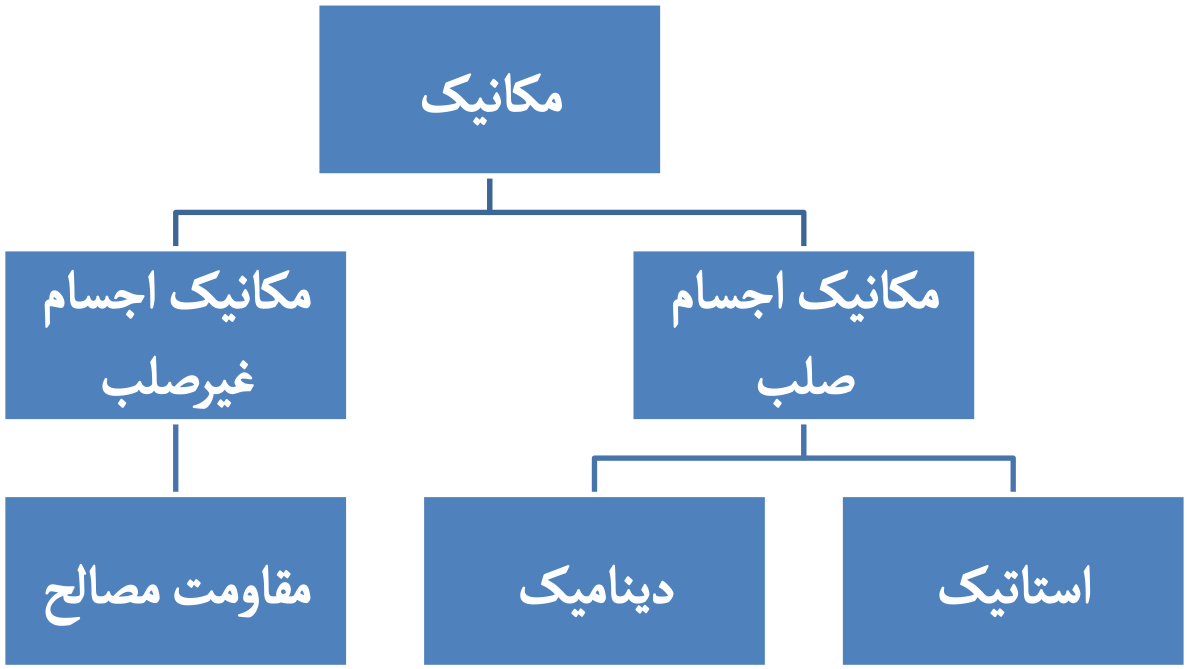
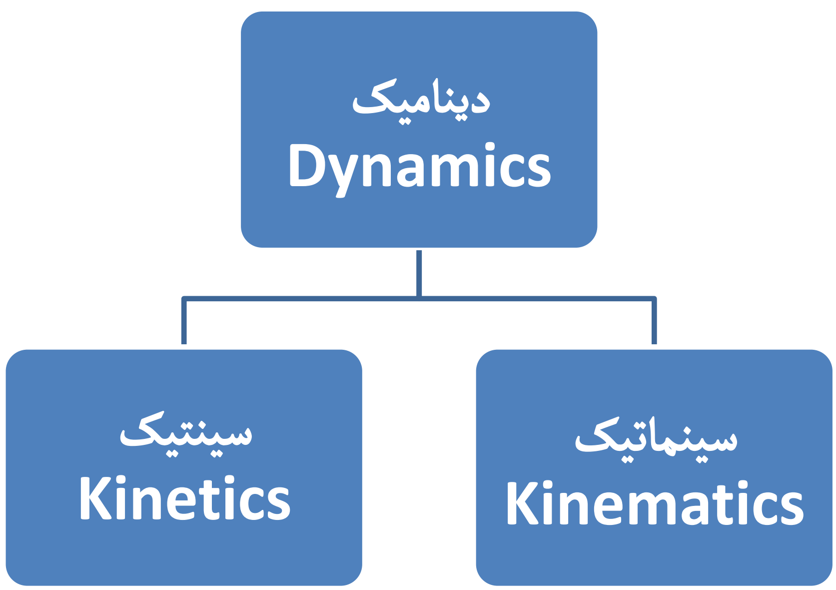
دینامیک

دکتر مهدی قاسمیه

پردیس دانشکده‌های فنی - دانشکده مهندسی عمران

نسخه ۱۳۹۰


مکانیک
مکانیک اجسام صلب
مکانیک اجسام غیرصلب
استاتیک
دینامیک
مقاومت مصالح


دینامیک
Dynamics
سینماتیک
Kinematics
سینتیک
Kinetics

اگر جسم فقط حرکت انتقالی داشته باشد، می توان آن را به صورت یک ذره یا نقطه مادی در نظر گرفت . اما اگر همزمان با حرکت انتقالی دوران هم داشته باشد، آن را به صورت جسم صلب در نظر می گیریم.

۱- سینماتیک نقطه مادی (فصل ۱۱) : حرکت مستقیم الخط؛ حرکت منحنی الخط؛ حرکت نسبی؛ حرکت وابسته

۲- سینتیک نقطه مادی (فصل ۱۲) : قانون دوم نیوتن ($\Sigma\vec{F}= m\vec{a}$) ؛ ممنتوم خطی (اندازه حرکت)؛ ممنتوم زاویه ای (معادله حرکت)

۳- سینتیک نقطه مادی (فصل ۱۳) : در روابط انرژی و ممنتوم (کار؛ انرژی جنبشی و پتانسیل؛ ممنتوم؛ ایمپالس؛ اصل انرژی کار و انرژی؛ اصل حفظ انرژی؛ اصل ایمپالس و ممنتوم؛ مسائل برخورد)

۴- سیستم نقاط مادی (فصل ۱۴) : مرکز جرم؛ اصل ایمپالس و ممنتوم؛ کار و انرژی؛ اصل ایمپالس زاویه ای و ممنتوم زاویه ای

۵ - سینماتیک جسم صلب (فصل ۱۵) : حرکت انتقالی؛ حرکت دورانی حول محور ثابت؛ حرکت صفحه ای؛ حرکت دورانی حول یک نقطه ثابت؛ حرکت کلی؛ سرعت های مطلق و نسبی و شتاب های مطلق و نسبی؛ مرکز آنی دوران و نقطه سرعت صفر

۶- سینتیک جسم صلب صفحه ای (فصل ۱۶) : اصل دالامبر

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ و $\Sigma M = I\alpha$ (حرکت مقید و حرکت چرخشی)

۷- سینتیک جسم صلب صفحه ای (فصل ۱۷) : روابط انرژی و ممنتوم؛ اصل کار و انرژی؛ اصل ایمپالس و ممنتوم؛ اصل ایمپالس زاویه ای و ممنتوم زاویه ای؛ اصل برخورد غیر مرکزی

۸- سینتیک اجسام سه بعدی (فصل ۱۸)

۹- ارتعاشات مکانیکی (فصل ۱۹)

فهرست فصول جزوه

فصل اول

سینماتیک نقاط مادی

فهرست

حرکت مستقیم الخط:

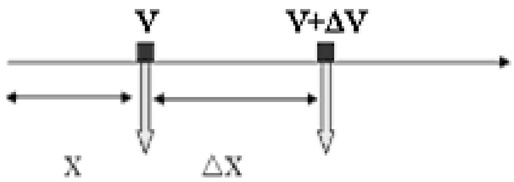
وقتی یک نقطه مادی در امتداد خطی مستقیم حرکت نماید، نوع حرکت آن را مستقیم الخط گویند. در صورتی که در هر لحظه ی معین مانند t، این ذره مادی در یک نقطه ی معین روی آن خط باشد.

سرعت لحظه‌ای : $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$

سرعت متوسط : $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

سیستم/ واحد	جرم	طول	زمان	نیرو
SI	**Kg**	**m**	**s**	**Kg.m/s^2**
FPS	**lb.s^2/ft**	**Ft**	**s**	**lb**

- ✓ *Slug = lb . s^2/ ft*
- ✓ *g= 32.2 ft/ s^2*
- ✓ *1ft = 12 inch*
- ✓ *1 inch=1" = 2.54 cm*
- ✓ *1ft=1'= 30.58 cm*



- موقعیت : x
- سرعت : v
- شتاب : a

شتاب لحظه ای : $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$

شتاب متوسط : $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{((v+\Delta v)-v)}{(t+\Delta t)-t}$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{x}\,,\; v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v}\;,\; a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{vdv}{dx}\;,$$

$$\boxed{vdv = adx}$$

حرکت مستقیم الخط یکنواخت:

در این نوع حرکت نقطه ی مادی در امتداد خط مستقیم حرکت می نماید. و شتاب صفر است.

$$a = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow x = x_0 + vt\,, \qquad v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow vdt = dx \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_{x_0}^{x} dx$$

حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت:

در این نوع حرکت نقطه ی مادی در امتداد خط مستقیم حرکت می نماید. و شتاب ثابت است.

$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow adt=dv\Rightarrow\int_0^t adt=\int_{v_0}^{v}dv\Rightarrow at=v-v_0\rightarrow v=v_0+at$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_0^t vdt=\int_{x_0}^{x}dx\Rightarrow x-x_0=\int_0^t(v_0+at)dt\Rightarrow x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

حرکت نقطه مادی

1- اگرشتاب تابع زمان باشد:

$$a=f(t)\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow f(t)dt=dv\Rightarrow\int_0^t f(t)dt=\int_{v_0}^{v}dv\Rightarrow v=g(t)$$

$$v=g(t),v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_0^t vdt=\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t g(t)dt\Rightarrow x=h(t)$$

2- اگر شتاب تابع مکان باشد:

$$a=f(x)\quad,\quad adx=vdv=f(x)dx=vdv\Rightarrow\int_{x_0}^{x}f(x)dx=\int_{v_0}^{v}vdv=\frac{1}{2}(v^2-{v_0}^2)\Rightarrow v=g(x)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=g(x)\Rightarrow\frac{dx}{g(x)}=dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{g(x)}=\int_0^t dt\Rightarrow t=h(x)\Rightarrow x=j(t)$$

3- اگر شتاب تابع سرعت باشد:

$$a=f(v)\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}=f(v)\Rightarrow\frac{dv}{f(v)}=dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dv}{f(v)}=\int_0^t dt\Rightarrow t=g(v)\Rightarrow v=h(t)$$

$$vdv=adx\Rightarrow vdv=f(v)dx\Rightarrow\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{f(v)}=\int_{x_0}^{x}dx\Rightarrow x=j(v),\quad v=h(t)=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int h(t)dt=\int dx$$

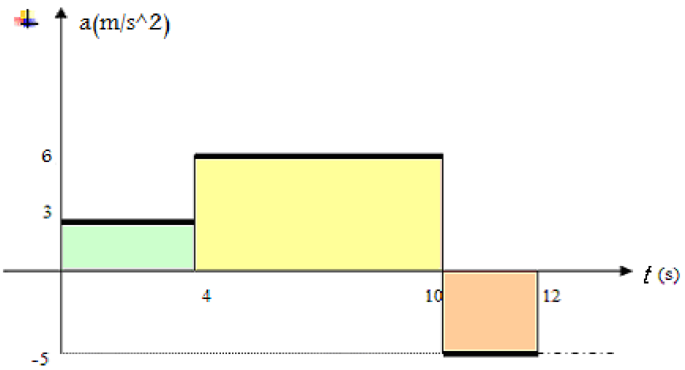
4- ارتباط بین معادله مکان و سرعت و شتاب:

$$a=\frac{dv}{dt}\rightarrow dv=adt\quad,\quad\int_{v_1}^{v_2}dv=\int_{t}^{t_2}adt\Rightarrow V_2-V_1=\int_{t_1}^{t_2}adt\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}\quad,\quad v=\frac{dx}{dt}\quad,$$

$$v_2-v_1=\int_{t_1}^{t_2}adt$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}vdt$$

مثال 1-1: مطلوب است نمودار منحنی $v\text{-}t$, $x\text{-}t$ در بین $0 < t < 20$ و همچنین سرعت وموقعیت نقطه مادی در $t=12$ (s) و مسافت طی شده تا $t=12$ s . ($v_0=-18 m/s$ و $x_0=0$)



حل :

$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v_4}dv=\int adt\Rightarrow v_4=v_0+12=-18+12=-6\ \ m/s$$

$$v_{10}=v_4+6(6)=-6+36=30\ \ m/s\Rightarrow v_{12}=v_{10}+2(-5)=30-10=20\ \ m/s\Rightarrow\qquad\Rightarrow$$

$$v_{20}=v_{12}+8(-5)=-20\ \ m/s$$

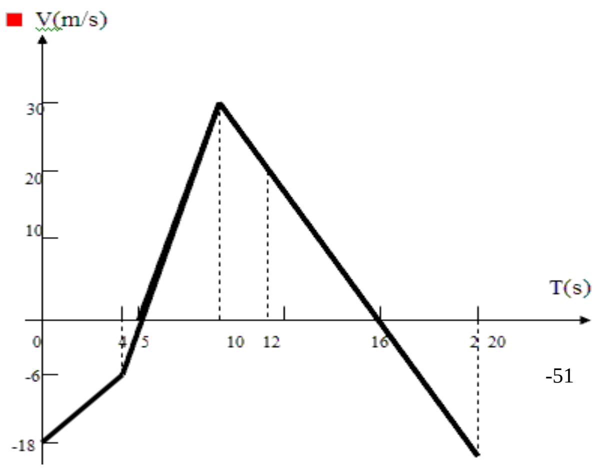
$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=vdt\Rightarrow\int_{x_0=0}^{x_4}dx=\int_0^{20}vdt\Rightarrow$$

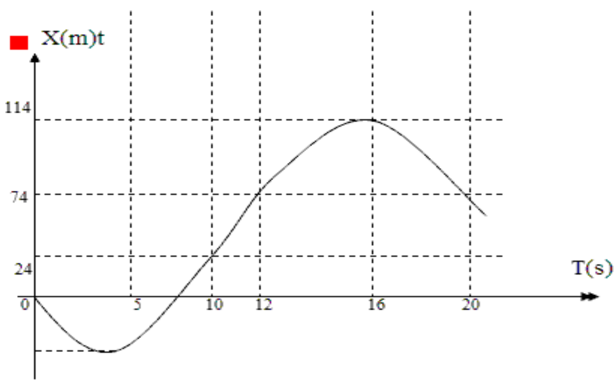
$$\Rightarrow x_4=x_0+\int_0^u vdt=0-\frac{1}{2}(18+6)(4)=-48m,\qquad x_5=x_4+\frac{1}{2}(6)(-1)=-51\ \ m\qquad ,$$

$$x_{10}=x_5+\frac{1}{2}(30)(5)=24\ \ m$$

$$x_{12}=x_{10}+\frac{1}{2}(30+20)(2)=74m, x_{16}=x_{12}+\frac{1}{2}(20)(4)=114m\qquad ,$$

$$x_{20}=x_{16}+\frac{1}{2}(4)(-20)=74\ \ m$$

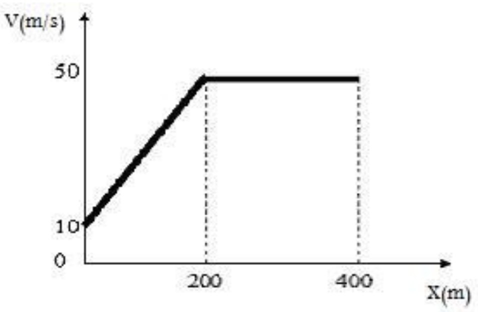




t=12: مسافت طی شده = 74+51+51 = 176 m

مثال 1–2 : با توجه به نمودار v-x، مطلوبست ترسیم نمودار a-x و زمان لازم برای رسیدن به موقعیت $x=400\ (m)$.

حل:



$$0 \le x \le 200 \Rightarrow v = 0.2x+10 \Rightarrow \quad a = v\frac{dv}{dx} = (0.2x+10)(0.2)$$

$$\Rightarrow \quad a = 0.04x+2 \quad , \quad v = 0.2x+10$$

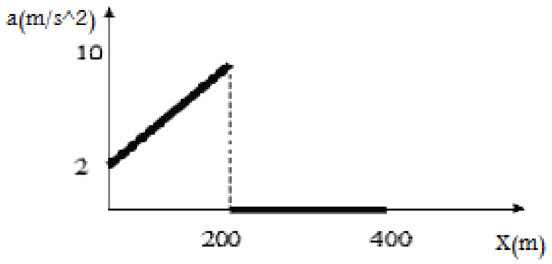
$$200 \le x \le 400 \Rightarrow v = 50 \quad , \quad a = 50(0) = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_0^{200} \frac{dx}{0.2x+10}$$

$$x(m) \Rightarrow t = \frac{1}{0.2} Ln(0.2x+10)\Big|_0^{200}$$

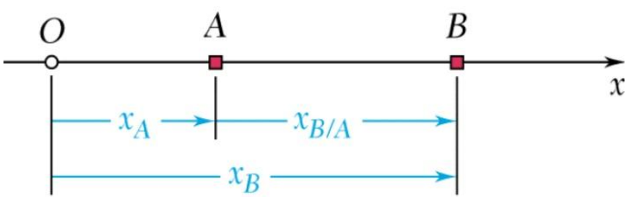
$$t = 5[Ln(40+10) - Ln(10)] \Rightarrow t = 8.05(s)$$

$$dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow \int_{8.05}^{t} dt = \int_{200}^{400} \frac{dx}{50} \Rightarrow t - 8.05 = \frac{x}{50}\Big]_{200}^{400} \rightarrow t = 12\ \ .05(s)$$



حرکت نسبی دو نقطه مادی

دو نقطه ی مادی را در نظر گرفته که در امتداد یک خط مستقیم حرکت می نمایند هرگاه فاصله ی هر یک را از مبدا حرکت یعنی نقطه ی O به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم :



موقعیت مطلق نقطه $A = x_A$ ، موقعیت مطلق نقطه $B = x_B$

موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطه $A = x_{B/A} = x_B - x_A$

سرعت نسبی نقطه A نسبت به B

$$\frac{d}{dt}(x_{B/A}) = \frac{d}{dt}(x_B) - \frac{d}{dt}(x_A) = \dot{x}_{B/A} = \dot{x}_B - \dot{x}_A \Rightarrow v_{B/A} = v_B - v_A$$

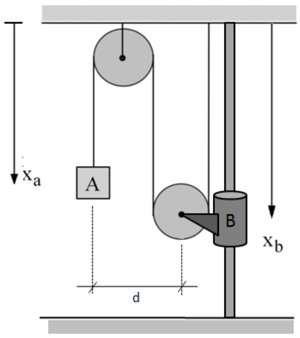
سرعت مطلق B : $v_B = v_{B/A} + v_A$

شتاب مطلق B : $a_B = a_{B/A} + a_A$, $\frac{d}{dt}(v_{B/A}) = \frac{d}{dt}(v_B) - \frac{d}{dt}(v_A) \Rightarrow \ddot{x}_{B/A} = \ddot{x}_B - \ddot{x}_A$

حرکت وابسته چند جرم

هنگامی که وضع حرکت یک نقطه ی مادی بستگی به وضع نقاط مادی متحرک دیگر دارد در این حالت حرکات را وابسته گویند.

مثال 1-3 : با توجه به ثابت بودن طول طناب داریم:

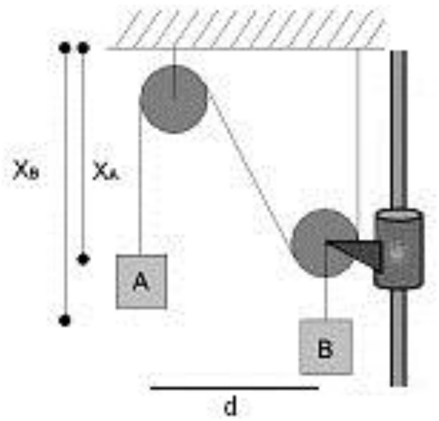


$L =$ ثابت , $(x_A - c_1) + c_2 + (x_B - c_3) + c_4 + (x_B - c_5) = c$

$x_A + 2x_B = c'$, $v_A + 2v_B = 0$, $a_A + 2a_B = 0$

(توجه : جهت مثبت را به سمت پایین در نظرگرفته ایم)

مثال 1-4: با توجه به ثابت بودن طول طناب ها داریم:



$L =$ ثابت $\qquad L = x_A + \sqrt{d^2 + x_B^2} + x_B$

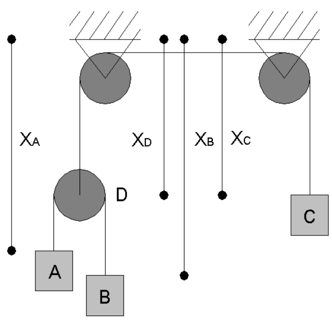
$[d =$ ثابت $, \dot{d} = 0 \ , \ \ddot{d} = 0]$

$$\dot{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_A + \frac{1}{2}(d^2 + x_B^2)^{-\frac{1}{2}}(2x_B.\dot{x}_B) + \dot{x}_B$$

$\ddot{L} = 0$

$I \text{ -+} x_A + C_1$, $L_2 = \sqrt{d^2 + x_B^2}$, $L_3 = x_B - C_3$

مثال 1-5 : با توجه به ثابت بودن طول طناب ها داریم:

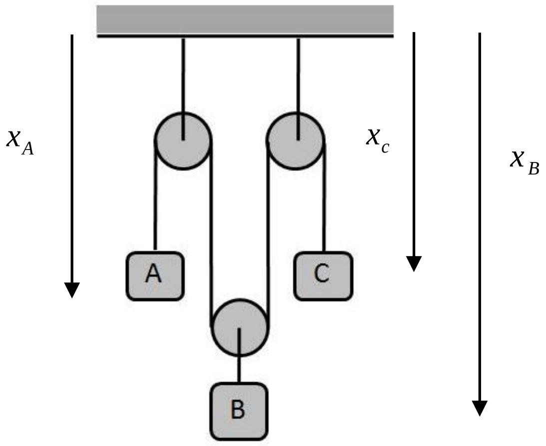


$(x_A - x_D) + (x_B - x_D) = c_1$, $x_A + x_B - 2x_D = C_1$, $x_D + x_C = C_2$

$v_A + v_B - 2v_D = 0$, $v_D + v_C = 0$

$a_A + a_B - 2a_D = 0$, $a_D + a_C = 0$

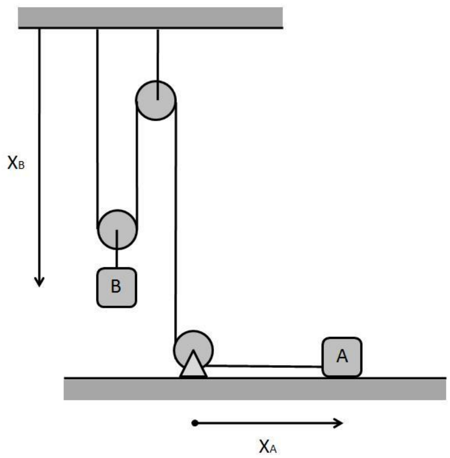
مثال 1-6 :



$$x_A + x_B + x_B + x_C = cte$$

$$\begin{cases} x_A + 2x_B + x_c = cte \\ V_A + 2V_B + V_C = 0 \\ a_A + 2a_B + a_C = 0 \end{cases}$$

مثال 1- 7 :



$$x_B + x_B + C_1 + x_A = cte$$

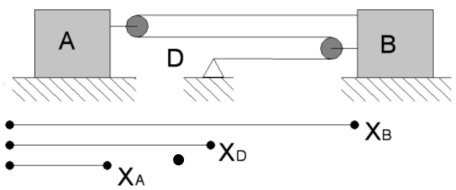
$$\begin{cases} x_A + 2x_B = cte \\ V_A + 2V_B = 0 \\ a_A + 2a_B = 0 \end{cases}$$

مثال 1- 8: اگر $V_B= 18\ m/s$ (ثابت و در جهت x) مطلوبست:

الف) سرعت بلوک A

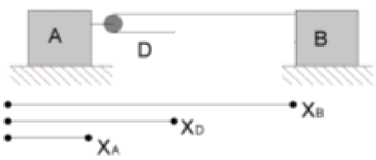
ب) سرعت نقطه D کابل

ج) سرعت نسبی A نسبت به B



حل:

$(x_B\text{-}x_A) + (x_B\text{-}x_A)+x_B = C$, $3x_B -2x_A= C$, $3V_B -2\ V_A\ 0$



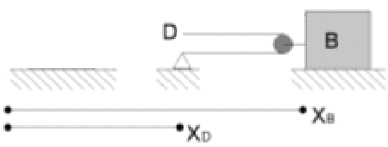
$V_A = 1.5V_B=3/2(18) = 27\ m/s \Rightarrow V_A = 27\ m/s \rightarrow$

$(x_B\text{-}x_A) + (x_D\text{-}x_A) = c_1$, $x_B +x_D -2x_A= c_1$, $V_B + V_D -2V_A = 0$

$18 + V_D -2\ (27\ ) =0 \Rightarrow V_D = 36\ m/s$

روش دیگر:

$(x_B\text{-}x_D) + x_B = c_2$
$2x_B - x_D= c_2$



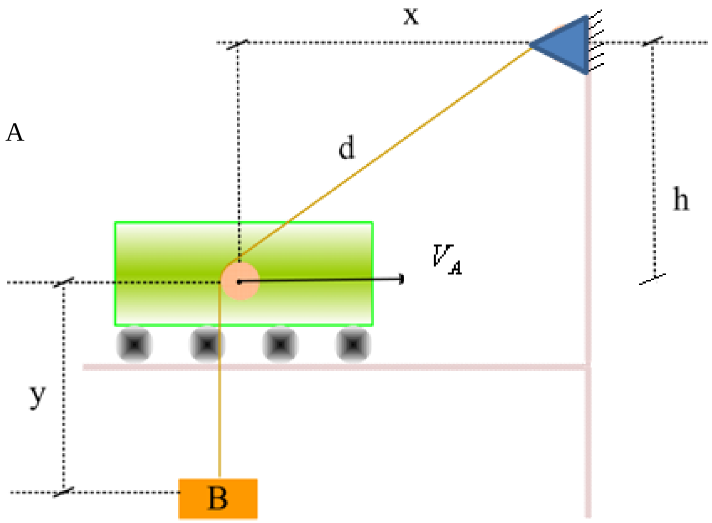
$2V_B - V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 2V_B = 36\ m/s$

$V_{A/B} = V_A - V_B = [\,27 \rightarrow\,] - [\,18 \rightarrow\,] = 9\ m/s$

مثال 1-9 : مطلوب است سرعت متحرک B نسبت به A

$V_A = ?$
$V_B = ?$

حل:



$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

$$V_B = [V_A \leftrightarrow] + [V_{B/A} \updownarrow] \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{B/A}^2}$$

$$V_A = \dot{x}$$

$$L = d + y \quad \text{ثابت} \quad \dot{d} + \dot{y} = 0$$

$$|\dot{y}| = |v_{B/A}| = |\dot{d}| \qquad d = \sqrt{h^2 + x^2}$$

$$d^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 2d\dot{d} = 2x\dot{x} \Rightarrow \dot{d} = \frac{x\dot{x}}{d}$$

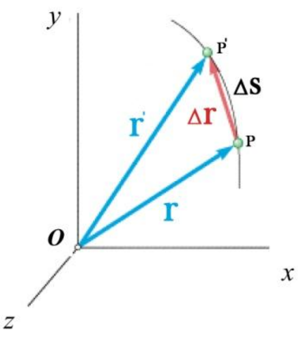
$$V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + (\frac{x\dot{x}}{d})^2} \Rightarrow V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{d^2}}$$

$$V_B = \dot{x}\sqrt{(1 + \frac{x^2}{d^2})} \qquad V_B = V_A\sqrt{1 + \frac{x^2}{d^2}}$$

حرکت منحنی الخط

وقتی یک نقطه ی مادی در یک صفحه در امتداد خط منحنی به غیر از خط مستقیم حرکت نماید گویند نقطه ی مادی حرکت منحنی الخط دارد . برای تعیین وضع نقطه ی P که نقطه ی مادی در هر لحظه از

زمان اشغال می کند باید دستگاه مختصات ثابتی را انتخاب نمود و وضع حرکت آن نقطه ی متحرک را نسبت به آن دستگاه سنجید .



سرعت متوسط : $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

سرعت لحظه ای: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}, v = \dfrac{ds}{dt}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{e}_t$$

$\vec{e}_t = \Rightarrow \vec{v} = v\vec{e}_t$ بردار واحد مماس بر مسیر حرکت

شتاب متوسط : $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

شتاب لحظه ای : $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$\vec{r}$: بردار موقعیت

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$: سرعت نقطه

$\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$: شتاب نقطه

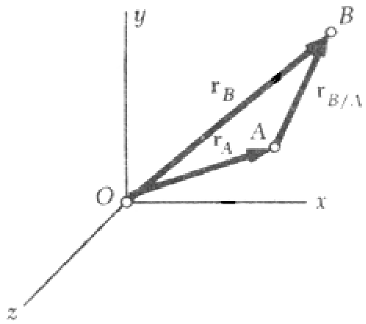
مولفه های متعامد سرعت و شتاب

$$r = r(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d}{dt}(\vec{i}) + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d}{dt}(\vec{j}) + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d}{dt}(\vec{k})$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad , \quad v_x = \dot{x} \ , \ v_y = \dot{y} \ , \ v_z = \dot{z}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad , \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$



حرکت نسبی

موقعیت نقطه A : r_A

موقعیت نقطه B : r_B

موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطهA : $r_B - r_A = r_{B/A}$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

سرعت نسبی نقطهB نسبت به A :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

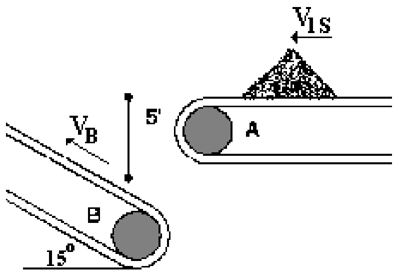
شتاب نسبی نقطهB نسبت به A :

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{v}_A) \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

مثال1- 10 : مطلوبست سرعت نسبی شن و ماسه نسبت به تسمه B . ($V_{S/B}$ به هنگام ریخـتن روی تسمه)

$v_{1S} = 6\,ft/s \quad , \quad v_B = 8\,ft/s$



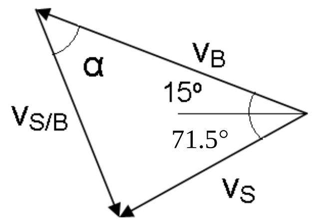
$\vec{v}_{S/B} = \vec{v}_S - \vec{v}_B$

$\vec{v}_s = \vec{v}_{sx} + \vec{v}_{sy}$ $\qquad v_{sx} = 6\,ft/s \leftarrow \quad v_{sy} = \sqrt{2g(5)} = \sqrt{2(32.2)(5)} = 17.94\,ft/s \downarrow$

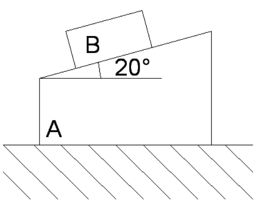
$\Rightarrow \vec{v}_{2S} = [6 \leftarrow] + [17.94 \downarrow] =$ *18.92 ft/s*

$v_{2S/B} = \sqrt{v_B^2 + v_S^2 - 2v_B v_s \cos 86.5} = 20.09\,ft/s$

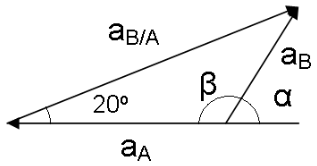
$\frac{Sin(\alpha)^\circ}{18.92} = \frac{Sin(15+71.5)^\circ}{20.01} \Rightarrow \alpha = 70.05^\circ$



مثال1- 11: بلوک A با شتاب ثابت $80\frac{mm}{s^2}$ به سمت چپ درحال حرکت است و بلوک B باشتاب نسبی ثابت $120\frac{mm}{s^2}$ به سمت بالا روی بلوک A در حال حرکت است. مطلوبست شتاب مطلق B .



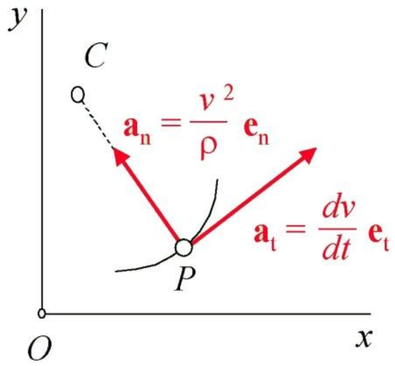
حل:



$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{B/A} \quad , \quad \vec{a}_B=\sqrt{120^2+80^2-2(120)(80)\cos 20}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_B=52.5\,{}^{mm}\!/\!{}_{s^2} \\ \dfrac{\sin\beta}{120}=\dfrac{\sin 20°}{52.5} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta=128.6° \qquad \alpha=51.4°$$

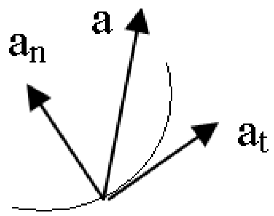
مولفه‌های مماسی و نرمال



$\vec{e}_t=$ بردار واحد مماسی

$\vec{e}_n=$ بردار واحد عمودی

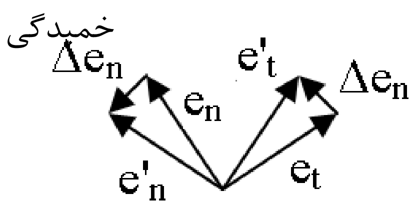
$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad , \qquad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad \vec{v}=v\vec{e}_t$$



$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt} \quad , \quad \vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n$$

$$\frac{d_{\vec{e}t}}{dt}=\left(\frac{d_{\vec{e}t}}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) \qquad \boxed{a_t=\frac{dv}{dt}}$$

شعاع : $\rho=\dfrac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{{}^{d^2y}\!/\!{}_{dx^2}}$



$$\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}=\frac{2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}=\frac{\sin({}^{\Delta\theta}\!/\!{}_2)}{({}^{\Delta\theta}\!/\!{}_2)}$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}=\lim\frac{\sin(\dfrac{\Delta\theta}{2})}{\sin(\dfrac{\Delta\theta}{2})}=1\rightarrow\frac{de_t}{d\theta}=1$$

$\dfrac{d\vec{e}_t}{d\theta}=\vec{e}_n$ چون بر t عمود است و مقدار 1 را نیز داراست.

$$\vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\left(\frac{d\vec{e}_t}{dt}\right)=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

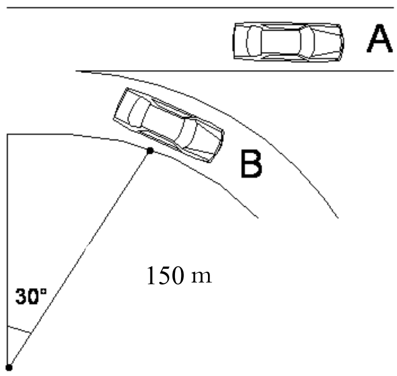
با معادل گذاری: $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

پس به‌دست آوردیم: $\dfrac{d\vec{e}_t}{dt} = \dfrac{v}{\rho}\vec{e}_n$

در حرکت مستقیم الخط یکنواخت داریم :

$$\begin{cases} \vec{v}` = v\vec{e}_t \\ \vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{e}t + \dfrac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \end{cases} \qquad a = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \dfrac{v^2}{\rho} = 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n \\ \dfrac{d\vec{e}_n}{d\theta} = -\vec{e}_t \end{cases}$$

مثال 1– 12: مطلوبست شتاب متحرک A نسبت به B :



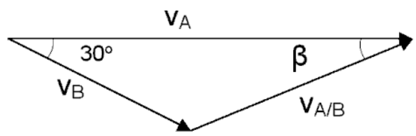
$$20.8 \quad m/s = v_A = 75 km/h \qquad a_A = 1.5 m/s^2 \qquad \vec{v}_{A/B} = ?$$

$$11.1 m/s = V_B = 40\dfrac{km}{h} \qquad a_b = -0.9 m/s^2 \qquad \vec{a}_{A/B} = ?$$

حل:

$$20.8\frac{m}{s} = v_A = \left[75\frac{km}{h} \rightarrow\right] \qquad a_A = 1.5\frac{m}{s^2} \qquad \vec{v}_{A/B} = ?$$

$$11.1\frac{m}{s} = V_B = 40\frac{km}{h} \quad a_b = -8.9\frac{m}{s^2} \qquad \vec{a}_{A/B} = ?$$



$V_A = 20.8 m/s$

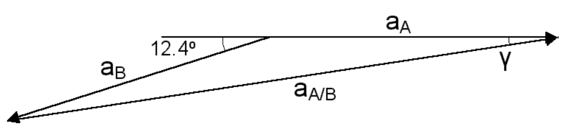
$V_B = 11.1 m/s$

$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

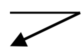
$\vec{V}_{A/B} = [20.8 \rightarrow] - [11.1]$

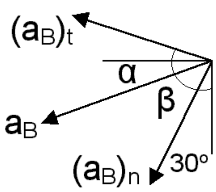
$\vec{V}_{A/B} = \sqrt{(20.8)^2 + (11.1)^2 - 2(20.8)(11.1)Cos30} \Rightarrow V_{A/B} = 12.5 m/s$

$\dfrac{\sin\alpha}{11.1} = \dfrac{\sin 30}{12.5} \rightarrow \alpha = 26.4°$



$(a_B)_t = 0.9 (a_B)_n = V^2/\rho = \dfrac{11.1^2}{150} = 0.8 m/s^2$

$\Rightarrow a_B = 1.2 m/s^2 \quad \beta = 12.4^o$ 12.4 



$$a_{A/B}=\sqrt{(1.5)^2+(1.2)^2-2(1.5)(1.2)Cos167.6}=2.70\,m/s^2$$

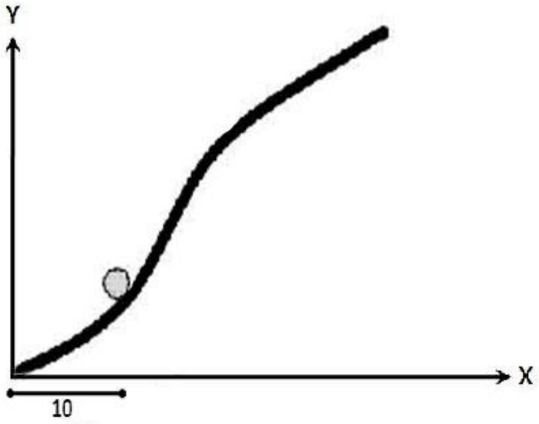
$$\frac{\sin\gamma}{1.2}=\frac{\sin167.6}{2.7}\rightarrow\boxed{\gamma=5.6^\circ}$$

$$\boxed{\vec{a}_{A/B}=2.7} \quad 5.6$$

مثال 1- 13 : سرعت اسکی باز در مسیر سهموی در نقطه A ، 6 m/s و در حال افزایش با نسبت $2m/s^2$ است .

مطلوبست : $v_A, a_B=?$

حل :



$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{20}x^2 \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{10}x \Rightarrow \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$@\,x=10,\frac{dy}{dx}=1$$

$$\vec{V}_A=6\frac{m}{s} \quad 45$$

$$a=a_t+a_n$$

$$\vec{a}_t=2\frac{m}{s^2} \quad 45$$

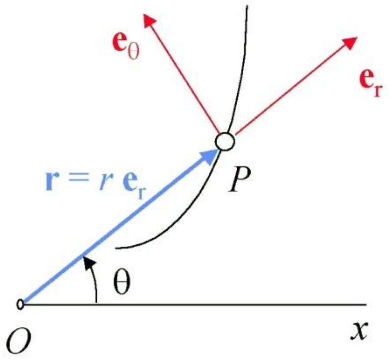
$$\rho=\frac{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}=28.28$$

$$\vec{a}_n=\frac{v^2}{\rho}=1.27\frac{m}{s^2} \quad 45$$

$$|a_A|=\sqrt{2^2+1.27^2}$$

$$\vec{a}_A=2.37\frac{m}{s^2} \quad 12.58$$

مولفه‌های شعاعی و عرضی(مختصات قطبی)



مختصات زاویه‌ای: θ

بردار واحد شعاعی: $\vec{e}_r$

بردار واحد عرضی: $\vec{e}_\theta$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = d(r\vec{e}_r)/dt = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}r}{dt}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}}$$

$$\frac{d\vec{e}r}{dt} = (\frac{d\vec{e}r}{d\theta})(\frac{d\theta}{dt}) = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{rd\vec{e}r}{dt} = \underbrace{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{v_\theta} = v_\theta\vec{e}_\theta \qquad \boxed{v_\theta = r\dot{\theta}}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad , \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\theta\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2 e_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

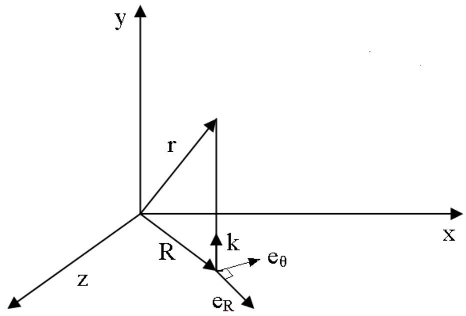
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

شتاب زاویه‌ای : $\ddot{\theta} = \alpha \, rad/s^2$

مختصات استوانه‌ای

بردار موقعیت: $\vec{r}=\vec{R}+\vec{z}=\mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_R+z\vec{k}$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



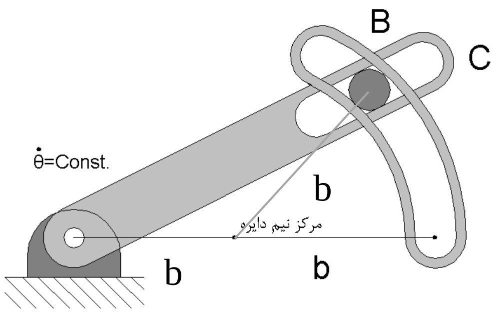
$$\vec{v}=\frac{d}{dt}(r\vec{e}_R)+\frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

$$\rightarrow \vec{v}=v_R\vec{e}_R+v_\theta\vec{e}_\theta+v_z\vec{k}$$

$$v_R=\dot{R}\quad,\quad v_\theta=R\dot{\theta}\quad,\quad v_Z=\dot{z}$$

بردار شتاب:
$$\begin{cases} a_R=\ddot{R}-R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta=R\ddot{\theta}+2\dot{R}\dot{\theta} \\ a_Z=\ddot{z}\end{cases}$$

مثال 1- 14: سرعت و شتاب نقطه‌ی B را اگر بازوی OC با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند بیابید.



