فصل اول

مبانی انتقال حرارت

اصول و مبانی هر کدام از علوم مهندسی در صورتی به بهترین نحو درک خواهد شد که جای‌گاه آن علم را در ارتباط با دیگر علوم مهندسی درنظر بگیریم. بنابراین، اولین موردی که بررسی خواهیم کرد، تعیین جایگاه انتقال حرارت در علوم مهندسی است. بعد از آن، دو روش انتقال حرارت نفوذ (هدایت یا رسانایی) و تابش را به‌طور مختصر مرور خواهیم نمود. سپس از دیدگاه پیوستگی و مولکولی مسائل مهندسی را بررسی نموده و در نهایت، به بررسی مبانی انتقال حرارت پیوستگی[1] خواهیم پرداخت.

۱-۱. جایگاه انتقال حرارت در مهندسی

ابتدا می‌خواهیم چهار مساله مشهور را که از مکانیک اجسام صلب و اجسام تغییرشکل‌پذیر[2] و ترمودینامیک گرفته شده است بررسی نماییم. می‌خواهیم برای هر مساله دو فرمولاسیون براساس فرضیات مختلف در نظر بگیریم. با ماهیت قوانین فیزیکی استفاده شده در این فرمولاسیون‌ها، سروکار خواهیم داشت. (در این مرحله، لازم است که بحث‌مان در چارچوب متداول و موجود در کتاب‌های مرجع باشد؛ در ابتدای فصل بعدی متن حاضر تکمیل خواهد شد).

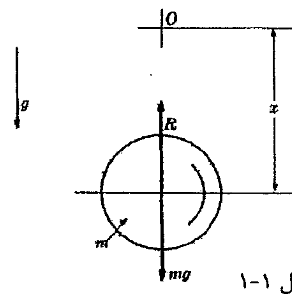
مثال ۱-۱. سقوط آزاد جسم. یک جسم با جرم m را در نظر بگیرید که در اثر میدان گرانش در حال سقوط آزاد است (شکل ۱-۱). ما می‌خواهیم به‌طور هم‌زمان مکان این جسم را تعیین کنیم.

فرمولاسیون (فیزیک) مساله: قانون دوم حرکت نیوتن،

1- Continuum heat transfer
2- Deformable bodies

$$F = ma, \tag{۱-۱}$$

که در آن F جمع نیروهای خارجی و a بردار شتاب است. در فرمولاسیون اول مساله از مقاومت هوا در اطراف جسم صرف‌نظر می‌کنیم و می‌توانیم مساله را به مساله یک‌بعدی تبدیل نماییم و معادله (۱-۱) را به شکل زیر بنویسیم:



شکل ۱-۱

$$mg = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{۱-۲}$$

می‌توانیم شرایط اولیه مناسبی را در نظر بگیریم.

حل ریاضی مساله: با دو بار انتگرال‌گیری از معادله (۱-۲) برحسب زمان داریم:

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \tag{۱-۳}$$

که دو ثابت حاصل از انتگرال‌گیری یعنی C_1 و C_2 را می‌توان با استفاده از مکان اولیه و سرعت جسم به‌دست آورد.

در فرمولاسیون دوم مساله، مقاومتی از جانب محیط اطراف در برابر حرکت جسم در نظر گرفته خواهد شد. با این ملاحظات خواهیم داشت:

$$mg - R = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{۱-۴}$$

بدون داشتن اطلاعات بیشتری در مورد نیروی R، نمی‌توان از معادله (۱-۴) انتگرال‌گیری نمود. اگر به عنوان مثال، فرض کنیم که این نیرو برابر مضربی از توان دوم سرعت جسم است، یعنی:

$$\frac{R}{m} = k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \tag{۱-۵}$$

سپس با استفاده از معادله (۱-۴) خواهیم داشت:

$$g - k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{۱-۶}$$

که در آن k یک ثابت است. معادله (۱-۶) یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است که راه‌حل آن کاملاً ساده می‌باشد، و از آنجایی‌که این راه حل در بحث اخیر دارای اهمیت نمی‌باشد از ارائه آن خودداری می‌کنیم.

قبل از آن‌که وارد فرمولاسیون‌ها شویم ابتدا دو مساله را که از مکانیک گرفته شده‌اند بررسی خواهیم نمود.

مثال ۲-۱. نیروهای واکنشی تیرک. یک تیرک که روی آن فشار P وارد می‌شود را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نیروهای واکنشی تیرک را به‌دست آوریم.

برای انجام اولین فرمولاسیون مساله، می‌خواهیم فرض کنیم که تیرک روی دو تکیه‌گاه ساده قرار دارد (شکل ۲-۱). نیروهای واکنشی A و B را می‌توان با استفاده از شرایط به‌دست آورد.

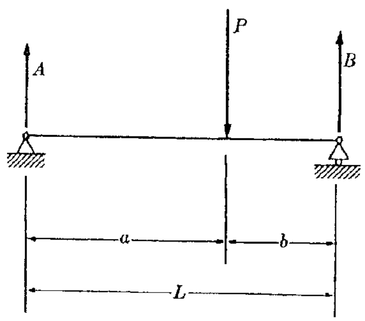
$$\sum_{\text{نیرو}} = \text{صفر} \qquad \text{موازنه نیرو:} \tag{۱-۷}$$

$$\sum_{\text{گشتاور}} = \text{صفر} \qquad \text{موازنه گشتاور:} \tag{۱-۸}$$

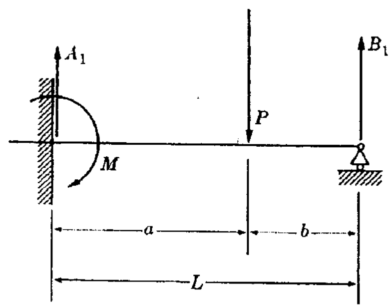
که این دو رابطه با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن به‌دست آمده‌اند.

برای انجام دومین فرمولاسیون مساله، می‌خواهیم یکی از تکیه‌گاه‌های ساده را با یک تکیه‌گاه توکار[1] (غیرقابل حرکت) تعویض نماییم (شکل ۳-۱). که این مورد اخیر را نمی‌توان تنها با استفاده از قانون نیوتن حل نمود، زیرا سه مورد غیرمعین وجود دارد که نیروهای واکنشی A_1 و B_1 و مومنتم خمشی[2] m می‌باشند، بنابراین علاوه بر معادلات (۷-۱) و (۸-۱) به یک معادله اضافی نیز نیاز داریم. این شرط ممکن است با در نظر گرفتن ماهیت تیرک حاصل شود. اگر، به عنوان مثال، فرض شود که تیرک کشسان[3] می‌باشد، شرط اضافی را می‌توان با استفاده از قانون هوک[4] بدست آورد.

همانند، مثال ۱-۱، جزییات فرمولاسیون مذکور و راه‌حل‌هایش در بحث اخیر مورد نیاز نمی‌باشد.



شکل ۲-۱

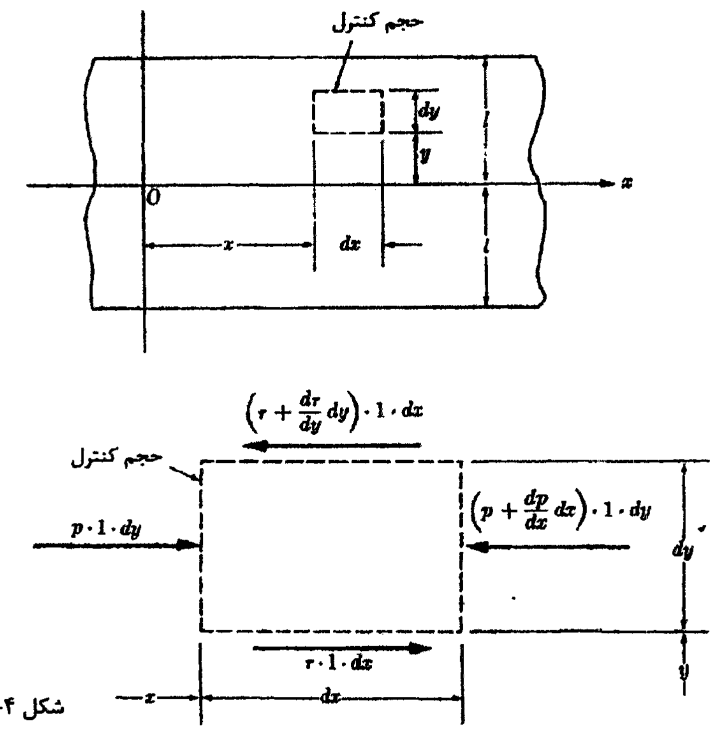


شکل ۳-۱

1- Built in support
2- Bending moment
3- Elastic
4- Hooke's law

مثال ۳-۱. جریان کاملاً گسترش‌یافته، پایا و تراکم‌ناپذیر یک سیال بین صفحات موازی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم توزیع سرعت در این جریان را به‌دست آوریم.

حجم کنترل[1] نشان داده شده در شکل ۴-۱ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی‌که عبارت‌های شتاب شتاب به‌طور یکسان برابر صفر هستند قانون دوم حرکت نیوتن در این حجم کنترل به موازنه نیرو تبدیل می‌شود. پارامترهای نرمال و مماسی نیروهای سطحی به ازای واحد سطح با فشار P و تنش τ نشان داده می‌شوند. نیروهای تماسی[2] نظیر گرانش در این مثال قابل صرف‌نظرند. اولین فرمولاسیون مساله براساس فرض سیال ایده‌ال (بدون اصطکاک) و دومین فرمولاسیون براساس سیال گرانرو (نیوتنی) انجام خواهد شد.



شکل ۴-۱

اگر سیال ایده‌ال باشد، تنش برشی صفر خواهد بود و تغییر فشار در جهت x نیز با توجه به قانون دوم نیوتن صفر خواهد بود. ممکن است بتوانیم سیال را با لایه‌های بی‌نهایت نازک موازی و

۱- تعریف حجم کنترل در فصل بعدی ارائه خواهد شد.

2- Body forces

بدون اصطکاک بین‌شان در نظر بگیریم. در غیاب هر نیروی خالصی، قانون اول نیوتن بیان می‌کند که هر لایه باید ثابت باشد و یا با سرعت یکنواخت حرکت نماید. بنابراین، اگر سرعت ورودی ثابت و یکنواخت باشد، این شرط به صورت محوری و متقاطع برای همه مقادیر زمانی وجود خواهد داشت. به عبارت دیگر، سرعت در هر مقطع عرضی یکنواخت است.

اگر سیال اصطکاک داشته باشد (یعنی گرانرو باشد.م.)، قانون دوم نیوتن مورد استفاده در حجم کنترل شکل ۴-۱ نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$-\frac{d\tau}{dy}-\frac{dp}{dx}=0. \qquad (۱-۹)$$

معادله (۹-۱) را نمی‌توانیم برای به‌دست آوردن توزیع سرعت مناسب مورد استفاده قرار دهیم مگر آن‌که یک شرط اضافی داشته باشیم. یکی از چنین شرایطی ممکن است رابطه بین تنش برشی و گرادیان سرعت باشد. اگر فرض کنیم، به عنوان مثال سیال‌مان نیوتنی است، این شرایط ممکن است به صورت زیر بیان شود:

$$\tau=-\mu\frac{du}{dy}, \qquad (۱-۱۰)$$

که ثابت تناسب، گرانروی سیال است. با قرار دادن معادله (۱۰-۱) در معادله (۹-۱) و بازآرایی آن داریم:

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right) \qquad (۱-۱۱)$$

می‌توان شرایط مرزی زیر را در نظر گرفت:

$$\frac{du(0)}{dy}=0, \quad u(l)=0, \qquad (۱-۱۲)$$

برای گرادیان فشار محوری ثابت (dp/dx)، حل معادله (۱۱-۱) رابطه‌ای را حاصل می‌کند که به توزیع سهموی سرعت معروف است:

$$u(y)=\frac{(-dp/dx)l^2}{2\mu}\left[1-\left(\frac{y}{l}\right)^2\right] \qquad (۱-۱۳)$$

حال می‌خواهیم این سه مساله مذکور را به‌وسیله قوانین فیزیکی مورد استفاده در فرمولاسیون، امتحان نماییم. همان‌طور که دیده شد بعضی از مسائل مکانیک را می‌توان تنها با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن، یا در بعضی مواقع در ترکیب با قانون اول نیوتن و یا معادله بقای جرم، حل نمود؛ این موارد به مسائل تعیین‌شده مکانیکی موسومند. دینامیک اجسام صلب در غیاب اصطکاک و مسائل استاتیکی اجسام صلب و مکانیک سیالات ایده‌ال مثال‌های مشهوری از این دسته‌اند. همچنین می‌توان به‌طور ویژه‌ای اولین فرمولاسیون انجام شده برای مسائل ذکر شده در بالا را در

این تقسیم‌بندی قرار داد یعنی: سقوط آزاد جسم بدون اصطکاک، تیرکی که استاتیک آن معلوم است، و جریان پایای یک سیال ایده‌آل بین دو صفحه موازی.

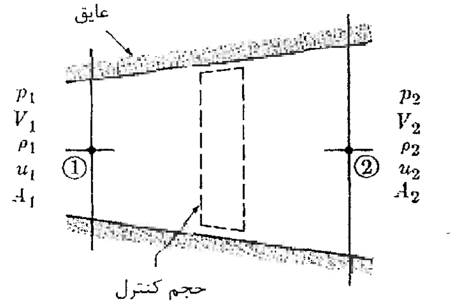
بعضی مسائل مکانیکی علاوه بر قانون حرکت نیوتن و معادله بقای جرم به یک شرایط اضافی نیز نیازمندند که به این مسائل، مسائل تعیین‌نشده مکانیکی گفته می‌شود. دینامیک اجسام صلب با اصطکاک و مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (اجسام گرانرو، کشسان[1]، ناکشسان (شکل‌پذیر)[2]، کشسانِ‌گرانرو[3]) مثال‌هایی از این گروه می‌باشند و دومین فرمولاسیون مسائل ذکر شده در بالا در این تقسیم‌بندی قرار می‌گیرند یعنی: سقوط آزاد جسم با در نظر گرفتن اصطکاک، تیرکی که استاتیک آن نامعلوم است، جریان آرام بین دو صفحه موازی. باید متذکر شد که این مسائل تعیین‌نشده مکانیکی تنها از قوانین کلی مکانیک استفاده نمی‌نمایند، بلکه همچنین یک قانون اضافی و بسته به ماهیت مساله مورد نظر، مورد استفاده قرار می‌گیرد. سقوط آزاد جسم به رابطه بین نیروی مقاومتی و سرعت نیاز دارد، تیرک با استاتیک نامعلوم به رابطه‌ای بین تنش و کشش نیاز دارد، و جریان آرام بین دو صفحه موازی به رابطه‌ای بین تنش برشی و سرعت نیازمند است. در این‌جا چنین قوانینی، قانون ویژه[4] نامیده می‌شوند، اگرچه از واژه رابطه ترکیب‌کننده[5] در اغلب مقالات به جای قانون ویژه، استفاده می‌شود.

مسائل ترمودینامیک را نیز می‌توان به‌طور مشابه به دو دسته تقسیم نمود. بعضی از مسائل ترمودینامیک را می‌توان با استفاده از قوانین کلی (اول و دوم) ترمودینامیک و اگر لازم باشد با قوانین کلی مکانیک حل نمود، که به این مسائل، مسائل تعیین‌شده ترمودینامیکی گفته می‌شود. دسته دیگر نیازمند استفاده از شرایطی علاوه بر قوانین کلی هستند که به این مسائل، مسائل تعیین‌نشده ترمودینامیکی گفته می‌شود.

شاید مسائل زیر برای بیان نکات ذکر شده، مفید واقع شوند.

مثال ۴-۱. جریان پایای یک بعدی ایزنتروپیک و فروصوت از میان یک سیال غیرگرانرو در یک دیفیوزر عایق وجود دارد. حالت سیال در ورودی معلوم است، می‌خواهیم حالت سیال در خروجی را پیدا کنیم. علائم نشان داده شده در شکل (۵-۱) به این صورت است: فشار P، چگالی ρ، انرژی داخلی u، سرعت V، و سطح مقطع عرضی A. مشخصات ورودی با زیرنویس ۱ و مشخصات خروجی با زیرنویس ۲ مشخص شده‌اند.

1- Elastic
2- Plastic
3- Viscoelastic
4- Particular law
5- Constitutive relation



شکل ۵-۱

می‌خواهیم از قوانین مناسب کلی برای حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۵-۱) استفاده کنیم. قانون بقای جرم به صورت زیر داده شده است:

$$d(\rho AV) = 0; \qquad (1\text{-}14)$$

قانون دوم حرکت نیوتن با استفاده از معادله (۱۴-۱) بازآرایی شده است. نتیجه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$dp + \rho V\, dV = 0, \qquad (1\text{-}15)$$

و قانون اول ترمودینامیک، با معادله (۱۴-۱)، (۱۵-۱) ترکیب شده و نتیجه به این صورت می‌باشد.

$$du + pd(1/\rho) = 0. \qquad (1\text{-}16)$$

در اولین فرمولاسیون مساله فرض می‌کنیم که سیال تراکم‌ناپذیر است. پس با توجه به تعریف، $\rho_1 = \rho_2$ خواهد شد و بقیه مشخصات خروجی نظیر u_2، P_2، V_2 از طریق انتگرال‌گیری از معادلات (۱۴-۱)، (۱۵-۱)، (۱۶-۱) بین ورودی و خروجی دیفیوزر به‌دست می‌آیند.

در دومین فرمولاسیون مساله فرض می‌کنیم که سیال تراکم‌پذیر باشد. اکنون علاوه بر V_2 و P_2 و u_2، چگالی خروجی ρ_2 نیز باید محاسبه شود؛ بنابراین، شرایط داده شده در معادلات (۱۴-۱)، (۱۵-۱)، (۱۶-۱) دیگر کافی نیست. برای کامل کردن فرمولاسیون می‌خواهیم روشی را که در فرمولاسیون دوم مثال‌های ۱-۱، ۲-۱، و ۳-۱، مورد استفاده قرار دادیم فراخوانی کنیم. در این مثال شرایط اضافی مورد نیاز وابسته به طبیعت سیال است. ضمناً ما می‌توانیم این شرایط را به صورت زیر بنویسیم.

$$p = p(\rho, u). \qquad (1\text{-}17)$$

معادله (۱۷-۱) با تعدادی از روش‌های مناسب برای برخی مسائل بیان یا جدول‌بندی شده است. معمول‌ترین شکل[۱] صریح معادله (۱۷-۱) به صورت زیر است.

$$p = \rho RT. \qquad (1-18)$$

معادله فوق قانون گاز ایده‌آل نامیده می‌شود. معادلات (۱۷-۱) و (۱۸-۱) حالت‌هایی از قوانین ویژه هستند که معمولاً معادلات حالت نامیده می‌شوند. حال حالت خروجی می‌تواند به کمک معادلات (۱۴-۱)، (۱۵-۱)، (۱۶-۱)، و (۱۷-۱) محاسبه شود. ولی، مطابق گذشته، جزییات اهمیت زیادی ندارد و در این‌جا به آن نمی‌پردازیم.

حال واضح است که اولین فرمولاسیون مثال ۴-۱ از نوع مسائل تعیین‌شده ترمودینامیکی است و با استفاده از قوانین کلی ترمودینامیک در ترکیب با معادلات مکانیک محاسبه شده است. ولی دومین فرمولاسیون، نیازمند استفاده از قوانین ویژه اضافی بوده و در نتیجه از نوع مسائل تعیین نشده ترمودینامیکی است.

دینامیک گازها و انتقال حرارت قواعد کلی هستند که با مسائل تعیین‌نشده ترمودینامیکی سروکار دارند. علاوه بر قوانین کلی ترمودینامیکی، دینامیک گازها به معادلات حالت، به عنوان قوانین عمومی وابسته هستند. در انتقال حرارت دو قانون ویژه به کار می‌رود که حالت‌های انتقال حرارت نامیده شده و ما اکنون به تشریح آن‌ها می‌پردازیم.

نفوذ (رسانایی): در نفوذ، اگر یک توزیع غیریکنواخت دمایی در یک محیط یا بین دو محیط در تماس با هم وجود داشته باشد حرارت انتقال می‌یابد. در مقیاس مولکولی، مکانیسم نفوذ به‌صورت تغییر انرژی جنبشی بین مولکول‌ها در نواحی دمابالا و دماپایین، خود را نشان می‌دهد. خصوصاً این اتفاق به برخوردهای کشسان مولکول‌ها در گازها، حرکت الکترون‌های آزاد در فلزات و نوسان‌های طولی اتم‌ها در جامدات عایق الکتریسیته نسبت داده شده است.

تابش: طبیعت واقعی تابش و مکانیسم انتقال آن به‌طور کامل تاکنون مشخص نشده است. بعضی از اثرات تابش برحسب امواج الکترومغناطیسی و بعضی دیگر برحسب مکانیک کوانتومی توصیف می‌شوند، همچنین هیچکدام از این دو تئوری تمام مشاهدات آزمایشگاهی را تشریح نمی‌کنند. به عنوان مثال، طبق تئوری موج در هنگام گسیل تابش، مقداری از انرژی داخلی جسم به امواج الکترومغناطیس که نوع دیگری از انرژی است تبدیل می‌شود. این امواج در میان فضا با سرعت نور حرکت می‌کنند تا هنگامی‌که به یک جسم دیگر برخورد کنند که قسمتی از انرژی آن‌ها جذب شده و دوباره تبدیل به انرژی داخلی شود.

۱- در این کتاب از واژه "شکل" در ترجمه واژه "form" استفاده شده است.

در طبقه‌بندی مذکور ما انتقال حرارت جابه‌جایی را به عنوان حالتی از انتقال حرارت در نظر نگرفتیم. جابه‌جایی، در واقع، حرکت محیط است که انتقال حرارت به وسیله نفوذ یا تابش را، تسهیل می‌نماید. تنها به دلایل مرسوم، بین نفوذ حرارت در اجسام صلب ساکن یا در حال حرکت، که آن‌را هدایت می‌نامیم، و نفوذ حرارت در اجسام تغییرشکل‌پذیر، که آن را جابه‌جایی می‌نامیم، تمایز قائل می‌شویم. هدایت موضوع بحث این کتاب می‌باشد؛ جابه‌جایی و تابش در جای دیگر مورد بررسی قرار خواهند گرفت. هر چند مثال‌هایی از جابه‌جایی و تابش در این کتاب به اقتضا آورده شده است.

۲-۱ تئوری پیوستگی در برابر تئوری مولکولی[۱]

در بخش قبل فرایند انتقال حرارت به‌وسیله نفوذ با دو روش مختلف تشریح شد. از دیدگاه ماکروسکوپی یا پدیده‌شناختی، حرارت، به عنوان مدرک مشاهدات آزمایشگاهی، از یک ناحیه با دمای بیشتر به ناحیه‌ای با دمای کمتر در یک محیط منتقل می‌شود. از دیدگاه میکروسکوپی یا مولکولی، انتقال حرارت در اثر تبادل انرژی جنبشی بین مولکول‌ها پدید می‌آید. اما این تئوری بیشتر بر پایه فرضیه است تا آزمایش. تضاد بین این دو صورت از انتقال حرارت در دو دیدگاه دیگر برای مسائل مهندسی در انتقال حرارت منعکس شده است.

در دیدگاه اول، یعنی متناظر با دیدگاه ماکروسکوپی، محیط پیوسته فرض می‌شود. که در آن مسیر متوسط آزاد مولکول‌ها در مقایسه با تمام ابعاد دیگر موجود در محیط کوچک است. پس یک متوسط‌گیری آماری بر پایه تعاریف کلی امکان‌پذیر است. به عبارت دیگر محیط با تعریف مفهوم زمینه یا میدان[۲] مطابقت می‌کند.

ممکن است ویژگی‌های یک میدان، نرده‌ای باشد، مثل دما T، یا برداری باشد مثل سرعت $\mathbf{V}$. در دیدگاه دوم، یعنی متناظر با دیدگاه میکروسکوپی یا مولکولی، یا متوسط‌گیری آماری رفتار مولکولی امکان‌پذیر نیست یا امکان‌پذیر است ولی مورد نیاز نیست. در واقع یک تشریح کلی و منطقی از محیطی که دارای ساختار مولکولی توزیع شده فضایی می‌باشد، می‌تواند به گونه‌ای باشد که در آن قوانین کلی برای هر مولکول به‌طور جداگانه نوشته شود. حل سیستم با تعداد زیاد ذره (مولکول)، برحسب زمان و مکان و سپس ربط دادن یک مفهوم ماکروسکوپی به رفتار مولکولی، می‌تواند همان نتیجه‌ای را دربر داشته باشد که از تئوری پیوستگی حاصل می‌شود.

دلیل این‌که همیشه کار را با روش مولکولی شروع نمی‌کنیم، جدا از مشکلات ریاضی و این حقیقت که دانش ما در مورد نیروهای بین مولکولی محدود می‌باشد، این است که رفتار مولکول‌ها

۱- تئوری پیوستگی، تئوری ماکروسکوپی یا میدانی یا دیدگاه پدیده‌شناختی نیز نامیده می‌شود؛ به تئوری مولکولی، تئوری میکروسکوپی هم گفته می‌شود.

2- Field

یا ذرات ریز در یک محیط، ممکن است هدفی که به دنبالش هستیم، نباشد. در اکثر مسائل مهندسی، مساله، محاسبه چگونگی رفتار سیستم در حالت کلی است (نه رفتار یک مولکول بلکه مجموعه‌ای از مولکول‌ها.م.)، مانند سرعت و یا اختلاف دماها در یک محیط. به این علت استفاده از مفهوم میدان روشن می‌شود. واضح است که در مواردی بهتر است یکی از روش‌های فوق بر سایر روش‌ها ترجیح داده شود. برای مثال، یک فرد به سختی می‌تواند در مورد راه حل یک مساله هدایتی برای یک جسم جامد از دیدگاه ذره‌ای (مولکولی) بیاندیشد و یا رفتار گازهای منبسط را به کمک دیدگاه پیوستگی (میدان) توصیف نماید. مسائل متعددی وجود دارد که می‌توان از هر دو روش برای آن‌ها بهره گرفت، انتخاب هر یک از آن‌ها بستگی به عواملی همچون مهارت، سلیقه و تجربه پیشین فرد دارد. اگر به صورت فیزیکی به این دو روش نگاه کنیم (یعنی روش‌های ماکروسکوپی و میکروسکوپی.م.)، تنها تفاوت در این است که فرآیند متوسط‌گیری ساختار مولکولی بسته به روش مورد استفاده، قبل یا بعد از انجام تحلیل صورت می‌گیرد. این به این معنی است که علم آمار، یا قبل از مکانیک (یا ترمودینامیک) مورد استفاده قرار می‌گیرد یا بعد از آن‌ها.

در این کتاب، توجه ما به رفتار هر کدام از مولکول‌ها (دیدگاه میکروسکوپی) معطوف نمی‌باشد، بلکه می‌خواهیم میانگین تاثیراتشان را در زمان و مکان بیابیم. به عبارت دیگر، مساله این است که یک محیط چگونه به شکل یک کل (یکپارچه) رفتار می‌کند، و یا بخش‌هایی از آن دربردارنده تعداد زیادی مولکول می‌باشد، چگونه رفتار می‌کند. بنابراین، ما مسائل انتقال حرارت را از دیدگاه پیوستگی مورد ارزیابی قرار خواهیم داد.

۱-۳. مبانی انتقال حرارت پیوستگی

هر علم مهندسی بر دو اصل تئوری و آزمایش (تجربه) بنا شده است. پاسخ این سوال که «چرا فقط تئوری و یا فقط آزمایش به‌جای ترکیب تئوری و آزمایش با یکدیگر، استفاده نمی‌شود؟» این است که هر یک اساساً به‌عنوان ابزار متفاوتی از دیگری است، و هر یک تقریب‌ها و ایده‌آل‌سازی‌های خود را دارند که به دیگری مربوط نمی‌شوند. در بررسی اعتبار مسائل، هر دو مورد نیازند و ممکن است در بررسی صحت کار، نتایج تحقیقات تئوری و تجربی نظیر به نظیر مورد با هم مقایسه شوند. بنابراین، اگرچه کتاب حاضر تنها به انتقال حرارت تئوریکی پرداخته است ولی باید اشاره نمود که بحث در مورد تئوری تنها به موضوعی برای رقابت مولفان تبدیل شده است، به‌جای آن‌که در مورد اهمیت تئوری و مقایسه آن با تجربه بحث شود.

حل مساله در انتقال حرارت تئوریکی همانند دیگر کارهای مهندسی را می‌توان با طرح زیر نشان داد:

از این طرح دیده می‌شود که دو اصل در تمام مسائل مهندسی وجود دارد، یکی اصل ایده‌آل‌سازی و دیگری اصل تقریب‌زنی است.

یک مساله معتبر فرض شده

فرمولاسیون با ایده‌آل‌سازی
(فیزیک)

حل با تقریب‌زنی (ریاضیات)

تفسیر پاسخ‌ها از دیدگاه فیزیکی

در فرمولاسیون یک مساله، ایده‌آل‌سازی‌ها حتی برای تعریف مفاهیم و عبارت قوانین طبیعی (عمومی و خصوصی) لازم‌اند. یک مثال معروف از تعریف ایده‌آل‌سازی در میان مفاهیم، چگالی (b)[1] یک ویژگی فیزیکی (B) یک سیستم در یک نقطه (P) است. این مفهوم مطابق فرآیند حدگیری، ایده‌آل‌سازی شده زیر تعریف می‌شود. کره کوچکی با شعاع R در نقطه P در نظر گرفته شده است، سپس همه مقادیر خاصیت ΔB موجود در کره بر حجم آن ΔV تقسیم شده است و R (یا ΔV) به صفر میل داده شده است. فرآیند حدگیری مذکور یک ایده‌آل‌سازی غیر واقعی است. به‌عنوان یک واقعیت می‌توان گفت وقتی حجم کره از یک مقدار $\Delta V_o(R_o)$ کمتر شود، چگالی به‌خاطر ساختار مولکولی محیط به‌صورت ناپیوسته تغییر می‌کند. البته در انجام برون‌یابی منحنی چگالی از $\Delta V_o(R_o)$ تا $\Delta V(0) = 0$ که در شکل ۶-۱ نشان داده شده است، به‌جای در نظر گرفتن رفتار ناپیوسته، رفتار پیوسته را جایگزین می‌کنیم و از حالت تفاضل به حالت دیفرانسیل می‌رسیم که خواهیم داشت:

$$b = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta V} = \frac{dB}{dV}, \qquad (۱-۱۹)$$

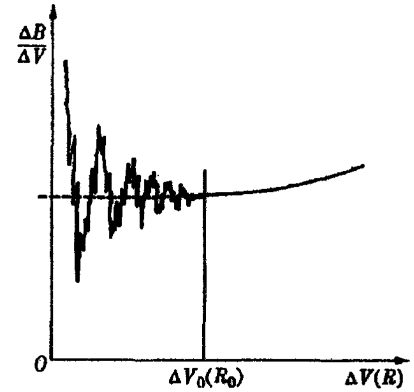
که تعریف ریاضی مناسب چگالی در یک نقطه است. مثال‌های معروف کاربردهای این تعریف عبارتند از: چگالی جرمی، غلظت جرمی و چگالی شارژ الکتریکی. ممکن است روند مشابهی برای دیگر ویژگی‌های وابسته به جرم یا وابسته به حجم[2] یک محیط به‌کار برده شود.

ایده‌آل‌سازی دوم در فرمولاسیون یک مساله شامل جملات منحصربه‌فردی است که در عبارت قوانین عمومی ظاهر می‌شوند. برای مثال می‌توان با در نظر گرفتن قانون دوم حرکت نیوتن آن را بیان نمود. نیروهایی که در این قانون صدق می‌کنند را می‌توان به دو دسته نیروهای (تماسی)

۱- در این‌جا به‌طور کلی چگالی یک کمیت به ازای واحد حجم است.که ممکن است چگالی جرمی باشد یا نباشد. یعنی مولف از واژه چگالی برای بیان یکی از ویژگی‌های سیستم تقسیم بر حجم آن سیستم استفاده نموده است و فقط آن چگالی مورد استفاده در مهندسی یعنی $\rho = m/V$ مدنظر نبوده است.م.

۲- بعضی اوقات به آن‌ها ویژگی‌های شدتی (extensive) گفته می‌شود.

حجمی[1] و نیروهای سطحی[2] طبقه‌بندی کرد. نیروهای حجمی بر المان دیفرانسیلی حجم و نیروهای سطحی بر المان دیفرانسیلی سطح در نظر گرفته می‌شوند و هر دو طی ایده‌آل‌سازی با حذف جفت نیروها[3] می‌توانند به برداری تبدیل شوند.[4] بدون این ایده‌آل‌سازی‌ها و بسیاری از ایده‌آل‌سازی‌های دیگر، فرمولاسیون تئوری پیوستگی مهندسی که در مکانیک اجسام صلب و مواد تغییرشکل‌پذیر، ترمودینامیک، دینامیک گازها، انتقال حرارت یا الکترومغناطیس مورد استفاده قرار می‌گیرد، غیرممکن می‌شود. این زمینه‌ها با پیوستگی‌های ایده‌آل سروکار دارند، اگر چه محیط پیوسته شامل تعدادی محدود ولی بسیار زیاد از ذرات مجزا از یکدیگر می‌باشد.



شکل ۶-۱

از آنجایی‌که قوانین طبیعی تئوری پیوستگی بر پایه تعدادی ایده‌آل‌سازی بنا شده‌اند، ما باید برای انجام فرمولاسیون مسائل راه‌هایی را پیدا کنیم که فرمولاسیون انجام شده دارای اعتبار باشد. فرمولاسیون انتخاب شده به توانایی ما در تطبیق دادن مسائل با قوانین طبیعی بستگی دارد، که این فرایند انطباق، فرآیندی است که اغلب به تقریب‌های بیشتری نیازمند است تا این قوانین طبیعی را برای استفاده در شرایط مورد نظر، آماده سازد.

همیشه باید در نظر داشت که ممکن است برای انجام فرمولاسیون یک مساله، روش‌های تقریب مختلفی وجود داشته باشد و انتخاب مناسب‌ترین روش، نیازمند درک، بصیرت و تجربه است. متاسفانه درک و بصیرت قابل آموزش نبوده و بستگی به خود فرد دارد. البته دستیابی به تجربه، نیاز به تلاش فراوان و صادقانه دارد. همان‌طور که برای انجام فرمولاسیون روش‌های متعددی وجود

1- Body forces
2- Surface forces
3- Couples
۴- فرض حذف جفت نیرو و چند فرض اضافی دیگر برای انجام فرمولاسیون معادلات اولر و ناویر-استوکس سیالات نیز ضروری می‌باشند.

دارد، برای حل مسائل فرموله شده نیز می‌توان از چندین روش تقریبی استفاده نمود و باز هم می‌توان گفت که انتخاب بهترین روش به درک، بصیرت، و تجربه فردی این‌بار در حوضه ریاضیات نیازمند است نه فیزیک (چون انتخاب بهترین روش برای انجام فرمولاسیون به درک، بصیرت، و تجربه در حوضه فیزیک نیازمند است.م). پاسخ مساله‌ای که خوب فرموله شده است باید موجود، یکتا و پایا باشد. هر دو مورد موجود بودن و یکتا بودن مهمند و به علوم پایه مربوط می‌شوند و از طرفی پایداری به‌طور واضح اهمیت زیادی در علوم کاربردی دارد.

این کتاب به سه قسمت تقسیم شده است. قسمت اول با فرمولاسیون و قسمت دوم با روش‌های دقیق و تقریبی حل مسائل هدایت سر و کار دارد. قسمت سوم به روش‌های بیشتر فرمولاسیون و حل ساختارهای پیشرفته یا خاص پرداخته است[1].

مراجع

1. L. PRANDTL and O. G. TIETJENS, *Fundamentals of Hydro- and Aerodynamics*, New York: McGraw-Hill, 1934.
2. M. H. SHAMOS and G. M. MURPHY, *Recent Advances in Science*, New York: Interscience Publishers, 1956.
3. A. H. SHAPIRO, *The Dynamic and Thermodynamic of Compressible Flow*, New York: The Roland Press, 1953.

۱- این کتاب در برگیرنده ۷ فصل اول کتاب انتقال حرارت هدایتی آرپاچی است و علاقه‌مندان برای مطالعه بخش سوم و فصول ۸، ۹، و ۱۰ می‌توانند به کتاب زبان اصلی مراجعه نمایند.

بخش I : فرمولاسیون

فصل دوم

فرمولاسیون‌های متمرکز، انتگرالی و دیفرانسیلی

در فصل ۱ جایگاه انتقال حرارت در بین علوم مهندسی شرح داده شد و انواع مختلف انتقال حرارت یعنی هدایت، جابه‌جایی و تابش از هم متمایز شدند. حال می‌خواهیم به بررسی کلی فرمولاسیون مسائل هدایت بپردازیم.

فرمولاسیون یا روابط فیزیکی تحلیل فازی علوم مهندسی از قبیل انتقال حرارت، براساس تعریف مفاهیم و برقراری قوانین طبیعی انجام می‌شود. قوانین طبیعی هدایت، مانند دیگر رشته‌های علمی را نه می‌توان اثبات و نه نقض نمود، و براساس مدارک و شواهد جمع‌آوری شده از آزمایشات مختلف و وسیع، استنتاج شده‌اند. از هنگامی‌که بشر برای درک جهان، کوشش خود را بیشتر نموده است، عبارات قوانین طبیعی که در حال حاضر موجود می‌باشند، بیان شده‌اند. ما در حال حاضر به این قوانین طبیعی به عنوان توصیفات تقریبی از طبیعت رجوع نموده و از آن‌ها برای حل مسائل متداول مهندسی استفاده می‌نماییم.

همان‌طورکه در فصل ۱ دیدیم، قوانین طبیعی را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود: (۱) قوانین کلی (۲) قوانین ویژه. مشخصه قانون کلی این حقیقت است که کاربرد آن از ماهیت محیط مورد مطالعه مستقل است. به عنوان مثال‌هایی از قوانین کلی می‌توان از موارد زیر نام برد: قانون بقای جرم، قانون دوم حرکت نیوتن (شامل تکانه یا اندازه‌حرکت[1] و گشتاور اندازه‌حرکت[2])، قوانین اول و دوم ترمودینامیک، قانون بقای شارژ الکتریکی، قانون نیروی لورنتز، قانون مدار آمپر، قانون القای فارادی. مسائلی که می‌توان آن‌ها را تنها با استفاده از قوانین کلی به‌طور کامل فرمول نمود، مسائل

1- Momentum
2- Moment of momentum

تعیین‌شده مکانیکی، ترمودینامیکی یا الکترومغناطیسی نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر، مسائلی که نمی‌توان آن‌ها را تنها با استفاده از قوانین کلی به‌طور کامل فرموله نمود مسائل تعیین‌نشده مکانیکی، ترمودینامیکی یا الکترومغناطیسی نامیده می‌شوند. هر کدام از مسائل قرار گرفته در دسته دوم (مسائل تعیین‌نشده)، علاوه بر قانون کلی به یک یا تعداد بیشتر شرایط، که در شکل قوانین ویژه بیان می‌شود، نیاز دارند. مشخصه قانون ویژه این است که کاربرد آن به ماهیت محیط مورد مطالعه وابسته است. به عنوان مثال‌هایی از قوانین ویژه می‌توان از موارد زیر نام برد: قانون کشسانی هوک[1]، قانون گرانروی نیوتن، قانون گاز ایده‌ال، قانون هدایتی فوریه، قانون تابش استفان- بولتزمان، قانون الکتریسیته اهم. در این کتاب ما از سه قانون کلی استفاده خواهیم نمود:

(الف) قانون بقای جرم

(ب) قانون اول ترمودینامیک

(پ) قانون دوم ترمودینامیک

و نیز از دو قانون ویژه بهره می‌بریم:

(ت) قانون هدایتی فوریه

(ج) قانون تابش استفان- بولتزمان

که هر کدام از این قوانین دارای درجه اهمیت متفاوتی هستند.

۲-۱. تعریف مفاهیم

موضوع را با این فرضیه آغاز می‌کنیم که جهان محیطی از ساختارهای مولکولی و شامل انرژی است، و ابتدا مفاهیم زیر را تعریف می‌نماییم:

پیوستگی (میدان)[2]: محیطی است که دارای کمترین حجم ممکن بوده و شامل مولکول‌های کافی است و در آن می‌توان خصوصیات آماری متوسط محیط را به‌دست آورد تا به‌طور مناسبی محیط را توصیف نمود [به عنوان مثال تعریف چگالی b را ببینید (معادله ۱۹-۱)].

سیستم[3]: بخشی از محیط (پیوستگی) است که آن را از بقیه محیط (پیوستگی) جدا می‌کنیم، تا بتوانیم به راحتی فرمولاسیون مساله را انجام دهیم. مرزهای یک سیستم می‌تواند منبسط یا منقبض شوند، اما همیشه به گونه‌ای فرض می‌کنیم که بقیه محیط در طی هرگونه تغییر در

1-Hook's law of elasticity

۲- در این کتاب مولف از واژه پیوستگی برای بیان محیط استفاده نموده است و منظور این است که محیطی را که در آن به تحلیل می‌پردازیم ماکروسکوپی است و به عبارت دیگر پیوسته است نه گسسته و مولکولی.

۳- در کتاب‌های دیگر از واژه سیستم به عنوان یک عبارت کلی برای بخشی از محیط که به منظور انجام مطالعات از بخش‌های دیگر محیط جدا می‌شود استفاده می‌شود که این سیستم می‌تواند باز یا بسته باشد و به چیزی که در این کتاب سیستم نامیده شده است سیستم بسته یا جرم کنترل گفته می‌شود.

سیستم، از مرزهای سیستم عبور ننماید[1]. در توصیف سیستم به‌صورت ریاضی از روش مکانیک سیالاتی لاگرانژی استفاده می‌نماییم.

حجم کنترل[2]: همان سیستم است با این تفاوت که ممکن است بقیه محیط، از مرزهای ثابت و یا قابل تغییر (سطح کنترل) یک حجم کنترل در یک یا چند نقطه عبور نماید. این تنها تفاوت بین حجم کنترل و سیستم است. برای اغلب مسائل در این کتاب لازم نیست بغیر از موارد ساده (بخش ۲-۲ را ببینید) حجم کنترل را با مرزهای متغیر در نظر بگیریم. در توصیف حجم کنترل به‌صورت ریاضی از روش مکانیک سیالاتی اویلری استفاده می‌کنیم.

ویژگی: یک خصوصیت ماکروسکوپی سیستم یا حجم کنترل است که با استفاده از یک روند میانگین‌گیری آماری تعیین می‌شود. ویژگی‌هایی از قبیل چگالی، سرعت، فشار، دما، انرژی درونی، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل، آنتالپی یا انتروپی به‌صورت مقداری مشاهده یا ارزیابی می‌شوند. توصیف ریاضی ویژگی B بدین صورت است که تغییر B بین هر شرط اولیه و نهایی، به مسیر حرکت بستگی ندارد و داریم:

$$\int_1^2 dB = B_2 - B_1.$$

حالت: یک شرط سیستم یا حجم کنترل که به‌وسیله ویژگی‌ها تعیین می‌شود. حالت سیستم در صورتی تعیین می‌شود که ویژگی‌های مستقل به تعداد کافی معلوم باشند.

فرآیند: هر تغییری در هر کدام از حالات یک سیستم یا حجم کنترل.

سیکل: فرآیندی که حالات اولیه و نهایی آن یکسان است.

کار: نوعی انرژی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود. در طول یک فرآیند توسط یک سیستم یا حجم کنترل کار به روی محیط انجام می‌شود اگر تنها اثر خارجی بر سیستم یا حجم کنترل بالا بردن وزنه باشد (یعنی توسط یک سیستم در صورتی کار انجام می‌شود که وزنه جابه‌جا شود.م.). کار انجام شده توسط سیستم یا حجم کنترل مثبت در نظر گرفته می‌شود؛ کار انجام شده روی یک سیستم یا حجم کنترل، منفی در نظر گرفته می‌شود. اغلب گونه‌های متداول کار در جملات قانون اول ترمودینامیک بررسی شده است. [معادلات (۱۶-۲) و (۳۶-۲) را ببینید].

تساوی دمایی: وقتی‌که دو سیستم یا حجم کنترل در تماس با یکدیگر قرار گیرند، با تغییر ویژگی‌هایشان یکدیگر را تحت‌تاثیر قرار می‌دهند. یکی از حالاتی که بعد از تماس دو سیستم یا حجم کنترل پیش می‌آید، حالت برابری دمایی نامیده می‌شود. تعریف برابری دمایی بر این امر دلالت می‌کند که دو سیستم یا دو حجم کنترل قبل از آن‌که در تماس با یکدیگر قرار گیرند دمای‌شان با هم برابر نبوده است.

۱- یعنی ورود و خروج جرم به یا از سیستم نداشته باشیم یا به عبارت دیگر سیستم بسته یا جرم کنترل.

۲- یا همان سیستم باز

گرما: نوعی انرژی است که در طول یک فرآیند، از مرزهای یک سیستم یا حجم کنترل، و به‌واسطه نابرابری دمایی عبور می‌کند. انتقال حرارت به یک سیستم یا حجم کنترل مثبت و انتقال حرارت از یک سیستم یا حجم کنترل منفی در نظر گرفته می‌شود.

می‌توان نشان داد که برهم‌کنش‌های کار و گرما بین سیستم یا حجم کنترل و محیط به مسیر طی شده توسط فرآیند مربوطه وابسته است. بنابراین، کار و گرما، ویژگی نیستند.

اکنون می‌توان قوانین طبیعی را برحسب مفاهیم مذکور بیان نمود. ابتدا قوانین کلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲-۲. قوانین کلی

اولین مرحله در شرح و بیان یک قانون کلی انتخاب یک سیستم یا حجم کنترل است. بدون این مرحله، بی‌معنی است که در مورد مفاهیمی مثل چگالی، سرعت، فشار، دما، گرما، کار، انرژی داخلی، یا انتروپی که در قوانین کلی به‌کار می‌روند، صحبت نماییم. با وجود آن‌که، همواره قوانین کلی معروف و ساده برای یک سیستم نوشته می‌شود، اما وقتی‌که با محیط‌های در حال حرکت[1] سروکار داریم، تحلیل سیستم سخت خواهد بود زیرا اغلب مشخص کردن مرزهای یک سیستم متحرک برای هر بازه‌ی زمانی محسوس، کار مشکلی است. بنابراین به‌طور کلی در نظر گرفتن حجم کنترل برای تحلیل محیط‌های در حال حرکت، ترجیح داده می‌شود.

دومین مرحله در بیان یک قانون کلی انتخاب نوع این قانون است. ممکن است یک قانون کلی به یکی از انواع زیر فرموله شود:

- متمرکزشده[2] (یا میانگین‌گیری شده)
- توزیع‌شده[3]: (الف) انتگرالی، (ب) دیفرانسیلی، (پ) دگرگونی[4] (ت) اختلافی[5]. یک قانون کلی، متمرکز است، اگر جمله‌های آن مستقل از مکان باشد و توزیع‌شده است، اگر جملاتش وابسته به مکان باشند. این امر در شکل ۱-۲ در یک نقطه $P(\mathbf{r})$ به‌وسیله ویژگی B نشان داده شده است، که در آن $\mathbf{r}$ نشان‌دهنده بردار مکان P، $B = B(t)$ و $B = B(P,t)$ به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر متمرکز و توزیع‌شده از B است.

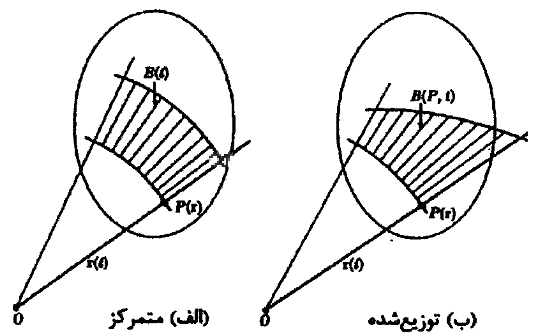
1- Continua in motion (جمع Continumm است Continua)

2- Lumped (به آن متمرکز نیز می‌گویند و در این کتاب از واژه متمرکز استفاده شده است)

3- Distributed

4- Variational

5- Difference



(الف) متمرکز (ب) توزیع‌شده

شکل ۱-۲

در مورد فرمولاسیون‌های دگرگونی و اختلافی مربوط به قوانین کلی تا فصول ۸، ۹ و ۱۰ توضیحی داده نمی‌شود[1]. در اینجا تنها فرمولاسیون‌های متمرکز، انتگرالی و دیفرانسیلی این قوانین بررسی خواهند شد. این کار را هم برای سیستم و هم برای حجم کنترل انجام خواهیم داد. باید متذکر شد که، البته، یک فرمول تبدیل[2] (تئوری انتقال رینولدز) وجود دارد که یک قانون کلی بیان شده برای یک سیستم را به قانون مربوط به حجم کنترل، تبدیل نموده و ما را از بررسی جداگانه قانون کلی برای حجم کنترل، بی‌نیاز می‌نماید. به کمک ویژگی‌های وابسته به جرم یا حجم است که انواع مختلفی از فرمول‌های تبدیل، مناسب برای انجام فرمولاسیون متمرکز، انتگرالی، و دیفرانسیلی به‌دست می‌آید.

۳-۲. فرمولاسیون متمرکز قوانین کلی

ابتدا شکل فرمول تبدیل، مورد استفاده در مورد فرمولاسیون متمرکز را معرفی می‌کنیم. B، ویژگی نرده‌ای وابسته به حجم یا جرم است که مقدار ویژه آن b می‌باشد.

$$b = B/m \quad \text{یا} \quad B/V. \qquad (۱-۲)$$

مثال‌های متفاوتی از B و b در جدول ۱-۲ فهرست شده‌اند. در اینجا فرمول تبدیل را برحسب مقادیر ویژه از ویژگی وابسته به جرم به‌دست می‌آوریم، $b = B/m$ روند مشابهی را می‌توان برای مورد وابسته به حجم به کار برد.

یک حجم کنترل را در نظر بگیرید که در فرآیندی قرار گرفته و حالت‌های اولیه و نهایی آن در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. جرم Δm_i در مکان i از مرزهای حجم کنترل عبور می‌کند و این جرم دارای مقدار ویژه b_i از ویژگی B است (در اینجا Δ نشان‌دهنده تغییر محدود در مورد هر

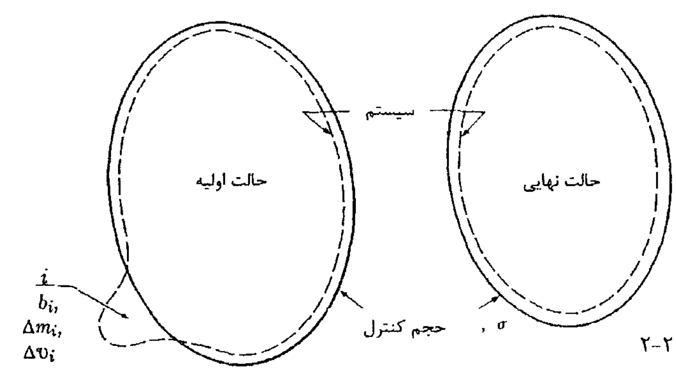
۱- این کتاب در برگیرنده هفت فصل از کل کتاب انتقال حرارت هدایتی است و برای اطلاع از فصول ۸، ۹، و ۱۰ علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب زبان اصلی رجوع کنند.

2- Transformation formula

ویژگی است). انبساط یا انقباض مرزهای حجم کنترل مشکلی ایجاد نکرده و بنابراین در بحثمان گنجانده شده است.[۱]

جدول ۱-۲

ویژگی(خاصیت)	B	$b = B/m$	$b = B/v$
جرم	m	1	ρ
حجم	$v = \begin{cases} mv \\ m/\rho \end{cases}$	v	1
		$1/\rho$	1
مومنتم	mV	V	ρV
انرژی جنبشی	$\frac{1}{2}mV^2$	$\frac{1}{2}V^2$	$\frac{1}{2}\rho V^2$
انرژی پتانسیل	mgz	gz	ρgz
انرژی داخلی	$U = mu$	u	ρu
انرژی کل	$E = me$	e	ρe
آنتالپی	$H = mh$	h	ρh
انتروپی	$S = ms$	s	ρs
غلظت جرمی	$C = mc$	c	ρc
بار الکتریکی	$q_e = v\rho_e$	ρ_e/ρ	ρ_e



شکل ۲-۲

به‌طور هم‌زمان یک سیستم را در نظر بگیرید که در حالت نهایی بر حجم کنترل منطبق می‌شود اما در حالت اولیه، حجم آن Δv_i به‌علاوه حجم کنترل است (یعنی حجم سیستم به اندازه

۱- برای روشن شدن مطلب حالت‌های اولیه و نهایی شکل ۲-۲ به‌طور جداگانه نشان داده شده است. درحالی‌که مرزها تغییرشکل می‌نمایند، کل حجم کنترل ممکن است ثابت یا غیرثابت باشد.

Δv_i از حجم، حجم کنترل بیشتر است بنابراین با این فرض جرم Δm_i را که به حجم کنترل وارد می‌شود به عنوان جرمی که از ابتدا در سیستم وجود داشته در نظر می‌گیریم .م.). می‌خواهیم رابطه بین تغییرات ویژگی B درون سیستم و حجم کنترل را بیابیم.
فرض می‌کنیم که B_1، B_2 و B'، B'' به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر اولیه و نهایی B برای سیستم و حجم کنترل می‌باشند. در طول فرایند نشان داده شده در شکل ۲-۲ تغییر B در سیستم به‌صورت زیر است:

$$\Delta B = B_2 - B_1. \tag{۲-۲}$$

دوباره با توجه به شکل ۲-۲ برای بیان B_1 و B_2 برحسب مقادیر حجم کنترل خواهیم داشت:

$$B_1 = B' + b_i\Delta m_i, \qquad B_2 = B''. \tag{۲-۳}$$

بنابراین با قراردادن معادله (۲-۳) درون (۲-۲) و نشان دادن تغییر در حجم کنترل با ΔB_σ داریم:

$$\Delta B = \Delta B_\sigma - b_i\Delta m_i. \tag{۲-۴}$$

اگر مشخصه B در بیش از یک مکان، از حجم کنترل عبور نماید معادله (۲-۴) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta B = \Delta B_\sigma - \sum_{i=1}^{N} b_i\Delta m_i, \tag{۲-۵}$$

که این رابطه، فرمول تبدیل مورد نظر است. در اینجا N نشان‌دهنده تعداد عبور و Δm_i مثبت نشان‌دهنده جریان به درون حجم کنترل است. سرانجام با تقسیم طرفین معادله (۲-۵) بر Δt[۱] و انجام حد آن وقتی که $\Delta t \to 0$ فرمول تبدیل، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\underbrace{\frac{dB}{dt}}_{\text{سیستم}} = \underbrace{\frac{dB_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^{N} b_i\omega_i}_{\text{حجم کنترل}}, \tag{۲-۶}$$

که در آن $\omega_i = \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta m_i/\Delta t)$، نرخ جریان جرمی عبوری از حجم کنترل در موقعیت i است.

حال می‌خواهیم از فرمول تبدیل (۲-۶) برای به‌دست آوردن شکل‌های متمرکز قوانین کلی برای حجم کنترل استفاده کنیم.

بقای جرم (فرمولاسیون متمرکز). طبق تعریف، در صورتی سیستم داریم که از مرزهای آن جرمی عبور نکند، بنابراین برای یک سیستم خواهیم داشت:

۱- از آنجایی‌که زمان نه ویژگی سیستم یا حجم کنترل است و نه ویژگی سیستم یا حجم کنترل نیست، در اینجا هر تغییری در زمان با همان نماد مورد استفاده در تغییر در خاصیت، نشان داده می‌شود.

$$\frac{dm}{dt} = 0, \qquad (۲-۷)$$

که این رابطه معادله بقای جرم برای سیستم‌های متمرکز است. حال می‌توانیم معادله بقای جرم برای حجم‌کنترل نشان داده شده در شکل ۲-۲ را با استفاده از معادلات (۶-۲) و (۷-۲) بدست آوریم. با استفاده از جدول ۱-۲ داریم:

$$B = m, \quad b = 1, \qquad (۲-۸)$$

با قرار دادن معادله (۸-۲) درون (۶-۲) خواهیم داشت:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^{N} \omega_i.$$

با استفاده از این نتیجه و معادله (۷-۲) خواهیم داشت:

$$0 = \frac{dm_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^{N} \omega_i. \qquad (۲-۹)$$

این معادله بقای جرم برای حجم کنترل متمرکز می‌باشد.

قانون اول ترمودینامیک (فرمولاسیون متمرکز). از آنجایی‌که این قانون در انتقال حرارت با اهمیت بوده و دارای کاربردهای زیادی است، با جزییات بیشتری بررسی خواهد شد.

در سرتاسر مرزهای یک سیستم که یک سیکل کامل را طی می‌کند، حرارت خالص برابر با کار خالص می‌باشد:

$$\nabla Q = \nabla W, \qquad (۲-۱۰)$$

که در آن ∇ نشان‌دهنده مقدار خالص غیر ویژگی‌هاست (کار و گرما جزو ویژگی‌های ترمودینامیکی نیستند).

اگر سیستم در یک فرایند قرار گیرد (یعنی سیستم یک سیکل را طی نکند و فقط یک فرایند را انجام دهد .م.) تفاوت بین گرما و کار خالص برابر تغییر انرژی کل سیستم (که یک ویژگی است) می‌باشد:

$$\Delta E = \nabla Q - \nabla W, \qquad (۲-۱۱)$$

در اینجا ممکن است E در شکل‌های مختلفی از قبیل انرژی درونی، جنبشی، پتانسیل، شیمیایی، و هسته‌ای وجود داشته باشد. بنابراین:

$$E = U + \frac{1}{2}mV^2 + mgz + U_{\text{شیمیایی}} + U_{\text{هسته‌ای}}, \qquad (۲-۱۲)$$

شکل شدتی معادله (۱۱-۲)، قانون اول ترمودینامیک برای سیستم‌های متمرکز را حاصل می‌کند:

$$\frac{dE}{dt} = q - P, \qquad (۲-۱۳)$$

که در آن $P = \lim_{\Delta t \to 0}(\nabla W/\Delta t)$ و $q = \lim_{\Delta t \to 0}(\nabla Q/\Delta t)$ به‌ترتیب نرخ انتقال حرارت و نرخ کار (توان) می‌باشد. شایان ذکر است که برحسب طبقه‌بندی ما برای قانون‌های کلی، معادله (۱۳-۲) متمرکز فضایی است اما از نظر زمانی شکل دیفرانسیلی قانون اول ترمودینامیک سیستم‌ها است.

