$$\oint B_2.dl=\mu_0\mu_1 I\Rightarrow B_2=\frac{\mu_0\mu_1N_2i_2}{2\pi r}\Rightarrow L_{12}=\frac{\mu_0\mu_1N_2h_1}{2\pi}\ln\frac{b_1}{a_1}$$

۹ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱



مختصات کروی داریم. جهت سادگی کار شکل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

در این دستگاه مختصات داریم: $dq=\rho r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

حال اگر $d\bar{q}$ را چگالی بار حلقه‌ای به موازات صفحه xy فرض کنیم داریم:

$$d\bar{q}=2\pi\rho r^2\sin\theta drd\theta$$

$$di=\frac{d\bar{q}}{T}=\rho\omega r^2\sin\theta drd\theta$$

همان‌طور که قبلاً بدست آوردیم میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه جریان به شعاع a در فاصله عمـودی ℓ از مرکز آن برابر است با:

$$B=\frac{\mu_0 ia^2}{2(\ell^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

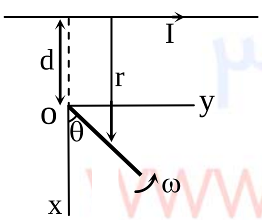
در این مسئله با مجموعه‌ای از حلقه‌های جریان di سروکار داریم پس:

$$B_o=\int dB=\int\frac{\mu_0a^2}{2(\ell^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}di$$

$$a=r\sin\theta\ ;\ \ell=R+r\cos\theta$$

$$B_o=\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\mu_0\rho\omega}{2}\frac{r^4\sin^3\theta}{(r^2+2Rr\cos\theta+R^2)^{\frac{3}{2}}}drd\theta$$

۱۰ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱



الف)
$$\vec{B}=B_\phi\hat{\phi}$$

$$\oint\vec{B}.\vec{d\ell}=\mu_0 I\Rightarrow 2\pi rB_\phi=\mu_0 I\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$$

ب) برای محاسبه نیروی محرکه القایی در میله، می‌توان مقدار میدان القـایی در هر نقطه را از روی نیرو در آن نقطه محاسبه نمود و با انتگرال‌گیری مقدار B را محاسبه کرد. میدان مغناطیسی حاصل از سیم بر صفحه نوسان میله و در نتیجه بر $\vec{V}$ عمود است.

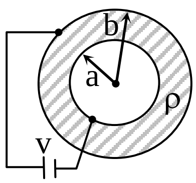
$$\left|\vec{F}\right| = \left|q\vec{V}\times\vec{B}\right| = qVB \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = VB = r\omega\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+r\cos\theta)}$$

برای بار در شعاع r نسبت به O، فاصله از سیم $d+r\cos\theta$ می‌باشد، در نتیجه:

$$|\varepsilon| = \left|\int \vec{E}.\vec{dr}\right| = \frac{\mu_0 I\omega}{2\pi}\int\frac{rdr}{d+r\cos\theta}\ ,\ \int\frac{xdx}{ax+b} = \frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln(ax+b)$$

$$\Rightarrow|\varepsilon| = \frac{\mu_0 I\omega}{2\pi}\left(\frac{r}{\cos\theta}-\frac{d}{\cos^2\theta}\ln(r\cos\theta+d)\right)\Bigg|_{r=0}^{r=L} = \frac{\mu_0 I\omega}{2\pi}\left(\frac{L}{\cos\theta}-\frac{d}{\cos^2\theta}\ln\frac{L\cos\theta+d}{d}\right)$$

۱۱ دانشگاه علم و صنعت ایران / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱



الف) فرض کنیم پوسته کروی به پتانسیل V وصل شده است.

میدان الکتریکی در نقطه‌ای به شعاع c $(a<c<b)$ $E_c = \rho J_c$ می‌باشد.

$$V = -\int_b^a \frac{I}{4\pi c^2}\rho d_c = \frac{\rho I}{4\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$I = \int J_c ds = 4\pi c^2 I_c \Rightarrow J_c = \frac{I}{4\pi c^2}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \rho J_c dc}{\int J_c ds} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

توجه: جریان هر جسمی در نقاط مختلف ثابت است.

ب)
$$\varepsilon = Ri + L\frac{di}{dt} \to i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-R\frac{t}{L}}\right)$$

ج) همان طور که گفته شد جریان در تمامی نقاط داخل پوسته کروی یکسان و برابر قسمت (ب) می‌باشد.

چگالی جریان در نقطه‌ای به شعاع r: $J_r = \frac{i}{4\pi r^2} = \frac{\varepsilon}{4\pi R r^2}\left(1-e^{-R\frac{t}{L}}\right)$

میدان الکتریکی در نقطه‌ای به شعاع r: $E_r = \rho J_r = \frac{\rho\varepsilon}{4\pi R r^2}\left(1-e^{-R\frac{t}{L}}\right)$