حل:

$$r=2b\cos\theta$$

$$v_r=\dot{r}=\frac{d}{dt}(2b\cos\ \theta)=2b(-\sin\theta)(\dot{\theta})$$

$$v_\theta=r\dot{\theta}=2b\dot{\theta}\cos(\theta)$$

$$v=\sqrt{v_\theta^2+v_r^2}\ =2b\dot{\theta}$$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=?$$

$$\ddot{r}=2b[(-\cos\ \theta)(\dot{\theta})^2+(-\sin\theta)\ddot{\theta}]=-2b\dot{\theta}^2\cos\ \theta$$

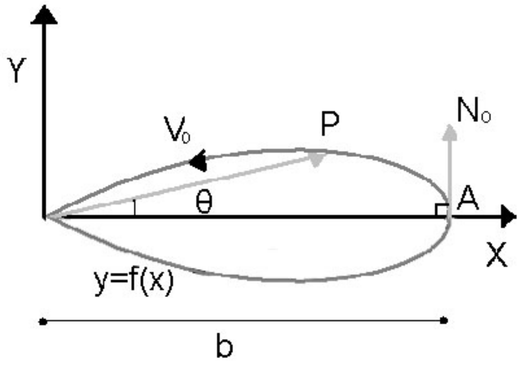
$$a_r=-2b\dot{\theta}^2\cos\ \ \theta-2b\cos\ \theta\ \dot{\theta}^2=-4b\dot{\theta}^2\cos\ \ \theta$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=-4b\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$|\ \vec{a}\ |=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}\ =4b\dot{\theta}^2$$

مثال 1– 15: در مسیرداده شده، سرعت ثابت و برابر $v_\circ$ است مطلوبست شتاب متحرک در موقعیت A؟ $(R=b\cos 3\theta)$

حل:



$$R=b\cos 3\theta$$
$$\dot{R}=b(-\sin 3\theta)(3)(\dot{\theta})=-3b\dot{\theta}\sin 3\theta$$
$$\ddot{R}=-3b\ddot{\theta}\sin 3\theta-9b\dot{\theta}^2\cos 3\theta$$

$$A=\begin{cases}a_t=0\\ a_n=\dfrac{v^2}{\rho}\end{cases}\qquad a_A\begin{cases}a_r=\ddot{R}-R\dot{\theta}^2\\ a_\theta=R\ddot{\theta}+2\dot{R}\dot{\theta}=0\end{cases}$$

$$v_A=\begin{cases}v_r=\dot{R}=0\\ v_\theta=R\dot{\theta}=v_\circ\Rightarrow\dot{\theta}=\dfrac{v_\circ}{b}\end{cases}$$

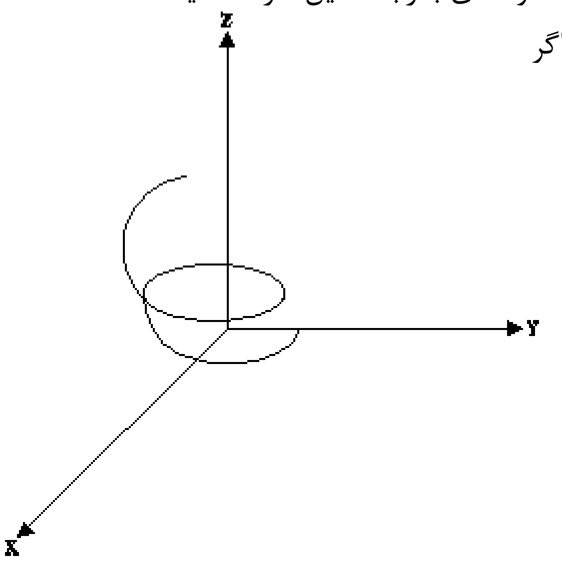
$$A\rightarrow\dot{\theta}=\frac{v_\circ}{b},R=b,\ddot{R}=-9b\dot{\theta}^2=-9\frac{v_\circ^{\ 2}}{b}$$

$$\Rightarrow\boxed{a_A=-10\frac{v_\circ^2}{b}}\quad a_A=a_r=-9\frac{v_\circ^2}{b}-b(\frac{v_\circ^2}{b^2})$$

مثال 1– 16: یک نقطه روی مسیری در دستگاه مختصات استوانه ای با رابطه ذیل حرکت میکند: $\bar{r}=3\bar{e}_R+15t\bar{k}$ (m) که در آن t متغیر برحسب زمان است. اگر $\dot{\theta}=5rad/s$ ثابت باسد، مطلوبست شتاب نقطه مادی

(R,θ,z)

$[\bar{e}_R,\bar{e}_\theta,\bar{k}]$



حل:

راه اول:

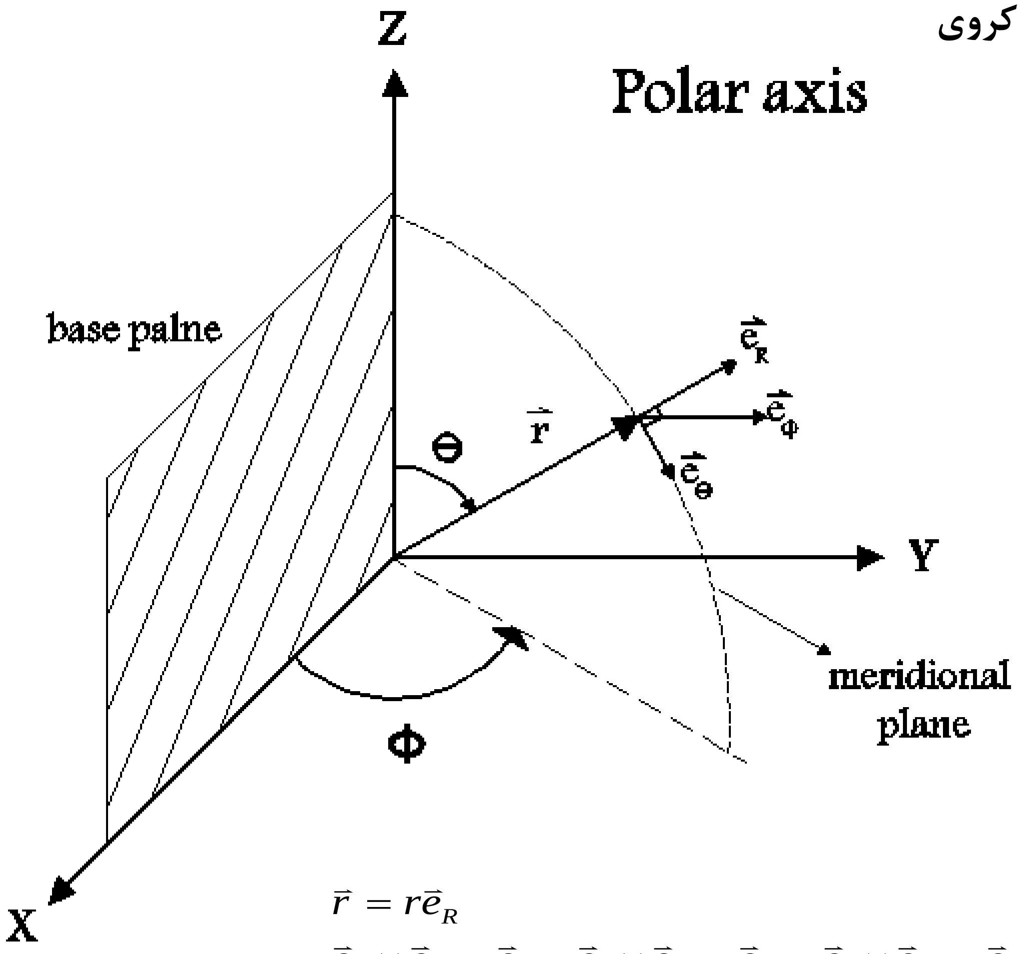
$$\vec{r} = 3\vec{e}_R + 15t\vec{k}$$
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = 3\dot{\vec{e}}_R + 15\vec{k} =$$
$$\dot{\vec{e}}_R = \dot{\theta}.\vec{e}_\theta = 5\vec{e}_\theta$$
$$\dot{\vec{r}} = 15\vec{e}_\theta + 15\vec{k}$$
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = 15\dot{\vec{e}}_\theta + 0$$
$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{e}_R = -5\vec{e}_R$$
$$\Rightarrow \vec{a} = -75\vec{e}_R (m/s^2) \Rightarrow |a| = 75 m/s^2$$

راه دوم:

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\vec{e}_R + (\dot{R}\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{r} = 3\vec{e}_R + 15t\vec{k} \Leftrightarrow \begin{array}{lll} R = 3 & \dot{\theta} = 5(cte) & z = 15t \\ \dot{R} = 0 & \ddot{\theta} = 0 & z = 15 \\ \ddot{R} = 0 & & \ddot{z} = 0 \end{array}$$
$$\vec{a} = \left[0 - 3(5)^2\right]\vec{e}_R + \left[0 + 0\right]\vec{e}_\theta + 0$$
$$\vec{a} = -75\vec{e}_R$$

مختصات کروی



$$\vec{r} = r\vec{e}_R$$

$$\vec{e}_R \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_R \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_R = \vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left[\sqrt{x^2 + y^2} / z\right] \\ \phi = \tan^{-1}(y / x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\ Sin(\theta)\ Cos(\phi) \\ y = r\ Sin(\theta)\ Sin(\phi) \\ z = r\ Cos(\theta) \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_R\vec{e}_R + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\phi\vec{e}_\phi$$

$$\vec{v} = \dot{R}\ \vec{e}_R + R\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta + r\ \dot{\phi}\, Sin(\theta)\ \vec{e}_\phi$$

$$\vec{a} = a_R\vec{e}_R + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\phi\vec{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = &\left[\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 Sin^2(\theta)\right]\vec{e}_R + \\ &\left[R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} - R\dot{\phi}^2 Sin(\theta)\, Cos(\theta)\right]\vec{e}_\theta + \\ &\left[\left(R\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right)Sin(\theta) + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}\, COs(\theta)\right]\vec{z} \end{aligned}$$

فصل دوم

سینتیک نقطه مادی

(KINETICS)

فهرست

قوانین نیوتن

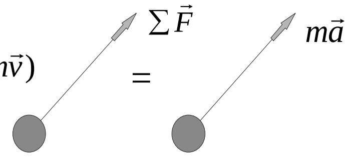
قانون اول نیوتن : اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر باشد , چنانچه ذره ساکن باشد حالت سکون خود را حفظ می کند و در غیر این صورت بدون تغییر جهت و با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد .

قانون دوم نیوتن : اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر نباشد , ذره شتابی متناسب با بزرگی برآیند و در راستای این نیروی برآیند خواهد داشت .

قانون اول : $\sum\vec{F} - m\vec{a} = 0$ $\qquad \Sigma\vec{F} = 0$

قانون دوم : $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ $\qquad \vec{F} = m\vec{a}\ ,\ \ \Sigma\vec{F} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})\ \ ,\ \ \Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

نیروی مؤثر یا نیروی اینرسی (شبه نیرو) : ma



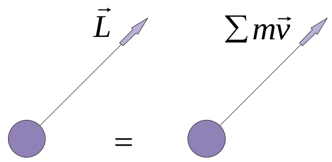
دیاگرام آزاد نیروها $\qquad$ دیاگرام سینتیک

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad\qquad \Sigma\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

.

ممنتوم خطی ،یا اندازه حرکت خطی (**Linear Momentum**):

بردار mv را اندازه حرکت خطی و یا به اختصار اندازه حرکت می گویند .



$$\boxed{\begin{aligned}\sum m\vec{v} &= \vec{L}\\ \sum\vec{F} &= \dot{\vec{L}}\end{aligned}}$$

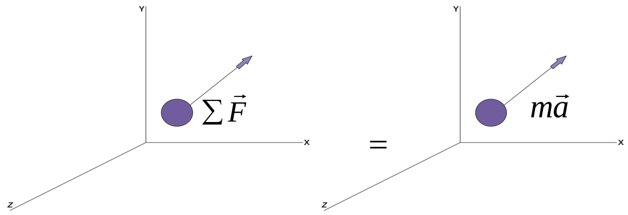
واحد ممنتوم:

$$SI:\quad kg\ \frac{m}{s} = \left(kg.\frac{m}{s^2}\right).s = N.s$$

$$FPS:\quad Ib.s$$

مختصات سه بعدی کارتزین

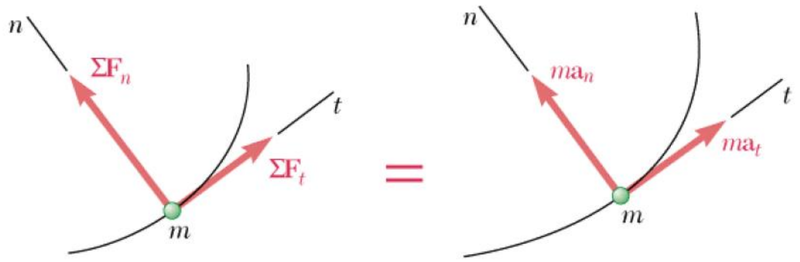
$$
\begin{aligned}
\uparrow + \sum F_x &= ma_x = m\ddot{x} \\
\rightarrow + \sum F_y &= ma_y = m\ddot{y} \\
\swarrow + \quad \sum F_z &= ma_z = m\ddot{z}
\end{aligned}
$$



مختصات مؤلفه های مماسی و عمودی

$$
+\uparrow \; \Sigma F_t = ma_t = m\left(\frac{dv}{dt}\right)
$$

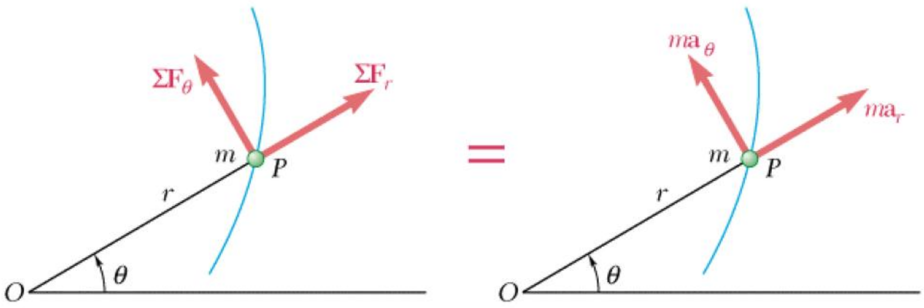
$$
+\leftarrow \; \Sigma F_n = ma_n = m\left(\frac{v^2}{\rho}\right)
$$



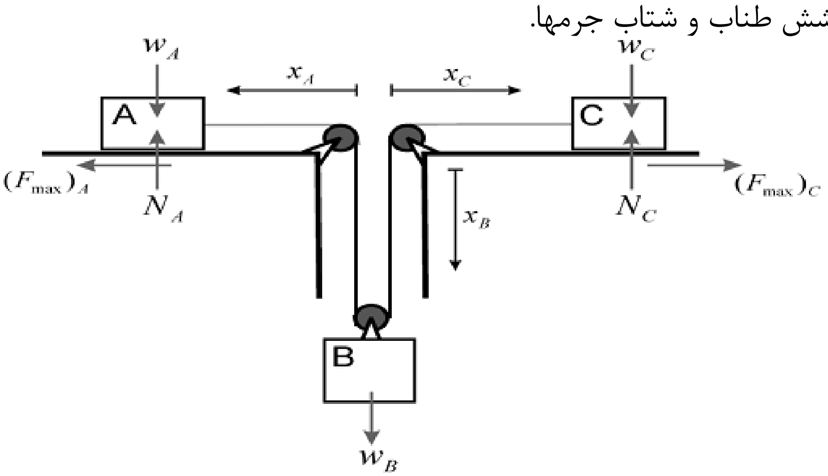
مختصات قطبی (مختصات مؤلفه های شعاعی و عرضی)

$$
+\rightarrow r \;\; \Sigma F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)
$$

$$
+\uparrow \; \Sigma F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})
$$



مثال 2-1 : سه وزنه به جرم های m_A=5 kg,m_B=10 kg, m_C=10 kg مطابق شکل زیر به هم متّصل می باشد. اگر ضریب اصطکاک بین وزنه های A,C و سطح μ_K=0.20 , μ_S=0.24 باشد.
مطلوبست وضعیت سیستم , مقدارکشش طناب و شتاب جرمها.

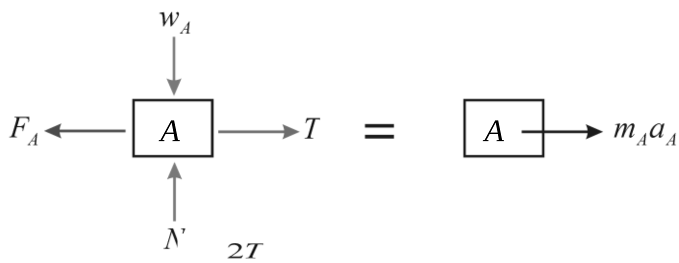


حل :

$F_{max}=\mu_S.N=(N_A + N_C)\mu_S$
$W_A=5\ g = N_A$
$W_C=10\ g=N_C$
$W_B=10\ g=N_B$
$F_{max} < W_B \rightarrow (5\ g + 10\ g)\ 0.24 < 10\ g = W_B \rightarrow (F_{max})_{c}+ (F_{max})_A=0.24(15\ g) < 10\ g = W_B$

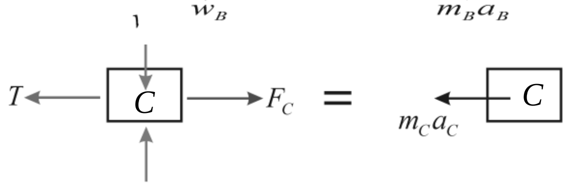
<u>پس وزنه ها حرکت می کنند.</u>

$$+\rightarrow \Sigma\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow T-F_A=m_A.a_A$$
$$\Rightarrow T-0.2(5g)=5a_A$$



$$+\downarrow \Sigma\vec{F}=m_B\vec{a}_B \Rightarrow W_B-2T=m_B a_B$$
$$\Rightarrow 10g-2T=10a_B$$

$$+\leftarrow \sum\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow T-F_C=m_c a_c$$
$$\Rightarrow T-0.2(10g)=10a_c$$



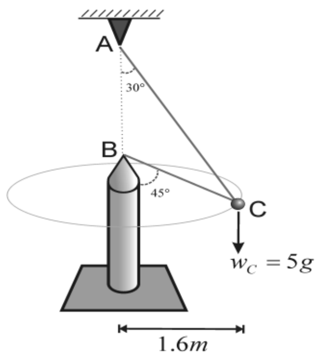
با فرض ثابت بودن طول طناب:

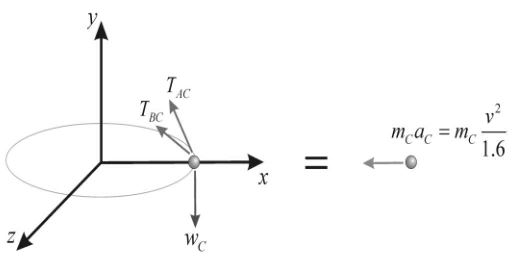
$$-x_A+2x_B-x_C=cte \Rightarrow -V_A+2V_B-V_C=0 \Rightarrow -a_A+2a_B-a_C=0 \Rightarrow a_B=1/2(a_A+a_C)$$

با استفاده از چهار معادله بالا داریم:

$$a_A=4.76\frac{m}{s^2}\rightarrow, a_B=3.08\frac{m}{s^2}\downarrow, a_C=1.4\frac{m}{s^2}\leftarrow, T=33.6N$$

مثال2-2 : اگر جسم C به جرم 5 kg با سرعت ثابت v در حال دوران حول میله قائم باشد ، مطلوبست حدود سرعت ثابت v که همواره دو کابل BC,AC در کشش باشند . (g=9.81 m/S^2)





حل :

$$V = cte \qquad \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{1.6}$$

$$\begin{cases} + \leftarrow \sum F_x = m_c a_c \;\Rightarrow\; T_{AC} Sin30^\circ + T_{BC} Sin45^\circ = \dfrac{5}{1.6} v^2 \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; T_{AC} Cos30^\circ + T_{BC}\cos 45^o - 5g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} T_{AC}\sin 30^\circ + T_{BC}\sin 45^\circ = \dfrac{5}{1.6} v^2 \\ T_{AC}\cos 30^\circ + T_{BC}\cos 45^\circ = 5g \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} T_{AC} = 0 \;\Rightarrow\; \tan 45^\circ = \dfrac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v = 3.96\, m/s \\ T_{BC} = 0 \;\Rightarrow\; \tan 30^\circ = \dfrac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v = 3.01 m/s \end{Bmatrix}$$

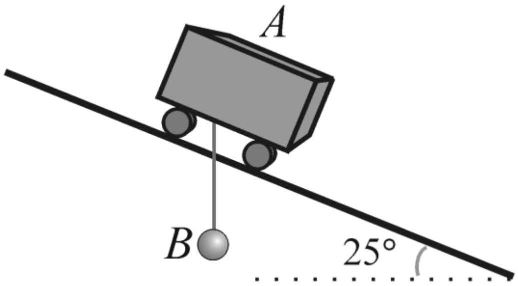
$$\Rightarrow m/s \;\; 3.01 < v < 3.96 \;\; m/s$$

حال اگر v کمتر یا بیشتر از بازه بالا باشد ، باید طناب با کشش منفی را حذف کرده و معادلات را از اول بنویسیم و داریم:

$$v = 4 \;\Rightarrow\; T_{AC} < 0$$
$$v = 3 \;\Rightarrow\; T_{BC} < 0$$

مثال2– 3 : اگر سیستم فوق از حالت سکون شروع به حرکت کند؛ شتاب جسم A وکشش در کابل در لحظه شروع حرکت به دست آورید.

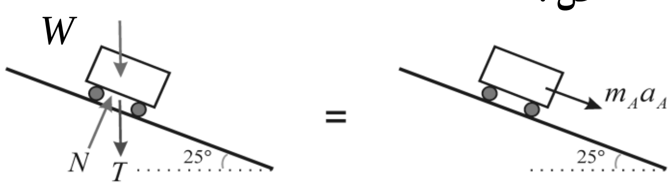
$$(\; m_A = 20\ kg, m_B = 15\ kg \;)$$



حل :

A: $+\searrow \sum F = m_A a_A$

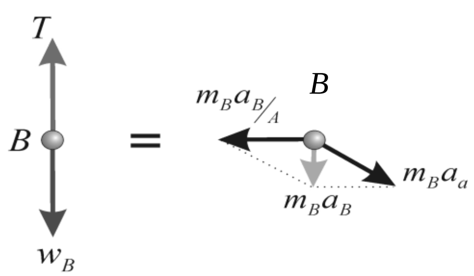
$\Rightarrow NCos90 + (W_A + T)\sin 25^\circ = 20 a_A$



چون در لحظه اول که A به سمت راست حرکت می کند ، B می خواهد به سمت چپ برود :

$$B: \begin{cases} + \leftarrow \sum F = ma \Rightarrow 0 = m_B a_{B/A} - m_B a_A \cos 25^\circ \\ + \downarrow \sum F = ma \Rightarrow W_B - T = m_B a_A \sin 25^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = 106.6 \quad N \\ a_A = 6.4 \quad m/s^2 \;\searrow \\ a_{B/A} = 5.8 \quad m/s^2 \leftarrow \end{cases}$$



اندازه حرکت زاویه ای (لنگر حرکتی یا ممنتوم زاویه ای) :

گشتاور بردار mv حول O را گشتاور اندازه حرکت , یا اندازه حرکت زاویه ای ذره , حول نقطه O در آن لحظه می نامند .

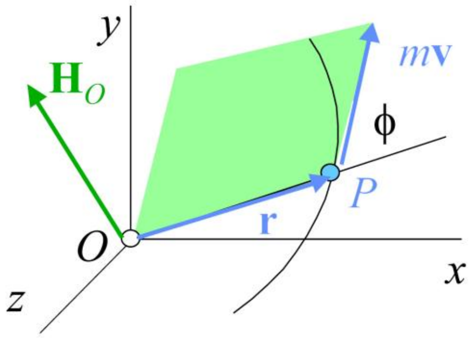
$\vec{L} = m\vec{v}$

$\vec{r} =$ موقعیت جرم

$\vec{H}_\circ = \vec{r} \times \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$　　　ممنتوم زاویه ای

$H_\circ = r(mv)\sin\varphi$

$\vec{H}_\circ \perp (\vec{r}, m\vec{v})$



واحد ممنتوم زاویه ای :

$$\boxed{\begin{array}{ll} SI: & kg\dfrac{m^2}{s} \\ FPS: & Ib.ft.s \end{array}}$$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$　　　$m\vec{V} = m(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$

$$\vec{H}_\circ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \times m \Rightarrow \vec{H}_\circ = m(yv_z - zv_y)\,\vec{i} + m(zv_x - xv_z)\vec{j} + m(xv_y - yv_x)\,\vec{k}$$

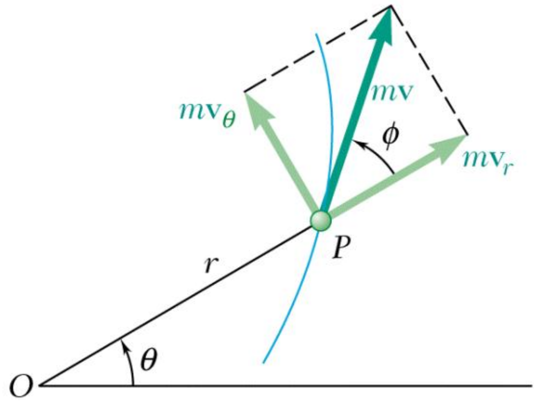
$$\vec{H}_\circ = H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k} \qquad \dot{\vec{H}}_\circ = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = 0 + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \sum \vec{M}_\circ$$

اگر حرکت در صفحه xy باشد؛ داریم :

$\vec{H}_\circ = H_{\circ Z}\vec{k}$

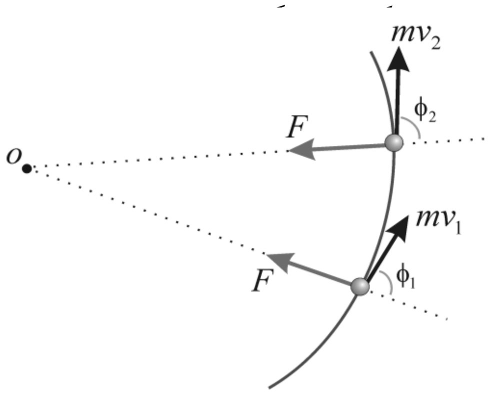
$\vec{H}_\circ = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow H_\circ = rmv\sin\varphi$

$$\left.\begin{array}{l} H_\circ = rmv_\theta \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{H_\circ = mr^2\dot{\theta}}$$



حرکت تحت اثر نیروی مرکزی(Central Force):

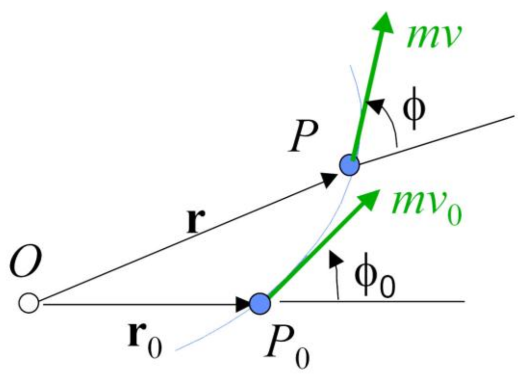
اگر نیروئی به ذره ای وارد گردد که همواره در حین حرکت , ذره به سمت یک نقطه خاص و یا در خـلاف جهت آن در حرکت باشد ، به آن حرکت , حرکت تحت اث



حفظ ممنتوم زاویه ای یا بقای ممنتوم زاویه ای :

$$\sum \overrightarrow{M_\circ} = \dot{\overrightarrow{H_\circ}} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{H_\circ}\right)_1 = \left(\overrightarrow{H_\circ}\right)_2$$

$$r_1 m v_1 \sin\varphi_1 = r_2 m v_2 \sin\varphi_2$$

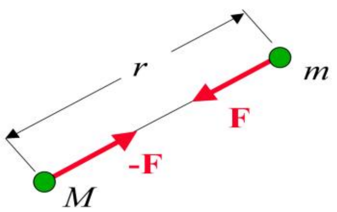


حالات خاص

- ✓ حفظ ممنتوم : $\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow \quad if \quad \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$
- ✓ حفظ ممنتوم زاویه ای : $\sum \vec{M}_\circ = \dot{\vec{H}}_\circ \Rightarrow \quad if \quad \sum \vec{M}_\circ = 0 \Rightarrow \dot{\vec{H}}_\circ = 0 \Rightarrow \left(\vec{H}_\circ\right)_1 = \left(\vec{H}_\circ\right)_2$

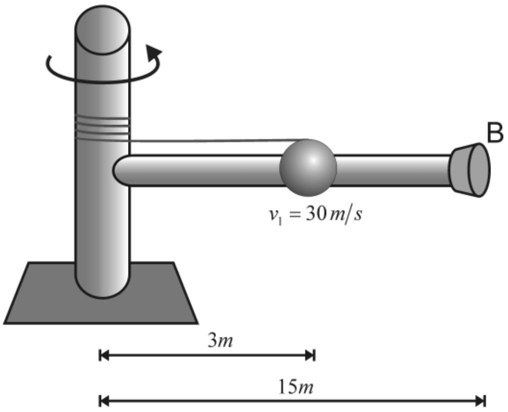
قانون گرانش نیوتون :

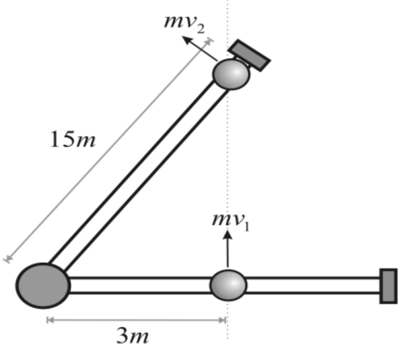
دو ذره به جرمهای m و M که به فاصله r از هم قرار دارند , یکدیگر را با نیروهای برابر و مخالف F و F– که در راستای خط واصل این دو ذره هستند , جذب می کنند .



$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

مثال2– 4 : اگر جرم گلوله 4 kg و از جرم میله صرف نظر شود، سرعت گلوله به هنگام رسیدن به نقطه B پس از قطع کردن کابل را محاسبه کنید.





حل :

$$\sum \vec{M}_\circ = \dot{\vec{H}}_\circ = 0 \Rightarrow \left(\vec{H}_\circ\right)_1 = \left(\vec{H}_\circ\right)_2 \Rightarrow 3\times\left(mv_1\right) = 15\times\left(mv_2\right) \Rightarrow 3\times 30 = 15\times v_2 \Rightarrow v_2 = 6 \quad m/s$$

فصل سوم

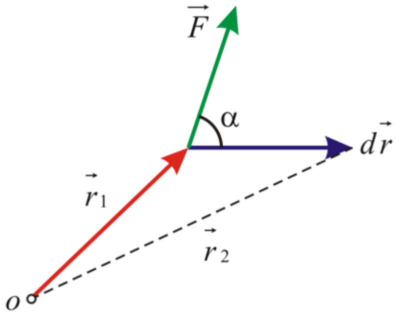
سینتیک نقطه مادی

(روش های انرژی و ممنتوم)

فهرست

کارِ نیرو :

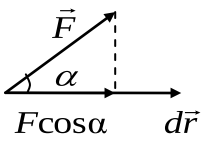
بردار dr را جابجایی ذره می گویند . حالا فرض می کنیم که یک نیروی F بر این ذره وارد می شود . کار نیروی F متناظر با جابجایی dr با کمیت زیر تعریف می شود .



$$dU = \vec{F}.d\vec{r} = |\vec{F}|\cos\alpha \, dr$$: کار محدود انجام شده

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$



$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

	SI	FPS
واحدکار	(ژول) $N.m\ (J)$	$ft.lb$
واحد لنگر	$N.m$	$lb\text{-}ft$

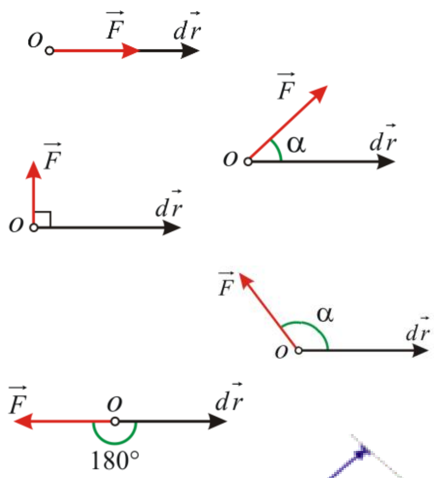
1) $dU = F.dr > 0$ $\qquad \alpha = 0$

2) $dU = F\,dr\cos\alpha > 0$ $\qquad 0 < \alpha < 90$

3) $dU = 0$ $\qquad \alpha = 90$

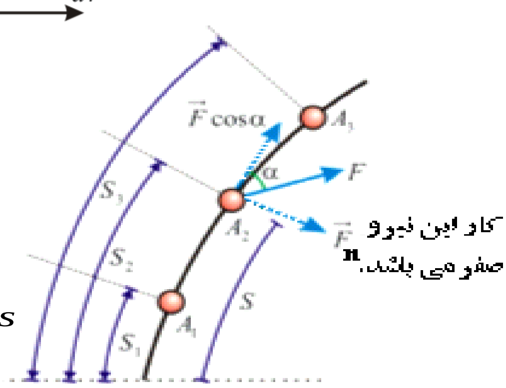
4) $dU = F\,dr\cos\alpha < 0$ $\qquad 90 < \alpha < 180$

5) $dU = -F.dr < 0$ $\qquad \alpha = 180$



$$U_{1\to3} = \int_{A_1}^{A_3} (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

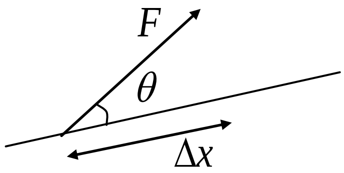
$$U_{1\to3} = \int_{A_1}^{A_3} dU = \int_{A_1}^{A_3} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{S_1}^{S_3} F\cos\alpha\, ds = \int_{S_1}^{S_3} \vec{F}_t.ds$$



کار یک نیروی ثابت :

وقتی بر ذره ای که روی خط راست حرکت می کند و نیروی F با مقدار و راستای ثابت وارد می شود , کار آن از فرمول زیر محاسبه می گردد :

$$U_{1\to 2}=\int dU=F(\Delta x)\cos\theta$$



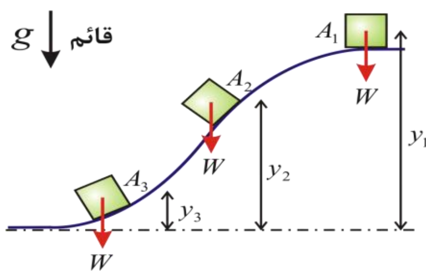
کار نیروی گرانی :

کار نیروی وزن W یک جسم یعنی نیروی گرانی وارد بر آن با قرار دادن مؤلفه های w در معادلات زیر بدست می آید. با انتخاب محور y به سمت بالا داریم :

$$F_x=0\quad , \quad F_z=0\quad , \quad F_y=cte$$

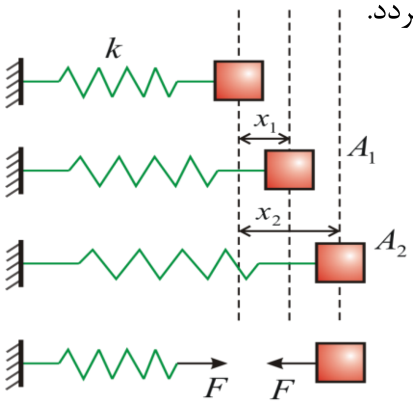
$$U_{1\to 2}=\int_{y_1}^{y_2}(F_x dx+F_y dy+F_z\ dz)\quad\Rightarrow$$

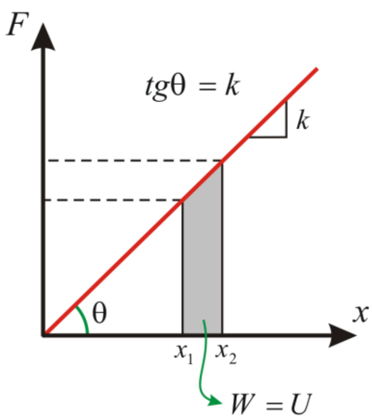
$$U_{1\to 2}=-W\Delta y=-W(y_2-y_1)=\int_{y_1}^{y_2}F_y dy$$



کار نیروی فنر :

فرض می کنیم وقتی جسم A در نقطه اولیه قرار دارد کشیده نشده است. شواهد تجربی نشان می دهد که مقدار نیروی F وارد از فنر بر جسم با فرمول های زیر محاسبه می گردد.





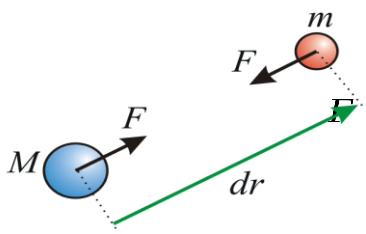
$$,\qquad dU=-F\,dx\ \ F=kx$$

$$U_{1\to 2}=\int_{A_1}^{A_2}dU=\int_{x_1}^{x_2}-(kx)\,dx=\left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2\Rightarrow\left(U_{1\to 2}\right)_e=-\frac{1}{2}(F_1+F_2)\Delta x$$

✓ در حالت بازگشت به حالت اولیه کار نیروی فنر مثبت است.

نیروی گرانش :

دو ذره به جرمهای m و M که به فاصله r از هم قرار دارند , یکدیگر را با نیروهای برابر و مخالف F و F– که در راستای خط واصل این دو ذره هستند , جذب می کنند .



$$F = G\frac{mM}{r^2} \quad , \quad G = 66.7\times10^{-12}\left(\frac{m^3}{kg.s^2}\right)$$

کار نیروی گرانش :

کار نیروی F وارد بر ذره m در طول یک جابجایی بینهایت کوچک ذره از A_1 تا A_2 را می توان از ضرب مقدار نیروی F در مؤلفه شعاعی dr جابجایی بدست آورد . از آنجا که F به طرف نقطه O است کار منفی است.

$$U_{1\to2} = \int dU = \int_{r_1}^{r_2} F\,dr \quad \Rightarrow \quad U_{1\to2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$

انرژی جنبشی و اصل کار و انرژی :

برای بدست آوردن انرژی جنبشی ذره در A_2 می توان کار انجام شده در طول جابجایی ذره از A_1 تا A_2 در نتیجه وارد شدن نیروی F به آن را به انرژی جنبشی ذره در A_1 افزود.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

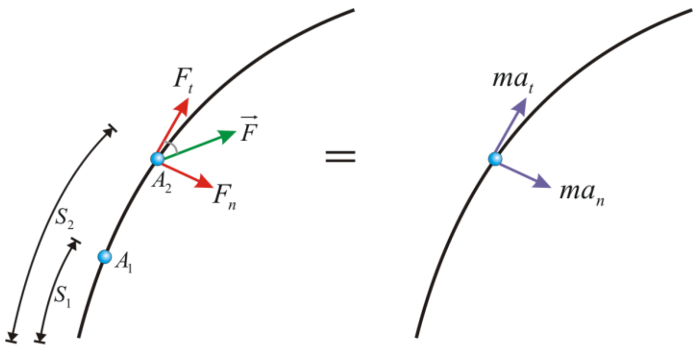
$$F_t = ma_t \Rightarrow F_t = m\frac{dv}{dt} = m\left(\frac{dv}{ds}\right)\times\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$F_t\,ds = mv\,dv \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

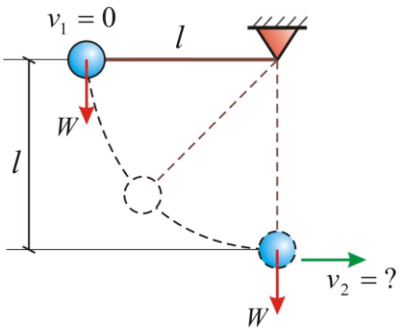
$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} \quad , T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$K = T = \frac{1}{2}mv^2$$ انرژی جنبشی



مثال3– 1 : در شکل، اگر گلوله از وضعیت 1 رهاشده باشد، سرعت آنرا در وضعیت 2 بیابید.

حل: (توجه : کار نیروی کششی صفر است زیرا همیشه عمود بر مسیر حرکت است.)



$$\left.\begin{array}{l} T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \\ T_1 = 0, T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 \\ (U_{1\to 2})_g = mgl \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + mgl = \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gl}$$

قدرت یا توان – راندمان یا بازده

توان : آهنگ زمانی انجام کار است .

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\sum(\vec{F}.d\vec{r})}{dt} = \sum \vec{F}.\vec{v}$$

قدرت $P = \sum(\vec{F}.\vec{v})$

	SI	FPS
واحد توان	Watt=N.m/s =J/s	lb.ft/s

➢ $\boxed{550 \text{ lb.ft/s} = 1\text{HP}}$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \ , \ \frac{dT}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = (ma)v = Fv = p \Rightarrow \qquad P = \frac{dT}{dt} = F.v \quad \text{قدرت}$$

$$P = \frac{dT}{dt} \ , \quad U_{1\to 2} = T_2 - T_1 \ , \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

$$\text{متوسط توان} = \overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \ , \quad \overline{P} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} Pdt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{dT}{dt}.dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} dT = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$$

راندمان : نسبت کار گرفته شده به کار داده شده برابر با نسبت آهنگ انجام کار گرفته شده به آهنگ کار داده شده است.