برطبق معمول با استفاده از فرمول تبدیل (۶-۲) و استفاده از جدول ۱-۲ خواهیم داشت:

$$B = E, \quad b = e, \qquad (۲-۱۴)$$

سپس با قرار دادن معادله (۱۴-۲) در معادله (۶-۲) و قرار دادن نتیجه آن در معادله (۱۳-۲) شکل شدتی قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترل متمرکز را خواهیم داشت:

$$\frac{dE_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^{N} e_i\omega_i = q - P, \qquad (۲-۱۵)$$

که در آن P توان خارج شده از سیستم و q نرخ حرارت وارد شده به سیستم است.

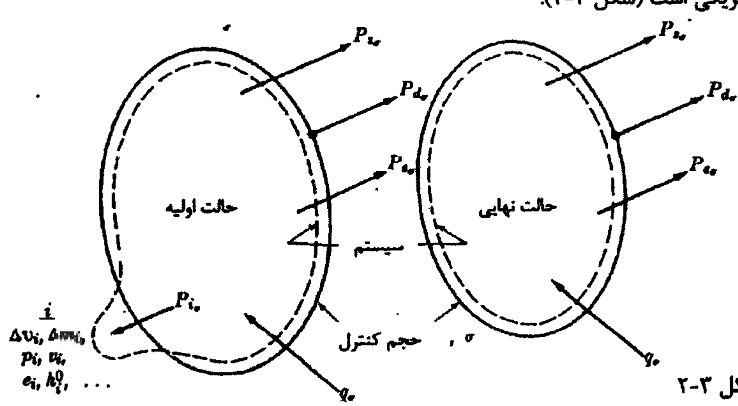
توان P معمولاً شامل سه بخش است:

$$P = P_d + P_s + P_e,$$

که در آن P_d، P_s و P_e به ترتیب توان‌های جابه‌جایی، محوری و الکتریکی می‌باشند. می‌توان این توان‌ها را با عبارات مناسبی به‌صورت توان‌های خروجی از حجم کنترل بیان نمود:

$$P_d = (P_d + P_i)_\sigma, \quad P_s = P_{s_\sigma}, \quad P_e = P_{e_\sigma} + P_{e_{\Delta v,i}},$$

که در آن P_{d_σ}، P_{i_σ}، P_{s_σ} و P_{e_σ} به ترتیب نشان‌دهنده توان‌های جابه‌جایی، جریان جرمی، محور و الکتریکی است (شکل ۳-۲).



شکل ۳-۲

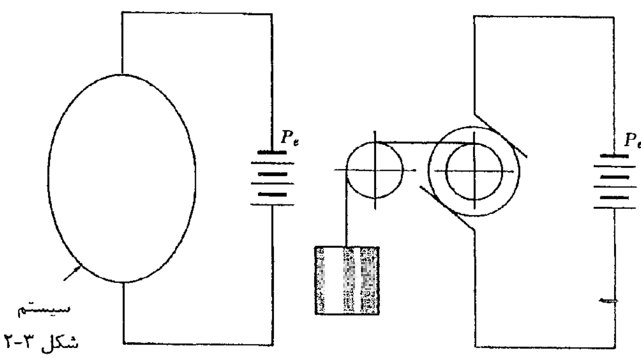
به عنوان مثال، فرض کنید که در سیستم شکل ۳-۲، انرژی داخلی کل با نرخ $U' = U'_\sigma + U'_{\Delta v_i}$ و به‌وسیله یک مدار الکتریکی خارجی (شکل ۴-۲ الف) تولید شود. بر طبق تعریف کار، این تولید انرژی برابر توان P_e است که به سیستم وارد می‌شود (شکل ۴-۲ ب). بنابراین داریم:

$$P_e = U',$$

که

$$P_e = P_{e_\sigma} + P_{e_{\Delta v,i}},$$

در مقالات علمی به اشتباه واژه "تولید حرارت" به واژه جای تولید انرژی داخلی استفاده شده است. توان الکتریکی $P_{e_{\Delta v,i}}$، برابر انرژی الکتریکی داخلی تولید شده در حجم ΔV_i بوده و باید در جریان انرژی داخلی عبوری از مرزهای حجم کنترل (یعنی $\sum_{i=1}^{N} e_i\omega_i$) به حساب آید.



شکل ۳-۲ (الف) مدار واقعی (ب) مدار معادل شکل ۴-۲

اگر اصطکاک قابل صرف‌نظر باشد، توان جریان جرمی P_{i_σ} به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$P_{i_\sigma} = -\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} (p_i \Delta V_i / \Delta t) = -\sum_{i=1}^{N} p_i v_i \omega_i,$$

که در آن ΔV_i حجم و v_i حجم ویژه‌ی جرم Δm_i و P_i فشار در مرزهای ΔV_i است.

به‌طور مشابه، نرخ گرمای q دریافت شده توسط سیستم را می‌توان برحسب q_σ دریافت شده توسط حجم کنترل بیان نمود. بنابراین داریم:

$$q = q_\sigma + q_{\Delta v_i},$$

البته از نقطه نظر تحلیل حجم کنترل، ممکن است $q_{\Delta v_i}$ مثل P_{i_σ} به عنوان افزایش انرژی داخلی در حجم ΔV_i در نظر گرفته شود و در جریان انرژی داخلی $\sum_{i=1}^{N} e_i\omega_i$ به حساب آید.

با بازآرایی معادله (۱۵-۲)، شکل صریح قانون اول ترمودینامیک برای حجم‌های کنترل متمرکز را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{dE_\sigma}{dt} = \sum_{i=1}^{N} h_i^0 \omega_i + q_\sigma - (P_d + P_s + P_e)_\sigma, \qquad (۲-۱۶)$$

که در آن $h_i^0 = e_i + p_i v_i$ و نشان‌دهنده آنتالپی سکون به ازای واحد جرم است.

قانون دوم ترمودینامیک (فرمولاسیون متمرکز). ابتدا قانون دوم ترمودینامیک برای سیستم متمرکز را ارائه می‌دهیم:

$$\Delta S \geq \frac{\nabla Q}{T}, \qquad (۲-۱۷)$$

و در شکل شدتی داریم:

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{q}{T}, \qquad (۲-۱۸)$$

(یا می‌توان نوشت: $\frac{dS}{dt} = \frac{q}{T} + S_g$ م.).

بنابراین، با استفاده از جدول ۱-۲ خواهیم داشت:

$$B = S, \quad b = s \qquad (۲-۱۹)$$

با قرار دادن معادله (۱۹-۲) در معادله (۶-۲) و بعد قرار دادن نتیجه آن درون معادله (۱۸-۲) قانون دوم ترمودینامیک برای حجم‌های کنترل متمرکز به‌دست می‌آید:

$$\frac{dS_\sigma}{dt} \geq \sum_{i=1}^{N} s_i \omega_i + \frac{q}{T}, \qquad (۲-۲۰)$$

با قرار دادن تولید انتروپی S_g[1]، ممکن است معادله (۲۰-۲) را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{dS_\sigma}{dt} = \sum_{i=1}^{N} s_i \omega_i + \frac{q}{T} + S_g, \qquad (۲-۲۱)$$

که این رابطه معادله بقای انتروپی برای حجم‌های کنترل متمرکز می‌باشد.

از آنجایی‌که S_g در ارتباط با درجه بازگشت‌ناپذیری است[2]، معادله (۲۱-۲) برای مطالعه فرایندهای بازگشت‌ناپذیر مفید است. این نکته در فرمولاسیون دیفرانسیلی به دقت گنجانده شده است. [معادلات (۶۶-۲) تا (۶۹-۲) را ببینید].

۱- مفهوم کار تلف شده در مرجع ۹ را ببینید، معادله (۸-۷).

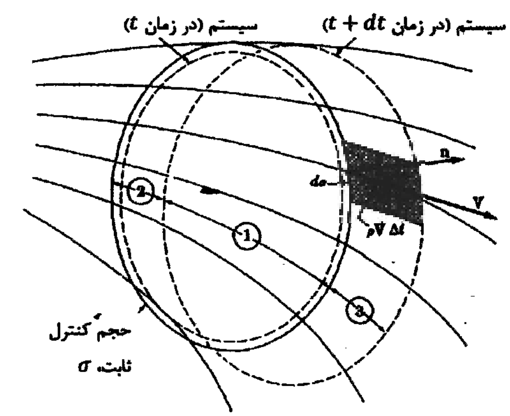
۲- وقتی‌که $S_g \to 0$ معادله (۲۱-۲) تنها برای فرایندهای بازگشت‌پذیر استفاده می‌شود (در فرایندهای بازگشت‌ناپذیر به دلیل وجود بازگشت‌ناپذیری‌هایی مثل اصطکاک، انبساط آزاد، واکنش شیمیایی و غیره درون سیستم یا حجم کنترل انتروپی تولید می‌شود اما در مورد فرایندهای بازگشت‌پذیر چون عوامل بازگشت‌ناپذیری وجود ندارند بنابراین تولید انتروپی نخواهیم داشت.م).

بعد از ارائه قانون‌های کلی متمرکز برای سیستم‌ها و حجم‌های کنترل، اکنون می‌خواهیم به شکل‌های انتگرالی متناظر آن‌ها بپردازیم. اگر جریان جرم از مرزهای حجم کنترل به صفر برسد جملات قانون‌های کلی آن مشابه جملات مربوط به یک سیستم خواهد بود. بنابراین، اگر چه نقطه آغاز کارمان همواره با سیستم است ولی شکل‌های انتگرالی و دیفرانسیلی را تنها برای حجم کنترل ارائه می‌دهیم.

۲-۴. فرمولاسیون انتگرالی قوانین کلی

مانند مورد متمرکز، مرحله اول به‌دست آوردن یک فرمول انتقال مناسب است. به‌دلیل کاهش پیچیدگی فرمولاسیون انتگرالی، فرمول را برای حجم کنترل ساکن در نظر می‌گیریم. این فرض برای اغلب موارد فرمولاسیون انتگرالی قانون‌های کلی، صادق است.

یک حجم کنترل ساکن را در نظر بگیرید که در آن مشخصه B جریان دارد (شکل ۵-۲). فرض کنید که در زمان t، یک سیستم منطبق با این حجم کنترل باشد. می‌خواهیم نرخ زمانی تغییر ویژگی در سیستم را به‌دست آوریم.



شکل ۵-۲

از آنجایی‌که محیط نمی‌تواند مرزهای خود را قطع کند، این سیستم در طول یک بازه زمانی Δt با محیط حرکت نموده و در زمان $t+\Delta t$ همان‌طور که در شکل ۵-۲ نشان داده شده است، حجم دیگری را در فضا اشغال می‌کند. بنابراین نرخ تغییر مورد نیاز را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[B_1(t+\Delta t)+B_3(t+\Delta t)]-[B_1(t)+B_2(t)]}{\Delta t}, \qquad (۲\text{-}۲۲)$$

با بازآرایی عبارات این معادله خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \lim_{\Delta t\to 0}\Big[\underbrace{\frac{B_1(t+\Delta t)-B_1(t)}{\Delta t}}_{\text{عبارت اول}} + \underbrace{\frac{B_3(t+\Delta t)}{\Delta t}}_{\text{عبارت دوم}} - \underbrace{\frac{B_2(t)}{\Delta t}}_{\text{عبارت سوم}}\Big], \qquad (۲\text{-}۲۳)$$

که در آن B_1 و B_2 و B_3 مقادیر لحظه‌ای B متناظر با سه ناحیه از فضاست که در شکل ۵-۲ با ۱، ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند.

وقتی‌که $\Delta t \to 0$ مکان ۱ با حجم کنترل منطبق می‌شود و اولین عبارت سمت راست معادله (۲-۲۳) نرخ زمانی تغییر B درون حجم کنترل را حاصل می‌کند. از آنجایی‌که B اکنون علاوه بر وابستگی به زمان به مکان نیز بستگی دارد، ممکن است این نرخ تغییر به خوبی برحسب $B=\int_{\mathcal V} b\rho\, d\mathcal V$ بیان شود. $\mathcal V$ حجم ثابتِ حجم کنترل، $d\mathcal V$ المان حجمی، $b=B/m$ است. بنابراین برای عبارت اول معادله (۲-۲۳)[1] داریم:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{B_1(t+\Delta t)-B_1(t)}{\Delta t} = \left(\frac{dB}{dt}\right)_{\mathcal V} = \int_{\mathcal V}\frac{\partial(b\rho)}{\partial t}\, d\mathcal V, \qquad (۲\text{-}۲۴)$$

عبارات دوم و سوم در معادله (۲-۲۳) به ترتیب جریانات خروجی و ورودی B از درون سطح کنترل σ را نشان می‌دهند. این عبارات را می‌توان با در نظر گرفتن استوانه هاشورخورده در شکل ۵-۲، ارزیابی نمود. ارتفاع این استوانه $(\mathbf{V}\Delta t).\mathbf{n}$، حجم آن $(\mathbf{V}\Delta t).\mathbf{n}\, d\sigma$، و جرم آن $\rho(\mathbf{V}\Delta t).\mathbf{n}\, d\sigma$ است؛ $\mathbf{V}$ نشان‌دهنده سرعت جریان، $\mathbf{n}$ بردار عمود بیرونی، و $d\sigma$ المان سطح حجم کنترل است. بنابراین نرخ‌های جریان جرم و ویژگی B درون $d\sigma$ به ترتیب $\rho\mathbf{V}.\mathbf{n}\, d\sigma$ و $b\rho\mathbf{V}.\mathbf{n}\, d\sigma$ می‌باشند. با انتگرال‌گیری از دو عبارت اخیر روی تمام سطح کنترل داریم:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{B_3(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{B_2(t)}{\Delta t}\right] = \int_\sigma b\rho\mathbf{V}.\mathbf{n}\, d\sigma, \qquad (۲\text{-}۲۵)$$

سرانجام، با قرار دادن معادلات (۲-۲۴) و (۲-۲۵) در معادله (۲-۲۳)، فرمول تبدیل موردنظر به‌صورت زیر حاصل می‌شود[2]:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \underbrace{\int_{\mathcal V}\frac{\partial(b\rho)}{\partial t}\, d\mathcal V + \int_\sigma b\rho\mathbf{V}.\mathbf{n}\, d\sigma}_{\text{حجم کنترل}}, \qquad (۲\text{-}۲۶)$$

باید متذکر شد که این فرمول تبدیل براساس بیان فیزیکی تعریف سیستم و حجم کنترل به‌دست آمده است. ممکن است با استفاده از توضیحات ریاضی و توابع لاگرانژی و اویلری محیط پیوسته بتوانیم به نتایج مشابهی برسیم. این عبارات ریاضی در اینجا ذکر نمی‌شوند[3].

۱- از آنجایی‌که حجم کنترل ثابت است، $d/dt \equiv \partial/\partial t$ و مرتبه دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری تعویض‌پذیر است.

۲- طبق قرارداد علامت‌های عبارات نرخ فرمول تبدیل انتگرالی و متمرکز مخالف یکدیگرند.

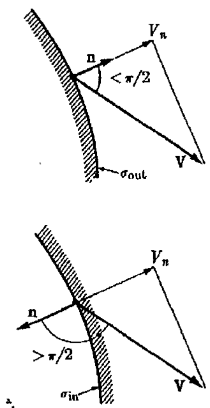
۳- به عنوان مثال مرجع ۱۲ صفحه ۸۴ را ببینید

حال می‌خواهیم از معادله (۲-۲۶) برای به‌دست آوردن شکل انتگرالی قوانین کلی برای حجم‌های کنترل استفاده کنیم.

شکل صریح معادله (۲-۲۵) برای جریانات خروجی و ورودی در شکل ۶-۲ بیان شده است.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{B_3(t+\Delta t)}{\Delta t}=\int_\sigma b\rho\mathbf{V}.\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{\sigma_{out}} b\rho V_n d\sigma_{out},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{B_2(t)}{\Delta t}=\int_\sigma b\rho\mathbf{V}.\mathbf{n}\,d\sigma=-\int_{\sigma_{in}} b\rho V_n d\sigma_{in},$$



شکل ۶-۲

قانون بقای جرم (فرمولاسیون انتگرالی). مقادیر مناسب قبلی برای B و b در نظر گرفته می‌شود:

$$B=m,\quad b=1 \tag{۲-۸}$$

با قراردادن این مقادیر در معادله (۲-۲۶) داریم:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{سیستم}}=\int_v \frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_\sigma \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{۲-۲۷}$$

از آنجایی‌که سمت چپ معادله (۲-۲۷) برابر صفر است خواهیم داشت:

$$0=\int_v \frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_\sigma \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{۲-۲۸}$$

که این معادله بقای جرم برای حجم‌های کنترل انتگرالی است.

قانون اول ترمودینامیک (فرمولاسیون انتگرالی). می‌خواهیم شکل انتگرالی قانون اول ترمودینامیک را برای حجم کنترل شکل ۵-۲ بیان کنیم، با سیستم نشان داده شده در شکل آغاز می‌کنیم. شکل شدتی (نرخی) قانون اول برای این سیستم به‌صورت زیر است:

$$(dE/dt)_{\text{سیستم}}=(\delta Q/dt)_{\text{سیستم}}-(\delta W/dt)_{\text{سیستم}}, \tag{۲-۲۹}$$

که در آن d و δ به ترتیب نشان‌دهنده تغییر دیفرانسیلی ویژگی و مقدار یک غیر ویژگی است (مثل گرما و کار).[1]

با توجه به فرمول (۲-۱۴):

$$B=E,\quad b=e \tag{۲-۱۴}$$

و فرمول انتقال (۲-۲۶) می‌توانیم معادله (۲-۲۹) را به‌صورت زیر بازآرایی نماییم:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{سیستم}}=\int_v \frac{\partial(e\rho)}{\partial t}dV+\int_\sigma e\rho\mathbf{V}.\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{۲-۳۰}$$

از آنجایی‌که در زمان t سیستم حجم کنترل را اشغال می‌کند، نرخ انتقال حرارت $(\delta Q/dt)_{\text{سیستم}}$ و نرخ کار (توان) $(\delta W/dt)_{\text{سیستم}}=P$ در طول مرزهای سیستم را می‌توان به‌طور مناسبی برحسب حجم کنترل بیان نمود.

بنابراین، با قرار دادن بردار شار حرارتی[2] $\mathbf{q}$ (شکل ۷-۲) و انتگرال‌گیری از نرخ انتقال حرارت $\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ از المان سطح $d\sigma$ در تمام سطح کنترل خواهیم داشت:

$$(\delta Q/dt)_{\text{سیستم}}=-\int_\sigma \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{۲-۳۱}$$

که در آن علامت منفی این معادله با علامت قراردادی برای گرما مطابقت دارد.

از آنجایی‌که در این مبحث با یک مورد متمرکز سروکار داریم عبارت نرخ کار $(\delta W/dt)_{\text{سیستم}}$ را می‌توان به طور مناسبی با در نظر گرفتن عناصرش بیان نمود. این عناصر نرخ‌های کار انجام شده توسط موارد زیر می‌باشند:

(الف) سیستم در فشار محیط،

$$(\delta W/dt)_a=P_a,$$

(ب) سیستم در محیطی با تنش‌های گرانرو،

۱- درجه مقدار (δ) همانند درجه تغییرات دیفرانسیلی (d) است

۲- در این کتاب تعریف شار و جریان کاملاً دارای تمایز است. جریان، برای نشان دادن جابه‌جایی (حرکت) ویژگی وابسته به جرم یا حجم درون یک سطح به کار می‌رود. که مثال‌های آن انتقال جرم، مومنتم، انرژی، آنتالپی، و انتروپی با جابجایی و انتقال جریان الکتریکی است. از سوی دیگر، شار، برای بیان نرخ نفوذ یک ویژگی (یا غیرویژگی) به ازای واحد سطح به‌دلیل حرکت مولکول‌ها، استفاده می‌شود. مثال‌های آن انتقال جرم، مومنتم، و حرارت به دلیل نفوذ و رسانش جریان الکتریکی است. علامت‌های مورد استفاده در بیان انتقال حرارت هدایتی به‌صورت زیر است: انتقال حرارت، Q (Btu)؛ نرخ انتقال حرارت، q (Btu/hr)؛ نرخ انتقال حرارت به ازای واحد سطح (شار)، q به همراه یک زیرنویس یا بالا نویس، به‌طور مثال q'' و q_n و q_x و ... یا $\mathbf{q}$ (Btu/ft$^2\cdot$hr).

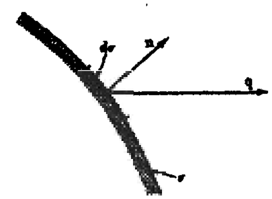
$$(\delta W/dt)_\tau = P_\tau, \quad (۲-۳۲)$$

(پ) محوری که از سیستم به محیط نیرو وارد می‌کند،

$$(\delta W/dt)_s = P_s, \quad (۲-۳۳)$$

(ت) توان الکتریکی که از طرف سیستم بر محیط وارد می‌شود،

$$(\delta W/dt)_e = P_e.$$



شکل ۷-۲

در طول بازه‌ی زمانی Δt، کار انجام شده توسط سیستم برای غلبه بر فشار وارده بر المان سطح $d\sigma$ برابر $p\, d\sigma(\mathbf{V}\,\Delta t)\cdot\mathbf{n}$ است، که در آن $(\mathbf{V}\,\Delta t)\cdot\mathbf{n}$ ارتفاع استوانه و فاصله بین بردار عمود تا $d\sigma$ است. با انتگرال‌گیری از این عبارت در تمام سطح کنترل داریم:

$$P_p = \int_\sigma p\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma (p/\rho)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma. \quad (۲-۳۴)$$

انتگرال دوم معادله (۲-۳۴) بوسیله ضرب و تقسیم تابع تحت انتگرال اول در ρ حاصل می‌شود و وقتی‌که تعریف انتالپی استفاده شود این رابطه مناسب‌تر می‌باشد. [معادلات (۲-۳۶) و (۲-۳۷) را ببینید].

برای موردی که P_e نشان‌دهنده توان وارد بر سیستم از یک جریان الکتریکی خارجی است، داریم:

$$P_e = -\int_v u''' \, dV, \quad (۲-۳۵)$$

که در آن u''' نرخ انرژی داخلی محلی به ازای واحد حجم است که به‌وسیله الکتریسیته در سیستم تولید می‌شود.

با قرار دادن معادلات (۲-۳۰)، (۲-۳۱)، (۲-۳۲)، (۲-۳۳)، (۲-۳۴)، و (۲-۳۵) درون معادله (۲-۲۹) داریم:

$$\int_v \frac{\partial(e\rho)}{\partial t} dV + \int_\sigma e\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = -\int_\sigma \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma - \int_\sigma (p/\rho)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma - P_\tau - P_s + \int_v u''' \, dV. \quad (۲-۳۶)$$

علاوه بر آن، با استفاده از تعریف انتالپی سکون به ازای واحد جرم $h^0 = e + pv$ معادله (۲-۳۶) را می‌توان بازآرایی نمود و قانون اول ترمودینامیک برای حجم‌های کنترل انتگرالی به‌دست می‌آید:

$$\int_v \frac{\partial(e\rho)}{\partial t} dV + \int_\sigma h^0\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = -\int_\sigma \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma - P_\tau - P_s + \int_v u''' \, dV. \quad (۲-۳۷)$$

قانون دوم ترمودینامیک (فرمولاسیون انتگرالی). شکل شدتی این قانون برای سیستم شکل ۵-۲ نوشته شده است:

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{q}{T}, \quad (۲-۱۸)$$

سمت راست معادله (۲-۱۸) ممکن است برحسب بردار شار حرارت $\mathbf{q}$ بیان شود:

$$q/T = -\int_\sigma (\mathbf{q}/T)\cdot\mathbf{n}\, d\sigma \quad (۲-۳۸)$$

با قرار دادن،

$$B = S, \quad b = s \quad (۲-۱۹)$$

در معادله (۲-۲۶)، و سپس قرار دادن نتیجه به همراه معادله (۲-۳۸) درون معادله (۲-۱۸) قانون دوم ترمودینامیک برای حجم‌های کنترلی انتگرالی به‌دست می‌آید:

$$\int_v \frac{\partial(s\rho)}{\partial t} dV + \int_\sigma s\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma \geq -\int_\sigma \left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right)\cdot\mathbf{n}\, d\sigma. \quad (۲-۳۹)$$

با استفاده از معادله (۲-۲۱) برای حالت متمرکز و با افزودن تولید کل انتروپی

$$S_g = \int_v s''' \, dV$$

به سمت راست معادله (۲-۳۹) معادله بقای انتروپی برای حجم‌های کنترل انتگرالی به‌دست می‌آید:

$$\int_v \frac{\partial(s\rho)}{\partial t} dV + \int_\sigma s\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = -\int_\sigma \left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right)\cdot\mathbf{n}\, d\sigma + \int_v s''' \, dV, \quad (۲-۴۰)$$

که در آن s''' نرخ تولید انتروپی محلی به ازای واحد حجم است.

در پایان مطالعه پیرامون شکل‌های انتگرالی قوانین کلی، حال می‌خواهیم شکل‌های دیفرانسیلی این قوانین را بیان نماییم.

۵-۲. فرمولاسیون دیفرانسیلی قوانین کلی

دو روش برای دستیابی به شکل‌های دیفرانسیلی قوانین کلی وجود دارد. یکی از آن‌ها با شکل انتگرالی شروع می‌شود و در آن از قضیه دیورژانس (گرین[1]) استفاده شده و انتگرال‌های سطحی این شکل انتگرالی را تبدیل به انتگرال‌های حجمی می‌نماید، سپس با حذف عملیات انتگرال حجمی حاصل، شکل دیفرانسیلی به‌دست می‌آید. در روش دوم به‌طور مستقیم شکل‌های دیفرانسیلی برحسب یک حجم کنترل دیفرانسیلی مناسب انتخاب شده و به‌دست می‌آیند. روش اول در این مبحث کوتاه‌تر بوده و در اینجا ترجیح داده می‌شود.

1- Divergence theorem (Green)

ابتدا قضیه دیورژانس را می‌نویسیم، که بیان می‌کند برای یک حجم $\mathcal{V}$ که دارای سطح تکه‌ای یکنواخت $\boldsymbol{\sigma}$ است، می‌توان نوشت:

$$\int_\sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_v \nabla\cdot\mathbf{a}\, d\mathcal{V}, \qquad (۲-۴۱)$$

که در آن $\mathbf{a}$ هر بردار همواره دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. سپس با استفاده از معادله (۲-۴۱)، شکل‌های دیفرانسیلی قوانین کلی را می‌توان با استفاده از شکل‌های انتگرالی‌شان به‌دست آورد.

قانون بقای جرم (فرمولاسیون دیفرانسیلی). شکل انتگرالی این قانون، معادله (۲-۲۸) است که انتگرال سطحی آن با استفاده معادله (۲-۴۱) و $\mathbf{a} = \rho\mathbf{V}$ به انتگرال حجمی تبدیل می‌شود و با بازآرایی آن داریم:

$$0 = \int_v \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right] d\mathcal{V}, \qquad (۲-۴۲)$$

از آنجایی‌که معادله (۲-۴۲) برای یک حجم کنترل اختیاری صحیح است، انتگرالده باید در همه جا صفر باشد، بنابراین قانون بقای جرم برای حجم‌های کنترلی دیفرانسیلی به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0. \qquad (۲-۴۳)$$

با نوشتن بردار معروف همانی داریم:

$$\nabla\cdot(\alpha\beta) = \alpha\nabla\cdot\beta + \beta\cdot\nabla\alpha. \qquad (۲-۴۴)$$

(که در آن α یک مقدار نرده‌ای و β یک بردار است) با در نظر گرفتن عبارت مشتقی زیر [۱]

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{V}\alpha, \qquad (۲-۴۵)$$

شکل دیگر معادله (۲-۴۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0. \qquad (۲-۴۶)$$

برای جامدات و سیالات تراکم‌ناپذیر، ثابت $= \rho$ است و معادله (۲-۴۶) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0. \qquad (۲-۴۷)$$

۱- این مشتق اغلب با D/Dt نشان داده می‌شود، و معمولاً به عنوان مشتق مادی، مشتق اساسی، مشتق جابجایی معروف است.

قبل از آن‌که قانون کلی دیگری را مدنظر قرار دهیم، شکل انتگرالی فرمول تبدیل، یعنی معادله (۲-۲۶) را بازآرایی می‌کنیم و به‌صورت شکل دیفرانسیلی قانون بقای جرم در می‌آوریم با تبدیل انتگرال سطحی معادله (۲-۲۶) به انتگرال حجمی و استفاده از معادلات (۲-۴۴) و (۲-۴۳) داریم:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \int_v \rho\frac{db}{dt}d\mathcal{V}. \qquad (۲-۴۸)$$

در اینجا از این شکل فرمول تبدیل برای فرمولاسیون دیفرانسیلی قوانین کلی استفاده می‌شود.

قانون اول ترمودینامیک (فرمولاسیون دیفرانسیلی). سمت راست معادله (۲-۳۰) با سمت چپ معادله (۲-۳۶) (یعنی شکل انتگرالی قانون اول ترمودینامیک) برابر است، و می‌توان سمت چپ معادله (۲-۳۰) را با استفاده از معادله (۲-۴۸) تغییر داد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_v \rho\frac{de}{dt}d\mathcal{V} = -\int_\sigma \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma - \int_\sigma p\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma - P_\tau - P_s + \int_v u'''d\mathcal{V}. \qquad (۲-۴۹)$$

از آنجایی‌که فرض می‌کنیم با جامدات و سیالات تراکم‌ناپذیر بدون اصطکاک سروکار داریم در نتیجه $P_\tau = 0$ است. علاوه بر آن با در نظر گرفتن موارد ویژه‌ای که در آن‌ها $P_s = 0$ است، و تبدیل انتگرال‌های سطحی مربوط به شار حرارتی و نرخ کار فشاری به انتگرال‌های حجمی، و سپس حذف عملیات انتگرال حجمی خواهیم داشت:

$$\rho\frac{de}{dt} + \nabla\cdot(p\mathbf{V} + \mathbf{q}) = u''' \qquad (۲-۵۰)$$

با بسط عبارت $\nabla.(p\mathbf{V})$ به‌وسیله معادله (۲-۴۴) و برای، ثابت $= \rho$ و با استفاده از معادله (۲-۴۷) خواهیم داشت:

$$\nabla.(p\mathbf{V}) = \mathbf{V}\cdot\nabla p. \qquad (۲-۵۱)$$

با قرار دادن معادله (۲-۵۱) درون معادله (۲-۵۰) داریم:

$$\rho\frac{de}{dt} + \mathbf{V}\cdot\nabla p + \nabla\cdot\mathbf{q} = u''', \qquad (۲-۵۲)$$

که این رابطه، قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترل دیفرانسیلی است. از آنجایی‌که معادله (۲-۵۲) بیانی از قانون بقای انرژی کل است، می‌توانیم نتایجی را از آن استنباط نماییم.

در غیاب اثرات حرارتی، شیمیایی و هسته‌ای معادله (۲-۵۲) به قانون بقای انرژی مکانیکی برای حجم کنترل دیفرانسیلی تبدیل می‌شود:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}V^2 + gz\right) + \mathbf{V}\cdot\nabla p = 0. \qquad (۲-۵۳)$$

معادله (۲-۵۳) را می‌توان برای فرایندهایی که شامل اثرات حرارتی، شیمیایی، و یا هسته‌ای هستند با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن به طور مستقیم به‌دست آورد.

برای یک فرایند پایا، مشتق مادی p به‌صورت زیر است:

$$\frac{dp}{dt} = \mathbf{V}\cdot\nabla p. \tag{۲-۵۴}$$

با قرار دادن معادله (۲-۵۴) درون معادله (۲-۵۳) و بازآرایی عبارت آن داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}V^2+gz\right)=0, \tag{۲-۵۵}$$

و در نتیجه با انتگرال‌گیری از این معادله، معادله برنولی در یک خط جریان حاصل می‌شود:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}V^2+gz = \text{ثابت}, \tag{۲-۵۶}$$

تفاوت بین معادلات (۲-۵۳) و (۲-۵۲) قانون بقای انرژی حرارتی برای حجم کنترل دیفرانسیلی را حاصل می‌کند:

$$\rho\frac{du}{dt}+\nabla\cdot\mathbf{q}=u''', \tag{۲-۵۷}$$

معادله (۲-۵۷) را می‌توانیم به‌صورت ترمودینامیکی بازآرایی کنیم. هر ویژگی محیط پیوسته که از نظر ترکیب غیرقابل‌تغییر و همگن باشد (ولی ممکن است مخلوطی از دو فاز باشد)، به‌وسیله دو ویژگی مستقل دیگر به‌طور کامل مشخص می‌شود.[1] بنابراین، با در نظر گرفتن $u(v,T)$ و $h(p,T)$ و تعریف گرمای مخصوص در حجم ثابت و گرمای مخصوص در فشار ثابت،

$$c_v=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v, c_p=\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p,$$

خواهیم داشت:

$$du=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dv + c_v\,dT, \tag{۲-۵۸}$$

$$dh=\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp + c_p\,dT, \tag{۲-۵۹}$$

برای جامدات و سیالات تراکم‌ناپذیر، ثابت $= v$، معادله (۲-۵۸) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$du = c_v\,dT. \tag{۲-۶۰}$$

علاوه برآن، اگر ثابت $= p$ باشد معادله (۲-۵۹) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$dh = c_p\,dT, \tag{۲-۶۱}$$

۱- این یک عنصر خالص ترمودینامیکی است. به عنوان مثال، مرجع ۹ صفحه ۳۰ را ببینید.

با استفاده از تعریف آنتالپی به ازای واحد جرم، $h = v + pv$ خواهیم داشت،

$$dh = du,\quad p = \text{ثابت},\quad v = \text{ثابت} \tag{۲-۶۲}$$

بنابراین با ترکیب معادلات (۲-۶۰) و (۲-۶۱) و (۲-۶۲) داریم:

$$c_p = c_v = c. \tag{۲-۶۳}$$

اگر p تغییر کند، $c_p - c_v$ برای جامدات و سیالات تراکم‌ناپذیر، کوچک و قابل صرف‌نظر خواهد بود[1] و معادله (۲-۶۳) به‌طور تقریبی همچنان برقرار خواهد بود.

با قرار دادن معادله (۲-۶۳) درون معادله (۲-۶۰) و قرار دادن نتیجه آن در معادله (۲-۵۷) سرانجام خواهیم داشت:

$$\rho c\frac{dT}{dt}+\nabla\cdot\mathbf{q}=u''', \tag{۲-۶۴}$$

که این عبارت بیان دیگری از قانون بقای انرژی حرارتی برای حجم کنترل دیفرانسیلی است. در بخش ۲-۷، معادله (۲-۶۴) نقطه آغازی برای به‌دست آوردن شکل دیفرانسیلی معادله هدایت خواهد بود.

قانون دوم ترمودینامیک (فرمولاسیون دیفرانسیلی). با تبدیل سمت چپ معادله انتگرالی قانون دوم، معادله (۲-۳۹)، با استفاده از فرمول تبدیل (۲-۴۸) و تبدیل سمت راست معادله (۲-۳۹) با استفاده از تئوری دیورژانس، معادله (۲-۴۱)، و حذف عملیات انتگرال حجمی خواهیم داشت:

$$\rho\frac{dS}{dt}+\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right)\geq 0, \tag{۲-۶۵}$$

که این معادله، قانون دوم ترمودینامیک برای حجم کنترل دیفرانسیلی است.

به‌طور مشابه، با استفاده از شکل انتگرالی معادله بقای آنتروپی، معادله (۲-۴۰)، می‌توان به راحتی معادله بقای انتروپی برای حجم کنترل دیفرانسیلی را به‌دست آورد:

$$\rho\frac{dS}{dt}+\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right)=s'''. \tag{۲-۶۶}$$

معادله (۲-۶۶) برای تعیین s''' برحسب $\mathbf{q}$ و T مفید است. ابتدا، با استفاده از رابطه ترمودینامیکی:

$$du = T\,ds - p\,dv,$$

شکل شدتی آن را برای ثابت $= v$ خواهیم داشت:

۱- به عنوان مثال مرجع ۹ صفحه ۴۱۳، مثال ۴-۱۴ را ببینید.

$$\frac{du}{dt} = T\frac{dS}{dt}. \qquad (۲-۶۷)$$

حال با حذف du/dt و ds/dt در معادلات (۵۷-۲)، (۶۶-۲) و (۶۷-۲) خواهیم داشت:

$$s''' = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - \frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \frac{u'''}{T}. \qquad (۲-۶۸)$$

سپس عبارت $\nabla.(\mathbf{q}/T)$ را با استفاده از معادله (۴۴-۲) بسط می‌دهیم و معادله (۶۸-۲) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$s''' = -\frac{1}{T^2}(\mathbf{q} \cdot \nabla T) + \frac{u'''}{T}. \qquad (۲-۶۹)$$

معادله (۶۹-۲) برای یک حجم کنترل دیفرانسیلی، نرخ تولید آنتروپی به ازای واحد حجم در مسائل هدایتی را می‌دهد. [وقتی‌که اثر اصطکاک برای سیال تراکم‌ناپذیر وجود داشته باشد، اتلافی که در اثر اصطکاک به‌وجود می‌آید باعث افزایش تولید انتروپی شده که اثر آن با یک عبارت اضافی در معادله (۶۹-۲) نشان داده می‌شود. این عبارت، به‌دلیل کم اهمیت بودن در مطالعه حاضر بررسی نشد.]

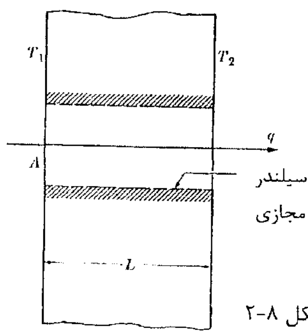
بنابراین تا اینجا فرمولاسیون‌های متمرکز، انتگرالی و دیفرانسیلی قوانین کلی را کامل نمودیم. به‌منظور کسب آمادگی برای مطالعه بخش بعدی، بر هدف از مطالعه هدایت توجه می‌کنیم، که در طراحی تجهیزات حرارتی، به عنوان مثال مبدل‌های حرارتی، استفاده می‌شود. به این هدف نخواهیم رسید مگر آن‌که دما و انتقال حرارت به، یا از این‌گونه تجهیزات را ارزیابی نماییم. دما برای طراحی مکانیکی مهم است، زیرا ما را قادر می‌سازد تا تنش و تغییر شکل حرارتی را محاسبه نماییم. نرخ انتقال حرارت برای طراحی حرارتی مهم است، زیرا به ما کمک می‌کند تا اندازه تجهیزات را تعیین نموده و سطح انتقال حرارت مبدل‌های حرارتی را مشخص کنیم. بنابراین یک مساله انتقال حرارت، به‌طورکلی و به‌طور همزمان به محاسبه $\mathbf{q}$ و T نیاز دارد. حال به عنوان مثال قانون بقای انرژی حرارتی، معادله (۶۴-۲) را در نظر بگیرید. این معادله رابطه‌ای را برای تعیین و ارزیابی $\mathbf{q}$ و T می‌دهد که به‌تنهایی کافی نیست. بنابراین، مجبوریم رابطه دیگری که بین $\mathbf{q}$ و T ارتباط برقرار می‌کند، در نظر بگیریم. مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که سایر روابط مورد نیاز وابسته به محیط پیوسته مورد مطالعه می‌باشد، از این‌رو معادلاتی که چنین روابطی را بیان می‌نمایند، قوانین ویژه نامیده می‌شوند، که به بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

۶-۲. توصیف قوانین ویژه

دو قانون ویژه، قانون هدایتی فوریه و قانون تابش استفان- بولتزمان در این بخش مدنظر قرار می‌گیرند، که اولی مستقیماً به هدایت مربوط بوده و مورد تاکید قرار می‌گیرد. دومین معادله فقط وقتی که تابش بر انتقال حرارت از مرزهای محیط پیوسته حکم‌فرما باشد، مفید خواهد بود.

قانون هدایت فوریه. تئوری‌های میکروسکوپی نظیر تئوری جنبشی گازها و تئوری الکترون آزاد در فلزات برای پیش‌بینی هدایت از درون محیط مفید می‌باشند. اگرچه، تئوری ماکروسکوپی (پیوستگی) هدایت، که موضوع اصلی و مهم این کتاب است به ساختار مولکولی محیط پیوسته توجهی ندارد، بنابراین به‌صورت پدیده‌ای انجام شده، و اثراتش را به‌وسیله آزمایش تجربی و به گونه زیر تعیین می‌کنند.

یک دیواره صاف جامد با ضخامت L را در نظر بگیرید (شکل ۸-۲). فرض می‌شود که قسمتی از این دیواره به‌وسیله یک استوانه فرضی و با سطح مقطع کوچک A مرزبندی شود. فرض می‌شود که این استوانه از دو انتهای بالا و پایین دیواره به اندازه‌ای دور است که هیچ حرارتی از سطح پیرامونش عبور نمی‌کند؛ انتقال حرارت در طول محور استوانه یک بعدی است. دمای سطوح صفحه را T_1 و T_2 در نظر می‌گیریم، و فرض می‌نماییم که $T_1 > T_2$ باشد. برطبق قانون اول ترمودینامیک، تحت شرایط پایا نرخ انتقال حرارت ثابت q از هر مقطع استوانه موازی سطوح صفحه، برقرار است. بر طبق قانون دوم ترمودینامیک می‌دانیم که جهت این انتقال حرارت از دمای بیشتر به دمای کمتر است.



شکل ۸-۲

مشاهدات تجربی جامدات مختلف ما را به این نتیجه می‌رساند که برای مقادیر به اندازه کافی کوچک اختلاف دما بین سطوح صفحه، رابطه زیر را داریم:

$$q = kA\frac{T_1 - T_2}{L}, \qquad (۲-۷۰)$$

که در آن k یک مقدار ثابت است، که به آن ضریب هدایت حرارتی ماده صفحه می‌گویند. بنابراین

$$q_n = k\frac{T_1 - T_2}{L}, \qquad (۲-۷۱)$$

شار حرارت ناشی از هدایت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

که در آن زیرنویس n در q_n نشان‌دهنده جهت این شار است. معادله (۷۱-۲) قانون فوریه برای محیط پیوسته همگن ایزوتروپیک را می‌دهد.

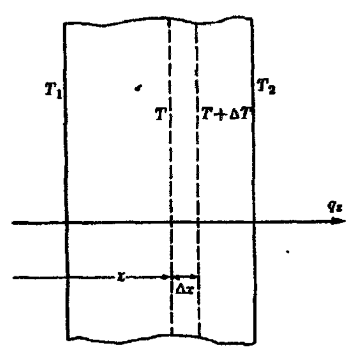
معادله (۲-۷۰) را همچنین می‌توان برای یک سیال (مایع یا گاز) بین دو صفحه با فاصله L از هم نیز مورد استفاده قرار داد، که این دو صفحه به‌منظور جلوگیری از جابه‌جایی و تابش قرار داده شده‌اند. بنابراین معادله (۲-۷۰) هدایت حرارتی درون سیالات را مثل جامدات بیان می‌کند.

محیط پیوسته را می‌توانیم براساس تغییرات ضریب هدایت حرارتی طبقه‌بندی کنیم. به یک محیط پیوسته همگن می‌گویند اگر هدایتش نقطه به نقطه تغییر ننماید، و ناهمگن می‌گویند اگر هدایتش تغییر نماید. علاوه برآن، محیط پیوسته در تمام جهات دارای رسانایی یکسان است که به آن خاصیت ایزوتروپیک[۱] می‌گویند درحالی‌که به مواد دارای رسانایی در جهت‌های مختلف غیرایزوتروپیک گفته می‌شود. بعضی مواد شامل ساختار فیبری دارای خصوصیات غیر ایزوتروپیک هستند، به طور مثال، چوب و پنبه نسوز. موادی که دارای ساختار متخلخل هستند مثل پشم یا چوب پنبه، مثال‌هایی از محیط‌های پیوسته ناهمگنند. در این کتاب، به‌جز در مواقعی که به‌طور صریح گفته شود، تنها مسائل محیط‌های ایزوتروپیک را مطالعه می‌نماییم. به‌دلیل تقارن در هدایت حرارتی در محیط ایزوتروپیک، شار حرارت در هر نقطه باید نسبت به سطح هم‌دما[۲] عمود شود.

حال فرض کنید که صفحه شکل ۲-۸ ایزوتروپیک اما ناهمگن است. دماهای دو سطح هم‌دمای متناظر با x و $x+\Delta x$ را به‌ترتیب با T و $T+\Delta T$ نشان می‌دهیم (شکل ۲-۹). از آنجایی‌که این صفحه ممکن است همگن در نظر گرفته شود، معادله (۲-۷۱) را می‌توان برای یک لایه از صفحه با ضخامت Δx که $\Delta x \to 0$ استفاده نمود. بنابراین شکل دیفرانسیلی قانون هدایت فوریه، عبارت شار حرارتی در جهت افزایش x را به این شکل ارائه می‌کند:

$$q_x = -k \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right) = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (۲\text{-}۷۲)$$

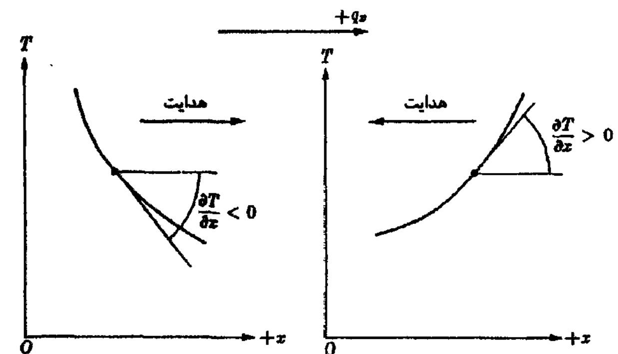
(قانون فوریه برای محیط ایزوتروپیک ناهمگن). در معادله (۲-۷۲)، با قرار دادن علامت منفی، q_x را در جهت افزایش x مثبت می‌نماییم. شایان ذکر است که این معادله به توزیع دما وابسته نیست. بنابراین، برای مثال، در شکل ۲-۱۰ الف، $\partial T/\partial x < 0$ و $q_x > 0$ است در حالی‌که در شکل ۲-۱۰ ب، $\partial T/\partial x > 0$ و $q_x < 0$ است. هر دو نتیجه با قانون دوم ترمودینامیک سازگار است که در آن حرارت از دمای بالاتر به دمای پایین‌تر نفوذ می‌کند.



شکل ۲-۹

۱- از آنجایی‌که محیط‌ها را براساس رسانایی‌شان طبقه‌بندی می‌کنیم، بنابراین واضح است که جامدات مورد استفاده در قانون فوریه حتماً باید همگن و ایزوتروپیک باشند.

۲- سطحی که دمای تمام نقاط آن یکسان باشد.



شکل ۲-۱۰

برای هر سطح هم دما می‌توان معادله (۲-۷۲) را به راحتی گسترش داد:

$$q_n = -k\frac{\partial T}{\partial n}, \qquad (۲\text{-}۷۳)$$

که در آن $\partial/\partial n$ نشان‌دهنده مشتق در طول بردار عمود و سطح است. و این شار حرارتی را با بردار و زیرنویس n نشان می‌دهیم و داریم:

$$q_n = |\mathbf{q}|, \qquad (۲\text{-}۷۴)$$

اینجا $\mathbf{q}$ ممکن است برحسب سیستم مختصاتی بیان شود[۱] و داریم:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T, \qquad (۲\text{-}۷۵)$$

این معادله، شکل برداری قانون فوریه برای محیط ایزوتروپیک ناهمگن است.

شار حرارتی در هر نقطه P در هر سطح غیرهم‌دما به‌وسیله شار حرارتی در سطح هم‌دما در آن نقطه، تعیین می‌شود (شکل ۲-۱۱). اگر در نقطه P بردار عمود $\mathbf{m}$ روی سطح غیرهم‌دما نسبت به سیستم مختصاتی کسینوس‌های (α, β, γ) بسازد، اندازه شار حرارتی از درون این سطح به صورت زیر است:

۱- برحسب مختصات کارتزین به عنوان مثال:

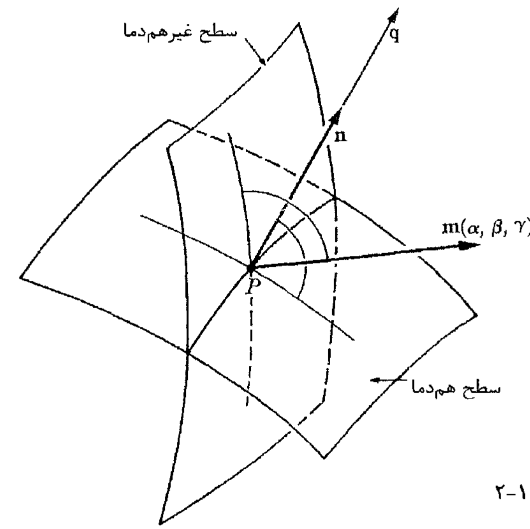
$$\mathbf{q} = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k},$$

در آن $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بردارهای واحد در جهات x و y و z هستند. با توجه به معادله (۲-۷۲) که $q_x = -k(\partial T/\partial x)$ است، و به طور مشابه $q_y = -k(\partial T/\partial y)$ و $q_z = -k(\partial T/\partial z)$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{q} = -k\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)T,$$

بر طبق تعریف، نشان‌دهنده معادله (۲-۷۵) است.

$$q_m = \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}, \qquad (۲-۷۶)$$



شکل ۱۱-۲

با قرار دادن معادله (۷۵-۲) درون معادله (۷۶-۲) داریم:

$$q_m = -k(\nabla T \cdot \mathbf{m}). \qquad (۲-۷۷)$$

بنابراین با توجه به خواص بردارها داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \nabla T \cdot \mathbf{m},$$

معادله (۷۷-۲) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$q_m = -k\frac{\partial T}{\partial m}, \qquad (۲-۷۸)$$

که این رابطه مقدار شار حرارتی از درون هر سطحی را می‌دهد؛ در اینجا $\partial/\partial m$ نشان‌دهنده مشتق در جهت بردار عمود است.

بنابراین قانون فوریه را فقط برای محیط ایزوتروپیک به‌کار می‌بریم. در عمل محیط غیرایزوتروپیک نیز مهم است. که مثال‌های متنوع از آن کریستال‌ها، چوب، و مواد ورقه‌ای مثل مغزه‌های انتقال‌دهنده[1] می‌باشند. برای چنین محیطی جهت بردار شار حرارت در هر نقطه از بردار عمود درون سطح هم دما، بزرگتر نیست. برای نوشتن شکل کلی قانون فوریه برای محیط

1- Transformer cores

ایزوتروپیک، می‌توانیم برای هر سازنده فرض کنیم که بردار شار حرارتی به‌طور خطی به گرادیان دما در هر نقطه وابسته است. بنابراین، به عنوان مثال، شکل کارتزین قانون فوریه[1] برای محیط غیرایزوتروپیک ناهمگن به‌صورت زیر است:

$$q_x = -\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$
$$q_y = -\left(k_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial z}\right), \qquad (۲-۷۹)$$
$$q_z = -\left(k_{31}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{32}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

ابعاد فیزیکی ویژگی k در واحد حرارتی انگلیسی به‌صورت $[k] \equiv \mathrm{Btu/ft \cdot hr \cdot {}^\circ F}$ می‌باشد. مقدار عددی k برای محیط‌های مختلف به‌طور عملی از صفر برای گازها و تحت فشار بسیار کم تا حدود ۷۰۰۰ $\mathrm{Btu/ft \cdot hr \cdot {}^\circ F}$ برای کریستال طبیعی مس در دماهای بسیار کم، متغیر است. به‌طور کلی مقدار k برای یک محیط به ترکیب شیمیایی، حالت فیزیکی، و ساختار، دما و فشار بستگی دارد.

در جامدات وابستگی به فشار، بسیار کم است، و معمولاً قابل صرف‌نظر می‌باشد. برای تفاضل دمایی کم، وابستگی به دما نیز قابل صرف‌نظر می‌باشد. در غیر این‌صورت یک رابطه خطی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$k = k_0(1 + \beta T), \qquad (۲-۸۰)$$

که در آن β کوچک بوده و برای اغلب جامدات منفی است.

در شکل ۱۲-۲ [2] مقادیر عددی ضریب هدایت حرارتی برای بعضی گازها، مایعات و جامدات برحسب تابعی از دما داده شده است. روش‌های تجربی تعیین ضریب هدایت حرارتی برای محیط‌های مختلف، زیاد و متنوع می‌باشد. و این روش‌ها به‌صورت وسیع در مقالات ارائه شده‌اند و در این کتاب ذکر نمی‌شوند[3].

قانون تابش استفان– بولتزمان. قبل از بیان این قانون، مرور کوتاهی از تعدادی مفاهیم مورد نیاز خواهیم داشت. از دیدگاه الکترومغناطیسی، انتقال حرارت تابشی، مثل امواج رادیویی، نور، پرتوهای کیهانی و غیره انرژی‌هایی هستند که به‌صورت امواج الکترومغناطیسی بوده و تنها از نظر

۱- شکل برداری این قانون به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{q} = -k \cdot \nabla T,$$

که در آن k تانسور هدایتی است؛ اجزا این تانسور ضرایب هدایتی نامیده می‌شوند.

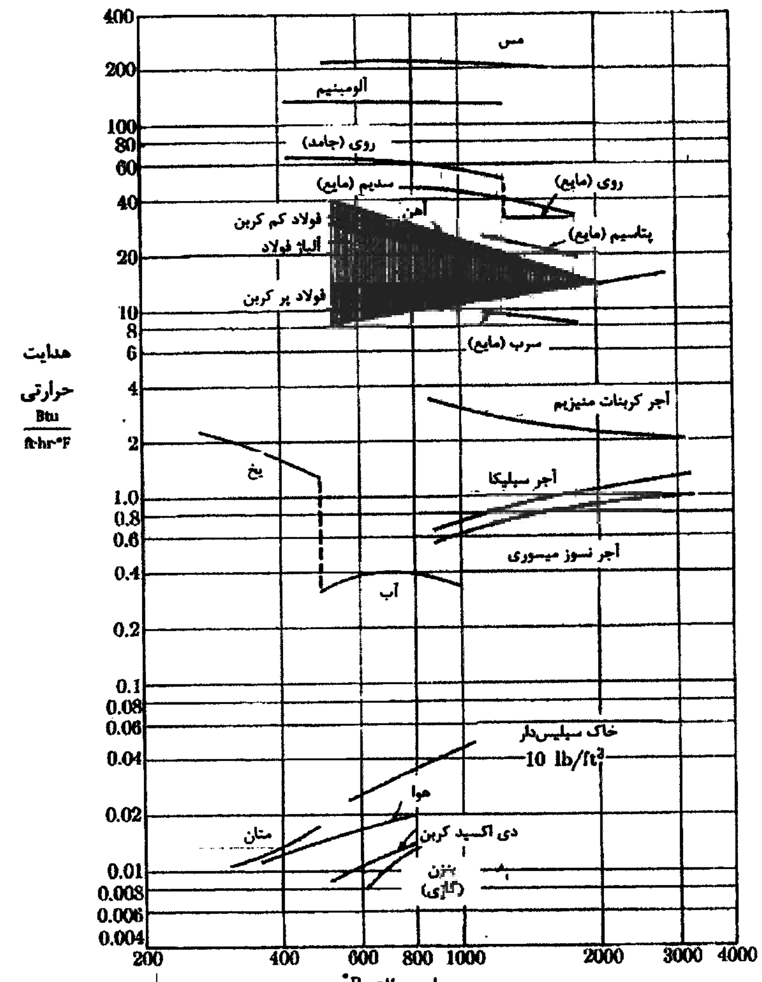
۲- برگرفته از المان‌های انتقال حرارت، M. Jakob و G. A. Hawkins، نیویورک: John Wiley & Sons,1957

۳- به عنوان مثال فصل ۹ مرجع ۱۴ را ببینید.

طول موج با یکدیگر متفاوتند. وقتی‌که انرژی تابشی به سطحی وارد می‌شود، جزیی از آن (α) جذب می‌شود، و جزو دیگر آن (ρ) بازتاب شده و بقیه آن (τ) عبور می‌کند. بنابراین داریم:

$$\alpha + \rho + \tau = 1, \qquad (۲\text{-}۸۱)$$

که در آن α، ρ و τ به ترتیب ضریب جذب، ضریب بازتابش و ضریب عبور سطح نامیده می‌شوند.



شکل ۱۲-۲

از آنجایی‌که برای محیط‌های مات $\tau = 0$ است معادله (۸۱-۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha + \rho = 1, \qquad (۲\text{-}۸$$

از آنجایی‌که برای محیط‌های شفاف $\rho = 0$ است داریم:

$$\alpha + \tau = 1, \qquad (۲\text{-}۸$$

سطحی که همه تابش وارد شده را جذب می‌کند ($\alpha = 1$) یا در دماهای خاصی بیشترین تابش ممکن را گسیل می‌کند سطح سیاه نامیده می‌شود.

گسیل یک سطح به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\epsilon = q/q_b, \qquad (۲\text{-}۸$$

که در آن q و q_b به ترتیب نشان‌دهنده شارهای انتقال حرارت تابش این سطح و سطح سیاه در یک دماست. بنابراین برای یک سطح سیاه $\epsilon = 1$ است.

برای هر سطحی تحت تعادل حرارتی رابطه $\alpha = \epsilon$ برقرار است.[1]

حال دو سطح هم دمای A_1 و A_2 که دارای ضریب صدورهای ϵ_1 و ϵ_2 و دماهای مطلق T_1 و T_2 هستند را در نظر می‌گیریم این سطوح، با یک سطح عایق سوم، یک محفظه را تشکیل می‌دهند (شکل ۱۳-۲). ابتدا به‌صورت تجربی توسط استفان و بعداً به‌صورت ترمودینامیکی توسط بولتزمان و تحت شرایط پایا و در حضور محیط دارای جاذب‌های نانو یا محیط خلاء نشان داده شد که شار انتقال حرارت تابشی q_{12} بین سطوح A_1 و A_2 توسط قانون تابش استفان – بولتزمان و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$q_{12} = \sigma \mathcal{F}_{12}(T_1^4 - T_2^4), \qquad (۲\text{-}۸$$

که در آن σ ثابت استفان – بولتزمان است و مقدار آن $0.17 \times 10^{-8}\,\mathrm{Btu/ft^2 \cdot hr \cdot {}^\circ R^4}$ می‌باشد.