راندمان مکانیکی $\quad , \quad \eta_m = \frac{P_{out}}{P_{in}} < 1 \quad \overline{P} = \frac{U_{1\to 2}}{\Delta t}$

$$\eta = \eta_e.\eta_m.\eta_{th} < 1$$

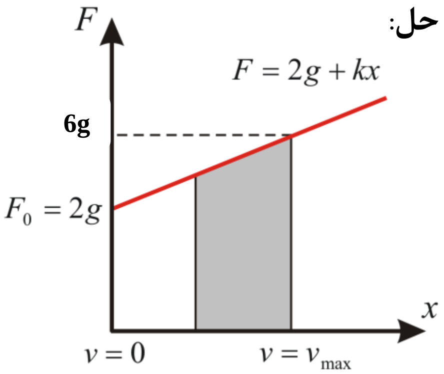
(η_e= راندمان الکتریکی) , (η_{th} = راندمان حرارتی)

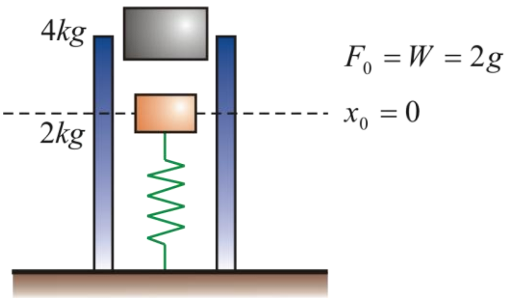
مثال3-2: اگر بلوک 4 kg را روی بلوک 2 kg قرار دهیم، تناوب آغاز می گردد ؛

مطلوبست : (K=400 N/m)

الف) حداکثر سرعت بلوک 4 kg ؟   ب) حداکثر نیروی فشاری در فنر ؟

حل:





الف)

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

$$T_1 = 0 \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\left.\begin{array}{l} U_{1\to2} = (U_{1\to2})_g + (U_{1\to2})_e \\ (U_{1\to2})_e = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)x = -2gx - 200x^2 \\ (U_{1\to2})_g = 6gx \end{array}\right\} \Rightarrow U_{1\to2} = 4gx - 200x^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{d(U_{1\to2})}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.098(m) \ , \quad v_{max} = 0.8(m/s)$$

ب)حداکثر نیروی فشاری زمانی رخ می دهد که سرعت صفر می شود (در جایی که تعادل استاتیکی داریم : ($v = 0$

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

$$\frac{1}{2} m v_{max}{}^2 = mgh_{max} \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{1}{2g} v_{max}{}^2 \quad \Rightarrow \quad T_{max} = k.h_{max}$$

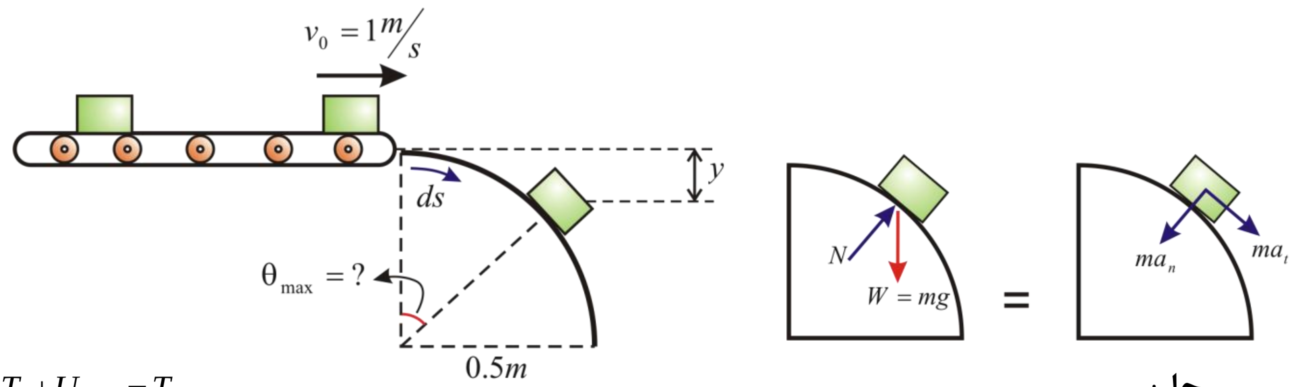
$$v_2 = 0$$

$$4(9.81)x - 200x^2 = 0$$

$$x = 0.196(m)$$

$$F_{max} = 2(9.81) + 400(0.196) = 98.1(N)$$

مثال3-3: بسته های 2 kg توسط یک تسمه نقاله به روی یک رمپ دایره ای شکل با سرعت 1 m/s می افتند. مطلوبست، حداکثر زاویه ای که این بسته ها از سطح جدا می شوند؟



حل:

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_0^{\,2} = \frac{1}{2}(2)(1)^2 = 1J$$

$$U_{1\to2} = W.y = mgr(1-\cos\theta_{max}) = g(1-Cos\theta_{max}\quad) \quad , \quad T_2 = v^2$$

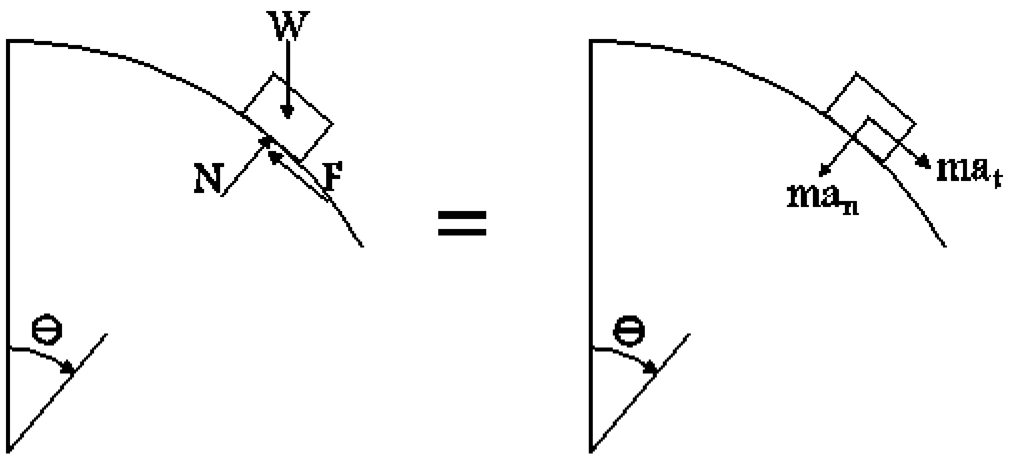
$$\Rightarrow\ 1 + mgr(1-\cos\theta_{max}) = v^2 \ \Rightarrow\ 1+(1-Cos\theta_{max})g = v^2 \qquad I$$

$$\Rightarrow -mgCos\theta_{max} = -m\frac{v^2}{0.5} \qquad II$$

هنگام جداشدن: $+n \nearrow \ :\ \ \text{N=0} \ \Rightarrow N - W\cos\theta_{max} = -ma_n$

$$I, II \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{2v^2}{g} \ \Rightarrow \theta_{max} = 42.7^\circ$$

مثال3- 4 : بسته ای باجرم m توسط یک تسمه نقاله به روی رمپ دایره ای می افتد (همانند مثال قبل) که دارای *اصطکاک* می باشد. مطلوبست، حداکثرزاویه ای که این بسته ازسطح جدا می شود؟



حل:

$$\begin{cases} -N + WCos(\theta) = ma_n \\ -\mu N + WSin(\theta) = ma_t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} N = WCos(\theta) - m v^2 / r \\ -\mu(WCos(\theta) - m v^2 / r) + WSin(\theta) = ma_t \end{matrix}$$

$$-\mu(gCos(\theta) - v^2 / r) + gSin(\theta) = a_t$$

$$g(Sin(\theta) - \mu Cos(\theta)) + \mu v^2 / r = a_t$$

$$\begin{cases} if: v^2 = u \Rightarrow 2v.dv = du \\ also: a_t ds = v.dv \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2a_t ds = du \Rightarrow a_t = 1/2(du/ds) \\ ds = rd\theta \Rightarrow a_t = 1/2r(du/d\theta) \end{matrix}$$

$$g(Sin(\theta) - \mu Cos(\theta)) + \mu.u / r = 1/2r(du/d\theta)$$

$$2gr(Sin(\theta) - \mu Cos(\theta)) + 2\mu.u = du/d\theta$$

For small angles :approximations made: $Sin(\theta) \approx \theta$ & $Cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$

$$2gr(\theta - \mu(1 - \theta^2/2)) + 2\mu.u = du/d\theta$$

$$2gr\left[\theta + \mu\theta^2/2 - \mu\right] + 2\mu.u = du/d\theta \Rightarrow du/d\theta - 2\mu u = 2gr\left[\theta + \mu\theta^2/2 - \mu\right]$$

$$@\,\theta = 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow u = v^2 = 1$$

$$@\,\theta = \theta_{max} \Rightarrow N = 0 \Rightarrow u = v^2 = rgCos(\theta)$$

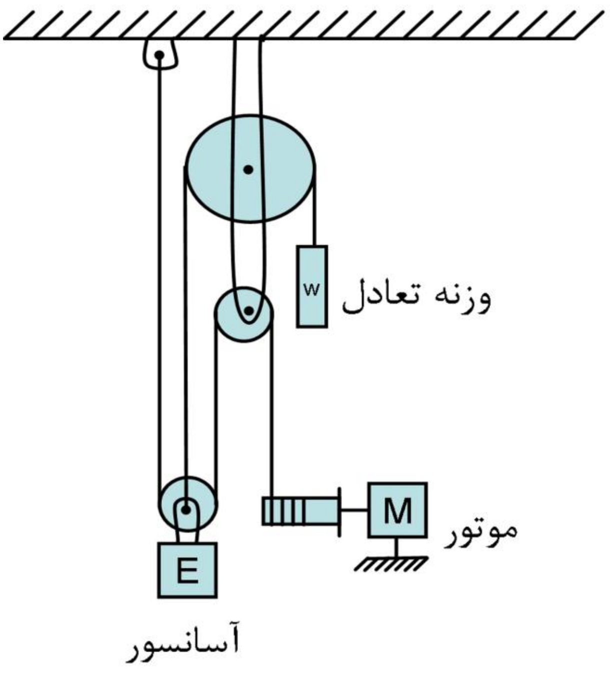
مثال3- 5 : در شکل زیر مطلوب است توان موتورسیستم بالابر در صورتی که :

الف : اگر آسانسور با سرعت ثابت15 ft/s به سمت بالا در حرکت باشد .

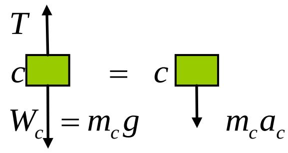
ب : اگر آسانسور با سرعت 15 ft/s و شتاب ثابت $3\ ft/s^2$ به سمت بالا در حرکت باشد .

($W_c = 2200\,lb, W_E = 5000\,lb$,$g=32.2\ ft/s^2$)

$$P = \sum \vec{F}.\vec{v} \Rightarrow P = F.v$$

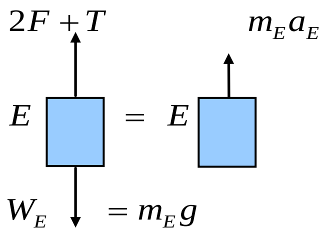


حل: الف:



$$m_c g - T = m_c a_c$$

$$2200 - T = \frac{2200}{g} a_c$$



$$2F + T - m_E g = m_E a_E$$

$$2F + T - 5000 = \frac{5000}{g} a_E$$

$$v_E = cte,\ a_E = 0 \ \Rightarrow a_c = 0$$

$$\begin{cases} 2200 - T = 0 \ \Rightarrow T = 2200\,(lb) \\ 2F + T - 5000 = 0 \Rightarrow F = 1400\,(lb) \end{cases}$$

طول کابل متصل به وزنه تعادل ثابت است : $\uparrow a_E = a_c \downarrow$

طول کابل تا نقطه M نیز ثابت است : $2X_E + X_m = cte. \Rightarrow \ 2v_E \uparrow = v_m \downarrow \Rightarrow v_m = 30\frac{ft}{s}$

$$P_m = (1400)(30) = 42000(lb \cdot \frac{ft}{s}) \ \Rightarrow \ P_m = \frac{42000}{550} = 76.4\,(HP)$$

ب :

با توجه به قسمت الف داریم : $v_E = 15(\frac{ft}{s}) \uparrow, a_E = 3(\frac{ft}{s^2}) \uparrow \Rightarrow a_c = 3(\frac{ft}{s^2}) \downarrow$

$$F = 1735.4\,(Ib)$$

$$v_m = 30\,(\frac{ft}{s}) \downarrow,\ P_m = (1735.4)(30) = 52062\,(Ib\,\frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{1735.4 \times 30}{550} = 94.7(HP)$$

اصل حفظ انرژی(مکانیکی) :

نیروهای ما به دو صورت قابل تقسیم بندی هستند : ***نیروهای پایستار*** و ***غیر پایستار(نا پایستار)*** .

شرط استفاده از اصل حفظ انرژی آن است که نیروهای ما پایستار و یا محافظه کار باشند. (Conservative Force)

1:کار نیروهای غیرپایستار به مسیرحرکت بستگی دارد. (غیر پایستار)

$$U_{friction} = \int \vec{F}_k . d\vec{r}$$

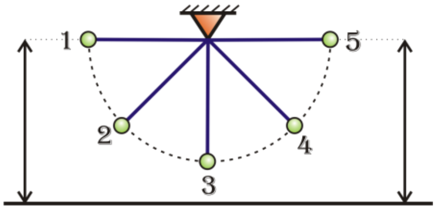
2:کار نیروهای پایستار به مسیرحرکت بستگی ندارد و فقط کار متناسب با جابجایی است. (پایستار)

$$U_{وزن} = \int \vec{W} . d\vec{r} = -\Delta y W$$

انرژی پتانسیل :

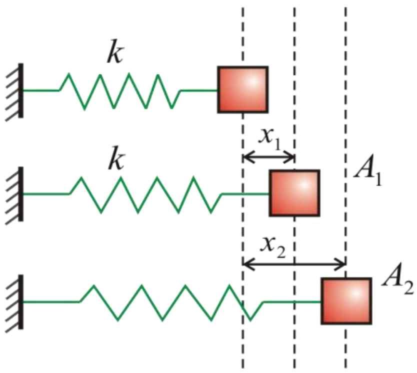
انرژی پتانسیل نیروی وزنی:

$$U_{1\to 2} = -\Delta y W = Wy_1 - Wy_2$$
$$V_g = Wy$$



انرژی پتانسیل نیروی فنر:

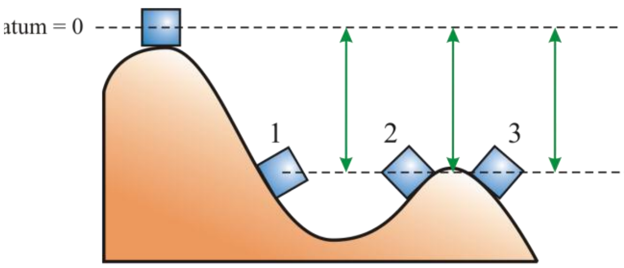
$$U_{1\to 2} = \frac{1}{2}k{x_1}^2 - \frac{1}{2}k{x_2}^2$$
$$V_e = \frac{1}{2}kx^2$$
$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2$$
$$V_1 = V_{g_1} + V_{e_1} \ , V_2 = V_{g_2} + V_{e_2}$$



اصل حفظ انرژی مکانیکی :

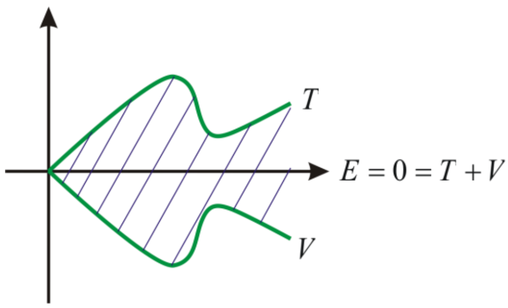
$$\left.\begin{array}{l} T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \\ T_1 + V_1 - V_2 = T \end{array}\right\} \Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_n \quad , \qquad E = T + V$$

$$V = cte. \Rightarrow V_1 = V_2 = V_3$$



اگر انرژی مکانیکی ثابت و برابر صفر باشد، آنگاه E روی محور y = 0 در نظر می گیریم و T قرینه ی V می شود، زیرا:

$$\boxed{T + V = 0}$$

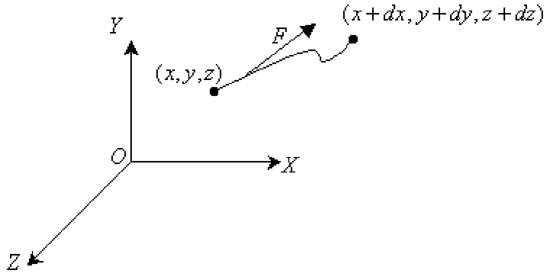


تابع پتانسیل :

$$V = V_g + V_e$$

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 = -\Delta V \quad , \quad U = V(x,y,z)$$

$$dU = V(x,y,z) - V(x+dx, y+dy, z+dz)$$
$$dU = -dV(x,y,z) = -dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{dU = -dV}$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$
$$dU = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$
$$dU = -dV = -[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz]$$



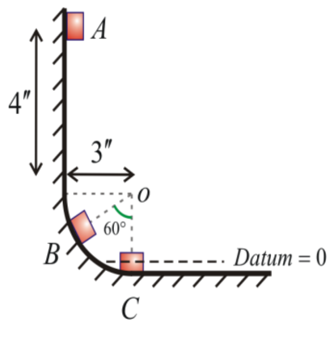
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -F_x \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -F_y \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -F_z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -grad\,\vec{V} \;,\; \vec{F} = -\nabla\vec{V}}$$

توجه: هرگاه $\vec{F} = -\nabla\vec{V}$ شود, می توانیم از اصل حفظ انرژی مکانیکی استفاده کنیم .

برای نیروهای وزنی: $V = Wy \;, \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = W \;\;, \vec{F} = -\vec{W}$

مثال3- 6 : اگر جسم از نقطه A رها شود، مطلوب است :

نیروی وارده از سطح به جسم در نقاط B و C ؟ (W=1.25 lb)



حل:

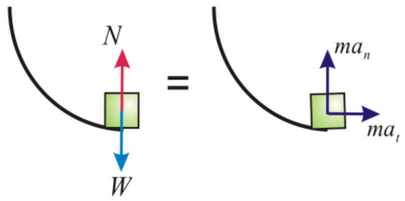
$$\begin{cases} N_B - W\cos 60 = ma_n = m\dfrac{v_B^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad N_B - 1.25(0.5) = \dfrac{1.25}{32.2}(\dfrac{v_B^2}{3}) \\ N_C - W = ma_n = m\dfrac{v_C^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad N_C - 1.25 = \dfrac{1.25}{32.2}(\dfrac{v_C^2}{3}) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_B^2+3(.5)(1.25)=\frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_C^2=7(1.25)$$

$$E_A=E_B=E_C \quad \Rightarrow \quad T_A+V_A=T_B+V_B=T_C+V_C$$

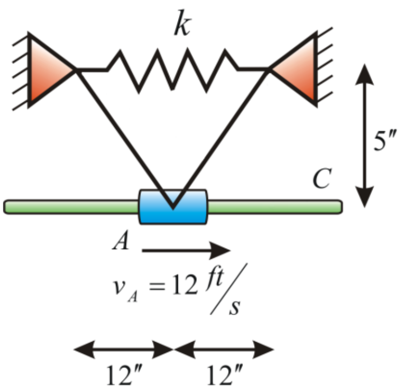
$$E_A=T_A+V_A=0+7W=7(1.25) \quad , \quad E_B=T_B+V_B=\frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_B^2+3(0.5)(1.25) \quad , \quad E_C=\frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_C^2+0$$

$$v_B^2=11g \Rightarrow N_B=5.21(lb)$$
$$v_C^2=14g \Rightarrow N_C=7.08(lb)$$

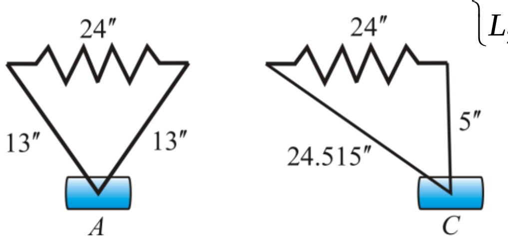
C :


مثال3- 7: مطلوبست نیروی کششی فنر در موقعیت اولیه ی A اگر سرعت در نقطه ی A برابر 12 ft/s و سرعت طوقه در نقطه ی C برابر 8 ft/s باشد.

($g=32.2\frac{ft}{s^2}=32.2\times12\frac{in}{s^2}$ وW=2 lb , K=3 lb/in)



حل :



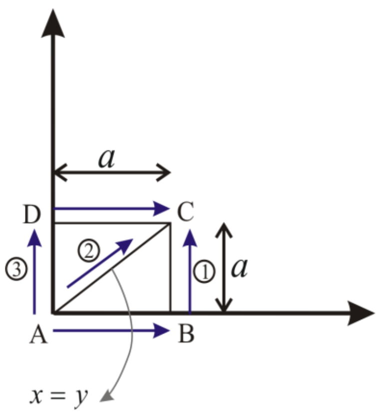
$$\begin{cases} L_1=26+24=50 \quad \Rightarrow \quad x_1=50-L \\ L_2=53.5'' \Rightarrow x_2=53.5-L \end{cases} \Rightarrow \quad x_2-x_1=3.5''$$

$$E_A=E_C \quad \Rightarrow \quad T_A+V_A=T_C+V_C$$

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{g})(144\times12)+1.5x_1^2=\frac{1}{2}(\frac{2}{g})(64\times12)+1.5x_2^2$$

$$x_1=1.08(in) \quad , \quad F_1=3.24(Ib)$$

مثال3- 8 : اگر $\vec{F}=x^2y\,\vec{i}+xy^2\,\vec{j}$ روی ذره P درصفحه x-y اثر کند، ثابت کنید که نیروی $\vec{F}$ نیروی غیر محافظه کار است و همچنین کار نیروی F روی ذرهP را که از نقطه A به نقطه ی C حرکت می کند حساب کنید .



حل:

$$\vec{F} = -grad\vec{V}$$
$$\vec{F}_X = -\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 y \qquad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = y^2 \end{cases} , x^2 \neq y^2$$
$$\vec{F}_Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = y^2 x$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

پس نیروی F نیروی غیر محافظه کار است.

$$\oint F.dr = 0 \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \dots$$

$$U_{A\to C} = \int_A^C \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^C F_x\,dx + F_y\,dy = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^a F_y\,dy = \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{2}$$

روش دیگر :

$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C}$$

$$U_{A\to B} = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^0 F_y\,dy = 0$$

$$U_{B\to C} = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^a F_y\,dy = a(\frac{y^3}{3})\Big|_0^a = \frac{a^4}{3}$$

با فرض اینکه پایستار باشد مسیر حرکت تفاوتی ندارد :

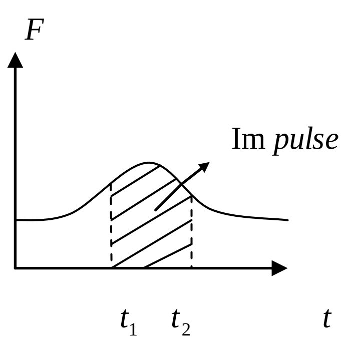
$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C} \Rightarrow \frac{a^4}{2} = 0 + \frac{a^4}{3} \Rightarrow \text{غ‌ق‌ق}$$

پس نیروی ما ناپایستار است.

اصل نیروی محرک و ممنتوم و حرکت خطی (Impulse & Momentum)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \vec{F}dt = md\vec{v} \quad \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$m\vec{v}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt + m\vec{v}_1$$

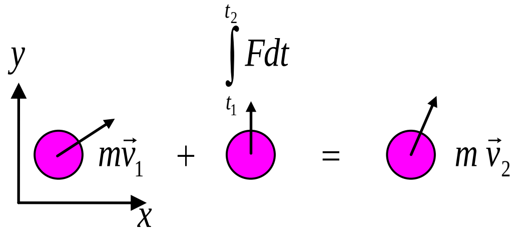


$$\vec{I}_{imp_{1\to 2}} = (\int_{t_1}^{t_2} F_x dt)\vec{i} + (\int_{t_1}^{t_2} F_y dt)\vec{j} + (\int_{t_1}^{t_2} F_z dt)\vec{k}$$

اصل ایمپالس و ممنتوم:

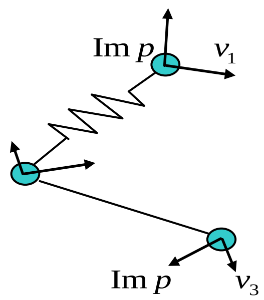
$$\boxed{\vec{L}_2 = \vec{I}_{imp_{1\to 2}} + \vec{L}_1}$$

واحد ایمپالس: **N.s :(SI)** **lb.s : (FPS)**



$$\begin{cases} mv_{2_x} = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt + mv_{1x} & \overset{+}{\rightarrow} \\ mv_{2_y} = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt + mv_{1y} & \overset{+}{\uparrow} \end{cases}$$

چندین جرم :



$$\operatorname{Im} p_{1\to 2} = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 dt$$

$$\vec{L}_2 = \sum m_i \vec{v}_{i_2}$$
$$\vec{L}_1 = \sum m_i \vec{v}_{i_1}$$

Imp v2

$$\Rightarrow \quad \sum m_i \vec{v}_{i1} + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = \sum m_i \vec{v}_{i2}$$

حفظ ممنتوم سیستم

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum m_i \vec{v}_{i_1} = \sum m_i \vec{v}_{i_2}$$

انواع مسائل برخورد

1- مسائل ضربه ای ($\Delta t \approx 0.01s$)

درمسائل ضربه ای از اثر وزن اصطکاک و نیروی فنر صرفه نظر می گردد:

$$t = dt \cong 0 \quad \Rightarrow \quad \int wdt \approx 0 \quad , \quad \int F_e dt \approx 0 \quad , \quad \int F_\mu dt \approx 0$$

ایمپالس وزن ایمپالس فنر ایمپالس اصطکاک

2- مسائل غیر ضربه ای

در مسائل غیر ضربه ای داریم :

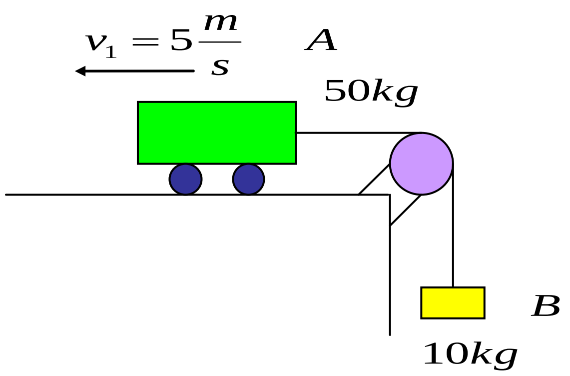
$$\Delta t > 0 \quad \Rightarrow \quad \int wdt \neq 0 \quad , \quad \int F_e dt \neq 0 \quad , \quad \int F_\mu dt \neq 0$$

مثال3- 9 :اگر از اصطکاک صرفنظر شده باشد, مطلوب است مدت زمانی که A به سرعت :

الف: صفر می رسد ؟

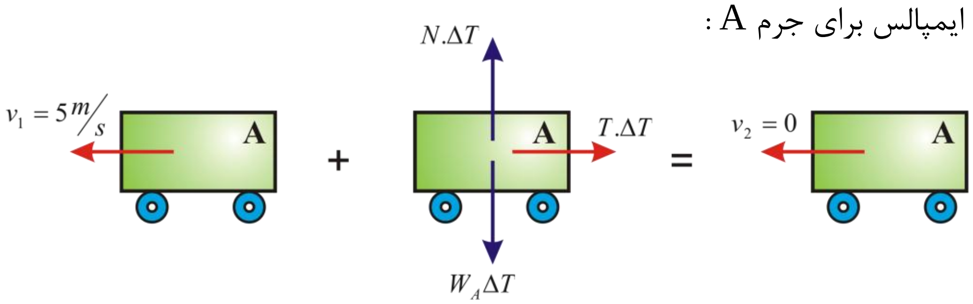
ب: 5m/s به طرف راست می رسد ؟

(از اصطکاک صرفنظر شده است.)

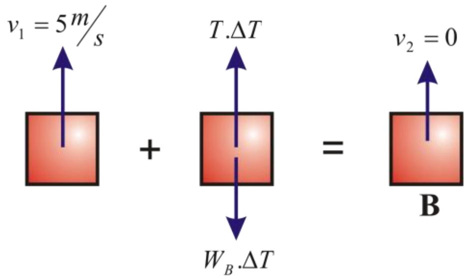


حل:

الف : اصل ایمپالس برای جرم A :

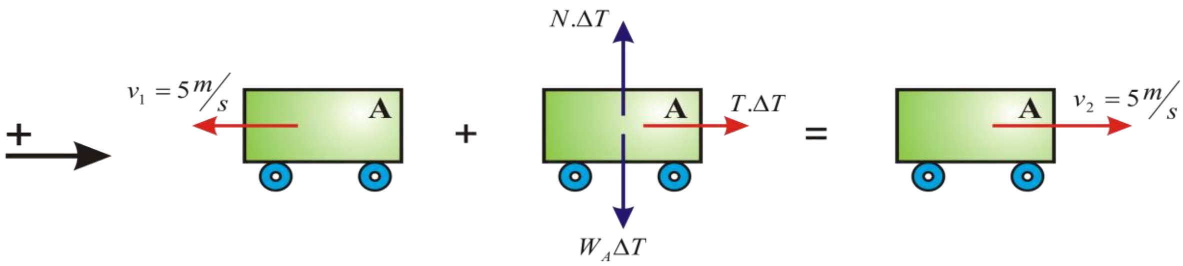


اصل ایمپالس برای جرم B :

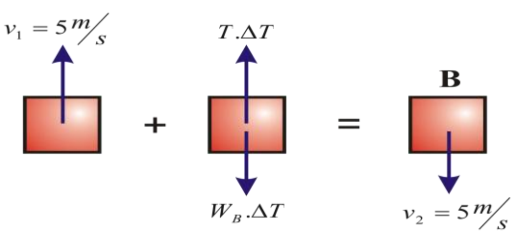


$$\left.\begin{array}{ll} 1. & -250 + T\Delta t = 0 \\ 2. & 50 + (T - 98.1)\Delta t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{30}{g}$$

ب: اصل ایمپالس برای جرم A :



اصل ایمپالس برای جرم B :

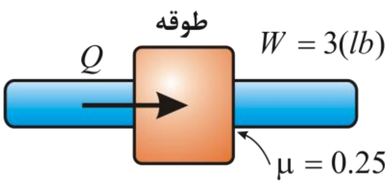


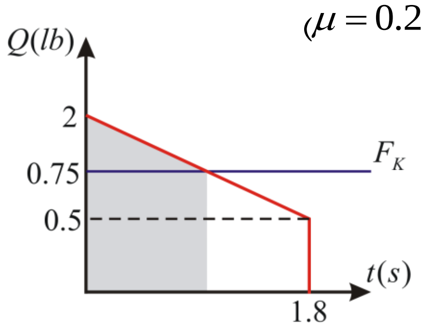
$$\left.\begin{array}{ll} 1. & -250+T\Delta t=250 \\ 2. & 50+(T-98.1)\Delta t=-50 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t=\frac{60}{g}$$

مثال 3- 10 : مطلوبست سرعت طوقه اگر از حال سکون رها شده باشد در:

الف) t=1s ب) t=2 s ج) حداکثر سرعت طوقه

(W=3 lb و $\mu=0.25$)





حل:

$$\vec{L}_2=\vec{I}_{mp_{1\to2}}+\vec{L}_1 \quad , \quad \vec{L}_1=mv_1=0 \quad , \quad I_{mp}=\int_0^t Qdt-\int_0^t F_k dt$$

الف: t=1

$$0+I_{mp_{1\to2}}=\frac{3}{g}v \quad , \quad \int_0^1 Qdt=\frac{1}{2}(2+1.167)=1.58(Ib*s) \quad , \quad \int_0^1 F_k dt=0.75(1)=0.75(Ib*s)$$

$$\Rightarrow \ v=8.94(ft/s)$$

ب: t=2

$$0+I_{mp_{1\to2}}=\frac{3}{g}v \quad , \quad \int_0^2 Qdt=\frac{1}{2}(2+0.5)(1.8)=2.25(Ib*s) \quad , \quad \int_0^2 F_k dt=0.75(2)=1.5(Ib*s)$$

$$\Rightarrow \ v=8.05(ft/s)$$

برای وقتی که v=0 است، ?=t

$$2.25-0.75t=0 \quad , \quad t=3(s)$$

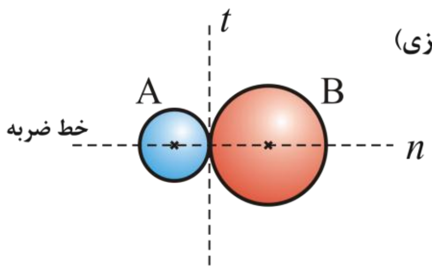
در ثانیه سوم، متحرک از حرکت باز می ایستد و زمانی سرعت ماکزیمم می شود که $\int_0^t Fdt$ و $\int_0^t Qdt$ بیشترین اختلاف را داشته باشند, یعنی *در محل تلاقی دو نمودار* با هم در t=1.5 s.

$$v_{max}=\frac{1}{2}(2-0.75)(1.5)/(\frac{3}{32.2})=10.06\frac{ft}{s}$$

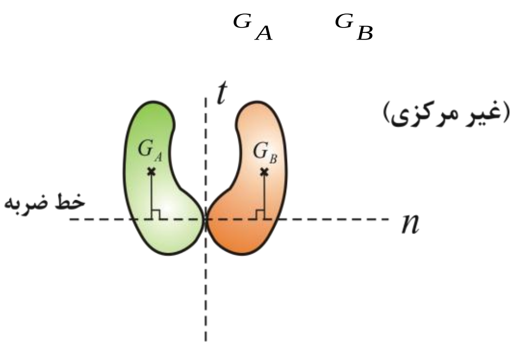
برخورد(ضربه) Impact

(مرکزی)

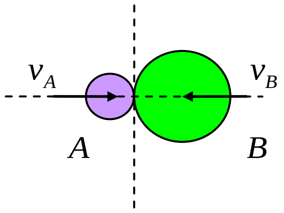
1. مرکزی (مراکز جرم روی خط ضربه قرار دارند.)



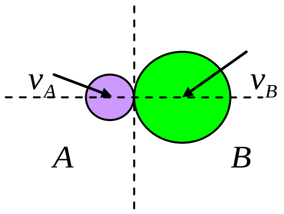
2. غیر مرکزی (مراکز جرم روی خط ضربه قرار ندارند.)



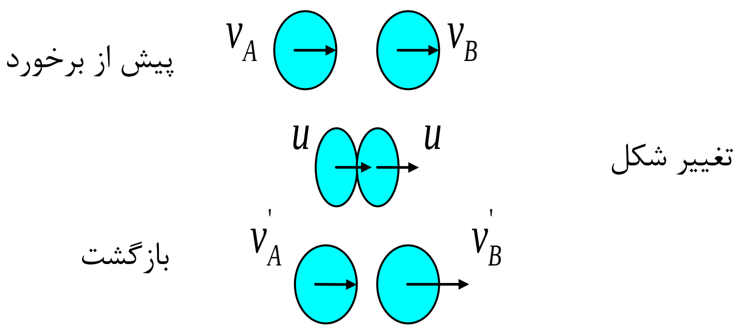
برخورد مرکزی



1. مستقیم: سرعت ها روی خط ضربه می افتند.
(Direct Impact)



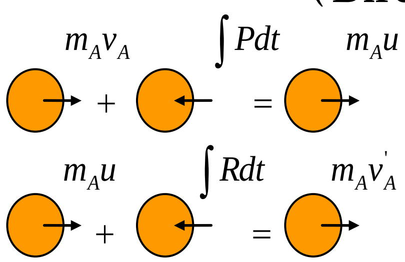
2. مایل : حداقل یکی از سرعت ها روی خط نیفتند.
(غیر مستقیم)   (Oblique Impact)



برخورد مستقیم مرکزی (Direct Central Impact)

اصل ایمپالس و ممنتوم

مرحله تغییر شکل (Deformation)



مرحله بازگشت (Restitution)

ضریب بازگشت: $0 \le e \le 1$

برای جسم A داریم:

$$\left.\begin{aligned} m_A v_A - m_A u &= \int P dt \\ m_A u - m_A v_A' &= \int F dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow e = \frac{\int F dt}{\int P dt} = \frac{u - v_A'}{v_A - u}$$

و برای جسم B نیز به همین ترتیب داریم :

$$e = \frac{v_B' - u}{u - v_B}$$

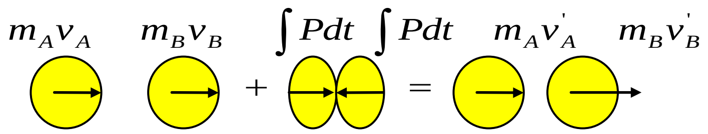
با حذف u از این دو رابطه ، **رابطه سرعت های نسبی** بدست می آید :

$$\boxed{e(v_A - v_B) = v_B' - v_A'}$$

ضریب بازگشت (استرداد) :

$$\boxed{e = \frac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B}}$$

اصل ایمپالس و ممنتوم برای کل جرم ها



$$m_A v_A \pm m_B v_B = m_A v_A' \pm m_B v_B'$$

حالات خاص

1) ضربه از نوع کاملاً ارتجاعی (الاستیک) :　　(e=1)

$$\begin{cases} v_A - v_B = v_B' - v_A' \\ m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B' \end{cases}$$

حفظ انرژی　$T_1 = T_2$:

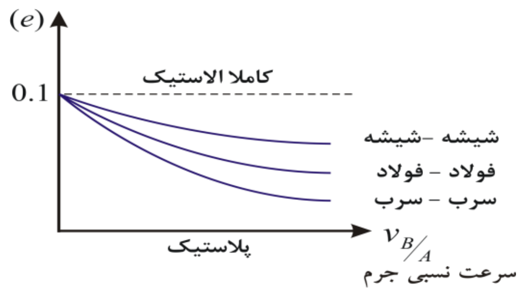
$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

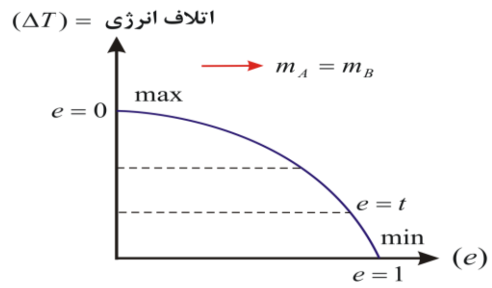
2) ضربه از نوع کاملاً خمیری وپلاستیک (مومسان) : (e=0)

حداکثر اتلاف انرژی

$$e = 0 \Rightarrow v_B' - v_A' = 0 \Rightarrow v_A' = v_B' = v'$$

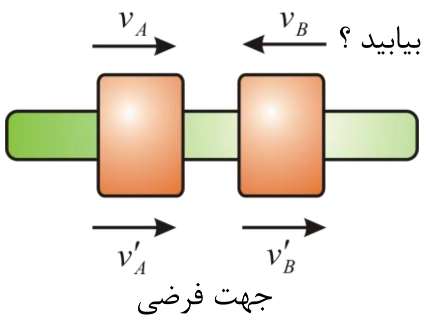
حالت کلی : $0<e<1$ در سرعت های نسبی متفاوت ، این ضریب فرق دارد.





مثال3- 11 : دو جسم A وB به هم برخورد می کنند اتلاف انرژی را بیابید ؟

$$(v_A = 6\frac{ft}{s}\ ,\ v_B = 4\frac{ft}{s}\ ,\ W_A = 5lb\ ,\ W_B = 3lb)\quad ,e = 0.8$$



حل:

اصل ایمپالس و ممنتوم برای کل جرم ها :

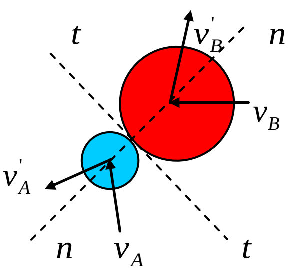
$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad \Rightarrow \ (5/g)(6) - (3/g)(4) = (5/g)v'_A + (3/g)v'_B$$

رابطه سرعت های نسبی :

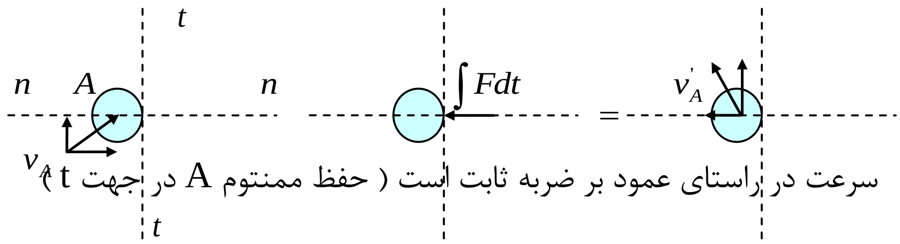
$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow (0.8)(6-(-4)) = (v'_B - v'_A)$$

$$\begin{cases} 5v'_A + 3v'_B = 18 \\ -v'_A + v'_B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_A = 0.75(\frac{ft}{s}) \leftarrow \\ v'_B = 7.25(\frac{ft}{s}) \rightarrow \end{cases} \Rightarrow \ \Delta T = -1.05(ft.Ib)$$

برخورد مرکزی مایل (Oblique Central Impact)



اصل ایمپالس و ممنتوم برای جرم A :



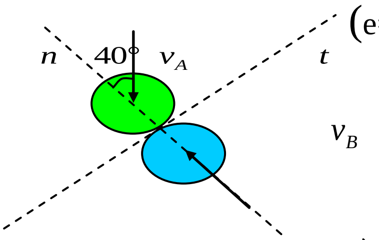
سرعت در راستای عمود بر ضربه ثابت است (حفظ ممنتوم A در جهت t)

$$+t\uparrow \qquad m_A(v_A)_t+0=m_A(v_A^{'})_t \quad \Rightarrow \quad (v_A^{'})_t=(v_A)_t$$

برای جرم B نیز داریم : $(v_B^{'})_t=(v_B)_t$

اصل ایمپالس و ممنتوم برای کل سیستم : $\xrightarrow{+n} m_A(v_A^{'})_n \pm m_B(v_B^{'})_n = m_A(v_A)_n \pm m_B(v_B)_n$

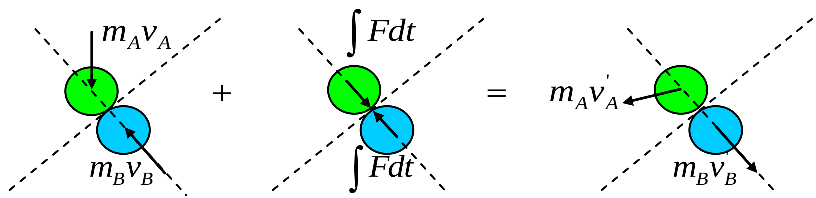
رابطه سرعت های نسبی : $e[(v_A)_n-(v_B)_n]=(v_B^{'})_n-(v_A^{'})_n$



مثال3– 12: سرعت های نهایی دو جسم را بعد از برخورد بیابید ؟(e=0.75)

$$(\ m_A=2.5kg \ , \ m_B=1.5kg \ , \ v_A=8\frac{m}{s} \ , \ v_B=6\frac{m}{s} \ )$$

حل:



$$(v_A^{'})_t=(v_A)_t=8\sin(40°)=5.15\frac{m}{s} \quad , \quad (v_B^{'})_t=(v_B)_t=0$$

$$+n\nwarrow: m_A(v_A^{'})_n-m_B(v_B^{'})_n=-m_A(v_A)_n+m_B(v_B)_n \Rightarrow 2.5(v_A^{'})_n-1.5(v_B^{'})_n=-6.325$$

$$e=\frac{(v_B^{'})_n+(v_A^{'})_n}{-(v_A)_n+(v_B)_n} \quad \Rightarrow \quad (v_B^{'})_n+(v_A^{'})_n=9.1$$

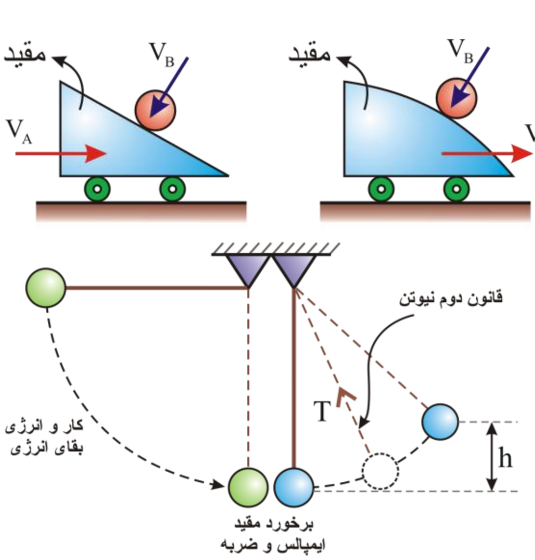
$$(v_A^{'})_n=1.83\,(\frac{m}{s})\nwarrow \ , v_A^{'\,2}=(v_A^{'})_n^{\,2}+(v_A^{'})_t^{\,2} \Rightarrow v_A^{'}=5.46\,(\frac{m}{s})\,,\alpha=\tan^{-1}(\frac{(v_A^{'})_t}{(v_A^{'})_n})=20.4°$$

$$v_B^{'}=(v_B^{'})_n=7.27\,(\frac{m}{s}) \ 40°$$

برخورد مقید

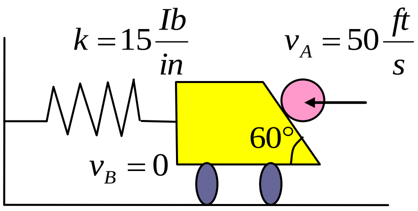
راستای حرکت پس از برخورد مشخص می باشد.

همان روابط قبل صحیح است اما به جای اصل ایمپالس و ممنتوم در جهت n ، در جهت عمود به ایمپاس با مقدار نامعلوم (مثلا عکس العمل زمین) رابطه را می نویسیم .



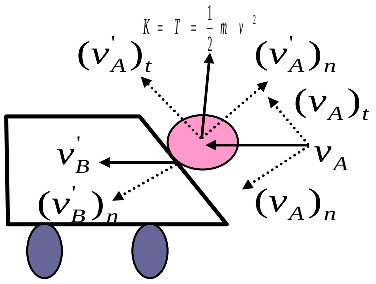
مثال3– 13 : مطلوبست حداکثر تغییر طول فنر وقتی جسم A به B برخورد کند

(e=0.75, k=15 lb/in)



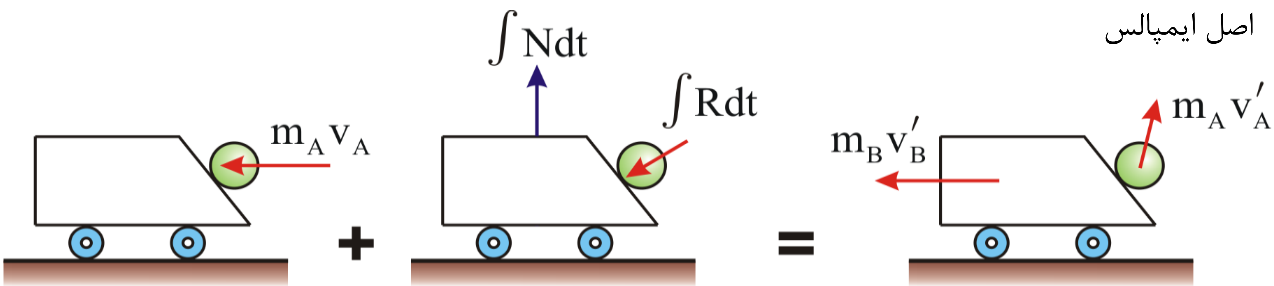
$$v_A=50\frac{ft}{s}\ ,\ W_A=1.5(lb)\ ,\ W_B=4(lb)$$

حل:



$$e=\frac{(v'_B)_n-(v'_A)_n}{(v_A)_n-(v_B)_n}\Rightarrow 0.866v'_B+(v'_A)_n=32.476$$

اصل ایمپالس



$$(v'_A)_t=(v_A)_t=25(\frac{ft}{s})\quad I$$

$$\left.\begin{array}{l}+x\quad : m_Av_A+0=-m_A(v'_A)_x+m_Bv'_B\\ (v'_A)_x=(v'_A)_n\cos(30°)-(v'_A)_t\cos 60\end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{75}{g}=\frac{4}{g}v'_B-\frac{1.5}{g}\left[(v'_A)_n\cos(30°)-12.5\right]\quad II$$

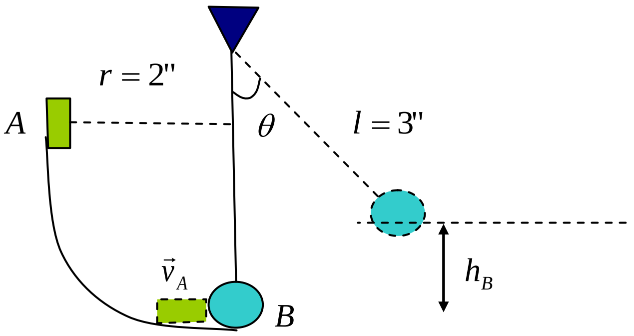
$$I,II\ \Rightarrow\ v'_B=19.222(\frac{ft}{s})\ \longleftarrow$$

اصل کار و انرژی :

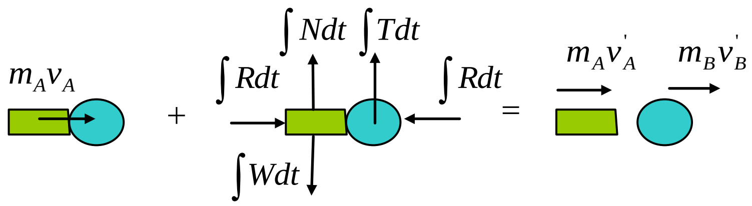
$$T_1+U_{1\to 2}=T_2$$

$$\frac{1}{2}m_B(v'_B)^2=\frac{1}{2}kx_{\max}^{\ 2}\ \underset{g=32.2\frac{ft}{s^2}}{\overset{k=15\frac{lb}{in}=180\frac{lb}{ft}}{\Rightarrow}}\ x_{\max}=.505(ft)=6.06(in)$$

مثال 3- 14 : در شکل مقابل اگر بسته A رها شود، مطلوبست حداکثر مقدار θ و حداکثر کشش طناب؟
(اگر $e=0.9, W_A=2.5\ lb, W_B=4lb$)



حل:



$$T_1+V_1=T_2+V_2 \Rightarrow 0+2W_A=.5m_Av_A{}^2 \Rightarrow v_A=11.35(\frac{ft}{s})$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_Av_A+0=m_Av'_A+m_Bv'_B \\ e=\dfrac{v'_B-v'_A}{v_A-v_B} \end{array}\right\} \Rightarrow v'_B=8.3(\frac{ft}{s}), v'_A=-1.9(\frac{ft}{s})$$

اصل پایستگی انرژی بعد از برخورد

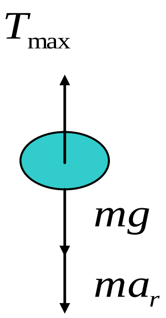
$$E_1=E_2$$

$$\frac{1}{2}m(v'_B)^2=m_Bgh_{max} \Rightarrow h_{max}=\frac{(v'_B)^2}{2g}=1.1(ft)$$

$$\cos\theta_{max}=\frac{3-1.1}{3} \Rightarrow \theta_{max}=\arccos\frac{1.9}{3}=50.70^\circ$$

$$T_{max}=m_Bg+m_B\frac{(v'_B)^2}{r}$$

$$T_{max}=6.85(lb)$$

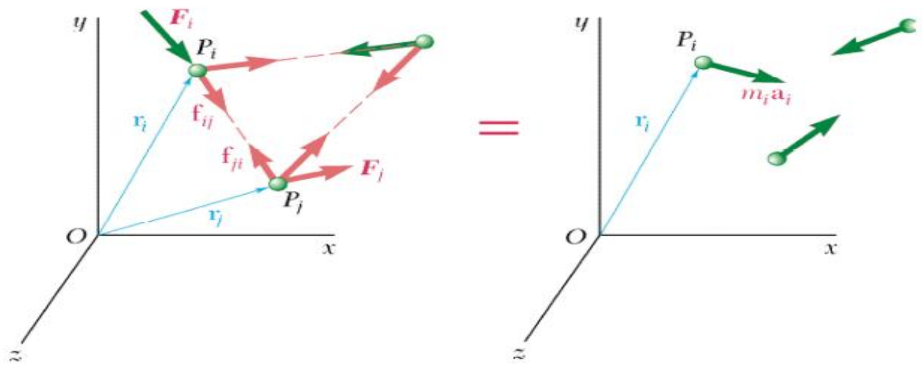


فصل چهارم

سیستم نقاط مادی

فهرست

در این فصل حرکت سیستم ذرات، یعنی حرکت تعداد زیادی ذره ها که آنها را با هم در نظر می گیریم، بررسی می کنیم . برای این کار چند ذره نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید که به آنها نیروی خارجی و داخلی وارد می شود.



F_i = نیروی خارجی که به جرم m_i اثر می کند.

f_{ji} = نیروی داخلی از i به j و $f_{ij} = -f_{ji}$

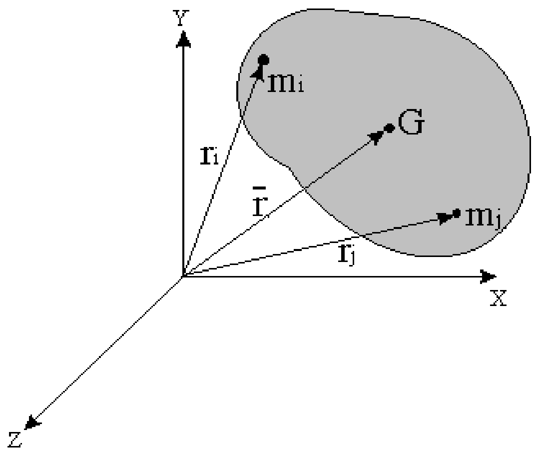
اصل دوم نیوتن برای جرم i :

$$\begin{cases} \vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i \\ \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \end{cases}$$

برای **سیستم نقاط مادی**: ($i:1 \rightarrow n$)

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \sum_i m_i \vec{a}_i \quad , \quad \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = 0 \\ \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \quad , \quad \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i \\ \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \end{cases}$$

حرکت مرکز جرم سیستم نقاط مادی



$$\vec{\bar{r}} = \vec{r}_G$$
$$\vec{\bar{r}} = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k}$$
$$m\vec{\bar{r}} = \sum m_i \vec{r}_i$$
$$m = \sum m_i$$

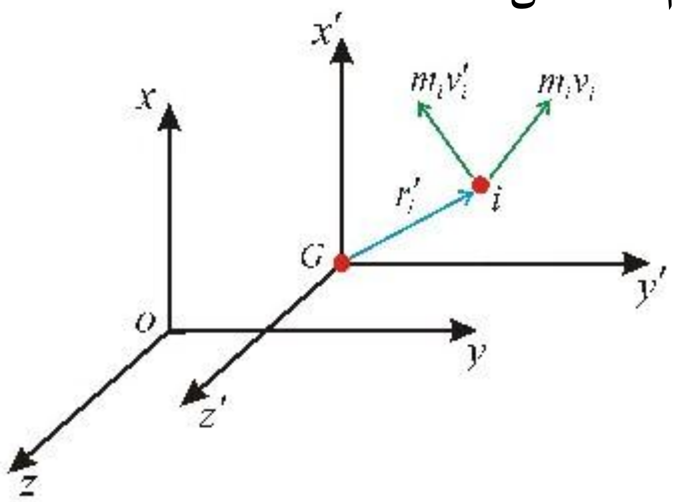
موقعیت مرکز جرم : $\rightarrow \bar{x} = \frac{1}{m}\left(\sum m_i x_i\right),\ \bar{y} = \dots \quad , \quad \bar{z} = \dots$

سرعت جرم $\vec{v}_i = \text{i}$: $\rightarrow m\vec{\bar{v}} = \sum m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k}$

شتاب جرم $\vec{a}_i = \text{i}$: $\rightarrow m\vec{\bar{a}} = \sum m_i \vec{a}_i \Rightarrow \vec{\bar{a}} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j} + \bar{a}_z \vec{k}$

$$\left.\begin{cases} \vec{L} = m\vec{\bar{v}} = \sum m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \bar{v}_i \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k} \\ \dot{\vec{L}} = m\vec{\bar{a}} \\ \sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} \end{cases}\right\} \rightarrow \sum \vec{F} = M\vec{\bar{a}} = \dot{\vec{L}}$$

ممنتوم زاویه ای سیستم نقاط مادی



دستگاه ثابت: $Oxyz$

دستگاه متحرک: $Gx'y'z'$

$$\boxed{v_i = \vec{\bar{v}} + \vec{v}_i'}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_i' = \text{سرعت نسبی نقطه i نسبت به نقطه G} \\ \vec{\bar{v}} = \text{سرعت مرکز جرم} \\ \vec{v}_i = \text{سرعت مطلق نقطه i} \end{cases}$$

ممنتوم زاویه ای سیستم نقاط مادی نسبت به نقطه G (در دستگاه متحرک)

در بعضی از مسایل بهتر است که حرکت ذرات سیستم را نسبت به مرکز جرم در نظر بگیریم.

بنابراین داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{H}'_G=\sum\left(\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i\right)\rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\frac{d}{dt}\left(\vec{H}'_G\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i\right)\rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\sum\left(\vec{v}'_i\times m_i\vec{v}'_i\right)+\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{a}'_i\\ \sum\left(v'_i\times m_i\vec{v}'_i\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{a}'_i$$

شتاب مطلق نقطه i $=\vec{a}_i=\vec{a}'_i+\vec{\bar{a}}$

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}'_i\times m_i\left(\vec{a}_i-\vec{\bar{a}}\right)\Rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{a}_i-\left(\sum m_i\vec{r}'_i\right)\times\vec{\bar{a}}\\ \left(\sum m_i\vec{r}'_i\right)\times\vec{\bar{a}}=0\end{array}\right\}\rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{a}_i\\ \left.\begin{array}{l}\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{a}_i\\ \sum\vec{F}_i+\sum\vec{f}_{ij}=m_i\vec{a}_i\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}'_i\times\vec{F}_i+\sum\vec{r}'_i\times\sum\vec{f}_{ij}\\ \sum\vec{r}'_i\times\sum\vec{f}_{ij}=0\end{array}\right\}\rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}'_i\times\vec{F}_i=\sum\vec{M}_G\end{array}\right.\qquad(1)$$

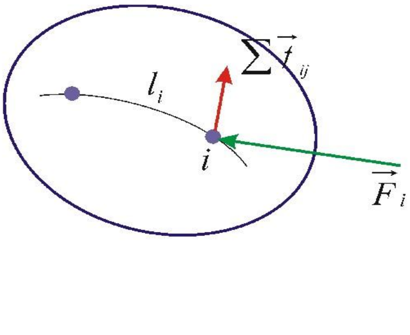
ممنتوم زاویه ای سیستم نسبت به نقطه G (در دستگاه ثابت)

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\vec{H}_G=\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}_i\\ \vec{v}_i=\vec{v}'_i+\vec{\bar{v}}\end{array}\right\}\rightarrow\vec{H}_G=\sum\vec{r}_i\times m_i(\vec{v}'_i+\vec{\bar{v}})\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{H}_G=\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i+(\sum m_i\vec{r}'_i)\times\vec{\bar{v}}\\ \left(\sum m_i\vec{r}'_i\right)\times\vec{\bar{v}}=0\end{array}\right.\\ \Rightarrow\vec{H}_G=\sum\vec{r}'_i\times m_i\vec{v}'_i=\vec{H}'_G\xrightarrow{(1)}\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{M}_G=\dot{\vec{H}}_G\end{array}\right.$$

کار نیرو:

برای جرم i کار نیروها را به دست می آوریم.

$$\left(U_{1\rightarrow2}\right)_i=\int_{l_i}\left(\vec{F}_i+\sum\vec{f}_{ij}\right).\,d\,\vec{r}_i$$



برای سیستم نقاط کل کارنیرو ها را بدست می آوریم

$$U_{1\to2}=\sum_{i=1}^{n}(U_{1\to2})_i \to U_{1\to2}=\int_{l_i}\sum_i\left(\vec{F}_i+\sum_j\vec{f}_{ij}\right).\,d\vec{r}_i = \int_{l_i}\sum_i(\vec{F}_i\,.\,d\vec{r}_i)+\int_{l_i}\sum_i\sum_j(\vec{f}_{ij}\,.\,d\vec{r}_i)$$

کارنیروی داخلی (internal) + کارنیروی خارجی (external) = کار کل

$$\Rightarrow \boxed{u_{1\to2}=(u_{1\to2})_{\text{int}}+(u_{1\to2})_{ext}}$$

<u>توجه</u> : در مسائلی که اتصال بین دو جرم غیر ارتجاعی باشد : $(u_{1\to2})_{\text{int}}=0$

انرژی جنبشی

انرژی جنبشی سیستمی از ذرات به صورت مجموع انرژی های جنبشی ذرات مختلف آن سیستم تعریف می شود

$$\begin{cases} T=\tfrac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \;\;,\;\; (\vec{v}_i=\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}}) \to T=\tfrac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}}).(\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}})=\tfrac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\tfrac{1}{2}(\sum m_i)\bar{v}^2+\left(\sum m_i\vec{v}'_i\right).\bar{\vec{v}} \\ \left(\sum m_i\vec{v}'_i\right)=0 \;\;,\;\; m=\sum m_i \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow\;T=\tfrac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\tfrac{1}{2}m\bar{v}^2}$$

انرژی جنبشی انتقالی + انرژی جنبشی حرکت دورانی = انرژی جنبشی سیستم

اصل کار و انرژی:

$$T_1+U_{1\to2}=T_2$$

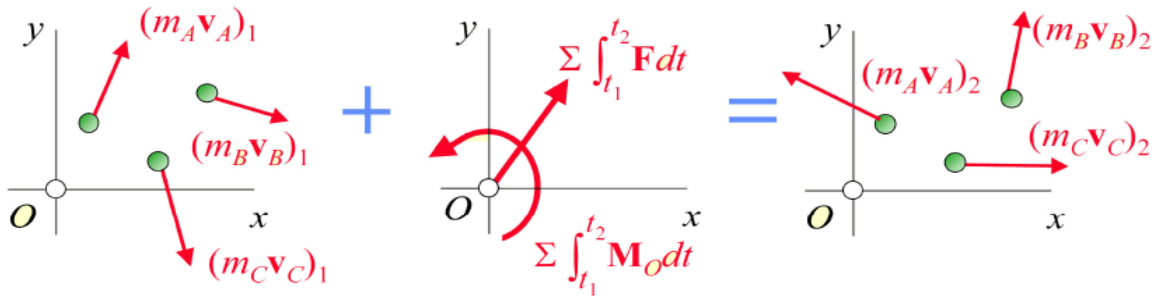
$U_{1\to2}$: کاری که نیروهای داخلی و برآیند نیروهای خارجی انجام می دهند.

اصل حفظ انرژی:

$$T_1+V_1=T_2+V_2$$

اگر کلیه نیروهای وارد بر سیستم پایستار باشند از این معادله استفاده می کنیم.

اصل ایمپالس و ممنتوم:

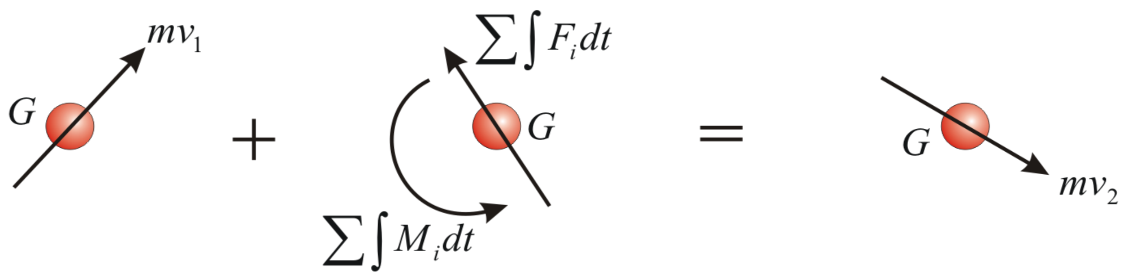


(I) اصل ایمپالس و ممنتوم خطی:

(II) اصل ایمپالس و ممنتوم زاویه ای:

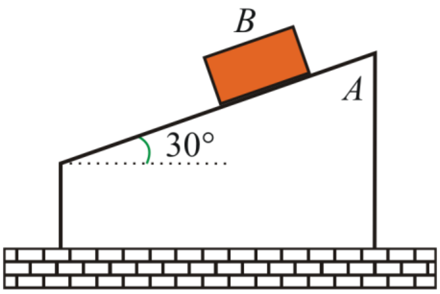
$$\begin{cases} \vec{L}_1 + \overrightarrow{IMP} = \vec{L}_2 & (I) \\ \left(\vec{H}_O\right)_1 + \sum \int \vec{M}_O dt = \left(\vec{H}_O\right)_2 & (II) \\ \left(\vec{H}_O\right)_1 = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_{i1} & \end{cases}$$

توجه: اگر به مرکز جرم منتقل کنیم یا مرکز جرم مشخص بود:

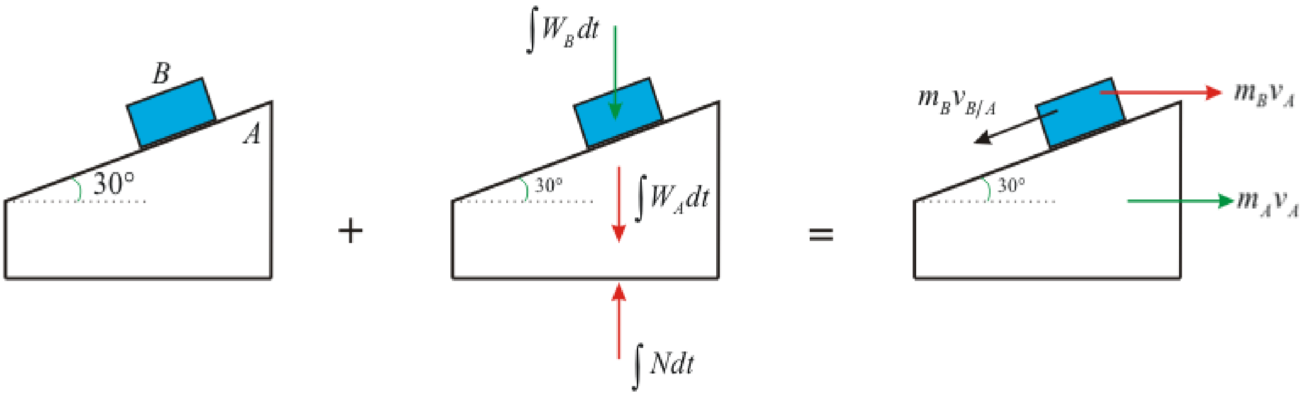


مثال4– 1 : در شکل مقابل پس از اینکه بلوک B ، 3 فوت روی بلوک A حرکت کرد ، مطلوبست سرعت B نسبت به A.

$$\left(W_A = 25 \ lb \, , W_B = 15 \ lb \, , v_B = 0 \right)$$



حل:

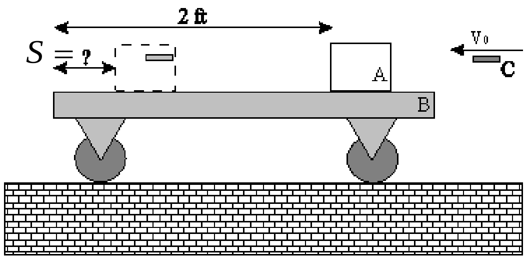


ایمپالس و ممنتوم برای سیستم

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad 0+0=-m_B v_{B/A}\cos 30^o + m_B v_A + m_A v_A \quad \Rightarrow \quad v_A = 0.32\, v_{B/A}$$

$$\begin{cases} T_1+V_1=T_2+V_2 \\ T_1=0 \quad , \quad V_1=0 \\ T_2=\frac{1}{2}m_A v_A^2+\frac{1}{2}m_B v_B^2 \\ V_2=-W_B 3 \sin 30 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v^2{}_A + v^2{}_{B/A} - 2 v_A v_{B/A}\cos 30^o\right) - \frac{1}{2}W_B \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad v_A = 3.71 \ {ft}/{s} \ \longrightarrow \qquad , \qquad v_{B/A} = 11.59 \ {ft}/{s} \ \swarrow$$



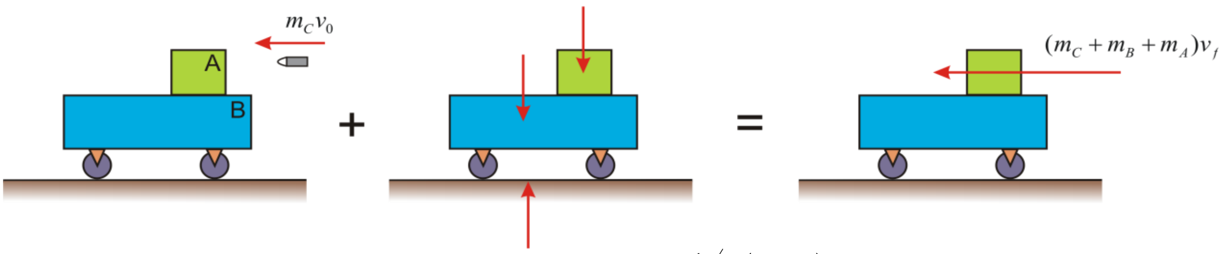
مثال 4– 2: گلوله C با سرعت v_0 به سمت جسم A شلیک می گردد و در آن فرو می رود و باعث حرکت جسم A روی گاری B و حرکت گاری می گردد . مطلوبست :

الف– سرعت نهایی کل سیستم.

ب– موقعیت نهایی A نسبت به B .

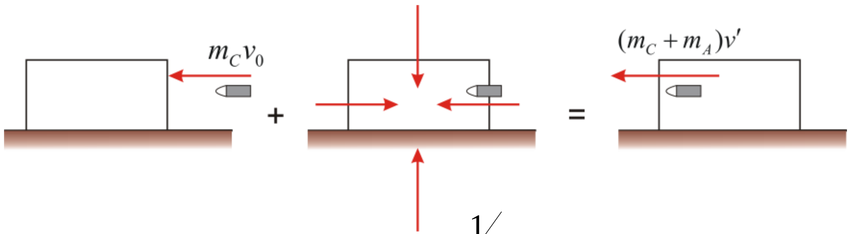
$$W_A = 10\ lb \quad , \quad W_B = 8\ lb \quad , \quad W_C = {1}/{16}\ lb = 1\text{اونس} \quad , \quad v_0 = 1600\ {ft}/{s} \quad , \quad \mu_k = 0.5$$

حل: با فرض اینکه جرم A به همراه C روی B باقی بماند و در نهایت سرعت همگی یکسان باشد ، از اصل ایمپالس و ممنتوم برای سیستم استفاده کرده و سرعت نهایی را محاسبه می کنیم :



$$\Rightarrow m_C v_0 = \left(m_C + m_A + m_B\right) v_f \;\Rightarrow\; v_{final} = \frac{\frac{1}{16}(1600)}{\frac{1}{16}+10+8} \;\Rightarrow\; v_f = 5.54 \;{ft}/{s}$$

سرعت گلوله و بلوک A (v') را پس از فرو رفتن گلوله در A ، حساب می کنیم :



$$m_C v_0 + 0 = (m_C + m_A)v' \;\Rightarrow\; v' = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+10}(1600) = 9.94 \;{ft}/{s}$$

برای بدست آوردن کار نیروی اصطکاک، اصل کار و انرژی را از زمانی که گلوله در A نشست تا زمانی که بلوک A نسبت به B متوقف شد، می نویسیم :

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_C + m_A)v'^2 = 15.43 \;\; ft.lb \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2}(m_C + m_A + m_B)v_f^2 = 8.6 \;\; ft.lb$$

$$U_{1\to 2} = \left(U_{1\to 2}\right)_{friction} = -0.5\left(\frac{1}{16}+10\right)(\Delta x)$$

$$T_2 - T_1 = U_{1\to 2}$$

$$\Rightarrow 8.6 - 15.43 = -0.5\left(\frac{1}{16}+10\right)(\Delta x) \to \Delta x = 1.36 \;\; ft$$

مسافتی که A روی B می پیماید نسبت به انتهای B : Δx $\Leftarrow$ $S = 2 - 1.36 = 0.64 \;\; ft$ موقعیت نهایی

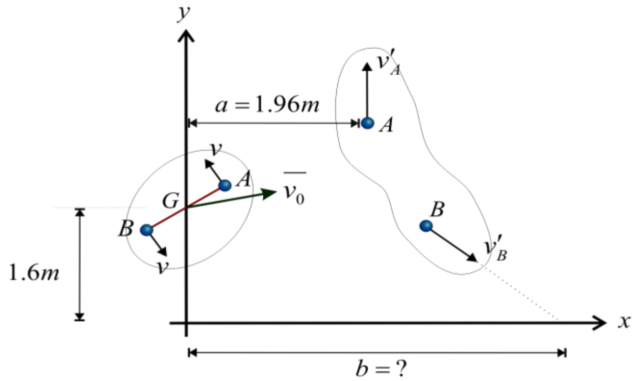
با توجه به موقعیت نهایی A که روی B باقی می ماند ، پیش فرض اولیه صحیح و نتایج درست می باشند .

مثال4- 3: در صفحه بدون اصطکاک مقابل ، $m_A = 2kg$ و $m_B = 1kg$. در لحظه اولیه داریم:

$\vec{H}_G = 3 \ kg.m^2/s$

$\vec{v}_0 = 1.5\vec{i} + 1.2\vec{j} \ m/s$

$T' = 18.75 \ J$



که T' در آن انرژی جنبشی سیستم نسبت به مرکز جرم (دوران) آن است. اگر در لحظه بعدی جرم Aدارای سرعت v'_A (که موازی محور Y ها است) گردد، مطلوبست: b , v'_B , v'_A .

حل:

حفظ ممنتوم سیستم

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$
$$\vec{L}_1 = m\bar{v}_1 = (1+2)\left(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}\right)$$
$$\vec{L}_2 = (2)\left(v'_A\vec{j}\right) + \left(v'_{Bx}\vec{i} - v'_{By}\vec{j}\right) \qquad (1)$$
$$4.5\vec{i} + 3.6\vec{j} = v'_{Bx}\vec{i} + \left(2v'_A - v'_{By}\right)\vec{j}$$
$$v'_{Bx} = 4.5 \ m/s \xrightarrow{(1)} 2v'_A - v'_{By} = 3.6 \ m/s \qquad (2)$$

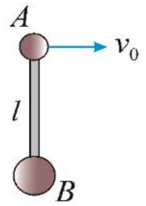
حفظ انرژی جنبشی $T_1 = T_2$ و نیز داریم $T = \bar{T} + T'$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &T_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}_0^2 + T' = \frac{1}{2}(3)\left((1.5)^2 + (1.2)^2\right) + 18.75 = 24.28 \ J \\ &T_2 = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v_{Bx}'^2 + v_{By}'^2\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow v_A^2 + \frac{1}{2}\left(v_{Bx}'^2 + v_{By}'^2\right) = 24.28 \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \rightarrow \begin{cases} v'_A = 3.2 \ m/s \ \uparrow \\ v'_{Bx} = 4.5 \ m/s \ \rightarrow \\ v'_{By} = 2.8 \ m/s \ \downarrow \end{cases}$$

حفظ ممنتوم زاویه ای سیستم نسبت به O :

$$\left(\vec{H}_O\right)_1 = \left(\vec{H}_O\right)_2$$
$$\left(\vec{H}_O\right)_1 = \vec{H}_G + \vec{r} \times m\bar{v}_O \Rightarrow \left(\vec{H}_O\right)_1 = 3\vec{k} + \left(1.6\vec{j}\right) \times (3)\left(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}\right) = 3\vec{k} - 3(1.5)(1.6)\vec{k} = -4.2\vec{k}$$
$$\left(\vec{H}_O\right)_2 = (2)\,a\bar{v}'_A\vec{k} - b(v'_{By})(1)\,\vec{k}$$
$$\Rightarrow -4.2 = (2)\,av'_A - bv_{By} \quad \Rightarrow b = 5.98 \ m$$



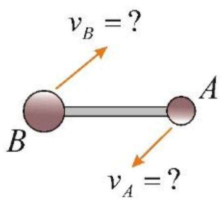
مثال 4– 4 : در صفحه افقی بدون اصطکاک اگر به A سرعت $\vec{v}_0$ بدهیم مطلوبست سرعت جرم ها پس از 90° , 180° دوران میله. $(m_A = m \ , m_B = 2m)$

حل :

$$m\bar{Y} = \sum m_i y_i \rightarrow \bar{Y} = \frac{m(l)+2m(0)}{m+2m} = \frac{l}{3}$$

$$m\vec{\bar{v}} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B \;\Rightarrow\; 3m\vec{\bar{v}} = m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B \;\Rightarrow\; 3m\vec{\bar{v}} = m\vec{v}_0 + 0 \;\Rightarrow\; \bar{v} = {}^{v_0}\!/_3$$

در حالت دوران 90° **داریم :**



$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{L}_1 = m_A\vec{v}_0 = (mv_0)\vec{i} \\ \vec{L}_2 = m_A\left(-v_{AX}\vec{i} - v_{AY}\ \vec{j}\right) + m_B\left(v_{BX}\vec{i} + v_{BY}\vec{j}\right) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_0 = -v_{AX} + 2v_{BX} & (1) \\ 0 = -v_{AY} + 2v_{BY} & (2) \end{Bmatrix}$$

$$T_1 = T_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 = {}^1\!/_2\, mv_0^2 \\ T_2 = {}^1\!/_2\, m\left(v_{AX}^2 + v_{AY}^2\right) + {}^1\!/_2(2m)\left(v_{BX}^2 + v_{BY}^2\right) \end{Bmatrix} \rightarrow v_0^2 = v_{AX}^2 + v_{AY}^2 + 2v_{BX}^2 + 2v_{BY}^2 \quad (3)$$

$$(H_G)_1 = (H_G)_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} (H_G)_1 = {}^2\!/_3\, lm(v_0) \\ (H_G)_2 = {}^2\!/_3\, lm(v_{AY}) + {}^1\!/_3\, l(2m)(v_{BY}) \end{Bmatrix} \rightarrow v_0 = v_{AY} + v_{BY} \quad (4)$$

$$(1),(2),(3),(4) \rightarrow \begin{cases} v_{AX} = {}^{v_0}\!/_3 \rightarrow & v_{BX} = {}^{v_0}\!/_3 \rightarrow \\ v_{AY} = {}^{2v_0}\!/_3 \downarrow & v_{BY} = {}^{v_0}\!/_3 \uparrow \end{cases}$$

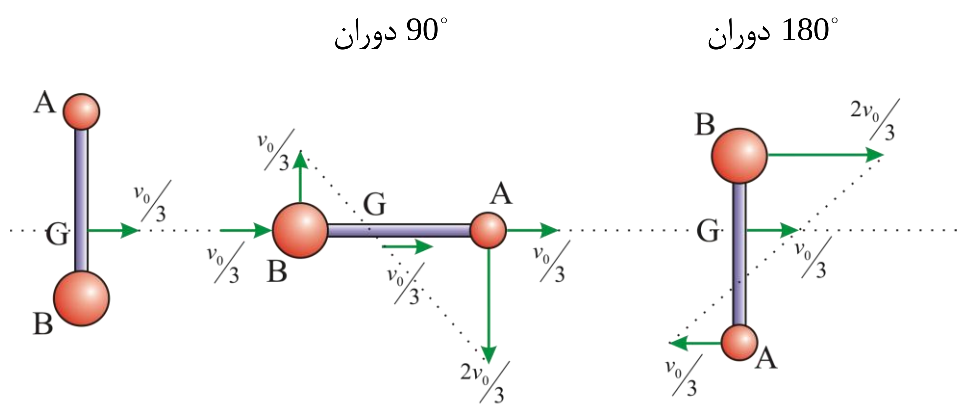
در حالت 180° **نیز داریم :**

$$\vec{L}_1=\vec{L}_2\rightarrow\left\{\begin{matrix}\vec{L}_1=m_A\left(\frac{v_0}{3}\vec{i}-\frac{2v_0}{3}\vec{j}\right)+m_B\left(\frac{v_0}{3}\vec{i}+\frac{v_0}{3}\vec{j}\right)=(mv_0)\vec{i}\\ \vec{L}_2=m_A\left(-v_{AX}\vec{i}+v_{AY}\vec{j}\right)+m_B\left(v_{BX}\vec{i}-v_{BY}\vec{j}\right)\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}v_0=-v_{AX}+2v_{BX} & (1)\\ 0=v_{AY}-2v_{BY} & (2)\end{matrix}\right\}$$

$$T_1=T_2\rightarrow\left\{\begin{matrix}T_1=\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0^2}{9}+\frac{4v_0^2}{9}\right)+\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v_0^2}{9}+\frac{v_0^2}{9}\right)\\ T_2=\frac{1}{2}m\left(v_{AX}^2+v_{AY}^2\right)+\frac{1}{2}(2m)\left(v_{BX}^2+v_{BY}^2\right)\end{matrix}\right\}\rightarrow v_0^2=v_{AX}^2+v_{AY}^2+2v_{BX}^2+2v_{BY}^2\quad(3)$$

$$(H_G)_1=(H_G)_2\rightarrow\left\{\begin{matrix}(H_G)_1=\frac{2}{3}lm\left(\frac{2v_0}{3}\right)+\frac{1}{3}l(2m)\left(\frac{v_0}{3}\right)\\ (H_G)_2=\frac{2}{3}lm(v_{AX})+\frac{1}{3}l(2m)(v_{BX})\end{matrix}\right\}\rightarrow v_0=v_{AX}+v_{BX}\quad(4)$$

$$(1),(2),(3),(4)\rightarrow\left\{\begin{matrix}v_{AX}=\frac{v_0}{3}\leftarrow & v_{BX}=\frac{2v_0}{3}\rightarrow\\ v_{AY}=0 & v_{BY}=0\end{matrix}\right.$$



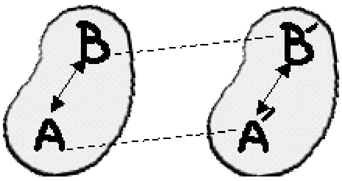
فصل پنجم

سینماتیک اجسام صلب

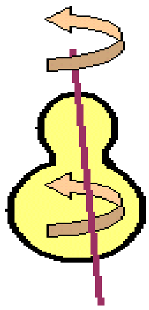
فهرست

حرکت اجسام صلب

1) حرکت انتقالی

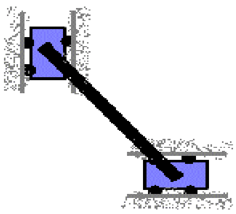


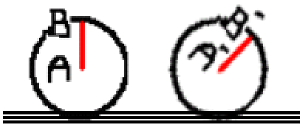
2) حرکت دورانی حول محور ثابت



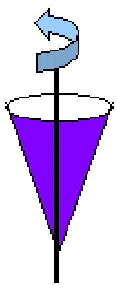
3) حرکت عمومی در صفحه

ترکیب حرکت انتقالی و دورانی در صفحه



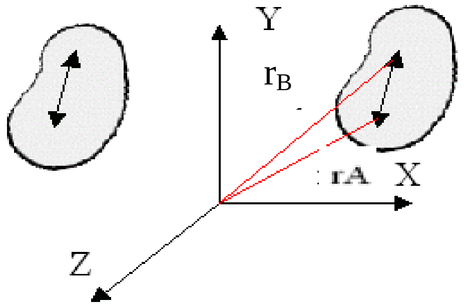


4) حرکت دورانی حول نقطه ثابت



5) حرکت کلی : غیر از حالات خاص قبل

حرکت انتقالی



$$\vec{r}_B = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_A$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_B) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/A}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_A)$$

برای حرکت انتقالی چون طول ثابت و جهت نیز ثابت است :

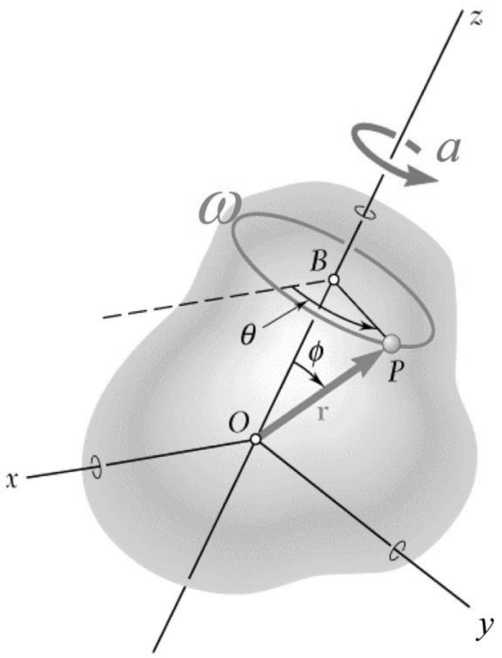
$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/A}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) = 0 \Rightarrow \vec{V}_B - \vec{V}_A = 0 \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{V}_B) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_A) \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

بنابراین همانند یک نقطه مادی فرض می شود ، یعنی سرعت و شتاب همه نقاط یکسان است.

حرکت دورانی حول محور ثابت

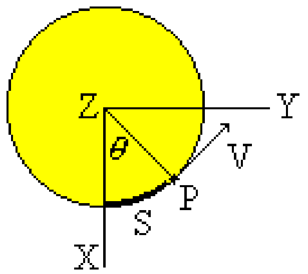


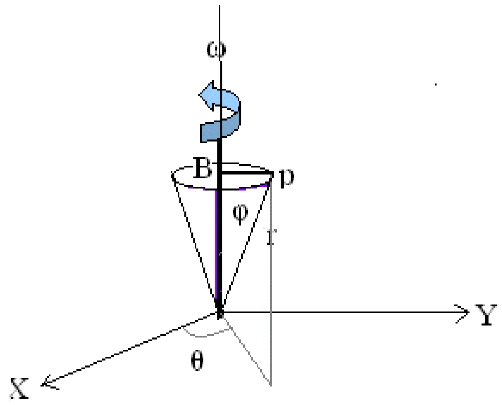
θ: مختصات زاویه ای نسبت به صفحه ی xz

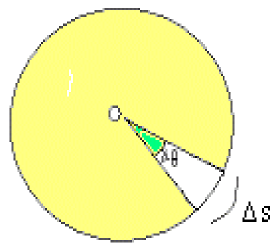
φ: زاویه بین بردار موقعیت و محور z

$\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P

$$V=\frac{\Delta s}{\Delta t}\ ,\ \begin{cases}\Delta s=(BP)\Delta\theta\\ BP=(OP)\sin\varphi=r\sin\varphi\Rightarrow V=BP(\frac{\Delta\theta}{\Delta t})\Rightarrow V=(r\sin\varphi)(\dot{\theta})=\vec{\omega}\times\vec{r}\\ \dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\omega\end{cases}$$





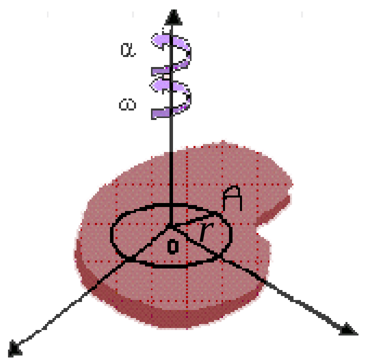


$$\begin{cases}\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})\Rightarrow\vec{a}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega})\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}(\vec{r})\\ \ddot{\theta}=\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt}=\alpha \quad \text{شتاب زاویه ای}\\ \frac{d}{dt}(\vec{r})=\vec{v}=(\vec{\omega}\times\vec{r})\end{cases}\Rightarrow\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\Rightarrow\begin{cases}a_n=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}\times\vec{v}\\ a_t=\vec{\alpha}\times\vec{r}\end{cases}$$

٭ حالت خاص (حرکت دورانی یک صفحه نازک حول محور عمود بر صفحه)

$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}\Rightarrow V=r\omega$$

$$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\quad\Rightarrow\begin{cases}a_t=r\alpha\\ a_n=r\omega^2\end{cases}$$



معادلات دوران جسم صلب حول محور ثابت

x	θ
$V = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$
$a = \dfrac{dV}{dt} = \dot{V} = \ddot{x}$	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
$a = V(\dfrac{dV}{dx})$	$\alpha = \omega \dfrac{d\omega}{d\theta}$

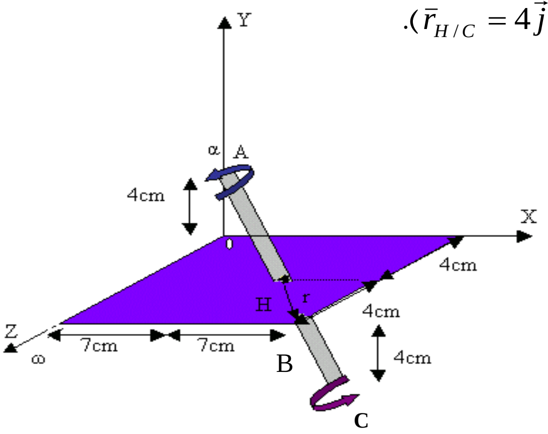
*** حالتهای خاص :**

حرکت دورانی با سرعت زاویه ای ثابت : $\theta = \omega t + \theta_0$ $\alpha = 0$ $\omega = \text{cte}$

حرکت دورانی با شتاب زاویه ا ی ثابت : $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\alpha = \text{cte}$

مثال5- 1 : صفحه حول محور AC با سرعت زاویه ای $18\frac{rad}{s}$ و شتاب زاویه ای $\alpha = 45\frac{rad}{s^2}$ در حال دوران است. مطلوب است سرعت و شتاب زاویه ای نقطه H ($\vec{r}_{H/C} = 4\vec{j}$).

$\vec{V}_H$ و $\vec{a}_H = ?$



حل :

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad , \quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{H/B} = 7\vec{i} + 4\vec{k}$$

$$\begin{cases} \omega = 18 \ (\dfrac{rad}{s}) \\ \vec{\omega} = \omega \vec{\lambda}_{AC} \\ \lambda_{AC} = \dfrac{14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}}{\sqrt{14^2 + 8^2 + 8^2}} = \dfrac{1}{18}(14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}) \end{cases} \Rightarrow \vec{\omega} = 14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k} \ (\frac{rad}{s})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \frac{-45}{18}(14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k})$$

$$\vec{\alpha}=\alpha\,\vec{\lambda}_{CA}=-\alpha\,\vec{\lambda}_{AC}$$

$$\vec{V}_H=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 14 & -8 & 8\\ 7 & 0 & 4\end{vmatrix}=-32\vec{i}+56\vec{k}\ \left(\frac{cm}{s}\right)\qquad \vec{a}_H=\frac{-45}{18}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 14 & -8 & 8\\ 7 & 0 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 14 & -8 & 8\\ -32 & 0 & 56\end{vmatrix}$$

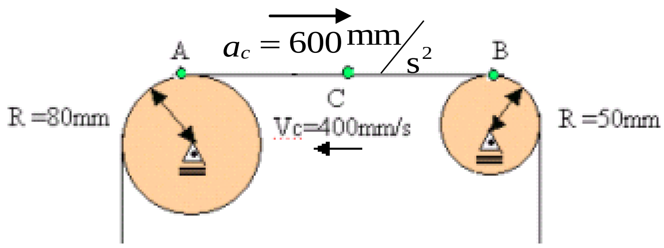
$$\Rightarrow \vec{a}_H=-368\vec{i}-1040\vec{j}-396\vec{k}\ \left(\frac{cm}{s^2}\right)$$

مثال5- 2 : باتوجه به حرکت کابل از قرقره B به سمت قرقره A مطلوب است :

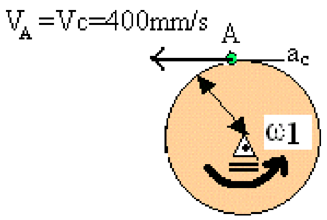
$\omega_1=?$ $\quad\omega_2=?$

$\alpha_1=?$ $\quad\alpha_2=?$

$a_A=?$ $\quad a_B=?$

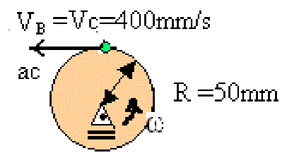


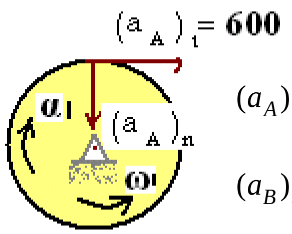
حل :



$$V_A=r_A\,\omega_1\Rightarrow 400=80\omega_1\Rightarrow\omega_1=5\ \frac{rad}{s}$$

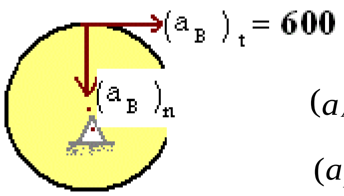
$$V_B=r_B\omega_2\Rightarrow 400=50\omega_2\Rightarrow\ \omega_2=8\ \frac{rad}{s}$$





$$(a_A)_t=r_A\alpha_1\Rightarrow 600=80\alpha_1\quad\Rightarrow\ \alpha_1=7.5\ \frac{rad}{s^2}$$

$$(a_B)_t=r_B\alpha_2\ \Rightarrow 600=50\alpha_2\quad\Rightarrow\ \alpha_2=12\ \frac{rad}{s^2}$$



$$(a_A)_n=r_A\omega_A^{\,2}=80(5)^2=2000\ \ mm/s^2$$

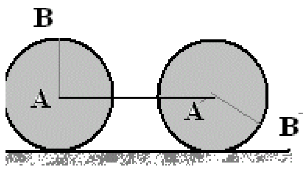
$$(a_B)_n=r_B\ \omega^2=50(8)^2=3200\ mm/s^2$$

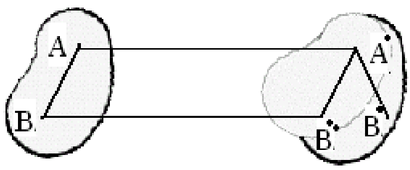
$$\Rightarrow a_A = \sqrt{(600)^2 + (2000)^2} = 2088\,mm/s^2 \quad 73.3^\circ$$

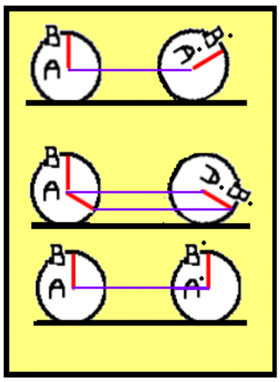
$$\Rightarrow a_B = \sqrt{(600)^2 + (3200)^2} = 3256\,mm/s^2 \quad 79.4^\circ$$

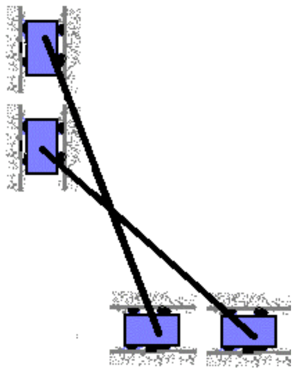
حرکت کلی در صفحه (حرکت عمومی در صفحه)

از ترکیب حرکت انتقالی و حرکــت دورانـــی حول محور ثابت بدست آید .