$\mathcal{F}_{12}$ فاکتوری است که به ضریب صدور و مکان نسبی دو سطح بستگی دارد و داریم:

$$\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} = \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1\right) + \frac{1}{\bar{F}_{12}} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right), \qquad (۲\text{-}۸$$

که

$$\bar{F}_{12} = \frac{A_2 - A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2A_1 F_{12}}. \qquad (۲\text{-}۸$$

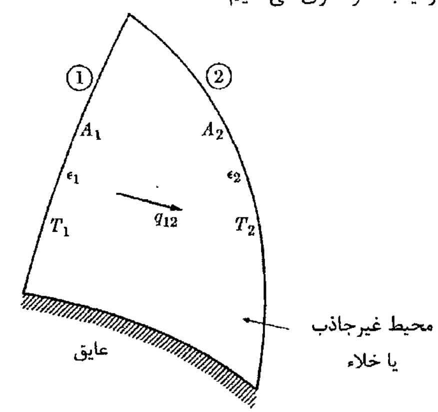
در اینجا F_{12} ضریب دید هندسی نامیده می‌شود. به‌طور فیزیکی F_{12} نشان‌دهنده جزیی از کل تابش از سطح A_1 است که توسط سطح A_2 دریافت می‌شود. این فاکتور برای سطحی که توسط

---

[1] یک نتیجه از قانون کرشهف. به عنوان مثال، مرجع ۱۴، بخش ۲-۴ را ببینید.

سطح دیگر محصور شده باشد و یا برای دو صفحه موازی که در دو انتهایشان اتلاف تابش قابل صرف‌نظری داشته باشند، دارای مقدار واحد است. برای سطح عایق ضریب دید نزدیک به صفر است، $\bar{F}_{12} \rightarrow F_{12}$.

برای ترکیبی با بیش از سه سطح، ارزیابی شار حرارتی تابشی دخیل می‌شود. علاوه بر آن، تعیین ضرایب دید هندسی برای هر سطحی حتی اشکال هندسی ساده اغلب مشکل است؛ از این‌رو از ذکر آن‌ها در اینجا خودداری می‌کنیم.



شکل ۲-۱۳

۲-۷. معادله هدایت

تولید انتروپی به‌دلیل مقاومت هدایتی.

هنگامی‌که قانون فوریه را، معادلات (۲-۷۵) یا (۲-۷۹)، درون قانون بقای انرژی حرارتی قرار دهیم، معادله (۲-۶۴)، شکل دیفرانسیلی معادله هدایت گرمایی تنها برحسب دما به‌دست می‌آید.

ابتدا می‌خواهیم محیط همگن را بررسی کنیم. با قرار دادن معادله (۲-۷۵) درون معادله (۲-۶۴)، معادله هدایت را برای جامدات ناهمگن ایزوتروپیک و سیالات تراکم‌ناپذیر بدون اصطکاک خواهیم داشت:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k\, \nabla T) + u'''. \qquad (۲\text{-}۸۸)$$

معادله (۲-۸۸) با استفاده از مفهوم معادله (۲-۴۴) به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla k \cdot \nabla T + k\, \nabla^2 T + u''', \qquad (۲\text{-}۸۹)$$

که در آن ∇^2 معرف عمل‌گر معروف لاپلاسین می‌باشد. اگر k تنها تابعی از فاصله باشد معادله (۲-۸۹) خطی خواهد بود. از سوی دیگر، هنگامی‌که k تنها وابسته به زمان باشد، با استفاده از شاخص برداری $\nabla k = (dk/dT)\nabla T$، معادله (۲-۸۹) به‌صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{dk}{dt}(\nabla T)^2 + k\, \nabla^2 T + u''', \qquad (۲\text{-}۹۰)$$

که این عبارت غیر خطی می‌باشد. [چه عبارتی معادله (۲-۹۵) را غیر خطی کرده است؟] برای محیط ایزوتروپیک پیوسته k ثابت است و معادله (۲-۸۹) تبدیل به معادله هدایت برای جامدات ایزوتروپیک همگن و سیالات تراکم‌ناپذیر بدون اصطکاک می‌شود.

$$\frac{dT}{dt} = a\, \nabla^2 T + \frac{u'''}{\rho c}, \qquad (۲\text{-}۹۱)$$

که:

$$a = k/\rho c \qquad (۲\text{-}۹۲)$$

a نفوذ حرارتی نامیده می‌شود.

حال فرض می‌کنیم که محیط غیرایزوتروپیک[1] باشد. برحسب مختصات کارتزین، به عنوان مثال، با قرار دادن معادله (۲-۷۹) درون معادله (۲-۶۴) خواهیم داشت:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{31}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{32}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + u''', \qquad (۲\text{-}۹۳)$$

که این معادله، معادله هدایت برای جامدات غیرایزوتروپیک ناهمگن[2] می‌باشد. اگر ضرایب هدایت، هر چند متفاوت از یکدیگر، نسبت به مکان ثابت باقی بماند، معادله (۲-۹۳) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

۱- این مورد هیچ معنی و اهمیت فیزیکی‌ای برای سیالات ندارد.

۲- در حالتی که ضرایب هدایت حرارتی مساوی k و ثابت در نظر گرفته شود معادله (۲-۹۳) به‌صورت کلی زیر نمایش داده می‌شود.

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + u''',$$

با محاسبه این مقدار، معادله به این صورت بازآرایی می‌شود.

$$\rho c \frac{dT}{dt} = (\nabla \cdot k) \cdot (\nabla T) + k : \nabla(\nabla T) + u'''.$$

به‌طور مشابه حالت کلی معادله (۲-۹۴) هم به این صورت درخواهد آمد.

$$\rho c \frac{dT}{dt} = k : \nabla(\nabla T) + u'''.$$

$$\rho c\frac{dT}{dt}=k_{11}\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+k_{22}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+k_{33}\frac{\partial^2T}{\partial z^2}$$

$$+(k_{12}+k_{21})\frac{\partial^2T}{\partial x\partial y}+(k_{23}+k_{32})\frac{\partial^2T}{\partial y\partial z}+(k_{31}+k_{13})\frac{\partial^2T}{\partial z\partial x}+u''', \qquad (۲-۹۴)$$

و این معادله حرارتی برای جامدات همگن غیرایزوتروپیک است. این کتاب از توضیحات بیشتر در مورد مواد غیرایزوتروپیک اجتناب می‌نماید[1].

هرگاه تغییرات دمایی در هر محیط پیوسته که فرایند مشخصی در آن جریان دارد مشاهده شود، تولید انتروپی در این فرایند، توسط قانون فوریه – که رابطه بین دما و انتروپی را مشخص می‌کند - قابل دستیابی است. به همین دلیل در حالت محیط ایزوتروپیک، به‌عنوان مثال، با قرار دادن معادله (۲-۷۵) در معادله (۲-۶۹) خواهیم داشت:

$$s'''=k\frac{(\nabla T)^2}{T^2}+\frac{u'''}{T}. \qquad (۲-۹۵)$$

تاکنون توانستیم معادلات (۲-۸۸)، (۲-۹۱)، (۲-۹۳) و (۲-۹۴) راکه در یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای (نه یک معادله جبری) برحسب دمای نامعلوم صدق می‌کنند، استخراج کنیم. نظر به‌این‌که پاسخ یک معادله دیفرانسیل در برگیرنده تعدادی از ثوابت انتگرال‌گیری است، تکمیل فرمولاسیون نیازمند این است که به همان تعداد شرایط مناسب را در مکان و زمان برای محاسبه این ثوابت داشته باشیم. این مطلب در بخش بعدی مورد توجه قرار گرفته است.

۲-۸. شرایط مرزی و شرایط اولیه

این شرایط توصیف ریاضی مشاهدات تجربی است. تعداد آن‌ها در جهت هر متغیر مستقل در یک مساله برابر بالاترین مرتبه مشتق معادله دیفرانسیل حاکم در همان جهت خواهد بود. با ذکر مثالی از هدایت می‌توان این مفهوم را بیان نمود. با توجه به معادله هدایت نوشته شده، به عنوان مثال، در مختصات کارتزین برای حرکت یک جامد ایزوتروپیک همگن با سرعت $\mathbf{V}$،

$$\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}=a\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right)+\frac{u'''}{\rho c}, \qquad (۲-۹۶)$$

که در آن v_x، v_y و v_z اجزا $\mathbf{V}$ هستند. حل معادله (۲-۹۶)، بدون توجه به روش ریاضی مورد استفاده، نیازمند یک شرط در جهت زمان و دو شرط در هر یک از جهت‌های مکانی می‌باشد. شرایط زمانی را شرایط اولیه و شرایط مکانی را شرایط مرزی گویند که می‌گوییم معادله (۲-۹۶)

۱- خوانندگان علاقمند می‌توانند به بخش‌های ۱-۱۷، ۱-۱۸، ۱-۱۹، ۱-۲۰ مرجع ۲ و یا مطلب دیگر در مراجع مشابه مراجعه کنند.

همراه با یک شرط اولیه و شش شرط مرزی، فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله را کامل می‌کند[1]. حال به بررسی دقیق‌تر شرایط اولیه و مرزی مناسب برای مسائل انتقال حرارت هدایتی می‌پردازیم.

شرط اولیه (حجمی). برای یک مساله ناپایا دمای محیطی که مورد بررسی قرار می‌گیرد در مقداری از زمان باید مشخص باشد. در بسیاری از حالات این زمان‌ها به‌طور معمول آغاز مساله در نظر گرفته می‌شود. به بیان ریاضی، اگر شرط اولیه به‌وسیله $T_0(\mathbf{r})$ نشان داده شود پاسخ این مساله یعنی $T(\mathbf{r},t)$ باید به گونه‌ای باشد که در تمام نقاط محیط معادله زیر برقرار باشد.

$$\lim_{t\to 0}T(\mathbf{r},t)=T_0(\mathbf{r}), \qquad (۲-۹۷)$$

شرایط مرزی (سطحی). اکثر شرایط مرزی متداول در هدایت به‌صورت زیر می‌باشند.

(۱) دمای معین: دمای سطح در مرزها یا به‌صورت ثابت یا به‌عنوان تابعی از مکان یا زمان مشخص می‌باشد. این ساده‌ترین شرط مرزی از منظر ریاضیات است، ولی در قسمت (۴) یک شرط پیچیده فیزیکی به وجود می‌آید که تنها برای حالت خاص $h\to\infty$ ساده شده و به شرط مرزی دمای معین تبدیل می‌شود.

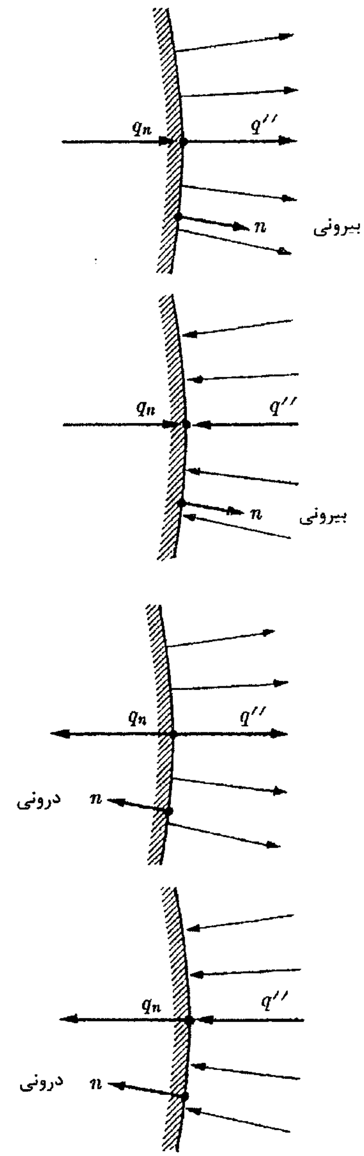
(۲) شار حرارتی معین: شار حرارتی در مرزها یا به‌صورت ثابت یا به‌عنوان تابعی از مکان یا زمان تعریف می‌شود. تشریح ریاضی این شرط با استفاده از قانون جریان کرشهف به این صورت است که مجموع جبری شارهای حرارتی در مرز باید مساوی صفر باشد. در اینجا از این پس شار حرارتی وارد شده به مرزها مثبت و شار حرارتی خارج شده از مرزها منفی در نظر گرفته می‌شود. به یاد داشته باشید که بیان قانون فوریه، $q_n=-k(\partial T/\partial n)$ مستقل از توزیع واقعی دماست، و انتخاب جهت q_n به‌طور معمول به‌صورتی انجام می‌شود که مثبت باشد، از شکل ۲-۱۴ داریم:

$$\pm k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma=\pm q'', \qquad (۲-۹۸)$$

که در آن $\partial/\partial n$ نمایان‌گر دیفرانسیل‌گیری در جهت بردار عمود[2] بر مرز (بردار عمود بر مرز که در شکل ۲-۱۴ با n نشان داده شده است.م) می‌باشد. علامت مثبت و منفی در سمت چپ معادله (۲-۹۸) به‌ترتیب متناظر با دیفرانسیل‌گیری نسبت به بردارهای عمود درونی و بیرونی، و علامت مثبت و منفی سمت راست به‌ترتیب متناظر با شار حرارتی از مرز و شار حرارتی به مرز سیستم می‌باشد.

۱- به وضوح، سرعت درون معادله (۲-۹۶)، اگرچه بر جواب این معادله تاثیر می‌گذارد، تعداد شرایط مرزی و اولیه مورد نیاز را تغییر نمی‌دهد.

2- Normal



$$q_n - q'' = 0,$$
$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma - q'' = 0.$$

(الف)

$$q_n + q'' = 0,$$
$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma + q'' = 0.$$

(ب)

$$-q_n - q'' = 0,$$
$$-\left[-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma\right] - q'' = 0.$$

(پ)

$$-q_n + q'' = 0,$$
$$-\left[-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma\right] + q'' = 0.$$

(ت)

شکل ۱۴-۲

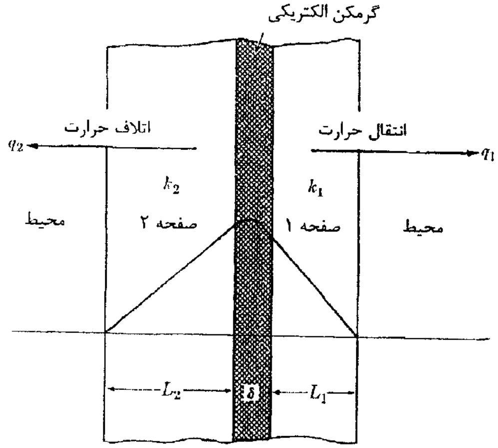
یک مثال عملی این مورد، محاسبه مقادیر آزمایشگاهی انتقال حرارت به روش جابه‌جایی اجباری در لوله‌ها می‌باشد. انرژی داخلی ثابتی را که به‌صورت الکتریکی در دیواره لوله‌ای که سطح خارجی آن عایق شده است تولید می‌شود، در نظر بگیرید. از درون لوله، سیالی به شیوه معین جریان می‌یابد. تحت شرایط پایا و با فرض ثابت بودن مقاومت الکتریکی و ضریب هدایت حرارتی دیواره لوله، سیال در معرض شار حرارتی ثابتی که از محیط لوله وارد می‌شود، قرار می‌گیرد[1].

(۳) شار حرارتی صفر (عایق). این مورد حالت خاصی از مورد قبل است:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma = 0, \qquad (۲-۹۹)$$

و با قرار دادن $q'' = 0$ در معادله (۲-۹۸) به‌دست می‌آید. مثال بررسی شده در ادامه اهمیت عملی این شرط مرزی را نشان می‌دهد.

می‌خواهیم گرما را از یک سطح گرمکن برقی مسطح به درون یک صفحه جامد، صفحه ۱، برای اهداف خاصی انتقال دهیم (شکل ۱۵-۲). هر انتقالی از سطوح دیگر گرمکن به عنوان اتلاف حرارتی در نظر گرفته شده و مطلوب نیست. در عمل اتلاف حرارتی با قرار دادن یک صفحه دیگر (عایق) در کنار سطح دوم گرمکن کاهش پیدا می‌کند. می‌خواهیم هندسه و مشخصات حرارتی عایق را مشخص کنیم.



شکل ۱۵-۲

برای ساده‌سازی فرض می‌کنیم که محیط چپ و راست مقاومت حرارتی قابل صرف‌نظر دارند. ضخامت گرمکن را با δ نشان می‌دهیم و ضریب هدایت حرارتی و ضخامت صفحات k_1، k_2 و

۱- موقعیت فیزیکی مشابهی در (۴) در نظر گرفته شده است. مساله ۸-۲ نیز بررسی شود.

L_1، L_2 در نظر گرفته می‌شود و نرخ تجمع انرژی داخلی به ازای واحد حجم u''' نشان داده می‌شود. در شرایط پایا خواهیم داشت:

$$\delta u''' = q_1 + q_2, \quad q_1 \frac{L_1}{k_1} = q_2 \frac{L_2}{k_2},$$

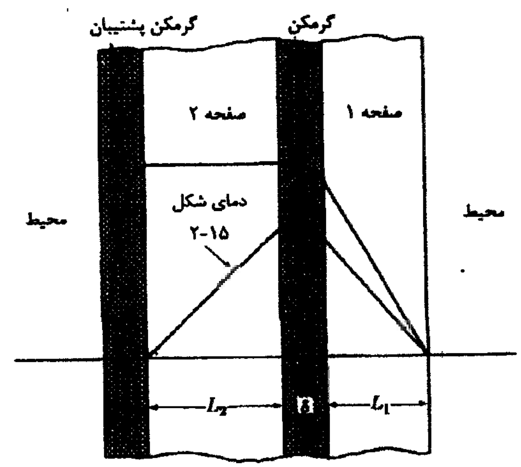
و از روی این معادلات،

$$q_1 = \frac{\delta u'''}{1+(L_1/k_1)/(L_2/k_2)}, \qquad q_2 = \frac{\delta u'''}{1+(L_2/k_2)/(L_1/k_1)}$$

شرایط مطلوب که $q_2 \to 0$ با قرار دادن $(L_2/k_2)/(L_1/k_1) \to \infty$ یا شرایط زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{L_2}{k_2} \gg \frac{L_1}{k_1}. \tag{۲-۱۰۰}$$

از روی معادله (۲-۱۰۰) به این نتیجه می‌رسیم که تنها ضخامت و ضریب هدایت گرمایی صفحات برای محاسبه هدایت حرارتی از این صفحات مهم می‌باشند[1]. از این‌رو اتلاف گرمایی از سطح ۲ می‌تواند حذف شود اگر در مقایسه با L_1 و k_1، به‌ترتیب $L_2 \to \infty$ یا $k_2 \to 0$ باشند. از آنجایی‌که $L_2 = \infty$ یا $k_2 = 0$ از لحاظ فیزیکی غیرممکن است، عایق‌کاری به‌طور کامل هیچ‌گاه به وقوع نخواهد پیوست. هر چند ضخامت بیشتر و ضریب هدایت حرارتی کمتر، عایق‌کاری بهتری را نتیجه خواهد داد.

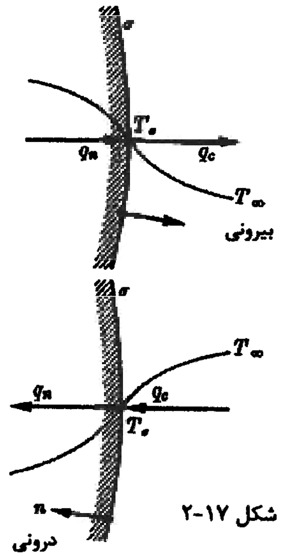


شکل ۲-۱۶

۱- افت دما (یا گرادیان دما) درون یک صفحه بر خصوصیت هدایتی صفحه تاثیری ندارد.

حذف کامل اتلاف حرارتی از سطح ۲ نیازمند استفاده از یک گرمکن دیگر است (شکل ۲-۱۶). پس به‌وسیله تعدیل مناسب انرژی برای گرمکن دوم، تمام انرژی داخلی تجمع‌یافته در گرمکن اصلی از طریق صفحه ۱ انتقال خواهد یافت.

گرمکن دوم، که اغلب گرمکن پشتیبان نامیده می‌شود، وسیله آزمایشگاهی مهمی برای کنترل انتقال حرارت است زیرا از آن برای اندازه‌گیری دقیق ضریب هدایت گرمایی استفاده می‌شود.



$$q_n - q_c = 0,$$
$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma - h(T_\sigma - T_\infty) = 0.$$

(الف)

$$-q_n + q_c = 0,$$
$$-\left[-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma\right] + h(T_\infty - T_\sigma) = 0.$$

(ب)

شکل ۲-۱۷

(ج) انتقال گرما به محیط توسط جابه‌جایی. هنگامی‌که انتقال حرارت در مرزهای یک محیط قابل تعیین نباشد، می‌توانیم آن‌را برابر اختلاف دمای بین مرزها و محیط فرض کنیم پس خواهیم داشت:

$$q_c = h(T_\sigma - T_\infty), \tag{۲-۱۰۱}$$

که در آن T_σ دمای مرزهای جامد T_∞ دمای محیط در فاصله‌ای دور از مرزها و h ثابت تناسب است[1] که ضریب انتقال حرارت نامیده می‌شود. معادله (۲-۱۰۱) معادله سرمایش نیوتن می‌باشد. رابطه فوق رابطه مهمی است. ولی، باید توجه داشت که این رابطه برخلاف قانون هدایت فوریه و قانون تابش استفان – بولتزمان براساس پدیده های فیزیکی نیست. از آنجایی‌که این رابطه تنها بر یک فرض پایه‌گذاری شده است، نمی‌توان آن‌را به عنوان یک قانون ویژه (طبیعی) در نظر گرفت. از

۱- h طبق تعریف، مثبت فرض می‌شود.

این‌رو می‌توان قانون سرمایش نیوتن را به‌عنوان تعریفی از ضریب انتقال حرارت دانست. معادله (۲-۱۰۱) علی رغم این‌که شالوده ضعیفی دارد تنها رابطه موجود برای بیان انتقال حرارت نامعین به یک محیط است و نقش اساسی را در مسائل هدایت حرارتی بازی می‌کند.

بنابراین با توجه به این‌که مجموع شار حرارتی در مرزها باید مساوی صفر باشد و از روی معادلات (۲-۷۳) و (۲-۱۰۱)، شرط مرزی مورد نیاز به‌صورت زیر خواهد شد.

$$\pm k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty), \qquad (۲\text{-}۱۰۲)$$

که در آن $\partial/\partial n$ دیفرانسیل‌گیری در جهت بردار عمود را نشان می‌دهد. علامت مثبت و منفی در سمت چپ معادله (۲-۱۰۲) به‌ترتیب متناظر با مشتق‌گیری نسبت به بردارهای عمود درونی و بیرونی است (شکل ۲-۱۷). به این نکته باید توجه شود که q_n نشان داده شده در شکل ۲-۱۷ مقدار مثبتی است، که با انتخاب اختیاری جهت عمود به‌دست آمده است. در حقیقت معادله (۲-۱۰۲) مستقل از توزیع دمایی و جهت انتقال حرارت است.

جدول ۲-۲

شرایط		$h(\mathrm{Btu/ft^2.hr.^\circ F})$
جابه‌جایی آزاد	گازها	۱-۵
	آب	۲۰-۱۵۰
جابه‌جایی اجباری	گازها	۲-۵۰
	آب	۵۰-۲۰۰۰
	روغن‌های غلیظ	۱۰-۳۰۰
	فلزات مایع	۱۰۰۰-۲۰۰۰۰
تغییر فاز	مایعات در حال جوش	۵۰۰-۱۰۰۰۰
	بخارات میعان‌شده	۱۰۰۰-۲۰۰۰۰

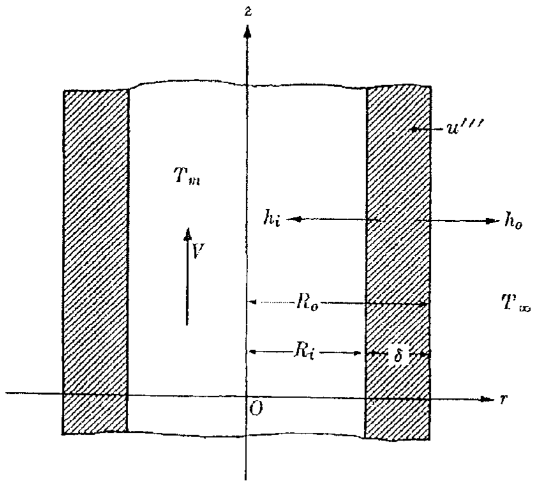
محدوده مقادیر ضرایب انتقال حرارت که تحت شرایط مختلف رخ می‌دهد، ارائه خواهد شد تا خواننده درکی از مقادیر داشته باشد. باید خاطرنشان کرد که h، همانند k و بلکه قوی‌تر از آن، وابسته به متغیرهای مشخصی است. این متغیرها ممکن است شامل مکان، زمان، هندسه، شرایط جریان و مشخصات فیزیکی باشند. مقادیر معمول ضرایب انتقال حرارت پایا در جدول ۲-۲ داده شده است.

تغییرات وسیع مقادیر ضرایب انتقال حرارت، تحقیقات بیشتری را برای مطالعه شرایط مرزی در مقادیر محدود از h می‌طلبد. این کار برای حالت‌های عملی‌ای که اغلب با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم در ادامه انجام خواهد شد. لوله‌ای با شعاع داخلی و خارجی R_i و R_o را که سیالی درون آن تحت شرایط مشخص پایا جریان دارد (شکل ۲-۱۸) در نظر بگیرید. انرژی داخلی پایا و یکنواخت به ازای

واحد حجم با نرخ u''' در دیواره لوله تولید می‌شود. دمای محیط و دمای توده سیال[1] به‌ترتیب T_∞، T_m و ضرایب داخلی و خارجی انتقال حرارت h_i و h_o در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی شعاعی برای لوله به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$q_i = +k\frac{\partial T(R_i,z)}{\partial r} = h_i[T(R_i,z) - T_m],$$

$$q_o = -k\frac{\partial T(R_o,z)}{\partial r} = h_o[T(R_o,z) - T_\infty],$$



شکل ۲-۱۸

می‌خواهیم ابتدا مورد لوله عایق $q_0 = 0$ را مورد بررسی قرار دهیم. در این مورد تحت شرایط پایا تمام انرژی داخلی تولید شده در دیواره به سیال منتقل می‌شود. از این‌رو $q_i = u'''\delta$ خواهد شد. از آنجایی‌که q_i برای مقادیر معلوم u''' و δ ثابت می‌باشد با افزایش ضریب انتقال حرارت داخلی h_i، اختلاف دمایی $T(R_i,z) - T_m$ کوچکتر خواهد شد. در حالت خاص $h_i \to \infty$، $T(R_i,z)$ به سمت T_m میل خواهد کرد. بنابراین شرط مرزی موجود تبدیل به شرط مرزی نوع (۱) یعنی با مقدار دمای مشخص در سطح خواهد شد. جوشیدن مایعات در لوله‌های عایق مثالی از این حالت است. برای مقدار ثابت q_i کوچکترین مقدار h_i، بزرگترین اختلاف دمایی بین $T(R_i,z)$ و T_m را نتیجه خواهد داد.

۱- دمای توده یک سیال به‌صورت زیر است:

$$T_m = \frac{1}{\pi R_i^2 \rho_m c_{p_m} V}\int_0^{R_i} 2\pi r v(r)\rho c_p T(r)dr,$$

که در آن ρ_m، c_{p_m}، و V به‌ترتیب چگالی، گرمای ویژه در فشار ثابت، و سرعت متوسط سیال بوده، و همه آن‌ها در دمای توده T_m اندازه‌گیری می‌شوند.

در حالت بعدی به بررسی یک لوله ساده می پردازیم. حال $u'''\delta$ به محیط اطراف و داخل لوله منتقل می‌شود. فرض می‌کنیم. T_m و T_∞ به همان صورت قبلی می‌باشند و دیواره لوله به اندازه‌ای نازک است که بتوان از اختلاف بین $T(R_i, z)$ و $T(R_o, z)$ صرف‌نظر کرد. سپس انتقال حرارت به سیال درونی و به محیط، تقریباً به‌ترتیب متناسب با ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی می‌باشد. اگر به عنوان مثال $h_i \ll h_o$ باشد. انتقال حرارت به محیط در مقایسه با انتقال حرارت به درون سیال قابل صرف‌نظر می‌شود. بنابراین سطح خارجی لوله را می‌توان عایق فرض کرد و شرایط مرزی مانند حالت توصیف شده (۳) خواهد شد. مثال این مورد جریان آب درون یک لوله (جابه‌جایی اجباری برای مایع) که در اطراف آن اتمسفر ساکن قرار دارد (جابه‌جایی آزاد به گازها) می‌باشد. به‌دست آوردن توزیع دما برای سه مورد $h_i \ll h_o$، $h_i \sim h_o$ و یا h_i بزرگ، به عهده خواننده گذاشته می‌شود. از بحث مذکور به یک اصل مهم می‌رسیم: در انتخاب نوع شرط مرزی که باید در فرمولاسیون یک مساله استفاده شود اندازه ضریب انتقال حرارت تعیین‌کننده می‌باشد.

مطالعه مقادیر h باعث می‌شود که تحقیق مشابهی برای مقادیر k انجام شود. بدین منظور می‌خواهیم باز به حالت لوله عایق برگردیم. برای یک q_i مفروض، بزرگتر بودن ضریب هدایت حرارت کوچک‌تر شدن گرادیان دمایی $\partial T(R_i, z)/\partial r$ را به همراه خواهد داشت پس در حالتی‌که $k \to \infty$، $\partial T(R_i, z)/\partial r$ به سمت صفر میل می‌کند یا توزیع دمای شعاعی درون دیواره لوله قابل صرف‌نظر است. از آنجایی‌که این حالت منجر به تحلیل متمرکز شعاعی می‌شود، فرمولاسیون مساله را ساده می‌کند. از سوی دیگر، مقادیر کم یا متوسط k نیازمند تحلیل توزیع‌شده شعاعی است. (تحلیل‌های متمرکز و توزیع شده در فرمولاسیون پنج مثال توضیحی در بخش ۱۰-۲ داده شده است) بنابراین مقدار ضریب هدایت حرارتی نقش مهمی را در فرمولاسیون معادلات هدایت حرارتی یک مساله ایفا می‌کند.

در نهایت شکل بی‌بعد شرط مرزی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\pm k\left(\frac{\partial T}{\partial (r/R)}\right)_\sigma = \frac{hR}{k}(T_\sigma - T_\infty), \qquad (۲\text{-}۱۰۳)$$

این معادله نشان می‌دهد که اثرات h و k را می‌توان به‌صورت عباراتی از یک عدد بدون بعد بررسی کرد (عدد بایوت)

$$hR/k = \text{Bi},$$

که در آن R در این معادله طول مشخصه است. این معادله به‌صورت $(R/k)/(1/h)$ بازآرایی می‌شود. در این صورت می‌توان به‌طور فیزیکی عدد بایوت را به‌صورت نسبت مقاومت‌های ورودی و خروجی از یک مساله در جهتی که معادله (۲-۱۰۳) به‌کار می‌رود، تعریف نمود.

(۵) انتقال حرارت به محیط توسط تابش. دوباره به بررسی شکل ۱۳-۲ می‌پردازیم و به‌عنوان مثال متوجه می‌شویم که این حالت شرط مرزی، نشان‌دهنده انتقال حرارت به‌وسیله تابش از مرزهای محیط ۱ می‌باشد.

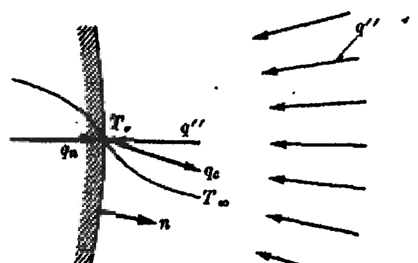
وقتی‌که T_1 یکنواخت بوده ولی غیرمشخص است، برای بیان شار حرارتی در سطح ۱ به‌وسیله هدایت و تابش شرایط مرزی مورد نیاز به‌صورت زیر نوشته خواهند شد.

$$\pm k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma = \sigma \mathcal{F}_{12}(T_1^4 - T_2^4), \qquad (۲\text{-}۱۰۴)$$

که مثل قبل، علامت مثبت و منفی عبارت هدایت به‌ترتیب متناظر با مشتق‌گیری در جهت بردار عمود درونی و بیرونی جسم می‌باشد. معادله (۲-۱۰۴) مستقل از توزیع دمای واقعی است. از آنجایی‌که این معادله دارای توان چهارم یک متغیر وابسته است، یک شرط مرزی غیرخطی می‌باشد.

ترکیب معادلات (۲-۱۰۲) و (۲-۱۰۴) میزان انتقال حرارت همزمان تابشی و جابه‌جایی از مرزهای محیط را خواهد داد. در عمل این انتقال همزمان یک مورد واقعی است. اهمیت داشتن تابش نسبت به جابه‌جایی به وضعیت دمایی مربوط می‌شود. بدین صورت که تابش به سرعت با افزایش دما افزایش می‌یابد. حتی در دمای اتاق، برای نرخ‌های کم جابه‌جایی، که به آن جابه‌جایی آزاد به هوا گفته می‌شود، انتقال حرارت تابشی بیش از ۵۰ درصد کل انتقال حرارت را به خود اختصاص می‌دهد.

(۶) شار حرارتی معین که در یک فاصله عمل می‌کند. محیطی را در نظر بگیرید که حرارت را به اطراف به‌وسیله جابه‌جایی منتقل و یک شار حرارتی تابشی q'' را از یک منبع دوردست دریافت می‌کند (شکل ۱۹-۲)[1]. ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط اطراف T_∞ می‌باشد.



$$q_n + q'' - q_c = 0,$$
$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma + q''$$
$$-h(T_\sigma - T_\infty) = 0.$$

شکل ۱۹-۲

[1] - از این به بعد در شکل‌های بیان‌کننده شرایط مرزی، بردار عمود بر یک جهت مرز رسم می‌شوند.

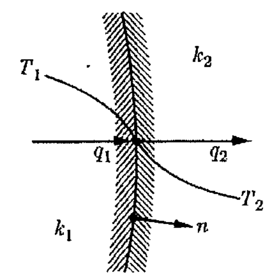
این شرط مرزی به سادگی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\pm k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma + q'' = h(T_\sigma - T_\infty), \qquad (۲-۱۰۵)$$

که در آن علامت‌های عبارت هدایت وابسته به جهت‌های عمود می‌باشد. معادله (۲-۱۰۵) مانند معادله (۲-۱۰۴) مستقل از توزیع‌های واقعی دما می‌باشد. هر جسم در محیط که قابلیت دریافت حرارت تابشی از یک منبع تابشی نزدیک (چراغ برق و یا لامپ) و یا از طریق نور خورشید را دارد، نمونه‌ای از شرط مرزی فوق خواهد بود.

(۷) سطح مشترک دو محیط با ضرایب هدایت متفاوت k_1 و k_2. هنگامی‌که دو محیط دارای مرزی مشترک مانند شکل (۲-۲۰) باشند، شار حرارتی عبوری از این مرز، از روی هر دو محیط و بدون توجه به جهت عمود محاسبه می‌شود، به‌صورت زیر

$$k_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_\sigma = k_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_\sigma . \qquad (۲-۱۰۶)$$



$$q_1 - q_2 = 0,$$
$$-k_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_\sigma - \left[-k_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_\sigma\right] = 0$$

شکل ۲-۲۰

به‌علاوه، شرط دومی هم می‌تواند با توجه به دماهای دو محیط تعریف شود. اگر به عنوان مثال محیط‌ها جامد و در تماس نزدیک با هم باشند، طبق ایده‌آل‌سازی ریاضی می‌توان دمای دو محیط را یکسان فرض کرد.

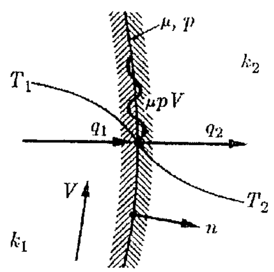
$$(T_1)_\sigma = (T_2)_\sigma . \qquad (۲-۱۰۷)$$

البته، معادله (۲-۱۰۷) در عمل خیلی به‌ندرت پیش می‌آید. حتی برای سطوح کاملاً صاف به‌هم‌فشرده، انتقال حرارت بین دو محیط از طریق مقاومت تماسی[1] رخ خواهد داد. این مقاومت که به سختی قابل محاسبه و تشخیص است، باعث یک اختلاف دما بین دو محیط در طول سطح مشترک می‌شود. با وجود این واقعیت، معادله (۲-۱۰۷) ضرورتاً کاربرد وسیعی را در فرمولاسیون

۱- مراجع ۱۵ و ۱۶ بررسی شوند.

مسائل هدایت پیدا کرده است. دیوارهای ترکیبی و لوله‌های عایق مثال‌هایی معروف از این حالت می‌باشند.

(۸) مرز مشترک دو محیط در حرکت نسبت به یکدیگر. دو محیط جامد در تماس با هم، که یکی نسبت به دیگری حرکت می‌کند، را در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۲۱). فشار موضعی در مرز مشترک p، ضریب اصطکاک خشک μ و سرعت نسبی V در نظر گرفته می‌شود.



$$q_1 + \mu pV - q_2 = 0,$$
$$-k_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_\sigma + \mu pV - \left[-k_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_\sigma\right] = 0$$

شکل ۲-۲۱

با فرض این‌که انتقال حرارت به هر دو محیط به‌وسیله هدایت، برابر کار انجام شده به‌وسیله اصطکاک است خواهیم داشت:

$$\pm k_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_\sigma + \mu pV = \pm k_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_\sigma \qquad (۲-۱۰۸)$$

که در آن علامت منفی جمله‌های هدایت، متناظر با جهت بردار عمود، نشان داده شده در شکل ۲-۲۱ می‌باشد. دوباره با فرض حالت ایده‌آل تماس نزدیک، می‌توانیم دمای دو محیط را طبق حالتی‌که قبلاً برای معادله (۲-۱۰۷) تشریح شد در مرزها یکسان فرض کنیم. نیروی اصطکاک ترمز حالت عملی مهمی برای این شرط مرزی می‌باشد. ساییده شدن و دمای بالای به‌وجود آمده در اثر آن این شرط مرزی را برای فرایندهای پیوسته غیرعملی می‌کند راه حل این مشکل روانکاری است که فراتر از این کتاب بوده و در اینجا مورد بررسی قرار نخواهد گرفت.

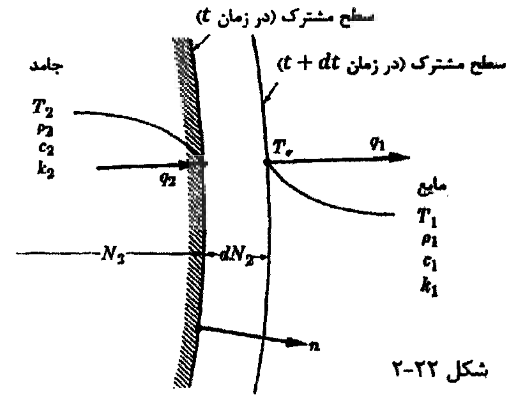
(۹) مرز متحرک بین دو محیط (تغییر فاز). اگر دماهای قسمتی از محیط، کمتر از دمایی باشد که در آن محیط با جذب یا از دست دادن گرما از یک فاز به فاز دیگر تغییر پیدا می‌کند، مرز متحرک بین دو فاز ایجاد خواهد شد. برای مسائل این بخش، تغییرات دمایی محیط به همراه روشی که طی آن مرز حرکت می‌کند، باید تعیین شود.

به عنوان مثال بررسی انجماد یک مایع را در نظر بگیرید. توجه ما در اینجا به شرط مرزی روی سطح مشترک متحرک $N_2(t)$ می‌باشد (شکل ۲-۲۲). مشخصات حرارتی مایع و جامد به‌ترتیب با زیرنویس ۱ و ۲ مشخص می‌شوند. ازآنجایی‌که چگالی دو فاز یکسان نیست در مدت زمان dt، جامد به ضخامت dN_2 از مایع به ضخامت dN_1 تشکیل می‌شود. با استفاده از قانون اول

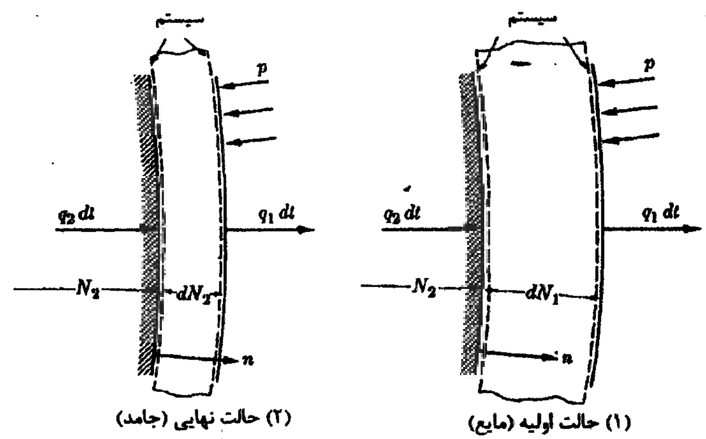
ترمودینامیک برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۲۳ که حالت اولیه آن مایعی با ضخامت dN_1 و حالت نهایی‌اش جامدی با ضخامت dN_2 بوده، خواهیم داشت:

$$\rho_2 u_2 dN_2 - \rho_1 u_1 dN_1 = q_2 dt - q_1 dt - p(dN_2 - dN_1), \qquad (۲\text{-}۱۰۹)$$

که در آن p فشار محیط است.



شکل ۲-۲۲



شکل ۲-۲۳

با توجه به پیوستگی داریم:

$$\rho_2 dN_2 = \rho_1 dN_1, \qquad (۲\text{-}۱۱۰)$$

و گرمای نهان ذوب به‌صورت زیر است:

$$h_{sl} = h_1 - h_2, \qquad (۲\text{-}۱۱۱)$$

می‌توانیم سرعت را در معادله (۲-۱۰۹) به‌صورت زیر بنویسیم:

$$-\rho_2 h_{sl} \frac{dN_2}{dt} = q_2 - q_1. \qquad (۲\text{-}۱۱۲)$$

با جاگذاری q_1 و q_2 از قانون فوریه در نهایت به فرمول زیر خواهیم رسید:

$$-\rho_2 h_{sl} \frac{dN_2}{dt} = \pm k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_\sigma - \left[\pm k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_\sigma\right], \qquad (۲\text{-}۱۱۳)$$

که در آن علامت‌های مثبت و منفی مربوط به دیفرانسیل‌گیری $\partial/\partial n$ در طول بردار عمود ورودی و خروجی فاز جامد می‌باشد.

شرط مرزی مذکور توسط یک روش دیگر نیز به این صورت قابل حصول می‌باشد. از آنجایی‌که $\rho_1 \neq \rho_2$، با فرض $\rho_2 > \rho_1$ فرایند انجماد تا سرعت V_1 در سیال افزایش می‌یابد که این سرعت متناسب با نرخ اختلاف بین حجم‌های دو فاز می‌باشد (شکل ۲-۲۴ (الف)). بنابراین خواهیم داشت:

$$V_1 = \frac{dN_1 - dN_2}{dt},$$

که اگر با معادله (۲-۱۱۰) بازآرایی شود، خواهد شد:

$$V_1 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) \frac{dN_2}{dt}. \qquad (۲\text{-}۱۱۴)$$

برای ساده‌سازی تحلیل، فرض می‌کنیم که ناظر با حرکت مرزها حرکت می‌کند. شکل ۲-۲۴ (ب) نشان‌دهنده نمایان شدن انجماد برای ناظر است. سپس با به‌کار بردن قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترلی که مرز ثابت را احاطه نموده است (شکل ۲-۲۴ (پ)) خواهیم داشت:

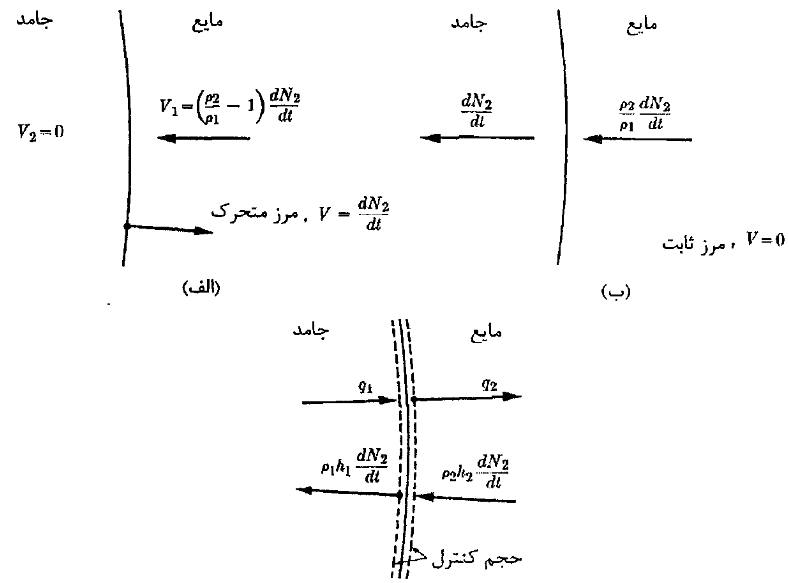
$$0 = \rho_2 (h_2 - h_1) \frac{dN_2}{dt} + q_2 - q_1. \qquad (۲\text{-}۱۱۵)$$

با قرار دادن معادله (۲-۱۱۱) در معادله (۲-۱۱۵) به معادله (۲-۱۱۲) خواهیم رسید.

زمانی‌که تغییرات دمایی در مایع مورد توجه نباشد، مساله انجماد به‌صورت قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. در این مورد اگر ما q_1 را برحسب ضریب انتقال حرارت h بیان کنیم معادله (۲-۱۱۳) به‌صورت زیر بازآرایی خواهد شد:

$$-\rho_2 h_{sl} \frac{dN_2}{dt} = \pm k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_\sigma - h(T_\sigma - T_\infty), \qquad (۲\text{-}۱۱۶)$$

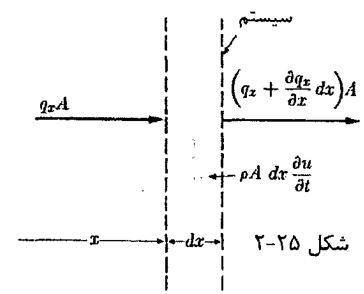
که در آن T_σ دمای انجماد و T_∞ دمای مایع دور از مرزها می‌باشد. مسائلی که در آن‌ها تغییر فاز وجود دارد از اهمیت عملی زیادی برخوردار هستند. تشکیل یخ به‌طور طبیعی و مصنوعی، انجماد فلزات در ریخته‌گری و میعان و تبخیر سیالات مثال‌هایی از این مورد هستند.



شکل ۲-۲۴

۲-۹. روش‌های فرمولاسیون

در این بخش از این فصل به تبین فرمولاسیون پدیده هدایت می‌پردازیم. می‌خواهیم فرمولاسیون هر مساله خاص را از فرمولاسیون کلی به‌دست آوریم. این کار امکان‌پذیر است اما همیشه مناسب نمی‌باشد به‌خصوص اگر مساله مورد بررسی در یک جهت یا بیشتر متمرکز باشد. (این نکته در مساله شکل ۲-۲۷ تشریح شده است). علاوه‌برآن، کاربرد فرمولاسیون کلی برای یک مساله خاص یک فرایند ریاضی است که فیزیک فرمولاسیون را که در مسائل عملی اهمیت زیادی دارد، حذف می‌کند. در مقابل، دیدگاه فیزیکی که در این کتاب به آن تاکید شده هر



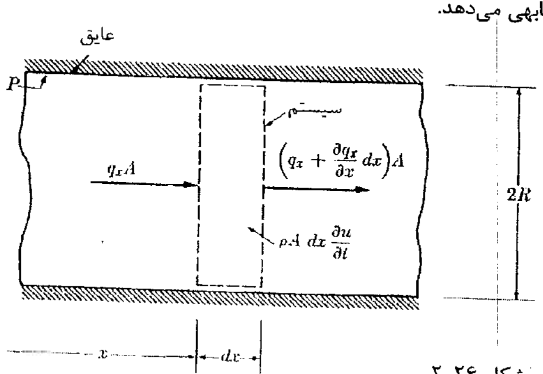
شکل ۲-۲۵

مساله را به‌طور مجزا از ابتدای فرمولاسیون با دخالت دادن فیزیک در هر بخش از فرمولاسیون بررسی می‌کند. برای مشخص شدن این نکته می‌خواهیم به مقایسه دو روش توسط سه مساله که نیازمند فرمولاسیون یک بعدی از روی قانون اول ترمودینامیک می‌باشند، بپردازیم.

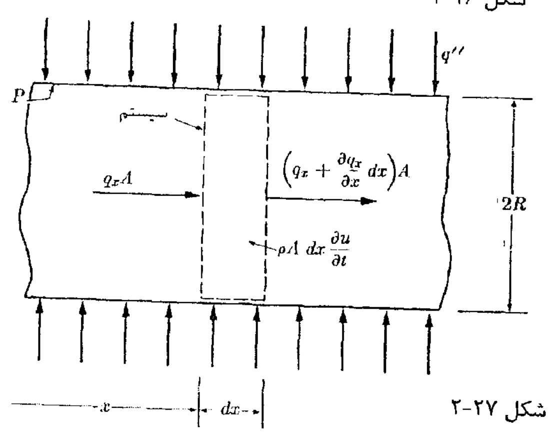
مساله اول سیستم کارتزین یک بعدی نشان داده شده در شکل ۲-۲۵ است. هنگامی‌که، نرخ زمانی تغییر انرژی داخلی را مساوی انتقال حرارت خالص عبوری از مرزهای سیستم قرار دهیم به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}=0 \tag{۲-۱۱۷}$$

مشخص است که فرمولاسیون کلی به‌دست آمده از مختصات کارتزین یک بعدی معادله (۵۷-۲) نیز نتایج مشابهی می‌دهد.



شکل ۲-۲۶



شکل ۲-۲۷

سپس، یک میله جامد عایق‌شده با شعاع R، سطح مقطع A و محیط P (شکل ۲۶-۲) را در نظر می‌گیریم. به روش مشابه، قانون اول ترمودینامیک برای سیستم یک بعدی نشان داده شده در شکل (۲۶-۲) نتایج مشابهی با مساله قبل یعنی معادله (۱۱۷-۲) را حاصل می‌کند.

در نهایت، میله جامد مساله قبل را هنگامی‌که در معرض شار حرارتی محیطی یکنواخت q'' (شکل ۲۷-۲) قرار دارد، در نظر می‌گیریم. طبق دیدگاه فیزیکی، از قانون اول برای سیستم یک بعدی نشان داده شده در شکل ۲۷-۲ استفاده می‌کنیم. نتیجه به این صورت است:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}=\frac{q''P}{A}. \qquad (۱۱۸-۲)$$

در مقابل، شکل یک بعدی فرمولاسیون کلی، دوباره به معادله (۱۱۷-۲) می‌انجامد و شامل اثرات شار حرارتی محیطی نمی‌شود. این مشکل با بررسی شکل دوبعدی از معادله (۵۷-۲) حل می‌شود.

$$\rho\frac{\partial u^*}{\partial t}+\frac{\partial q_x^*}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rq_r^*)=0, \qquad (۱۱۹-۲)$$

که در آن u^* و q_x^* و q_r^* علاوه بر x و t به r نیز وابسته هستند. سپس با متوسط‌گیری شعاعی معادله (۱۱۹-۲) که منجر به ضرب هر جمله در $2\pi r dr$ شده و با انتگرال‌گیری در بازه $(0,R)$ خواهیم داشت:

$$A\rho\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial q_x}{\partial x}+2\pi r q_r|_0^R=0, \qquad (۱۲۰-۲)$$

که برابر با معادله (۱۱۸-۲) می‌باشد. اینجا مقدار متوسط شعاعی با متغیر مستقل u، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u(x,t)=\frac{2\pi}{A}\int_0^R ru^*(r,x,t)dr.$$

بحث در مورد سه مثال مذکور را می‌توان به‌صورت زیر جمع‌بندی نمود. یک مساله داده شده به دو صورت فرمول‌بندی می‌شود: یا با در نظر گرفتن یک حالت خاص مناسب از فرمولاسیون کلی (روش فرمولاسیون ریاضی.م) و یا از ابتدا دنبال کردن یک فرمولاسیون مناسب برای هر مساله (روش فرمولاسیون فیزیکی.م). تا زمانی‌که فرمولاسیون کلی موجود باشد، از روش اول استفاده می‌شود، اما این حالت نیازمند تفسیر ریاضی از فرمولاسیون کلی برای مساله مورد بررسی می‌باشد. از طرفی، روش دوم، شامل مراحل معین پشت‌سرهم در یک روند پایه‌ای برای هر فرمولاسیون است، که این موضوع در ادامه آورده شده است. برای مسائل یک یا چندبعدی که فرمولاسیون مساله شامل تمامی ابعاد می‌باشد (مثل مسائل اول و دوم بررسی شده)، ثابت می‌شود که دیدگاه ریاضی یا کلی بسیار کوتاه‌تر از دیدگاه فیزیکی یا منحصربه‌فرد است. هر چند برای مسائل چند

بعدی‌ای که می‌خواهیم فرمولاسیون را در ابعاد کمتری انجام دهیم و یک یا چند جهت را متمرکز فرض کنیم (مثل مثال سوم)، دیدگاه ریاضی طولانی و نامناسب خواهد بود.

با توجه به بحث مذکور و تاکید این کتاب روی کاربردهای عملی انتقال حرارت، روش فیزیکی برای انجام فرمولاسیون ترجیح داده می‌شود. برای سادگی و استفاده‌های بعدی، این روش فرمولاسیون در پنج مرحله زیر خلاصه شده است:

(i) تعریف یک سیستم مناسب یا حجم کنترل: این مرحله شامل انتخاب (الف) سیستم مختصات، (ب) فرمولاسیون متمرکز یا توزیع‌شده، و (پ) یک سیستم یا حجم کنترل برحسب (الف) و (ب).

(ii) نوشتن قوانین کلی برای قسمت (i): قوانین عمومی یا کلی به جز در حالت متمرکز، برحسب یک سیستم مختصات نوشته می‌شوند. شکل دیفرانسیلی این قوانین وابسته به جهت بوده به مبداء مختصات وابسته نیست. درحالی‌که شکل انتگرالی علاوه بر جهت‌های مختصات به مبداء نیز وابسته است. اگر چه شکل دیفرانسیلی به‌صورت موضعی و محلی استفاده شده، شکل‌های انتگرالی و متمرکز برای کل سیستم یا حجم کنترل تشریح می‌شوند.

(iii) تشریح قوانین خاص برای قسمت (ii): قوانین خاص که تشریح کننده نفوذ گرما (اندازه حرکت، جرم یا الکتریسیته) است، دیفرانسیلی بوده، و به‌صورت محلی کاربرد دارند و به جهت محورها وابسته بوده و وابسته به مبداء مختصات نیست.

(iv) به‌دست آوردن معادله حاکم از قسمت (ii) و (iii): این معادلات مانند معادله هدایت، ممکن است جبری، دیفرانسیلی یا به شکل‌های دیگر که شامل متغیرهای وابسته دلخواهی مانند uها به عنوان تنها مجهول معادله می‌باشند، باشد. معادله حاکم (به‌جز برای عبارت‌های جریان) مستقل از جهت و مبداء مختصات می‌باشد.

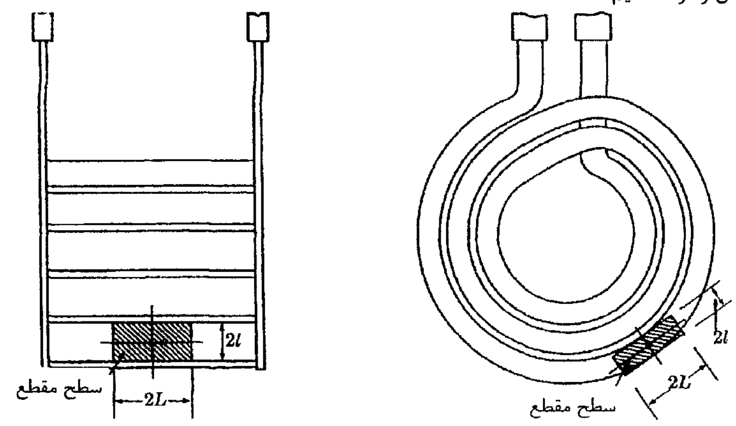
(v) مشخص کردن شرایط مرزی و اولیه مربوط به (iv): این شرایط وابسته به مبداء و جهت‌های مختصات می‌باشد.

۲-۱۰. مثال‌ها

در این بخش برروی فرمولاسیون تاکید می‌شود؛ هر چند، برای آن مسائلی که فرمولاسیون‌شان منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه اول یا درجه دوم با ضرایب ثابت می‌شود، حل مساله را نیز ارائه خواهیم داد.

مثال ۱-۲. یک گرمکن الکتریکی ساخته شده از میله جامد با مقطع مستطیلی $(2L\times 2l)$ که به یکی از صورت‌های ارائه شده در شکل ۲۸-۲ طراحی شده را در نظر بگیرید. تغییرات دمایی در طول میله قابل صرف‌نظر است. به‌علاوه اثرات خمیدگی در گرمکن کویلی، شکل ۲۸-۲(ب) کوچک و قابل صرف‌نظر است. تولید انرژی داخلی u''' در گرمکن یکنواخت است. ضریب انتقال حرارت با

h نشان داده شده و دمای محیط T_∞ است. می‌خواهیم فرمولاسیون هدایت پایای مناسب برای این شکل را ارائه کنیم.



شکل ۲۸-۲

طبق پنج مرحله اصلی اشاره شده در بخش قبل، عمل می‌کنیم. باید فرمولاسیون متمرکز، انتگرالی و دیفرانسیلی این مساله را ارائه کنیم.

I. فرمولاسیون متمرکز.

(i) سیستم یا حجم کنترل. سیستم متمرکز شامل تمام سطح مقطع گرمکن می‌شود (شکل ۲۹-۲). ازآنجایی‌که مساله دو بعدی در نظر گرفته می‌شود، طول میله‌ها تاثیری در فرمولاسیون ندارد؛ به جهت ساده‌سازی برای میله‌ها طول واحدی را در نظر می‌گیریم.

(ii) قوانین کلی. با استفاده از قانون اول ترمودینامیک (معادله ۱۶-۲) برای شکل ۲۹-۲ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

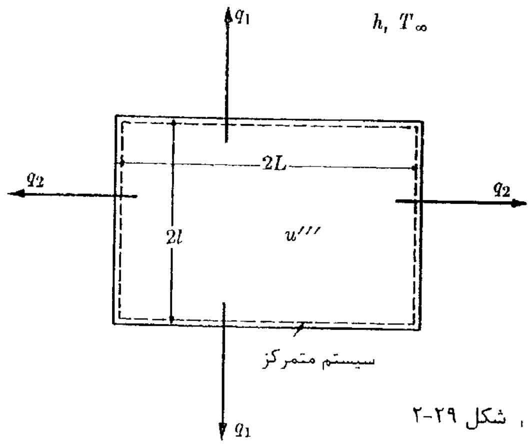
$$0 = -2q_1(2L \cdot 1) - 2q_2(2l \cdot 1) + u'''(2L \cdot 2l \cdot 1). \qquad (۲\text{-}۱۲۱)$$

(iii) قوانین خاص. فرمولاسیون متمرکز بوده و نیازمند هیچ قانون خاصی نیست.

(iv) معادله حاکم. در غیاب قوانین خاص معادله حاکم برابر قوانین کلی می‌شود.