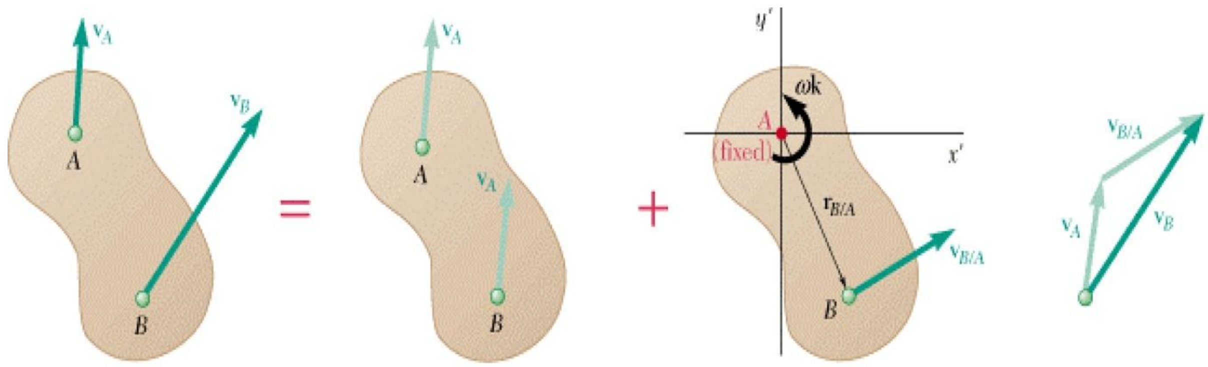








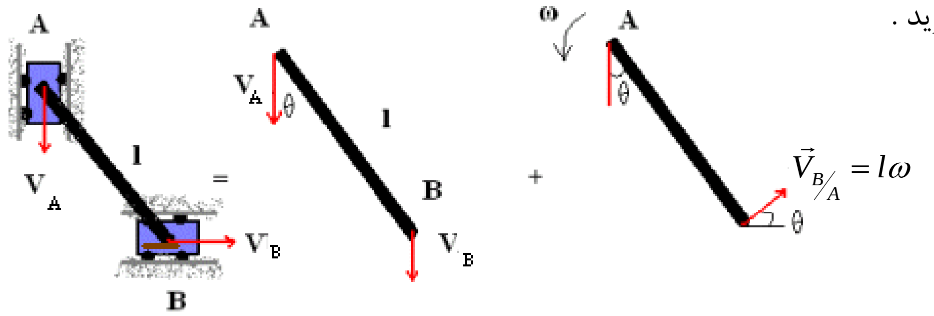
سرعت نسبی و مطلق در حرکت صفحه ای



$$\begin{cases} \vec{V}_A \\ \vec{V}_{B/A} \quad : \text{انتقال B به وسیله سرعت A} \\ \vec{V}_{B/A} = l\omega \end{cases} \qquad \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

دوران B حول نقطه A :

مثال5-3 : جسم A با سرعت V_A در حال حرکت به سمت پائین می باشد ، سرعت زاویه ای چرخش میله را بدست آورید .

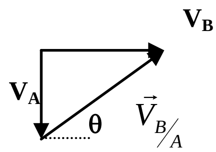


حل :

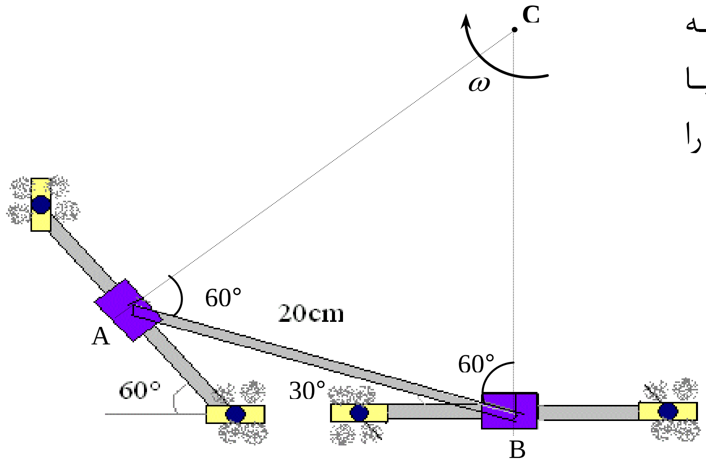
$$[\vec{V}_B \rightarrow] = [V_A \downarrow] + [l\omega \measuredangle \theta \,]$$

$$V_A = V_B \ \tan\theta$$

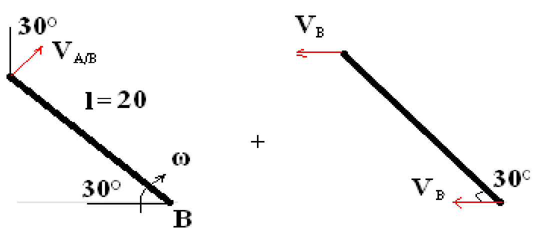
$$\omega = \frac{V_A}{l Sin\theta}$$



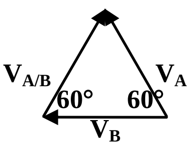
مثال 5-3 : طوقه B با سرعت $25\ {}^{cm}\!/_{s}$ بـه سمت چپ در حال حرکت است . بـا توجه به شـکل سـرعت طوقـه A را بدست آورید ؟



حل : حرکت مقید

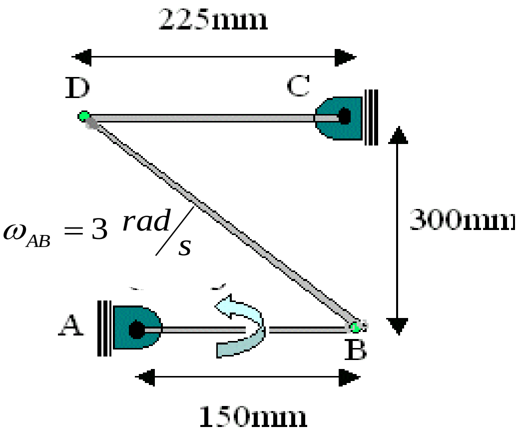


$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \Rightarrow [V_A \ {}_{60^\circ}\!\diagdown] = [V_B \leftarrow] + [20\omega \ {}^{30^\circ}\!\nearrow]$$

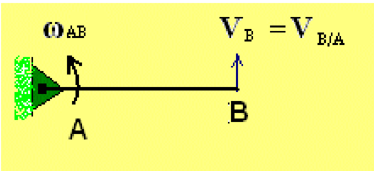


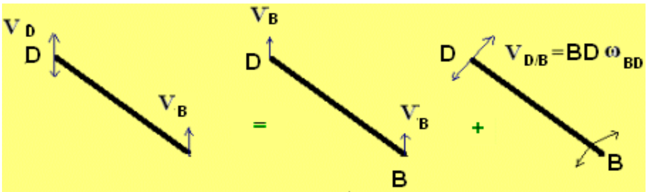
$$\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B = 25(Cm/s)$$

مثال 5-4 : اگر در حالت نشان داده شده سرعت زاویه ای برابر $3\ rad/s$ باشد ، مطلوب است: $\omega_{BD}\ ,\ \omega_{DC} = ?$

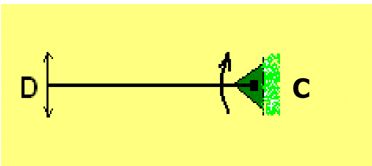


حل :



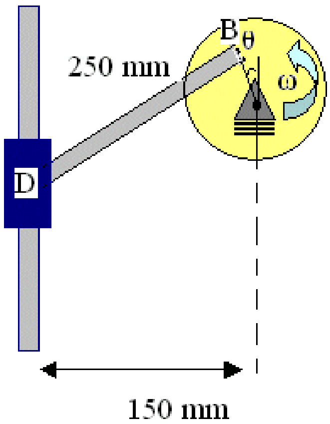


$$\begin{cases} \vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} \\ [V_D \updownarrow] = [.45 \uparrow] + [BD.\ \omega_{BD} \nearrow] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{BD} = 0 \\ \vec{V}_D = \vec{V}_B = [.45\ m/s \uparrow] \end{cases}$$

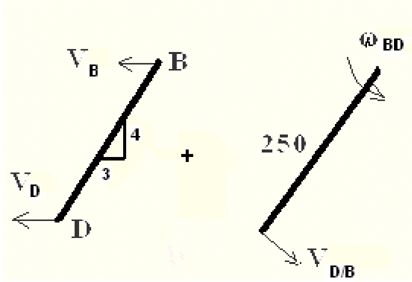


$$\Rightarrow V_D = 0.225\,\omega_{DC} = 0.45\ m/s \quad \Rightarrow \omega_{DC} = 2\ rad/s$$

مثال5 - 5 : اگر یک دیسک با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = 500\ rpm$ در حال دوران باشد، مطلوب است : سرعت طوقه D در حالت $\theta = 0°\ ,\ \theta = 90°$ (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک $50\ mm$ می باشد)



حل : در حالت $\theta = 0°$

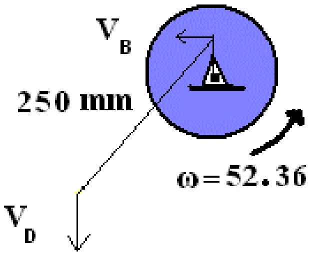


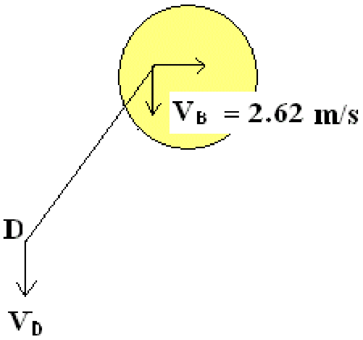
$$\omega = 500\ rpm = \frac{500 \times 2\pi}{60} = 52.36\ rad/s$$

$$V_B = r\omega = 0.05 \times 52.36 = 2.62\ m/s \leftarrow$$

$$\vec{V}_D \downarrow = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} = [2.62 \leftarrow] + [0.25\omega_{BD}\ \tfrac{3}{4}\searrow]$$

$$\Rightarrow\ V_D = 1.96\ m/s \downarrow \quad , \quad \omega_{BD} = 13.1\ rad/s$$

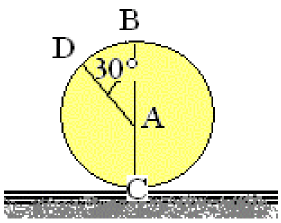




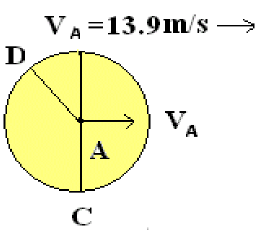
در حالت $\theta = 90$:

$$V_D \parallel V_B \Rightarrow V_D = V_B = 2.62(m/s)\downarrow\ ,\ \omega_{BD} = 0$$

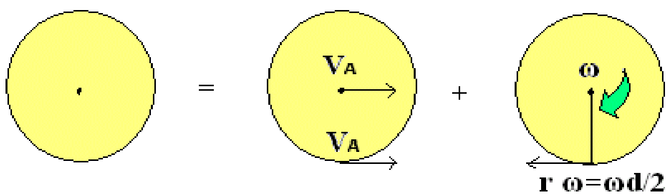
مثال 5-6 : اتومبیلی با سرعت ثابت $50\ km/h$ در حال حرکت به سمت راست می باشد . اگر قطر چرخهای اتومبیل $610\ mm$ باشد ، مطلوب است ، سرعت نقاط A,B,C ,D؟



حل : روش اول :



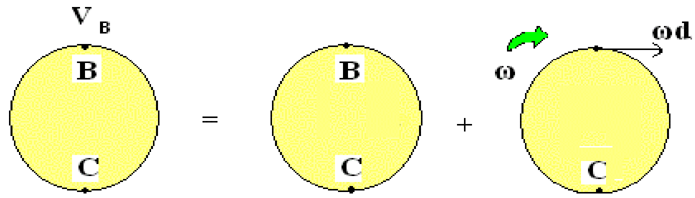
$$V_A = 50\ km/h = 13.9\ m/s$$



$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A} \quad , \quad V_C = 0$$

$$\Rightarrow V_{C/A} = V_A = r\omega \quad \Rightarrow 13.9 = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{13.9}{0.61/2}$$

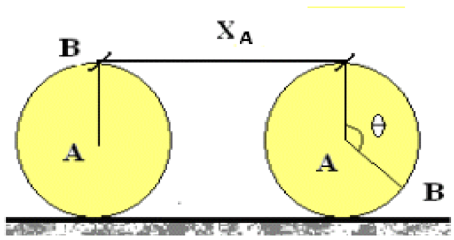
$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C}$$



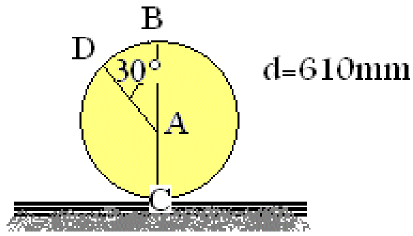
$$\Rightarrow \vec{V}_B = 0 + [d\omega \ \rightarrow] = [2\times 13.9 \ \rightarrow] = [27.8 \ m/s \ \rightarrow]$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \Rightarrow \vec{V}_D = [13.9 \rightarrow] + [13.9 \angle 30^\circ] \qquad \Rightarrow \vec{V}_D = 2\times 13.9 \cos 15^\circ = [26.8 \ m/s \ \angle 15^\circ]$$

روش دوم : به شرطی که لغزش در کار نباشد



$$\Rightarrow \quad X_A = r\theta$$
$$V_A = r\dot{\theta} = r\omega$$
$$a_A = r\alpha$$

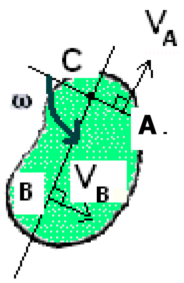


$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{V_A}{d/2} = 45.57 \quad rad$$
$$V_B = (BC)\omega = 2V_A = 27.8 \ m/s$$
$$V_D = (DC)\omega = (\vec{CA} + \vec{AD})\times\omega = .59\times 45.57 = 26.8 \ m/s$$

مرکز آنی دوران(نقطه سرعت صفر)

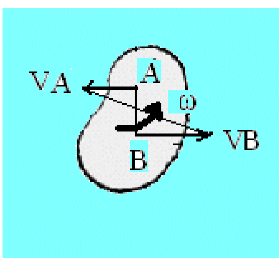
C (نقطه با سرعت صفر) مرکز آنی دوران است که لزوماً روی جسم نیست.

✓ تکیه گاه در تمام لحظات مرکز آنی دوران می باشد.

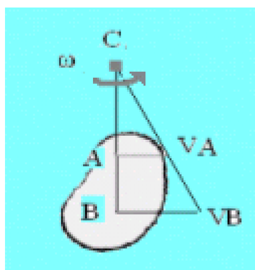


$$\begin{cases} V_C = 0 \\ \vec{V}_A = V_C + \vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/C}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_A = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/C}) \\ (\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/C}) \perp \vec{r}_{A/C} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_A \perp \vec{r}_{A/C}$$

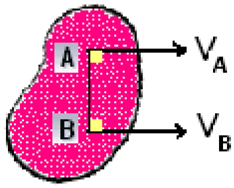
$$\vec{V}_A = (\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/C}) = (\vec{\omega}\times\vec{C}_A)$$



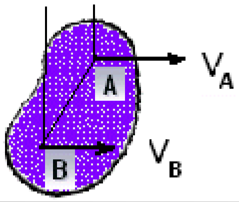
$$V_A \parallel V_B$$
$$V_A \perp AB$$



$$V_A \parallel V_B$$
$$V_A \perp AB$$
$$V_A \neq V_B$$



$$V_A \perp AB$$
$$V_A \parallel V_B$$
$$V_A = V_B$$
$$\omega = 0$$



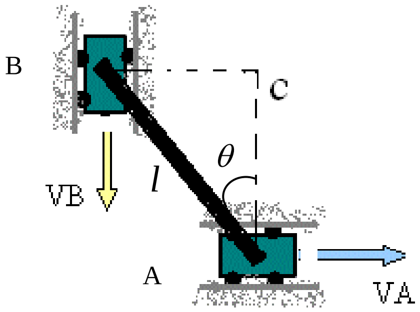
$$V_A \parallel V_B$$
$$V_A \not\perp AB$$
$$\omega = 0$$

مثال5– 7 : در شکل زیر سرعت طوقه B را برحسب V_A و θ بدست

حل :

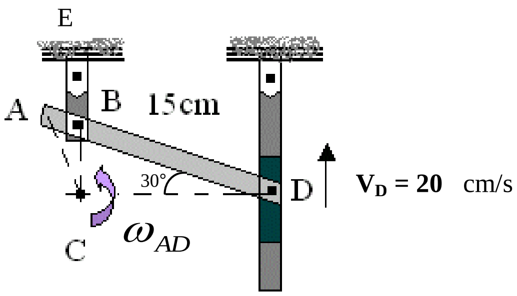
$$V_A = (AC)\omega = (l\cos\theta)\omega$$

$$\omega = \frac{V_A}{l\cos\theta} \quad , \quad V_B = V_A \tan\theta$$



مثال5– 8 : طوقه D با سرعت $20\ {}^{cm}\!/_{s}$ به سمت بالا درحال حرکت می باشد . طول BD برابر $15\ cm$ و طول AB برابر 10 cm است. مطلوب است :

$$\omega_{AD} = ? \ , \ V_B = ? \ , \ V_A = ?$$



حل : برای میله BE نقطه E مرکز دوران است پس سرعت B افقی است.

$$V_D = (DC)\,\omega_{AD} \Rightarrow \omega_{AD} = \frac{V_D}{DC} = \frac{20}{15\cos 30^\circ} = 1.54\ {}^{rad}\!/_{s}\ \circlearrowright$$

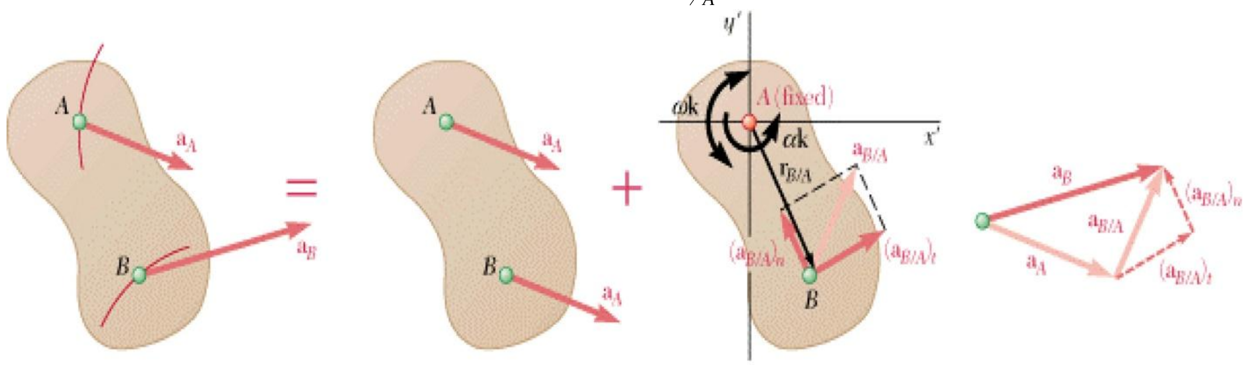
$$V_B = (BC)\,\omega_{AD} = (15\sin 30^\circ)(1.54) \Rightarrow V_B = 11.55\ {}^{cm}\!/_{s} \leftarrow$$

$$AC = \sqrt{(25\sin 30^\circ)^2 + (10\cos 30^\circ)^2} \Rightarrow AC = 15.21\ cm$$

$$V_A = (AC)\,\omega_{AD} = (15.21)(1.54) \Rightarrow V_A = 23.4\ {}^{cm}\!/_{s}\ \ 34.7^\circ$$

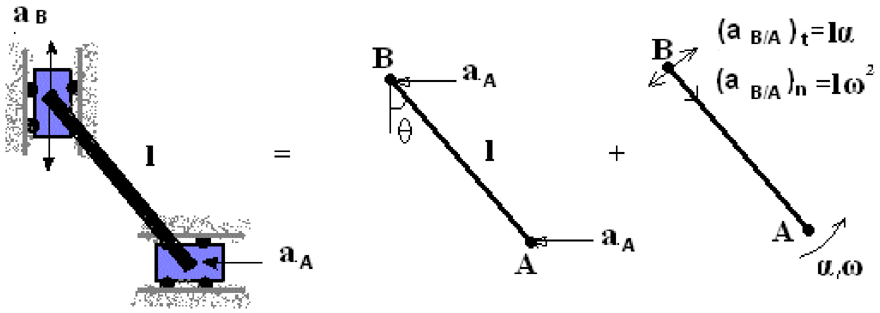
شتاب مطلق و نسبی در حرکت صفحه‌ای

انتقال با $\vec{a}_A$ + دوران با $\vec{a}_{B/A}$



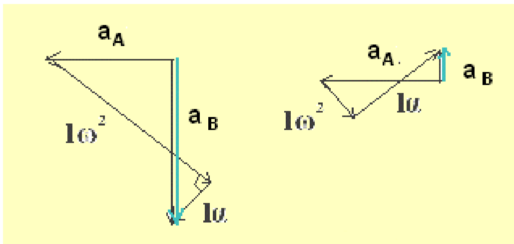
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (a_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t \quad , \quad (\vec{a}_{B/A})_t = (AB)\alpha \quad , \quad (\vec{a}_{B/A})_n = (AB)\omega^2$$

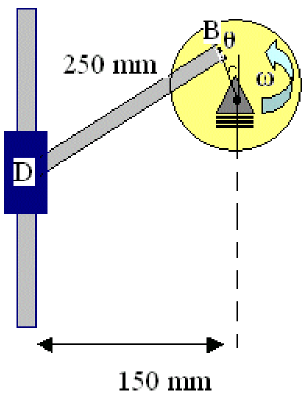


$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (a_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$$



مثال5-9 : اگر یک دیسک با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = 500\ rpm$ در حال دوران باشد، مطلوب است : شتاب طوقه D در حالت $\theta = 90°\ ,\ \theta = 180°$. (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک $50\ mm$ می باشد.)



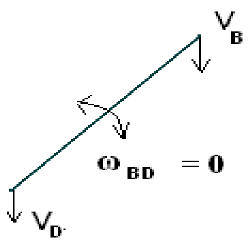
حل :

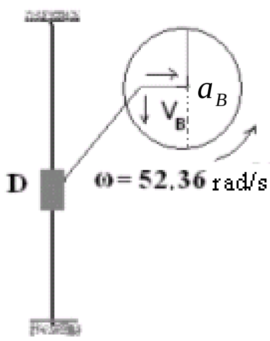
$$\omega = 500\ rpm = \frac{500 \times 2\pi}{60} = 52.36\ rad/s$$

در حالت $\theta = 90°$

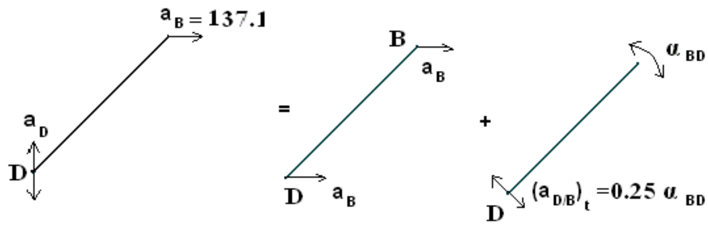
$$a_B = (0.05)(52.36)^2 = 137.1\ m/s^2$$

$$V_B = (0.05)(52.36) = 2.62\ m/s$$

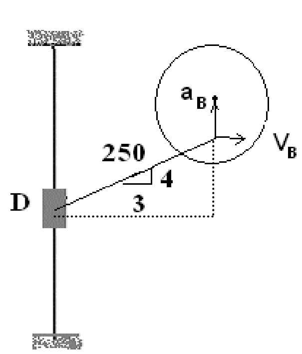




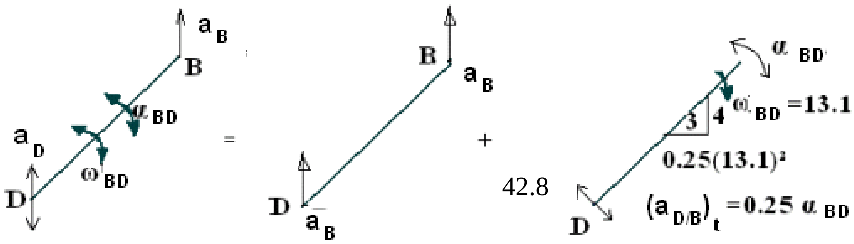
$$\omega_{BD}=0 \Rightarrow (a_{BD})_n=0$$
$$(a_{D/B})_t=0.25\times\alpha_{BD}$$
$$\vec{a}_D=\vec{a}_B+\vec{a}_{D/B}$$
$$[a_D \updownarrow]=[137.1 \rightarrow]+[0.25\alpha_{BD} \overset{23.6^\circ}{\searrow}]$$
$$\Rightarrow a_D=59.8\ m/s^2 \uparrow$$



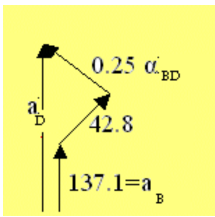
در حالت $\theta=180^\circ$



$$a_B=137.1\ m/s^2$$
$$V_B=BC(\omega_{BD})=2.62 \quad \Rightarrow 0.2\omega_{BD}=2.62 \Rightarrow \omega_{BD}=13.1\ rad/s$$
$$\vec{a}_D=\vec{a}_B+\vec{a}_{D/B}$$
$$\vec{a}_D=\vec{a}_B+(\vec{a}_{D/B})_n+(\vec{a}_{B/D})_t$$

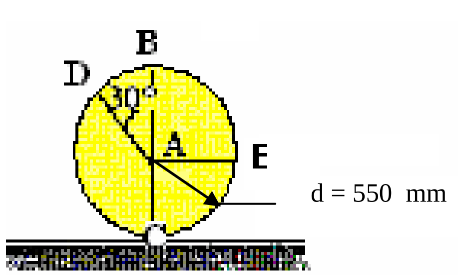


$$[a_D \updownarrow]=[137.1 \uparrow]+[42.8 \nearrow]+[.025\alpha_{BD} \nwarrow\!\!\searrow]$$
$$\Rightarrow a_D=190.65\ m/s^2 \uparrow$$

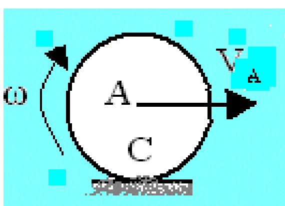


مثال5- 10 : اتومبیلی با سرعت ثابت $90\,km/h$ در حرکت به سمت راست می باشد . مطلوب است :

$$a_C=?\ ,\ a_D=?\ ,\ a_B=?\ ,\ a_E=?$$

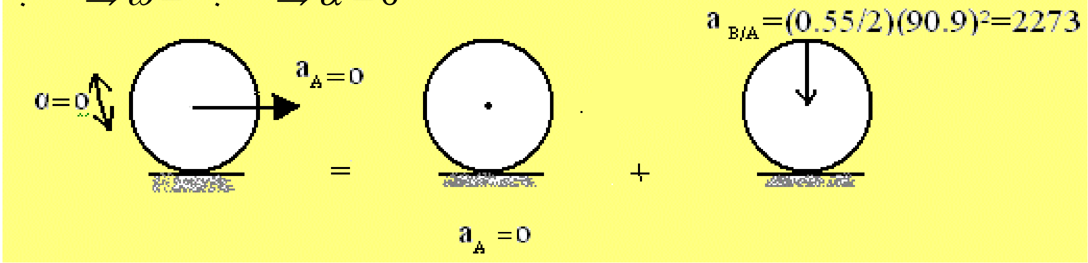


حل :



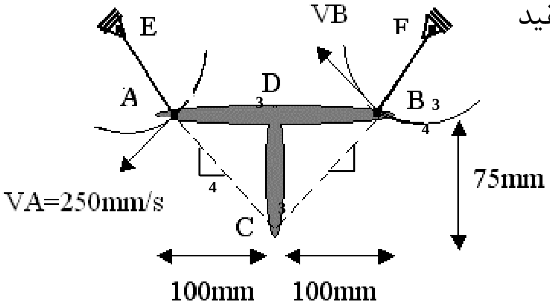
$$V_A=90\ km/h=25\ m/s \Rightarrow a_A=0$$
$$V_A=\frac{d}{2}\omega \ \Rightarrow\ 25=\frac{0.55}{2}\omega \ \Rightarrow\ \omega=90.9\ rad/s$$

$V_A =$ ثابت $\Rightarrow \omega =$ ثابت $\Rightarrow \alpha = 0$



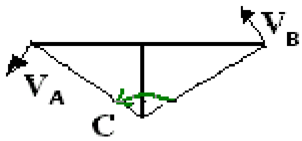
$\Rightarrow a_B = a_C = a_D = a_E = 2273(m/s^2)$ همگی به سمت مرکز هستند.

مثال5- 11 : میله زیر از نقاط A و B به تکیه گاه های E و F مقید است . مطلوب است : $\alpha = ?$ و $a_C = ?$



$BF = AE = 100\,mm\,,\, V_A = 250\ mm/s$ و $\dfrac{dV_A}{dt} = 0$

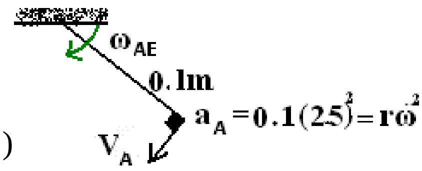
حل :

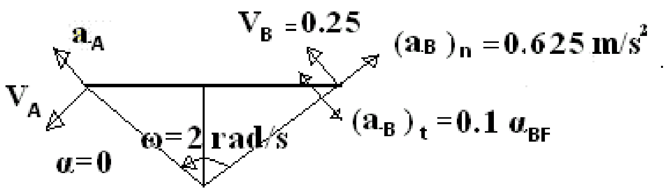


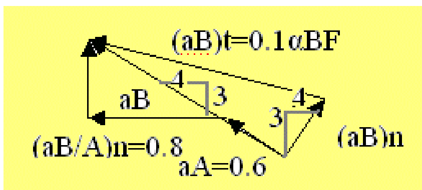
$$V_A = (AC)\omega \Rightarrow \omega = \frac{0.25}{.0.125} = 2\ rad/s$$

$$V_A = (AE)\omega_{AE} \Rightarrow \omega_{AE} = \omega_{BF} = \frac{0.25}{.0.1} = 2.5\ rad/s$$

$$a_A = (a_A)_n = r\omega_{AE}^{\ 2} = 0.1(2.5)^2[= \frac{V^2}{r} = \frac{(0.25)^2}{0.1}] = .625(m/s^2)$$





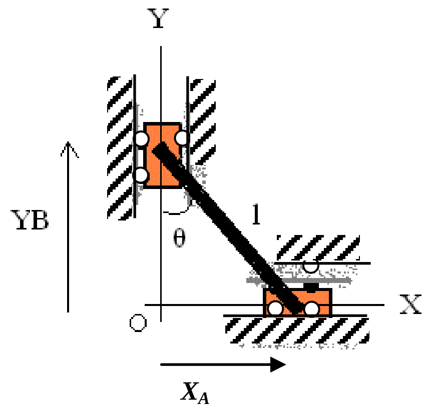


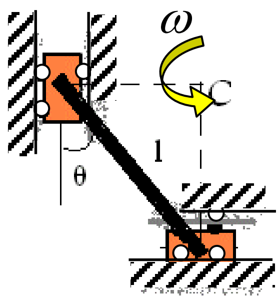
$$\begin{cases} (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t \\ (a_B)_n = 0.625\ m/s^2 \ ,\ (a_B)_t = 0.1\alpha_{BF} \\ (a_{B/A})_n = 0.2\omega^2 = 0.8\ m/s^2 ,\ (a_{B/A})_t = 0.2\alpha \end{cases} \Rightarrow [.625 \nearrow] + [0.1\alpha_{BF} \searrow] = [.625 \nwarrow] + [.8 \leftarrow] + [0.2\alpha \updownarrow]$$

$$\Rightarrow \alpha = 12(rad/s)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + (\vec{a}_{C/A})_n + (\vec{a}_{C/A})_t = [.625\nwarrow] + [.125\times 2^2\nwarrow] + [.125\times 12\nearrow] = 1.875(m/s^2)\uparrow$$

حرکت صفحه ای به روش پارامتری





$$x_A = l\sin\theta \;,\; y_B = l\cos\theta$$

$$V_A = \frac{dx_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l\sin\theta) = l\dot{\theta}\cos\theta = l\omega\cos\theta$$

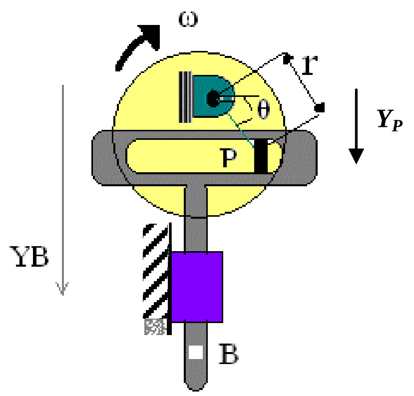
$$V_B = \frac{dy_B}{dt} = \frac{d}{dt}(l\cos\theta) = -l\dot{\theta}\sin\theta = -l\omega\sin\theta$$

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l\omega\cos\theta) = l\dot{\omega}\cos\theta - l\omega^2\sin\theta = l\alpha\cos\theta - l\omega^2\sin\theta$$

$$a_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{d}{dt}(-l\omega\sin\theta) = -l\dot{\omega}\sin\theta - l\omega^2\cos\theta = -l\alpha\sin\theta - l\omega^2\cos\theta$$

مثال5–12 : میله T شکل توسط یک پین به دیسکی که با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α درحال حرکت است متصل شده است . فاصله پین تا مرکز دیسک برابر r می باشد .

مطلوب است : $V_B = ?\;,\; a_B = ?$

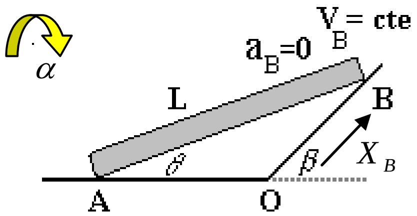


حل :

$$\begin{cases} y_B = y_p + C \\ y_p = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow y_B = r\sin\theta + C \Rightarrow V_B = \frac{dy_B}{dt} = r\omega\cos\theta \;\Rightarrow\; a_B = \frac{dV_B}{dt} = r\alpha\cos\theta - r\omega^2\sin\theta$$

مثال5-13 : در میله AB قسمت B میله با سرعت ثابت V_B حرکت می کند مطلوبست :

$\omega_{AB} = ?\ ,\ \ \alpha_{AB} = ?$



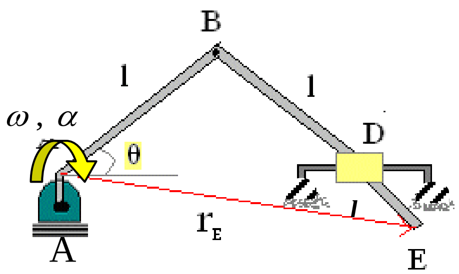
حل :

$$\frac{X_B}{Sin\theta} = \frac{L}{Sin\beta} \Rightarrow V_B = \frac{dX_B}{dt} = \frac{L\omega Cos\theta}{Sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = \frac{V_B Sin\beta}{LCos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{AB} = \dot{\omega}_{AB} = \frac{V_B Sin\beta}{L} \times \frac{\omega_{AB} Sin\theta}{Cos^2\theta} = \frac{V^2{}_B Sin^2\beta}{L^2 Cos^3\theta} Sin\theta$$

مثال5-14 : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است . مطلوب است :

$\vec{V}_E = ?\ ,\ \ \vec{a}_E = ?$



حل :

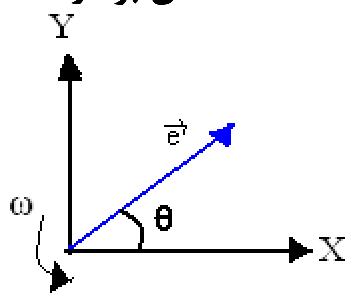
$\vec{r}_E = 3\,l\cos\theta\,\vec{i}\ \text{-}\ l\ \sin\theta\,\vec{j}$

$$\vec{V}_E = \frac{d}{dt}\vec{r}_E \quad , \quad \vec{a}_E = \frac{d\vec{V}_E}{dt}$$

$$\Rightarrow \ \vec{V}_E = -3l\omega\sin\theta\,\vec{i}\ \text{-}\ l\omega\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_E = -3l(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta)\vec{i} - l(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)\vec{j} = -3l(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta)\vec{i} - l(\alpha\cos\theta - \omega^2\sin\theta)\vec{j}$$

مشتق بردار متحرک

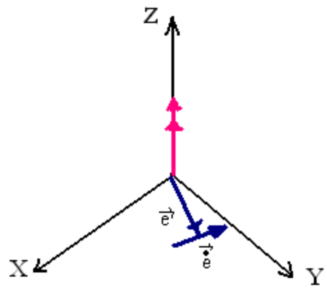


$\vec{e}$ = بردار واحد متحرک که با سرعت زاویه ای ω در حال دوران می باشد

$\vec{e} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$$\frac{d\,\vec{e}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = \text{-}\sin\theta(\dot{\theta})\,\vec{i} + \cos\theta(\dot{\theta})\,\vec{j}$$

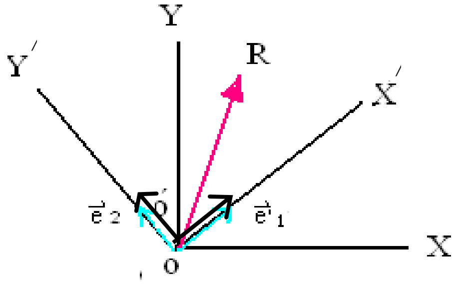
بنابراین:



$$\frac{de}{dt} = \dot{\vec{e}} = -\omega\sin\theta\,\vec{i} + \omega\cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow |\dot{e}| = \omega$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{e}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{e}$$

بردار در دستگاه مختصات مرجع متحرک



$$\vec{R}=R_x\vec{i}+R_y\vec{j}=R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d}{dt}(R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2)$$

$$\Rightarrow\ \dot{\vec{R}}=\dot{R}_1\vec{e}_1+R_1\dot{\vec{e}}_1+\dot{R}_2\vec{e}_2+R_2\dot{\vec{e}}_2$$

که در این روابط OXY دستگاه ثابت و OX´Y´ دستگاه متحرک و $\vec{i},\vec{j}$ بردارهای یکه در دستگاه ثابت و $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ در دستگاه متحرک است. پس داریم:

$$\dot{\vec{R}}=(\dot{R}_1\vec{e}_1+\dot{R}_2\vec{e}_2)+R_1\dot{\vec{e}}_1+R_2\dot{\vec{e}}_2$$

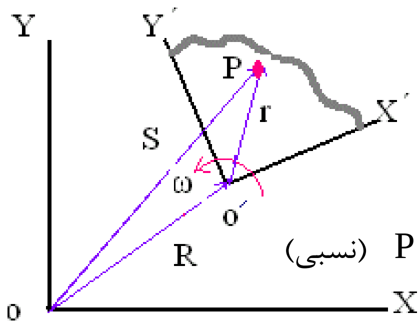
$$\Rightarrow\ \dot{\vec{R}}=\dot{R}'_1+R_1(\vec{\omega}\times\vec{e}_1)+R_2(\vec{\omega}\times\vec{e}_2)\Rightarrow\ \dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'_1+\vec{\omega}\times(R_1\vec{e}_1+R_2\vec{e}_2)$$

$\Rightarrow\dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'+\vec{\omega}\times\vec{R}$ تئوری امگا

در دستگاه مطلق : $\dot{\vec{R}}_{OXY}$

در دستگاه متحرک: $\dot{\vec{R}}'_{O'X'Y'}$

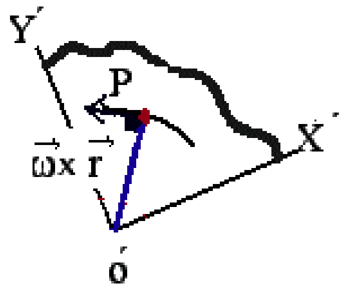
سرعت یک نقطه مادی



دستگاه ثابت : OXY		دستگاه متحرک : O′X′Y′

$\vec{S}$: بردار موقعیت نقطه P

$\vec{R}$: بردار موقعیت نقطه O′ (مطلق) و $\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P (نسبی)

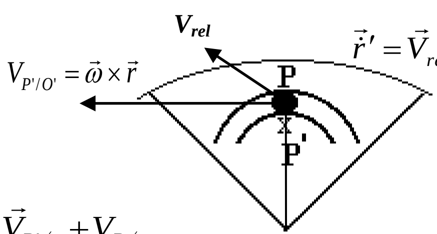


$$\vec{S}=\vec{R}+\vec{r}\quad,\quad \vec{V}_P=\frac{d}{dt}(\vec{S})\qquad\Rightarrow\vec{V}_P=\frac{d}{dt}(\vec{R}+\vec{r})=\frac{d}{dt}(\vec{R})+\frac{d}{dt}(\vec{r})$$

$$\vec{V}_P=\dot{R}+\vec{\omega}\times\vec{r}+\dot{\vec{r}}'$$

سرعت نسبی در دستگاه متحرک = $\dot{\vec{r}}'=\vec{V}_{rel}$

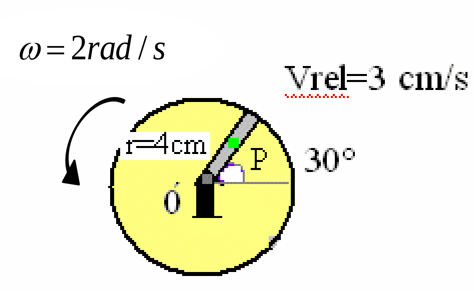
$$\vec{V}=\dot{\vec{R}}+\vec{\omega}\times\vec{r}+\vec{V}_{rel}$$



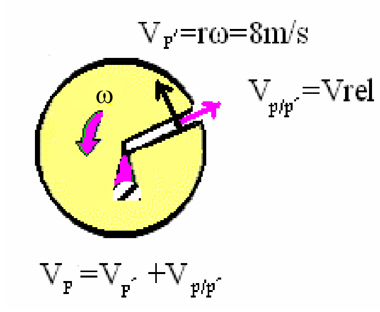
$$\vec{V}_{P/P'}=V_{rel}=\dot{r}'$$

$$\vec{V}_P=\dot{R}+\vec{\omega}\times\vec{r}+\dot{\vec{r}}'=\vec{V}_{O'}+\vec{V}_{P'/O'}+V_{P/P'}$$

مثال5-15 : دیسک شیارداری به شعاع $4\ cm$ و با سرعت زاویه ای $2\ {rad}/{s}$ در حال حرکت است . با توجه به شکل ، سرعت ساچمه P در شیار را بدست آورید . $\vec{V}_P = ?$



حل :



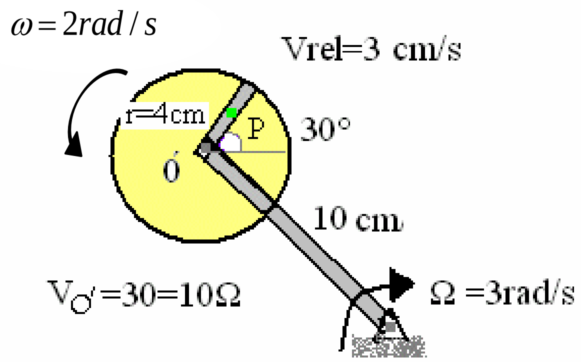
$$\vec{V} = \vec{R} + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{\dot{r}}' \qquad (\vec{\dot{R}} = 0)$$

$$|\vec{\omega}\times\vec{r}| = 2\times 4 = 8 \quad {cm}/{s}$$

$$V_{rel} = \dot{\vec{r}}' = 3 \quad {cm}/{s} \quad \angle 30°$$

$$\vec{V}_P = [8 \ \diagdown\ ] + [3 \ \angle 30°\ ]$$

مثال5-16 : اگر کل سیستم مثال قبل حول نقطه تکیـه گـاه بـا سـرعت زاویـه ای $\Omega = 3 \ {rad}/{s}$ دوران کند، مطلوب است : $\vec{V}_P = ?$

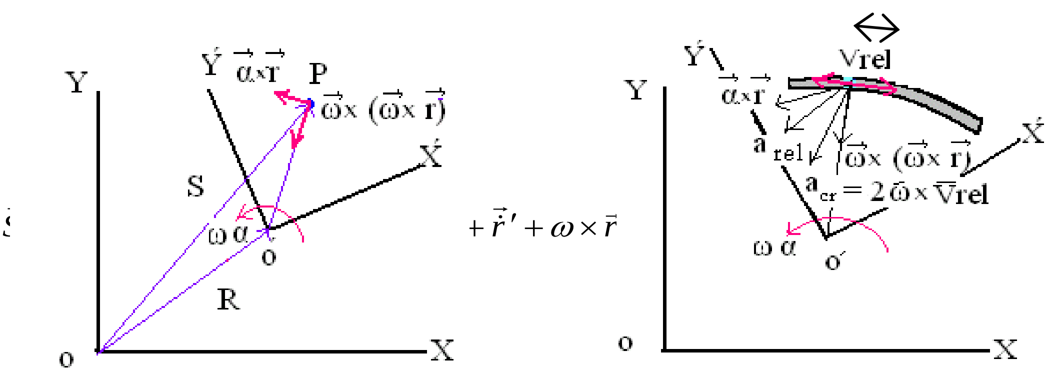


حل :

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{O'} + \vec{V}_{P'/O'} + V_{P/P'} = V_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

$$\vec{V}_P = [30 \ \angle 30°\ ] + [8 \ \overset{30°}{\diagdown}\ ] + [3 \ \angle 30°\ ] = [33 \ \angle 30°\ ] + [8 \ \overset{30°}{\diagdown}\ ] \quad {cm}/{s}$$

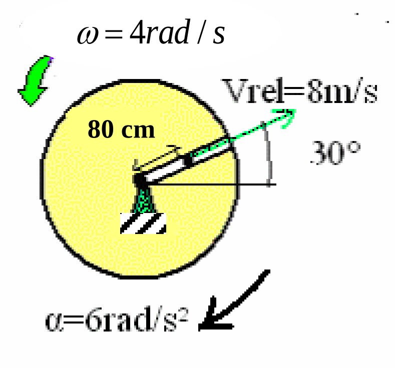
شتاب یک نقطه مادی



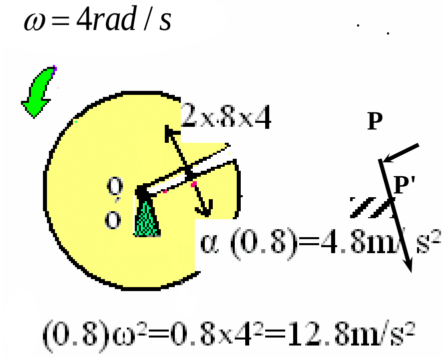
$$\vec{a}_p=\ddot{\vec{S}}=\frac{d}{dt}(\dot{\vec{R}}+\vec{r}'+\vec{\omega}\times\vec{r})=\ddot{\vec{R}}+\frac{d}{dt}(\vec{r}')+\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\ddot{\vec{R}}+(\vec{\ddot{r}}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')+\frac{d}{dt}(\vec{\omega})\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$=\ddot{\vec{R}}+\vec{\ddot{r}}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'+\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{r}'+\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\Rightarrow\vec{a}_P=(\ddot{\vec{R}})+(\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}))+(2\vec{\omega}\times\dot{r}'+\ddot{r}')=\vec{a}_{O'}+\vec{a}_{P'/O'}+\vec{a}_{P/P'}$$
$$2\vec{\omega}\times\vec{r}'=2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}=\vec{a}_{cr}\quad,\quad\vec{\ddot{r}}'=\vec{a}_{rel}$$

مثال5-17 : با توجه به شکل روبرو ، مطلوب است : $\vec{a}_P=?$



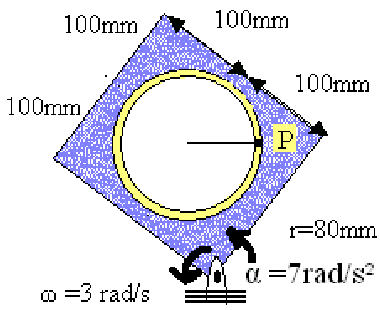
حل :



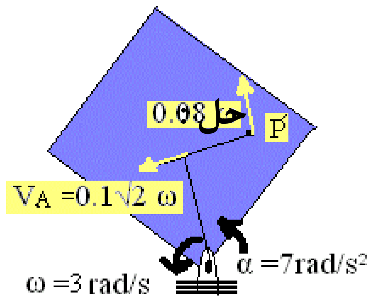
$$\vec{a}_P=\vec{a}_{P/P'}+\vec{a}_{P'}\quad,\quad\vec{a}_{P/P'}=\vec{a}_{cr}+a_{rel}$$
$$\vec{a}_P=[12.8\ \ 30^\circ\swarrow]+[59.2\ \ \searrow 30^\circ]\ m/s^2$$

مثال5-18 : اگر جرم P در داخل شیار دایره ای شکل با سرعت زاویه ای $\dot{\beta}=5\,rad/s$ نسبت به مرکز صفحه و شتاب زاویه ای $\ddot{\beta}=12\,rad/s^2$ در حال دوران باشد مطلوبست:

$\vec{V}_P=?\ ,\ \vec{a}_P=?$ ($\dot{\beta}$ و $\ddot{\beta}$ ساعتگرد می باشند)



حل :

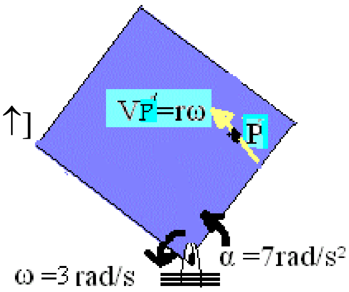


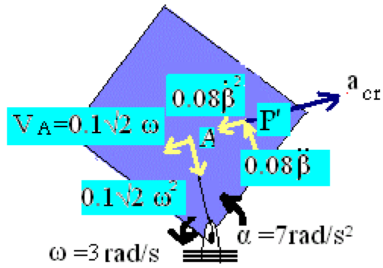
$$\vec{V}_P=\vec{V}_{P'}+V_{P/P'}$$
$$\vec{V}_{P'}=\vec{V}o+\vec{V}_{P'/O}=[0.1\sqrt{2}\,(3)\leftarrow]+[0.08(3)\uparrow]=[0.3\sqrt{2}\leftarrow]+[0.24\uparrow]\ m/s$$
$$\vec{V}_{P/P'}=[0.08\dot{\beta}\downarrow]=[0.4\downarrow]\ m/s$$
$$\Rightarrow\vec{V}_P=[0.3\sqrt{2}\leftarrow]+[0.24\uparrow]+[0.4\downarrow]=[0.3\sqrt{2}\leftarrow]+[0.16\downarrow]\ m/s$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + a_{P/P'}$$

$$\vec{a}_{P'} = \vec{a}_O + \vec{a}_{P'/O}$$

$$\vec{a}_O = [0.1\sqrt{2}\alpha \leftarrow] + [0.9\sqrt{2}\downarrow] \;,\; \vec{a}_{P'/O} = [0.08\omega^2 \leftarrow] + [0.08\alpha \uparrow]$$





$$\vec{a}_{P/P'} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel}$$

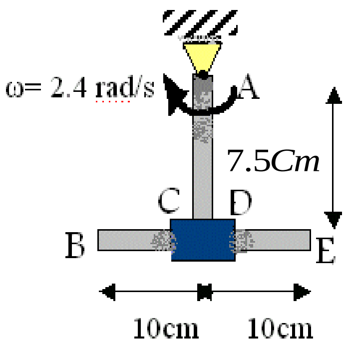
$$\vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega} \times V_{rel} = (2)(3)(0.4) = [2.4 \rightarrow] \, m/s^2$$

$$\vec{a}_{rel} = (\vec{a}_{rel})_n + (\vec{a}_{rel})_n = [0.08(12)\downarrow] + [0.08(5)^2 \leftarrow]$$

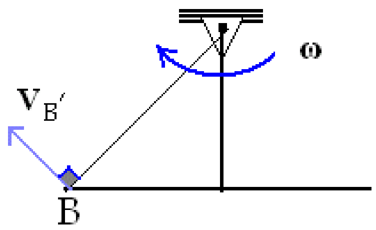
$$\Rightarrow \vec{a}_P = [0.7\sqrt{2} \leftarrow] + [0.9\sqrt{2}\downarrow] + [0.72 \leftarrow] + [0.56 \uparrow] + [2.4 \rightarrow] + [0.96 \downarrow] + [2 \leftarrow]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = [1.31 \rightarrow] + [1.67 \downarrow] \, m/s^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_P = \sqrt{(1.31)^2 + (1.67)^2} = 2.12 \, m/s^2$$

مثال 5-19 : اگر $V_{BE/CD} = 15 \, cm/s \rightarrow$ باشد آنگاه سرعت و شتاب نقطه B چقدر است؟



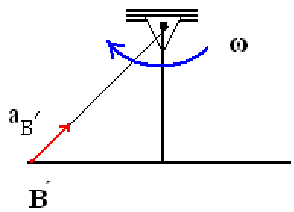
حل :



$$\vec{V}_B = \vec{V}_{B'} + \vec{V}_{B/B'} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_{B'} + \vec{V}_{BE/CD}$$

$$V_{B'} = (AB')\omega = (12.5)2.4 = 30 \, cm/s$$

$$\vec{V}_B = [30 \quad] + [15 \rightarrow] \Rightarrow \vec{V}_B = [24.2 \, cm/s \quad 82.9^\circ \quad]$$



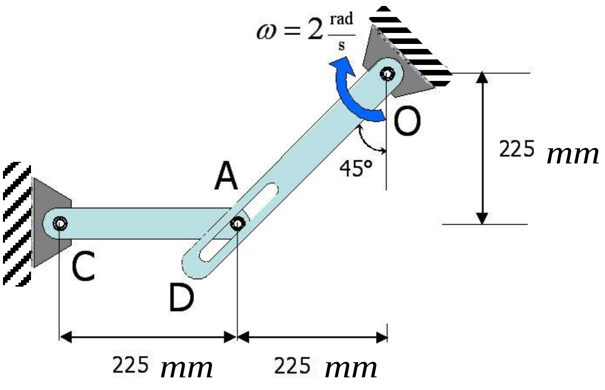
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B'} + \vec{a}_{B/B'}$$

$$a_{B'} = (AB')\omega^2 = (12.5)(2.4)^2 = 72 \, cm/s^2$$

$$a_{B/B'} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel} \;,\; \vec{a}_{rel} = 0 \;,\; \vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} = 2(2.4)(15) = 72 \, cm/s^2 \downarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = [72 \quad] + [72 \downarrow] = 64.4 \, cm/s^2 \quad 26.6^\circ$$

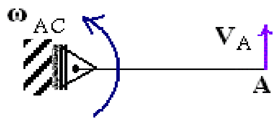
مثال5-20 : باتوجه به شکل مطلوب است :

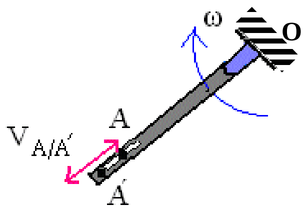


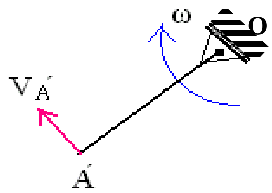
$\omega_{AC} = ?\quad,\ \alpha_{AC} = ?$

$V_{A/OD} = ?\ ,\ a_{A/OD} = ?$

حل :



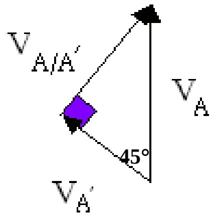




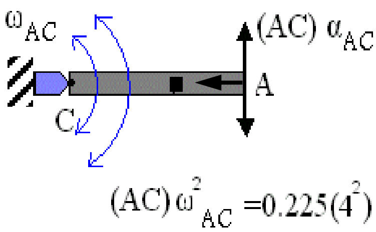
$V_{A'} = 0.225\sqrt{2}\,\omega = 0.45\sqrt{2}\ m/s$ 45°

$V_A Cos45 = V_{A'} \;\Rightarrow\; V_A = 0.45\sqrt{2}(\sqrt{2}) = 0.45\times 2 = 0.9\ \ m/s\ \uparrow$

$V_A = (AC)\,\omega_{AC} \;\Rightarrow\; \omega_{AC} = \dfrac{V_A}{AC} = 4\ \ rad/s$



$$\begin{cases}(a_A)_t = (AC)\alpha_{AC} = 0.225\alpha_{AC} \updownarrow \\ (a_A)_n = (AC)\omega_{AC}^{\ 2} = 0.225(4)^2 = 3.6\,m/s^2 \leftarrow\end{cases} \Rightarrow \vec{a}_A = [3.6\leftarrow] + [0.225\ \ \alpha_{AC}\updownarrow]\ I$$



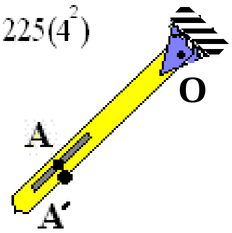
$\vec{a}_A = \vec{a}_{A'} + \vec{a}_{A/A'}$

$\vec{a}_{A'} = (A'O)\omega^2 = 0.225\sqrt{2}(2)^2 = 0.9\sqrt{2}\,m/s$ 45°

$\vec{a}_{A'/A} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel}$

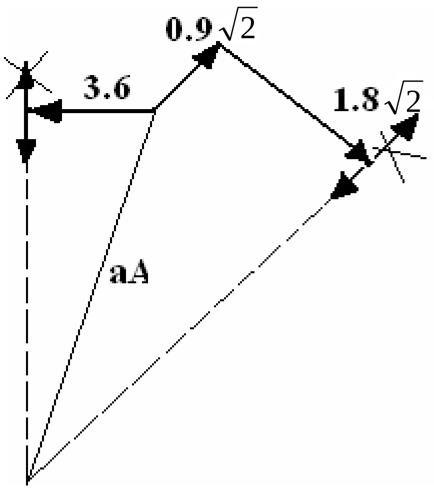
$\vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{rel} = 2(2)(0.45\sqrt{2}) = 1.8\,\sqrt{2}\ \ m/s^2$ 45°

45°



$$\vec{a}_{rel} = [a_{rel} \swarrow\!\!\nearrow \quad]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = [0.9\sqrt{2} \;\angle 45^\circ] + [1.8\sqrt{2} \;\searrow 45^\circ] + [a_{rel} \;\swarrow\!\!\nearrow 45^\circ] \quad \text{II}$$

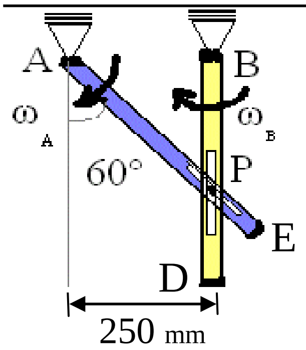


$$I, II \Rightarrow [3.6 \leftarrow] + [0.225\,\alpha_{AC} \updownarrow] = [0.9\sqrt{2} \;\angle 45^\circ] + [1.8\sqrt{2} \;\searrow 45^\circ] + [a_{rel} \;\swarrow\!\!\nearrow 45^\circ]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{AC} = 32\, {rad}/{s^2} \;\circlearrowright \\ a_{rel} = 8.91\, {m}/{s^2} \;45^\circ \swarrow \end{cases}$$

مثال5- 21 : با توجه به شکل روبرو داریم .

در لحظه نشان داده شده مطلوب است :



$$\omega_A = 4\, {rad}/{s} \;,\; \omega_B = 5\, {rad}/{s}$$

$$\vec{V}_P = ? \quad , \quad \vec{a}_P = ?$$

حل :

$$\begin{cases} \vec{V}_P = (\vec{V}_{P'})_{AE} + (\vec{V}_{P/P'})_{AE} \Rightarrow \vec{V}_P = [0.288(4) \;\; 60^\circ \swarrow] + (\vec{V}_{P/P'})_{AE} \;\; 30^\circ \searrow\!\!\nwarrow \;] \\ \vec{V}_P = (\vec{V}_P)_{BD} + (\vec{V}_{P/P'})_{BD} \Rightarrow \vec{V}_P = [0.144(5) \leftarrow] + [(V_{P/P'})_{BD} \updownarrow] \end{cases}$$

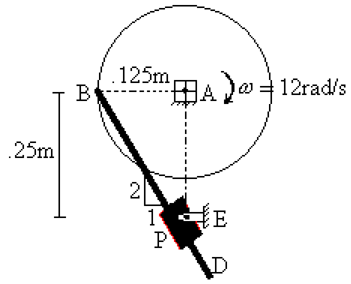
$$\Rightarrow \vec{V}_P = 1.17\, {m}/{s} \;\; 51.8^\circ \swarrow \;,\; (V_{P/P'})_{AE} = 0.17\, {m}/{s} \;\; 30^\circ \nwarrow \;,\; (V_{P/P'})_{BD} = 0.92\, {m}/{s} \downarrow$$

$$\begin{cases} \vec{a}_P = (\vec{a}_{P'})_{BD} + (a_{P/P'})_{BD} \;,\; (a_{P'})_{BD} = 0.144(5)^2 \;,\; (a_{P/P'})_{BD} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel} = [2(5)(0.92) \leftarrow] + (\vec{a}_{rel} \updownarrow)_{BD} \\ a_P = (\vec{a}_{P'})_{AE} + (\vec{a}_{P/P'})_{AE} \;,\; (a_{P'})_{AE} = 0.288(4)^2 \;,\; (\vec{a}_{P/P'})_{AE} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel} = [2(4)(0.17) \;\angle 60^\circ] + (\vec{a}_{rel})_{AE} \end{cases}$$

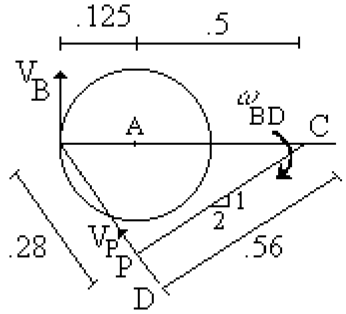
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_P = [0.288(4)^2 \;\; 30^\circ \nwarrow] + [1.33 \;\angle 60^\circ] + [(\vec{a}_{rel})_{AE} \;\; 30^\circ \searrow\!\!\nwarrow \;] \\ \vec{a}_P = [0.144(5)^2 \uparrow] + [9.2 \leftarrow] + [(a_{rel})_{BD} \updownarrow] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{a}_{rel})_{AE} = 6.79\, {m}/{s^2} \;\; 30^\circ \nwarrow \\ (a_{rel})_{BD} = 3.27\, {m}/{s^2} \;\uparrow \\ \vec{a}_P = 11.49\, {m}/{s^2} \;\; 36.7^\circ \nwarrow \end{cases}$$

مثال5- 22: در شکل روبرو مطلوبست : $\omega_{BD},\alpha_{BD},\vec{V}_P,\vec{a}_P=?$



حل :



$$\begin{cases}\vec{V}_B=.125\times 12=1.5m/s\uparrow\\ V_B=\omega_{BD}(r_{B/C})=\omega_{BD}(.125+.5)\end{cases}\Rightarrow \omega_{BD}=2.4rad/s$$

$$\Rightarrow V_P=\omega_{BD}(r_{P/C})=2.4(.56)=1.34m/s$$

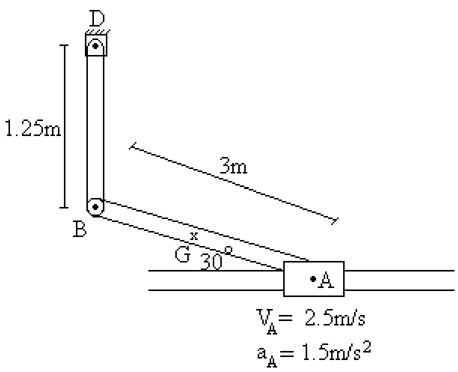
$$\begin{cases}(\overrightarrow{a_B})_n=.125\times 12^2=18m/s^2\rightarrow\\ (\overrightarrow{a_B})_t=0\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{a_B}=18m/s^2\rightarrow \quad (1)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{a_B}=\overrightarrow{a_P}+\overrightarrow{a_{B/P}}\\ \overrightarrow{a_P}=\overrightarrow{a_E}+\overrightarrow{a_{P/E}}=0+\overrightarrow{a_{rel}}+\overrightarrow{a_{cr}}=\overrightarrow{a_{rel}}+[2\overrightarrow{\omega_{BD}}\times\overrightarrow{V_{rel}}]=[a_{rel}]+[2(1.34)(2.4)]\\ \overrightarrow{a_{B/P}}=(\overrightarrow{a_{B/P}})_t+(\overrightarrow{a_{B/P}})_n=[.28\alpha_{BD}]+[.28(2.4)^2]\end{cases}$$

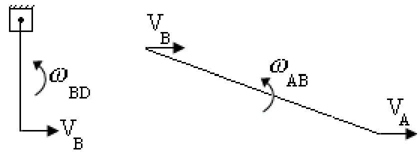
$$\Rightarrow \overrightarrow{a_B}=[a_{rel}]+[2(1.34)(2.4)]+[.28\alpha_{BD}]+[.28(2.4)^2] \quad (2)$$

$$(1)=(2)\Rightarrow\begin{cases}\alpha_{BD}=34.53rad/s^2\\ \overrightarrow{a_P}=9.10m/s^2 \quad 18.47^\circ\end{cases}$$

مثال5- 23: در شکل روبرو مطلوبست : $\alpha_{AB},\vec{a}_B,\vec{a}_G=?$



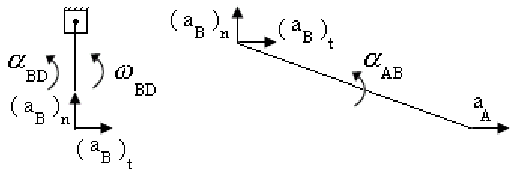
حل :



$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \Rightarrow [V_B \rightarrow] = [V_A \rightarrow] + [3\omega_{AB} \measuredangle 30^\circ] \Rightarrow \omega_{AB} = 0 \;\;,\;\; V_B = V_A = 2.5m/s \rightarrow \\ V_B = \omega_{BD}(1.25) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_{BD} = 2.5/1.25 = 2rad/s$$

$$\ddot{\vec{S}} = \ddot{\vec{R}} + (\ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}) \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\begin{cases} (\overrightarrow{a_B})_n = 1.25 \times 2^2 = 5m/s^2 \uparrow \\ (\overrightarrow{a_B})_t = 1.25\alpha_{BD} \rightarrow \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{a_B} = [5m/s^2 \uparrow] + [1.25\alpha_{BD} \rightarrow] \quad (1)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{B/A}} \\ \overrightarrow{a_A} = 1.5m/s^2 \rightarrow \\ \overrightarrow{a_{B/A}} = (\overrightarrow{a_{B/A}})_t + (\overrightarrow{a_{B/A}})_n = [3\alpha_{AB} \measuredangle 30^\circ] + [0] \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{a_B} = [1.5 \rightarrow] + [3\alpha_{AB} \measuredangle 30^\circ] \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{AB} = 1.93rad/s^2 \circlearrowright \\ \overrightarrow{a_B} = 6.65m/s^2 \measuredangle 48.7^\circ \end{cases}$$

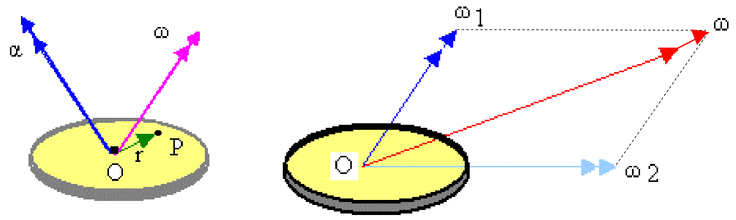
$$\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{G/A}} = [1.5 \rightarrow] + [1.5(1.93) \measuredangle 30^\circ] = 3.86m/s^2 \measuredangle 40.3^\circ$$

حرکت دورانی حول یک نقطه

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2$$

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{\omega}_1\times\vec{r}+\vec{\omega}_2\times\vec{r}$$

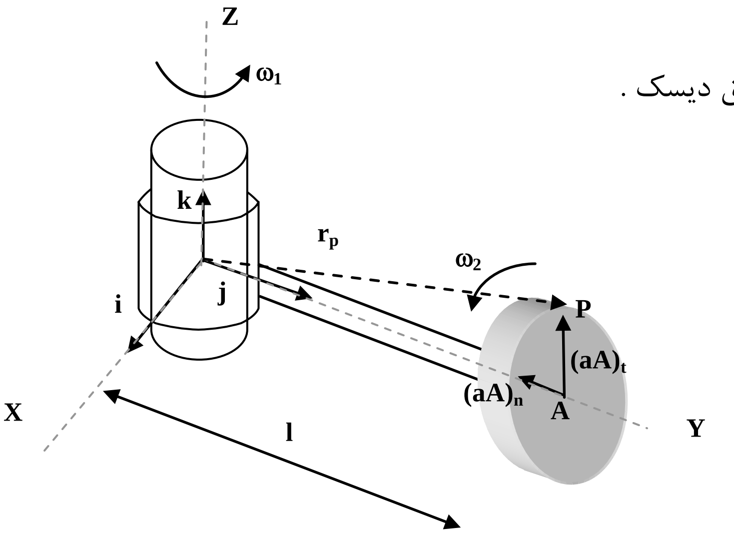
$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$



حرکت کلی

مثال5-24 : دیسک با سرعت زاویه ای ω_2 و شتاب زاویه ای $\dot{\omega}_2$ در حال دوران حول نقطه A و میله OA به طول l ، با سرعت زاویه ای ω_1 و شتاب زاویه ای $\dot{\omega}_1$ درحال دوران حول محور Z می باشد. مطلوب است :

سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای مطلق دیسک .



حل :

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2=\omega_1\vec{k}+\omega_2\vec{j}$$

$$\vec{\alpha}_{Disk}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega})\Rightarrow\vec{\alpha}=\frac{d}{dt}(\omega_1\vec{k}+\omega_2\vec{j})\ ,\ \frac{d\vec{\omega}_1}{dt}=\dot{\vec{\omega}}_1\ ,\ \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}=\dot{\vec{\omega}}_2+\vec{\Omega}\times\vec{\omega}_2\ \ ,\ \ \vec{\Omega}=\vec{\omega}_1$$ تئوری امگا

$$\Rightarrow\vec{\alpha}_{Disk}=\dot{\omega}_1\vec{k}+\dot{\omega}_2\vec{j}+\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2\quad\Rightarrow\vec{\alpha}=\dot{\omega}_1\vec{k}+\dot{\omega}_2\vec{j}-\omega_1\omega_2\vec{i}$$

مثال5-25 : در مثال فوق مطلوب است : $\vec{V}_P=?\ ,\ \vec{a}_P=?$

حل :

روش اول :

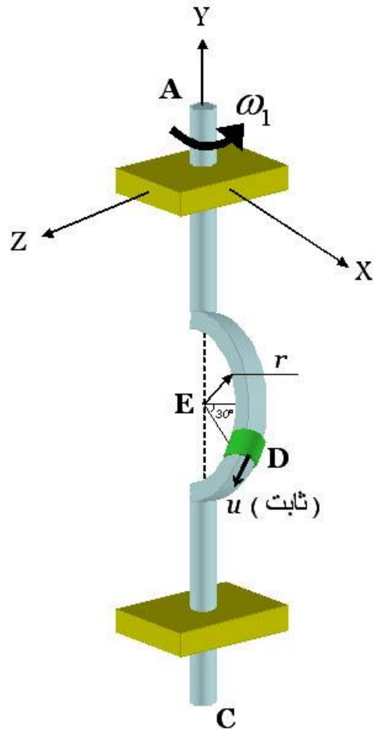
$$\begin{cases}\vec{V}_P=\vec{V}_A+\vec{V}_{P/A}\\ \quad\vec{V}_A=\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{A/O}=\vec{\omega}_1\vec{k}\times l\vec{j}=-l\omega_1\vec{i}\\ \quad\vec{V}_{P/A}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{P/A}=(\omega_1\vec{k}+\omega_2\vec{j})\times(R\vec{k})=R\omega_2\vec{i}\end{cases}\quad\Rightarrow\ \vec{V}_P=-l\omega_1\vec{i}+R\omega_2\vec{i}=(-l\omega_1+R\omega_2)\vec{i}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A} \\ \vec{a}_A = \vec{\dot\omega}_1 \times \vec{r}_{A/O} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{A/O}) = \dot\omega_1 \vec{k} \times (l\vec{j}) + \omega_1 \vec{k} \times (\vec{\omega} \times l\vec{j}) = -\dot\omega_1 l\vec{i} - \omega_1^2 l\vec{j} \\ \vec{a}_{P/A} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) \quad , \quad (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}) = V_{P/A} \\ \vec{a}_{P/A} = (\dot\omega_1 \vec{k} + \dot\omega_2 \vec{j} - \omega_1\omega_2 \vec{i}) \times R\vec{k} + (\omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{j}) \times (R\omega_2 \vec{i}) = R\dot\omega_2 \vec{i} + 2R\omega_1\omega_2 \vec{j} - R\omega_2^2 \vec{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = -\dot\omega_1 l\vec{i} - \omega_1^2 l\vec{j} + R\dot\omega_2 \vec{i} + 2R\omega_1\omega_2 \vec{j} - R\omega_2^2 \vec{k} = (-l\dot\omega_1 + R\dot\omega_2)\vec{i} + (-l\omega_1^2 + 2R\omega_1\omega_2)\vec{j} - R\omega_2^2 \vec{k}$$

روش دوم : از همان ابتدا و بدون واسطه سرعت و شتاب را نسبت به مبدا بدست می آوردیم. $\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O})$, $\vec{V}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O} = (\omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{j}) \times (l\vec{j} + R\vec{k})$

مثال5-26: میله AC در صفحه XY قراردارد وباسرعت زاویه ای ω_1 در حال دوران است. طوقه D با سرعت ثابت u ، روی میله در حال پائین آمدن است. در لحظه ای که طوقه روی قسمت دایره ای شکل میله (به شعاع r) ، با افق زاویه $30°$ می سازد ؛ مطلوب است: $\vec{V}_D, \vec{a}_D = ?$



حل :

$$\begin{cases} \vec{V}_D = \vec{V}_{D'} + \vec{V}_{D/D'} \\ \quad \vec{V}_{D'} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{D/E} = (\omega_1 \vec{j}) \times (r\cos 30^\circ \vec{i} - r\sin 30^\circ \vec{j}) = -r\omega_1 \cos 30^\circ \vec{k} \\ \quad \vec{V}_{D/D'} = \vec{u} = u(-\sin 30^\circ \vec{i} - \cos 30^\circ \vec{j}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_D = -u\sin 30^\circ \vec{i} - u\cos 30^\circ \vec{j} - r\omega_1 \cos 30^\circ \vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_D = \vec{a}_{D'} + \vec{a}_{D/D'} \\ \quad \vec{a}_{D'} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{D/E}) = (\vec{\omega}_1 \vec{j}) \times (-r\omega_1 \cos 30^\circ \vec{k}) = -r\omega_1^2 \cos 30^\circ \vec{i} \\ \quad \vec{a}_{D/D'} = \vec{a}_{cr} + \vec{a}_{rel} \\ \qquad \vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_{rel} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{u} = 2(\omega_1 \vec{j}) \times u(-\sin 30^\circ \vec{i} - \cos 30^\circ \vec{j}) = 2\omega_1 u \sin 30^\circ \vec{k} \\ \qquad (\vec{a}_{rel})_t = \frac{du}{dt} = 0 \quad , \quad (\vec{a}_{rel})_n = \frac{u^2}{r} \;\Rightarrow\; \vec{a}_{rel} = (\vec{a}_{rel})_n = \frac{u^2}{r}(-\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_D = -r\omega_1^2 \cos 30^\circ \vec{i} + 2\omega_1 u \sin 30^\circ \vec{k} + \frac{u^2}{r}(-\cos 30^\circ \vec{i} + \sin 30^\circ \vec{j})$$

فصل ششم

حرکت صفحه‌ای اجسام

(نیروها و شتاب)

فهرست

در این فصل به سینتیک اجسام صلب می پردازیم.یعنی روابط موجود میان نیروهای وارد بر یک جسم صلب،شکل و جرم جسم و حرکت حاصل را مطالعه می کنیم.

از روابطی که در گذشته فراگرفتیم استفاده می کنیم:

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} = \overrightarrow{m\bar{a}} \qquad \sum \vec{M}_G = \overrightarrow{\dot{H}_G}$$

$$\overrightarrow{H}_G = \sum \overrightarrow{r_i'} \times \Delta m_i \overrightarrow{V_i'} \qquad \overrightarrow{V_i'} = \vec{\omega} \times \vec{r_i'} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{H_G} = \underbrace{(\sum r_i'^{2} . \Delta m_i)}\omega$$

$\bar{I}$: (ممان اینرسی جرم نسبت به مرکز جرم)

(ممان اینرسی سطح)

(ممان اینرسی جرم)

$$\begin{cases} I_x = \int x^2 \, dA \\ I_m = \int r^2 \, dM = \rho t \bar{I} \end{cases}$$

نیروی لنگر مؤثر

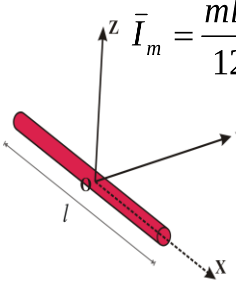
$$\Rightarrow \sum M_G = \bar{I}\alpha \quad , \quad \sum M_G = (\sum M_G)_{eff}$$

<u>**اصل دالامبر**</u> (در حالت دینامیکی) :

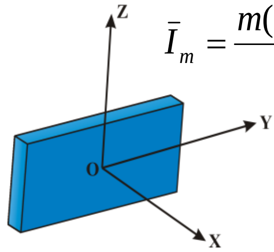
$$\begin{cases} 1) \sum F = \dot{L} = m\bar{a} \\ 2) \sum M_G = \dot{H}_G = \bar{I}\alpha \end{cases}$$

ممان اینرسی جرمی چند جسم پرکاربرد:

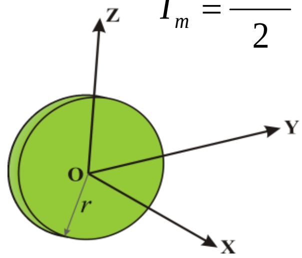
$$\bar{I}_m = \frac{ml^2}{12}$$



$$\bar{I}_m = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$$



$$\bar{I}_m = \frac{mr^2}{2}$$



<u>**حالات خاص حرکت**</u>

1) حرکت فقط انتقالی $(\alpha = 0)$

$$\sum F = m\bar{a} \quad , \quad \sum M_G = \bar{I}\alpha = 0$$

2) حرکت فقط دورانی حول محور ثابت $(\bar{a} = 0)$

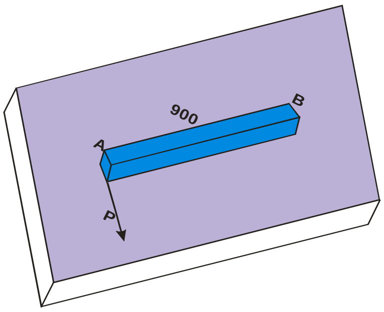
$$\sum F = m\bar{a} = 0 \quad , \quad \sum M_G = \bar{I}\alpha$$

مثال6-1: در صورتی که P=2.75 N و جرم جسم m=1.5 Kg باشد، مطلوب است:

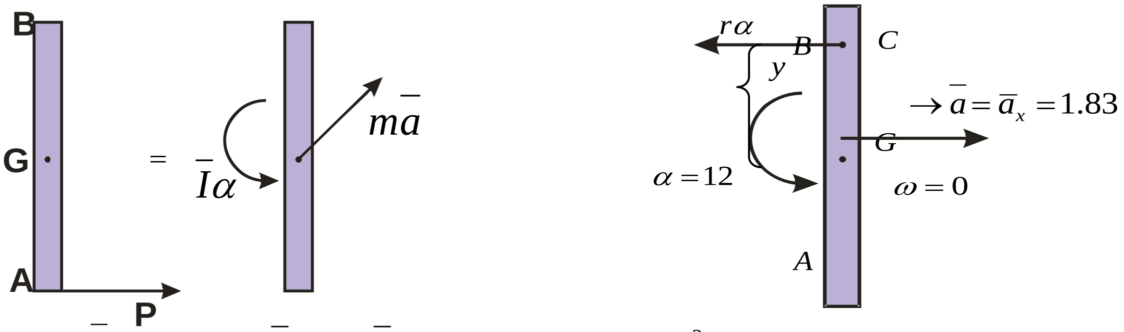
الف)شتاب زاویه‌ای میله.

ب) شتاب مرکز جرم میله.

ج)محل نقطه‌ای که شتاب آن صفر است.



حل:



$$\rightarrow \sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow P = m\bar{a}_x \Rightarrow \bar{a}_x = P/m = 1.83 \ (m/s^2) \rightarrow$$

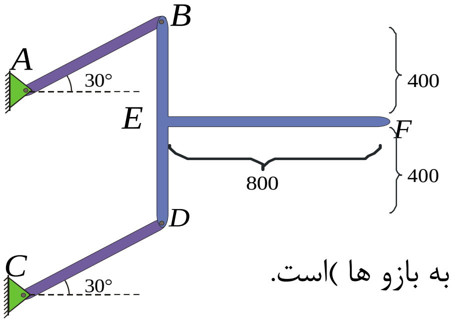
$$\uparrow \sum F_y = ma_y \Rightarrow 0 = m\bar{a}_y \Rightarrow \bar{a}_y = 0$$

$$\sum M_G = \bar{I}\alpha \Rightarrow (\frac{1}{2}) P = \bar{I}\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} p = \frac{ml^2}{12}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{6p}{ml^2} = \frac{16.5}{12.2} (rad/s^2) \circlearrowright$$

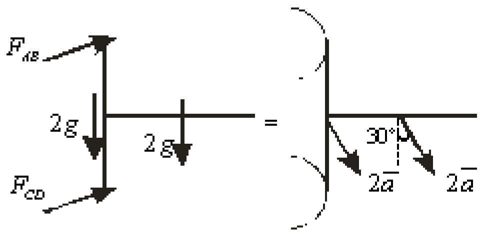
$$\begin{cases} a_c = a_G + a_{c/G} \\ \overrightarrow{a_G} = \overline{\overline{a}} = [1.83 \rightarrow] \Rightarrow 0 = [1.83 \rightarrow] + (a_{c/G})_n + (a_{c/G})_t \Rightarrow 0 = [1.83 \rightarrow] + [y\alpha \leftarrow] \Rightarrow y = 0.15 \ (m) \\ a_c = 0 \end{cases}$$

مثال6-2: مطلوب است نیروی اعضای CD,AB پس از شروع حرکت ؟ (صفحه قائم g ↓)

$L_{AB}=L_{CD}$, $m_{BD} = m_{EF} = 2kg$, $m_{CD} = m_{AB} = 0$



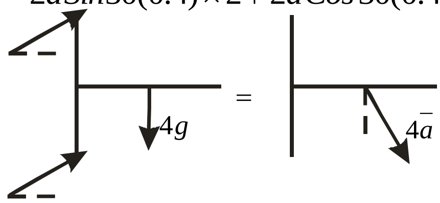
حل: با توجه به شکل ، جسم فقط در حال انتقال (در جهت عمود به بازو ها)است.



$$\searrow \sum F = m\bar{a} \Rightarrow 2(2gCos30) = 2a + 2a \Rightarrow \bar{a} = gCos30$$

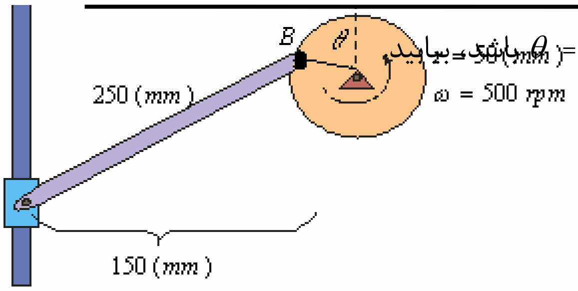
$$\sum M_B=(\sum M_B)_{eff}\ \Rightarrow\ -F_{CD}.\,Cos30(0.8)+2g(0.4)=-2\bar{a}Sin30(0.4)\times 2+2\bar{a}Cos30(0.4)$$

$$\Rightarrow\quad F_{CD}=12.64(N)$$



$$\sum F=m\bar{a}\Rightarrow F_{AB}+F_{CD}-(2g\,Sin30)\times 2=0\Rightarrow F_{AB}=6.98(N)\ \swarrow$$

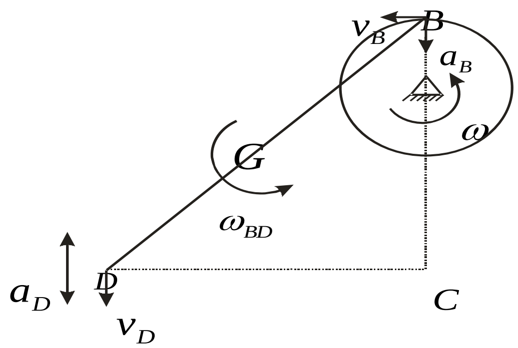
مثال 3-6: عکس العمل تکیه گاه D را به شرطی که $\theta=0$ باشد بیابید
(نقطه B روی محیط دیسک است)

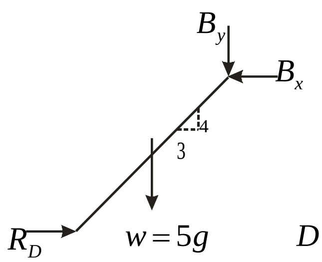


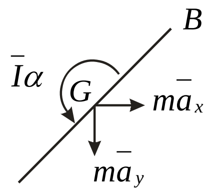
$m_{DB}=5$ kg

$$R_D=?\quad\Leftarrow\theta=0$$

حل:







$$\omega=500(rpm)=52.36$$

$$v_B=r\omega\ =(0.05)(52.36)=2.62\qquad \omega_{BD}=\frac{2.62}{0.2}=13.1$$

$$a_B=(0.05)(52.36)^2=137.1$$

$$\overrightarrow{a_D}=\overrightarrow{a_B}+\overrightarrow{a_{D/B}}$$

$$[a_D\updownarrow]=[137.1\downarrow]+[0.25(13.1)^2\nearrow]+[0.25(\alpha)\nwarrow\!\!\searrow]$$

$$\xrightarrow{+}\quad\Rightarrow 0=0+0.25(13.1)^2(\frac{3}{5})-(0.25)\alpha(\frac{4}{5})\qquad\Rightarrow\ \alpha=128.7\ (\text{rad}/\text{s}^2)\curvearrowright$$

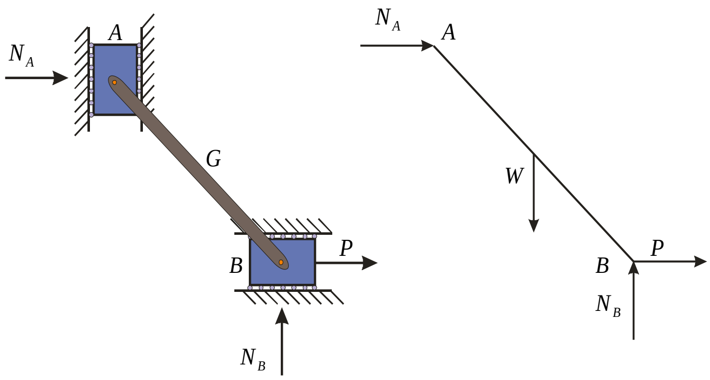
$$\Rightarrow\vec{a}_G=\vec{\bar{a}}=\vec{a}_B+\vec{a}_{G/B}\quad\Rightarrow\quad\vec{\bar{a}}=[137.1\downarrow]+[0.125\ (13.1)^2\nearrow]+[0.125\ (128.7)\nwarrow]\ \Rightarrow\ \vec{\bar{a}}=110.3(m/s^2)\downarrow$$

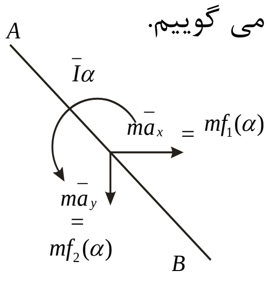
$$\circlearrowleft\sum M_B=(\sum M_B)_{eff}$$

$$\Rightarrow R_D(0.2)+5g(\frac{0.15}{2})=5(110.3)(\frac{0.15}{2})+\tfrac{1}{12}md^2(-128.52)\ \Rightarrow R_D=171.7(N)\rightarrow$$

حرکت مقید در صفحه

در بیشتر کاربردهای مهندسی با اجسام صلبی سروکار داریم که تحت قیدهای معینی حرکت می کنند.در این حالت بین مولفه های شتاب و مرکز جرم جسم و شتاب زاویه ای آن روابط معینی وجود دارد.به چنین حرکتی حرکت مقید می گوییم.