(v) شرایط مرزی و اولیه. به علت فرمولاسیون پایا نیازی به شرط اولیه نمی‌باشد. با استفاده از تعریف h نیز تنها شرط مرزی را خواهیم داشت:

$$q_1\left(, q_2\right) = h(T - T_\infty). \qquad (۲\text{-}۱۲۲)$$



شکل ۲۹-۲

معادلات (۱۲۱-۲) و (۱۲۲-۲) فرمولاسیون متمرکز را برای این مساله به اتمام می‌رسانند. اگر معادله (۱۲۲-۲) را درون معادله (۱۲۱-۲) قرار دهیم، این فرمولاسیون به‌صورت دمای مجهول T نیز نوشته می‌شود، به‌صورت زیر:

$$0 = -2h(2L \cdot 1)(T - T_\infty) - 2h(2l \cdot 1)(T - T_\infty) + u'''(2L \cdot 2l \cdot 1) \qquad (۲\text{-}۱۲۳)$$

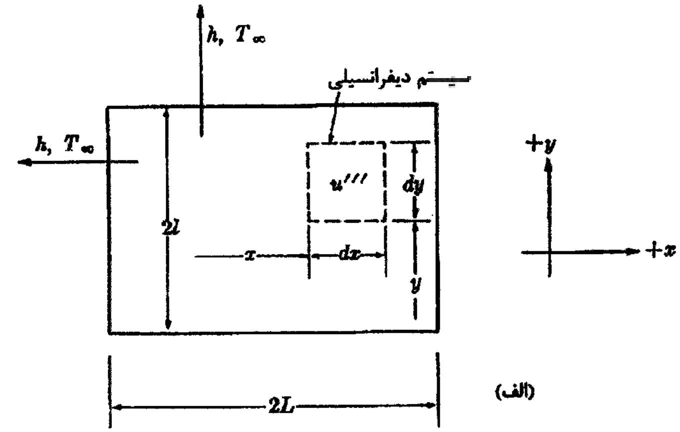
ساده بودن معادله (۱۲۳-۲) دمای میله گرمکن را به سادگی به‌صورت زیر می‌دهد:

$$T = T_\infty + \frac{u'''(2L \cdot 2l)}{2h(2L+2l)}. \qquad (۲\text{-}۱۲۴)$$

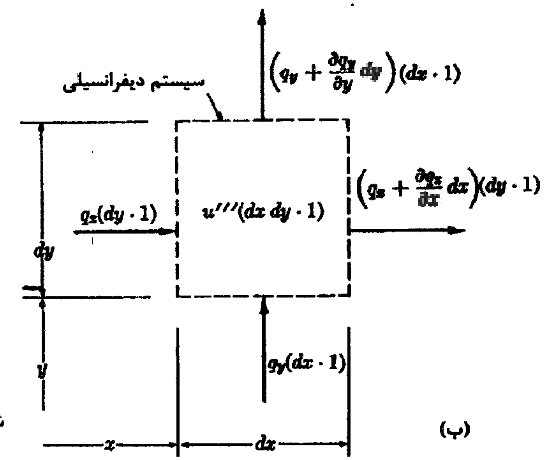
هنگامی‌که مقدار h به سمت بی‌نهایت میل کند دمای گرمکن به دمای محیط T_∞ نزدیک خواهد شد. [بحث بخش ۸-۲ در مورد شرایط مرزی نوع چهارم بررسی شود.]

II. فرمولاسیون دیفرانسیلی.

(i) سیستم یا حجم کنترل. سیستم دیفرانسیلی دو بعدی نشان داده شده در شکل ۳۰-۲ را در نظر بگیرید. به‌طور اختیاری جهت افقی با x و جهت عمودی با y نشان داده شده‌اند. جهت و مبداء مختصات هنوز مورد نیاز نیست. به عنوان یک قرارداد معمول سمت راست محور xها و جهت بالا در محور yها را جهت مثبت انتخاب می‌کنیم.



(الف)



(ب)

شکل ۳۰-۲

(ii) قوانین کلی. قانون اول ترمودینامیک برای سیستم دیفرانسیلی شکل (۳۰-۲ الف) به‌کار می‌رود و به‌طور واضح‌تر برحسب عبارات و علائم شکل ۳۰-۲ (ب) بیان شده و نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$0 = +q_x(dy \cdot 1) - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right)(dy \cdot 1) + q_y(dx \cdot 1) - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy\right)(dx \cdot 1) + u'''(dx \cdot dy \cdot 1),$$

که به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + u''' = 0. \qquad (۲-۱۲۵)$$

(iii) قوانین خاص. دو عبارت از شکل برداری قانون فوریه در مختصات کارتزین که برای محیط ایزوتروپیک استفاده می‌شوند، به‌صورت زیر می‌باشند:

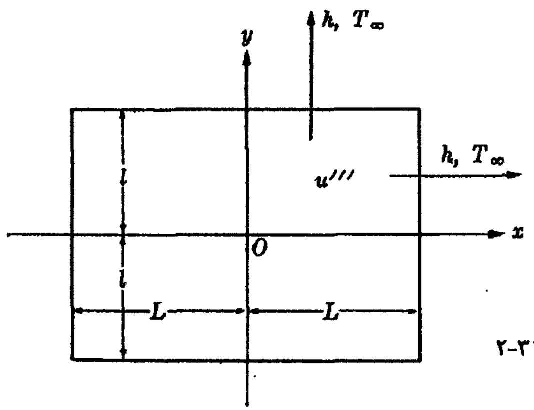
$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}. \qquad (۲-۱۲۶)$$

(iv) معادلات حاکم. قرار دادن معادله (۱۲۶-۲) در معادله (۱۲۵-۲) نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + u''' = 0, \qquad (۲-۱۲۷)$$

که این رابطه برای k ثابت به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \qquad (۲-۱۲۸)$$



شکل ۳۱-۲

معادله (۱۲۷-۲) یا معادله (۱۲۸-۲) معادله حاکم (هدایتی) برای مساله مورد نظر خواهند بود. واضح است که این معادلات از شکل کلی برداری داده شده در معادلات (۸۸-۲) و (۹۱-۲) و با در نظر گرفتن حالات کارتزین دو بعدی پایا به‌دست آمده‌اند.

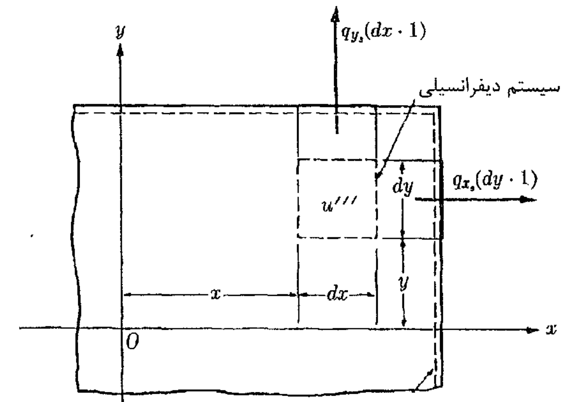
(v) شرایط مرزی و اولیه. همانند فرمولاسیون متمرکز شرط اولیه نیاز نیست. درجه مشتقات x و y در معادله (۱۲۸-۲) نشان می‌دهد که دو شرط مرزی در هر جهت مورد نیاز است. قبل از این‌که این شرایط مشخص شوند باید مبداء مختصات و جهت محورها مشخص شوند. با توجه به تقارن هندسی و گرمایی مساله، سیستم مختصات را مطابق شکل ۳۱-۲ در نظر می‌گیریم.

بنابراین شرایط مرزی به این صورت نوشته خواهند شد:

$$\frac{\partial T(0,y)}{\partial x}=0, \quad -k\frac{\partial T(L,y)}{\partial x}=h[T(L,y)-T_\infty],$$
$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0, \quad -k\frac{\partial T(x,l)}{\partial y}=h[T(x,l)-T_\infty]. \qquad (۲-۱۲۹)$$

[معادلات فوق را در سیستم مختصاتی که مبداء آن یکی از گوشه‌های گرمکن در نظر گرفته شده، بازنویسی کنید. معادله (۲-۱۲۹) را، با معادلات جدیدی که به‌دست آمده است مقایسه کنید].

معادله (۲-۱۲۷) یا (۲-۱۲۸)، به‌همراه معادله (۲-۱۲۹) فرمولاسیون دیفرانسیلی این مساله را کامل می‌کند. حل این مساله نیازمند پیشینه ریاضی بیشتری بوده و به فصل ۴ موکول می‌شود. (مثال ۱۰-۴ را که در آن حالت خاص $h \to \infty$ بررسی شده است، مشاهده کنید).



شکل ۳۲-۲

III. فرمولاسیون انتگرالی.

(i) سیستم یا حجم کنترل. همان‌طور که در ادامه آمده است در این فرمولاسیون باید به‌طورهم‌زمان از سیستم‌های فرمولاسیون متمرکز و دیفرانسیلی استفاده نمود (شکل ۳۲-۲).

(ii) قوانین کلی. قانون اول ترمودینامیک برای سیستم متمرکز شکل ۳۲-۲ به‌کار می‌رود، اما برحسب عبارات و علائم سیستم دیفرانسیلی همین شکل بیان می‌شود (همان‌طور که در بالا ذکر شد، شکل ۳۲-۲ ترکیبی از سیستم متمرکز و دیفرانسیلی است .م.) و خواهیم داشت:

$$-\int_0^l (q_x)_s dy - \int_0^L (q_y)_s dx + u''' Ll = 0. \qquad (۳-۱۳۰)$$

نتایج مشابهی نیز ممکن است از دیدگاه ریاضی با استفاده از شکل دیفرانسیلی قانون اول ترمودینامیک معادله (۲-۱۲۵) روی سطح عرض گرمکن به‌دست آید. نتایج به این صورت است:

$$\int_0^L\int_0^l\left(-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+u'''\right)dx\,dy=0. \qquad (۲-۱۳۱)$$

به‌سادگی با انجام انتگرال‌گیری مناسب از معادله (۲-۱۳۱) می‌توان تساوی معادلات (۲-۱۳۰) و (۲-۱۳۱) را نشان داد.

(iii) قوانین خاص. از آنجایی‌که q_x و q_y به‌صورت محلی و موضعی استفاده می‌شود. قانون فوریه داده شده در معادله (۲-۱۲۶) برای این مورد نیز صادق است.

(iv) معادله حاکم. با قرار دادن معادله (۲-۱۲۶) در معادله (۲-۱۳۰) و (۲-۱۳۱) شکل انتگرالی معادله هدایت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^l\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_s dy+\int_0^L\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s dx+\frac{u'''}{k}Ll=0. \qquad (۲-۱۳۲)$$

یا

$$\int_0^L\int_0^l\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{u'''}{k}\right)dx\,dy=0. \qquad (۲-۱۳۱)$$

از این‌رو، دو شکل انتگرالی متناظر با فرمولاسیون دیفرانسیلی معادله هدایت داریم، که یکی از روی ملاحظات فیزیکی و دیگری از روی دیدگاه ریاضی به‌دست می‌آید و معادله حاصل از دیدگاه ریاضی حاصل انتگرال‌گیری از شکل مناسب دیفرانسیلی نوشته شده روی مقطع عرضی گرمکن می‌باشد. واضح است هنگامی‌که شکل دیفرانسیلی موجود باشد، معادله (۲-۱۳۳) راحت‌تر از معادله (۲-۱۳۲) به‌دست می‌آید. البته، هر دو معادله یکسان و برابر می‌باشند.

(v) شرایط مرزی و اولیه. از آنجایی‌که معادلات (۲-۱۳۲) و (۲-۱۳۳) به‌صورت محلی و موضعی استفاده می‌شوند، شرایط مرزی و اولیه فرمولاسیون دیفرانسیلی برای فرمولاسیون انتگرالی حاضر نیز قابل استفاده است. از این‌رو معادله (۲-۱۳۲) یا معادله (۲-۱۳۳) به‌همراه معادله (۲-۱۲۹)، فرمولاسیون انتگرالی مساله را تکمیل می‌کنند.

فرمولاسیون انتگرالی برای به‌دست آوردن جواب تقریبی مناسب می‌باشد، و برای مسائلی که حل دقیق آن‌ها شامل معادلات جبری نسبتاً پیچیده بوده مناسب است و مخصوصاً برای مسائل پیچیده‌ای که حل دقیق ندارند، ضروری است. حل فرمولاسیون انتگرالی، به پیشینه ریاضی بیش از آن چیزی که برای خواننده دانسته فرض شده، نیاز ندارد؛ از این‌رو روش را در اینجا ارائه می‌دهیم. این روش براساس انتخاب پروفایل تقریبی برای متغیرهای نامعلوم (وابسته)، مثل دما می‌باشد. این پروفایل شامل پارامتری نامعلوم است که باید محاسبه شود و فرض می‌شود که پروفایل مذکور

متشکل از ضرب توابع ساده (چند جمله‌ای، دایره‌ای و غیره) می‌باشد[1]. هر تابع در این حاصل‌ضرب تنها وابسته به یکی از متغیرهای مستقل ورودی مساله می‌باشد و به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شرایط مرزی ارضا شود[2]. هنگامی‌که این حاصل‌ضرب در فرمولاسیون انتگرالی قرار می‌گیرد، نتیجه انتگرال‌گیری پارامترهای نامعلوم را مشخص می‌کند[3]، و در عوض هنگامی‌که مقادیر پارامترها درون حاصل‌ضرب قرار گیرد، یک حل تقریبی برای مساله مورد نظر به‌دست خواهد آمد.

حال می‌خواهیم این رویه کلی را برای مساله مطرح شده استفاده کنیم. برای دمای گرمکن فرض می‌کنیم که حاصل‌ضرب به‌صورت زیر موجود باشد:

$$T(x,y)-T_\infty = X(x)Y(y),$$

که در آن X و Y به ترتیب توابعی از x و y هستند. مساله را به حالتی که h بزرگ است، محدود کرده و به عنوان مثال فرض می‌کنیم که پروفایل در هر دو جهت سهموی بوده به‌طوری‌که شرایط مرزی را ارضا کند، می‌توانیم تقریب اولیه دمای گرمکن را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$T(x,y)-T_\infty = (L^2-x^2)(l^2-y^2)a_0, \qquad (۲-۱۳۴)$$

که در آن a_0 پارامتر نامعلومی است که باید محاسبه شود. معادله (۲-۱۳۴) پروفیل چندجمله‌ای درجه اول ریتز[4] می‌باشد، که با استفاده از روش مشهور محاسبات تغییرکننده[5] ریتز به‌دست می‌آید که این روش در فصل ۸ تشریح خواهد شد[6].

با قرار دادن معادله (۲-۱۳۴) در معادله (۲-۱۳۲) یا معادله (۲-۱۳۳) خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{3}{4}\frac{u'''/k}{L^2+l^2}. \qquad (۲-۱۳۵)$$

با ترکیب معادلات (۲-۱۳۴) و (۲-۱۳۵) و بازآرایی نتیجه ترکیب این دو معادله، چندجمله‌ای درجه اول ریتز برای توزیع دمایی مورد‌نظر به شکل زیر به‌دست می‌آید:

۱- این می‌تواند تنها یک فرض باشد، و ممکن است منجر به یک جواب نشود. وجود یک جواب بر درست بودن فرض دلالت دارد.

۲- اگرچه در انتقال حرارت هدایتی متداول نیست، روش انتگرالی به‌طور وسیعی تحت نام کارمن – پلهاسن (Karman-Polhausen) برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی سرعت و دمای مسائل لایه مرزی در مکانیک سیالات و انتقال حرارت جابه‌جایی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳- شکل‌های حاصل‌ضرب مراتب بالاتر به بیش از یک پارامتر نیاز دارد.

4- Ritz Profile

5- Variational calculus

۶- این کتاب ترجمه ۷ فصل اول کتاب انتقال حرارت هدایتی آرپاچی بوده و علاقه‌مندان می‌توانند برای مطالعه فصول ۸، ۹، و ۱۰ به کتاب زبان اصلی مراجعه نمایند.

$$\frac{T(x,y)-T_\infty}{u'''l^2/k} = \frac{3}{4}\frac{[1-(x/L)^2][1-(y/l)^2]}{1+(l/L)^2}. \qquad (۲-۱۳۶)$$

حال می‌خواهیم راجع به دقت این حل تقریبی بحث کنیم. از آنجایی‌که شرایط مرزی به‌طور کامل ارضا می‌شوند، بیشترین خطا در دورترین مناطق نسبت به مرزها حاصل می‌شود به‌خصوص، در مبداء مختصات. در حقیقت، با قرار دادن $x/L = y/L = 0$ و مقدار ویژه $l/L = 1$ درون معادله (۲-۱۳۶)، خطای حدود ۲۷/۳٪ حاصل می‌شود، که مقدار قابل توجهی است[1]. اگر چه خطا با در نظر گرفتن تقریب درجه دوم به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد، که بعداً مورد بررسی قرار خواهد گرفت. (به مثال ۱۱-۴ توجه شود).

همچنین می‌توانیم از یک روش دیگر که روش کانترورویچ[2] نام دارد برای انتخاب پروفایل تقریبی استفاده کنیم. این روش بر پایه تعمیم روش ریتز می‌باشد. دوباره فرض می‌کنیم که پاسخ از حاصل‌ضرب چند تابع تشکیل شده باشد، که هرکدام از این توابع تنها وابسته به یک متغیر مستقل است. یکی از این توابع، تابع پارامتری[3] است[4] که به‌صورت غیرمشخص باقی می‌ماند (به‌طور مثال اگر مساله دارای دو بعد (یا دو متغیر وابسته) باشد تنها برای یک جهت یا یک متغیر وابسته تابعی را حدس می‌زنیم و جهت دیگر را به‌صورت پارامتری $X(x)$ یا $Y(y)$ باقی می‌گذاریم تا به کمک معادله حاکم انتگرالی به‌دست آید .م.). پروفایل جدید، شرایط مرزی مساله را تنها در جهت‌هایی که دارای توابع مشخص هستند، ارضا می‌کند و هنگامی‌که این پروفایل کانترورویچ (که در آن ثوابت توابع مشخص به کمک شرایط مرزی تعیین شده است .م.) را در فرمولاسیون انتگرالی قرار می‌دهیم یک معادله دیفرانسیل برحسب تابع پارامتری به‌دست می‌آید. ثوابت انتگرال‌گیری حل این معادله دیفرانسیل طبق شرایط مرزی در جهت تابع پارامتری به‌دست می‌آیند. همان‌طوری که در مثال‌های ۲-۲ و ۲-۳ خواهیم دید روش کانترورویچ برای مسائل ناپایا متداول است (البته برای مسائل پایا نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و دقیق‌تر از روش ریتز است .م.).

حال اگر به مساله مورد مطالعه باز گردیم و به‌عنوان مثال، اگر جهت x معادله (۲-۱۳۴) نامشخص باشد[5]، چند جمله‌ای درجه اول به روش کانترورویچ به این صورت خواهد شد:

۱- این خطا از مقایسه معادله (۲-۱۳۶) با جواب دقیق، معادله (۴-۱۳۳)، و با حل فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله به‌دست می‌آید.

2- Kantorovich method

3- parameter function

۴- در روش ریتز عبارت پارامتر، به پارامتر ثابت اشاره دارد اما در روش کانترورویچ واژه پارامتر برای بیان یک تابع کلی مثل $X(x)$ یا $Y(y)$ به‌کار می‌رود.

۵- همان‌طور که در فصل ۸ توصیف خواهد شد، این انتخاب نمی‌تواند اختیاری باشد، زیرا جهتی که نامشخص باشد صحت روش را تحت تأثیر قرار می‌دهد (رجوع شود به کتاب زبان اصلی .م.).

$$T(x,y) - T_\infty = (l^2 - y^2)X(x), \qquad (۲\text{-}۱۳۷)$$

که این معادله شرایط مرزی را تنها در جهت y ارضا می‌کند.

با قرار دادن معادله (۱۳۷-۲) در (۱۳۳-۲)[1] و انتگرال‌گیری در جهت y به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$\int_0^L \left(\frac{2}{3} l^2 X'' - 2X + u'''/k\right) dx = 0. \qquad (۲\text{-}۱۳۸)$$

از آنجایی‌که معادله (۱۳۸-۲) برای طول دلخواه L صادق است، باید جمله زیر انتگرال در بازه $(0, L)$ صفر شود. بنابراین تابع پارامتری $X(x)$، با توجه به شرایط مرزی در جهت x که قبلاً استفاده نشده است، در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

$$X'' - (3/l^2)X = 3\,u'''/2kl^2, \qquad (۲\text{-}۱۳۹)$$

این شرایط ممکن است به شکل زیر محاسبه شوند. به عنوان مثال فرض کنید که شرط مرزی در $x = L$، $T(L,y) = T_\infty$ است. ممکن است این شرط برحسب قاعده حاصل‌ضرب، به شکل زیر نوشته شود:

$$T(L,y) - T_\infty = 0 = X(L)Y(y). \qquad (۲\text{-}۱۴۰)$$

البته، معادله (۱۴۰-۲) برای تمام مقادیر $Y(y)$ معتبر نیست مگر این‌که $X(L) = 0$ شود. به طور مشابه، شرایط دیگر، از تقارن دمایی و به‌صورت $dX(0)/dx = 0$ به‌دست می‌آید. بنابراین شرایط مرزی در جهت x به‌صورت زیر می‌شود.

$$dX(0)/dx = 0, \quad X(L) = 0. \qquad (۲\text{-}۱۴۱)$$

جواب معادله (۱۳۹-۲) با توجه به معادله (۱۴۱-۲) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$X(x) = \frac{u'''}{2k}\left(1 - \frac{\cosh(\sqrt{3}/l)x}{\cosh(\sqrt{3}/l)L}\right). \qquad (۲\text{-}۱۴۲)$$

در نهایت، با قرار دادن معادله (۱۴۲-۲) در معادله (۱۳۷-۲) و بازآرایی آن، چندجمله‌ای درجه اول کانتروویچ برای توزیع دمایی مناسب گرمکن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

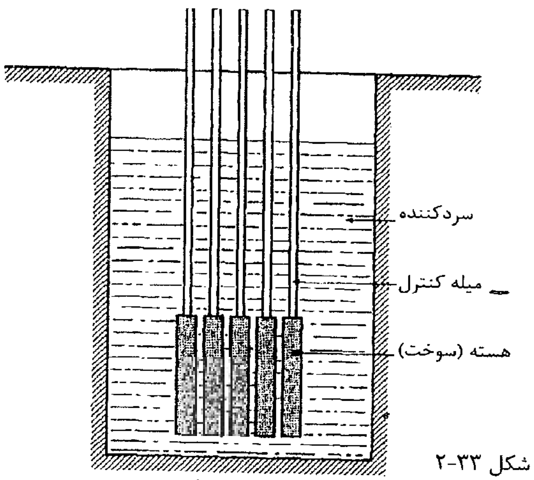
$$\frac{T(x,y) - T_\infty}{u''' l^2/k} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{y}{l}\right)^2\right]\left(1 - \frac{\cosh(\sqrt{3}/l)x}{\cosh(\sqrt{3}/l)L}\right). \qquad (۲\text{-}۱۴۳)$$

دمای صفحه مربعی در مبداء مختصات، بیشترین خطا را خواهد داشت. که اختلاف آن با جواب دقیق در حدود ۱۱/۵ درصد است. طبق انتظار، این نتیجه دقت بیشتری نسبت به روش ریتز دارد،

۱- معادله (۱۳۳-۲) نسبت به معادله (۱۳۲-۲) برای روش کانتروویچ مناسب‌تر است.

زیرا محدودیت‌های دلخواه کمتری به پروفایل کانتروویچ تحمیل شده است. دقت پروفایل درجه اول کانتروویچ مثل پروفایل درجه اول ریتز، به میزان قابل توجهی در پروفایل درجه دوم بهبود می‌یابد. (مثال ۱۱-۴ را مشاهده کنید).

شایان توجه است که اگر برای یک مساله، پروفایل‌های درجه اول ریتز و کانترو ویچ با استفاده از شکل تغییریافته[1] همان مساله حاصل شوند (به‌جای شکل انتگرالی .م.)، نتایج دقیق‌تری حاصل می‌شود. از این راه خطای ۲۷/۳ درصدی روش ریتز انتگرالی می‌تواند با استفاده از ریتز تغییریافته به ۶/۰۵ درصد، کاهش یابد. به طور مشابه خطای ۱۱/۵ درصدی روش کانترو ویچ انتگرالی با استفاده از کانترو ویچ تغییریافته به ۲/۶۸ درصد، کاهش یابد. مطالعه محاسبات تغییریافته در فصل ۸ بررسی شده است[2]. دلیل بررسی محاسبات تغییریافته به‌دست آوردن نتایج دقیق‌تری نسبت به روش انتگرالی است که در همان فصل توضیح داده شده است. (بحث ارائه شده در زیر مثال ۶-۸ را مشاهده کنید).



شکل ۳۳-۲

مثال ۲-۲. راکتور حوضچه‌ای شکل (۳۳-۲) را که درون کوره آن تعدادی صفحات سوختی عمودی با ضخامت $2L$ تعبیه شده است، درنظر بگیرید. در ابتدا سیستم در دمای یکنواخت T_∞ قرار دارد. سپس فرض کنید که انرژی درونی ثابت هسته‌ای u''' به‌طور یکنواخت در این صفحات تولید می‌شود. ضرایب انتقال حرارت میان صفحات و ماده خنک‌کننده h است. دمای ماده خنک‌کننده ثابت باقی می‌ماند و ضخامت صفحات در مقایسه با ابعاد دیگر آن کوچک است. بنابراین

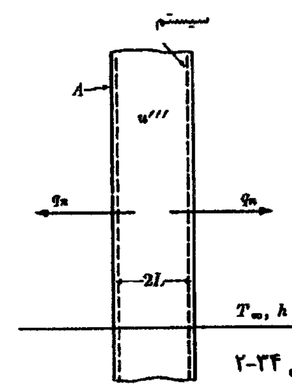
1- Variational form

۲- این کتاب حاوی ۷ فصل اول کتاب انتقال حرارت هدایتی آرپاچی است و علاقه‌مندان برای مطالعه فصول ۸، ۹، و ۱۰ به کتاب زبان اصلی مراجعه نمایند.

اگر از اثرات انتهایی صرف‌نظر کنیم، انتقال حرارت در یک بعد صورت می‌گیرد. می‌خواهیم که مساله دمای ناپایای راکتور را فرموله کنیم.

مجدداً شکل‌های متمرکز، دیفرانسیلی و انتگرالی مساله، برای یکی از صفحات درونی، با درنظر گرفتن پنج مرحله اساسی فرمولاسیون، فرمول‌بندی می‌شوند. هر چند که این مراحل دیگر به تفصیل شرح داده نمی‌شوند.

I فرمولاسیون متمرکز. همه صفحه به‌عنوان سیستم در نظر گرفته می‌شود (شکل ۳۴-۲).



شکل ۳۴-۲

صورت متمرکز قانون اول ترمودینامیک معادله (۱۶-۲) برای این سیستم به‌کار گرفته می‌شود:

$$\frac{dE}{dt} = -2Aq_n, \tag{۲-۱۴۴}$$

که در آن A سطح مقطع یک طرف صفحه را نشان می‌دهد. توجه کنید که تولید انرژی درونی u''' را نمی‌توان به عنوان یک توان ورودی به سیستم که توسط منبع الکتریکی خارجی تامین می‌شود تعریف نمود بلکه شامل تغییرات پیوسته ترکیب سوخت هسته‌ای و تجزیه صفحات به عنوان مواد قابل شکافت است که به‌صورت انرژی درونی عمل می‌کند[1]. عموماً این تغییر ترکیب به اندازه‌ای کوچک است که مشخصه‌های حرارتی را می‌توان ثابت فرض کرد.

بنابراین وقتی از تعریف گرمای ویژه استفاده می‌کنیم، طرف چپ معادله (۱۳۴-۲) تغییر می‌کند:

$$\frac{dE}{dt} = \rho(A\cdot 2L)c\frac{dT}{dt} - (A\cdot 2L)u''', \tag{۲-۱۴۵}$$

۱- آرگومانی مشابه با این حالت به حالت‌های منابع و چاه‌های انرژی داخلی توزیع‌یافته که به ترتیب در اثر واکنش‌های شیمیایی گرماده و گرمازا به‌وجود می‌آیند، مربوط می‌شود. معادله (۱۲-۲) را ببینید.

با قرار دادن معادله (۱۴۵-۲) در معادله (۱۴۴-۲)، به شکل متمرکز قانون اول ترمودینامیک می‌رسیم:

$$\rho cL\frac{dT}{dt} = -q_n + u'''L. \tag{۲-۱۴۶}$$

از آنجایی‌که نیازی به قوانین ویژه نیست، معادله (۱۴۶-۲) معادله حاکم بر مساله است.

شرایط اولیه و مرزی به ترتیب به‌صورت زیر هستند:

$$T(0) = T_\infty, \tag{۲-۱۴۷}$$

$$q_n = h(T - T_\infty). \tag{۲-۱۴۸}$$

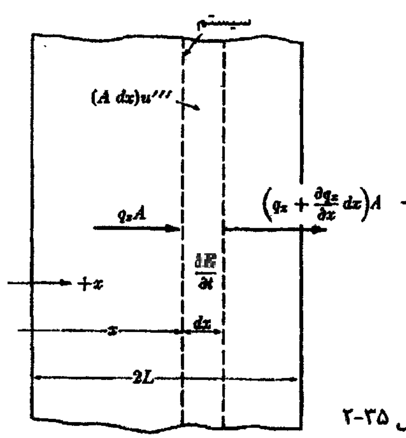
بنابراین معادلات (۱۴۶-۲)، (۱۴۸-۲) به‌طور کامل فرمولاسیون متمرکز مساله را شرح می‌دهند. جواب بدیهی[1] این فرمولاسیون به سهولت از حل ترکیب معادلات (۱۴۶-۲) و (۱۴۸-۲) به‌دست می‌آید:

$$\rho cL\frac{dT}{dt} = -h(T - T_\infty) + u'''L, \tag{۲-۱۴۹}$$

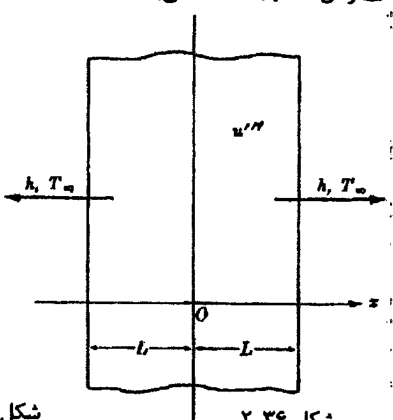
براساس معادله (۱۴۷-۲)، نتیجه به‌صورت زیر است:

$$\frac{T(t)-T_\infty}{u'''L/h} = 1 - e^{-mt}, \tag{۲-۱۵۰}$$

که در آن $m = h/\rho cL$ می‌باشد.



شکل ۳۵-۲



شکل ۳۶-۲

1- Trivial solution

II. فرمولاسیون دیفرانسیلی. سیستم دیفرانسیلی یک بعدی نشان داده شده در شکل ۳۵-۲ را در نظر بگیرید. سمت راست x مثبت در نظر گرفته شده است. قانون اول ترمودینامیک برای شکل ۳۵-۲ رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -A\frac{\partial q_x}{\partial x}dx. \qquad (۲\text{-}۱۵۱)$$

نرخ زمانی تغییرات انرژی داخلی کل به روش مشابه آنچه در فرمولاسیون متمرکز گفته شد، قابل ارزیابی است. از این‌رو:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho c(A\,dx)\frac{\partial T}{\partial t} - (A\,dx)u'''. \qquad (۲\text{-}۱۵۲)$$

با وارد کردن معادله (۱۵۲-۲) درون معادله (۱۵۱-۲) و بازآرایی نتایج، شکل مناسب قانون عمومی قانون اول ترمودینامیک به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + u'''. \qquad (۲\text{-}۱۵۳)$$

سرانجام، با در نظر گرفتن قانون ویژه، قانون فوریه برای جهت x در محیط ایزوتروپیک خواهیم داشت:

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (۲\text{-}۱۵۴)$$

و با قرار دادن معادله (۱۵۴-۲) در معادله (۱۵۳-۲)، معادله حاکم بر مساله را به‌صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + u''', \qquad (۲\text{-}۱۵۵)$$

که این رابطه برای k ثابت، به‌صورت زیر خواهد بود:

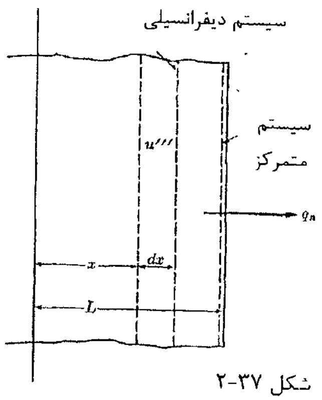
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{u'''}{\rho c}, \qquad (۲\text{-}۱۵۶)$$

معادلات (۱۵۵-۲) و (۱۵۶-۲) شکل‌های معادله دیفرانسیل هدایت یک‌بعدی در مختصات کارتزین به‌ترتیب برای معادلات (۸۸-۲) و (۹۱-۲) هستند.

باید قبل از نوشتن شرایط مرزی و اولیه، مبداء محورهای مختصات را مشخص کرد. با توجه به تقارن حرارتی و هندسی مساله، سطح میانی صفحه به عنوان مرکز محور x انتخاب می‌شود (شکل ۳۶-۲). شرایط اولیه و مرزی مناسب این مختصات به‌صورت زیر هستند:

$$T(x,0) = T_\infty, \qquad \text{اولیه} \qquad (۲\text{-}۱۵۷)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \quad -k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t) - T_\infty], \qquad \text{مرزی}$$



شکل ۳۷-۲

بنابراین با در نظر گرفتن یکی از معادلات (۱۵۵-۲) یا (۱۵۶-۲) به همراه معادله (۱۵۷-۲)، فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله کامل می‌شود. حل این فرمولاسیون نیازمند اطلاعات ریاضی بیشتر است که در فصل ۵ ارائه می‌شود (به مثال ۴-۵ و مساله ۸-۵ مراجعه کنید).

III. فرمولاسیون انتگرالی. سیستم‌های به‌کار گرفته شده برای فرمولاسیون‌های متمرکز و دیفرانسیلی را دوباره در نظر گرفته و در این مرحله از فرمولاسیون، مبداء مختصات را مشخص می‌کنیم. زمانی‌که قانون اول ترمودینامیک برای سیستم متمرکز شکل ۳۷-۲ به‌کار رود، نتایج قبلی حاصل می‌شود:

$$\frac{dE}{dt} = -2Aq_n, \qquad (۲\text{-}۱۴۴)$$

از dE/dt موجود در جملات سیستم دیفرانسیلی، بر روی ضخامت صفحه، انتگرال گرفته می‌شود و با توجه به تقارن، شکل انتگرال قانون اول ترمودینامیک به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho cT\,dx - u'''L = -q_n. \qquad (۲\text{-}۱۵۸)$$

قانون ویژه فرمولاسیون دیفرانسیلی، معادله (۱۵۴-۲)، برای فرمولاسیون انتگرالی هم معتبر است و نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$q_n = q_{x=L} = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L}. \qquad (۲\text{-}۱۵۹)$$

بنابراین با قرار دادن معادله (۱۵۹-۲) در معادله (۱۵۸-۲) معادله حاکم حاصل خواهد شد:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho cT\,dx - u'''L = k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} \qquad (۲\text{-}۱۶۰)$$

شرایط مرزی و اولیه، با فرمولاسیون دیفرانسیلی یکسان هستند. از این‌رو معادله (۱۶۰-۲) به همراه معادله (۱۵۷-۲) فرمولاسیون انتگرالی مساله را کامل می‌کنند.

حال به حل تقریبی فرمولاسیون مذکور می‌توان دست یافت. ابتدا حالت ساده $h \to \infty$ را در نظر بگیرید. اگر چه ممکن است توزیع فضایی دمای[1] یک مساله ناپایا، به سرعت تقریب زده شود،

1- Spacewise temperature distribution

ولی اغلب حدس زدن تغییرات زمانی مشکل است. برای چنین مسائلی، باید پروفایل کانترورویچ دارای تابع پارامتری نامعین برحسب زمان باشد. به ویژه، در صورتی‌که پاسخ یک مساله ناپایا به سمت پاسخ پایا میل کند یا اگر پروفایل ناپایا در یک مقیاس مشخص به پروفایل پایا شبیه باشد[۱]، پروفایل کانترورویچ مساله به‌طور تقریبی از پاسخ پایا حاصل می‌شود (یعنی با توجه به پروفایل پایای مساله، پروفایل ناپایای کانترورویچ را حدس می‌زنیم .م). حال به بیان نکات در جملات مساله مورد نظر می‌پردازیم. جزییات به‌دست آوردن پاسخ بدیهی پایای مساله را به عهده خواننده می‌گذاریم و آن‌را برحسب عبارات شکل ۲-۳۶ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{T(x)-T_\infty}{u'''L^2/k}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]. \qquad (۲-۱۶۱)$$

یک پروفایل ناپایای درجه اول کانترورویچ را می‌توان به‌صورت زیر فرض نمود:

$$\frac{T(x,t)-T_\infty}{u'''L^2/k}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\tau_0(t). \qquad (۲-۱۶۲)$$

علاوه بر آن، ضریب مقیاس ناپایای $\tau_0(t)$ می‌تواند به‌عنوان تابع پارامتری نامعینی که باید مشخص شود، در نظر گرفته شود. با قراردادن معادله (۲-۱۶۲) در معادله (۲-۱۶۰) و انتگرال‌گیری از آن با فرض مشخصات ثابت و همچنین بازآرایی معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{d\tau_0}{dt}+\frac{3\alpha}{L^2}(\tau_0-1)=0, \qquad (۲-۱۶۳)$$

باتوجه به شرط

$$\tau_0(0)=0. \qquad (۲-۱۶۴)$$

پاسخ معادله (۲-۱۶۳) که در معادله (۲-۱۶۴) صدق می‌کند:

$$\tau_0(0)=1-\exp(-3\alpha t/L^2). \qquad (۲-۱۶۵)$$

با قرار دادن معادله (۲-۱۶۵) در معادله (۲-۱۶۲) برای تغییرات دمای صفحه، به پروفایل درجه اول کانترورویچ به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\frac{T(x,t)-T_\infty}{u'''L^2/k}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\left[1-\exp\left(-3\frac{\alpha t}{L^2}\right)\right] \qquad (۲-۱۶۶)$$

وقتی‌که $t\to\infty$ معادله (۲-۱۶۶) به پاسخ پایای مساله یعنی معادله (۲-۱۶۱) نزدیک می‌شود.

۱- پروفایل کانترورویچ مسائلی که تغییرات دمای ناپایای آن‌ها مشابه توزیعات پایای‌شان نیست، در مثال ۲-۳ توضیح داده خواهند شد.

حالت h محدود هم به‌صورتی مشابه می‌باشد. با ضرب پاسخ پایای مساله در تابع پارامتری نامعین $\tau_0(t)$ خواهیم داشت:

$$\frac{T(x,t)-T_\infty}{u'''L^2/k}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2+\frac{2}{\mathrm{Bi}}\right]\tau_0(t), \qquad (۲-۱۶۷)$$

که در آن $\mathrm{Bi}=hL/k$. [آیا $\tau_0(t)$ معادله (۲-۱۶۷) هیچ مفهوم فیزیکی‌ای دارد؟] با وارد کردن معادله (۲-۱۶۷) در معادله (۲-۱۶۰) و انتگرال‌گیری، به معادله دیفرانسیلی زیر دست می یابیم:

$$\frac{d\tau_0}{dt}+\frac{3\alpha}{L^2}\left(\frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}+3}\right)(\tau_0-1)=0, \qquad (۲-۱۶۸)$$

با توجه به شرط

$$\tau_0(0)=0. \qquad (۲-۱۶۴)$$

حل معادله (۲-۱۶۸) که ابتدا در معادله (۲-۱۶۴) صدق کرده و بعد در معادله (۲-۱۶۷) قرار داده می‌شود، پروفایل درجه اول کانترورویچ مساله را می‌دهد. پس خواهیم داشت:

$$\frac{T(x,t)-T_\infty}{u'''L^2/k}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2+\frac{2}{\mathrm{Bi}}\right]\left[1-\exp\left(-\frac{3\alpha}{L^2}\frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}+3}t\right)\right], \qquad (۲-۱۶۹)$$

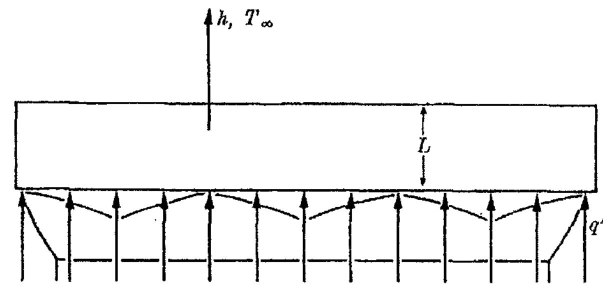
[وقتی $\mathrm{Bi}\to\infty$ شکل معادله (۲-۱۶۹) چیست؟]

در ادامه برای تمرین بیشتر خواننده، روش دیگری برای انتخاب پروفایل تقریبی پیشنهاد شده است. یک پروفایل کانترورویچ را با فرض نامعین بودن توابع پارامتری دمای سطح میانی و دمای سطحی که باید تعیین شوند، به‌دست آورید. سپس دمای صفحه را بر طبق حالت h محدود به‌صورت پروفایل دو پارامتری بنویسید. سپس، با به‌کارگیری شرط مرزی سطحی، یکی از توابع پارامتری این پروفایل را حذف کنید. نتایج را با معادله (۲-۱۶۷) مقایسه کنید.

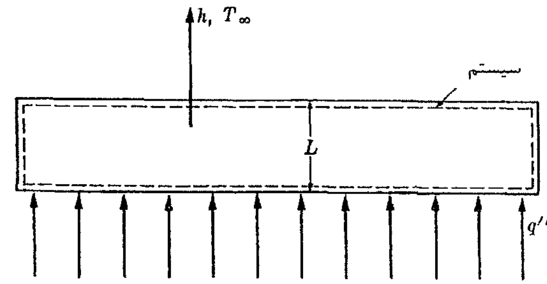
در مثال بعدی، فرمولاسیون متمرکز و دیفرانسیلی مساله را مختصر کرده و توجه بیشتری به فرمولاسیون انتگرالی که نیازمند تعریف مفهوم جدید عمق نفوذ[۱] است، معطوف می‌کنیم.

مثال ۳-۲. یک صفحه داغ با ضخامت L (شکل ۲-۳۸) در ابتدا در دمای محیط T_∞ قرار دارد. در این شرایط، یک شار حرارتی یکنواخت q'' به زیر صفحه وارد می‌شود. ضریب انتقال حرارت بالایی صفحه h است. ضخامت L صفحه در مقایسه با دیگر ابعاد کوچک است به‌طوری‌که اتلاف حرارت از اطراف ناچیز در نظر گرفته می‌شود. مطلوبست فرمولاسیون مساله دمای ناپایای صفحه مورد نظر.

1- Penetration depth



شکل ۳۸-۲



شکل ۳۹-۲

I. فرمولاسیون متمرکز. با به‌کارگیری قانون اول ترمودینامیک که با تعریف ضریب انتقال حرارت ادغام شده است، سیستم متمرکز شکل ۳۹-۲ را به‌صورت زیر می‌توان فرموله نمود:

$$\rho c L\frac{\partial T}{\partial t}=q''-h(T-T_\infty), \qquad (۲-۱۷۰)$$

و

$$T(0)=T_\infty. \qquad (۲-۱۷۱)$$

پاسخ معادله (۱۷۰-۲) که در معادله (۱۷۱-۲) هم صدق کند به‌صورت زیر است:

$$\frac{T(t)-T_\infty}{q''/h}=1-e^{-mt}, \qquad (۲-۱۷۲)$$

که در آن $m=h/\rho c L$ است.

II. فرمولاسیون دیفرانسیلی. با ترکیب قانون اول ترمودینامیک و قانون هدایت فوریه برای سیستم دیفرانسیلی شکل ۴۰-۲، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad (۲-۱۷۳)$$

که اگر k ثابت باشد به این صورت در می‌آید:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad (۲-۱۷۴)$$

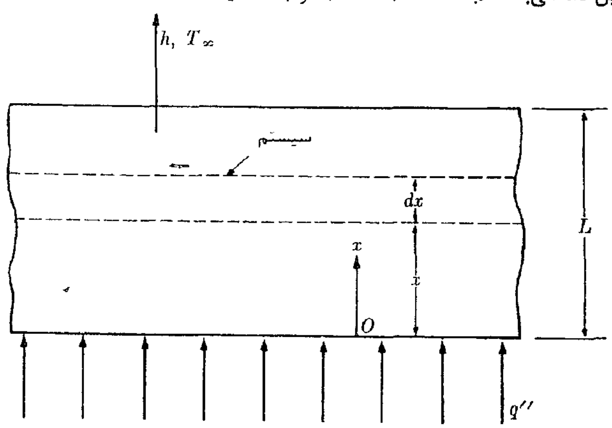
که شرایط مرزی و اولیه در جهت x که از پایین[1] به بالا محاسبه می‌شود به‌صورت

$$T(x,0)=T_\infty;\quad -k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=q'',\quad -k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=h[T(L,t)-T_\infty]. \qquad (۲-۱۷۵)$$

است که همراه با معادلات (۱۷۳-۲) و (۱۷۴-۲) فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله را تکمیل می‌کند. حل این فرمولاسیون به فصل ۵ واگذار می‌شود (به معادله (۳۴-۵) مراجعه کنید.)

III. فرمولاسیون انتگرالی. ابتدا مساله را با توجه به زمان به دو محدوده تقسیم می‌کنیم، که در بازه زمانی اول، $0\le t\le t_0$ اثر شار حرارتی به‌کار گرفته شده به سطح بالایی می‌رسد و بازه زمانی دوم $t\ge t_0$ محدوده مربوط به باقیمانده حالت گذراست و تا زمانی‌که دمای سطح بالایی به مقدار پایای آن برسد، برقرار است.

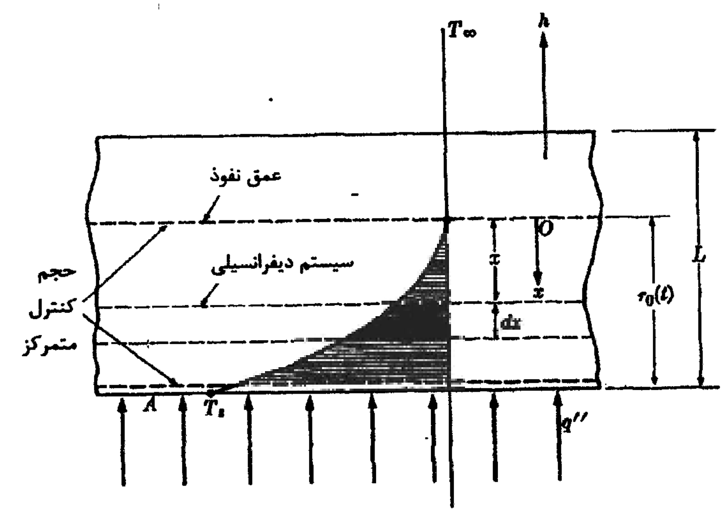
بازه اول مساله را می‌توان با توجه به عمق نفوذ دما[2]، $\tau_0(t)$ نشان داده شده در شکل ۴۱-۲ تشریح کرد. در همان شکل حجم کنترل متمرکز و سیستم دیفرانسیلی مناسب هم نشان داده شده است. محور ترسیم شده برای نشان دادن انتهای عمق نفوذ متحرک، محور مختصات مناسبی برای ایجاد پروفایل دما می‌باشد [به معادله (۱۸۱-۲) مراجعه کنید.].



شکل ۴۰-۲

۱- این اولین مساله‌ای است که محور مختصات مناسب آن واضح نیست. انتخاب بهترین چارچوب مرجع و مناسب از دیدگاه پیچیدگی پاسخ مهم است. پاسخ این سوال در فصول ۳ و ۴ روشن می‌شود.

۲- این بحث مشابه مفهوم ضخامت لایه مرزی سرعت و دما در تئوری لایه مرزی است.



شکل ۲-۴۱

قانون اول ترمودینامیک به‌کار رفته برای حجم کنترل متمرکز شکل ۲-۴۱ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{dE}{dt} = \rho c A T_\infty \frac{d\tau_0}{dt} + q'' A, \tag{۲-۱۷۶}$$

که در آن A مساحت سطح یک طرف صفحه است. بیان نمودن انرژی داخلی کل E حجم کنترل متمرکز برحسب عبارات انرژی داخلی سیستم دیفرانسیلی داده شده، شکل مناسبی از فرمولاسیون انتگرالی قانون عمومی را ایجاد می‌نماید:

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\tau_0(t)} \rho c T\, dx = \rho c T_\infty \frac{d\tau_0}{dt} + q''. \tag{۲-۱۷۷}$$

با وجود این‌که مساله توزیع شده است، هیچ‌کدام از عبارات معادله (۲-۱۷۷) نیاز به استفاده از قانون خاصی ندارند. اگر قانون ویژه فوریه در جهت x بعداً در مرتبط کردن شرایط مرزی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. (به معادله (۲-۱۷۹) مراجعه کنید.) بنابراین معادله حاکم بازه اول را در معادله (۲-۱۷۷) قرار می‌دهیم.

با استفاده از دمای اولیه یکنواخت صفحه، شرط اولیه ایجاد می‌شود:

$$T(x,0) = T_\infty. \tag{۲-۱۷۸}$$

شرط مرزی سطح زیرین صفحه، شار حرارتی ثابت q'' را با استفاده از قانون ویژه به دما مرتبط می‌کند، که می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\tau_0(t)} = -q''. \tag{۲-۱۷۹}$$

از آنجایی‌که در این بازه زمانی عمق نفوذ کمتر از ضخامت صفحه است، شرط مرزی بیان‌کننده انتقال حرارت از سطح بالایی، معتبر نیست. به‌جای آن، شار حرارتی صفر در سطح صفحه و در انتهای عمق نفوذ، باید مورد استفاده قرار گیرد:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \tag{۲-۱۸۰}$$

بنابراین معادلات (۲-۱۷۷)، (۲-۱۷۸)، (۲-۱۷۹)، و (۲-۱۸۰) فرمولاسیون انتگرالی مساله را در بازه زمانی اول تکمیل می‌کنند. قبل از انجام فرمولاسیون بازه زمانی دوم، یک حل تقریبی برای بازه زمانی اول پیدا می‌کنیم.

از آنجایی‌که در این بازه (بازه زمانی اول) تغییرات دمای ناپایا وجود دارد، یعنی دمای پایای ناشناخته‌شده‌ای در این بازه وجود ندارد (و عدم وجود یک دمای پایای معین باعث می‌شود که شرط اولیه معینی برای بازه زمانی دوم وجود نداشته باشد)، نمی‌توان پروفایل کانترورویچ ناپایا را با استفاده از پاسخ پایا حاصل نمود (به پروفایل کانترورویچ مثال ۲-۲ توجه کنید). این مطلب روش دومی را برای ایجاد پروفایل کانترورویچ ناپایا پیشنهاد می‌کند که در این روش به یک تابع (چندجمله‌ای، تناوبی، و غیره) که شرایط مرزی در آن صدق کند، نیاز است. اگر چه درجه چندجمله‌ای (یا نوع تابع تناوبی) تا حد زیادی اختیاری است ولی می‌توان از یک راهنمایی ساده‌کننده برای به‌دست آوردن این پروفایل استفاده نمود. بنابراین و برای مثال کمترین درجه چندجمله‌ای که شرایط مرزی را ارضا می‌کند معمولاً بهترین تقریب از پروفایل واقعی است. در مورد این مساله از یک سهمی استفاده می‌کنیم:

$$T(x,t) - T_\infty = \left(\frac{q''}{2k}\right)\frac{x^2}{\tau_0(t)}, \tag{۲-۱۸۱}$$

که شرایط مرزی داده شده با معادلات (۲-۱۷۹) و (۲-۱۸۰) در آن صدق می‌کند. با قرار دادن معادله (۲-۱۸۱) در معادله (۲-۱۷۷) و انتگرال‌گیری با فرض ویژگی‌های ثابت، معادله دیفرانسیل ساده ولی غیرخطی زیر حاصل می‌شود:

$$d\tau_0^2 = 6a\, dt, \tag{۲-۱۸۲}$$

و با توجه به شرط اولیه

$$\tau_0(0) = 0. \tag{۲-۱۸۳}$$

حل معادله (۲-۱۸۲) که در شرط (۲-۱۸۳) صدق کند به‌صورت زیر است:

$$\tau_0(t) = (6at)^{1/2}. \qquad (۲-۱۸۴)$$

بنابراین با استفاده از پروفایل درجه اول کانتروویچ، تغییرات دما در بازه زمانی اول مساله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$T(x,t) - T_\infty = \left(\frac{q''}{2k}\right)\frac{x^2}{(6at)^{1/2}}, \quad \text{وقتی‌که} \quad 0 \le t \le t_0 \qquad (۲-۱۸۵)$$

بنابراین وارد کردن $\tau_0(t_0) = L$ در معادله (۲-۱۸۴) ما را به زمان نفوذ شار حرارتی اعمال شده q'' به سطح بالایی صفحه می‌رساند:

$$t_0 = L^2/6a. \qquad (۲-۱۸۶)$$

برای مقایسه سه پاسخ متفاوت مساله، برای مثال یک تغییر دما در پایین صفحه را در نظر می‌گیریم. از راه‌حل فوق، عبارت $x = \tau_0(t) = (6at)^{1/2}$ را در معادله (۲-۱۸۵) قرار می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$T_s(t) - T_\infty = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{q''}{k}\right)(at)^{1/2}. \qquad (۲-۱۸۷)$$

پاسخ دقیق مساله که در فصل ۷ ارائه خواهد شد[۱] به‌صورت زیر است:

$$T_s(t) - T_\infty = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{q''}{k}\right)(at)^{1/2}. \qquad (۲-۱۸۸)$$

از این‌رو خطای معادله (۲-۱۸۷)، ۸/۴٪ است. اگر پروفایل تقریبی حاصل از معادله (۲-۱۸۱) در شکل تغییریافته از فرمولاسیون قرار داده شود (به مثال ۸-۸ مراجعه کنید)، نتیجه به این شکل خواهد بود:

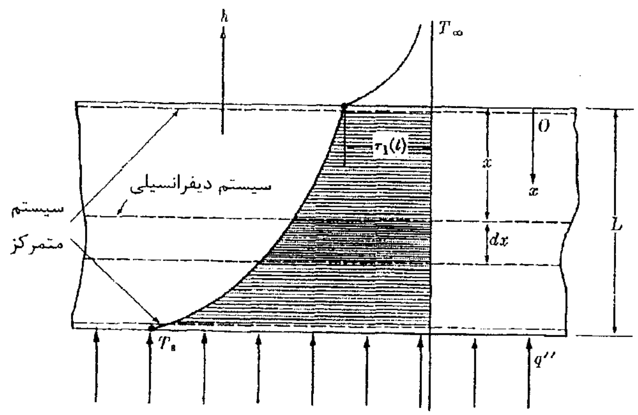
$$T_s(t) - T_\infty = \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2}\left(\frac{q''}{k}\right)(at)^{1/2}. \qquad (۲-۱۸۹)$$

معادله (۲-۱۸۹) به یک خطای تقریبی ۰/۸۹٪ می‌انجامد. مقایسه مذکور اهمیت محاسبات تغییریافته را به‌عنوان یک روش تقریبی نمایان می‌کند.

حال با پایان یافتن بررسی بازه زمانی اول، به فرمولاسیون مساله، برای بازه زمانی دوم باز می‌گردیم. سیستم‌های دیفرانسیلی و متمرکز نشان داده شده در شکل ۲-۴۲ را در نظر بگیرید. محور مختصات از سطح بالایی و رو به پایین در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از قانون اول ترمودینامیک و قانون هدایت فوریه، شکل انتگرالی مناسبی از معادله حاکم حاصل می‌شود:

۱- مورد به‌خصوص مساله ۱-۷ متناظر با $h = 0$ است

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho c T\, dx = q'' - k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}. \qquad (۲-۱۹۰)$$



شکل ۲-۴۲

شرایط اولیه این بازه، شرط نهایی بازه اول است. همچنین شرط مرزی صفحه پایینی باید مطابق با محور مختصات جدید اصلاح شود:

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = -q''. \qquad (۲-۱۹۱)$$

به‌علاوه مرز در سطح بالایی، که اکنون با محیط انتقال حرارت دارد شرط زیر را ارضا می‌کند:

$$+k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h(T_{x=0} - T_\infty). \qquad (۲-۱۹۲)$$

بنابراین معادلات (۲-۱۹۰) و (۲-۱۸۵) برای $t = t_0$، (۲-۱۹۱) و (۲-۱۹۲) فرمولاسیون انتگرالی مساله برای بازه زمانی دوم را شرح می‌دهند.

سرانجام یک تغییر دمای تقریبی برای بازه زمانی دوم پیدا می‌کنیم. به‌دلیل این‌که مساله مانند مثال ۲-۲ در انتهای بازه زمانی دوم به پاسخ حالت پایا می‌رسد نمی‌توان از پروفایل کانتروویچ ناپایا برای رسیدن به پاسخ پایای مساله در جملات تابع پارامتری نامعین استفاده کرد. در این حالت یک روش مشابه آنچه در بازه زمانی اول استفاده شد، دنبال می‌شود. ساده‌ترین پروفایل ممکن از ترکیب یک تابع پارامتری نامعین در زمان و توابع مکانی مناسبی که در شرایط مرزی صدق می‌کنند، حاصل می‌شود. توجه به این نکته اهمیت دارد که این پروفایل باید به پروفایل حاکم بر بازه زمانی اول در $t = t_0$ و پاسخ پایا در $t \to \infty$ برسد.

پروفایل سهموی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$T(x,t) - T_\infty = Ax^2 + Bx + C.$$

برای مثال اگر دمای سطح بالایی را $\tau_1(t)$، به‌عنوان تابع پارامتری نامعین، قرار دهیم، این پروفایل ممکن است به شکل زیر نوشته شود:

$$T(x,t) - T_\infty = \left(\frac{q''}{h} - \tau_1\right)\frac{hx^2}{2kL} + \left(1 + \frac{hx}{k}\right)\tau_1. \qquad (۲-۱۹۳)$$

وقتی $t \to \infty$ معادله (۲-۱۹۳) به پاسخ پایای مساله تبدیل می‌شود.

$$T(x) - T_\infty = \left(1 + \frac{hx}{k}\right)\frac{q''}{h},$$

و وقتی‌که $t \to t_0$ پاسخ بازه زمانی اول حاصل می‌شود.

با وارد کردن معادله (۲-۱۹۳) در معادله (۲-۱۹۰) و انتگرال‌گیری با فرض مشخصات ثابت به معادله دیفرانسیل خطی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d\tau_1}{dt} + \left(\frac{m}{1+\mathrm{Bi}/3}\right)\left(\tau_1 - \frac{n}{m}\right) = 0, \qquad (۲-۱۹۴)$$

با شرط اولیه

$$\tau_1(t_0) = 0, \qquad (۲-۱۹۵)$$

که در آن $m = h/\rho cL$ ، $n = q''/\rho cL$ و $\mathrm{Bi} = hL/k$ می‌باشند.

پاسخ معادله (۲-۱۹۴) که در معادله (۲-۱۹۵) صدق می‌کند به این صورت است:

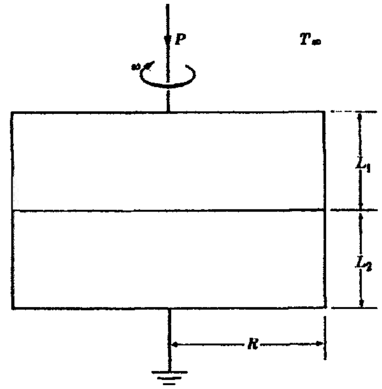
$$\tau_1(t) = \frac{n}{m}\left\{1 - \exp\left[-\frac{m(t-t_0)}{1+\mathrm{Bi}/3}\right]\right\}. \qquad (۲-۱۹۶)$$

در پایان با ترکیب معادلات (۲-۱۹۶) و (۲-۱۹۳) و بازآرایی آن، پروفایل کانتروویچ درجه اول برای بازه زمانی دوم مساله زمانی‌که $t \geq t_0$ است به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{T(x,t)-T_\infty}{q''L/k} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left[\frac{1}{\mathrm{Bi}} + \left(1 - \frac{x}{2L}\right)\frac{x}{L}\right]\left\{1 - \exp\left[-\frac{m(t-t_0)}{1+\mathrm{Bi}/3}\right]\right\}, \qquad (۲-۱۹۷)$$

پس ما سه مساله ساده را که حاوی اطلاعات کامل برای فرمولاسیون بود، در نظر گرفتیم. هدف اصلی‌مان توسعه دادن توانایی فرموله کردن مسائل در شکل‌های متمرکز، دیفرانسیلی و انتگرالی بوده است. فرمولاسیون مساله برای یک حالت فیزیکی معلوم نیازمند برقرار نمودن تعدادی فرضیات به عنوان بخشی از فرمولاسیون است. به همین دلیل در دو مثال بعدی فقط فیزیک مساله شرح داده شده است. سپس اطلاعات مورد نیاز برای فرمولاسیون در فرمولاسیون داده شده است.

مثال ۲-۴. دو دیسک استوانه‌ای جامد در جهت محور خود به علت بار خارجی P که در شکل ۲-۴۳ نشان داده شده است به هم فشار می‌آورند. در ابتدا سیستم ثابت است و در دمای محیط T_∞ قرار دارد. سپس به‌طور ناگهانی صفحه بالایی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω شروع به چرخش می‌کند. ضریب اصطکاک میان دیسک‌ها μ است. چگونه می‌توان مساله را فرموله کرد؟



شکل ۲-۴۳

ابتدا توجه کنید که ضرایب انتقال حرارت رو به بالا، رو به پایین و افقی به‌خاطر جابه‌جایی آزاد در جاذبه متفاوت هستند. ثانیاً انتقال حرارت از دیسک بالایی به علت جابه‌جایی آزاد چرخشی چند برابر افزایش می‌یابد. بنابراین ما چهار ضریب انتقال حرارت متفاوت رو به بالا h_1 و افقی h_3 برای دیسک چرخان و رو به پایین h_2 و افقی h_4 برای دیسک ثابت داریم. برای ساده‌سازی فرمولاسیون، دیسک‌ها همگن و ایزوتروپیک فرض شده‌اند.

I. فرمولاسیون دیفرانسیلی. مشخصه‌های دیسک‌های بالایی و پایینی به‌وسیله زیرنویس‌های ۱ و ۲ مشخص شده‌اند. قانون اول ترمودینامیک و قانون هدایت فوریه برای سیستم استوانه‌ای دوبعدی شکل ۲-۴۴ نوشته شده است و فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله به‌صورت زیر به‌دست آمده است:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}\right], \qquad (۲-۱۹۸)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}\right], \qquad (۲-۱۹۹)$$

با دو شرط اولیه و هشت شرط مرزی:[1]

$$T_1(r,z,0) = T_\infty, \qquad (۲-۲۰۰)$$

۱- همانند بازه زمانی دوم در مثال ۲-۳، انتخاب مبداء مختصات برای فرمولاسیون حاضر است و در اینجا بحث نخواهد شد.

$$T_2(r,z,0) = T_\infty, \quad (۲\text{-}۲۰۱)$$

$$+k_1\frac{\partial T_1(r,-L_1,t)}{\partial z} = h_1[T_1(r,-L_1,t) - T_\infty], \quad (۲\text{-}۲۰۲)$$

$$T_1(r,0,t) = T_2(r,0,t) \quad (۲\text{-}۲۰۳)$$

$$-k_1\frac{\partial T_1(r,0,t)}{\partial z} + \mu p(r)\omega r = -k_2\frac{\partial T_2(r,0,t)}{\partial z}, \quad (۲\text{-}۲۰۴)$$

$$-k_2\frac{\partial T_2(r,L_2,t)}{\partial z} = h_2[T_2(r,L_2,t) - T_\infty], \quad (۲\text{-}۲۰۵)$$

$$\frac{\partial T_1(0,z,t)}{\partial r} = 0, \quad (۲\text{-}۲۰۶)$$

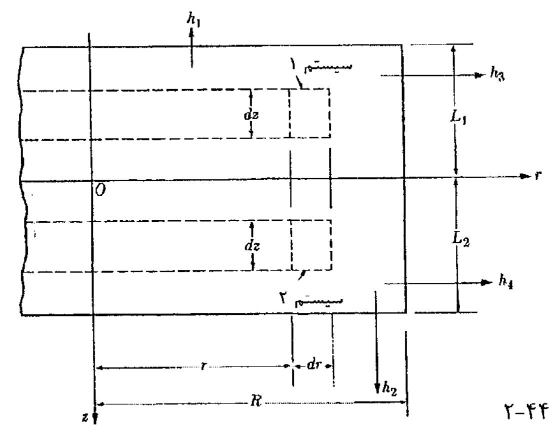
$$-k_1\frac{\partial T_1(R,z,t)}{\partial r} = h_3[T_1(R,z,t) - T_\infty], \quad (۲\text{-}۲۰۷)$$

$$\frac{\partial T_2(0,z,t)}{\partial r} = 0, \quad (۲\text{-}۲۰۸)$$

$$-k_2\frac{\partial T_2(R,z,t)}{\partial r} = h_4[T_2(R,z,t) - T_\infty], \quad (۲\text{-}۲۰۹)$$

که در آن $p(r)$ فشار موضعی بین دیسک‌هاست.

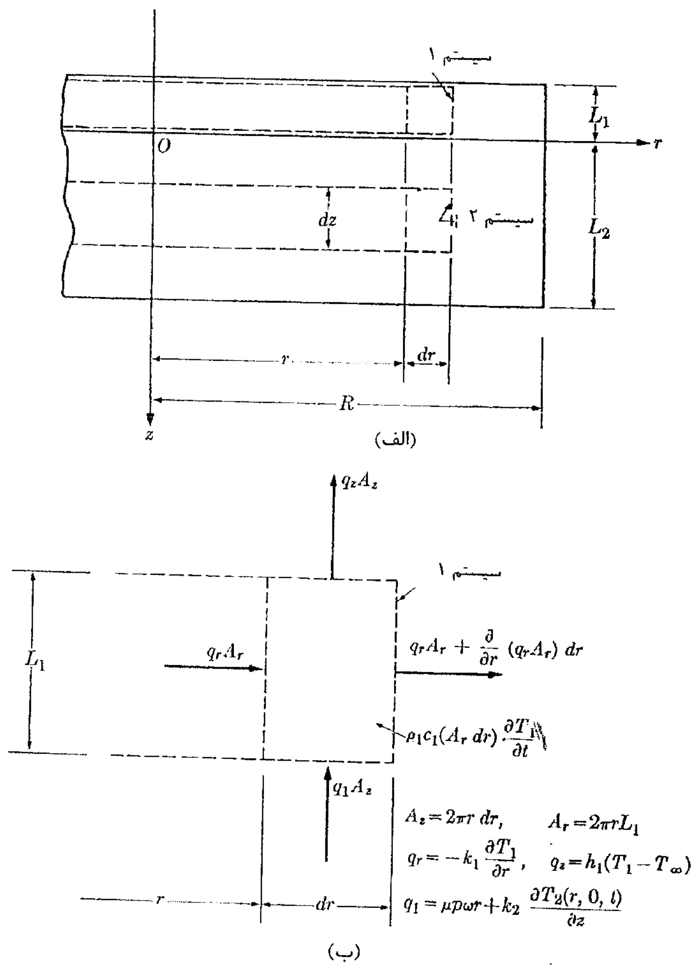
فرمولاسیون دیفرانسیلی مذکور به راحتی حاصل می‌شود ولی حل آن مشکل و یا حتی غیرممکن است. از طرفی دیگر هر زمان فیزیک اجازه دهد ممکن است که فرمولاسیون‌های ساده‌تر برای مساله مشابه به یک پاسخ منجر شوند. حال شرح می‌دهیم که چگونه طی ساده‌سازی‌های مشخصی می‌توان به فرمولاسیون دیفرانسیلی رسید.



شکل ۲-۴۴

(الف) دیسک بالایی به‌طور محوری متمرکز باشد: وقتی‌که $k_1 \gg k_2$ یا $L_1 \ll L_2$ باشد تغییر دمای محوری دیسک بالایی می‌تواند متمرکز باشد. بنابراین قانون اول ترمودینامیک، قانون هدایت فوریه و تعریف ضریب انتقال حرارت به‌کار گرفته شده برای سیستم ۱، شکل ۲-۴۵، معادله هدایت برای دیسک بالایی را بدین صورت نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{a_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) - \frac{h_1}{\rho_1 c_1 L_1}(T_1 - T_\infty) + \frac{\mu p(r)\omega r}{\rho_1 c_1 L_1} - \left[-k_2\frac{\partial T_2(r,0,t)}{\partial z}\right]. \quad (۲\text{-}۲۱۰)$$



شکل ۲-۴۵

به هر حال دقت کنید که برابری دمای سطح تماس بدین‌گونه است:

$$T_1(r,t) = T_2(r,0,t), \qquad (۲\text{-}۲۱۱)$$

برای دیسک پایینی می‌توانیم معادله (۲-۲۱۰) را به یک شرط مرزی تبدیل کنیم. [به معادله (۲-۲۱۲) مراجعه کنید] معادله هدایت برای دیسک پایینی بدون تغییر می‌ماند. بنابراین فرمولاسیون مساله برای این حالت به صورت زیر است:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}\right], \qquad (۲\text{-}۱۹۹)$$

با توجه به

$$T_2(r,z,0) = T_\infty, \qquad (۲\text{-}۲۰۱)$$

$$\frac{\partial T_2(r,0,t)}{\partial t} = \frac{a_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T_2(r,0,t)}{\partial r}\right] - \frac{h_1}{\rho_1 c_1 L_1}\left[T_2(r,0,t) - T_\infty\right] + \frac{\mu p \omega r}{\rho_1 c_1 L_1} - \frac{1}{\rho_1 c_1 L_1}\left[-k_2\frac{\partial T_2(r,0,t)}{\partial z}\right], \qquad (۲\text{-}۲۱۲)$$

$$-k_2\frac{\partial T_2(r,L_2,t)}{\partial z} = h_2\left[T_2(r,L_2,t) - T_\infty\right], \qquad (۲\text{-}۲۰۵)$$

$$\frac{\partial T_2(0,z,t)}{\partial r} = 0, \qquad (۲\text{-}۲۰۸)$$

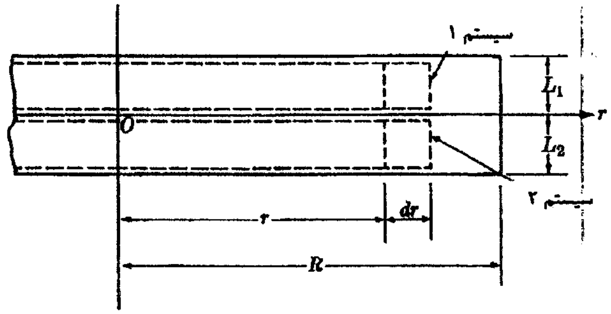
$$-k_2\frac{\partial T_2(R,z,t)}{\partial r} = h_4\left[T_2(R,z,t) - T_\infty\right]. \qquad (۲\text{-}۲۰۹)$$

توجه کنید که ضریب انتقال حرارت h_3 از فرمولاسیون مساله ناپدید شده است. (چه شرط مرزی در سطح جانبی دیسک بالایی صدق می‌کند؟ آیا ممکن است فرض عایق بودن در این صفحه برقرار باشد؟)

برای حالت خاص $L_1 \to 0$ این فرمولاسیون بدون تغییر می‌ماند به‌جز برای شرط مرزی داده شده با معادله (۲-۲۱۲) که به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$0 = -h_2\left[T_2(r,0,t) - T_\infty\right] + \mu p \omega r - \left[-k_2\frac{\partial T_2(r,0,t)}{\partial z}\right]. \qquad (۲\text{-}۲۱۳)$$

پس یاد گرفتیم که با صرف‌نظر کردن از تغییر محوری دما در دیسک بالایی فرمولاسیون مساله از دو معادله دیفرانسیلی پاره‌ای با دو شرط اولیه و هشت شرط مرزی به یک معادله دیفرانسیلی پاره‌ای با یک شرط اولیه و چهار شرط مرزی تبدیل می‌شود.



شکل ۲-۴۶

(ب) هر دو دیسک به‌طور محوری متمرکز باشند. وقتی که هر دو دیسک نازک باشند بطوری‌که L_2 و $L_1 \ll R$ یا وقتی‌که k_1 و k_2 بزرگ باشند، تغییر محوری دما در هر دو دیسک قابل صرف‌نظر می‌شود.

بنابراین با در نظر گرفتن سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۴۶ که به‌طور محوری متمرکز و به‌طور شعاعی دیفرانسیلی است، یک معادله هدایت به شکل زیر به‌دست خواهیم آورد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\bar{a}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\bar{h}}{\overline{\rho c L}}(T - T_\infty) + \frac{\mu p \omega r}{2\overline{\rho c L}}, \qquad (۲\text{-}۲۱۴)$$

که در آن T دمای معمول دیسک‌ها، $\bar{a} = \overline{kL}/\overline{\rho c L}$، $\overline{kL} = (k_1 L_1 + k_2 L_2)/2$، $\overline{\rho c L} = (\rho_1 c_1 L_1 + \rho_2 c_2 L_2)/2$ و $\bar{h} = (h_1 + h_2)/2$ است.

شرایط اولیه و مرزی حاکم بر معادله (۲-۲۱۴) بدین صورت است:

$$T(r,0) = T_\infty, \qquad (۲\text{-}۲۱۵)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0, \qquad (۲\text{-}۲۱۶)$$

$$-\bar{k}\frac{\partial T(R,t)}{\partial r} = \bar{h}\left[T(R,t) - T_\infty\right], \qquad (۲\text{-}۲۱۷)$$

که در آن $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2$ است. البته امکان جایگزینی معادله (۲-۲۱۷) با شرط تقریبی زیر هم وجود دارد:

$$\frac{\partial T(R,t)}{\partial r} \cong 0. \qquad (۲\text{-}۲۱۸)$$

II. فرمولاسیون انتگرالی. یک مساله فرمولاسیون انتگرالی دو بعدی شامل یک سطح نفوذی است که صفحه نمی‌باشد و این مطلب خارج از حوزه این بحث است. فرمولاسیون انتگرالی یک بعدی مطابق با حالت (ب) به‌دلیل سادگی به عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

در اینجا به حل چهار فرمولاسیون مذکور، نمی‌پردازیم زیرا این‌کار نیازمند معلوم بودن توزیع فشار $p(r)$ میان دیسک‌ها است که به این ترتیب کار انجام شده توسط اصطکاک تعیین می‌شود.

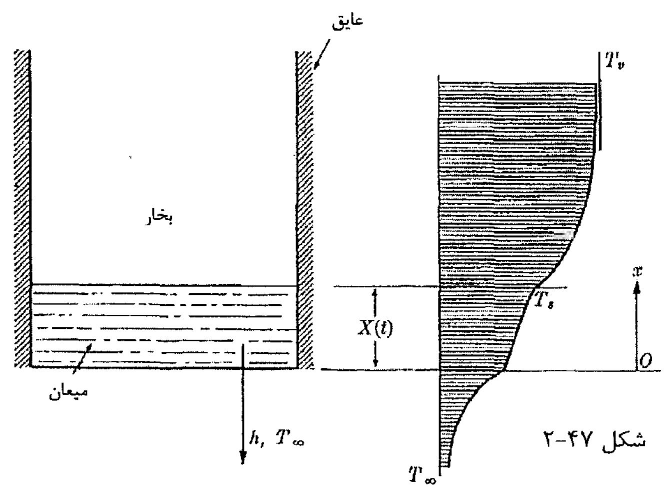
دو حالت معمول قابل فرض است:

(i) فشار ثابت، .ثابت $p =$

(ii) سایش ثابت، .ثابت $pr =$

که دومین حالت از نظر فیزیکی واقع گرایانه‌تر است و به نظر می‌رسد که برای به دست آوردن پاسخ مناسب‌تر باشد.[1]

مثال ۵-۲. یک ظرف با دیواره‌های نازک عایق‌شده شامل بخار آب داغ در دمای T_v است (شکل ۴۷-۲). سطح خارجی کف ظرف در تماس با هوای اطراف در دمای $T_\infty (T_\infty < T_v)$ قرار می‌گیرد. می‌خواهیم مساله را توسط عباراتی از ضخامت مایع $X(t)$ و دیگر متغیرهای مربوطه فرموله کنیم.



شکل ۴۷-۲

فرضیات و علل زیر می‌توانند در فرمولاسیون مساله مورد استفاده گیرند:

(الف) سطح تماس بخار – مایع در دمای اشباع T_s است.

(ب) مساله یک‌بعدی است زیرا سطح جانبی ظرف عایق‌بندی شده است.

(پ) افت دما در ضخامت کف ظرف ناچیز است.

(ت) خواص بخار و مایع ثابت است و به ترتیب توسط زیرنویس‌های ۱ و ۲ مشخص شده‌اند.

۱- دو پاسخ مسئله ۳۰-۳ مطابق حالات فشار و سایش را مقایسه کنید.

(ج) اختلاف چگالی ثابت میان بخار و مایع موجب یک جریان رو به پایین بخار با سرعت ثابت می‌شود.[1]

$$V = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\frac{dX}{dt}.$$

از این‌رو فرمولاسیون دیفرانسیلی یک‌بعدی دو منطقه‌ای در جهت x از کف ظرف و رو به بالا مورد محاسبه قرار می‌گیرد و به‌صورت زیر است:

بخار:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\frac{dX}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial x} = a_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2},$$

$$T_1(x,0) = T_v,$$

$$T_1(\infty,t) = T_v,$$

مایع:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2},$$

$$T_2(x,0) = T_s,$$

$$+k_2\frac{\partial T_2(0,t)}{\partial x} = h[T_2(0,t) - T_\infty],$$

که در سطح تماس مایع – بخار به‌وسیله شرایط مرزی زیر به هم مرتبط شده اند:

$$T_1(X,t) = T_2(X,t) = T_s,$$

$$-k_1\frac{\partial T_1(X,t)}{\partial x} = -k_2\frac{\partial T_2(X,t)}{\partial x} + \rho_2 h_{vc}\frac{dX}{dt},$$

(چند شرط مرزی برای فرمولاسیون مذکور موردنیاز است و چند شرط بیان شده است؟)

فرمولاسیون‌های دیفرانسیلی مسائل دومنطقه‌ای اغلب به سختی حل می‌شوند مخصوصاً وقتی‌که بازه‌ها محدود باشند. اگر چه با دلایل فیزیکی مناسب، ممکن است به‌طور تناوبی به مسائل ساده‌تری تبدیل شوند. در ابتدا بخار را در دمای اشباع در نظر می‌گیریم یا فرض می‌کنیم که میزان داغ بودن آن به اندازه کافی کم است که قابل صرف‌نظر باشد. بنابراین $T_1(x,t) = T_s$ و فرمولاسیون برای مایع (بدون زیرنویس) به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

$$T(x,0) = T_s,$$

۱- معادله (۱۱۴-۲) را ببینید.

$$+k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T(0,t) - T_\infty],$$

$$T(X,t) = T_s$$

$$-k\frac{\partial T(X,t)}{\partial x} + \rho h_{vc}\frac{dX}{dt} = 0. \quad (۲\text{-}۲۱۹)$$

حتی حل این فرمولاسیون ساده شده دارای پیچیدگی‌های ریاضیاتی است.

حال، یک فرمولاسیون شبه‌پایا را با ساده‌سازی بیشتر مساله در نظر می‌گیریم. به‌علت میزان میعان پایین که اغلب هم حاکم است، تغییرات انرژی داخلی با زمان را می‌توان برای مایع قابل صرف‌نظر دانست. بنابراین فرمولاسیون قبلی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (۲\text{-}۲۲۰)$$

$\longrightarrow T = ax + b \Longrightarrow$ T را یابیم ... در رابطه ۲۲۳ قرار داد و مشتق می‌گیریم

$$+k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T(0,t) - T_\infty], \quad (۲\text{-}۲۲۱)$$

$$T(X,t) = T_s \quad (۲\text{-}۲۲۲)$$

$$-k\frac{\partial T(X,t)}{\partial x} + \rho h_{vc}\frac{dX}{dt} = 0. \quad (۲\text{-}۲۲۳)$$

توجه کنید که ناپایایی فرمولاسیون فقط با شرط مرزی معادله (۲-۲۲۳) بیان شده است. حل حالت مذکور به راحتی انجام می‌شود. پاسخ T از معادلات (۲-۲۲۰)، (۲-۲۲۱) و (۲-۲۲۲) و قرار دادن نتایج در معادله (۲-۲۲۳) نتیجه می‌دهد:

$$\rho h_{vc}\frac{dX}{dt} = \frac{T_s - T_\infty}{X/k + 1/h}, \quad (۲\text{-}۲۲۴)$$

یا

$$\frac{1}{k}X\,dX + \frac{1}{h}dX = \left(\frac{T_s - T_\infty}{\rho h_{vc}}\right)dt, \quad (۲\text{-}۲۲۵)$$

با توجه به

$$X(0) = 0. \quad (۲\text{-}۲۲۶)$$

پاسخ معادله (۲-۲۲۵) که معادله (۲-۲۲۶) را ارضا کند:

$$\frac{X(t)}{k/h} = -1 + \left[1 + \frac{2h^2(T_s - T_\infty)t}{k\rho h_{vc}}\right]^{1/2}. \quad (۲\text{-}۲۲۷)$$

ساده‌سازی نهایی، حذف افت دما در مایع است. این امر وقتی‌که k بزرگ یا t کوچک باشد، فرض معتبری خواهد بود. از این رو مقاومت حرارتی X/k مایع در معادله (۲-۲۲۴) را رها می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\rho h_{vc}\frac{dX}{dt} = \frac{T_s - T_\infty}{1/h}, \quad (۲\text{-}۲۲۸)$$

که در معادله (۲-۲۲۶) صدق می‌کند و انتگرال آن به پاسخ زیر منجر می‌شود:

$$X(t) = \frac{h(T_s - T_\infty)}{\rho h_{vc}}t, \quad (۲\text{-}۲۲۹)$$

[شکل خاص معادله (۲-۲۲۷) وقتی $k \to \infty$ یا $t \to 0$ چگونه است؟]

مراجع

1 L. PRANDTL and O. G. TIETJENS, *Fundamentals of Hydro- and Aerodynamics*. New York: McGraw-Hill, 1934

2 H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959.

3 R. B. BIRD, W. E. STEWART, and E. N. LIGHTFOOT, *Transport Phenomena*. New York: Wiley, 1960.

4 A. H. SHAPIRO, Class Notes on "Advanced Fluid Mechanics." MIT 1956.

5 A. H. SHAPIRO, *The Dynamic and Thermodynamic of Compressible Flow*, New York: The Roland Press, 1953.

6 J. H. KEENAN, Class Notes on "Advanced Engineering Thermodynamics." MIT 1955.

7 J. H. KEENAN, *Thermodynamics*. New York: Wiley, 1941.

8 M. W. ZEMANSKY, *Heat and Thermodynamics*. New York: McGraw-Hill, 1957.

9 G. J. VAN WYLEN, *Thermodynamics*. New York: Wiley, 1959.

10 J. C. HUNSAKER and B.G. RIGHTMIRE, *Engineering Application of Fluid Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1947.

11 I. H. SHAMES, *Mechanics of Fluids*. New York: McGraw-Hill, 1962.

12 R. ARIS, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962.

13 M. JAKOB and G. A. HAWKINS, *Element of Heat Transfer*. New York: Wiley, 1957.

14 M. JAKOB, *Heat Transfer I*. New York: Wiley, 1949.

15 T. N. CETINKALE and M. FISHENDEN, "Thermal Conductance of Metal Surface in Contact," *General Discussion on Heat Transfer*. IME, London and ASME, New York, 271(1951).

16 H. FENECH and W. M. ROHSENOW, "Prediction of Thermal Conductance of Metallic Surface in Contact." *Trans. ASME, C, Journal of Heat Transfer*, 85, 15(1963).

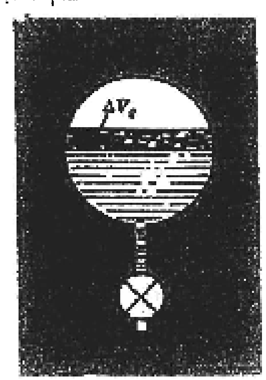
17 A. L. LONDON and R. A. SEBAN, "Rate of Ice Formation." Trans. ASME, 65, 771 (1943).
18 M. A. BIOT, "New Method in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structure." *Journal of Aeronautical Science*, 24, 857 (1957).

مسائل

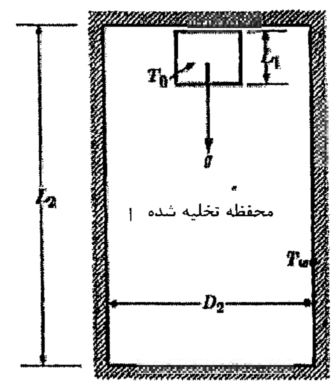
۲-۱. یک محفظه شامل مایع و بخار آب در تعادل، در دمایی کمی پایین‌تر از دمای بحرانی است. یک پوند از مایع توسط شیری که در زیر محفظه قرار دارد، به درون آن راه می‌یابد. محفظه توسط حمام دما ثابتی احاطه شده تا دمای محتویاتش نسبت به دمای اولیه تغییر نکند (شکل ۴۸-۲). حجم مخصوص مایع در مقایسه با بخار آن قابل صرف‌نظر کردن نیست.

(الف) رابطه‌ای برای افزایش حجم فاز بخار در محفظه با استفاده از خواص اشباع مایع و بخار پیدا کنید.

(ب) رابطه‌ای برای حرارت منتقل شده از حمام به محتویات محفظه در نتیجه پایین آمدن سطح مایع و فقط با استفاده از خواص اشباع پیدا کنید.



شکل ۴۸-۲

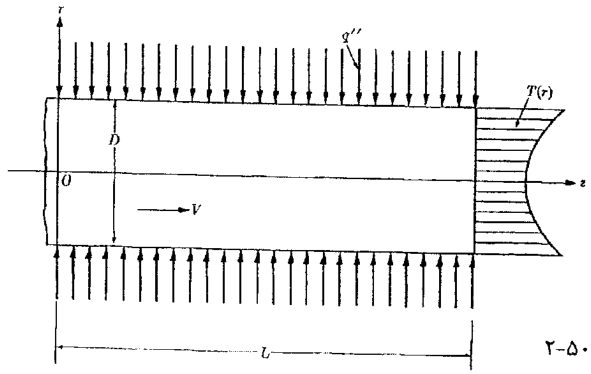


شکل ۴۹-۲

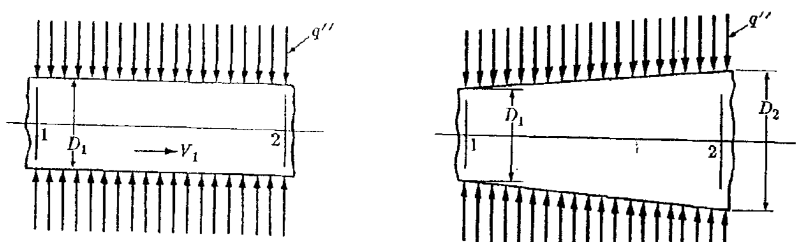
۲-۲. صفحه مسی مربعی با ضخامت σ که در دمای اولیه T_0 قرار دارد در یک محفظه عمودی خالی که دیواره‌هایش در دمای ثابت $T_w (>> T_0)$ تنظیم شده است (شکل ۴۹-۲). با استفاده از داده‌های زیر دمای صفحه را وقتی به پایین محفظه می‌رسد، محاسبه کنید.

$$L_1 = 6 \text{ in.} \qquad \delta = \tfrac{1}{4} \text{ in.}$$
$$L_2 = 40 \text{ ft} \qquad D_2 = 10 \text{ ft}$$
$$\text{مس}\begin{cases} \rho_1 = 500 \text{ lbm/ft}^3 \\ c_1 = 0.1 \text{ Btu/lbm}\cdot{}^\circ\text{F} \end{cases} \qquad T_w = 2000\,{}^\circ\text{R}$$
$$\epsilon_1 = 0.8 \qquad T_0 = 60\,{}^\circ\text{F}$$
$$\epsilon_2 = 0.4 \qquad g = 32.2 \text{ ft}^2/\text{sec}$$

۲-۳. یک میله جامد متحرک در یک لوله در اثر شار حرارتی یکنواخت q'' اعمال‌شده به سطح جانبی لوله، ذوب می‌شود و فرض می‌شود که پروفایل سرعت، سهموی است (شکل ۵۰-۲). چگالی ρ جامد به‌طور تقریبی برابر با چگالی سیال است. سرعت جامد V، دمای جامد در ورودی T_0، گرمای نهان ذوب h_{fs} و گرمای مخصوص جامد و سیال به‌ترتیب C_s و C_f است. اصطکاک میان میله جامد و لوله ناچیز است و هدایت محوری در مقایسه با جریان آنتالپی در جامد و سیال ناچیز است. اگر توزیع شعاعی دما برای سیال سهموی فرض شود، توزیع دما در فاصله L از ورودی لوله را به‌دست آورید.



شکل ۵۰-۲



شکل ۵۱-۲

۲-۴. جریان‌های پایای یک‌بعدی از سیال بی‌اصطکاک تراکم‌ناپذیر در یک لوله با سطح مقطع ثابت و یک دیفیوزر هم طول با آن در نظر بگیرید (شکل ۵۱-۲). بر سطح جانبی لوله و دیفیوزر شار حرارتی یکنواخت q'' اعمال می‌شود. قطر ورودی و سرعت ورودی دیفیوزر با لوله برابر است.

(الف) دمای خروجی دیفیوزر بالاتر از دمای خروجی لوله است یا پایین‌تر؟ مبنای خود را بر توجیه فیزیکی قرار دهید نه ریاضیات.

(ب) در برابر یک تحلیل ساده که هدایت محوری را ناچیز در نظر می‌گیرد از پاسخ خود دفاع کنید.

۲-۵. مثال ۲-۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید که بخار در دمای اشباع و دمای مایع نیز متمرکز باشد. به‌طور مستقیم قانون اول ترمودینامیک را برای مایع به‌کار گیرید. اتلاف حرارت از کف مایع را برحسب ضریب انتقال حرارت بیان کنید. نتایج را با معادله (۲-۲۲۸) مقایسه کنید.

۲-۶. یک حجم کنترل دیفرانسیلی سه‌بعدی را در مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی در نظر بگیرید.

(الف) شکل خاص ∇T و $\nabla^2 T$ در این مختصات را به‌دست آورید (در اینجا T هر مشخصه عددی را در بر می‌گیرد.)

(ب) معادله هدایت را برای سیال همگن، ایزوتروپیک و بی‌اصطکاک تراکم‌ناپذیر، با پیروی از پنج مرحله اصلی فرمولاسیون به‌دست آورید.

(پ) به کمک قسمت (الف) معادله (۲-۹۱) را در شکل کارتزین، استوانه‌ای و کروی بنویسید.

(ت) نتایج قسمت (ب) و (پ) را مقایسه کنید.

۲-۷. مثال ۲-۱ را در نظر بگیرید. با استفاده از شکل انتگرالی معادله هدایت و فرض:

(الف) توابع دایره‌ای در هر دو جهت

(ب) تابع دایره‌ای برای وجه کوچک‌تر و یک تابع پارامتر نامعین برای وجه بلندتر، دمای پایای گرمکن را پیدا کنید.

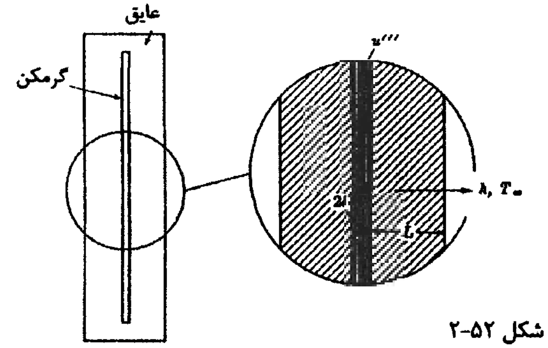
۲-۸. فرمولاسیون متمرکز و انتگرالی مثال ۲-۳ را از فرمولاسیون دیفرانسیلی شروع کنید.

راهنمایی: برای فرمولاسیون انتگرالی مناسب در بازه زمانی اول، از فرمولاسیون دیفرانسیلی در بازه $(0, \tau_0)$ انتگرال بگیرید. نتایج را با فرمول انتگرال لایبنیتز بازنویسی کنید:

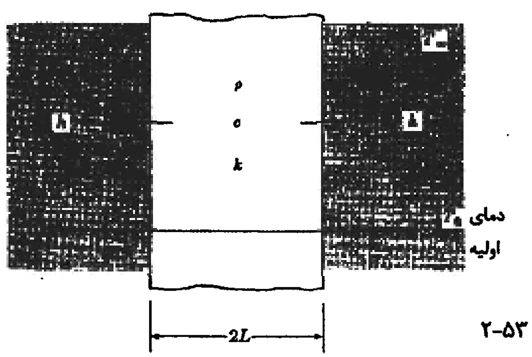
$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} F(x,\xi)d\xi = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x}d\xi + F(x,b)\frac{db}{dx} - F(x,a)\frac{da}{dx}.$$

۲-۹. برای یک هدف گرمایشی، در صفحه فلزی مسطحی با ضخامت 2σ انرژی داخلی به‌صورت الکتریکی تولید می‌شود. برای به‌دست آوردن دمای سطحی پایین و به‌منظور عایق‌بندی الکتریکی، این صفحه توسط یک عایق الکتریکی با ضخامت L که از نظر حرارتی هم هادی ضعیفی است، پوشیده شده است (شکل ۲-۵۲). گرم‌کن در ابتدا در دمای T_∞ محیط قرار دارد و ناگهان انرژی داخلی u''' در آن تولید می‌شود. تحلیل یک‌بعدی را برای آن انجام دهید.

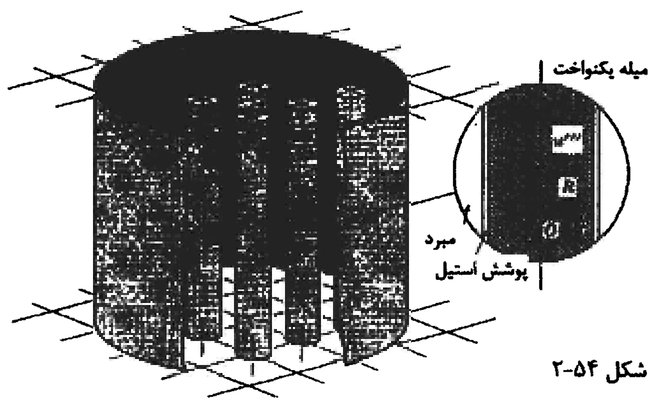
۲-۱۰. یک صفحه مسطح با ضخامت $2L$ دارای دمای اولیه یکنواخت T_0 است و ناگهان به یک حمام با دمای ثابت T_∞ وارد می‌شود (شکل ۲-۵۳). ضریب انتقال حرارت h است. چگالی، ظرفیت حرارتی، و ضریب هدایت حرارتی صفحه به‌ترتیب ρ، c و k هستند مساله را فرموله کنید.



شکل ۲-۵۲



شکل ۲-۵۳



شکل ۲-۵۴

۲-۱۱. هسته راکتور حوضچه‌ای از پیل‌های سوختی استوانه‌ای ساخته شده است، هر کدام از یک میله اورانیوم با شعاع R و پوشش فولاد ضد زنگ با ضخامت ناچیز تشکیل شده است (شکل

۵۴-۲). راکتور در ابتدا در یک دمای یکنواخت T_∞ قرار دارد که ناگهان انرژی داخلی به‌طور یکنواخت در میله‌ها به‌صورت زیر تولید می‌شود:

$$u'''/u_0''' = 1 - (r/R)^2,$$

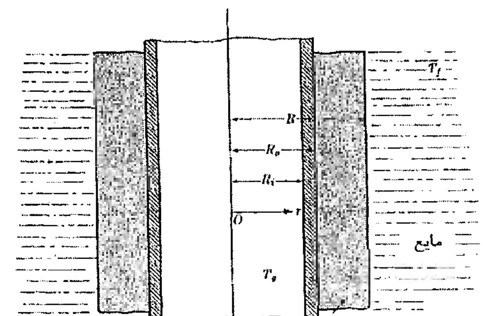
که در آن u_0''' انرژی داخلی تولید شده در خط مرکزی است. دمای مبرد در T_∞ ثابت نگه داشته می‌شود. ضریب انتقال حرارت بزرگ است. مساله را فرموله کنید.

۲-۱۲. یک کره جامد با شعاع R که در دمای اولیه T_0 قرار دارد را در آب در حال جوش با دمای T_∞ می‌اندازیم. مساله را فرموله کنید.

۲-۱۳. مساله ناپایای مثال ۱-۲ را برای ضریب انتقال حرارت بزرگ دوباره فرموله کنید. فرض کنید که گرم‌کن در ابتدا در دمای محیط T_∞ است و ناگهان انرژی داخلی یکنواخت u''' در آن تولید می‌شود.

۲-۱۴. فرمولاسیون متمرکز مثال ۲-۲ و ۳-۲ را در نظر بگیرید. انتروپی کل تولید شده در این مثال‌ها را به‌دست آورید.

۲-۱۵. دور یک لوله که توسط جریان داخلی گازی به دمای T_g سرد می‌شود، یک مایع در دمای انجماد T_f در حال یخ زدن است (شکل ۵۵-۲). مساله را براساس موقعیت استوانه‌ای سطح تماس مایع – جامد R و دیگر پارامترهای درگیر در مساله فرموله کنید.



شکل ۵۵-۲

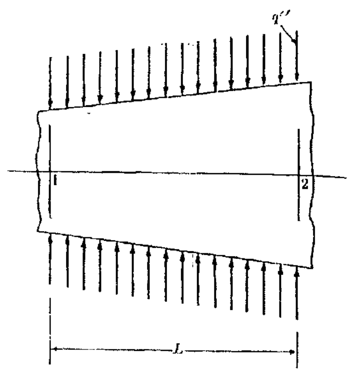
۲-۱۶. فرمولاسیون دیفرانسیلی مثال ۵-۲ که توسط معادله (۲۱۹-۲) ارائه شده است را در نظر بگیرید.

(الف) فرمولاسیون انتگرالی مطابق با آن را با پیروی از روش فیزیکی پیدا کنید.

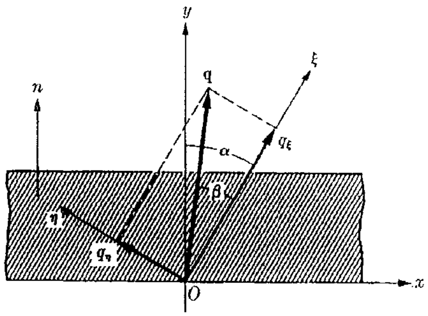
(ب) یک پاسخ تقریبی از مساله به‌صورت چند جمله‌ای به‌دست آورید.

۲-۱۷. جریان یک‌بعدی ناپایای سیال بدون اصطکاک تراکم‌ناپذیر در یک دیفیوزر را در نظر بگیرید. دیفیوزر تحت شار حرارتی محیطی و یکنواخت q'' قرار دارد (شکل ۵۶-۲). تولید انتروپی

کل و محلی در این جریان را با فرض این‌که هدایت محوری (الف) ناچیز و (ب) غیرقابل صرف‌نظر باشد، پیدا کنید.



شکل ۵۶-۲



شکل ۵۷-۲

۲-۱۸. یک جسم غیر ایزوتروپیک همگن و دوبعدی را که صفحه مسطحی از مواد قابل ورقه کردن مانند شکل ۵۷-۲ است، در نظر بگیرید. ورقه‌ای شدن صفحه یک زاویه α با بردار عمود n وارد بر سطح می‌سازد. فرض کنید که مقادیر حداقل و حداکثر ضریب هدایت حرارتی به ترتیب k_ξ و k_η در جهت‌های ξ و η هستند. (این جهت‌ها و مقادیر ضریب هدایت مطابق با آن‌ها به‌ترتیب محورهای اصلی و مقادیر اصلی نامیده می‌شود. نشان داده می‌شود که مقادیر ضریب هدایت در جهات دیگر به‌صورت یک بیضی که محورهای آن مقادیر اصلی ضریب هدایت هستند، تغییر می‌کنند). اجزاء بردار شار حرارتی ξ و η به‌صورت زیر هستند:

$$q_\xi = -k_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad , \quad q_\eta = -k_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta}.$$

(الف) نشان دهید که اجزاء بردار شار حرارتی در x و y به این صورتند:

$$q_x = -k_\xi \sin\alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} + k_\eta \cos\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$q_y = -k_\xi \cos\alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - k_\eta \sin\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

(ب) q_x و q_y را به‌صورت عبارتی از $\partial T/\partial x$ و $\partial T/\partial y$، بیان کرده و نتایج را طبق صورت هندسی زیر بازآرایی کنید:

$$q_x = -\left(k_\xi \sin^2\alpha + k_\eta \cos^2\alpha\right)\frac{\partial T}{\partial x} - \left(k_\xi - k_\eta\right)\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial T}{\partial y},$$

$$q_y = -\left(k_\xi - k_\eta\right)\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial T}{\partial x} - \left(k_\xi\cos^2\alpha + k_\eta\sin^2\alpha\right)\frac{\partial T}{\partial y}\cdot$$

(پ) نشان دهید که معادله هدایت دو بعدی برای مواد غیر ایزوتروپیک همگن بدین صورت است:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \left(k_\xi\sin^2\alpha + k_\eta\cos^2\alpha\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(k_\xi\cos^2\alpha + k_\eta\sin^2\alpha\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(k_\xi - k_\eta\right)\cos 2\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}\cdot$$

(ت) صورت خاص معادله فوق برای مواد ایزوتروپیک همگن چگونه خواهد بود؟

(ج) چه مقداری برای ضریب هدایت باید حاصل شود اگر صفحه در میان صفحات هم‌دمای یک دستگاه آزمایش ضریب هدایتی قرار گیرد؟

(چ) نشان دهید تحت شرایط قسمت (ج) داریم:

$$\tan\beta = \frac{q_\eta}{q_\xi} = \frac{k_\eta(\partial T/\partial\eta)}{k_\xi(\partial T/\partial\xi)} = \frac{k_\eta[\sin\alpha(\partial T/\partial y) - \cos\alpha(\partial T/\partial x)]}{k_\xi[\cos\alpha(\partial T/\partial y) + \sin\alpha(\partial T/\partial x)]};$$

همچنین نشان دهید که با $\partial T/\partial x = 0$،

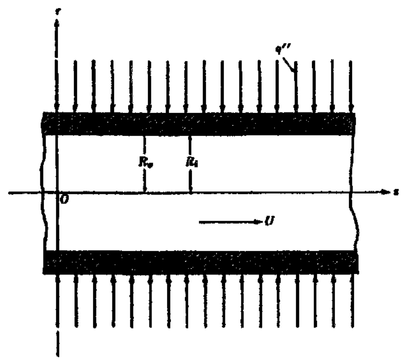
$$\tan\beta = \frac{k_\eta}{k_\xi}\tan\alpha,$$

که اشاره به $\beta < \alpha$ دارد و بردار شار حرارتی دیگر بر صفحات هم‌دما عمود نیست، که اگر مواد ایزوتروپیک بودند، می‌توانست عمود باشد.

۲-۱۹. یک سیال بدون اصطکاک غیرقابل تراکم در یک لوله به طور پایا با سرعت U جریان دارد (شکل ۲-۵۸). دمای ورودی سیال T_0 است. دماهای اولیه لوله و سیال یکسان و برابر دمای ورودی سیال هستند. ناگهان شار حرارتی یکنواخت q'' به سطح خارجی لوله اعمال می‌گردد. هدایت محوری ناچیز است.

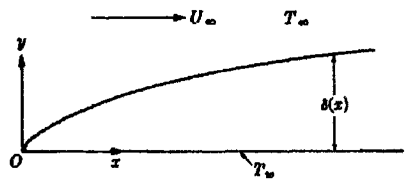
فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله را فقط با به‌کارگیری یکی از فرضیات در هر دفعه به‌دست آورید: (i) بدون هیچ فرضی (ii) ضخامت لوله ناچیز باشد. (iii) ضخامت لوله کم باشد. (iv) سیال به‌طور شعاعی متمرکز و ضریب انتقال حرارت (الف) بزرگ یا (ب) متوسط است (v) سیال و لوله به‌طور شعاعی متمرکز هستند.[1]

۱- توجه کنید که یک فرمولاسیون براساس فرض (i) به‌سختی حل می‌شود ولی دقیق‌تر است. فرمولاسیون‌های براساس مفروضات (ii) و (iii) بدون هیچ اثری و یا فقط با اثر جزیی دیواره لوله مدل‌هایی برای مسائل جریان سیال هستند. از طرف دیگر در فرمولاسیون‌هایی که از فرضیات (iv الف) و (iv ب) استفاده می‌شود تغییرات شعاعی در لوله امکان دارد ولی در سیال خیر و برای مسائل تنش حرارتی مناسبند. فرمولاسیون بر پایه فرض (v) که به‌طور کامل در جهت شعاعی متمرکز شده است، ساده‌ترین مدلی است که می‌تواند در محاسبه دمای توده سیال در محل موردنظر مورد استفاده قرار گیرد.



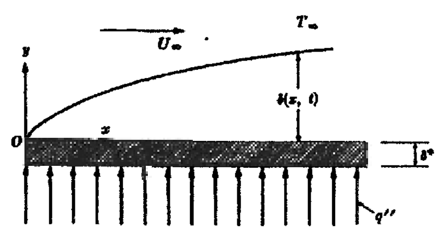
شکل ۲-۵۸

۲-۲۰. یک سیال بدون اصطکاک غیرقابل تراکم با سرعت U_∞ به‌طور پایا بر روی صفحه نیمه‌بینهایت با ضخامت ناچیز جریان دارد (شکل ۲-۵۹). دمای سیال و دیواره به‌ترتیب T_∞ و T_W است. ضخامت عمق نفوذ پایا (لایه مرزی) مربوط به دمای وابسته به x و سایر متغیرها را بیابید.



شکل ۲-۵۹

۲-۲۱. یک سیال بدون اصطکاک غیرقابل تراکم با سرعت U_∞ و به‌طور پایا بر روی یک صفحه نازک نیمه بینهایت با ضخامت δ^* جریان دارد (شکل ۲-۶۰). دمای اولیه سیال و دیواره برابر T_∞ است. ناگهان شار حرارتی یکنواخت q'' به کف صفحه اعمال می‌شود. نفوذ ناپایای شار حرارتی در سیال را بیابید.



شکل ۲-۶۰

بخش II : راه حل

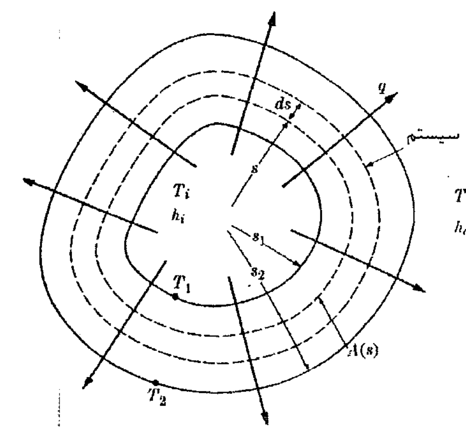
فصل سوم

مسائل یک بعدی پایا، توابع بسل

فرمولاسیون متمرکز و انتگرالی مسائل یک بعدی پایا تنها شامل حل معادلات جبری می‌باشد. ولی فرمولاسیون دیفرانسیلی همان مسائل شامل حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول یا دوم است. همان‌طور که در فصل ۲ اشاره کردیم، فرض می‌کنیم که خواننده روش‌های حل معادلات مرتبه اول یا دوم خطی با ضرایب ثابت را می‌داند. از این‌رو برای مسائل پایای یک بعدی حاصل از چنین معادلاتی، راه حل ارائه خواهیم داد. برای مسائلی که ضریب هدایت حرارتی آن‌ها به دما وابسته است، با استفاده از فرمولاسیون دیفرانسیلی به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم حاصل می‌شود، و برای مسائلی که ضریب هدایت حرارتی آن‌ها به مکان وابسته است، و همچنین برای سطوح گسترش‌یافته با مقطع عرضی متغیر، فرمولاسیون دیفرانسیلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر را حاصل می‌کند. در بخش‌های ۳-۵ و ۳-۶، روش‌های مناسب برای حل هر دو نوع این معادلات را معرفی می‌کنیم. ابتدا در نظر داریم که یک مساله کلی را که بیان‌کننده تعدادی از مفاهیم مهم است، ارائه دهیم.

۳-۱. یک مساله کلی

یک استوانه تو خالی با دیواره نازک، که ضخامت دیواره آن در تمام مقطع عرضی ثابت است را در نظر بگیرید. این پوسته در شکل ۳-۱ نشان داده شده است. این استوانه یا پوسته شامل سیالی با دمای T_i بوده که دمای اطراف آن نیز T_o یا دمای محیط می‌باشد و $T_i > T_o$ است. ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی به ترتیب h_i و h_o می‌باشند. می‌خواهیم توزیع دما و میزان انتقال حرارت از این استوانه یا پوسته را به‌دست آوریم.



شکل ۱-۳

روش حلی که در اینجا استفاده شده است یک روش متداول برای مسائل یک بعدی است که در آن q در هر مقطع عرضی ثابت است. دو مرحله اول فرمولاسیون (بخش ۹-۲ را ببینید) چنین نتیجه می‌دهد:

$$d[q_s A(s)] = 0, \tag{۳-۱}$$

و داریم:

$$q = q_s A(s) = \text{ثابت}, \tag{۳-۲}$$

که در آن s نشان‌دهنده متغیر مکان و $A(s)$ متناظر با سطح انتقال حرارت است. مرحله سوم فرمولاسیون به صورت زیر است:

$$q_s = -k\frac{dT}{ds}. \tag{۳-۳}$$

مرحله چهارم شامل جایگزینی معادله (۳-۳) درون معادله (۲-۳) می‌باشد. با بازآرایی و انتگرال‌گیری بین سطوح داخلی و خارجی با فرض این‌که k ثابت است، خواهیم داشت:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{(1/k)\int_{s_1}^{s_2} ds/A(s)} = \frac{T_1 - T_2}{R}, \tag{۳-۴}$$

که در آن:

$$R = \frac{1}{k}\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{A(s)} \tag{۳-۵}$$

که این عبارت مقاومت هدایتی نامیده می‌شود و زیرنویس ۱و۲ به‌ترتیب نشان‌دهنده سطوح داخلی و خارجی است. معادله (۴-۳) تشابه زیادی به قانون اهم برای جریان الکتریکی پایا دارد،

$$i = \frac{E_1 - E_2}{R_e},$$

انتقال حرارت هدایتی q متناظر با جریان الکتریکی i، تفاضل دمای $T_1 - T_2$ متناظر با تفاضل پتانسیل $E_1 - E_2$، و مقاومت هدایتی R متناظر با مقاومت الکتریکی R_e می‌باشد. (شکل دیفرانسیلی قانون اهم چگونه است؟)

از آنجایی‌که دماهای محیط بسیار راحت‌تر از دماهای سطوح اندازه‌گیری می‌شود، متداول است که q برحسب دمای محیط بیان شود. با استفاده از آخرین مرحله فرمولاسیون داریم:

$$q = \frac{T_i - T_1}{1/h_i A(s_1)} = \frac{T_i - T_1}{R_i}, \tag{۳-۶}$$

که در آن

$$R_i = \frac{1}{h_i A(s_1)} \tag{۳-۷}$$

R_i مقاومت جابه‌جایی بین سیال داخل و سطح داخلی دیواره است؛ به‌طور مشابه داریم:

$$q = \frac{T_2 - T_0}{1/h_o A(s_2)} = \frac{T_2 - T_0}{R_o}, \tag{۳-۸}$$

که در آن

$$R_o = \frac{1}{h_o A(s_2)} \tag{۳-۹}$$

R_o مقاومت جابه‌جایی خارجی است. با حل معادلات (۴-۳)، (۶-۳) و (۸-۳) برای اختلاف دمای متناظرشان، سپس، به کار بردن نتیجه به‌صورت نظیر به نظیر باعث حذف T_1 و T_2 شده و خواهیم داشت:

$$q = \frac{T_i - T_0}{R_i + R + R_0}. \tag{۳-۱۰}$$

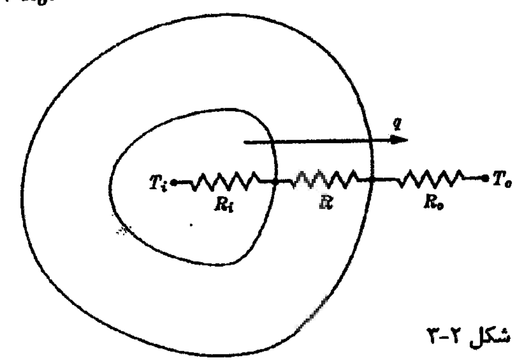
نتیجه مشابه‌ای را می‌توان با در نظر گرفتن تشابه بین نفوذ حرارتی و جریان الکتریکی به راحتی به‌دست آورد. بنابراین مساله مشابه تعیین جریان الکتریکی از سه مقاومت بهم پیوسته سری خواهد بود. (شکل ۲-۳)

بعضی مواقع متداول است که برای سهولت، معادله (۱۰-۳) را برحسب ضریب کلی انتقال حرارت U نوشت،که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q = UA(T_i - T_o), \tag{۳-۱۱}$$

و

$$\frac{1}{UA} = R_i + R + R_o. \tag{۳-۱۲}$$



شکل ۲-۳

از آنجایی‌که U به A وابسته است، باید برای تعیین U یک سطح را انتخاب کنیم:

$$UA = U_i A(s_1) = U_o A(s_2),$$

که در آن U_i و U_o به‌ترتیب نشان‌دهنده ضرایب کلی انتقال حرارت برحسب سطوح داخلی و خارجی می‌باشد، به‌عنوان مثال ضریب U_o را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{A(s_2)/A(s_1)}{h_i} + \frac{A(s_2)}{k}\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{A(s)} + \frac{1}{h_o}. \tag{۳-۱۳}$$

برای تعیین توزیع دمای مساله، معادله (۳-۴) را دوباره در نظر گرفته و از مکان اختیاری s تا سطح خارجی[1] انتگرال می‌گیریم:

$$q = \frac{T - T_2}{(1/k)\int_s^{s_2} ds/A(s)}, \tag{۳-۱۴}$$

که در آن T دمای مکان s است. حذف T_2 بین معادلات (۳-۸) و (۳-۱۴) نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$q = \frac{T - T_o}{(1/k)\int_s^{s_2} ds/A(s) + 1/h_o A(s)}, \tag{۳-۱۵}$$

۱- تعریف دیگری برای توزیع دمایی، از طریق انتگرال‌گیری از سطح داخلی تا مکان دلخواه s حاصل می‌شود.

در آخر، با قرار دادن معادله (۳-۱۱) در معادله (۳-۱۳) و بازآرایی آن نتیجه‌ای برحسب U_o حاصل می‌شود و توزیع دما به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{T - T_o}{T_i - T_o} = U_o\left[\frac{A(s_2)}{k}\int_s^{s_2}\frac{ds}{A(s)} + \frac{1}{h_o}\right]. \tag{۳-۱۶}$$

با استفاده از روش دیگر، یعنی فرمولاسیون متداول مساله، ابتدا توزیع دما و سپس میزان انتقال حرارت به‌دست می‌آید. بنابراین با استفاده از چهار مرحله اول فرمولاسیون، معادله حاکم حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{ds}\left[A(s)\frac{dT}{ds}\right] = 0, \tag{۳-۱۷}$$

شرایط مرزی از آخرین مرحله فرمولاسیون حاصل می‌شوند:

$$+k\frac{dT(s_1)}{ds} = h_i[T(s_1) - T_i], \tag{۳-۱۸}$$

$$-k\frac{dT(s_2)}{ds} = h_o[T(s_2) - T_o],$$

با حل معادله (۳-۱۷) خواهیم داشت:

$$T = C\int^s \frac{ds}{A(s)} + D, \tag{۳-۱۹}$$

با جاگذاری معادله (۳-۱۹) در معادله (۳-۱۸) داریم:

$$+\frac{kC}{A(s_1)} = h_i\left[C\int^{s_1}\frac{ds}{A(s)} + D - T_i\right], \tag{۳-۲۰}$$

$$-\frac{kC}{A(s_2)} = h_o\left[C\int^{s_2}\frac{ds}{A(s)} + D - T_o\right].$$

با قرار دادن مقادیر C و D حاصل از معادله (۳-۲۰)، در معادله (۳-۱۹) همان توزیع دمای قبلی یعنی معادله (۳-۱۶) حاصل می‌شود. حال می‌توانیم انتقال حرارت را با وارد کردن معادله (۳-۱۶) در ترکیبی از معادلات (۳-۲) و (۳-۳) به‌دست آوریم، که با این کار همان نتیجه قبلی یعنی معادله (۳-۱۰) حاصل می‌شود.