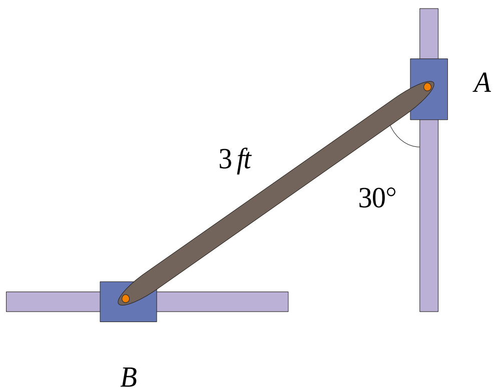




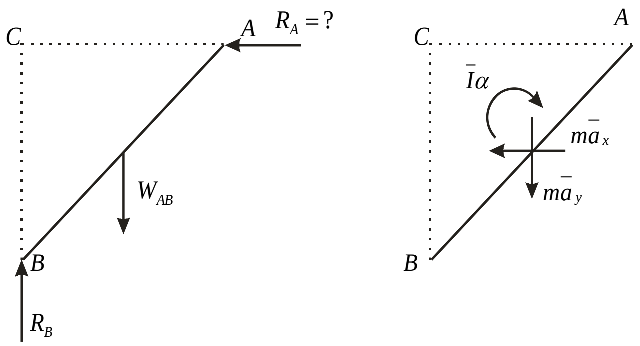
$$\begin{cases} \Sigma f_x = (\Sigma f_x)_{eff} \\ \Sigma f_y = (\Sigma f_y)_{eff} \\ \Sigma M = (\Sigma M)_{eff} \end{cases}$$

مثال 6–4 : اگر سیستم فوق از حالت سکون رها شود و $W_{AB} = 8lb$، مطلوب است خواسته های زیر :

$R_A = ?$ $\quad R_B = ?$ $\quad \alpha_{AB} = ?$



حل :



$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_B} + \overrightarrow{a_{A/B}} = \overrightarrow{a_B} + (\overrightarrow{a_{A/B}})_t + (\overrightarrow{a_{A/B}})_n$$

$$\Rightarrow [a_A \downarrow] = [a_B \leftarrow] + [3\alpha \searrow] + 0$$

$$\Rightarrow \xrightarrow{+} : 0 = -a_B + 3\alpha Cos30 \Rightarrow \quad a_B = 2.6\alpha$$

$$\mathrm{I}\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{a}_{G/B} = (a_B \leftarrow) + (1.5\alpha \searrow) \Rightarrow \bar{a}_x = -a_B + 1.5\alpha\cos 30 = -2.6\alpha + 1.3\alpha = 1.3\alpha \quad , \quad \bar{a}_y = 1.5\alpha Sin30 = 0.75\alpha \downarrow \\ m\bar{a}_x = \dfrac{8}{g}(1.5\alpha\cos 30°) \Rightarrow \bar{a}_x = \dfrac{8}{W}(1.5\alpha\cos 30°) = 1.3\alpha \quad , \quad m\bar{a}_y = \dfrac{8}{g}(1.5\alpha\sin 30°) \Rightarrow \bar{a}_y = \dfrac{8}{W}(1.5\alpha\sin 30°) = 0.75\alpha \end{cases}$$

توجه شود که نتایج آکولاد (I) اولی با استفاده از روابط فصل قبل و دومی از اصل دالامبر بدست آمده است.

$$\Sigma M_C=(\Sigma M_C)_{cff}\Rightarrow 8(\tfrac{3}{2}\sin 30)=\bar{I}\alpha+\frac{8}{g}(1.5\alpha\sin 30)(\frac{L}{2}\sin 30)+\frac{8}{g}(1.5\alpha\cos 30)(\frac{L}{2}\cos 30)\qquad II$$

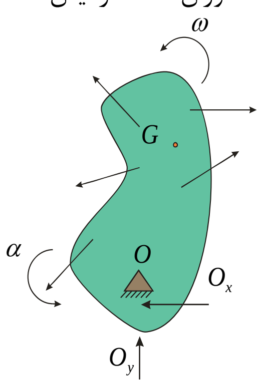
$$I\,,II\ \Rightarrow\ \alpha=8.05\ {}^{rad}\!/_{s^2}\downarrow\ ,\ \bar{a}_x=10.46({}^{ft}\!/_{s^2})\leftarrow\ ,\ \bar{a}_y=6.04({}^{ft}\!/_{s^2})\downarrow$$

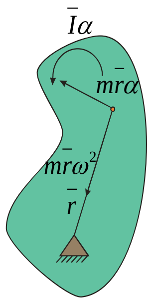
$$\xrightarrow{+}\Sigma f_x=(\Sigma f_x)_{eff}\ \Rightarrow\ -R_A=-m\bar{a}_x\ \Rightarrow\ R_A=2.6(1b)\leftarrow$$

$$+\uparrow\Sigma f_y=(\Sigma f_y)_{eff}\ \Rightarrow\ R_B-W_{AB}=-m\bar{a}_y\ \Rightarrow\ R_B=6.5(1b)\uparrow$$

حرکت دورانی حرکت حول نقطه‌ای غیر از مرکز جرم

این حرکت جسم صلبی است که مقید است حول محور ثابتی که از مرکز جرم آن عبور نمی کند دوران کند.در این حالت داریم:





: حذف می‌شود O_y, O_x

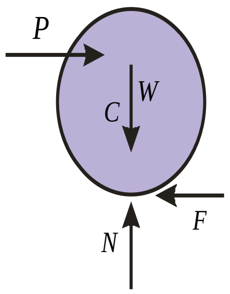
$$(\sum M_o)=(\sum M_o)_{eff}$$

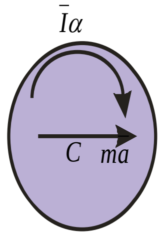
(انتقال ممان)

$$(\sum M_o)=(\bar{I}+m\bar{r}^2)\,\alpha$$

$$\Rightarrow \sum M_o=I_o\alpha$$

حرکت چرخشی دیسک یا چرخ روی سطح صاف





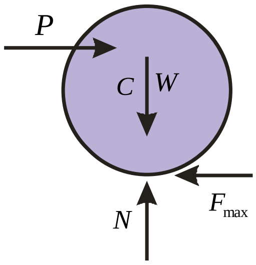
1) حرکت چرخشی بدون لغزش:

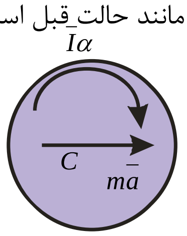
اگر دیسک مقید باشد که غلتش بدون لغزش انجام بدهد، شتاب مرکز جرم و شتاب زاویه ای آن مستقل از هم نیستند. وقتی دیسک بدون لغزش می غلتد،حرکت نسبی بین نقطه تماس دیسک با زمین و خود زمین وجود ندارد بنابراین تا آنجا که به محاسبه ی نیروی اصطکاک F مربوط می شود، می توان دیسک را با قطعه ای که روی سطحی در حال سکون قرار دارد ، یکی دانست.

ضریب اصطکاک استاتیک $\mu_s=$

$$\begin{cases} X=r\theta\ \Rightarrow\ V=r\omega\ \Rightarrow\ \bar{a}=r\alpha \\ F<F_{Max}=\mu_s N \end{cases}$$

2) در آستانه لغزش : چون هنوز لغزش اتفاق نیافتاده شتاب مانند حالت قبل است.



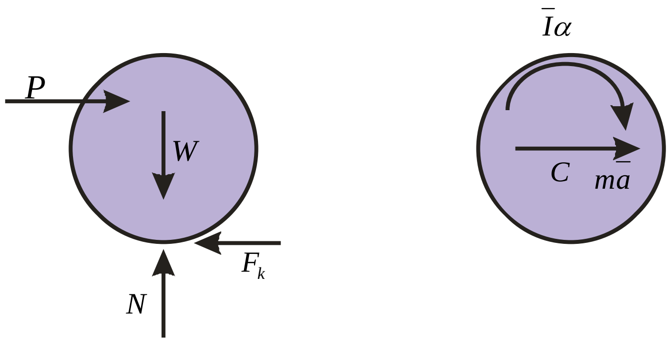


$$\begin{cases} \bar{a}=r\alpha \\ F=F_{max}=\mu_s N \end{cases}$$

3)حرکت چرخشی و لغزش:

وقتی چرخش توام با لغزش بین نقاط تماس دیسک با زمین و خود زمین حرکت نسبی وجود دارد و بزرگی نیروی اصطکاک برابر $F_k = \mu_k N$ است.

ضریب اصطکاک دینامیکی $= \mu_k$



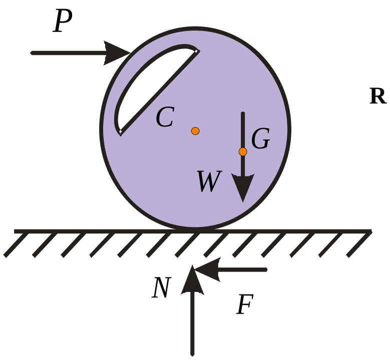
$$\begin{cases} \bar{a} \neq r\alpha \\ F_k = \mu_k N \end{cases}$$

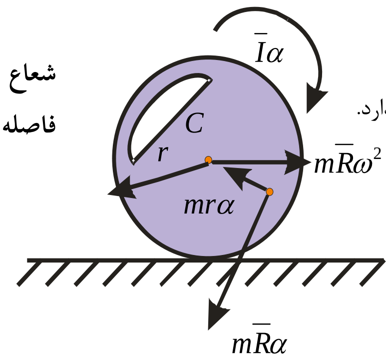
4)چرخ یا دیسک نا متعادل

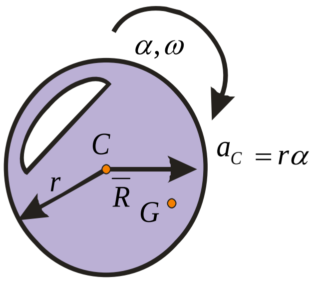
مرکز جرم در مرکز دیسک قرار ندارد.

شعاع دیسک: r

فاصله C تا R : G



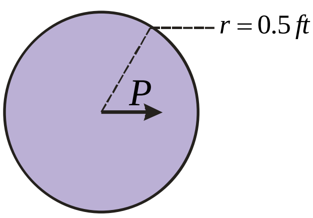




$$\vec{\bar{a}}_G = \vec{a}_C + \vec{a}_{G/C} \quad , \quad a_c = r\alpha$$

$$\vec{a}_G = (r\alpha \rightarrow) + (\bar{R}\alpha \swarrow) + (\bar{R}w^2 \nwarrow)$$

مثال6-5 : مطلوبست شتاب و شتاب زاویه ای دیسک مقابل. (صفحه قائم)

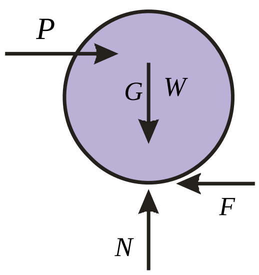


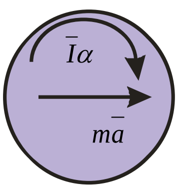
$P = 40(lb)\ ,\ W = 50(lb) \qquad \mu_s = 0.2\ ,\quad \mu_K = 0.15$

$\bar{a} = ? \qquad \alpha = ?$

حل:

اگر مسئله نگوید غلتش یا لغزش فرض می‌شود غلتش بدون لغزش است.

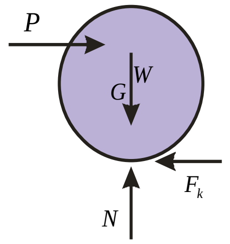


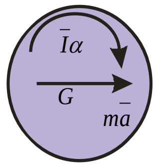


$$\bar{a} = r\alpha \qquad\qquad \Sigma M_c = (\Sigma M_c)_{eff}$$

$$\Sigma M_c = (\Sigma M_c)_{eff} \ \Rightarrow\ P \times r = \bar{I}\alpha + m\bar{a}r$$

$$\Rightarrow 40(0.5) = (\tfrac{1}{2}(\frac{50}{32.2})(0.5)^2 + \frac{50}{32.2}(0.5)^2)\alpha \ \Rightarrow\ \alpha = 34.35\ (rad/s^2) \downarrow$$





$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F=(\Sigma F)_{eff} \Rightarrow P-F=m\bar{a}=mr\alpha$$

$$\Rightarrow 40-F=\frac{50(0.5)(34.35)}{32.2} \Rightarrow F=13.33(lb)$$

حال باید کنترل کنیم تا ببینیم فرض که کردیم درست است یا نه:

$$F_{Max}=\mu_s N=0/2\times 50=10 \quad (lb)$$

غلتش با لغرش داریم : $F_{Max}<F=13/33 \quad \Rightarrow$

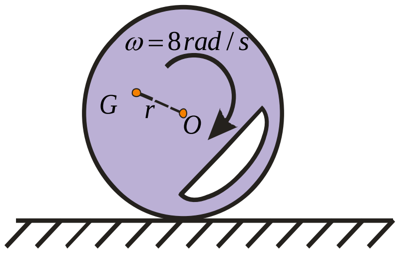
$$\alpha=? \quad , \quad \bar{a}=? \quad , \quad (\bar{a}\neq r\alpha)$$

گشتاور حول مرکز دیسک (محل عبور نیروی P) : $f_K\times r=I\alpha$

$$\Rightarrow .15(50)(0.5)=\tfrac{1}{2}(\frac{50}{32.2})(0.5)^2\alpha \Rightarrow \alpha=19.32 \quad ({}^{rad}/{}_{s^2})$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma f_x=(\Sigma f_x)_{eff} \Rightarrow P-f_K=m\bar{a} \Rightarrow 40-0.15(50)=\frac{50}{32.2}(\bar{a}) \Rightarrow \bar{a}=20.93 \quad ({}^{ft}/{}_{s^2})$$

مثال6-6 : اگر دیسک نا متعادل در حال غلتش بدون لغزش باشد، مطلوب است: $\alpha=?$



$R=300(mm)$

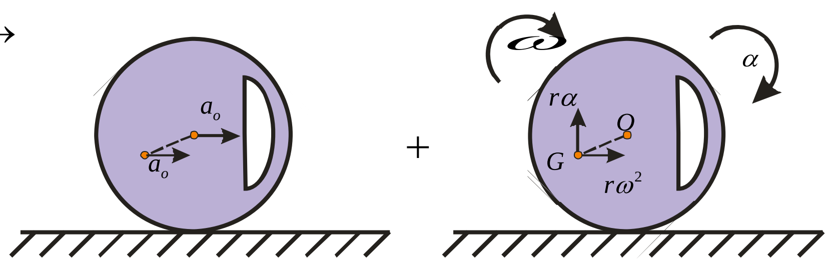
$\bar{K}=150(mm)=\sqrt{\dfrac{I}{m}}$ شعاع ژیراسیون جرم

$r=100mm$

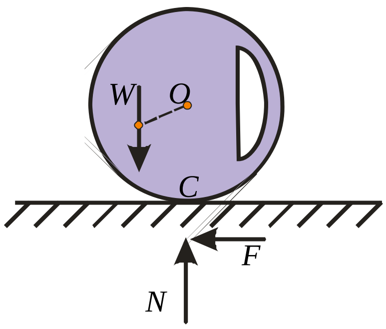
$m=5(Kg)$

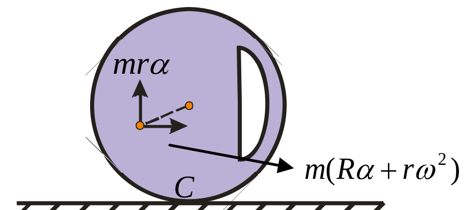
حل : توجه شود که در شکل های زیر **<u>تمام خطوط GO افقی</u>** می باشد.

$a_0=R\alpha\rightarrow$



$$\vec{a}=\vec{a}_0+(\vec{a}_{G/O})_n+(a_{G/O})_t \quad \Rightarrow \vec{a}_G=\vec{\bar{a}}=(R\alpha\rightarrow)+(r\omega^2\rightarrow)+(r\alpha\uparrow)=((R\alpha+r\omega^2)\rightarrow)+(r\alpha\uparrow)$$





$$\Sigma M_C=(\Sigma M_C)_{eff} \Rightarrow W\times r=-\bar{I}\alpha-mr\alpha r-m(R\alpha+r\omega^2)R$$

$$5g(0.1)=-((0.15)^2(51+5(0.1)^2+5(0.3)^2)\alpha-5(0.1)(8)^2(0.3) \qquad \Rightarrow \alpha=-23.7({}^{rad}/{}_{s^2})$$

فصل هفتم

حرکت صفحه‌ای اجسام صلب

(انرژی و ممنتوم)

فهرست

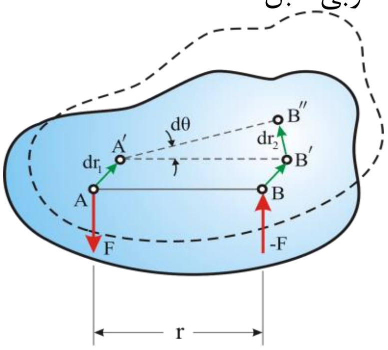
در این فصل روش کار و انرژی و روش ضربه و اندازه حرکت را برای تحلیل حرکت صفحه ای اجسام صلب و سیستم های اجسام صلب به کار می بریم

اصل کار و انرژی

روش کار و انرژی برای حل مسئله های مربوط به سرعت ها و جابجایی به خوبی قابل استفاده است

$$T_1 + u_{1\to 2} = T_2$$

$$u_{1\to 2} = \int f.dr$$



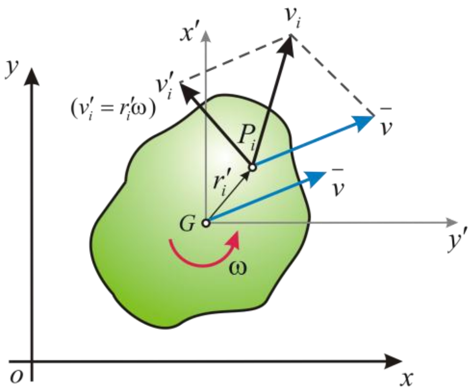
علاوه بر نیرو، لنگر هم می‌توانیم داشته باشیم.

$$u_{1\to 2} = \int M.d\theta \quad : \quad M$$

$$u_{1\to 2} = \int f.dr \quad : \quad F$$

انرژی جنبشی جسم صلب در حرکت صفحه‌ای

جسم صلبی را در نظر بگیرید که در حرکت صفحه ای است.اگر سرعت مطلق هر ذره p_i برابر $\vec{V}'_i$ و سرعت مرکز جرم جسم برابر $\vec{\bar{V}}$ باشد.می توانیم بنویسیم:



$$\vec{V}_i = \vec{V}'_i + \vec{\bar{V}} \qquad (\ \vec{\bar{V}} : \text{سرعت مرکز جرم}\ )$$

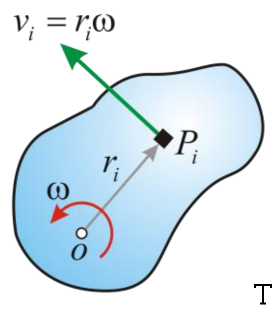
$$T = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i V_i^2 = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i (\vec{V}'_i + \vec{\bar{V}}).(\vec{V}'_i + \vec{\bar{V}}) = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i V_i'^2 + \frac{1}{2}(\sum \Delta m_i)\bar{V}^2 + (\sum \Delta m_i \vec{V}_i').\vec{\bar{V}}$$

$$\sum \Delta m_i = m \to (\text{کل جرم جسم صلب}) \ , \quad (V_i' = r_i'\omega) \ , \quad (\sum \Delta m_i \vec{V}_i') = 0$$

$$\Rightarrow \ T = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i Vi'^2 + \frac{1}{2}m\bar{V}^2 \ \Rightarrow \ T = \frac{1}{2}(\sum \Delta m_i r_i'^2)\omega^2 + \frac{1}{2}m\bar{V}^2$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2+\frac{1}{2}m\bar{V}^2$$

(حرکت دورانی) (مربوط به حرکت انتقالی مرکز جرم)



حرکت دورانی حول نقطه‌ای غیر از مرکز جرم

فرض کنیم که نقطه O تکیه گاه باشد و جسم مقید است که حول o دوران کند.
می توانیم انرژی جنبشی جسم را به صورت مستقیم تر محاسبه کنیم.
برای این منظور می نویسیم:

$$T=\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2+\frac{1}{2}m\bar{V}^2=\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2+\frac{1}{2}m(\bar{r}\omega)^2=\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2+\frac{1}{2}m\bar{r}^2\omega^2=\frac{1}{2}(\bar{I}+m\bar{r}^2)\omega^2$$

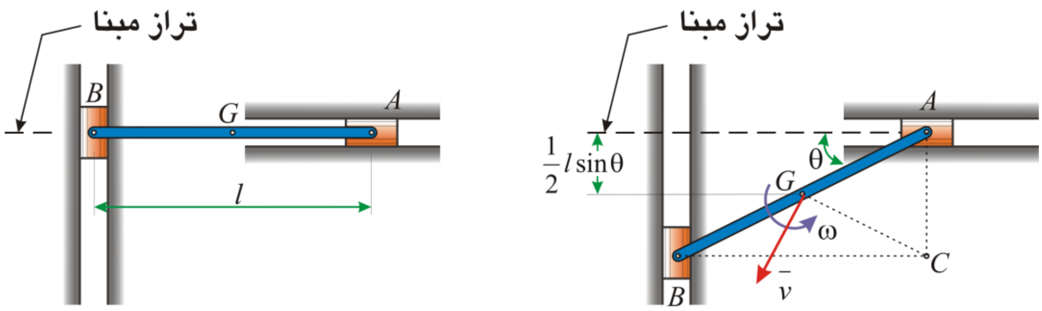
$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}I_0\,\omega^2$$

اصل حفظ انرژی :

وقتی یه جسم صلب یا سیستمی از اجسام صلب تحت اثر نیروهای پایستار حرکت کند اصل کار و انرژی را می توان برای حل مسئله استفاده نمود:

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

مثال 7-1: در سیستم جسم صلب زیر مطلوبست: $\omega=?$



(صفحه قائم) g

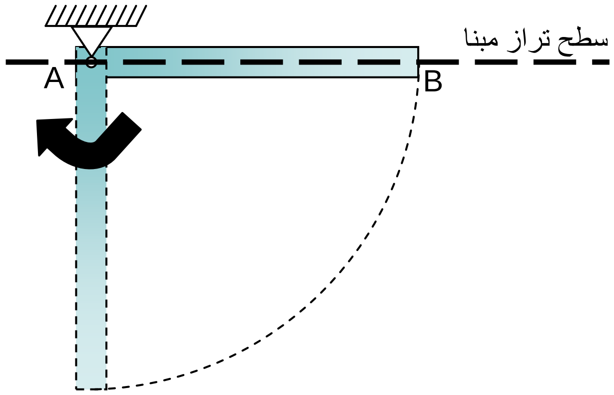
حل:

$T_1= 0,\quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad , \quad V_1 = 0$

$$T_2=\frac{1}{2}m\bar{V}^2+\frac{1}{2}\bar{I}\,\omega^2\ ,\quad \bar{V}=V_G=\frac{L}{2}\omega\ \Rightarrow\ T_2=\frac{1}{2}m(\frac{L}{2}\omega)^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{12}mL^2)\omega^2=\frac{1}{6}mL^2\omega^2$$

$$V_2=-mg(\frac{L}{2}Sin\theta)\Rightarrow\ 0+0=\frac{1}{6}mL^2\omega^2-mg(\frac{L}{2}Sin\theta)\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}Sin\theta}$$

مثال 7-2: میله AB را از حالت افقی رها می کنیم. مطلوبست، سرعت زاویه ای میله را پس از 90 درجه دوران که به حالت عمودی در می آید :



حل:

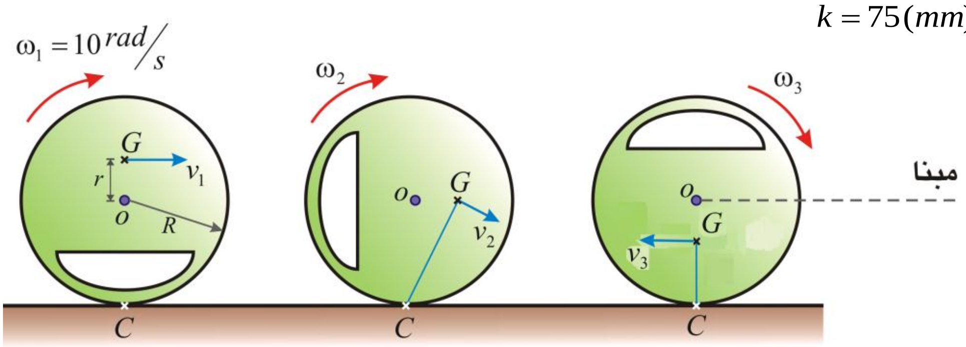
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad , \quad V_1 = 0 \quad , \quad T_1 = 0$$

$$V_2 = \frac{-mgL}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} I_A \omega^2 = T_2$$ ($I : I_A$ نسبت به تکیه‌گاه) $$I_A = \frac{1}{3} mL^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 + 0 = \frac{-mgL}{2} + \frac{1}{6} mL^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

مثال 7-3: دیسک نامتعادلی که شعاع آن 150mm و شعاع ژیراسیون آن 75 mm می باشد با سرعت زاویه ای $\omega_1 = 10$ (rad/s) در حال دوران است .مطلوبست:سرعت زاویه ای ω_3, ω_2

$$\bar{k} = 75(mm) \qquad \bar{I} = m\bar{k}^2$$



حل:

$$T_1 = \frac{1}{2} m\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega_1^2 = 0.5(m)(\vec{v}_O + \vec{v}_{G/O})^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_1^2 = 0.5(m)(R\omega_1 \rightarrow + r\omega_1 \rightarrow)^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega_2^2 = 0.5(m)(\vec{v}_O + \vec{v}_{G/O})^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_2^2 = 0.5(m)(R\omega_2 \rightarrow + r\omega_2 \downarrow)^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_2^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m\bar{v}_3^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega_3^2 = 0.5(m)(\vec{v}_O + \vec{v}_{G/O})^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_3^2 = 0.5(m)(R\omega_3 \rightarrow + r\omega_3 \leftarrow)^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_3^2$$

$$V_1 = mgr \quad , \quad V_2 = 0 \quad , \quad V_3 = -mgr$$

$$T_1+V_1=T_2+V_2\Rightarrow\frac{1}{2}m(R+r)^2\omega_1^2+\frac{1}{2}m\bar{k}\,\omega_1^2+mgr=\frac{1}{2}m(R^2+r^2)\omega_2^2+\frac{1}{2}m\bar{k}^2\omega_2^2\Rightarrow\omega_2=12.2\frac{rad}{s}$$

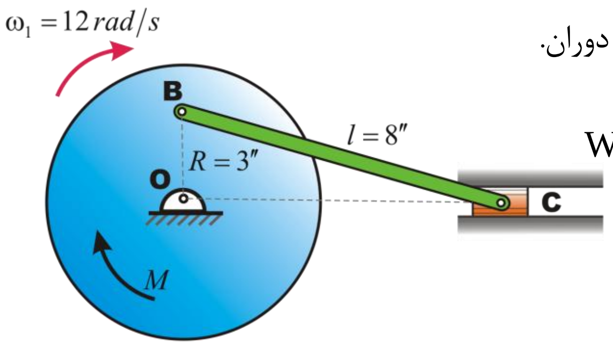
$$T_1+V_1=T_3+V_3\Rightarrow\frac{1}{2}m(R+r)^2\omega_1^2+\frac{1}{2}m\bar{k}^2\omega_1^2+mgr=$$

$$\frac{1}{2}m(R-r)^2\omega_3^2+\frac{1}{2}m\bar{k}^2\omega_3^2-mgr$$

$$\Rightarrow\omega_3=17.09\ (rad/s)$$

مثال 7-4: دیسک A مانند شکل به میله BC و قطعه C متصل است و با سرعت زاویه ای $12\ (rad/s)$ و گشتاور ثابت $5(lb.in)$ در حال دوران است .

مطلوب است، سرعت زاویه‌ای دیسک پس از 90 درجه دوران.

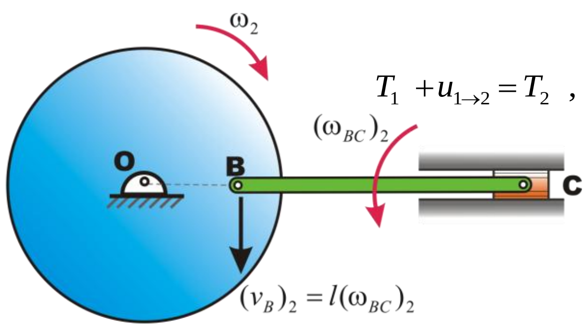


$W_A=4(lb)$,$W_{BC}=1.25\ (lb)$, $W_C=1.3\ (lb)$

حل:

$$\vec{v}_C=\vec{v}_B+\vec{v}_{C/B}\Rightarrow[v_C\rightarrow]=[v_B\rightarrow]+[l\omega_{BC}\nearrow]$$

$$\Rightarrow\quad\omega_{BC}=0\quad,\quad v_C=v_B=R\omega_1$$



$$T_1+u_{1\to2}=T_2\ ,\ T=T_A+T_{BC}+T_C\ ,\ u_{1\to2}=(u_{1\to2})_g+(u_{1\to2})_M$$

$$\begin{cases}(T_A)_1=\frac{1}{2}\bar{I}_A\omega_1^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_AR^2\omega^2)=\frac{1}{4}(\frac{4}{g})(\frac{3}{12})^2(12)^2\\(T_C)_1=\frac{1}{2}m_C(V_C)_1^2=\frac{1}{2}(\frac{1.5}{g})(R\omega_1)^2\\(T_{BC})_1=\frac{1}{2}m_{BC}\bar{V}_1^2+\frac{1}{2}\bar{I}_{BC}(\omega_{BC})_1^2=\frac{1}{2}(\frac{1.25}{g})(R\omega_1)^2+0\end{cases}$$

$$\vec{v}_{2C}=\vec{v}_{2B}+\vec{v}_{C/B}\Rightarrow[v_{2C}\rightarrow]=[R\omega_2\downarrow]+[l(\omega_{BC})_2\uparrow]$$

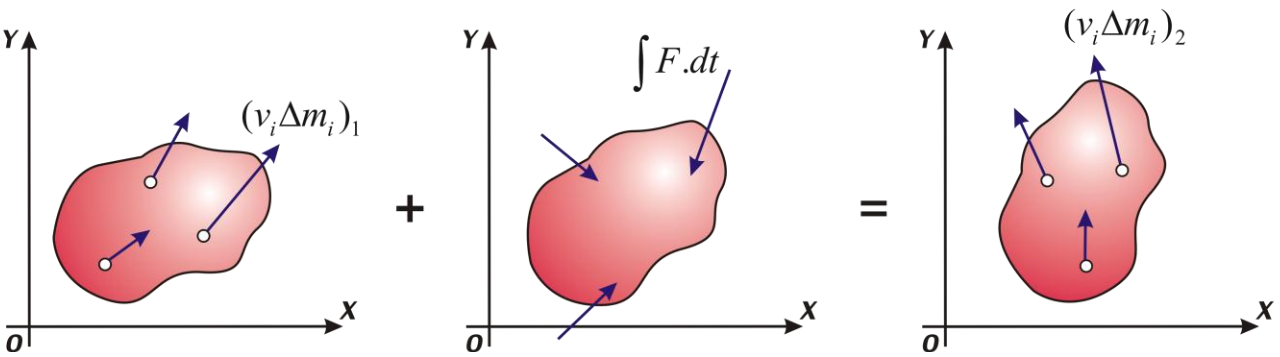
$$\Rightarrow\quad(\omega_{BC})_2=\frac{3}{8}\omega_2\quad,\quad v_{2C}=0$$

$$\begin{cases}(T_A)_2=\frac{1}{2}\bar{I}_A\,\omega_2^2=\frac{1}{4}(\frac{4}{g})(\frac{3}{12})^2\,\omega_2^2\\(T_C)_2=\frac{1}{2}M_C(V_C)_2^2=0\\(T_{BC})_2=\frac{1}{2}m_{BC}(\bar{V}_{BC})_2^2+\frac{1}{2}\bar{I}_{BC}(\omega_{BC})_2^2=\frac{1}{2}(\frac{1.25}{g})(\frac{R\omega_2}{l})^2+\frac{1}{2}(\frac{1.25}{12g})(\frac{8}{12})^2(\frac{3}{8}\omega_2)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(u_{1\to2})_g=[(u_{1\to2})_g]_A+[(u_{1\to2})_g]_{BC}+[(u_{1\to2})_g]_C=[(u_{1\to2})_g]_{BC}=W_{BC}\frac{R}{2}=1.25\times\frac{3}{2}=1.875\\(u_{1\to2})_M=\int_{\circ}^{\pi/2}Md\theta=M\theta=\frac{5}{12}(\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \omega_2=25.1\qquad(rad/s)$$

اصل ایمپالس و ممنتوم برای حرکت صفحه ای جسم صلب



با نوشتن اصل ایمپالس و ممنتوم برای جسم صلب معادله های زیر به دست می آید:

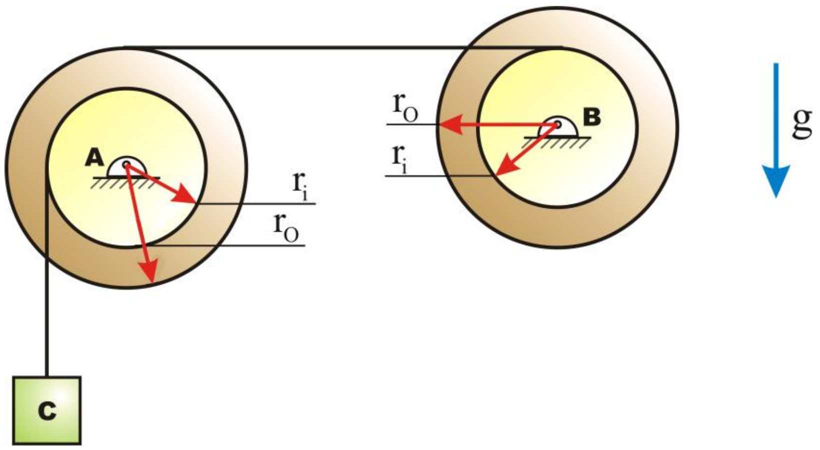
دو معادله یکی در راستای X و یکی در راستای Y :

$$\vec{L}_1+\sum \mathrm{Im\vec{}p}=\vec{L}_2\quad\Leftrightarrow\quad m\vec{\bar{V}}_1+\sum\int\vec{F}_i\,dt=m\vec{\bar{V}}_2$$

یک معادله :

$$(\vec{H}_G)_1+\sum I\vec{m}p_{1\to2}=(\vec{H}_G)_2\quad\Leftrightarrow+\bar{I}\omega_1+\sum\int M_i\,dt=\bar{I}\omega_2$$

مثال7–5 : وزنه C به جرم 10 kg مانند شکل توسط ریسمانی به دور استوانه کوچک قرقره A متصل است. قطر استوانه داخلی قرقره ها 0.1 m و قطر استوانه خارجی قرقره ها 0.15 m است. مطلوب است، سرعت جسم C پس از 3 ثانیه شروع حرکت از حالت ساکن . $r_i=0.10(m)$, $r_o = 0.15\ (m)$, $M_c=10(kg)$ و $\bar{I}_A=\bar{I}_B=0.25\ (kg.m^2)$

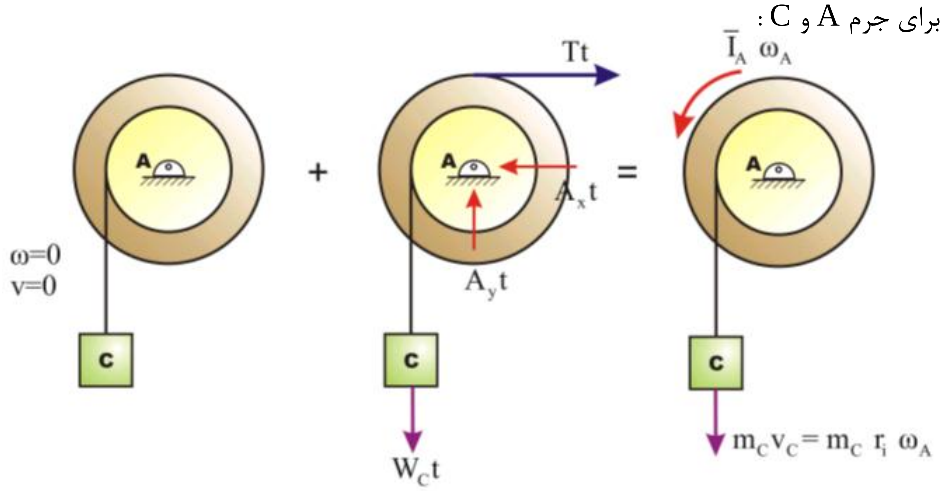


حل:

رابطه کینماتیک کابل بین قرقره A و C :

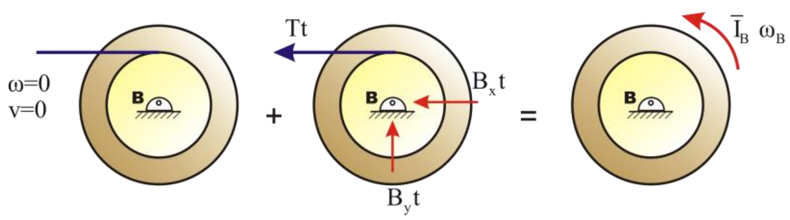
$$r_O\omega_A = r_i\omega_B$$
$$V_C = r_i\omega_A$$

اصل ایمپالس و ممنتوم برای جرم A و C :



$$\sum M_A : 0 + W_c\, t(r_i) - Tt(r_o) = m_c v_c r_i + \bar{I}\omega_A \ \Rightarrow\ 10g(3)(0.1) - T(3)(0.15) = 10V_c\ (0.1) + 0.25(\frac{V_c}{0.1}) \quad (1)$$

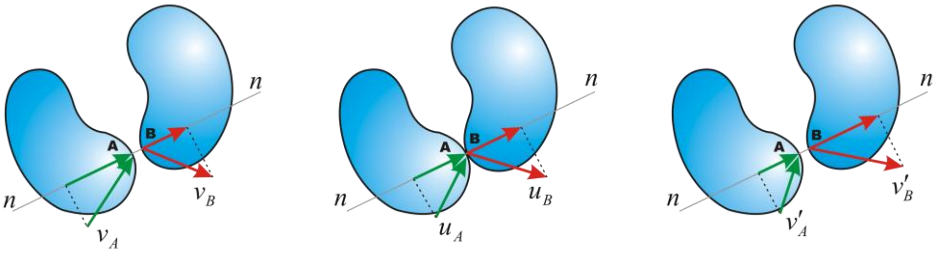
اصل ایمپالس وممنتوم برای قرقره B :



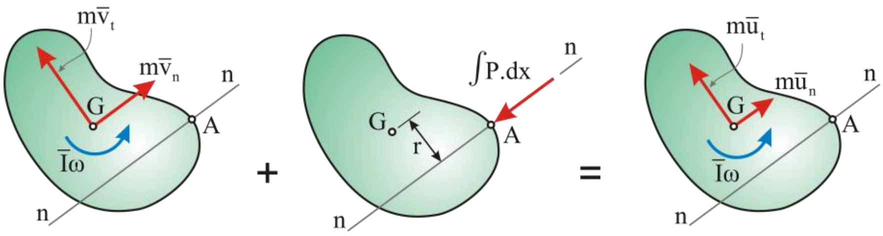
$$\sum M_B : 0 + Tt(r_i) = \bar{I}\omega_B \ \Rightarrow\ T(3)(0.1) = 0.25(\frac{1.5V_C}{0.1}) \quad (2) \qquad (1),(2) \Rightarrow V_c = 3.23\ (m/s)\downarrow$$

برخورد غیرمرکزی

پیشتر با مسئله های برخورد مرکزی یعنی مسائلی که در آن ها مرکز جرم های دو جسم برخورد کننده روی خط برخورد واقع است یاد گرفتید.حال می خواهیم برخورد خارج از مرکز دو جسم صلب را تحلیل کنیم.



(الف)　　(ب)　　(ج)



سرعت قبل از برخورد : $\bar{V}_A$, ω_A , $\bar{V}_B$, ω_B

سرعت مرحله‌ی تغییر شکل : u , ω^*

مرحله‌ی بازگشت (سرعت ها پس از برخورد) : $\bar{V}'_A$, ω'_A , $\bar{V}'_B$, ω'_B

۱)مرحله‌ی تغییر شکل : G_A : $\bar{I}_A\omega_A - r\int Pdt = \bar{I}_A\omega^*$　　n : $m_A(\bar{V}_A)n - \int pdt = m_A u_n$

۲) مرحله‌ی بازگشت : n : $m_A u_n - \int Rdt = m_A(\bar{V}'_A)_n$　　G_A : $\bar{I}_A\omega^*_A - r\int Rdt = \bar{I}_A\omega'_A$

e

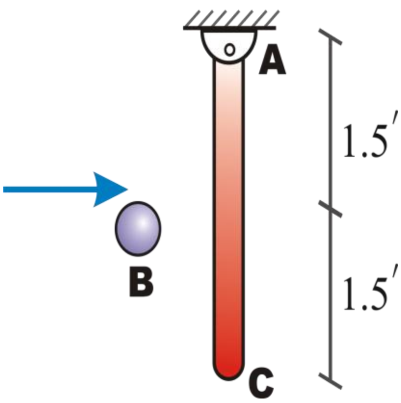
$$e = \frac{\int Rdt}{\int Pdt} = \frac{[(\bar{u}_n + r\omega^*)] - [(\bar{V}'_A)_n + r\omega'_A]}{[(\bar{V}_A)_n + r\omega_A] - [\bar{u}_n + r\omega^*]}$$

برای جسم B : $e = \dfrac{(u_b)_n - (V'_b)_n}{(V_b)_n - (u_b)_n}$

رابطه سرعت های نسبی : $\Rightarrow (V'_a)_n - (V'_b)_n = e[(V_b)_n - (V_a)_n]$

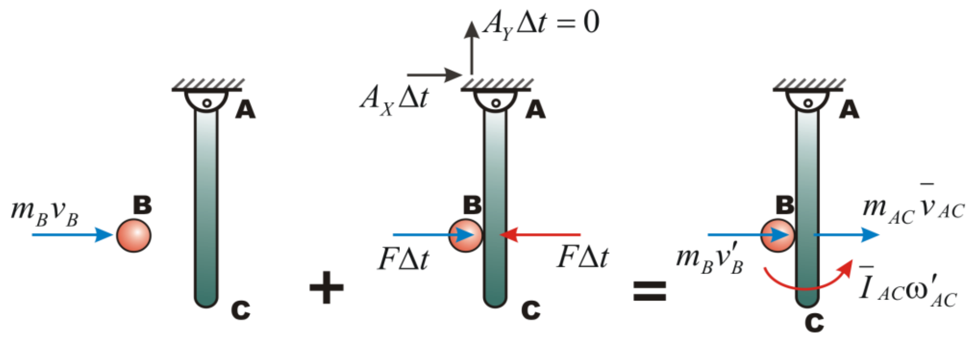
مثال6-7 :گلوله B به وزن 2(lb) و با سرعت 30(ft/s) به میلهAC به وزن 10(lb) برخورد می کند. ضریب بازگشت بین کره B و میله AC 0.4 است. مطلوب است، سرعت زاویه‌ای میله‌ی AC پس از برخورد؛در ضمن اگر ضربه در 0.005 (s) اتفاق بیافتد مطلوب است، میانگین ایمپالس برخورد.