برای راحتی کار، روند مساله پیش‌رو را در سه حالت مهم در نظر می‌گیریم: مختصات کارتزین، استوانه‌ای، و کروی. ضرایب انتقال حرارت کلی براساس مساحت سطح خارجی و توزیع دمای این مختصات‌ها به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_o} \qquad \text{کارتزین،} \tag{۳-۲۱}$$

$$\frac{1}{U_o} = \frac{(R_2/R_1)}{h_i} + \frac{R_2}{k}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{h_o}, \qquad \text{استوانه‌ای،} \tag{۳-۲۲}$$

$$\frac{1}{U_o}=\frac{(R_2/R_1)^2}{h_i}+\frac{R_2}{k}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)+\frac{1}{h_o}, \quad \text{کروی،} \quad (۳-۲۳)$$

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o}=U_o\left(\frac{x_2-x}{L}+\frac{1}{h_o}\right), \quad \text{کارتزین} \quad (۳-۲۴)$$

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o}=U_o\left[\frac{R_2}{k}\ln\left(\frac{R_2}{r}\right)+\frac{1}{h_o}\right], \quad \text{استوانه‌ای} \quad (۳-۲۵)$$

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o}=U_o\left[\frac{R_2}{k}\left(\frac{R_2}{r}-1\right)+\frac{1}{h_o}\right], \quad \text{کروی} \quad (۳-۲۶)$$

۳-۲. ساختارهای ترکیبی

فرض کنید که استوانه توخالی یا استوانه دیواره نازک، یعنی پوسته شکل ۳-۱ متشکل از N لایه مواد مختلف با ضخامت‌ها و هدایت حرارتی مختلف باشند (شکل ۳-۳). مقاومت تماسی بین لایه‌ها قابل صرف‌نظر است. می‌خواهیم انتقال حرارت از سیال داخلی به محیط اطراف، و توزیع دمای این ساختار را به‌دست آوریم.

با برقراری تشابه بین نفوذ حرارت و جریان الکتریکی در مورد ذکر شده، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{UA}=R_i+\sum_{n=1}^{N}R_n+R_o. \quad (۳-۲۷)$$

شکل صریح U براساس سطح خارجی به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{U_o}=\frac{A(s_{N+1})/A(s_1)}{h_i}+A(s_{N+1})\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{k_n}\int_{s_n}^{s_{n+1}}\frac{ds}{A(s)}+\frac{1}{h_o}. \quad (۳-۲۸)$$

با قرار دادن $N=1$ معادله (۳-۲۸) به معادله (۳-۱۳) تبدیل می‌شود.

برای به‌دست آوردن توزیع دما در ساختار، ما ابتدا q را بر حسب اختلاف دمای $T-T_o$ و مقاومت‌های متناظر $(R_N, \dots, R_{n+2}, R_{n+1}, R_n)$، بیان می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$q=\frac{T-T_o}{(1/k_n)\int_{s_n}^{s_{n+1}}ds/A(s)+\sum_{m=n+1}^{N}(1/k_m)\int_{s_m}^{s_{m+1}}ds/A(s)+1/h_oA(s_{N+1})}, \quad (۳-۲۹)$$

که در این فرمول T نشان‌دهنده دمای مکان s در (شکل ۳-۳) می‌باشد. سپس با حذف q بین معادلات (۳-۱۱) و (۳-۲۹) توزیع دمای مطلوب برحسب U_o به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o}=U_o\left[\frac{A(s_{N+1})}{k_n}\int_{s_n}^{s_{n+1}}\frac{ds}{A(s)}+A(s_{N+1})\sum_{m=n+1}^{N}\frac{1}{k_m}\int_{s_m}^{s_{m+1}}\frac{ds}{A(s)}+\frac{1}{h_o}\right]. \quad (۳-۳۰)$$

معادله (۳-۳۰) با قرار دادن $N=1$ به معادله (۳-۱۶) تبدیل می‌شود.

شکل‌های کارتزین، استوانه‌ای و کروی معادلات (۳-۲۸) و (۳-۳۰) به‌صورت زیر فهرست شده است:

$$\frac{1}{U_o}=\frac{1}{U}=\frac{1}{h_i}+\sum_{n=1}^{N}\frac{L_n}{k_n}+\frac{1}{h_o}, \quad (۳-۳۱)$$

کارتزین

$$\frac{1}{U_o}=\frac{(R_{N+1}/R_1)}{h_i}+R_{N+1}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{k_n}\ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right)+\frac{1}{h_o}, \quad (۳-۳۲)$$

استوانه‌ای

$$\frac{1}{U_o}=\frac{(R_{N+1}/R_1)^2}{h_i}+R_{N+1}^2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{k_n}\left(\frac{1}{R_n}-\frac{1}{R_{n+1}}\right)+\frac{1}{h_o}, \quad (۳-۳۳)$$

کروی

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o}=U_o\left[\frac{x_{n+1}-x}{k_n}+\sum_{m=n+1}^{N}\frac{x_{m+1}-x_m}{k_m}+\frac{1}{h_o}\right], \quad (۳-۳۴)$$

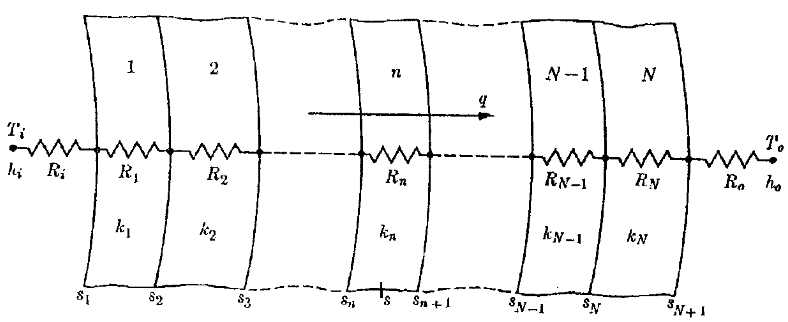
کارتزین

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o}=U_o\left[\frac{R_{N+1}}{k_n}\ln\left(\frac{R_{n+1}}{r}\right)+R_{N+1}\sum_{m=n+1}^{N}\frac{1}{k_n}\ln\left(\frac{R_{m+1}}{R_m}\right)+\frac{1}{h_o}\right], \quad (۳-۳۵)$$

استوانه‌ای

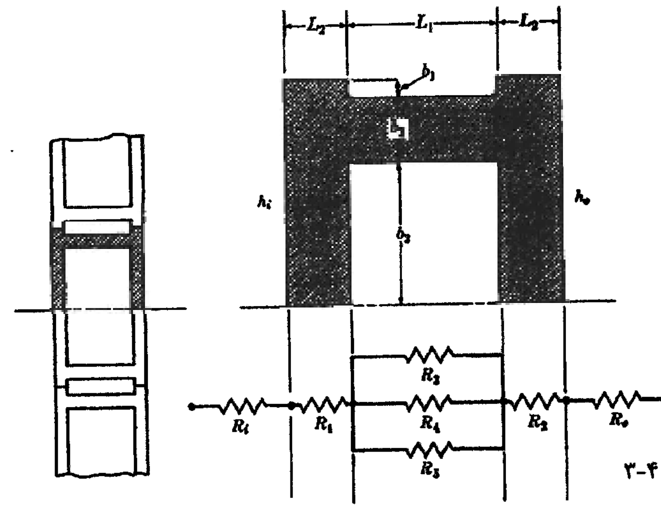
$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o}=U_o\left[\frac{R_{N+1}}{k_n}\left(\frac{R_{N+1}}{r}-\frac{R_{N+1}}{R_{n+1}}\right)+R_{N+1}^2\sum_{m=n+1}^{N}\frac{1}{k_m}\left(\frac{1}{R_m}-\frac{1}{R_{m+1}}\right)+\frac{1}{h_o}\right], \quad (۳-۳۶)$$

کروی



شکل ۳-۳

در عمل، ترکیب ساختارهای سری– موازی نیز مهم است، به‌خصوص در مختصات کارتزین، به‌عنوان مثال، یک دیواره متشکل از آجرهای سرامیکی، مثل آن‌هایی که در ساخت خانه به‌کار می‌روند، را در نظر بگیرید (شکل ۳-۴). در واقع، انتقال حرارت از درون این گونه دیواره‌ها یک‌بعدی نیست. اگرچه، تحلیل‌های یک‌بعدی نتایج رضایت بخشی را برای مسائل عملی حاصل می‌کنند.



شکل ۴-۳

دوباره با استفاده از تشابه الکتریکی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{UA} = R_i + R_1 + \frac{1}{1/R_3+1/R_4+1/R_5} + R_2 + R_o.$$

بنابراین به‌ازای واحد عرض دیواره عمود بر سطح مقطع نشان داده شده در شکل ۴-۳ خواهیم داشت،

$$\frac{1}{h_i(b_1+b_2+b_3)} + \frac{L_2}{k_2(b_1+b_2+b_3)} + \frac{1}{k_1b_1/L_1+k_2b_2/L_1+k_1b_3/L_1} + \frac{L_2}{k_2(b_1+b_2+b_3)} + \frac{1}{h_o(b_1+b_2+b_3)},$$

و از این‌رو به‌ازای واحد سطح دیواره داریم:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_1}{\epsilon_1k_1+\epsilon_2k_2} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{1}{h_o},$$

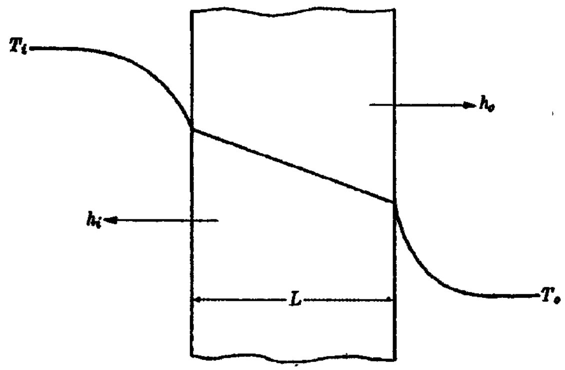
که در آن:

$$\epsilon_1 = (b_1+b_3)/(b_1+b_2+b_3) \quad , \quad \epsilon_2 = (b_2)/(b_1+b_2+b_3)$$

۳-۳. مثال‌ها

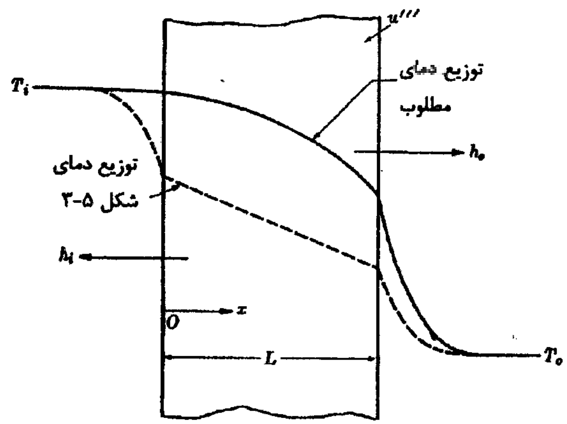
در این بخش تعدادی از واقعیت‌های فیزیکی و ریاضی در قالب مثال‌های انتخابی در مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی بررسی خواهند شد.

مثال ۱-۳. یک صفحه با ضخامت L دو محیط با دمای T_o، و T_i را از هم جدا می‌کند. ضرایب انتقال حرارت h_o و h_i می‌باشد (شکل ۵-۳). می‌خواهیم اتلاف حرارتی از دیواره را در سمتی که دارای دمای بیشتری است، حذف نماییم.



شکل ۵-۳

در بخش ۲-۳ آموختیم که مقاومت کلی بین دو محیط با افزایش عایق به یک یا هر دو سمت دیواره، افزایش می‌یابد. بدون توجه به ضخامت و جنس عایق، اتلاف حرارتی از دیواره در سمتی که دارای دمای بیشتری است را نمی‌توان با استفاده از چنین عایقی، به‌طور کامل حذف نمود.



شکل ۶-۳

به عبارت دیگر، مقدار مناسبی از انرژی داخلی یکنواخت u''' به‌صورت الکتریکی درون صفحه[1] تولید می‌شود تا اتلاف حرارتی را به صفر برساند (شکل ۶-۳). بنابراین هدف مساله پیدا کردن مقدار u''' است.

فرمولاسیون مساله در جهت x نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \tag{۳-۳۷}$$

$$T(0) = T_i, \tag{۳-۳۸}$$

$$\frac{dT(0)}{dx} = 0, \tag{۳-۳۹}$$

$$-k\frac{dT(L)}{dx} = h_o[T(L) - T_o] \tag{۳-۴۰}$$

[چرا به جای ۲ شرط مرزی از ۳ شرط مرزی استفاده نمودیم؟ چه پارامترهای غیرمشخصی باید تعیین شوند؟ فیزیک مساله را با معادلات (۳-۳۷)، (۳-۳۸)، (۳-۴۰) و به‌وسیله معادلات (۳-۳۷)، (۳-۳۹)، (۳-۴۰) توصیف می‌کنیم.]

جواب معادله (۳-۳۷) به‌صورت زیر است،

$$T = -\frac{u''' x^2}{2k} + Ax + B, \tag{۳-۴۱}$$

با قرار دادن جواب معادله (۳-۳۷) درون معادلات (۳-۳۹) و (۳-۴۰) داریم:

$$0 = A, \qquad u'''L = h_o(-u'''L^2/2k + B - T_o).$$

بنابراین، با قرار دادن مقادیر A و B درون معادله (۳-۴۱)، توزیع دمای متناظر با مقدار اختیاری u''' به صورت زیر است:

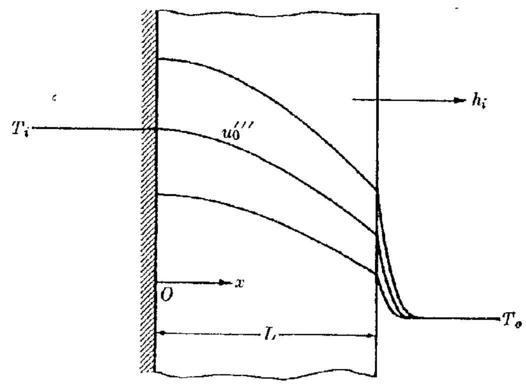
$$\frac{T - T_o}{u'''L^2/2k} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{h_o L}\right). \tag{۳-۴۲}$$

نموداری از معادله (۳-۴۲) در شکل ۷-۳ برای مقادیر مختلف u''' داده شده است. اگر چه از این پروفایل‌های دمایی، تنها یک پروفایل در شرایط مرزی معادله (۳-۳۸) صدق می‌کند، و مقدار آن u_o''' می‌باشد. بنابراین با ترکیب معادلات (۳-۳۸) و (۳-۴۲) خواهیم داشت:

۱- اگر صفحه یک هدایت کننده الکتریکی نباشد یا اگر جریان الکتریکی از درون صفحه مطلوب نباشد، صفحه دیگری که توسط جریان الکتریکی گرم شده است (گرمکن پشتیبان) را می‌توان به صفحه اصلی تماس داد. مساله مربوط به شکل ۱۶-۲ را نیز ببینید.

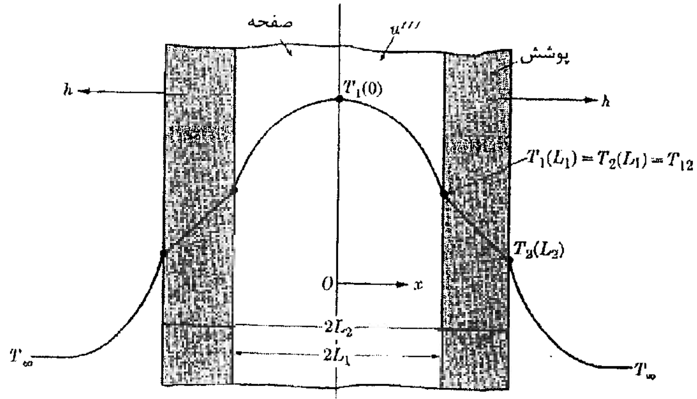
$$\frac{u_o''' L^2}{2k} = \frac{T_i - T_o}{1 + 2(k/h_o L)}.$$

[این مساله را با در نظر گرفتن معادله (۳-۳۹) یا (۳-۴۰) به عنوان آخرین شرط مرزی، دوباره حل نمایید.]



شکل ۷-۳

مثال ۳-۲. المنت سوختی یک راکتور حوضچه‌ای[1] از صفحات صاف با ضخامت $2L_1$ و پوششی با ضخامت $(L_2 - L_1)$ تشکیل شده است (شکل ۸-۳). فرض می‌شود که انرژی داخلی یکنواخت u''' (هسته‌ای) تنها درون صفحات تولید شود. ضریب انتقال حرارت h است، دمای محیط اطراف T_∞ است. می‌خواهیم بدانیم که توزیع دمای المنت سوختی چگونه است.



شکل ۸-۳

1- Pool reactor

این مثالی از یک مساله چند منطقه‌ای است. فرمولاسیون چنین مساله‌ای بیش از یک معادله حاکم را در بر می‌گیرد. به‌دلیل تقارن هندسی و حرارتی، x از وسط صفحه المنت سوخت اندازه‌گیری می‌شود. شایان ذکر است که ویژگی‌های صفحه و پوشش به ترتیب با زیرنویس‌های ۱ و ۲ نشان داده می‌شود و داریم:

$$\frac{d^2T_1}{dx^2}+\frac{u'''}{k_1}=0, \quad 0\le x\le L_1, \tag{۳-۴۳}$$

$$\frac{d^2T_2}{dx^2}=0, \quad L_1\le x\le L_2, \tag{۳-۴۴}$$

$$\frac{dT_1(0)}{dx}=0,\ T_1(L_1)=T_2(L_2)=T_{12},\ k_1\frac{dT_1(L_1)}{dx}=k_2\frac{dT_2(L_1)}{dx}, \tag{۳-۴۵}$$

$$-k_2\frac{dT_2(L_2)}{dx}=h[T_2(L_2)-T_\infty].$$

جواب معادله (۳-۴۳) به‌صورت زیر است:

$$T_1=-\frac{u'''x^2}{2k_1}+Ax+B, \tag{۳-۴۶}$$

و جواب معادله (۳-۴۴) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T_2=Cx+D, \tag{۳-۴۷}$$

با قرار دادن معادلات (۳-۴۶) و (۳-۴۷) درون شرایط مرزی، یعنی معادله (۳-۴۳)، چهار معادله جبری همزمان زیر، حاصل می‌شوند.

$$A=0, \quad -u'''L_1^2/2k_1+B=CL_1+D,$$

$$-u'''L_1=k_2C, \quad -k_2C=h(CL_2+D-T_\infty).$$

با حل این معادلات برحسب عبارات A، B، C و D و سپس قرار دادن نتیجه درون معادله (۳-۴۶) و (۳-۴۷)، توزیع دمای المنت سوختی برای $0\le x\le L_1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{T_1-T_\infty}{u'''L_1^2/2k_1}=1-\left(\frac{x}{L_1}\right)^2-2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)-2\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\left(1+\frac{k_2}{hL_2}\right) \tag{۳-۴۸}$$

و برای $L_1\le x\le L_2$ داریم:

$$\frac{T_2-T_\infty}{u'''L_1^2/k_2}=-\left(\frac{x}{L}\right)+\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\left(1+\frac{k_2}{hL_2}\right) \tag{۳-۴۹}$$

وقتی که می‌خواهیم دما را فقط در بعضی از مکان‌های به‌خصوص المنت سوختی تعیین کنیم، می‌توانیم $T_1(0)$، $T_1(L_1)=T_2(L_1)=T_{12}$ و $T_2(L_2)$ به جای روند ذکر شده می‌توانیم از قیاس الکتریکی استفاده کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

Q/A

$$T_2(L_2)-T_\infty=\frac{1}{h}(u'''L_1),$$

$$T_{12}-T_\infty=\left(\frac{1}{h}+\frac{L_2-L_1}{k}\right)(u'''L_1),$$

که در آن $(u'''L_1)$، شار حرارتی از درون هر سطح از المنت سوختی است. علاوه بر آن با استفاده از معادله (۳-۲۷) داریم:

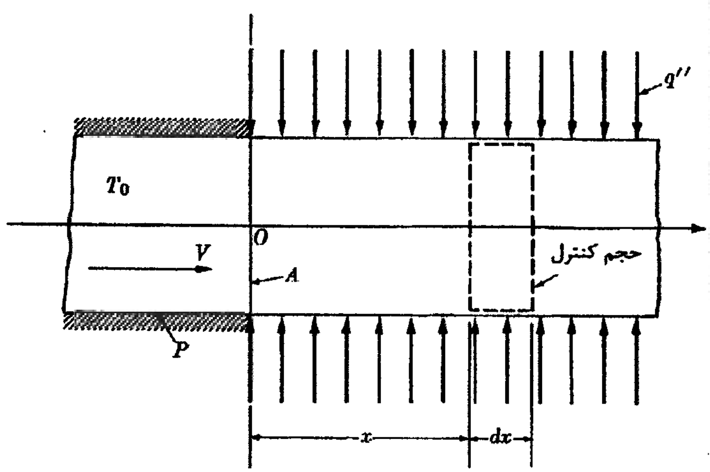
$$T_1(0)-T_{12}=-\left(\frac{u'''L_1^2}{2k_1}\right),$$

خواهیم داشت:

$$T_1(0)-T_\infty=\left(\frac{L_1}{2k_1}+\frac{1}{h}+\frac{L_2-L_1}{k_2}\right)(u'''L_1).$$

بدون اصطکاک

مثال ۳-۳. یک مایع غیرگرانرو با ویژگی‌های ثابت که دارای دمای جریان بالادستی T_0 و سرعت V بوده و به‌صورت پایا از درون یک لوله با طول نامحدود و با مقطع عرضی A و محیط P عبور می‌کند. ضخامت دیواره لوله قابل صرف‌نظر است. نیمه جریان پایین‌دستی لوله در معرض شار حرارتی ثابت q'' قرار می‌گیرد و نیمه جریان بالادستی عایق است (شکل ۹-۳). می‌خواهیم توزیع دمای محوری مایع را براساس تحلیل متمرکز شعاعی به‌دست آوریم.



شکل ۹-۳

این مساله با جزییات بررسی خواهد شد زیرا دارای کاربرد قابل ملاحظه‌ای در تکنولوژی راکتور و محاسبه ضریب انتقال حرارت در لوله‌هاست. اما ابتدا یک واقعیت مهم را که در عبارات مساله واضح نیست، مشخص می‌نماییم. از آنجایی‌که شار حرارتی q'' از طریق هدایت و به‌صورت محوری (در راستای x) انتقال می‌یابد لذا باعث افزایش دما در بخش عایق خواهد شد. از آنجایی‌که جریان آنتالپی محوری در جهت مخالف هدایت قرار دارد اثر معکوس بر افزایش دما خواهد داشت. بنابراین توزیع دما درون لوله به اهمیت نسبی هدایت محوری و جریان آنتالپی محوری بستگی دارد. اگر چه در این مساله سیال دارای یک منطقه است اما تغییر شرط مرزی از عایق به شار حرارتی ثابت ما را مجاب می‌کند که از نظر ریاضی مساله را دو منطقه‌ای قلمداد کنیم. فرمولاسیون بخش عایق را می‌توان به راحتی با قرار دادن $q''=0$ در فرمولاسیون بخش دیگر به‌دست آورد، بنابراین، جزییات فرمولاسیون فقط برای بخش دریافت کننده شار حرارتی q'' انجام می‌شود.

حجم کنترل نشان داده شده در شکل ۹-۳ که به صورت شعاعی متمرکز و به‌صورت محوری دیفرانسیلی است را در نظر می‌گیریم و قوانین کلی را برای این حجم کنترل مورد استفاده قرار می‌دهیم.

قانون بقاء جرم:

$\rho A V = cte$

$$V = \text{ثابت}. \tag{۳-۵۰}$$

مومنتم (انرژی مکانیکی یا معادله برنولی):

$\frac{V^2}{2} = cte$ نوشته شد.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)=0. \tag{۳-۵۱}$$

قانون اول ترمودینامیک (انرژی کل)، برحسب شکل ۱۰-۳:

$$-A\frac{dq_x}{dx}-\rho AV\frac{dh_0}{dx}+q''P=0. \tag{۳-۵۲}$$

با استفاده از تعریف h_0 و معادلات (۵۰-۳) و (۵۱-۳) داریم:

$$dh_0/dx = du/dx. \tag{۳-۵۳}$$

$C_p = C_v$ در مایعات تراکم ناپذیر

با صرف‌نظر از $c_p - c_v$ برای مایعات، برحسب گرمای ویژه متداول c داریم:

$$du = c\,dT \tag{۳-۵۴}$$

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - a\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

$m^2 - am = 0 \rightarrow m \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$

$T = A + Be^{ax}$

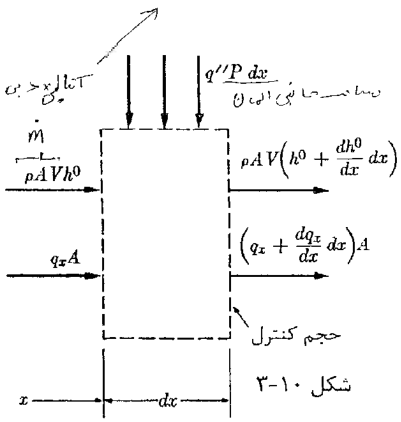
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - a\frac{\partial T}{\partial x} + b = 0$

$m = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$

$T = A + Be^{ax} + Cx$

مرتبه اول، مرتبه دوم، همگون

زمانی که جریان را اندرونی می‌خوانیم برقرار است



شکل ۱۰-۳

با قرار دادن معادله (۵۴-۳) درون معادله (۵۳-۳) و قرار دادن نتیجه آن در معادله (۵۲-۳) برای انرژی حرارتی خواهیم داشت:

$$-A\frac{dq_x}{dx}-\rho cAV\frac{dT}{dx}+q''P=0. \tag{۳-۵۵}$$

سرانجام، معادله (۵۵-۳)، به‌وسیله قانون فوریه در جهت x به‌صورت زیر بازآرایی می‌شود:

$$q_x=-k\frac{dT}{dx},$$

و معادله حاکم بخش غیرعایق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{\rho cV}{k}\frac{dT}{dx}+\frac{q''P}{kA}=0. \tag{۳-۵۶}$$

همه جملات را تقسیم بر kA کرده

[معادله (۵۶-۳) را با فرض این‌که لوله در شکل ۹-۳ عمودی باشد برای یک گاز ایده‌آل دوباره فرموله کنید.] با قرار دادن $q''=0$ در معادله (۵۶-۳)، معادله حاکم بخش عایق حاصل می‌شود.

با انتخاب T_1 و T_2 به‌ترتیب برای دمای بخش عایق و بخش غیرعایق، فرمولاسیون مساله را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{d^2T_1}{dx^2}-\frac{\rho cV}{k}\frac{dT_1}{dx}=0,\quad -\infty<x\le 0, \tag{۳-۵۷}$$

$$\frac{d^2T_2}{dx^2}-\frac{\rho cV}{k}\frac{dT_2}{dx}+\frac{q''P}{kA}=0,\quad 0<x\le+\infty,$$

شرایط مرزی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$T_1(-\infty)=T_0,\quad T_1(0)=T_2(0),\quad \frac{dT_1(0)}{dx}=\frac{dT_2(0)}{dx},\quad T_2(\infty)\sim x, \tag{۳-۵۸}$$

که شرط مرزی آخر نشان‌دهنده توزیع دمای خطی درون مایع برای مقادیر زیاد x است. (اگر این نکته برای خواننده واضح نیست، باید خواننده ابتدا راه حل کلی بخش غیرعایق را در نظر گرفته و سپس از خود بپرسد که آیا افزایش دما به صورت نمایی برای مقدار ثابت q'' امکان‌پذیر می‌باشد.)

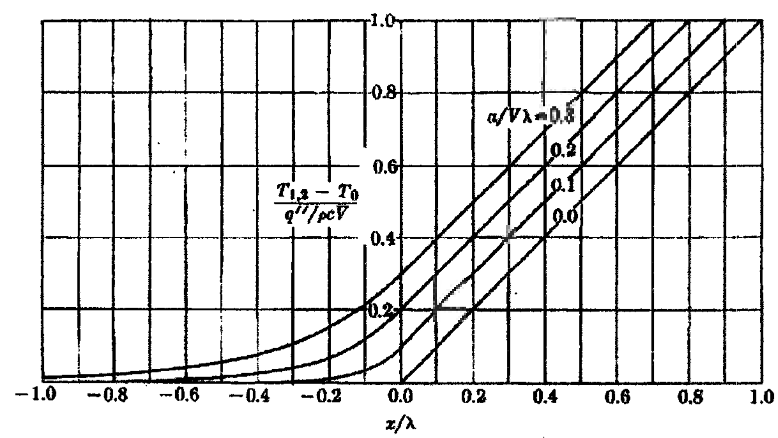
با حل معادله (۵۷-۳) و استفاده از شرایط مرزی (۵۸-۳) توزیع دمای مایع حاصل خواهد شد:

$$\frac{T_1(x)-T_0}{q''/\rho cV}=\left(\frac{a}{V\lambda}\right)e^{(V\lambda/a)(x/\lambda)},\quad -\infty<x\le 0, \tag{۳-۵۹}$$

$$\frac{T_2(x)-T_0}{q''/\rho cV}=\left(\frac{a}{V\lambda}\right)\left[1+\left(\frac{V\lambda}{a}\right)\frac{x}{\lambda}\right],\quad 0\le x<+\infty,$$

از حل معادلات مرتبه دوم بالا و جایگذاری شرایط مرزی

که در آن $a = k/Pc$ و $\lambda = A/P$ عدد بدون بعد $a/V\lambda = k/PcV\lambda$ بیان‌کننده نسبت بین هدایت محوری و جریان آنتالپی محوری است. معکوس این عدد ضریب پکلت[1] نامیده می‌شود. [شکل خاص معادله (۵۹-۳) وقتی که $k \to 0$ چیست؟]. در شکل ۱۱-۳ اثر هدایت محوری برای مقادیر مختلف $a/V\lambda$ نشان داده شده است. از آنجایی‌که در $x = 0$ دما به‌صورت معکوس با ضریب پکلت متناسب است، وقتی $\mathrm{Pe} \geq 100$، توزیع دما در بخش عایق و اثر هدایت محوری درون لوله قابل صرف‌نظر خواهد بود.[2]



شکل ۱۱-۳

مثال ۴-۳. فرض می‌کنیم به‌جای نصف لوله مثال ۳-۳، بخشی از آن به طول L در معرض شار حرارتی q'' ثابت قرار گیرد (شکل ۱۲-۳). دوباره می‌خواهیم توزیع دمای محوری و متمرکز را برای مایع بیابیم.

مساله، یک مساله سه منطقه‌ای است. با قرار دادن زیرنویس ۳ برای دمای منطقه جریان پایین‌دست عایق، همانند مثال ۳-۳، معادلات حاکم به‌صورت زیر خواهند بود:

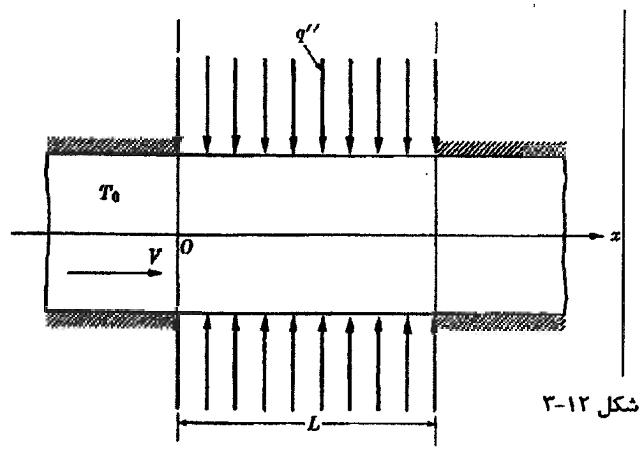
$$\frac{d^2T_1}{dx^2} - \frac{\rho cV}{k}\frac{dT_1}{dx} = 0, \qquad -\infty < x \leq 0, \qquad (۶۰\text{-}۳)$$

$$\frac{d^2T_2}{dx^2} - \frac{\rho cV}{k}\frac{dT_2}{dx} + \frac{q''P}{kA} = 0, \qquad 0 < x \leq L,$$

$$\frac{d^2T_3}{dx^2} - \frac{\rho cV}{k}\frac{dT_3}{dx} = 0, \qquad L < x \leq +\infty,$$

1- Peclet Modulus

۲- اثر هدایت محوری با جزییات بیشتر برای مسائل دو بعدی بعداً توضیح داده خواهد شد. مثال (۷-۴) را ببینید.



شکل ۱۲-۳

شرایط مرزی به‌صورت زیر خواهند بود:

$$T_1(-\infty) = T_0, \qquad (۶۱\text{-}۳)$$

$$T_1(0) = T_2(0), \qquad \frac{dT_1(0)}{dx} = \frac{dT_2(0)}{dx},$$

$$T_2(L) = T_3(L), \qquad \frac{dT_2(L)}{dx} = \frac{dT_3(L)}{dx},$$

$$T_3(+\infty) = \text{محدود}.$$

مفهوم آخرین شرط مرزی را می‌توان به وضوح با در نظر گرفتن حل کلی منطقه سوم مساله درک نمود.

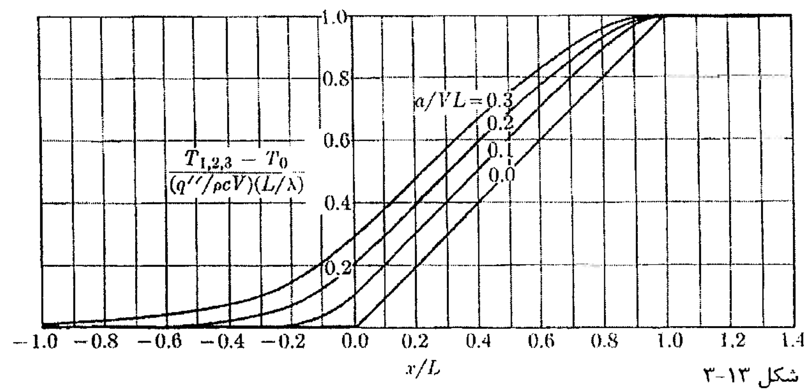
با حل معادله (۶۰-۳) و قرار دادن شرایط مرزی (۶۱-۳) درون آن توزیع دمای مایع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{T_1(x)-T_0}{(q''/\rho cV)(L/\lambda)} = \left(\frac{a}{V\lambda}\right)\left(1 - e^{-VL/a}\right)e^{(VL/a)(x/L)}, \qquad -\infty < x \leq 0, \qquad (۶۲\text{-}۳)$$

$$\frac{T_2(x)-T_0}{(q''/\rho cV)(L/\lambda)} = \frac{x}{L} + \left(\frac{a}{V\lambda}\right)\left[1 - e^{(-VL/a)(1-x/L)}\right], \qquad 0 \leq x < L,$$

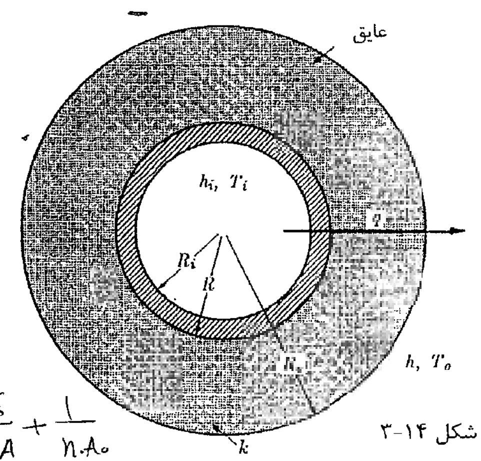
$$\frac{T_3(x)-T_0}{(q''/\rho cV)(L/\lambda)} = 1, \qquad L < x \leq +\infty,$$

که در آن $\lambda = A/P$ مثل مساله ۳-۳ است. [وقتی که $k \to 0$ یا $L \to \infty$ شکل خاص معادله (۶۲-۳) چگونه خواهد بود؟] در شکل ۱۳-۳ دمای مایع یعنی معادله (۶۲-۳) برحسب x/L برای مقادیر مختلف a/VL رسم شده است.



شکل ۱۳-۳

مثال ۵-۳. یک سیال با دمای T_i از درون لوله‌ای با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o در جریان است. ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی به‌ترتیب h_i و h_o می‌باشند. دمای سیال خارجی T_o است. فرض می‌کنیم که $T_o < T_i$ باشد. می‌خواهیم با عایق‌کاری لوله اتلاف حرارتی از سیال داخل لوله را کاهش دهیم (شکل ۱۴-۳). ضریب هدایت حرارتی دیواره لوله در مقایسه با ضریب هدایت حرارتی عایق و ضریب انتقال حرارت داخلی در مقایسه با ضریب خارجی انتقال حرارت ممکن است زیاد باشد. (بخار میعان‌شده درون لوله مثال بارزی از این نوع است). اتلاف حرارتی از سیال داخلی را به‌صورت تابعی از ضخامت عایق به‌دست آورید.



$$\frac{1}{h_iA_i} + \frac{\Delta x}{kA} + \frac{6}{kA} + \frac{1}{h_oA_o}$$

شکل ۱۴-۳

به‌دلیل مقدار نسبی مقاومت موجود می‌توان از مقاومت جابه‌جایی داخلی و مقاومت هدایتی لوله، صرف‌نظر کرد. از این‌رو فرض می‌شود که سطح داخلی عایق به‌طور تقریبی دارای دمای T_i باشد. با بازآرایی مناسب معادله (۳۲-۳)، ضریب انتقال حرارت کلی براساس سطح خارجی عایق به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{R_o}{k}\ln\left(\frac{R_o}{R}\right) + \frac{1}{h_o}$$

$$= \frac{1}{h_iA_i} + \frac{\ln\frac{R_o}{R_i}}{2\pi kL} + \frac{h}{h_oA_o}$$

علاوه‌برآن، از آنجایی‌که $A_o = 2\pi R_o L$ است، اتلاف حرارتی سیال داخلی به‌ازای طول L از لوله، خواهد بود و داریم: $q = U_oA_o(T_i - T_o)$

$$\frac{q}{2\pi kL(T_i-T_o)} = \frac{1}{\ln(R_o/R)+(k/hR)/(R_o/R)} \quad (۳\text{-}۶۳)$$

طرفین را در $\frac{R_o}{k}$ ضرب کردیم.

با بررسی معادله (۶۳-۳) این نتیجه مهم حاصل می‌شود که وقتی ضخامت عایق تغییر کند، عبارات اول و دوم در مخرج سمت راست معادله (۶۳-۳) به‌طور معکوس تغییر خواهد کرد. این نتیجه امکان وجود اکسترمم برای اتلاف حرارتی از سیال داخلی را نشان می‌دهد. ممکن است وجود چنین اکسترممی با برابر صفر قرار دادن مشتق اول معادله (۶۳-۳) و با توجه به R_o/R به سادگی نشان داده شود. نتیجه به‌صورت زیر است:

$$\frac{dq}{d(R_o/R)} = -2\pi kL(T_i - T_o)\frac{[1/(R_o/R)+(k/hR)/(R_o/R)^2]}{[\ln(R_o/R)+(k/hR)/(R_o/R)]^2} = 0. \quad (۳\text{-}۶۴)$$

ریشه معادله (۶۴-۳) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(R_o/R)_c = k/hR \quad \text{یا} \quad (R_o)_c = k/h\,, \quad (۳\text{-}۶۵)$$

که در این رابطه $(R_o)_c$ شعاع بحرانی عایق نامیده می‌شود. با قرار دادن معادله (۶۵-۳) درون معادله (۶۳-۳)، مقدار اکسترمم اتلاف حرارت از لوله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{q}{2\pi kL(T_i-T_o)} = \frac{1}{1+\ln(k/hR)}\,. \quad (۳\text{-}۶۶)$$

علاوه برآن، مشتق دوم معادله (۶۳-۳) در $(R_o/R)_c = k/hR$ به‌صورت زیر است:

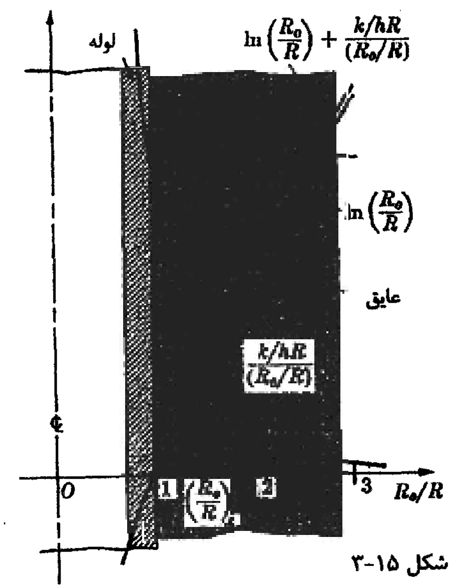
$$\left.\frac{d^2q}{d(R_o/R)^2}\right|_{R_o/R=k/hR} = -\frac{2\pi Lh^2(T_i-T_o)}{[1+\ln(k/hR)]^2} < 0, \quad (۳\text{-}۶۷)$$

مشتق دوم منفی یعنی max یا min (؟)

این رابطه نشان می‌دهد که مقدار اکسترمم اتلاف حرارت حاصل از معادله (۶۳-۳)، در واقع ماکزیمم است! این نتیجه حیرت‌انگیز که نشان می‌دهد به‌وسیله عایق کردن اتلاف حرارتی از لوله افزایش می‌یابد با در نظر گرفتن مخرج سمت راست معادله (۶۳-۳) توجیه خواهد شد،

در شعاع بحرانی، q max می‌شود یعنی اتلاف حرارت بیشترین است

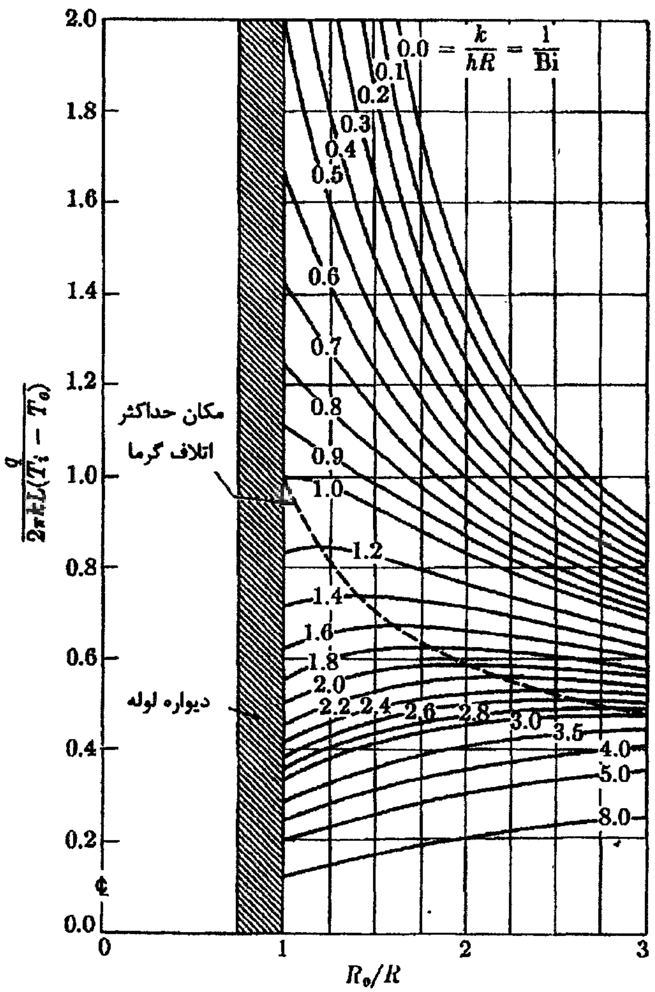
$$\ln\left(\frac{R_o}{R}\right)+\frac{k/hR}{R_o/R'} \qquad (۶۸-۳)$$



شکل ۱۵-۳

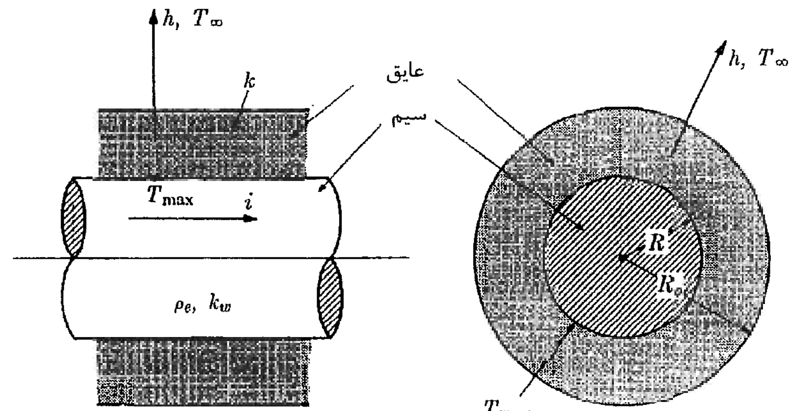
همان‌طور که در شکل ۱۵-۳ نشان داده شده است. تغییر در اولین جمله معادله (۶۸-۳) که مربوط به مقاومت هدایتی عایق است، به‌صورت لگاریتمی می‌باشد، در حالی‌که تغییر در جمله دوم، که متناسب است با مقاومت جابه‌جایی خارجی، هذلولی است. بنابراین همان‌طور که در شکل ۱۵-۳ مشاهده می‌شود فرض می‌شود که مجموع دو جمله در شعاع بحرانی حداقل مقدار را داشته باشد و این نتیجه به نوبه خود حداکثر مقدار اتلاف حرارتی را حاصل می‌کند. در شکل ۱۶-۳ اتلاف حرارت از لوله‌ها در مقابل R_0/R برای مقادیر مختلف $1/\mathrm{Bi} = k/hR$ رسم شده است.

هرچقدر عدد بایو بزرگتر باشد q کاهش می‌یابد و مربوط به شعاع بحرانی نیاز
زمانی که عایق‌کاری کنیم تا ... (در شکل) باید شعاع بحرانی ... در نظر گرفته شود



شکل ۱۶-۳

مثال ۶-۳. یک سیم الکتریکی با شعاع R به‌طور یکنواخت با پلاستیک عایق شده و دارای شعاع بیرونی R_0 است (شکل ۱۷-۳). مقاومت الکتریکی و ضریب هدایت حرارتی این سیم به ترتیب ρ_e (اهم × طول) و k_W است. ضریب هدایت حرارتی عایق k، ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط اطراف T_∞ می‌باشد. می‌خواهیم حداکثر جریانی را که می‌توان از این سیم عبور داد بدون آن‌که پلاستیک آن گرم شود به‌دست آوریم. دمای عملیاتی مجاز T_{max} است.



شکل ۱۷-۳

از آنجایی‌که هدایت محوری قابل صرف‌نظر است، انرژی داخلی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$i^2(\rho_e/\pi R^2) \qquad P = RI^2 \tag{۳-۶۹}$$

این انرژی تولیدی الکتریکی به‌ازای واحد طول سیم بوده و به‌صورت شعاعی توسط مقاومت هدایتی عایق و مقاومت جابه‌جایی محیط اطراف، از بین می‌رود. باید متذکر شد که مقاومت کلی مؤثر مثال ۵-۳ در این مثال نیز صادق است. بنابراین با بازآرایی معادله (۶۳-۳) و بر طبق علامت‌گذاری شکل ۱۷-۳ و برابر قرار دادن نتیجه با معادله (۶۹-۳) داریم:

$$\frac{i^2_{max}\rho_e}{\pi R^2} = \frac{2\pi k(T_{max}-T_\infty)}{\ln(R_o/R)+(k/hR)/(R_o/R)} \qquad L=1 \tag{۳-۷۰}$$

مقاومت رسانش مقاومت جابجایی

یا

$$i_{max} = \left[\frac{2\pi^2R^2(k/\rho_e)(T_{max}-T_\infty)}{\ln(R_o/R)+(k/hR)/(R_o/R)}\right]^{1/2} \tag{۳-۷۱}$$

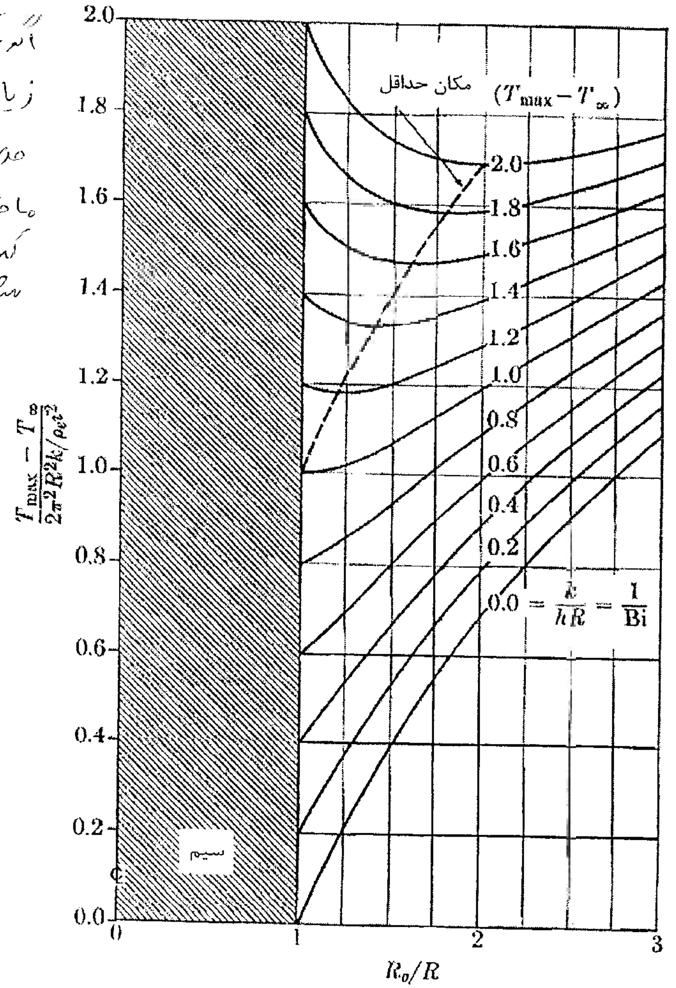
شعاع عایق

اگر بتوانیم ضخامت عایق و در نتیجه شعاع بحرانی را تغییر دهیم خواهیم داشت:

$$i_{max\,max} = \left[\frac{2\pi^2R^2(k/\rho_e)(T_{max}-T_\infty)}{1+\ln(k/hR)}\right]^{1/2}. \tag{۳-۷۲}$$

به جای

$$\frac{R_o}{R} = \frac{k}{hR}$$



شکل ۱۸-۳

یک مساله با اندکی تفاوت با این مساله می‌تواند با تغییر در دمای سطح مشترک به عنوان تابعی از ضخامت عایق پلاستیکی برای یک جریان الکتریکی ویژه، به‌وجود آید. این دما را می‌توان به سادگی با استفاده از معادله (۷۰-۳) و به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\frac{T_{max}-T_\infty}{2\pi^2R^2k/\rho_e i^2} = \ln\left(\frac{R_o}{R}\right) + \frac{k/hR}{R_o/R}. \tag{۳-۷۳}$$

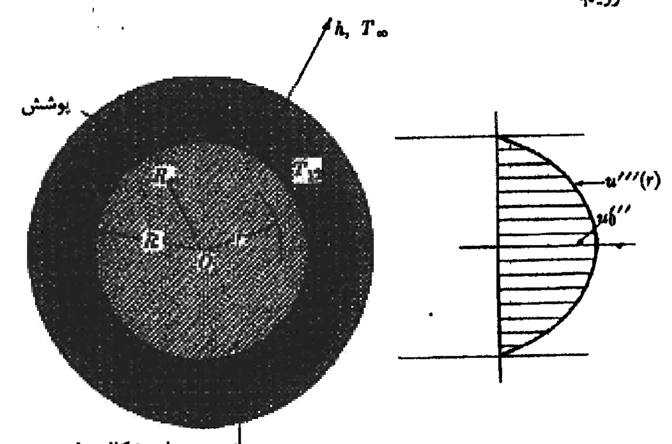
رفتار عبارت $(R_o/R)+(k/hR)/(R_o/R)$ در شکل ۱۵-۳ رسم شده است. اکنون معادله (۷۳-۳) در مقابل R_0/R برای مقادیر مختلف از k/hR رسم می‌شود (شکل ۱۸-۳). تغییرات اینجا برعکس موارد نشان داده شده در شکل ۱۶-۳ است. [معادلات (۶۳-۳) و (۷۳-۳) را با هم مقایسه کنید].

نکته در مورد تفاوت بین موارد مورد نظرمان در مثال‌های ۵-۳ و ۶-۳. در مثال ۵-۳ می‌خواستیم q را در حالت ثابت بودن دماهای سیال داخلی و محیط، کاهش دهیم؛ اما می‌خواهیم در مثال ۶-۳ برای یک مقدار ثابت i (یا q) و دمای ثابت محیط، توزیع دمای سیم را به دست آوریم.

مثال ۷-۳. المان سوخت یک راکتور شامل یک ماده شکافت‌پذیر کروی با شعاع R است که با یک پوسته کروی به شعاع R_o پوشیده شده است (شکل ۱۹-۳). دمای محیط سرد T_∞ است، و ضریب انتقال حرارت h می‌باشد. انرژی هسته‌ای داخلی تولید شده در کره را می‌توان تقریباً با یک معادله سهموی به‌صورت زیر نشان داد:

$$u'''(r)=u_0'''[1-(r/R)^2],$$

که در آن u_0''' انرژی هسته‌ای تولیدی در مرکز کره است. می‌خواهیم توزیع دما را در المان سوختی را به‌دست آوریم.



شکل ۱۹-۳

طی یک فرمولاسیون عادی، به مساله‌ای دو منطقه‌ای می‌رسیم. اگرچه فرمولاسیون و حل آن‌را رها کرده و به خواننده واگذار می‌کنیم، اما مساله را به‌صورت زیر بررسی می‌نماییم. کل انرژی داخلی تولید شده در کره به‌صورت زیر است.

$4\pi r^2\delta r$

$$4\pi u_0'''\int_0^R[1-(r/R)^2]r^2\,dr=\frac{8}{15}\pi R^3u_0'''.$$

این انرژی تحت شرایط پایا و به شکل حرارت q، با گذر از توسط مقاومت هدایتی روکش و مقاومت جابه‌جایی خارجی به محیط سرد منتقل می‌شود. بین ویژگی‌های کره و روکش به ترتیب با انتخاب زیرنویس‌های ۱ و ۲ تمایز قائل می‌شویم و دمای سطح مشترک را با T_{12} نشان داده و خواهیم داشت:

$$\frac{8}{15}\pi R^3u_0'''=q=U_oA_o(T_{12}-T_\infty),\qquad (۷۴-۳)$$

که در آن $A_o=4\pi R_o^2$ بوده و داریم:

$$\frac{1}{U_o}=\frac{R_o}{k_2}\left(\frac{R_o}{R}-1\right)+\frac{1}{h},$$

$$\frac{1}{U_oA_o}=\frac{1\times A_o}{h_oA_o}+\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_o}}{4\pi R}\times A_o$$

که این رابطه از معادله (۲۳-۳) به‌دست می‌آید. با استفاده از مقادیر A_o و U_o، می‌توانیم معادله (۷۴-۳) را به‌صورت زیر بازآرایی کنیم:

$$\frac{8}{15}\pi R^3u_0'''=\frac{4\pi R_o^2(T_{12}-T_\infty)}{(R_o/k_2)(R_o/R-1)+1/h}.\qquad (۷۵-۳)$$

با استفاده از معادله (۷۵-۳) به سادگی دمای سطح مشترک T_{12} حاصل می‌شود:

$$T_{12}-T_\infty=\frac{2}{15}\frac{u_0'''R^2}{k_2}\left[1-\frac{1}{R_o/R}+\frac{k_2/hR}{(R_o/R)^2}\right].\qquad (۷۶-۳)$$

با در نظر گرفتن یک آرایش مناسب از معادله (۳۶-۳) می‌توان دمای روکش را برحسب $T_{12}-T_\infty$ به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\frac{T_2(r)-T_\infty}{T_{12}-T_\infty}=U_o\left[\frac{R_o}{k_2}\left(\frac{R_o}{r}-1\right)+\frac{1}{h}\right],\qquad R\le r\le R_o.\qquad (۷۷-۳)$$

سرانجام، مساله دمای کره را می‌توانیم به صورت زیر فرموله نماییم:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT_1}{dr}\right)+\frac{u_0'''}{k_1}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]r^2=0,\quad T_1(0)=\text{محدود},\quad T_1(R)=T_{12}.\qquad (۷۸-۳)$$

حل معادله (۷۸-۳) دمای کره را با توجه به دمای سطح مشترک به صورت زیر خواهد داد:

$$\frac{T_1(r)-T_{12}}{u_0'''R^2/k_1}=\frac{7}{60}-\left(\frac{r}{R}\right)^2\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{20}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right],\qquad 0\le r\le R.\qquad (۷۹-۳)$$

تذکری در مورد روند دنبال شده در تعیین دمای مثال‌های ۶-۳ و ۷-۳: اگرچه هر دو مساله جزو مسائل دو منطقه‌ای هستند، ممکن است دما بدون در نظر گرفتن فرمولاسیون دو منطقه‌ای

به‌دست آید، زیرا در هر دو مورد شار حرارتی شعاعی برای انرژی داخلی تولید شده برقرار می‌باشد. بنابراین، با ضرب این شار در مجموع مقاومت‌های جابه‌جایی و هدایتی مناسب، می‌توانیم دمای نسبی پلاستیک یا روکش را با اطلاع از دمای محیط اطراف یا محیط سرد به‌دست آوریم. سپس دمای سیم یا المان حرارتی را برحسب دمای سطح مشترک پلاستیک یا روکش با دنبال کردن مراحل متداول کار، به‌دست می‌آوریم. این روش را می‌توان به‌عنوان روش دیگری برای حل مساله ۲-۳ نیز به‌کار برد.

دیگر جنبه مساله ۷-۳، بی‌خطر بودن عملیات راکتور است، که این امر به‌طورکلی با تعیین حداکثر دمای مجاز سوخت تعیین می‌شود. ممکن است برای مقادیر ویژه u''' و R، اثر ضخامت روکش روی این دما در حالت کروی مهم‌تر از حالت استوانه‌ای باشد[1]. با بازآرایی معادله (۳-۷۵) برای این هدف خواهیم داشت:

$$\theta = \frac{T_{12}-T_\infty}{2u_0'''R^2/15k_2} = 1 - \frac{1}{R_o/R} + \frac{k_2/hR}{(R_o/R)^2}\cdot \qquad (۳\text{-}۸۰)$$

تنها اکسترمم مهم فیزیکی A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{d\theta}{d(R_o/R)} = \frac{1}{(R_o/R)^2} + \frac{2k_2/hR}{(R_o/R)^3}, = ۰$$

که شعاع بحرانی روکش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$(R_o/R)_c = 2(k_2/hR) \quad \text{یا} \quad (R_o)_c = 2k_2/h. \qquad (۳\text{-}۸۱)$$

می‌توان نشان داد که برای $R_o = (R_o)_c$ عبارت $d^2\theta/d(R_o/R)^2 > 0$ حاصل می‌شود. بنابراین فرض می‌شود که T_{12} حداقل مقدار ممکن خود برای یک مقدار ویژه u''' و R داراست وقتی‌که شعاع خارجی روکش متناسب با شعاع بحرانی باشد. کاملاً واضح است که اگر این حداقل، قابل دستیابی باشد، توزیع دمای حداقل در المان سوختی را نتیجه می‌دهد.