(از ایمپالس وزن در مسائل برخورد صرف نظر می‌شود.)



W_B=2(lb) و W_{AC}=10 (lb) , e = 0.4

حل:



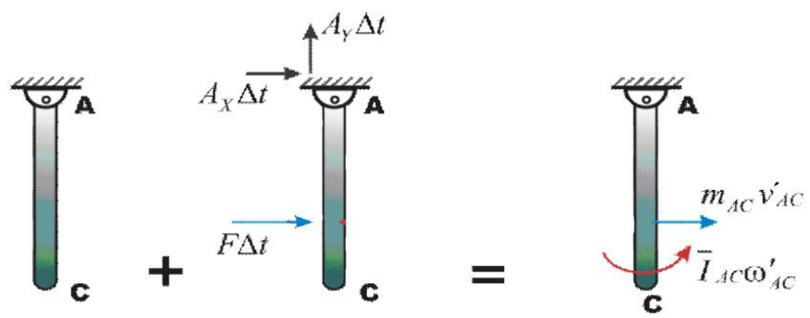
$$V'_{AC}=1.5\omega'_{AC}$$

$$(H_A)+0=(H'_A)\Rightarrow m_B V_B(1.5)+0=m_B V'_B(1.5)+m_{AC}(1.5\omega'_{AC})1.5+\bar{I}_{AC}\,\omega'_{AC}$$

$$(1)\qquad\Rightarrow\frac{2}{32.2}(30)(1.5)=\frac{2}{32.2}(V'_B)(1.5)+\left[\frac{10}{32.2}(1.5)^2+\frac{10\times3^2}{12\times32.2}\right]\omega'_{AC}$$

رابطه سرعت های نسبی : $(2)\qquad (V'_B)-(\bar{V}'_{AC})=0.4[0-V_B]\Rightarrow V'_B-1.5\omega'_{AC}=-0.4(30)$

$$(1),(2)\qquad\Rightarrow V'_B=-6.52\ (ft/s)\leftarrow\quad,\quad\omega'_{AC}=3.65\quad(rad/s)$$



$$\sum M_A:\quad 0+F.t(1.5)=\bar{I}_{AC}\,\omega'_{AC}+m_{AC}\,\bar{V}'_{AC}(1.5)\quad\Rightarrow F=453.42\ (lb)$$

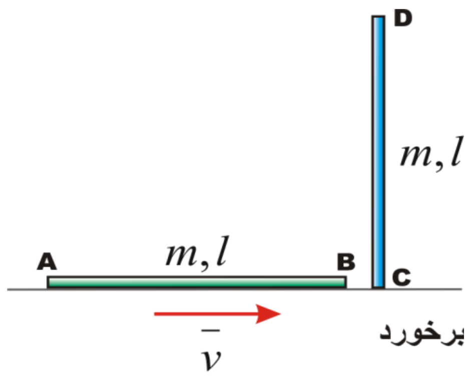
مثال7- 7 : میله باریک cd به طول L و جرم m را روی یک سطح بدون اصطکاکی مطابق شکل قرار داده اند میله مشابه AB در امتداد سطح با سرعت V_1 در حال حرکت است که به میله CD برخورد می کند . با فرض اینکه برخورد کاملاً کشسان است مطلوب است ، سرعت میله های AB و CD پس از برخورد.

(برخورد الاستیک) $e=1$

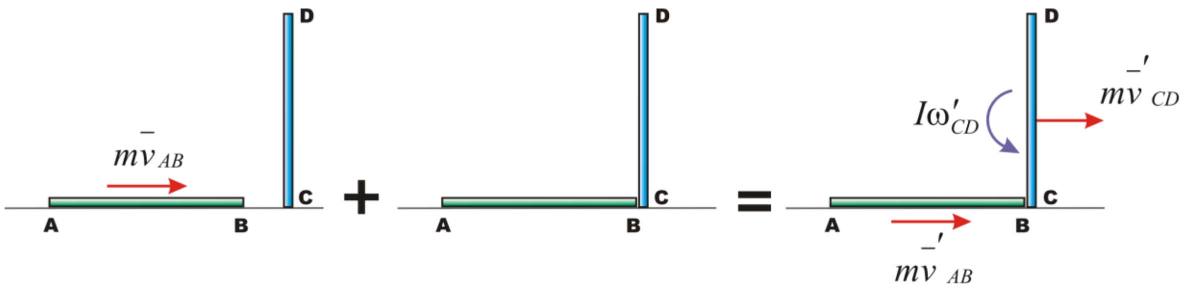
$m_{AB}=m_{CD}=m$

$L_{AB}=L_{CD}=L$

$\bar{V}_{AB}=\bar{V}$



حل:



اصل ایمپالس و ممنتوم برای دو میله :		(1)

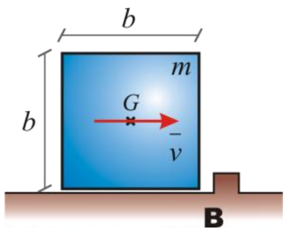
$$\xrightarrow{+} \quad m\bar{V}+0=m\bar{V}'_{AB}+m\bar{V}'_{CD} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}=\bar{V}'_{AB}+\bar{V}'_{CD}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} (V'_B)_n-(V'_C)_n=e[(V_C)_n-(V_B)_n] \\ (V_C)_n=0 \quad , \quad (V'_C)_n=[\bar{V}'_{CD}\rightarrow]+[\frac{L}{2}\omega'_{CD}\rightarrow] \quad \Rightarrow \quad \bar{V}'_{AB}=(\bar{V}'_{CD}+\frac{L}{2}\omega'_{CD})-(\bar{V}) \\ (V_{AB})_n=0 \end{cases}$$

$$\sum M_C: \quad 0+0=0+\bar{I}_{CD}\,\omega'_{CD}-\frac{L}{2}(m)\bar{V}'_{CD} \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{12}mL^2\,\omega'_{CD}=\frac{L}{2}(m)\bar{V}'_{CD} \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \qquad \Rightarrow \bar{V}'_{AB}=0.6\bar{V} \quad , \quad \bar{V}'_{CD}=0.4\bar{V} \quad , \quad \omega'_{CD}=2.4\frac{\bar{V}}{L}$$

مثال7- 8: قطعه مکعب شکل A به جرم m روی سطح افقی بدون اصطکاکی با سرعت $\bar{V}$ به مانع B برخورد می‌کند . مطلوب است سرعت زاویه‌ای و سرعت مرکز جرم G پس از برخورد در دو حالت e=1 و e=0 .



حل:

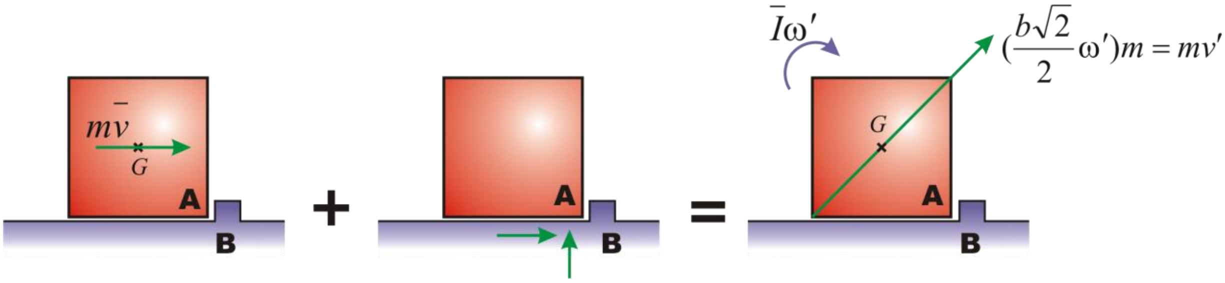
الف : e=0

نقطه A مرکز آنی دوران

$$\begin{cases} (V'_A)_t=(V_A)_t=0 \\ (V'_A)_n-(V'_B)_n=e[(V_B)-(V_A)_n] \quad , \quad (V'_B)_n=0 \ \Rightarrow \ (V'_A)_n=0 \end{cases} \Rightarrow V'_A=0 \Rightarrow$$

پس سرعت مرکز جرم عمود بر خط AG می باشد.

$$\begin{cases}\sum M_A: \quad m\bar V(\frac{b}{2})+0=\bar I\omega'+m\bar V'\,(\frac{b}{\sqrt2}) \\ \bar V' =\frac{b\sqrt2}{2}\omega'\end{cases} \Rightarrow \omega'=\frac{3\bar V}{4b} \quad \Rightarrow \bar V' =\frac{3\sqrt2}{8}\,\bar V \quad \angle 45^\circ$$



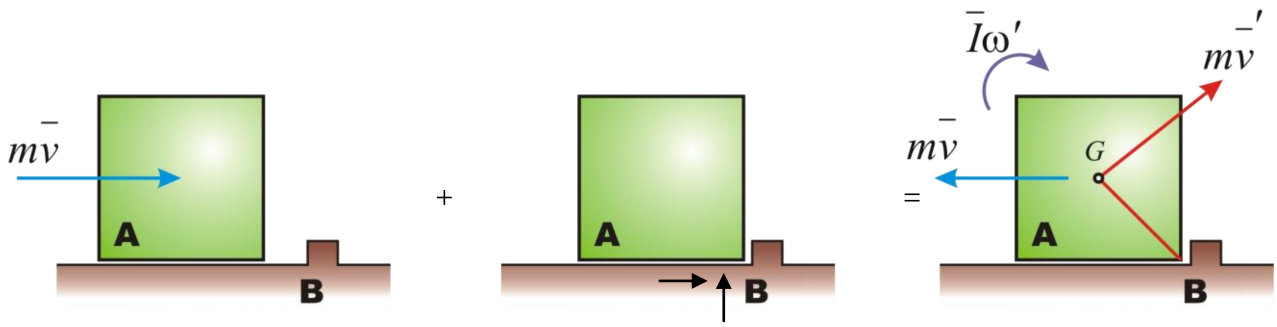
ب : **e=1**

$$\begin{cases}(V'_A)_t=(V_A)_t=0\\ (V'_A)_n-(V'_B)_n=e[(V_B)_n-(V_A)_n]\Rightarrow (V'_A)_n=-\bar V=[\bar V\leftarrow]\end{cases}\Rightarrow V'_A=[\bar V\leftarrow]$$

$$\begin{cases}\vec{\bar V}'=\vec V'_A+\vec V'_{G/A}=[\bar V\leftarrow]+[(AG)\omega' \angle 45^\circ]\\ \sum M_A\circlearrowright: m\bar V(\frac{b}{2})+0=\bar I\omega'+m(AG)^2\omega'-m\bar V(\frac{b}{2})\Rightarrow m\bar V(b)=\frac{1}{6}mb^2\omega'+m(\frac{b}{\sqrt2})^2\omega' \quad \Rightarrow \omega'=\frac{3}{2}\frac{\bar V}{b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\bar V}'=[\bar V\leftarrow]+\left[\frac{b}{\sqrt2}(\frac{3}{2}\frac{\bar V}{b}) \quad \angle 45^\circ\right]=[\bar V\leftarrow]+\left[\frac{3}{2\sqrt2}\bar V \angle 45^\circ\right]=[\bar V\leftarrow]+\left[\frac{3}{4}\bar V\rightarrow\right]+\left[\frac{3}{4}\bar V\uparrow\right]$$

$$\Rightarrow \vec{\bar V}'=\left[\frac{1}{4}\bar V\leftarrow\right]+\left[\frac{3}{4}\bar V\uparrow\right]=0.79\bar V \quad 71.6^\circ$$



فصل هشتم

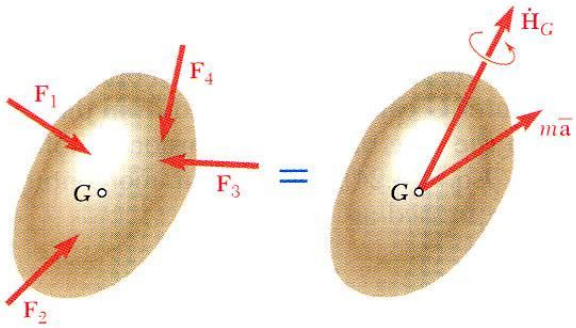
سینتیک اجسام صلب

سه بعدی

Kinetics of rigid bodies in three dimensions

فهرست

در فصل های ۶ و ۷ حرکت صفحه ای اجسام صلب و سیستم های اجسام صلب را بررسی کردیم. بسیاری از نتایج بدست آمده از این دو فصل در مورد حرکت اجسام صلب در سه بعد هم برقرارند.



در حالت کلی

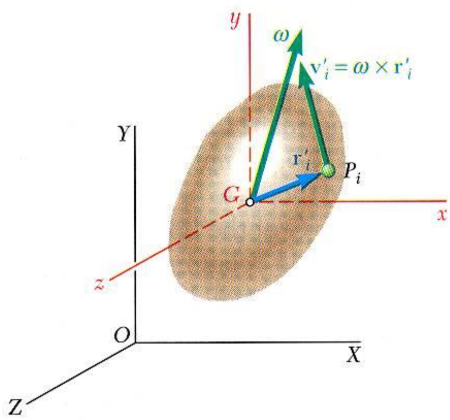
$$\left.\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{\bar{a}} \\ \sum m_G &= \dot{\vec{H}}_G\end{aligned}\right\}$$

در حالت دو بعدی یعنی جسم صلب صفحه‌ای

$$\left.\begin{aligned}&\sum \vec{F} = m\vec{\bar{a}} \\ &\sum m_G = \dot{\vec{H}}_G = \bar{I}\vec{\alpha} \\ &\vec{H}_G = \bar{I}\vec{\omega} \qquad \text{و}\ H_{0n} = \bar{I}\omega\end{aligned}\right\}$$

در حالت کلی $\Leftarrow$ $\vec{H}_a \neq \bar{I}\vec{W}$

اندازه حرکت زاویه ای جسم صلب در سه بعد



$$\vec{H}_G = \sum_{t=۱}^{n} (\vec{r}_i' \times \vec{V}_i' \Delta m_i)$$

$$\vec{H}_G = \sum_{i=۱}^{n} [\ \vec{r}_i' \times (\vec{W} \times \vec{V}_i')\Delta m_i\ ]$$

$$\vec{r}_i' = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$$

$$\left[\vec{V}_c' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right]$$

$$\vec{w}\times\vec{r}_i' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \left(w_y z_i - w_z y_i\right)\vec{i} + \left(w_z x_i - z_i w_x\right)\vec{i} + \left(w_x y_i - w_y x_i\right)\vec{k}$$

$$\vec{r}_i'\times(\vec{w}\times\vec{r}_i') = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ (w_y z_i - w_z y_i) & (w_z x_i - z_i w_x) & (w_x y_i - w_y x_i) \end{vmatrix}$$

$$\vec{H}_G = H_x\vec{i} + H_y\vec{i} + H_z\vec{k}$$

$$H_x = \sum_{i=۱}^{n}\left[y_i(w_x y_i - w_y x_i) - z_i(w_z x_i - z_i w_x)\right]\Delta m_i$$

$$H_x = \sum_{i=۱}^{n}\left[(y_i^۲ + z_i^۲)w_x - y_i x_i w_y - z_i x_i w_z)\right]\Delta m_i$$

$$= w_x\sum_{i=۱}^{n}(y_i^۲ + z_i^۲)\Delta m_i - w_y\sum_{i=۱}^{n} x_i y_i \Delta m_i - w_z\sum_{i=۱}^{n} x_i z_i \Delta m_i$$

$$H_x = w_x\bar{I}_x - w_y\bar{I}_{xy} - w_z\bar{I}_{xz}$$

$$H_y = -w_x\bar{I}_{xy} + w_y - w_z\bar{I}_{yz}$$

$$H_z = -w_x\bar{I}_z - w_y\bar{I}_{yz} + w_z\bar{I}_z$$

$$\vec{H}_G = H_x\vec{i} + H_g\vec{j} + H_z\vec{k}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{xi} & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{xz} \\ -\bar{I}_{xy} & \bar{I}_g & -\bar{I}_{yz} \\ -\bar{I}_{xz} & -\bar{I}_{yz} & -\bar{I}_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} \qquad \begin{aligned} \bar{I}_{xy} &= \bar{I}_{yx} \\ \bar{I}_{yz} &= \bar{I}_{zy} \\ \bar{I}_{xz} &= \bar{I}_{zx} \end{aligned}$$

با استفاده از تنسور ⇐ $H_i = \sum_{j=۱}^{۳} I_{ij} w_j$

$I_{۱۱} = \bar{I}_x ,\ I_{۱۲} = -\bar{I}_{xy} , I_{۱۳} = -\bar{I}_{xz}$ $\qquad H_۱ = \bar{I}_{۱۱} w_۱ + I_{۱۲} w_۲ + I_{۱۳} w_z$

$I_{۲۱} = \bar{I}_{xy} ,\ I_{۲۲} = \bar{I}_y , I_{۳۳} = -\bar{I}_{yz}$ $\qquad H_۲ = I_{۲۱} w_۱ + I_x w_۳ + I_{۲۳} w_z$

$I_{۳۱} = \bar{I}_{xz} ,\ I_{۳۲} = -\bar{I}_{yz} , I_{۳۳} = \bar{I}_z$ $\qquad H_۳ = I_{۳۱} w_۱ + I_x w_۳ + I_{۳۳} w_z$

کلاً ممنتوم زاویه‌ایی می‌بایستی مستقل از مختصات خاصی باشد و فقط به $\bar{W}$ مربوط خواهد شد. سپس اگر بجای مختصاتxyz از مختصات اصلی استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'} W_{x'} \quad \text{و} \quad Hy' = \bar{I}y'\ Wy' \quad \text{و} \quad Hz' = \bar{I}z'Wz'$$

$$[I'] = \begin{bmatrix} \bar{I}_{x'} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \bar{I}y' & ۰ \\ ۰ & ۰ & \bar{I}z' \end{bmatrix}$$

حالت خاص اگر w در جهت یکی از محورهای اصلی خاص باشد یعنی مثلاً $w = w'_x$ و

$$w'_y = w'_z = ۰$$

$$\boxed{H = H_G = \bar{I}w = \bar{I}_{x'} w}$$

ممنتوم زاویه‌ای حول نقطه ثابت:

اگر در جسم سه بعدی خاصی که دوران حول نقطه ثابتی دارد می توان از ممنتوم زاویه ای حول آن نقطه بهره برد (بجای مرکز جرم G)

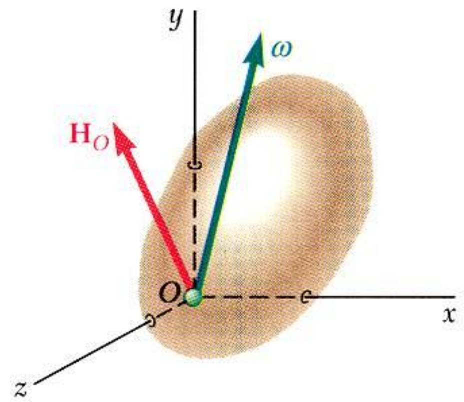
$$\vec{H}_o = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i \Delta m_i)$$

$$H_x = I_x w_x - I_{xy} w_y - I_{xy} w_z$$

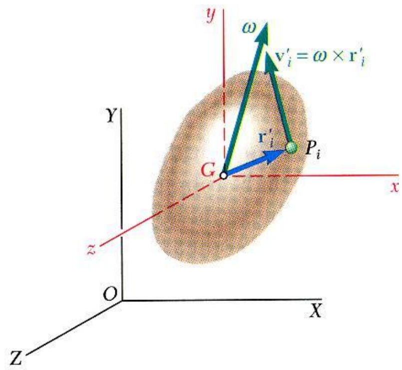
$$H_y = -I_{xy} w_x + I_y w_y - I_{yz} w_z$$

$$H_z = -I_{xz} w_x - I_{yz} w_y + I_z w_z$$

$$\vec{H}_o = \vec{H}_g + \vec{\bar{r}} \times \vec{\bar{v}} \Delta m$$



انرژی جنبشی جسم صلب سه بعدی



$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i) v_i'^2 = \bar{T} + T'$$

$$\vec{v}_i' = \vec{w} \times \vec{r}_i'$$

$$T' = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i) v_i'^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\vec{w} \times \vec{r}_i')^2 \Delta m_i$$

$$= \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x w_x^2 + \bar{I}_y w_y^2 + \bar{I}_z w_z^2 - 2\bar{I}_{xy} w_x w_y - 2\bar{I}_{yz} w_y w_z - 2\bar{I}_{zx} w_z w_x)$$

$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x w_x^2 + \bar{I}_y w_y^2 + \bar{I}_z w_z^2 - 2\bar{I}_{xy} w_x w_y - 2\bar{I}_{yz} w_y w_z - 2\bar{I}_{zx} w_z w_x)$$

در حالتی که محورها طوری انتخاب گردند که روی محورهای اصلی بیافتند خواهیم داشت:

$$T = \tfrac{۱}{۲} m\bar{v}^۲ + \tfrac{۱}{۲}\left(\bar{I}_{x'} w_{x'}^۲ + \bar{I}_{y'} w_{y'}^۲ + \bar{I}_{z'} w_{z'}^۲\right)$$

اینرسی جرمی محور های اصلی

انرژی جنبشی جسم صلب و نقطه ثابت:

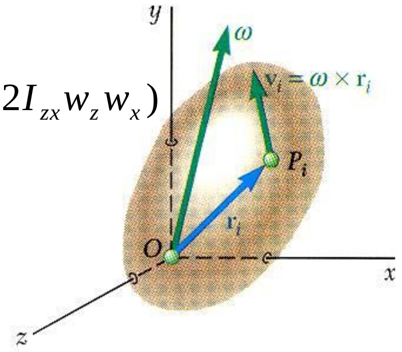
در هنگام دوران جسم صلب سه بعدی حول نقطه ثابت O خواهیم داشت:

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta m_i)v_i^2=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\vec{w}\times\vec{r}_i)^2\,\Delta m_i$$

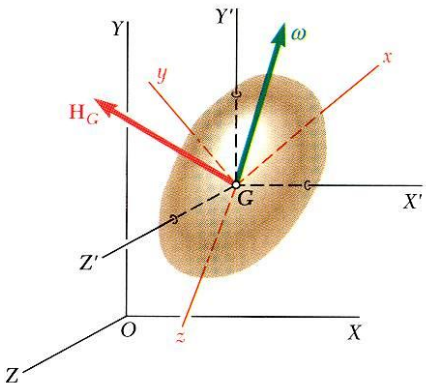
$$=\tfrac{1}{2}(I_x w_x^2+I_y w_y^2+I_z w_z^2-2I_{xy}w_x w_y-2I_{yz}w_y w_z-2I_{zx}w_z w_x)$$

$$T=\tfrac{1}{2}\left(I_{x'}w_{x'}^2+I_{y'}w_{y'}^2+I_{z'}w_{z'}^2\right)$$

انرژی جرمی محورهای اصلی در نقطهO



حرکت جسم صلب سه بعدی (نیروها)



$$\sum\vec{F}=m\vec{\bar{a}}$$

$$\sum\vec{m}_G=\dot{\vec{H}}_G$$

$$\left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gxyz}=\dot{H}_x\vec{i}+\dot{H}_y\vec{j}+\dot{H}_z\vec{k}$$

$$\left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gx'y'z'}=\left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gxyz}+\vec{\Omega}\times\vec{H}_G$$

$$\dot{\vec{R}}=\dot{\vec{R}}'+\vec{W}\times\vec{R}$$

در اکثر مسائل $\vec{\Omega}=\vec{w}$

$$\sum\vec{F}=m\vec{\bar{a}}$$

$$\sum\vec{m}_G=\left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gxyz}+\vec{\Omega}\times\vec{H}_G$$

اگر برحسب محورهای اصلی نوشته شوند.

$$\vec{H}_G=\bar{I}_x w_x\vec{i}+\bar{I}_y w_y\vec{j}+\bar{I}_z w_z\vec{k}$$

$$\vec{\Omega}=\vec{w}=w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k}$$

$$\sum \vec{m}_G = \sum m_x \vec{i} + \sum m_y \vec{j} + \sum m_z \vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum m_x &= \bar{I}_x \dot{w}_x - (\bar{I}_y - \bar{I}g) w_y w_z \\ \sum m_y &= \bar{I}_y \dot{w}_y - (\bar{I}_z - \bar{I}x) w_z w_x \\ \sum m_z &= \bar{I}_z \dot{w}_z - (\bar{I}_x - \bar{I}_y) w_x w_y \end{aligned}\right\}$$ **معادلات اویلر**

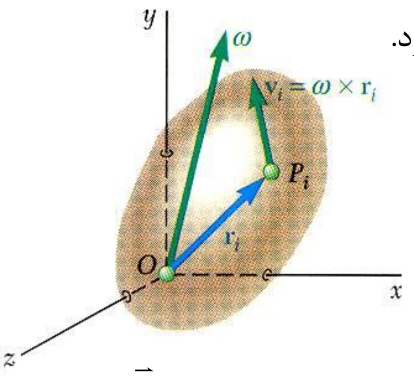
$$\sum \vec{F}_x = m\vec{\bar{a}}_x$$

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{\bar{a}}_y$$

$$\sum \vec{F}_z = m\vec{\bar{a}}_z$$

انرژی جنبشی جسم صلب سه بعدی نسبت به نقطه خاص (Fixed Point)

اگر دوران نسبت به نقطه ای خاص مثل نقطه ی O صورت گیرد.



$$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i) v_i^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\vec{w} \times \vec{r}_i)^2 \Delta m_i$$

$$= \tfrac{1}{2}(I_x w_x^2 + I_y w_y^2 + I_z w_z^2 - 2I_{xy} w_x w_y - 2I_{yz} w_y w_z - 2I_{zx} w_z w_x)$$

و نسبت به محور های اصلی

$$T = \tfrac{۱}{۲}\left(I_{x'} w_{x'}^{۲} + I_{y'} w_{y'}^{۲} + I_{z'} w_{z'}^{۲}\right)$$

<u>فصل نهم</u>

ارتعاشات مکانیکی

Vibration

فهرست

- **نوسان سیستم های تغییر شکل پذیر**

نوسان سیستم های صلب مانند یک جسم متصل به یک فنر

برگشت پذیری به حالت تعادل

نوسان سیستم با یک درجه آزادی که متشکل از یک جرم و یک نیروی برگرداننده خواهد بود (مانند فنر) نیروی برگرداننده به حالت تعادل مانند یک نیروی داخل فنر می باشد که جرم را به سمت تعادل می رساند که این فنر باعث خواهد شد که جرم در اطراف تعادل به نوسان بیاید.

نوسان (vibration) کلاً دو نوع است:

۱- نوسان تحت نیروی خارجی (حرکت نوسانی زوری) Force vibration

۲- نوسان آزاد بدون نیروی خارجی Free vibration

- نوسان با دو نوع مختلف

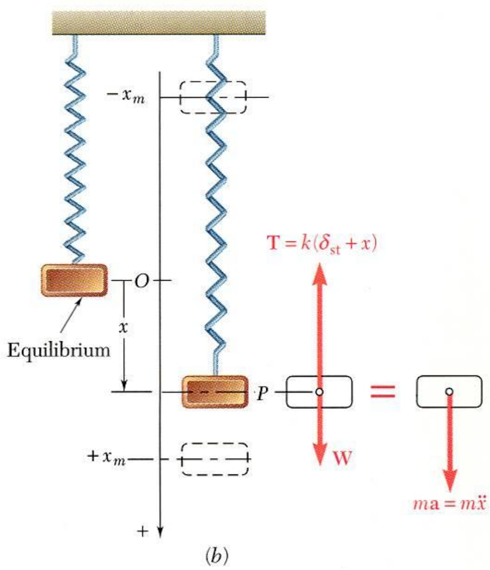
۱- **با میرایی** (Damping) : جسم پس از چند نوسان بالاخره خواهد ایستاد (البته تمام سیستم ها بالاخره در حدی میرایی دارند)

۲- **بدون میرایی** : جسم کاملاً نوسان خواهد کرد و نوسان هیچ وقت نخواهد ایستاد (فقط در تئوری)

تذکر : نوسان با نیروهای خارجی با ادامه نیرو همواره نوسان ادامه پیدا خواهد کرد (چه میرایی باشد چه نباشد)

ارتعاشات نامیرا

نوسان آزاد جرم – حرکت هارمونیک ساده Simple Harmonic



در تعادل $x = \cdot \Leftarrow$ تغییر طول فنر استاتیکی = δ = $\frac{mg}{k}$

$$+\downarrow \sum F_x = \sum (F_x)_{xyz}$$

$$mz - k(x + \Delta) = ma = m\ddot{x}$$

$$mg - k(x + \frac{mg}{k}) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = \cdot \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \cdot \qquad p^2 = \frac{k}{m}$$ اگر

P = فرکانس دایره‌ای

معادله دیفرانسیل از نوع درجه دوم هموژینه (همگن)

$\ddot{x} + p^2 x = 0$ مسئله ایگن ولیو (Eigen value)

که در این جواب A و B بستگی به حالت اولیه دارد. X = A Sinpt + B Cospt

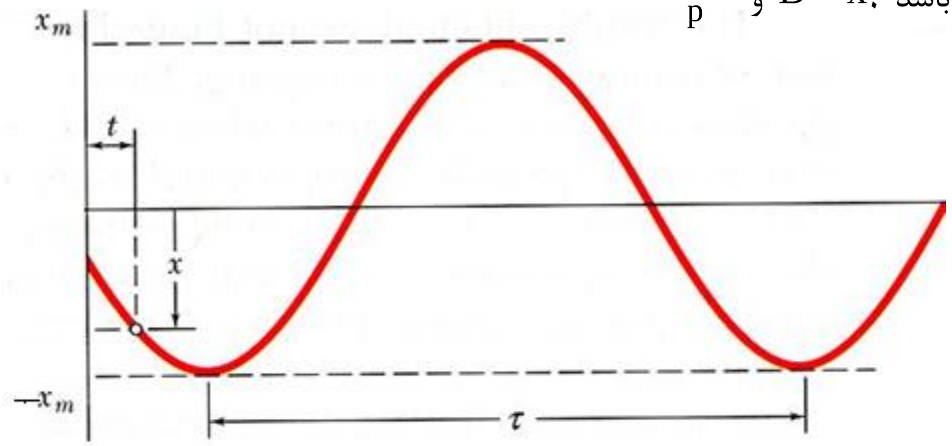
سرعت $V = \dot{x} = AP\cos pt - Bp\sin pt$

شتاب $a = \ddot{x} = -AP^2 \sin pt - BP^2 \cos pt$

مثال حالات اولیه: اگر جرم بدون سرعت اولیه شروع به نوسان کند $v(\cdot) = \cdot \Rightarrow A = \cdot$

اگر جرم از نقطه x=۰ در زمان t=۰ شروع به حرکت کند $x(\cdot) = \cdot \Rightarrow B = \cdot$

بطور کلی اگر x_0 و v_0 در مسئله باشد $B = x_0$ و $A = \frac{v_0}{p}$



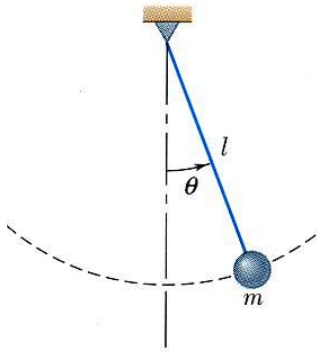
زمان یک دور نوسان $\frac{2\pi}{p}$ = پریود = زمان تناوب

تعداد نوسان در یک ثانیه $f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi}$ = فرکانس

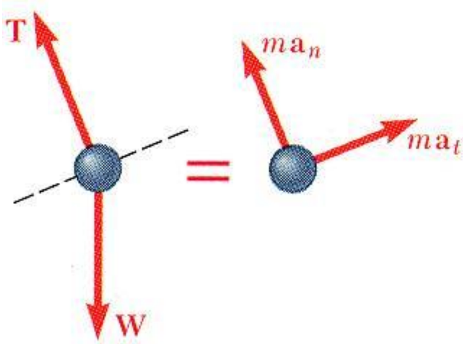
این نوسان تا ابد باقی خواهد ماند (البته نقطه بصورت تئوریک ولی بعلت وجود میرایی از اصطکاک یا هوا این نوسان بالاخره تمام خواهد شد)

مثال بالا از نوع نوسان خطی بود زیرا نیروی فنر بصورت خطی $F = kx$ بود (این نوع مسائل از نوع نوسان خطی هستند).

مثال نوسان غیرخطی نوسان یک پاندول که متشکل از یک جرم m و یک طناب بطول L و جرم خیلی کم می باشد.



زاویه تغییر مکان پاندول نسبت به محور عمودی = θ



$$ma_n = m\tfrac{v^2}{p} = m\tfrac{v^2}{l} = \tfrac{m}{l}(lw)^2 = ml\omega^2$$

$$ma_t = m\frac{dv}{dc} = \frac{md}{dt}(Rw) = ml\ddot{\theta}$$

معادله غیرخطی از نوع Periodic $\quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\mathrm{Sin}\,\theta = ۰ \qquad -\mathrm{mg}\,sin\,\theta = \mathrm{ma_t} = \mathrm{ml}\ddot{\theta}$

اما از نوع Harmonic نیست(یعنی از نوع سینوس و کسینوس نیست)

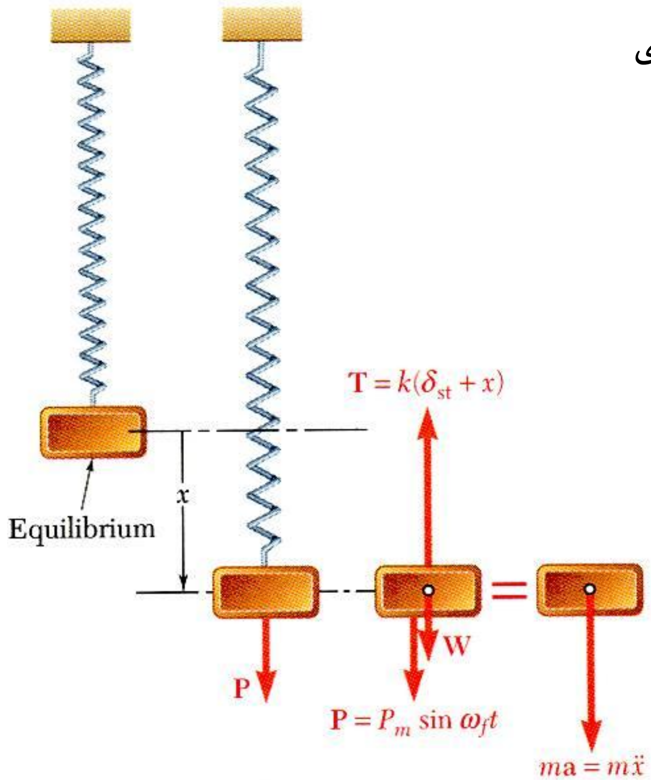
شیب معادله ی بالای صفحه $\quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = ۰ \Rightarrow \theta < ۶^\circ$ اگر

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \quad z = \frac{۲\pi}{p} = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

نوسان نیرویی *FORCED VIBRATION* **ارتعاشات زوری**

۱) حالت اول $P = P_m \sin \omega t$

نیروی هارمونیک



$$p_m \sin wt + w - k(s_{st} + x) = m\ddot{x}$$

معادله دیفرانسیل درجه دوم غیر هموژینه (غیرهمگن) $m\ddot{x} + kx = p_m \sin twt$

یک جواب همگن و یک جواب مخصوص $x_{pont} = x_m \sin wt$

$$-mw^2 x_m \sin wt + kx_m \sin wt = p_m \sin wt$$

تابع مخصوص $x_m = \dfrac{p_m}{k - mw^۲}$ $\quad p^۲ = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \quad x_m = \dfrac{p_m / k}{۱-(w/p)^۲}$

۲) حالت دوم $\delta = \delta_m \mathrm{Sin} wt$ در تکیه گاه

$$w = k\delta_{st} \quad و \quad w - k(\delta_{st} + x - \delta_m \sin wt) = m\ddot{x}$$

شبیه معادله بالا $m\ddot{x} + kx = k\delta_m \sin wt$

$$x_m = \frac{\delta_m}{۱-(w/p)^۲}$$

تابع تکمیلی $x_{comp} = A\sin pt + B\cos pt$

ارتعاش حاصل کل شامل دو ارتعاش منطبق بر هم است.

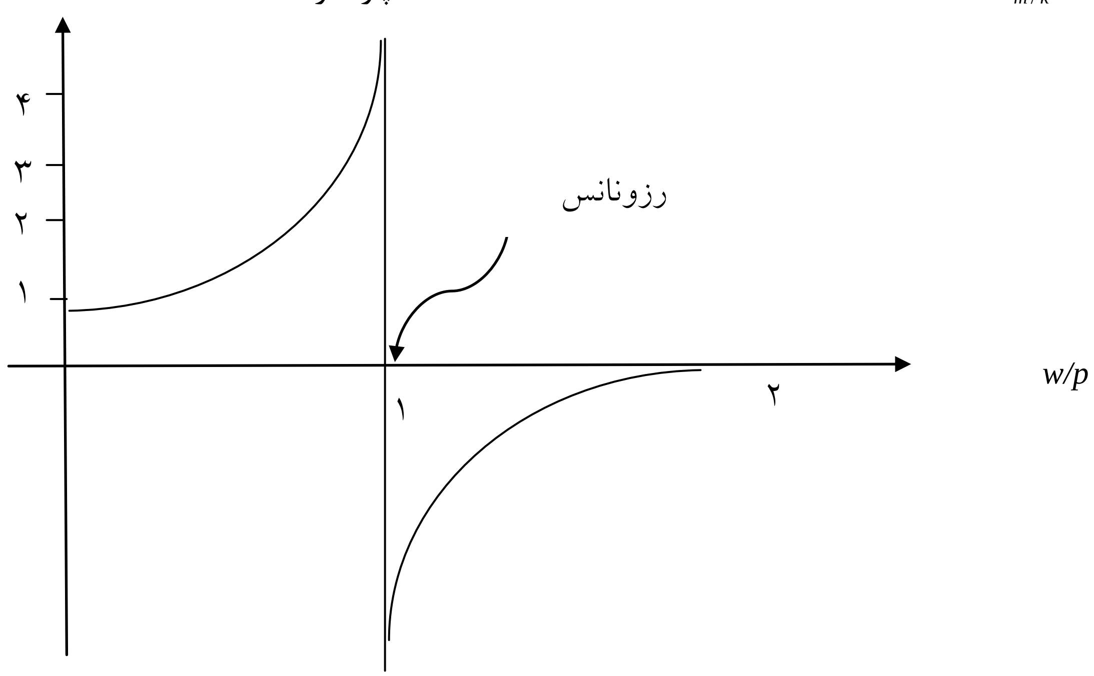
فرکانس این قسمت فرکانس طبیعی است

$$x = x_{\cos p} + x_{part} = A\sin pt + B\cos pt + x_m \sin wt$$

(دائمی – فرکانس نیرویی) فرکانس طبیعی

ارتعاش ناپایدار زیرا عملا بخاطر نیروهای اصطکاک ارتعاشات از بین می رود

پارامتر $= MAGIFICATION\ \ FACTOR = \frac{X_M}{P_{m/k}} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1-(w/p)^2}$



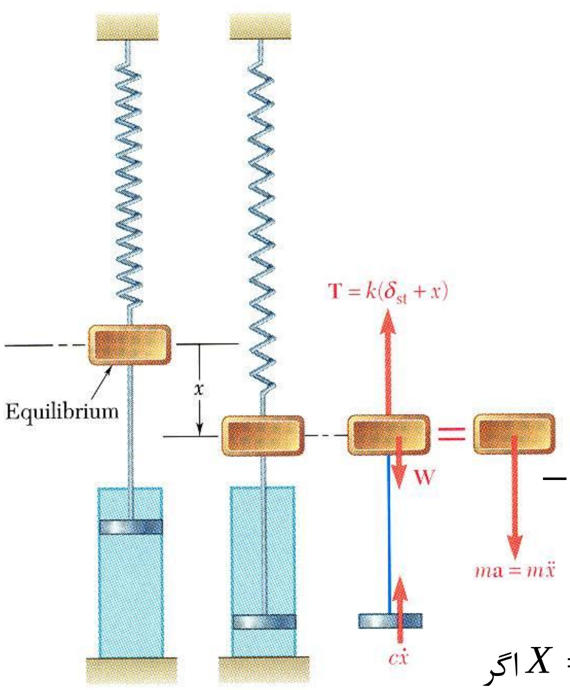
رزونانس(وضعیت تشدید) = w = p دامنه ارتعاش ذره بی نهایت می شود

فرکانس نیروی همفاز با نوسان طبیعی = w< p همفاز با نیروی موثر

(۱۸۰) = فرکانس نیرویی ناهمفاز با نوسان طبیعی= p<w اختلاف فاز با نیروی موثر

در حالت وضعیت تشدید بعلت اصطکاک و میرایی در سیستم عملاً نیروها بی‌نهایت نمی‌شوند ولی در هر صورت می‌بایستی از این وضعیت احتراز نمود یعنی فرکانس زوری را نزدیک به فرکانس طبیعی نگرفت.

ارتعاشات میرا



میرایی لزجی یا میرایی چسبندگی = viscous damping

در این نوع میرایی $C\overline{V} = C\dot{x}$ = نیروی اصطکاک مایعات

ضریب میرایی = c بستگی به خواص فیزیکی جسم

واحد C $\Leftarrow$ $lb.s/ft$, $N.s/m$

$w = k\delta_{st}$, $-k(\delta_{st} + x) + w - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ $\Rightarrow$ اگر $X = e^{\lambda t}$

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$$

$(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m} = 0$ ضریب میرایی بحرانی $= C_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2mp$

حالات خاص : ۱) میرایی شدید یا قوی $C > C_c \Leftarrow$ ریشه های معادلات بالا صحیح هستند و واقعی سیستم بدون نوسان چون λ_1 و λ_2هردو منفی هستند و وقتی که t افزایش می یابد x به صفر نزدیک می شود.

سیستم غیر ارتعاشی $X = Ae^{\lambda_1 t} + \mathbf{B}e^{\lambda_2 t}$

$t \to 0 \quad \Rightarrow \quad X \to 0$

۲) میرایی بحرانی $C = C_c \Leftarrow$ ریشه های مضاعف $\lambda = {}^{-C_c}\!/_{2m} = -p$

سیستم بدون نوسان چون در کوتاه ترین زمان تعادل خود را به دست خواهد آورد.

سیستم غیر ارتعاشی $X = (A + Bt)e^{pt}$

۳) میرایی سبک یا ضعیف $C < C_c \Leftarrow$ ریشه های مجازی هستند.

سیستم ارتعاشی $X = e^{-({}^{c}\!/_{2m})t}(A\sin qt + B\cos qt)$

اگر $p = \dfrac{k}{m}$ $\qquad q^2 = \dfrac{k}{m} - (\dfrac{c}{2m})^2 \Rightarrow q = p\sqrt{1 - (\dfrac{C}{C_c})^2}$

$\frac{C}{C_c}$ = پارامتر میرایی