یعنی q_{max}

۴-۳. اصل جمع‌پذیری[2]

مسائل خطی، نظیر مسائل هدایت با ویژگی‌های ثابت، اغلب ممکن است با استفاده از اصل جمع‌پذیری به تعدادی از مسائل ساده‌تر تبدیل شود. البته مسائل یک بعدی نیازی به استفاده از

۱- در حقیقت ضخامت روکش با توجه به ملاحظات اتمی اندازه‌گیری می‌شود نه دمای سوخت. بخشی از مساله که مورد مطالعه است گر چه برای هدف ما غیرواقع‌بینانه است ولی اندازه‌گیری شعاع بحرانی را برای هندسه کروی تشریح می‌کند.

2- Principle of Superposition

اصل جمع‌پذیری ندارند و نمی‌توان اهمیت استفاده از این اصل را در مورد آن‌ها نشان داد. به‌هرحال در اینجا، هدف، آشنا ساختن خواننده با این روش است و استفاده از آن فقط بعضی اوقات برای مسائل یک بعدی پایا مناسب است، اما برای مسائل چندبعدی یا مسائل ناپایا لازم و ضروری است (این امر در بخش ۴-۷ بررسی خواهد شد).

ابتدا می‌خواهیم یک سری از مفاهیم ریاضی لازم را معرفی نماییم. یک معادله دیفرانسیل خطی یا یک شرط مرزی خطی همگن است اگر یک تابع $y(x)$ یا $Cy(x)$ در آن صدق کند، که C یک ثابت اختیاری است. به عبارت دیگر، یک معادله دیفرانسیل خطی وقتی همگن است که همه عبارت‌هایش یا شامل یک تابع نامعلوم و یا شامل یکی از مشتقات آن تابع نامعلوم باشد. به‌طور مشابه یک شرط مرزی وقتی همگن است که یک تابع نامعلوم یا مشتقات آن، یا هر ترکیب خطی از این تابع و مشتقاتش، در شرط صدق کنند. بنابراین به عنوان مثال داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = f_3(x) \qquad (۳\text{-}۸۲)$$

که معادله فوق یک معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن مرتبه دوم است و معادله زیر یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0 \qquad (۳\text{-}۸۳)$$

. در شرط مرزی $x = a$ داریم:

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \beta, \quad \text{یا} \quad y'(a) \pm \gamma y(a) = \delta$$

که این روابط نشان‌دهنده شرط مرزی خطی غیرهمگن است در حالی‌که برای شرط مرزی خطی همگن داریم:

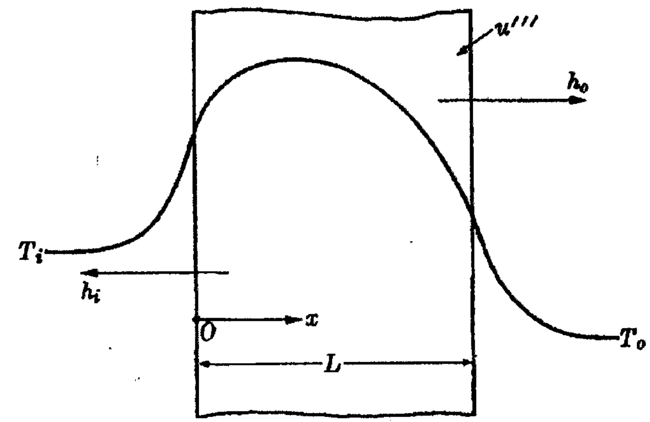
$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 0, \quad \text{یا} \quad y'(a) + \gamma y(a) = 0$$

حل کلی معادله (۳-۸۲) از جمع سه پاسخ خصوصی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = y_0 + C_1y_1 + C_2y_2, \qquad (۳\text{-}۸۴)$$

که اولین عبارت سمت راست متناظر با جواب خصوصی معادله غیرهمگن است و دیگر عبارات جواب‌های خصوصی معادله همگن (که معمولاً به جواب‌های خصوصی معادله همگن، جواب عمومی گفته می‌شود .م.) (۳-۸۳) می‌باشند. ثوابت C_1 و C_2 را با استفاده از شرایط مرزی مساله می‌توان به‌دست آورد. دلیل این‌که معادله (۳-۸۴) جواب معادله (۳-۸۲) است را می‌توان به سادگی با یک جایگزینی مستقیم نشان داد.

اصل جمع‌پذیری‌ای که ما از آن استفاده می‌کنیم به جای حل مسأله با فرمولاسیون مسأله سروکار داد. بنابراین، با استفاده از این اصل، فرمولاسیون اصلی مسأله به صورت مجموعی از فرمولاسیون مسائل ساده‌تر نوشته می‌شود. تعداد این مسائل ساده‌تر برابر تعداد ناهمگنی‌های موجود در فرمولاسیون مسأله اصلی است.[1] دوباره مثال ۱-۳ را مدنظر قرار دهید، یک صفحه صاف به ضخامت L دو ناحیه با دمای T_0 و T_i و ضرایب انتقال حرارت h_0 و h_i را از هم جدا می‌کند (شکل ۲۰-۳) به‌جای پیدا کردن مقدار u_0''' مناسب، که تولید انرژی داخلی به منظور حذف اتلاف حرارتی از محیطی با دمای بیشتر می‌باشد، می‌خواهیم دمای صفحه مربوط به یک u''' اختیاری را به‌دست آوریم.



شکل ۲۰-۳

پس فرمولاسیون مسأله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{u'''}{k}=0,\quad +k\frac{dT(0)}{dx}=h_i[T(0)-T_i],\quad -k\frac{dT(L)}{dx}=h_o[T(L)-T_o]. \qquad (۳\text{-}۸۵)$$

معادله (۳-۸۵) دارای سه پتانسیل است، u'''، T_i و T_o که باعث تغییر توزیع دمایی در صفحه می‌شوند. بنابراین مسأله به سه مسأله به صورت زیر جداسازی می‌شود:

$$T=T_1+T_2+T_3, \qquad (۳\text{-}۸۶)$$

که T_1، T_2 و T_3 در معادلات زیر صدق می‌کنند:

۱- در مسائلی که به لحاظ فیزیکی اهمیت دارند، به جای واژه ناهمگنی از واژه پتانسیل استفاده می‌شود. به عنوان مثال، پتانسیل حرارتی، پتانسیل الکتریکی و غیره.

$$\frac{d^2T_1}{dx^2}+\frac{u'''}{k}=0,\qquad +k\frac{dT_1(0)}{dx}=h_iT_1(0),\qquad -k\frac{dT_1(L)}{dx}=h_0T_1(L);$$

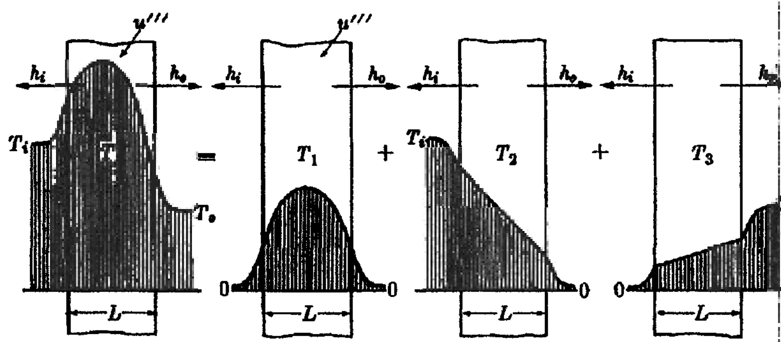
(۳-۸

$$\frac{d^2T_2}{dx^2}=0,\qquad +k\frac{dT_2(0)}{dx}=h_i[T_2(0)-T_i],\qquad -k\frac{dT_2(L)}{dx}=h_0T_2(L);$$

(۳-۸

$$\frac{d^2T_3}{dx^2}=0,\qquad +k\frac{dT_3(0)}{dx}=h_iT_3(0),\qquad -k\frac{dT_3(L)}{dx}=h_0[T_3(L)-T$$

(۳-۸



معادله (۳-۸۵) معادله (۳-۸۷) معادله (۳-۸۸) معادله (۳-۸۹)

شکل ۲۱-۳ خط اینجا تمرین هست

ـت اصل جمع‌پذیری به سادگی با جمع کردن معادلات (۳-۸۷)، (۳-۸۸)، و (۳-۸۹) در کنار ـیگر نظیر آن‌چه در معادله (۳-۸۶) بیان شده است، نشان داده می‌شود. نتیجه این جمع کردن ـادله (۳-۸۵) می‌باشد.

بازبینی معادلات (۳-۸۵)، (۳-۸۷)، (۳-۸۸)، و (۳-۸۹) دو حقیقت مهم را آشکار می‌کند. (i) ـده جمع‌پذیری روی همگن بودن تاثیر می‌گذارد اما روی نوع معادله دیفرانسیل یا شرایط مرزی تاثیر است؛ (ii) معادلاتی که از تفکیک یک معادله دیفرانسیل با استفاده از اصل جمع‌پذیری ـصل می‌شوند دارای مختصات یکسانی هستند.

گذشته از این، اصل جمع‌پذیری در انتخاب یک دمای مرجع نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. این ـخاب یک انتخاب کاملاً اختیاری است. به عنوان مثال، در مسأله قبلی دمای مرجع را صفر در نظر ـفتیم. البته مطلوب‌تر است که دما، بالاتر از دمای هر کدام از محیط‌ها اندازه‌گیری شوند. بنابراین:

$$T(x) = T_0 + \theta(x) \quad \text{یا} \quad T(x) = T_i + \psi(x)$$

به عنوان مثال با استفاده از معادله اول ($T(x) = T_0 + \theta(x)$) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \qquad + k\frac{d\theta(0)}{dx} = h_i[\theta(0) - \theta_i], \qquad - k\frac{d\theta(L)}{dx} = h_0\theta(L), \tag{۳-۹۰}$$

که در آن $\theta_i = T_i - T_0$ می‌باشد. فرمولاسیون جدید، یعنی معادله (۹۰-۳)، تنها دو ناهمگنی دارد. بنابراین، می‌تواند تبدیل به دو مساله جداگانه شود نه سه مساله.

۵-۳. جامدات ناهمگن (ضریب هدایت حرارتی متغیر)

استفاده از جامدات ناهمگن به علت کاربرد آن در محدوده وسیعی از دما، در تکنولوژی امروزه اهمیت روزافزون پیدا کرده است به عنوان مثال استفاده در المنت‌های سوختی درون راکتور، اجزاء وسایل نقلیه فضایی، انجماد در ریخته‌گری و غیره. در این بخش یک روش کلی حل برای مسائل ناپایای سه‌بعدی در جامدات ناهمگن به‌دست می‌آید.

اکنون دوباره به معادله حرارت هدایتی در جامدات غیرهمگن توجه می‌کنیم،

$$\rho c\frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k\,\nabla T) + u'''. \tag{۲-۸۸}$$

اگر k، c، و u''' تنها تابعی از مکان باشند، معادله (۸۸-۲) یک معادله دیفرانسیلی خطی با ضرایب متغیر خواهد شد. حل چنین معادلاتی نیاز به ریاضی پیچیده‌ای ندارد (مساله ۳۷-۳ ملاحظه شود). اگر k و c وابسته به دما، اما مستقل از مکان باشند در این صورت معادله (۸۸-۲) غیرخطی خواهد شد و به راحتی حل نمی‌شود. (آیا وابستگی دمایی u'''، پیچیدگی برای مساله ایجاد خواهد کرد؟) معمولاً، روش‌های عددی برای حل این مسائل استفاده می‌شود. تعدادی از روش‌های تحلیلی اکنون برای حل این مسائل موجود است. یکی از آن‌ها روش کرشهف[1] است که تا حدود زیادی یک روش کلی است در زیر تشریح شده است.

با تعریف یک دمای جدید θ که توسط تبدیل کرشهف به دمای مساله، T مرتبط می‌شود، معادله (۸۸-۲) به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل خواهد شد،

تبدیل کرشهف،

$$\theta = \frac{1}{k_R}\int_{T_R}^{T} k(T)dT, \tag{۳-۹۱}$$

1- Kirchhoff

که در آن T_R یک دمای مرجع مناسب است و $k_R = k(T_R)$، T_R و k_R تنها برای تامین بعد دمایی θ و معلوم کردن مقدار آن تعریف می‌شوند. از معادله (۹۱-۳) خواهیم داشت:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{k_R}\frac{dT}{dt} \tag{۳-۹۲}$$

و

$$\nabla\theta = \frac{k}{k_R}\nabla T. \tag{۳-۹۳}$$

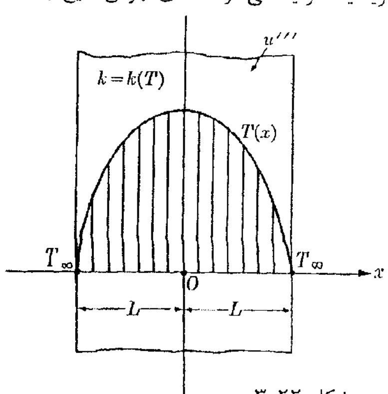
با قرار دادن معادله (۹۲-۳) یا (۹۳-۳) در معادله (۸۸-۲) خواهیم داشت:

$$\frac{d\theta}{dt} = a\nabla^2\theta + \left(\frac{a}{k_R}\right)u''', \tag{۳-۹۴}$$

که در آن a و u''' به عنوان تابعی از متغیر جدید θ تعریف می‌شوند. برای بسیاری از جامدات وابستگی دمایی a در مقایسه با وابستگی دمایی k قابل صرف‌نظر است. در چنین مواردی، اگر u''' مستقل از T باشد معادله (۹۴-۳) با معادله (۹۱-۲) یکسان خواهد شد به‌جز برای ضرایب مختلف اما ثابت u'''. بنابراین جواب به‌دست آمده برای جامدات همگن می‌تواند برای جامدات غیرهمگن مورد استفاده قرار گیرد، اگر T با θ و ρc با k_R/a جایگزین شوند و البته به شرطی که شرایط مرزی برحسب T یا $\partial T/\partial n$ باشند. هنگامی‌که شرایط مرزی شامل عبارت جابه‌جایی یعنی $h(T_\sigma - T_\infty)$ باشد، روش کرشهف قابل استفاده نیست. مثال یک بعدی زیر طرز استفاده از این روش را نشان می‌دهد.

مثال ۸-۳. یک مایع به‌وسیله یک گرمکن الکتریکی مسطح با ضخامت $2L$ جوشانده می‌شود. انرژی داخلی u''' به‌صورت یکنواخت توسط الکتریسیته تولید می‌شود. دمای جوش مایع T_∞ است (شکل ۲۲-۳) می‌خواهیم دمای پایای صفحه را برای (i): $k = k(T)$؛ (ii): $k = k_R(1 + \beta T)$ به‌دست آوریم.

فرمولاسیون مساله به صورت زیر است.



شکل ۲۲-۳

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + u''' = 0,$$

$$\frac{dT(0)}{dx} = 0, \tag{۳-۹۵}$$

$$T(L) = T_\infty$$

با استفاده از شکل یک بعدی معادله (۹۳-۳) خواهیم داشت.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{k}{k_R}\frac{dT}{dx},$$

می‌توانیم معادله (۳-۹۵) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{u'''}{k_R} = 0, \quad \frac{d\theta(0)}{dx} = 0, \quad \theta(L) = \theta_\infty, \tag{۳-۹۶}$$

که طبق معادله (۳-۹۱):

$$\theta_\infty = \frac{1}{k_R}\int_{T_R}^{T_\infty} k(T)dT. \tag{۳-۹۷}$$

حل معادله (۳-۹۶) به این صورت خواهد بود:

$$\frac{\theta(L)-\theta_\infty}{u''' L^2/2k_R} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2. \tag{۳-۹۸}$$

با قرار دادن معادله (۳-۹۳) و (۳-۹۷) در معادله (۳-۹۸) دمای صفحه به‌صورت T به‌دست می‌آید:

$$\frac{(1/k_R)\int_{T_\infty}^{T} k(T)dT}{u''' L^2/2k_R} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2. \tag{۳-۹۹}$$

برای حالت‌های خاص $k = k_R(1+\beta T)$ معادله (۳-۹۹) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{[T(x)-T_\infty]+(\beta/2)[T^2(x)-T_\infty^2]}{u''' L^2/2k_R} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2. \tag{۳-۱۰۰}$$

با حل معادله (۳-۱۰۰) برای T و نادیده گرفتن ریشه‌ای که به لحاظ فیزیکی بی‌معنی است، دمای صفحه را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T(x)-T_\infty}{u''' L^2/2k_R} = \left(\frac{1+\beta T_\infty}{\beta u''' L^2/2k_R}\right) \times \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{1+\beta T_\infty}\right)\left(\frac{\beta u''' L^2/2k_R}{1+\beta T_\infty}\right)\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]}\right]. \tag{۳-۱۰۱}$$

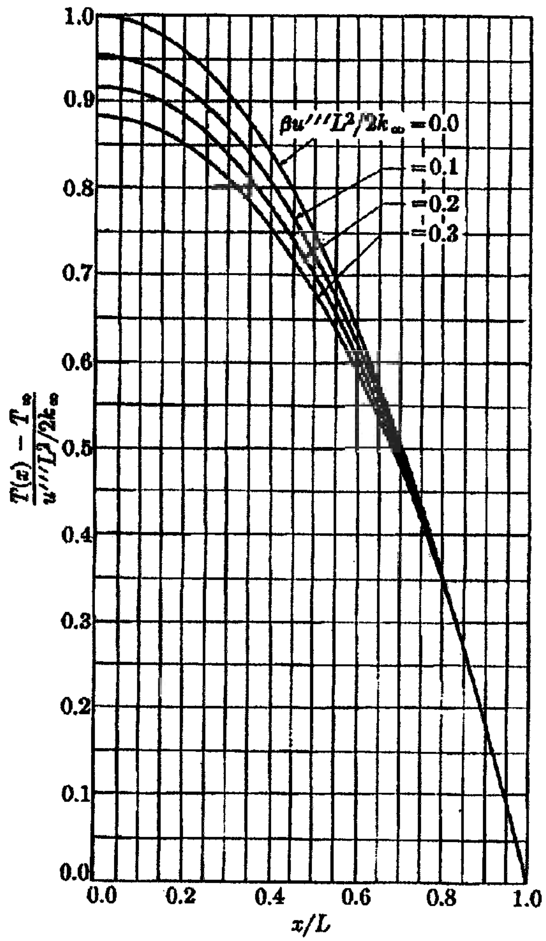
هنگامی‌که $\beta \to 0$، معادله (۳-۱۰۱) به دمای ثابت k میل می‌کند.

اگر دمای مرجع T_R در تبدیل کرشهف، دمای محیط T_∞ در نظر گرفته شود. معادله (۳-۱۰۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{T(x)-T_\infty}{u''' L^2/2k_\infty} = \left(\frac{1}{\beta u''' L^2/2k_\infty}\right)\left[-1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{\beta u''' L^2}{2k_\infty}\right)\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]}\right]. \tag{۳-۱۰۲}$$

معادله فوق از قرار دادن $\beta T_\infty = 0$ در معادله (۳-۱۰۱) و استفاده از $k_R = k_\infty$ به‌دست آمده است. در شکل ۳-۲۳ اثرات ضریب هدایت خطی روی دمای صفحه نشان داده شده که این

نمودارها از معادله (۳-۱۰۲) برای مقادیر مختلف $\beta u''' L^2/2k_\infty$ محاسبه شده و به‌صورت تابعی از x/L نشان داده شده است.



شکل ۳-۲۳

۳-۶. حل سری‌های توانی، توابع بسل

در بخش ۳-۷ به شرح یک سری از مسائل یک‌بعدی به‌نام سطوح گسترش‌یافته (پره‌ها، گیره‌ها، یا مهره‌ها) خواهیم پرداخت. هنگامی‌که مقطع عرضی یک سطح گسترش‌یافته متغیر باشد،

فرمولاسیون مساله به یک معادله دیفرانسیل خطی درجه دوم با ضرایب متغیر تبدیل می‌شود. این معادله دیفرانسیل یک شکل از معادله بسل است، ولی در موارد استثنایی یک معادله خاص به نام معادله هم‌بعد حاصل می‌شود. روش‌های حل مناسب برای معادلات دیفرانسیل درجه دوم خطی با ضرایب ثابت، برای معادلات با ضرایب متغیر مناسب نمی‌باشد. همچنین می‌توانیم معادلات با ضرایب متغیر را که دارای جواب قابل تعریف در یک بازه مناسب هستند، برحسب سری‌های توانی داشته باشیم. بنابراین، این بخش به مرور مختصر حل سری‌های توانی از معادلات بسل و تشریح خصوصیات معادلات بسل اختصاص دارد. پیش از مرور می‌خواهیم ابتدا به بررسی جزییات سری‌های توانی بپردازیم.

یک سری نامحدود به‌صورت زیر:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

این عبارت بسط سری توانی $y(x)$ در نزدیکی $x = x_0$ نامیده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$y(x) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} a_k (x - x_0)^k.$$

برای بازه‌ای از x که حد بالا موجود است سری همگرا خوانده می‌شود. خواننده می‌تواند برای مطالعه بیشتر همگرایی سری‌های توانی، به کتاب‌های معادلات دیفرانسیل مراجعه کند.

حال می‌خواهیم به بررسی روش حل سری‌های توانی بپردازیم. از آنجایی‌که این روش برای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و متغیر قابل کاربرد است، می‌توان آن‌را به‌صورت معادله دیفرانسیل ساده با ضرایب ثابت زیر نشان داد:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \qquad (۳-۱۰۳)$$

سری توانی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad (۳-۱۰۴)$$

که این معادله در بازه‌ای شامل $x = 0$ همگرا است. با قرار دادن معادله (۳-۱۰۴) در معادله (۳-۱۰۳) خواهیم داشت.

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + (a_2 + 12a_4)x^2 + \cdots = 0. \qquad (۳-۱۰۵)$$

معادله (۳-۱۰۵) در بازه‌ای از x که ضرایب تمام توان‌های x به‌طور مستقل حذف می‌شوند، معتبر است. نتایج به‌صورت زیر می باشد:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0,$$

$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$

$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots$

$$a_3 = -\frac{1}{6}a_1,$$
$$a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0,$$
$$a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = \frac{1}{120}a_1,$$
$$\vdots$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۳-۱۰۵)، حل معادله (۳-۱۰۳) را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$y(x) = a_0(1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots) + a_1(x - x^3/6 + x^5/120 - \cdots),$$

که به‌صورت زیر نیز قابل بیان است.

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (۳-۱۰۶)$$

دو سری مشاهده شده در معادله فوق به ترتیب بسط مک‌لورن $\cos x$ و $\sin x$ می‌باشند از این‌رو معادله (۳-۱۰۶) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x. \qquad (۳-۱۰۷)$$

واضح است که رابطه (۳-۱۰۷) به‌وسیله روش کلاسیک و با در نظر گرفتن $y = e^{rx}$ نیز به‌دست می‌آید، که با قرار دادن $y = e^{rx}$ در معادله دیفرانسیل (۳-۱۰۳)، معادله مشخصه به‌دست می‌آید و r از معادله مشخصه محاسبه می‌شود.

سپس ما به بررسی معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی با ضرایب متغیر، یعنی معادله بسل می‌پردازیم.

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (m^2x^2 - v^2)y = 0, \qquad (۳-۱۰۸)$$

معادله بسل اصلی

که در آن m یک پارامتر است و v می‌تواند صفر، عدد کسری یا عدد صحیح باشد.

حل معادله (۳-۱۰۸) می‌تواند همانند معادله (۳-۱۰۳) با استفاده از سری‌های توانی به‌دست آید. نتیجه به این صورت است:

جواب معادله بسل اصلی

$$y(x) = a_0 J_v(mx) + a_1 Y_v(mx). \qquad (۳-۱۰۹)$$

در معادله (۳-۱۰۹)،

$$J_v(mx) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(mx/2)^{2k+v}}{k!\,\Gamma(k+v+1)} \qquad (۳-۱۱۰)$$

و

$$Y_\nu(mx) = \frac{(\cos\nu\pi) J_\nu(mx) - J_{-\nu}(mx)}{\sin\nu\pi}, \qquad (۳-۱۱۱)$$

که

$$J_{-\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(mx/2)^{2k-\nu}}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)}. \qquad (۳-۱۱۲)$$

تابع ظاهر شده در مخرج معادله (۳-۱۱۰) و (۳-۱۱۲)، معروف به تابع گاما است که برای اعداد صحیح به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \quad \Gamma(1) = 0! = 1$$

و برای اعداد اعشاری بدین صورت می‌باشد:

$$\Gamma(\nu)\,\Gamma(n+1) = \pi/\sin\pi\nu, \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}$$

اگر ν عدد صحیح نباشد، $J_\nu(mx)$ و $J_{-\nu}(mx)$ جواب‌های مستقل معادلات (۳-۱۰۸) خواهند بود. اما اگر ν یک عدد صحیح باشد. که به آن n می‌گوییم، خواهیم داشت:

$$J_n(mx) = (-1)^n J_{-n}(mx). \qquad (۳-۱۱۳)$$

برای به‌دست آوردن پاسخ دوم معادله (۳-۱۰۸) که برای تمام مقادیر ν تعریف شده است. معادله (۳-۱۱۱) به‌صورت زیر تشریح می‌شود:

$$\lim_{\nu\to n} Y_\nu(mx) \longrightarrow Y_n(mx),$$

که

$$nY_\nu(mx) = 2\left(\ln\frac{mx}{2} + \gamma\right) J_n(mx) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{mx}{2}\right)^{2k-n} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}[\varphi(k) + \varphi(k+n)] \frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k!\,(n+k)!}, \qquad (۳-۱۱۴)$$

و

$$\varphi(k) = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \gamma = 0.5772\ldots$$

تابع $J_\nu(mx)$ به تابع بسل نوع اول از درجه ν و تابع $Y_\nu(mx)$ به تابع بسل نوع دوم از درجه ν معروف است.

معادله زیر که مرتبط با معادله (۳-۱۰۸) است معادله بسل اصلاح‌شده نام دارد.

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - (m^2x^2 + \nu^2)y = 0. \qquad (۳-۱۱۵)$$

معادله بسل اصلاح شده

بررسی‌ها نشان می‌دهد که با جایگزینی x با ix معادله (۳-۱۱۵) تبدیل به معادله (۳-۱۰۸) می‌شود. از این‌رو، حل معادله (۳-۱۱۵) به سرعت با قرار دادن ix به جای x در رابطه (۳-۱۰۹) به‌دست می‌آید، سپس خواهیم داشت:

$$y(x) = a_0 J_\nu(imx) + a_1 Y_\nu(imx). \qquad (۳-۱۱۶)$$

و در نتیجه طبق معادله (۳-۱۱۰) خواهیم داشت:

$$J_\nu(imx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k i^{2k+\nu} \frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}. \qquad (۳-۱۱۷)$$

ولی به جای استفاده از معادله (۳-۱۱۶) به عنوان حل کلی معادله (۳-۱۱۵)، متداول‌تر است که تابع $J_\nu(imx)$ را با عبارت $I_\nu(mx)$ به عنوان جواب ویژه اول جایگزین کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_\nu(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}. \qquad (۳-۱۱۸)$$

مقایسه روابط ۳-۱۱۷ و ۳-۱۱۸ رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$J_\nu(imx) = i^\nu I_\nu(mx). \qquad (۳-۱۱۹)$$

اگر ν عدد صحیح نباشد، $I_{-\nu}(mx)$ مستقل از $I_\nu(mx)$ می‌باشد و بنابراین جواب ویژه دیگر معادله (۳-۱۱۵) خواهد بود؛ جواب کامل را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از $I_\nu(mx)$ و $I_{-\nu}(mx)$ نوشت. اما برای به‌دست آوردن جواب ویژه دوم مناسب برای تمام مقادیر ν خواهیم داشت.

$$K_\nu(mx) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(mx) - I_\nu(mx)}{\sin\nu\pi}, \qquad (۳-۱۲۰)$$

بنابراین:

$$\lim_{\nu\to n} K_\nu(mx) \longrightarrow K_n(mx),$$

که در آن n یک عدد صحیح است. با این تعاریف:

$$K_\nu(mx) = (-1)^{n+1}\left(\ln\frac{mx}{2} + \gamma\right) I_n(mx) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{mx}{2}\right)^{2k-n} + \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(k) + \varphi(k+n)] \frac{(mx/2)^{2k+n}}{k!\,(n+k)!}, \qquad (۳-۱۲۱)$$

که در آن مقادیر $\varphi(k)$ و γ همان مقادیری است که در معادله (۳-۱۱۴) داده شده است.

حال می‌خواهیم حل کلی معادله (۳-۱۱۵) را به صورت دیگری بنویسیم:

$$y(x) = a_0 I_v(mx) + a_1 K_v(mx). \qquad (۳\text{-}۱۲۲)$$

جواب معادله بسل اصلاح شده

تابع $I_v(mx)$ تابع بسل اصلاح‌شده نوع اول از درجه v و تابع $K_v(mx)$ تابع بسل اصلاح‌شده نوع دوم در درجه v نامیده می‌شود.

جداول زیادی از توابع بسل و توابع بسل اصلاح‌شده تنظیم شده است. خواننده می‌تواند برای یافتن حل عددی به این جداول مراجعه نماید (به علت تعدد مقالات در این مورد مرجع خاصی در اینجا پیشنهاد نشده است).

حال می‌خواهیم حل معادله دیفرانسیل به شکل کلی زیر را بیان نماییم:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + b^2x^2y = 0 \qquad (۳\text{-}۱۲۳)$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت توابع بسل نیز بیان نمود. ابتدا متغیر وابسته را به صورت $y = x^v z$ جایگزین کرده و معادله (۳-۱۲۳) را بازآرایی می‌کنیم.

$$x^v\frac{d^2z}{dx^2} + (a+2v)x^{v-1}\frac{dz}{dx} + \{b^2x^v + [(a-1)v + v^2]x^{v-2}\}z = 0.$$

حال با در نظر گرفتن v به‌طوری‌که $a + 2v = 1$ باشد، و تقسیم هر کدام از عبارات بر x^{v-2} به رابطه زیر می‌رسیم:

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dz}{dx}\right) + (b^2x^2 - v^2)z = 0, \qquad (۳\text{-}۱۲۴)$$

که مشابه معادله (۳-۱۰۸) می‌باشد. بنابراین، اگر جواب معادله (۳-۱۲۴) $Z_v(bx)$ باشد، حل معادله (۳-۱۲۳) به این صورت خواهد بود:

$$y(x) = x^v Z_v(bx), \qquad (۳\text{-}۱۲۵)$$

که در آن Z_v برای نمایش کلی توابع بسل از درجه v استفاده شده است که $v = (1-a)/2$ می‌باشد.

در انتها، به بررسی معادله دیفرانسیل در شکل کلی زیر می‌پردازیم:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\alpha\frac{dy}{dx}\right) + \gamma^2x^\beta y = 0, \qquad (۳\text{-}۱۲۶)$$

که در آن α و β مثبت بوده و γ ممکن است حقیقتی یا موهومی باشد. فرمولاسیون مساله مربوط به سطوح گسترش‌یافته با مقاطع عرضی متغیر به شکل کلی داده شده توسط معادله (۳-۱۲۶) منتهی می‌شود. حال ما با تغییر متغیر نشان می‌دهیم که معادله (۳-۱۲۶) شکل دیگری از معادله بسل می‌باشد. با تغییر متغیر x به صورت $x = t^\mu$ و بازآرایی معادله (۳-۱۲۶) خواهیم داشت.

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t[\mu(\alpha-1)+1]\frac{dy}{dt} + \gamma^2\mu^2t^{\mu(\beta-\alpha+2)}y = 0.$$

اگر μ در رابطه $\mu(\beta-\alpha+2) = 2$ صدق کند، خواهیم داشت:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t[\mu(\alpha-1)+1]\frac{dy}{dt} + \gamma^2\mu^2t^2y = 0, \qquad (۳\text{-}۱۲۷)$$

که این معادله به شکل معادله (۳-۱۲۳) درآمد. بنابراین، جواب معادله (۳-۱۲۶) از روی معادله (۳-۱۲۵) به‌وسیله ارتباط دادن پارامترهای موجود در (۳-۱۲۷) با آنهایی که در معادله (۳-۱۲۳) وجود دارد، نوشته می‌شود، پس خواهیم داشت.

$$y(t) = t^v Z_v(\gamma\mu t), \qquad (۳\text{-}۱۲۸)$$

که در آن $v = \mu(1-\alpha)/2 = (1-\alpha)/(\beta-\alpha+2)$ می‌باشد. اگر به متغیرهای مستقل قبلی باز گردیم و به جای t از $x^{1/\mu}$ استفاده کنیم، معادله (۳-۱۲۸) به‌صورت زیرخواهد شد:

$$y(x) = x^{v/\mu}Z_v\left(\gamma\mu x^{1/\mu}\right), \qquad (۳\text{-}۱۲۹)$$

که در آن $\beta - \alpha + 2 \neq 0$ خواهند بود. پارامترهای موجود در (۳-۱۲۹) با پارامترهای (۳-۱۲۶) به‌وسیله روابط $v = (1-\alpha)/(\beta-\alpha+2)$، $1/\mu = (\beta-\alpha+2)/2$ و $v/\mu = (1-\alpha)/2$ مرتبط می‌شوند.

اگر علامت جمله دوم در معادله (۳-۱۲۶) منفی باشد، با جایگزینی $i\gamma$ به جای γ در معادله (۳-۱۲۹) می‌توانیم جواب را به‌صورت توابع بسل نوع اول و دوم با جملات دارای عبارات موهومی یا به‌جای آن به‌صورت توابع بسل اصلاح‌شده نوع اول و دوم با جملات دارای عبارات حقیقی بیان کنیم.

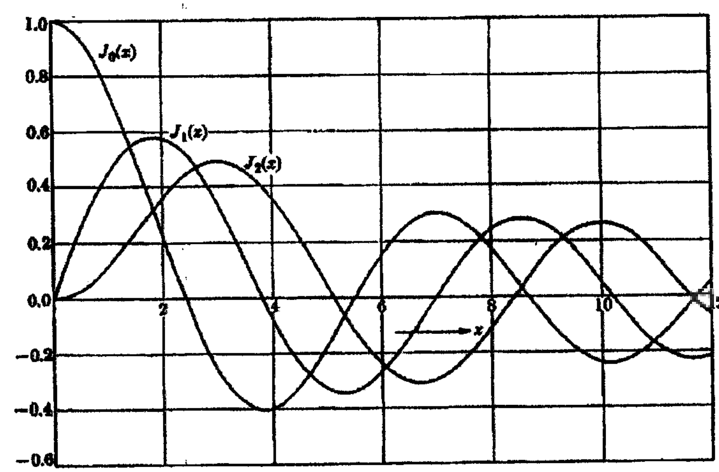
حالت خاص معادله (۳-۱۲۶) برای $\beta - \alpha + 2 = 0$ با بسط جمله اول معادله و تقسیم نتایج بر $x^{\alpha-2}$ به‌دست خواهد آمد.

بنابراین خواهیم داشت:

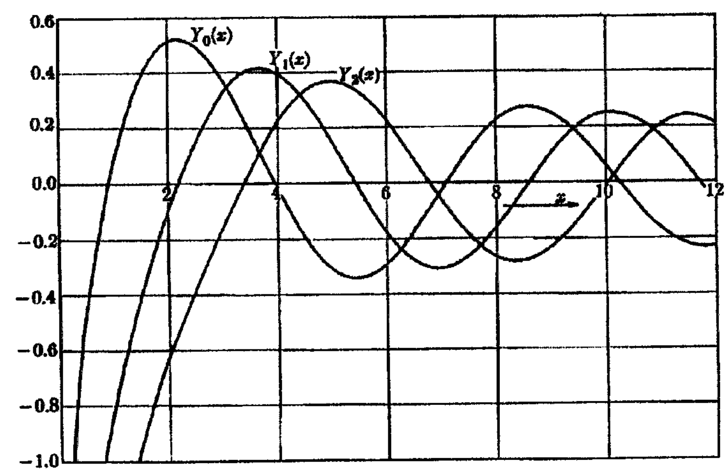
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x\frac{dy}{dx} + \gamma^2y = 0, \qquad (۳\text{-}۱۳۰)$$

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^{-x}}{(2\pi x)^{1/2}} \left\{1 - \frac{4\nu^2-1^2}{1!8x} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2} - \cdots \right\}, \quad (۳-۱۵۶)$$

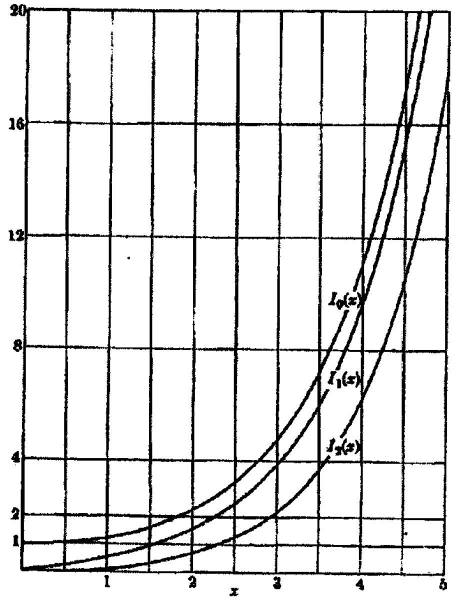
$$K_\nu(x) \sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left\{1 + \frac{4\nu^2-1^2}{1!8x} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8x)^2} + \cdots \right\}, \quad (۳-۱۵۷)$$



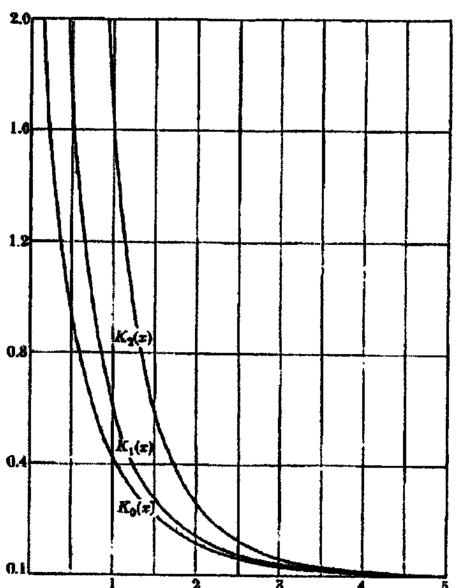
شکل ۳-۲۴ الف



شکل ۳-۲۴ ب



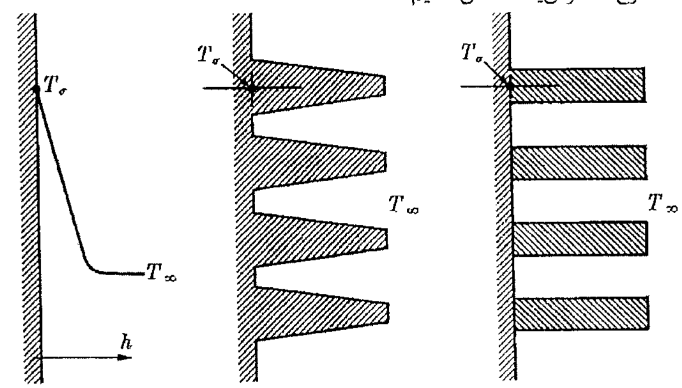
شکل ۳-۲۴ پ



شکل ۳-۲۴ ت

۷. نمایش گرافیکی رفتار کلی توابع بسل: گراف‌های رفتار کلی توابع بسل در شکل (۲۴-۳) نشان داده شده است.

در اینجا مرور توابع بسل به‌پایان رسید، حال می‌توانیم استفاده از این توابع را برای حل مسائل مربوط به سطوح گسترش‌یافته نشان دهیم.



الف ب پ

شکل ۲۵-۳

۸-۳. سطوح گسترش‌یافته (پره‌ها، گیره‌ها، میله‌ها)

پیش از فرمولاسیون مسائل انتقال حرارت مربوط به سطوح گسترش‌یافته می‌خواهیم به‌طور خلاصه راجع به مفهوم سطوح گسترش‌یافته و علت توجه ویژه به آن بحث کنیم. به همین منظور دیواره‌ای در دمای T_σ را در نظر می‌گیریم که در حال تبادل حرارتی با محیطی دمای T_∞ می‌باشد. (شکل ۲۵-۳ الف). نرخ انتقال حرارت از این دیواره به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$q = hA(T_\sigma - T_\infty). \qquad (۳\text{-}۱۵۸)$$

اولین هدف مطالعه انتقال حرارت، پیدا کردن راهی برای کنترل کردن q است. به‌عنوان مثال، طراحی مبدل‌های حرارتی اغلب بر پایه رسیدن به حداقل مساحت انتقال حرارت ممکن (برای سبکی و جمع و جور بودن)، یا رسیدن به حداکثر مقدار انتقال حرارت برای هر اندازه از مبدل حرارتی می‌باشد. واضح است که q در معادله (۱۵۸-۳) با افزایش موارد زیر افزایش می‌یابد:

(i) اختلاف دمای بین دیواره و محیط،

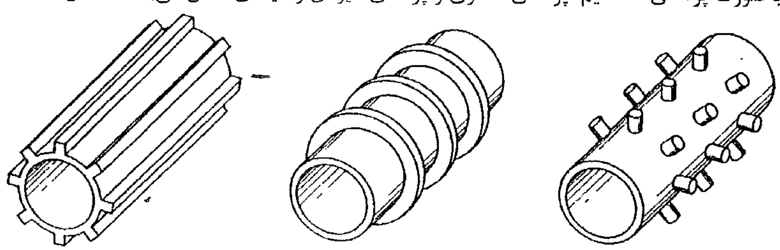
(ii) ضریب انتقال حرارت،

(iii) سطح انتقال حرارت (سطح مورد مطالعه یعنی سطح الف در شکل ۲۵-۳ بدون تغییر نگه داشته شود).

مورد اول نیاز به توضیح بیشتری ندارد؛ مورد دوم، موضوع کتاب‌های نوشته شده در مورد انتقال حرارت جابه‌جایی است؛ و مورد سوم موضوع این بخش است.

سطح دیواره، همان‌طور که در شکل ۲۵-۳ ب و پ نشان داده شده است، در کل به دو روش قابل افزایش است. در شکل ۲۵-۳ ب، سطح گسترش‌یافته جزیی از سطح اصلی است، که با ریخته‌گری یا قالب‌گیری ساخته شده است. در شکل ۲۵-۳ پ، سطوح گسترش‌یافته، که می‌توانند از ماده سطح اصلی ساخته شده یا نشده باشد، به سطح دیواره توسط لحیم یا جوشکاری یا پرس متصل شده باشند. هندسه مشابهی، هرچند کم کاربرد، به‌وسیله براده‌برداری و کنده‌کاری ماده اصلی نیز حاصل می‌شود. در عمل، تکنولوژی ساخت و قیمت، انتخاب شکل مناسب پره را تعیین می‌کند.

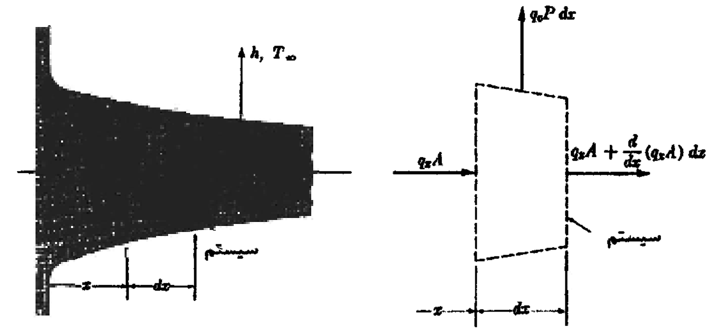
کاربرد سطوح گسترش‌یافته بی‌شمار است خصوصاً در انتقال حرارت در محیط گازی. در این حالت چون ضریب انتقال حرارت کوچک است تنها با استفاده از سطوح گسترش‌یافته، ممکن است یک سطح تبادل کوچک و فشرده به‌دست آید. مثال معروف استفاده از سطوح گسترش‌یافته پره‌های موجود در رادیاتور ماشین و دستگاه‌های گرماساز و مبدل‌های گاز به مایع و گاز به گاز، جوش‌آورها، موتورهای خنک‌کننده توسط هوا می‌باشند. دسته‌بندی معمول سطوح گسترش‌یافته به‌صورت پره‌های مستقیم، پره‌های حلقوی و پره‌های گیره‌ای و میله‌ای شکل می‌باشد (شکل ۲۶-۳).



(الف) پره مستقیم — (ب) پره حلقوی — (پ) پره گیره‌ای یا میله‌ای

شکل ۲۶-۳

حال می‌خواهیم به هدف خود بازگردیم، مطالعه انتقال حرارت در سطوح گسترش‌یافته، از آنجایی‌که دمای یک سطح گسترش‌یافته در تمام طول آن به علت انتقال حرارت جابه‌جایی به محیط ثابت نیست، انتقال حرارت از سطوح گسترش‌یافته با استفاده از معادله (۱۵۸-۳) قابل محاسبه نمی‌باشد. بنابراین ابتدا توزیع دما در سطوح گسترش‌یافته به‌دست می‌آید و سپس انتقال حرارت انجام شده در این توزیع دما محاسبه می‌شود.



(الف) (ب) شکل ۲۷-۳

حال یک سطح گسترش‌یافته با سطح مقطع متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۲۷-۳). فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم. (i) عرض مشخصه یا ضخامت پره در مقایسه با طول محوری آن ناچیز در نظر گرفته می‌شود. بنابراین توزیع دما در عرض در مقایسه با توزیع دمای محوری ناچیز می‌باشد. (ii) ضریب هدایت حرارتی ثابت است. (از تابعیت دمایی آن صرفنظر می‌کنیم). (iii) ضریب انتقال حرارت شعاعی و محوری مورد استفاده، متوسط مقدار واقعی آن است. تحت شرایط پایا و با استفاده از فرض (i) و با استفاده از چهار مرحله اول فرمولاسیون، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right) - q_c P = 0, \qquad (۳-۱۵۹)$$

که در این معادله T دمای محلی، x طول محوری، k ضریب هدایت حرارتی، A سطح مقطع عرضی متغیر، q_c شار حرارتی عرضی، و P محیط می‌باشد. معادله (۱۵۹-۳) شرط مرزی زیر تصدیق می‌کند:

$$q_c = h(T - T_\infty), \qquad (۳-۱۶۰)$$

دو شرط مرزی در x داریم. یکی وابسته به پایه و دیگری مربوط به نوک سطح گسترش‌یافته است. تمام این بخش‌ها مربوط به پنجمین و آخرین مرحله فرمولاسیون است.

از روی این دیدگاه و با قرار دادن معادله (۱۶۰-۳) در معادله (۱۵۹-۳) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right) - hP(T - T_\infty) = 0, \qquad (۳-۱۶۱)$$

برای تکمیل شدن فرمول‌ها تنها شرایط مرزی در جهت x مورد نیاز است. با توجه به ثابت بودن k طبق فرض (ii)، و اندازه‌گیری دماهای بالاتر از دمای محیط، می‌توان با بازآرایی معادله (۱۶۱-۳) به رابطه زیر رسید:

$$\frac{d}{dx}\left(kA\frac{d\theta}{dx}\right) - \frac{hP}{k}\theta = 0, \qquad (۳-۱۶۲)$$

که در آن $\theta = T - T_\infty$ می باشد. توجه شود که برای فرمولاسیون مساله تنها از دو فرض اول استفاده شد. فرض (iii)، h ثابت، در آخر کار برای ساده‌سازی انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد.

از آنجایی‌که تاکنون اکثر شرایط مرزی معمول در مسائل انتقال حرارت با جزییات مورد بررسی قرار گرفته است (بخش ۸-۲ را بررسی کنید)، شرایط مرزی اعمال شده در معادله (۱۶۲-۳) نیاز به توجه ویژه دارد. بنابراین، چند مثال مشخص مورد بررسی قرار می‌گیرد ابتدا بررسی سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع ثابت انجام شده سپس به بررسی سطح متغیر نیز خواهیم پرداخت.

سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع ثابت. هنگامی‌که سطح مقطع عرضی ثابت باشد معادله (۱۶۲-۳) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0, \qquad (۳-۱۶۳)$$

که در آن $m^2 = hP/kA$

پاسخ کلی معادله (۱۶۳-۳) را به صورت زیر می توان نوشت:

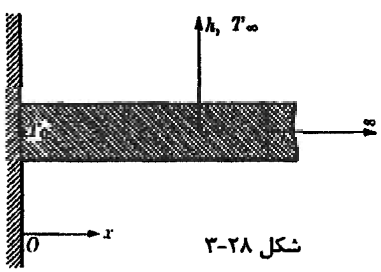
$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \qquad (۳-۱۶۴)$$

$$\theta(x) = C_3 \cosh mx + C_4 \sinh mx. \qquad (۳-۱۶۵)$$

همان‌گونه که در استفاده از شرایط مرزی دیده شد، معادلات (۱۶۴-۳) و (۱۶۵-۳) به‌ترتیب برای مسائل سطوح گسترش‌یافته نیمه بینهایت و طول محدود مناسب می‌باشند.

مثال ۹-۳. با توجه به پره نیمه بینهایت شکل ۲۸-۳) که دمای پایه آن T_0 می‌باشد. مطلوبست محاسبه توزیع دما درون پره و انتقال حرارت منتقل شده از آن.

با انتخاب پایه پره به عنوان مبدا جهت x و با توجه به این‌که دمای پره هنگامی‌که $x \to \infty$ به سمت دمای محیط میل می‌کند. شرایط مرزی به



شکل ۲۸-۳

صورت زیر خواهد بود.

$$\theta(0) = \theta_0, \quad (۳\text{-}۱۶۶)$$

$$\lim_{x\to\infty} \theta(x) \to 0, \quad (۳\text{-}۱۶۷)$$

که در آن $\theta = T_0 - T_\infty$ می‌باشد.

معادله (۱۶۷-۳) نشان می‌دهد که C_1 در معادله (۱۶۴-۳) باید صفر باشد و بر طبق معادله (۱۶۶-۳) به سادگی $C_2 = \theta_0$ بدست خواهد آمد، پس توزیع دمای مطلوب به‌صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = e^{-mx}. \quad (۳\text{-}۱۶۸)$$

اکنون می‌توان حرارت منتقل شده از پره را برحسب این توزیع دما و با ساده‌سازی معادله انتگرال جابه‌جایی در طول پره، بدست آورد. بنابراین، معادله زیر بدست می‌آید:

$$q = \int_0^\infty hP\theta\, dx = hP\theta_0 \int_0^\infty e^{-mx}\, dx = \theta_0 (hPkA)^{1/2}. \quad (۳\text{-}۱۶۹)$$

با توجه به این‌که انتقال حرارت کلی از پره به‌وسیله جابه‌جایی باید به‌وسیله هدایت از پایه پره تامین شود. می‌توان نتیجه مشابهی از معادلات هدایت برای انتقال حرارت گرفت.

$$q = -kA\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = -kA\theta_0 \frac{d}{dx}(e^{-mx})|_{x=0} = \theta_0 (hPkA)^{1/2}.$$

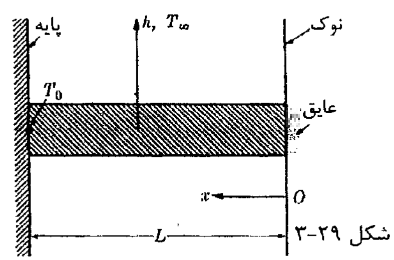
روش دوم محاسبه انتقال حرارت استفاده از شکل دیفرانسیلی به‌جای انتگرالی است که به‌خصوص برای معادلات پیچیده‌تر رایج‌تر است.

مثال ۱۰-۳. میله‌ای با طول محدود L و دمای پایه T_0 را در نظر بگیرید. انتهای پره عایق است (شکل ۲۹-۳). توزیع دمایی در پره و انتقال حرارت از آن را به‌دست آورید.

برای این مساله انتهای پره برای مبداء مناسب‌تر است. پس شرایط مرزی بدین صورت خواهد شد:

$$\frac{d\theta(0)}{dx} = 0, \quad (۳\text{-}۱۷۰)$$

$$\theta(L) = \theta_0, \quad (۳\text{-}۱۷۱)$$



شکل ۲۹-۳

که، طبق قبل، $\theta = T_0 - T_\infty$ می‌باشد. از آنجایی‌که پره در جهت طول محدود است، ما پاسخ کلی مساله را به‌صورت معادله (۱۶۵-۳)

خواهیم داشت. استفاده از معادله (۱۷۰-۳) با در نظر داشتن این حقیقت که توزیع دما نسبت به x متقارن است، و بنابراین جواب تنها باید از توابع زوج تشکیل شده باشد، منجر به $C_4 = 0$ می‌شود. به‌علاوه با توجه به معادله (۱۷۱-۳) رابطه $C_3 = \theta_0/\cosh mL$ به‌دست می‌آید پس:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\cosh mx}{\cosh mL}. \quad (۳\text{-}۱۷۲)$$

[مساله فوق را با فرض این‌که مبداء مختصات در پایه پره باشد و با استفاده از جواب کلی معادله (۱۶۴-۳) دوباره حل کنید پیچیدگی ریاضی این دو حل را مقایسه کنید.]

حرارت کلی منتقل شده از پره، که به‌وسیله هدایت صورت گرفته از پایه پره ارزیابی می‌شود و به‌صورت زیر خواهد بود.

$$q = -\left[-kA\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L}\right] \quad (۳\text{-}۱۷۳)$$
$$= \frac{kA\theta_0}{\cosh mL}\frac{d}{dx}(\cosh mx)|_{x=L}$$
$$= \theta_0 (hPkA)^{1/2} \tanh mL.$$

از آنجایی‌که $\lim_{x\to\infty} \tanh x \to 1$، معادله (۱۷۳-۳) وقتی $mL \to \infty$ به معادله (۱۶۹-۳) میل خواهد کرد. زمانی که طول یک پره محدود به سمت نامحدود شدن افزایش یابد، انتقال حرارت از آن نیز به سمت انتقال حرارت از یک پره نامحدود میل خواهد کرد. این عبارت مستقل از نوع شرط مرزی‌ای است که در انتهای پره استفاده می‌شود زیرا هنگامی‌که $L \to \infty$ اثرات انتهایی پره حذف می‌شود. شرط $mL \to \infty$ می‌تواند به‌صورت $m \to \infty$ نیز، برای یک L مفروض تعریف شود. این حالت به‌سادگی از روی تعریف m، $(hp/kA)^{1/2}$، و متناظر با $h \to \infty$ یا $k \to 0$ به‌دست خواهد آمد.

قبل از آغاز بررسی سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع متغیر بهتر است مقدماتی را برای تخمین و مقایسه سطوح گسترش‌یافته ارائه دهیم. این مقدمات معمولاً به‌صورت کارایی سطوح گسترش‌یافته تشریح می‌شود.

دو تعریف مرسوم برای این کارایی به‌صورت نسبت انتقال حرارت واقعی به انتقال حرارت تئوری وجود دارد:

$$\eta_b = \frac{\text{انتقال حرارت واقعی از سطح گسترش یافته}}{\text{انتقال حرارت از دیوار بدون پره}} \quad (۳\text{-}۱۷۴)$$

$$\eta = \frac{\text{انتقال حرارت واقعی از سطح گسترش یافته}}{\text{انتقال حرارت واقعی از سطح گسترش یافته در دمای پایه}} \quad (۳\text{-}۱۷۵)$$

مخرج رابطه (۱۷۴-۳) بیان‌کننده انتقال حرارت از سطحی از دیواره برابر سطح پایه پره می‌باشد؛ در معادلات فوق انتقال حرارت باید با بررسی همزمان صورت و مخرج و براساس اختلاف دمای یکسان، دمای پایه منهای دمای محیط، محاسبه شود. تا زمانی که دمای دیواره و ضریب انتقال حرارت بین دیواره و محیط با اتصال سطح گسترش‌یافته به دیواره تغییر پیدا کند، محاسبه کارایی از روی رابطه (۱۷۴-۳) تقریبی خواهد بود. خطای این تقریب به طول سطوح گسترش‌یافته و فضای بین آن‌ها وابسته خواهد بود. از آنجایی‌که تغییرات دمای دیواره و ضریب انتقال حرارت، به‌طور مساوی صورت و مخرج کسر معادله (۱۷۵-۳) را تحت تاثیر قرار می‌دهند، کارایی تعریف شده طبق این معادله به واقعیت نزدیک‌تر است و عملاً به رابطه دیگر ترجیح داده می‌شود. به‌هرحال علاوه بر نشان دادن افزایش انتقال حرارت به‌وسیله سطح گسترش‌یافته، این کارایی برای مقایسه سطوح گسترش‌یافته مختلف مناسب‌تر می‌باشد. مقادیر این کارایی‌ها برای مثال ۹-۳ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\eta_b = \frac{\theta_0 (hPkA)^{1/2}}{\theta_0 hA} = \left(\frac{kP}{hA}\right)^{1/2},$$
$$\eta = \lim_{L\to\infty} \frac{\theta_0 (hPkA)^{1/2}}{\theta_0 hPL} = \lim_{L\to\infty} \left(\frac{kA}{hP}\right)\frac{1}{L} = \lim_{L\to\infty}\left(\frac{1}{mL}\right) \to 0,$$

و برای مثال ۱۰-۳ بدین صورت خواهد شد:

$$\eta_b = \frac{\theta_0 (hPkA)^{1/2} \tanh mL}{\theta_0 hA} = \left(\frac{kP}{hA}\right)^{1/2} \tanh mL,$$
$$\eta = \frac{\theta_0 (hPkA)^{1/2} \tanh mL}{\theta_0 hPL} = \frac{\tanh mL}{mL},$$

در مورد کارایی سطوح گسترش‌یافته در مقالات، تحقیقات زیادی انجام شده است. اگرچه، در عمل ترجیح داده می‌شود که به‌جای افزایش کارایی به اندازه ۵ تا ۱۰ درصد، که هزینه زیادی را نیز در بر دارد به فناوری توجه شود. به همین منظور، کارایی سطوح گسترش‌یافته در این کتاب مورد توجه قرار نگرفته است. جزییات بیشتر در مراجع ۸، ۹، و ۱۱ موجود است.

سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع متغیر. فرمولاسیون کلی مسائل سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع متغیر در معادله (۱۶۲-۳) داده شده است. از آنجایی‌که A و P، دیگر ثابت نیستند، این معادله تبدیل به معادله دیفرانسیل، ضرایب متغیر می‌شود که جواب کلی آن هنگامی‌که $P(x)$ و $A(x)$ مشخص باشد قابل محاسبه خواهد بود. در اغلب حالت‌ها، همان‌طور که در بخش ۶-۳ مورد توجه قرار گرفت معادله (۱۶۲-۳) به شکل معادلات بسل تبدیل می‌شود. یک حالت خاص این معادلات تبدیل شدن به معادله هم بعد است. حالت‌هایی که به این معادلات منتهی نمی‌شوند به‌صورت منحصر به فرد با استفاده از جواب سری‌های توانی قابل حل می‌باشند. دو مثال بعدی نشان‌دهنده سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع متغیر خواهد بود.

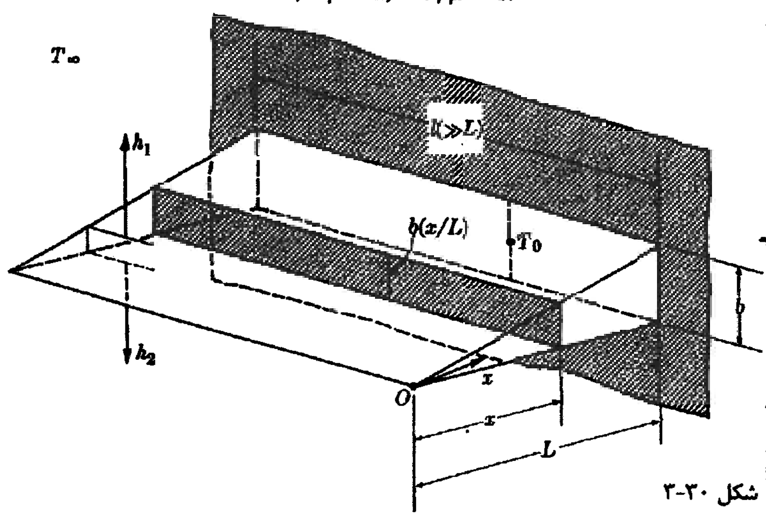
مثال ۱۱-۳. مشخصات پره صاف، با سطح مقطع مثلثی در شکل (۳۰-۳) نشان داده شده است. دمای پایه پره T_0 می‌باشد. مطلوبست محاسبه توزیع دمای پره و انتقال حرارت صورت گرفته از آن. فرض معمول $b/L \ll 1$ را برای سطوح گسترش‌یافته در نظر می‌گیریم. همچنین برای یک بعدی کردن توزیع دما از یکی از فرضیات $L/l \ll 1$ یا عایق بودن انتهای پره در جهت l می‌توان استفاده کرد.

با توجه به شکل (۳۰-۳)، $A = b(x/L)l$ و $hP = (h_1 + h_2)l$ به‌دست می‌آید و با جایگزینی این روابط در معادله (۱۶۲-۳) و بازآرایی نتایج خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\theta}{dx}\right) - m^2\theta = 0, \qquad (۱۷۶-۳)$$

که در آن $m^2 = (h_1 + h_2)L/kb$ می‌باشد. با مقایسه معادله (۱۷۶-۳) و جدول ۱-۳ نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \pm im,$$
$$v = 0, \quad \mu = 2, \quad v/\mu = 0.$$



شکل ۳۰-۳

در نتیجه جواب کلی معادله (۱۷۶-۳) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\theta(x) = C_1 I_0(2mx^{1/2}) + C_2 K_0(2mx^{1/2}). \qquad (۱۷۷-۳)$$

طبق شکل (۲۴-۳ ت) خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0} K_0(x) \to \infty,$$

برای انطباق دمای انتهای سطح باید $C_2 = 0$ شود. به‌علاوه با استفاده از دمای پایه خواهیم داشت $C_1 = \theta_0/I_0(2mL^{1/2})$ که مطابق گذشته $\theta_0 = T_0 - T_\infty$ است. با جاگذاری مقادیر C_1 و C_2 در معادله (۳-۱۷۷)، توزیع دما در پره به‌دست می‌آید.

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{I_0(2mx^{1/2})}{I_0(2mL^{1/2})}. \qquad (۳\text{-}۱۷۸)$$

دوباره، انتقال حرارت از پره با توجه به هدایت صورت گرفته از پایه پره به‌دست می‌آید. بنابراین

$$q = -[-kA(d\theta/dx)_{x=L}],$$

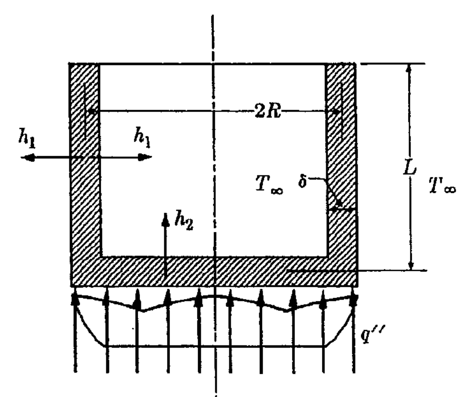
که از معادله (۳-۱۷۸) و به‌وسیله معادله (۳-۱۳۷) به‌دست آمده است. در زیر با در نظر گرفتن $\xi = 2mx^{1/2}$ به معادله زیر خواهیم رسید.

$$\frac{d}{dx}[I_0(\xi)] = \frac{d}{d\xi}[I_0(\xi)]\frac{d\xi}{dx} = \frac{m}{x^{1/2}} I_1(2mx^{1/2}),$$

که انتقال حرارت از پره، به صورت زیر خواهد بود:

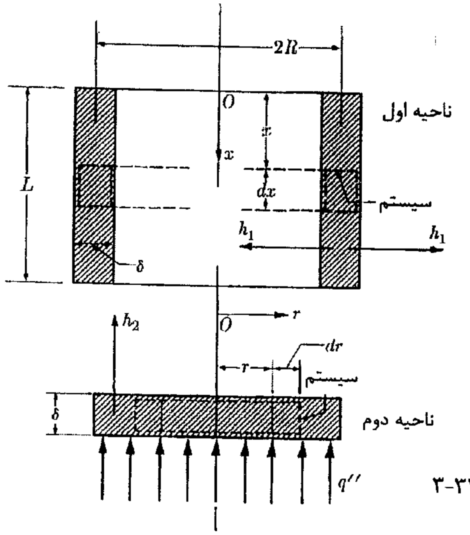
$$\frac{q}{kA\theta_0/L} = \frac{(mL^{1/2})I_1(2mL^{1/2})}{I_0(2mL^{1/2})}. \qquad (۳\text{-}۱۷۹)$$

مثال ۱۲-۳. یک قابلمه خالی بر روی یک صفحه داغ قرار گرفته است (شکل ۳-۳۱). فرض می‌شود که به کف ظرف یک شار حرارتی یکنواخت q'' اعمال می‌شود. دمای محیط T_∞ است و ضرائب انتقال حرارت h_1 و h_2 هستند. ضریب هدایت حرارتی، ضخامت، شعاع و ارتفاع ظرف به ترتیب k، δ و R و L هستند. می‌خواهیم توزیع دما در ظرف را پیدا کنیم.



شکل ۳-۳۱

تغییر دما در عرض ضخامت ناچیز است و فرض می‌کنیم که توزیع دما در ظرف یک‌بعدی و به صورت شعاعی در کف و محوری در دیواره‌های کناری است.

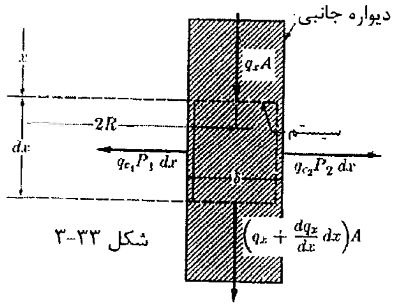


شکل ۳-۳۲

پیشنهاد می‌شود که برای راحتی محاسبات مساله را به دو بخش تقسیم کنیم (شکل ۳-۳۲). دو مرحله اول فرمولاسیون، به‌کارگیری سیستم یک‌بعدی برای دیواره‌های کناری است (شکل ۳-۳۳) و قانون کلی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$0 = +q_xA - \left(q_x + \frac{dq_x}{dx}dx\right)A - q_{c_1}P_1dx - q_{c_2}P_2dx. \qquad (۳\text{-}۱۸۰)$$

قانون خاص مرحله سوم در معادله (۳-۱۸۰) وارد شده و معادله حاکم حاصل از مرحله چهارم با قسمتی از مرحله پنجم که مربوط به تعریف ضریب انتقال حرارت است، بازآرایی می‌شود و برای دیواره‌های کناری معادله زیر حاصل می‌شود:



شکل ۳-۳۳

$$\frac{d^2\theta_1}{dx^2} - m_1^2\theta_1 = 0, \qquad (۳\text{-}۱۸۱)$$

فرض می‌شود که $\delta \ll R$ بوده و بنابراین $m_1^2 = 2h_1/k\delta$ و $P_1 \cong P_2$ است. در اینجا $\theta_1 = T_1 - T_\infty$ و T_1 دمای محلی دیواره‌های کناری است. همان‌طور که انتظار می‌رود معادله (۳-۱۸۱) با فرمولاسیون مسائل سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع ثابت که با معادله

(۳-۱۶۳) ارائه شده است، یکسان می‌باشد و تنها تفاوتشان در تعریف m_1^2 می‌باشد. شکل هندسی محدود دیواره‌های کناری، یک پاسخ عمومی را برای معادله (۳-۱۸۱) نظیر معادله (۳-۱۶۵) پیش‌بینی می‌کند. پس خواهیم داشت:

$$\theta_1(x) = C_3 \cosh m_1 x + C_4 \sinh m_1 x. \qquad (۳\text{-}۱۸۲)$$

حال فرمولاسیون مربوط به کف ظرف را در نظر می‌گیریم. دو مرحله اول فرمولاسیون، به‌صورت عبارات سیستم یک‌بعدی نشان داده شده در شکل ۳-۳۴ بیان شده‌اند و نتیجه می‌دهد:

$$0 = +q_r A - \left(q_r A + \frac{d}{dr}(q_r A)dr\right) - q_c P dr + q'' P dr. \qquad (۳\text{-}۱۸۳)$$

مجدداً با قرار دادن قانون خاص موجود در مرحله سوم فرمولاسیون، در معادله (۳-۱۸۳) و بازآرایی معادله حاکم به‌دست آمده از مرحله چهارم توسط قسمتی از مرحله پنجم که در ارتباط با ضریب انتقال حرارت بوده است، به فرمولاسیون زیر خواهیم رسید:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\theta_2}{dr}\right) - m_2^2 r\left(\theta_2 - \frac{n}{m_2^2}\right) = 0, \qquad (۳\text{-}۱۸۴)$$

که در آن $m_2^2 = h_2/k\delta$، $n = q''/k\delta$ و $\theta_2 = T_2 - T_\infty$، و T_2 دمای محلی کف ظرف است. توجه کنید که معادله (۳-۱۸۴) برحسب $\theta_2 - n/m_2^2$ همگن است. از مقایسه معادله (۳-۱۸۴) با نتایج جدول ۱-۳ داریم:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \pm im,$$
$$v = 0, \quad \mu = 1, \quad v/\mu = 0.$$

از این‌رو پاسخ برای کف ظرف به این صورت به‌دست می‌آید:

$$\theta_2(x) = n/m_2^2 + D_1 I_0(m_2 r) + D_2 K_0(m_2 r). \qquad (۳\text{-}۱۸۵)$$

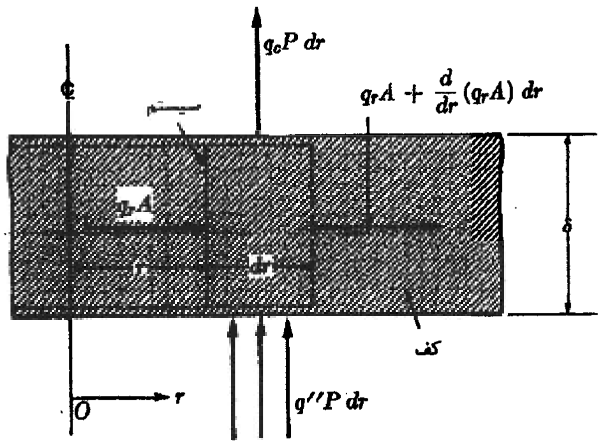
با صرف‌نظر کردن از انتقال حرارت از بالای دیواره‌های کناری و با توجه به انتخاب مناسب مرکز مختصات برای کف ظرف و دیواره‌های کناری (شکل ۳-۳۲)، می‌توانیم شرایط مرزی مساله را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{d\theta_1(0)}{dx} \cong 0, \qquad (۳\text{-}۱۸۶)$$

$$\theta_1(L) = \theta_2(R), \qquad (۳\text{-}۱۸۷)$$

$$\left[-k\frac{d\theta_1(L)}{dx}\right] + \left[-k\frac{d\theta_2(R)}{dr}\right] = 0, \qquad (۳\text{-}۱۸۸)$$

$$\theta_2(R) = \text{محدود} \quad \left(\text{یا} \quad \frac{d\theta_2(0)}{dr} = 0\right). \qquad (۳\text{-}۱۸۹)$$



شکل ۳-۳۴

معادلات (۳-۱۸۲) و (۳-۱۸۵) به‌ترتیب با معادلات (۳-۱۸۶) و (۳-۱۸۹) در نظر گرفته شده و $C_4 = 0$ و $D_2 = 0$ را می‌دهند. سپس نتایج را در معادلات (۳-۱۸۷) و (۳-۱۸۸) قرار داده و نتیجه می‌دهند:

$$C_3 \cosh m_1 L = n/m_2^2 + D_1 I_0(m_2 R),$$

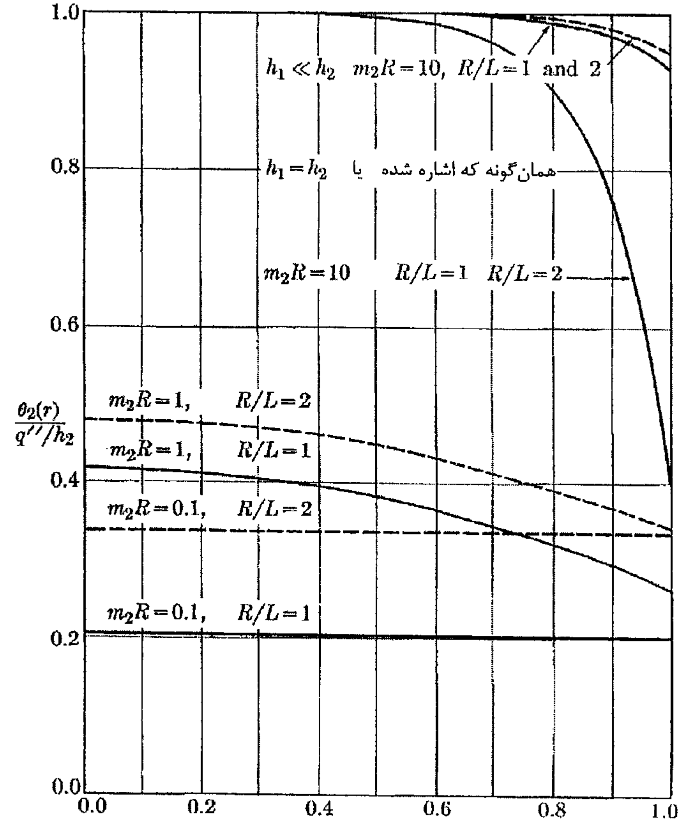
$$C_3\, m_1 \sinh m_1 L + D_1 m_2 I_1(m_2 R) = 0.$$

با حل این معادلات جبری برای ثوابت C_3 و D_1 و قرار دادن نتایج آن به‌همراه C_4 و D_2 در معادلات (۳-۱۸۲) و (۳-۱۸۵) توزیع دما در ظرف به‌صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\theta_1(x)}{q''/h_2} = \frac{\cosh m_1 x/\cosh m_1 L}{1+(m_1/m_2)[I_0(m_2 R)/I_1(m_2 R)]\tanh m_1 L}, \qquad (۳\text{-}۱۹۰)$$

$$\frac{\theta_2(x)}{q''/h_2} = 1 - \frac{I_0(m_2 r)/I_0(m_2 R)}{1+(m_2/m_1)[I_1(m_2 R)/I_0(m_2 R)]\coth m_1 L}, \qquad (۳\text{-}۱۹۱)$$

[حالت‌های خاص معادلات (۳-۱۹۰) و (۳-۱۹۱) وقتی‌که $m_2 \to 0$ و $m_2 \to \infty$ چه خواهد بود؟ شرایط فیزیکی مطابق با این حالات را شرح دهید.]



شکل ۳-۳۵

در ارتباط با موارد خاص مذکور دمای کف ظرف را که با معادله (۱۹۱-۳) ارائه شده است، رسم خواهیم نمود. به‌خاطر پارامترهای متعدد موجود در مساله، بررسی کامل پارامتریک خیلی طولانی خواهد بود و برای هدف ما غیرضروری است. ما در اینجا فقط حالت خاصی که $h_1/h_2 \sim 1$ بوده و R/L بین ۱ و ۲ متغیر است را در نظر می‌گیریم. در شکل ۳-۳۵ مقادیر $\theta_2(r)/(q''/h_2)$ در برابر r/R برای مقادیر ۰/۱ و ۱ و ۱۰ از m_2R و مقادیر ۱ و ۲ برای R/L متناظر با $h_1/h_2 = 1$ رسم شده‌اند. با بررسی شکل مشخص می‌شود که مقادیر عملی را می‌توان به‌طور مناسب به‌جای موارد خاص ریاضی $m_2 \to 0$ و $m_2 \to \infty$ به‌کار برد. پس زمانی‌که $h_1/h_2 = 1$ باشد برای حد

پایین $m_2R \leq 0.1$ حاصل خواهد شد. در این حالت $h >> k$ است و دمای داخل ظرف را می‌توان متمرکز در نظر گرفت. از فرمولاسیون متمرکز برای مساله خواهیم داشت:

$$\frac{\theta}{q''/h} = \frac{1}{1+4(L/R)}, \quad \text{وقتی} \quad h_1/h_2 = 1 \quad \text{و} \quad m_2R \leq 0.1$$

برای حد بالایی $m_2R \geq 10$ حاصل شده است. به هر حال این حالت منجر به هیچ‌گونه ساده‌سازی در فرمولاسیون نخواهد شد.

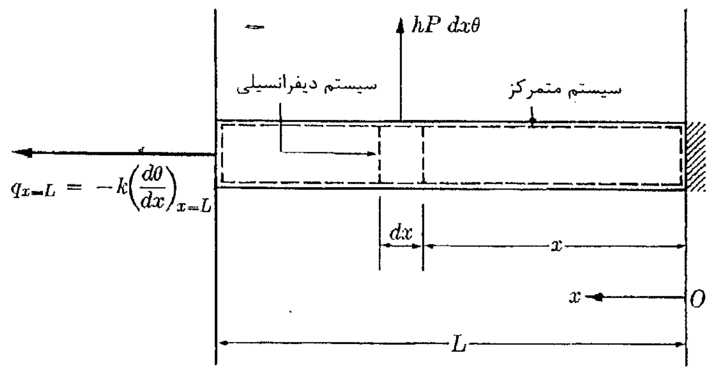
حال اگر فرض شود که یک لایه نازک از آب در ته ظرف وجود دارد و یا وقتی $h_1/h_2 \sim 1/200$ و $m_2R \geq 10$، دمای کف ظرف با فرض متمرکز بودن، پنج درصد و یا کمتر خطا خواهد داشت که این امر در گوشه بالایی سمت راست شکل ۳-۳۵ نشان داده شده است. دمای متمرکز کف به‌سهولت به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\theta_2 = q''/h_2, \quad \text{وقتی} \quad h_1 \ll h_2 \quad \text{و} \quad m_2R \geq 10.$$

با استفاده از این دما به‌عنوان دمای مرجع یا پایه امکان حصول فرمولاسیون دیواره‌های کناری به‌صورت مثال ۱۰-۳ فراهم می‌شود. پس توزیع دما در دیواره‌های کناری به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\theta_1(x)}{q''/h_2} = \frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L}, \quad \text{وقتی} \quad h_1 \ll h_2 \quad \text{و} \quad m_2R \geq 10.$$

در اینجا باز هم باید تاکید نمود که توجیحات فیزیکی دارای اهمیت زیادی در ساده‌سازی مسائل پیچیده هستند.



شکل ۳-۳۶

۹-۳. حل تقریبی برای سطوح گسترش‌یافته

در این بخش حل تقریبی بعضی مثال‌ها که به‌عنوان سطوح گسترش‌یافته تلقی می‌شوند، انجام خواهد شد. این راه‌حل‌ها براساس انتخاب پروفایل دمایی صادق در شرایط مرزی مساله و به‌صورت

توابع ساده، بیان شده است. پارامترهای پروفایل انتخاب شده از فرمولاسیون انتگرالی مساله به‌دست آمده‌اند.

مثال ۱۳-۳. می‌خواهیم پاسخ تقریبی درجه اولی برای مساله مثال ۱۰-۳ را به‌دست آوریم.

فرمولاسیون انتگرالی مساله به‌سهولت برحسب سیستم‌های دیفرانسیلی و متمرکز نشان داده شده در شکل ۳۶-۳ به‌دست خواهد آمد. پس خواهیم داشت:

$$0 = -\left[-kA\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L}\right] - hP\int_0^L \theta dx. \qquad (۳\text{-}۱۹۲)$$

معادله (۱۹۲-۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

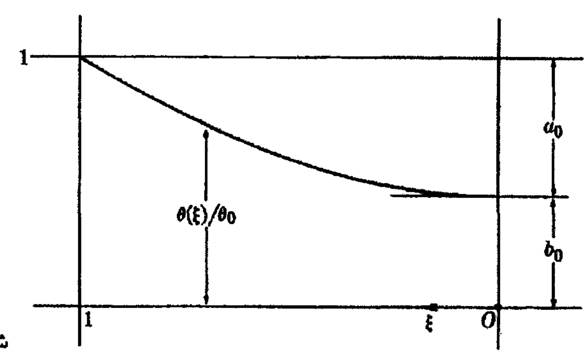
$$0 = \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L} - m^2\int_0^L \theta dx, \qquad (۳\text{-}۱۹۳)$$

که با انتگرال معادله (۱۶۳-۳) در بازه $(0, L)$ که قبلاً حاصل شده است، یکسان خواهد بود. معادله (۱۹۳-۳) ممکن است برحسب جملاتی از عبارت $\xi = x/L$ و $\mu = mL$ بازنویسی شود که برای ارزیابی پروفایل‌های دما مناسب است. بنابراین:

$$0 = \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=1} - \mu^2\int_0^1 \theta\, d\xi. \qquad (۳\text{-}۱۹۴)$$

می‌توان یک پروفایل درجه اول ریتز که شرایط مرزی مساله را ارضا می‌کند را به‌صورت سهمی زیر نوشت[1] (شکل ۳۷-۳).

$$\theta(\xi)/\theta_0 = 1 - \left(1 - \xi^2\right) a_0, \qquad (۳\text{-}۱۹۵)$$



شکل ۳۷-۳

۱- همچنین می‌توان سهمی را به‌صورت جملاتی از دمای نوک، $b_0\theta_0$ برحسب b_0 $\theta(\xi)/\theta_0 = \xi^2 + \left(1 - \xi^2\right) b_0$ تعریف نمود ولی چندان مناسب نیست.

که در آن a_0 پارامتر مجهولی است که باید محاسبه شود. با قرار دادن معادله (۱۹۵-۳) در معادله (۱۹۴-۳) و انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{\mu^2/2}{1+\mu^2/3}.$$

بنابراین با تقریب درجه اول ریتز دمای پره به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(\xi)}{\theta_0} = 1 - \frac{\mu^2/2}{1+\mu^2/3}\left(1 - \xi^2\right). \qquad (۳\text{-}۱۹۶)$$

حال پاسخ‌های[1] دقیق و تقریبی مساله را که با معادلات (۱۷۲-۳) و (۱۹۶-۳) ارائه شده‌اند، مقایسه خواهیم کرد. وقتی‌که محل خاصی از پره را در نظر بگیریم می‌توان اثر ξ را از این قیاس حذف نمود. از آنجایی‌که در اینجا به‌جای خود دما با گرادیان دما سرو کار داریم، که در نوک پره به‌وسیله پروفایل تقریبی ارضا می‌شود، بیشترین اختلاف میان دماهای دقیق و تقریبی در نوک پره پیش‌بینی می‌شود. با قرار دادن $\xi = 0$ درون شکل بی‌بعد معادله (۱۷۲-۳) و در معادله (۱۹۶-۳)، دماهای دقیق و تقریبی نوک پره را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{\theta(0)}{\theta_0} = \frac{1}{\cosh\mu}, \qquad \frac{\theta(0)}{\theta_0} = \frac{1-\mu^2/6}{1+\mu^2/3}.$$

دماها در جدول ۲-۳ برای بعضی از مقادیر μ مقایسه شده‌اند. بررسی جدول ۲-۳ تطابق خوب و نزدیکی میان پاسخ‌های دقیق و تقریبی را برای مقادیر کوچک μ آشکار می‌سازد. برای درک تطابق ضعیف در مقادیر بزرگ μ توجه شود که توزیع دمای دقیق مساله موجود وقتی‌که $\mu \to \infty$ [1] مانند $\theta(\xi)/\theta_0 = e^{-\mu\xi}$ رفتار می‌کند که برای‌مثال می‌توان آن‌را به‌صورت $L \to \infty$ تفسیر کرد. حال اگر تابعی مثل $e^{-\mu\xi}$ را در نظر بگیریم، این تابع نمی‌تواند توسط تابعی دیگر مثل معادله (۱۹۶-۳) یک در بازه بزرگ به‌خوبی تقریب زده شود، بنابراین افزایش عدم تطابق بین دو جواب وقتی $\mu \to \infty$ آشکار خواهد شد.

جدول ۲-۳

μ	۰/۵	۱	۲	۴
دقیق	۰/۸۸۰۸	۰/۶۴۸۱	۰/۲۶۵۸	۰/۰۳۶۶
تقریبی	۰/۸۸۶۴	۰/۶۲۵۰	۰/۱۴۲۹	-۰/۲۶۳۲
خطا ٪	۰/۲۴۸	۳/۵۶	۴۶/۲	۸۱۹

۱- پاسخ دقیق مساله برحسب ξ اندازه‌گیری شده از پایه پره $\theta(\xi)/\theta_0 = \cosh\mu\,(1-\xi)/\cosh\mu$ است. وقتی‌که $\mu \to \infty$ همان‌طورکه انتظار می‌رود این پاسخ به $e^{\mu(1-\xi)}/e^{\mu} = e^{-\mu\xi}$ نزدیک می‌شود که شکل بدون بعد معادله (۱۶۸-۳) است.

در مورد حرارت منتقله از سطوح گسترش‌یافته، برای تعیین محدودیت پاسخ تقریبی که در بالا ارائه شده است، مناسب‌تر است به‌جای مقایسه دماهای دقیق و تقریبی، حرارت از دست رفته دقیق و تقریبی را مقایسه نماییم. این اتلاف‌ها بدین گونه‌اند:

$$\frac{q}{kA\theta_0/L} = \mu \tanh \mu, \qquad \frac{q}{kA\theta_0/L} = \frac{\mu^2}{1+\mu^2/3}.$$

که عبارت دوم با استفاده از $q = hP\int_0^L \theta dx$ به‌جای $q = -[-kA(d\theta/dx)_{x=L}]$ به‌دست آمده است.

(چرا؟ آیا نباید دو روش منجر به پاسخ یکسانی شوند؟) حرارت از دست رفته دقیق و تقریبی در جدول ۳-۳ برای بعضی از مقادیر μ مورد مقایسه قرار گرفته است. (چرا میزان خطای میان حرارت‌های از دست رفته دقیق و تقریبی کوچک‌تر از میزان آن میان دماهای دقیق و تقریبی برای یک μ داده شده است؟). بنابراین، وقتی $\mu < 2$ است خطای حرارت از دست رفته کمتر از ۱۱/۱٪ است. با به‌کارگیری مقدار حدی $\mu = 2$ می‌توان به عمق نفوذ برای یک میله با شعاع R به‌صورت $L = (2kR/h)^{1/2}$ رسید که پاسخ تقریبی موجود را در بر دارد.

جدول ۳-۳

μ	۰/۵	۱	۲	۴
دقیق	۰/۲۳۱۱	۰/۷۶۱۶	۱/۹۲۶۸	۳/۹۹۷۳
تقریبی	۰/۲۳۰۸	۰/۷۵۰۰	۱/۷۱۴۳	۲/۵۲۶۳
٪ خطا	۰/۱۳۰	۱/۵۲	۱۱/۱	۳۶/۸

به‌عنوان یک مثال یک میله فولادی با $(k \cong 10\,\text{Btu/ft.hr.°F})$ و $R = \frac{1}{2}$ in در نظر گرفته می‌شود. انتقال حرارت به‌وسیله جابه‌جایی آزاد به محیط گازی با $h = 1\,\text{Btu/ft}^2.\text{hr.°F}$ صورت گرفته است. طول مجاز برای این حالت $L \cong 0.91$ ft خواهد بود. اگر میله از مس ساخته شود $(k \cong 200\,\text{Btu/ft.hr.°F})$ طول $L \cong 4.1$ ft خواهد شد. وقتی‌که انتقال حرارت به‌وسیله جابه‌جایی آزاد به مایعات یا جابه‌جایی اجباری انجام شود، در اکثر مواقع h افزایش می‌یابد و پاسخ تقریبی حاضر اغلب طول قابل توجهی را حاصل نمی‌کند.

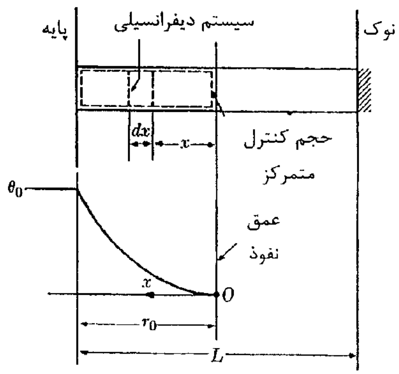
ممکن است براساس راه‌حل‌های جبری موجود در روش‌های دقیق و تقریبی حل مسائلی که در بالا مدنظر قرار داده شد، عملی بودن راه حل‌های تقریبی مورد سوال قرار گیرد. به هر حال راه‌حل تقریبی پیش رو اساساً برای کسب تجربه بیشتر در استفاده از روش انتگرالی مورد بررسی قرار گرفته است. باید به یادداشت که جبر روش‌های حل تقریبی به‌طور عملی برای مسائل پیچیده بدون

تغییر باقی می‌ماند، درحالی‌که پیچیدگی روش‌های حل دقیق به‌سرعت افزایش پیدا خواهد کرد. این امر روش انتگرالی را مناسب و اغلب برای مسائل پیچیده ضروری می‌گرداند.

اگر چه می‌بایست تا فصول ۵ و ۷ حل مسائل ناپایای یک‌بعدی با روش دیفرانسیلی به تاخیر انداخته شود، ولی در اینجا می‌توان به‌سادگی، انتخاب پروفایل‌های تقریبی را برای چنین مسائلی به روش انتگرالی تشریح کرد.

مثال ۳-۱۴. در مثال ۳-۱۰ و ۳-۱۳، دمای اولیه پره را یکنواخت و برابر دمای محیط T_∞ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که دمای پایه ناگهان به T_0 تغییر می‌کند و بعد از آن ثابت نگه داشته می‌شود. می‌خواهیم یک پاسخ درجه اول که تغییرات دمای تقریبی در پره را بدهد، بیابیم.

از آنجایی‌که مساله شامل عمق نفوذ است[1]، فرمولاسیون آن می‌تواند در دو بازه زمانی متوالی داده شود. در بازه زمانی اول عمق نفوذ کمتر یا مساوی (در حالت حدی) طول پره است؛ در بازه زمانی دوم دمای نوک پره از صفر تا مقدار پایای آن بالا خواهد رفت.



شکل ۳-۳۸

با در نظر گرفتن حجم کنترل متمرکز و سیستم دیفرانسیلی مناسب که در شکل ۳-۳۸ نشان داده شده است، فرمولاسیون انتگرالی مساله برای بازه زمانی اول بدین‌گونه خواهد بود:

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\int_0^{\tau_o}\theta dx = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=\tau_o} - m_2\int_0^{\tau_o}\theta dx \qquad (۳-۱۹۷)$$

که در آن $\theta = T - T_\infty$ و x مبداء محور در عمق نفوذ است. با توجه به این‌که طول پره هیچ اثری در فرمولاسیون دامنه زمانی اول نخواهد داشت، معادله (۳-۱۹۷) را به همین شکل و بدون بی‌بعدسازی استفاده می‌کنیم.

از پروفایل درجه اول کانتروویچ به‌صورت یک سهمی وابسته به مکان و زمان، که شرایط مرزی را تصدیق نموده و برحسب عمق نفوذ τ_o بیان می‌شود، استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{\theta(x,t)}{\theta_0} = \left(\frac{x}{\tau_o}\right)^2. \qquad (۳-۱۹۸)$$

با قراردادن معادله (۳-۱۹۸) در معادله (۳-۱۹۷) و انتگرال‌گیری از عبارت حاصل یک معادله دیفرانسیل غیرخطی به‌دست خواهد آمد:

۱- به فرمولاسیون انتگرالی مثال ۳-۲ مراجعه شود.

$$\frac{d\tau_o}{dt}+am^2\tau_o=\frac{6a}{\tau_o},$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت خطی برحسب $\tau_0^2/2$ نوشت:

$$\frac{d(\tau_0^2/2)}{dt}+2am^2(\tau_0^2/2)=6a. \quad (۳-۱۹۹)$$

در معادله (۳-۱۹۹) باید شرط زیر صادق باشد:

$$\tau_o(0)=0. \quad (۳-۲۰۰)$$

پاسخ معادله (۳-۱۹۹) با توجه به معادله (۳-۲۰۰) خواهد بود:

$$\tau_0^2=\frac{6}{m^2}\left(1-e^{-2am^2t}\right). \quad (۳-۲۰۱)$$

اکنون می توان معادله (۳-۲۰۱) را برای به‌دست آوردن زمان نفوذ t_0 مورد استفاده قرار داد، که در آن $\tau_0(t_0)=L$ می‌باشد و عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$t_0=\frac{1}{2am^2}\ln\left(\frac{1}{1-\mu^2/6}\right), \quad (۳-۲۰۲)$$

که در آن مثل قبل، $\mu=mL$ است.

نهایتاً با قرار دادن معادله (۳-۲۰۱) درون معادله (۳-۱۹۸) و بازآرایی آن، دمای پره در بازه زمانی اول بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\frac{\theta(x,t)}{\theta_0}=\frac{m^2x^2}{6[1-\exp(-2am^2t)]}. \quad (۳-۲۰۳)$$

سیستم‌های دیفرانسیلی و متمرکز مناسب برای بازه زمانی دوم در شکل ۳-۳۹ مشخص شده‌اند. به هر حال با رجوع کردن به شکل ۳-۳۹ دیده می‌شود که نوک پره عایق‌بندی شده است و فرمولاسیون انتگرالی مساله برای دامنه زمانی دوم به‌وسیله جاگذاری ساده τ_0 با L در معادله (۳-۱۹۹) به آسانی به‌دست آمده است.

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\int_0^L\theta dx=\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=L}-m^2\int_0^L\theta dx. \quad (۳-۲۰۴)$$

برای این بازه مناسب است که از متغیر بدون بعد $\xi=x/L$ و پارامتر $\mu=mL$ استفاده شود. معادله (۳-۲۰۴) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{L^2}{a}\frac{d}{dt}\int_0^1\theta d\xi=\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{\xi=1}-\mu^2\int_0^1\theta d\xi. \quad (۳-۲۰۵)$$

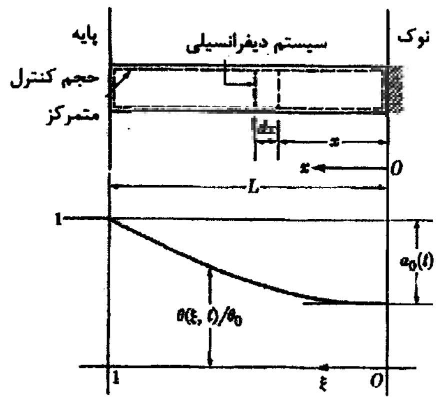
پروفایل ریتز درجه اول، معادله (۳-۱۹۵)، که برای مساله پایای مثال ۳-۱۳ مورد استفاده قرار گرفته بود، اکنون می‌تواند دوباره در نظر گرفته شود که پارامتر ثابت a_0 موجود در اینجا یک تابع پارامتری وابسته به زمان به‌صورت $a_0(t)$ است که می‌بایست تعیین شود.

$$\theta(\xi,t)/\theta_0=1-\left(1-\xi^2\right)a_0(t), \quad (۳-۲۰۶)$$

معادله (۳-۲۰۶) یک پروفایل کانتروویچ درجه اول است.

با قرار دادن معادله (۳-۲۰۶) در معادله (۳-۲۰۵) و انتگرال‌گیری از آن خواهیم داشت:

$$\frac{da_0}{dt}+\frac{3a}{L^2}\left(1+\frac{\mu^2}{3}\right)a_0=\frac{3a}{L^2}\left(\frac{\mu^2}{2}\right). \quad (۳-۲۰۷)$$



شکل ۳-۳۹

شرط اولیه‌ای که برای معادله (۳-۲۰۷) مفروض است:

$$a_0(t_0)=1. \quad (۳-۲۰۸)$$

پاسخ معادله (۳-۲۰۷) که معادله (۳-۲۰۸) را ارضا خواهد کرد به این صورت به‌دست خواهد آمد:

$$a_0(t)=\frac{\mu^2/2}{1+\mu^2/3}+\frac{1-\mu^2/6}{1+\mu^2/3}\exp\left[-3\left(1+\frac{\mu^2}{3}\right)\frac{a(t-t_0)}{L^2}\right]. \quad (۳-۲۰۹)$$

نتیجتاً با اعمال معادله (۳-۲۰۹) در معادله (۳-۲۰۶) به دمای پره در دامنه زمانی دوم خواهیم رسید:

$$\frac{\theta(\xi,t)}{\theta_0}=1-\left(1-\xi^2\right)\left\{\frac{\mu^2/2}{1+\mu^2/3}+\frac{1-\mu^2/6}{1+\mu^2/3}\exp\left[-3\left(1+\frac{\mu^2}{3}\right)\frac{a(t-t_0)}{L^2}\right]\right\}. \quad (۳-۲۱۰)$$

وقتی‌که $t\to t_0$ معادله (۳-۲۱۰) به حد بالای پاسخ بازه زمانی اول یعنی معادله (۳-۱۹۸) برای $\tau_0=L$، و وقتی‌که $t\to\infty$ به پاسخ پایای ارائه شده توسط معادله (۳-۱۹۶) نزدیک می‌شود. انتظار می‌رود که خطای معادله (۳-۲۱۰) از درجه خطای موجود در معادله (۳-۱۹۶) باشد.

پس از توسعه دادن میزان استفاده و سپس تفهیم اهمیت پروفایل‌های پایای درجه اول برای مسائل ناپایا، اکنون به راه‌های بهبود دادن پروفایل‌ها می‌پردازیم.

۳-۱۰. تقریب‌های با درجه بالاتر

بعضی مواقع به‌دلیل نیاز به دقت بالاتر در پاسخ مسائل، بهبود دادن نتایج پروفایل‌های درجه اول مورد توجه قرار می‌گیرد. از آنجایی‌که فصل حاضر فقط از نظر دیفرانسیلی با مسائل پایای یک‌بعدی سروکار دارد، در اینجا پروفایل‌های با درجه بالاتر مسائل ناپایای چند بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد.

تقریب $(n+1)$اُم پروفایل کانتروویچ سه‌بعدی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\theta(v,t) = \theta[v, \tau_0(t), \tau_1(t), \dots \tau_n(t)], \qquad (۳\text{-}۲۱۱)$$

که در آن $\tau_0(t)$، $\tau_1(t)$ و ... و $\tau_n(t)$ توابع پارامتری مجهول هستند که باید تعیین گردند و v نشان‌دهنده حجم است. فقط به‌خاطر روشن شدن مطلب فرض شده است که مساله کلی تحت بررسی برای یک جامد ساکن ایزوتروپیک و همگن به‌کار گرفته شود. فرمولاسیون دیفرانسیلی حاکم خواهد بود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\nabla^2\theta.$$

با به‌کارگیری فرمولاسیون انتگرالی مساله نوشته شده، مثلاً به شکل زیر:

$$\int_v \left(\nabla^2\theta - \frac{1}{a}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\partial v = 0 \qquad (۳\text{-}۲۱۲)$$

یک رابطه میان $(n+1)$ تابع پارامتری مجهول حاصل می‌شود. دو روش عمومی برای به‌دست آوردن n رابطه باقی‌مانده میان این توابع پارامتری مجهول وجود دارد. روش اول در نظر گرفتن n رابطه‌ای است که باید به‌وسیله ضرب توابع تحت انتگرال فرمولاسیون انتگرالی در توابع پیوسته ولی بسیار اختیاری $F_i(v)$ به‌دست آید.

$$\int_v \left(\nabla^2\theta - \frac{1}{a}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)F_i(v)dv = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \qquad (۳\text{-}۲۱۳)$$

که در آن $F_i(v)$ می‌تواند با فرض بسیار مناسبی از پروفایل‌های تقریبی متوالی[۱] که به شکل معادله (۳-۲۱۱) می‌باشند، انتخاب شده باشد. ایده موجود در تعریف معادله (۳-۲۱۳) استفاده از ریشه‌های آن برای محاسبه تغییرات است. بنابراین، بحث بر روی این نکته نیاز است که تا فصل ۸ به تعویق می‌افتد[۱]. حال باید متذکر شد که پروفایل‌های انتخاب شده هنوز فرمولاسیون دیفرانسیلی را ارضا نمی‌کنند. روش دوم براساس ارضا شدن فرمولاسیون و همچنین در صورت نیاز، صدق

۱- این کتاب در برگیرنده ۷ فصل اول کتاب انتقال حرارت هدایتی آرپاچی است.

کردن مشتقات مکانی آن در n نقطه مناسب، $P_j(j = 1, 2, 3, \dots, n)$ می‌باشد و بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^m}{\partial x_k^m}\left(\nabla^2\theta - \frac{1}{a}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{P_j} = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \qquad (۳\text{-}۲۱۴)$$

که در آن x_k نشان‌دهنده یک جهت مناسب در فضا می‌باشد. به‌خاطر ماهیت مشخص فرآیند انتگرال‌گیری، به‌طور کلی انتظار می‌رود استفاده از معادله (۳-۲۱۳) به‌جای معادله (۳-۲۱۴) پروفایل‌های صحیح‌تری را نتیجه دهد. به هر حال وقتی یک تقریب درجه دوم یا سوم مورد نظر باشد، اگر معادله (۳-۲۱۴) در یک یا دو نقطه که بیشترین اختلاف میان پروفایل‌های انتخابی و واقعی در آن‌ها انتظار می‌رود صدق کند، تقریباً نتیجه‌ای به دقت و صحت نتیجه حاصل از به‌کارگیری معادله (۳-۲۱۳) به‌دست خواهد آمد.

حال استفاده از این دو روش در ارزیابی پروفایل‌های درجه دوم مسائل پایای ساده ارائه می‌شود.

مثال ۳-۱۵. می‌خواهیم یک پاسخ تقریبی برای مساله مثال ۳-۱۰ و به‌صورت پروفایل ریتز درجه دوم به‌دست آوریم.

پروفایل پیشنهادی که شرایط مرزی مساله در آن صدق کنند به‌سهولت و با اضافه کردن یک جمله به تقریب درجه اول معادله (۳-۱۹۵) نوشته شده است. پس خواهیم داشت:

$$\theta(\xi)/\theta_0 = 1 - \left(1-\xi^2\right)\left(a_0 + a_1\xi^2\right). \qquad (۳\text{-}۲۱۵)$$

با قرار دادن معادله (۳-۲۱۵) در فرمولاسیون انتگرالی مساله، معادله (۳-۱۹۴) یا انتگرال معادله بی‌بعد شده (۳-۱۶۳) و انتگرال‌گیری، اولین رابطه میان پارامترهای ثابت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(1+\mu^2/3)a_0 + (1+\mu^2/15)a_1 = \mu^2/2. \qquad (۳\text{-}۲۱۶)$$

برای رابطه دوم، ابتدا شکل مناسب معادله (۳-۲۱۳) برای $i = 1$ در نظر گرفته می‌شود. با فرض این‌که امکان داشته باشد که $F_1(\xi)$، $F_2(\xi)$ و.... را از معادله (۳-۲۱۵) به‌دست آوریم، $F_1(\xi) = (1-\xi^2)$، $F_2(\xi) = (1-\xi^2)\xi^2$ و ... را خواهیم داشت و سپس رابطه دوم مورد نیاز به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \mu^2\theta\right)(1-\xi^2)d\xi = 0. \qquad (۳\text{-}۲۱۷)$$

با قرار دادن معادله (۳-۲۱۵) در معادله (۳-۲۱۷) و انتگرال‌گیری از عبارت حاصل، رابطه دوم به‌دست خواهد آمد:

$$(1+2\mu^2/5)a_0+(1/5+3\mu^2/35)a_1=\mu^2/2. \qquad (۳-۲۱۸)$$

قبل از به‌دست آوردن a_0 و a_1 یک رابطه جایگذین دیگر باید از معادله (۳-۲۱۴) به‌دست آید. از آنجایی‌که پروفایل تقریبی چنان به‌دست آمده است که باید با توجه به شرایط مرزی گرادیان دما را به‌جای خود دما در نوک پره ارضا کند، بیشترین انحراف میان پروفایل‌های دقیق و تقریبی در این مکان (نوک پره) وجود خواهد داشت. پس می‌خواهیم شرط دومی را بیابیم که پروفایل تقریبی را مخصوصاً در نزدیکی نوک پره بهبود بخشد. این امر می‌تواند با صدق کردن معادله (۳-۲۱۵) در $\xi=0$ درون فرمولاسیون دیفرانسیلی بی‌بعد مساله، $d^2\theta/d\xi^2-\mu^2\theta=0$، به‌دست آید. نتیجه آن این‌گونه خواهد بود:

$$(1+\mu^2/2)a_0-a_1=\mu^2/2. \qquad (۳-۲۱۹)$$

با بررسی همزمان معادلات (۳-۲۱۶) و (۳-۲۱۸) نتیجه می‌گیریم:

$$a_0=\frac{(\mu^2/2)(1+\mu^2/84)}{1+9\mu^2/21+\mu^4/105}, \qquad a_1=\frac{\mu^2/24}{1+9\mu^2/21+\mu^4/105},$$

و همچنین از معادلات (۳-۲۱۶) و (۳-۲۱۹) خواهیم داشت:

$$a_0=\frac{(\mu^2/2)(1+\mu^2/30)}{1+9\mu^2/20+\mu^4/60}, \qquad a_1=\frac{\mu^2/24}{1+9\mu^2/20+\mu^4/60},$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۳-۲۱۵) و بازنویسی نتیجه به دو پروفایل ریتز درجه دوم برای مساله دست خواهیم یافت:

$$\frac{\theta(\xi)}{\theta_0}=1-\left(\frac{\mu^2/2}{1+9\mu^2/21+\mu^4/105}\right)\left(1-\xi^2\right)\left(\left(1+\frac{\mu^2}{84}\right)+\frac{\mu^2\xi^2}{12}\right). \qquad (۳-۲۲۰)$$

و

$$\frac{\theta(\xi)}{\theta_0}=1-\left(\frac{\mu^2/2}{1+9\mu^2/20+\mu^4/60}\right)\left(1-\xi^2\right)\left(\left(1+\frac{\mu^2}{30}\right)+\frac{\mu^2\xi^2}{12}\right). \qquad (۳-۲۲۱)$$

به دلایل شرح داده شده در مثال ۳-۱۳ حال باید اتلاف حرارتی را به‌جای دما مورد مقایسه قرار دهیم. همچنین همین‌طور که در همان مثال نشان داده شد، این اتلاف با استفاده از رابطه $q=hP\int_0^L\theta dx$ به‌دست خواهد آمد. پس خواهیم داشت:

$$\frac{q}{kA\theta_0/L}=\frac{\mu^2(1+2\mu^2/21)}{1+9\mu^2/21+\mu^4/105}, \qquad \frac{q}{kA\theta_0/L}=\frac{\mu^2(1+7\mu^2/60)}{1+9\mu^2/20+\mu^4/60},$$

این اتلاف‌های حرارتی به‌همراه تقریب درجه اول مربوطه، با اتلاف‌های حرارتی واقعی در جدول ۴-۳ مورد مقایسه قرار گرفته‌اند که اعداد I و II مشخص‌کننده تقریب‌های درجه دوم به‌ترتیب براساس معادلات (۳-۲۱۳) و (۳-۲۱۴) هستند. بررسی جدول ۴-۳ نشان می‌دهد که خطاهای موجود در تقریب درجه دوم محاسبه شده توسط معادله (۳-۲۱۳) کوچک‌تر است. اگرچه این دقت بالاتر در نتیجه به‌کارگیری معادلات جبری منطقی حاصل شد. برای یک مساله خاص اغلب یکی از این تقریب‌ها مناسب‌تر از بقیه می‌باشد، بنابراین انتخاب، به میزان دقت مورد نیاز در پاسخ، و پیچیدگی ذاتی مساله بستگی دارد. برای مثال، معادله (۳-۲۱۳)، که از آن به سهولت روابط زیاد و مناسبی برای پارامترهای مجهول حاصل می‌شود، برای تقریب‌های با درجه بالاتر مناسب‌تر از معادله (۳-۱۴) است زیرا با استفاده از معادله (۳-۱۴) پیدا کردن محل‌های کافی که در آن‌ها اختلاف زیادی میان پروفایل‌های دقیق و تقریبی انتظار می‌رود، مشکل می‌باشد.

جدول ۴-۳

μ	۰/۵	۱	۲	۴
دقیق	۰/۲۳۱۱	۰/۷۶۱۶	۱/۹۲۸۱	۰/۹۹۷۳
تقریب اول	۰/۲۳۰۸	۰/۷۵۰۰	۱/۷۱۴۳	۰/۵۲۶۳
٪ خطا	۰/۱۳۰	۱/۵۲	۱۱/۱	۳۶/۸
تقریب دوم I	۰/۲۳۱۱	۰/۷۶۱۶	۱/۹۲۶۹	۳/۹۲۲۳
٪ خطا	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۶۲	۱/۸۸
تقریب دوم II	۰/۲۳۱۱	۰/۷۶۱۴	۱/۹۱۳۰	۳/۶۷۹۱
٪ خطا	۰/۰۰۰	۰/۰۲۶	۰/۷۸۳	۷/۹۶

به همان دلیل ارائه شده در مثال ۳-۱۳، اختلاف میان پاسخ‌های تقریبی درجه دوم و دقیق وقتی $\mu\to\infty$ افزایش می‌یابد. به هر حال پروفایل‌های درجه دوم در محدوده بزرگتری از پارامتر μ نسبت به پروفایل درجه اول قابل استفاده‌اند. محدوده موردنظر $\mu\le 4$ همراه با خطای کمتر از ٪۲ و ٪۸ به ترتیب برای تقریب‌های درجه دوم I و II می‌باشد.

مساله ناپایای مطابق با مثال حاضر (یعنی شامل یک تغییر ناگهانی در دمای پایه پره) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

با یادگیری این‌که پروفایل‌های تقریبی چگونه انتخاب و محاسبه می‌شوند می‌توان این فصل را با یک مثال در مورد انتخاب پروفایل با درجه مناسب برای مساله داده شده، جمع‌بندی کرد.

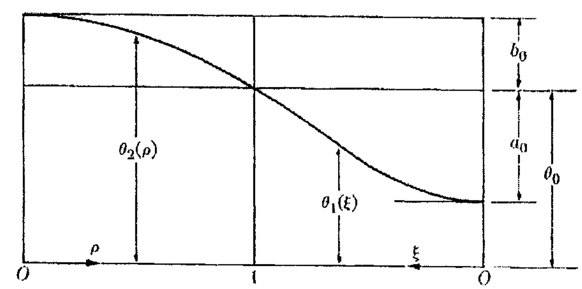
مثال ۳-۱۶. می‌خواهیم پروفایل‌هایی برای راه حل تقریبی مساله مثال ۳-۱۲ انتخاب نماییم.

به‌وسیله چند جمله‌ای‌ها، توزیع دما در کف و دیواره‌های جانبی ظرف می‌توانند به‌صورت سهمی تقریب زده شوند (شکل ۴۰-۳). بنابراین پروفایل‌های ریتز درجه اول به‌صورت زیر وجود خواهند داشت:

$$\theta_1(\xi) = \theta_0 - \left(1 - \xi^2\right) a_0, \qquad (۳\text{-}۲۲۲)$$

$$\theta_2(\rho) = \theta_0 + \left(1 - \rho^2\right) b_0, \qquad (۳\text{-}۲۲۲)$$

که در آن θ_0، a_0 و b_0 به‌ترتیب دماهای مجهول گوشه، مرکز کف و نوک دیواره جانبی هستند و $\rho = r/R$ و $\xi = x/L$ می‌باشند. معادلات (۳-۲۲۲) و (۳-۲۲۳) باید شرایط مرزی مسأله یعنی معادلات (۳-۱۸۶) الی (۳-۱۸۹) را به‌جز معادله (۳-۱۸۸) ارضا کنند. اکنون با به‌کارگیری صورت بی‌بعد معادله (۳-۱۸۸)، $a_0 = b_0$ حاصل می‌شود که حاکی از برابری افت دما در کف ظرف و دیواره‌های جانبی آن است. به وضوح این مورد یک محدودیت جدی است که با توجه به فیزیک مسأله نمی‌تواند مجاز باشد[1]. بنابراین تقریب‌های درجه اول داده شده توسط معادلات (۳-۲۲۲) و (۳-۲۲۳) نمی‌توانند برای مسأله مناسب باشند. در این حالت ساده‌ترین جفت از پروفایل‌های معنی‌دار فیزیکی که الزاماً باید براساس تقریب‌های درجه دوم باشند، برای یکی از پروفایل‌ها و یا هر دو آن‌ها مدنظر قرار می‌گیرند.



شکل ۴۰-۳

مراجع

1 TH.von KARMAN and M. A. BIOT, Mathematical Methods in Engineering. New York: McGraw-Hill, 1940.
2 N. W. MCLACHLAN. *Bessel Function for Engineers*. Oxford: Clarendon Press, 1955.

۱- به بحث مربوط به شکل ۳۵-۳ رجوع شود.

3 F. B. HILDEBRAND, *Advanced Calculus for Engineers*. New York: Prentice-Hall, 1948.
4 W. T. MARTIN and E. REISSNER, Elementary Differential Equations. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1956.
5 W. KAPLAN, Ordinary Differential Equations. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958.
6 W. M. ROHESENOW, Class Notes on "Advanced Heat Transfer." MIT, 1956.
7 H.S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959.
8 E. SCHMIDT, "Die Wärmeübertragung durch Rippen." *Zeitschr. VDI*, 70, 885, 957 (1926).
9 W. B. HARPER and D. R. BROWN, "Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air-Cooled Engines." *NACA Report 158*, 679 (1922).
10 K. A. GARDNER, "Efficiency of Extended Surfaces." *Trans. ASME*, 67, 621 (1945).
11 M. AVRAMI and J. B. LITTIE, "Diffusion of Heat Through a Rectangular Bar and Cooling and Insulation Effect of Fins." *Journ. Appl. Phys.*, 13, 255 (1942).
12 M. JAKOB, *Heat Transfer I*. New York: Wiley, 1949.

مسائل

۱-۳. مسأله کلی بخش ۱-۳ و انتقال حرارت زیر را دوباره در نظر بگیرید:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{(1/k)\int_{s_1}^{s_2} ds/A(s)}. \qquad (۳\text{-}۴)$$

(الف) نشان دهید که وقتی معادله (۳-۴) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$q = k\bar{A}\frac{T_1 - T_2}{S_2 - S_1},$$

$\bar{A}$ مربوط به سطح انتقال حرارت واقعی در مختصات کارتزین است

$$\bar{A} = A;$$

و به صورت متوسط لگاریتمی مقادیر سطوح انتقال حرارت داخلی و خارجی در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\bar{A} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)}$$

و در مختصات کروی، به صورت متوسط هندسی مقادیر سطوح انتقال حرارت داخلی خارجی، می‌باشد:

$$\bar{A} = (A_2 A_1)^{1/2}.$$

(ب) نشان دهید که وقتی $A_2 \to A_1$، مقادیر متوسط هندسی و لگاریتمی به سمت مقدار متوسط حسابی زیر نزدیک می‌شود:

$$\overline{A} = (A_2+A_1)/2.$$

۳-۲. یک صفحه تخت که در آن انرژی داخلی به‌وسیله یک مدار الکتریکی خارجی تولید می‌شود را در نظر بگیرید. (شکل ۳-۴۱)

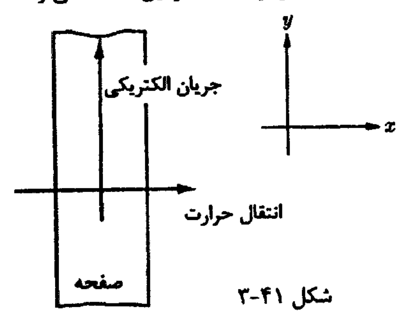
الف) نشان دهید که شکل یک بعدی کارتزین معادله هدایت به‌کار برده شده در این صفحه می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + k_e\left(\frac{dE}{dy}\right)^2=0,$$

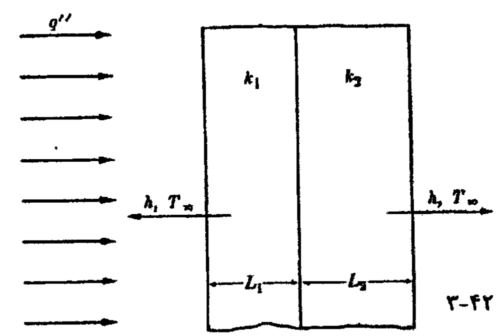
که در آن k_e رسانش الکتریکی بر واحد طول و بر واحد سطح در جهت y و E پتانسیل الکتریکی است.

ب) نشان دهید که شکل سه بعدی معادله مذکور به صورت زیر است.

$$\nabla.(k\nabla T) + k_e(\nabla E)^2 = 0.$$



شکل ۳-۴۱



شکل ۳-۴۲

۳-۳. دیواره خارجی یک خانه از دو صفحه موازی تشکیل شده است (شکل ۳-۴۲). ضریب هدایت حرارتی و ضخامت صفحات به ترتیب k_1، k_2 و L_1، L_2 است. دمای محیط‌های داخل و خارج و ضرایب انتقال حرارت مشابه و برابر T_∞ و h است. تابش خالص میان خورشید و دیواره خارجی q'' است.

الف) انتقال حرارت به خانه را محاسبه کنید.

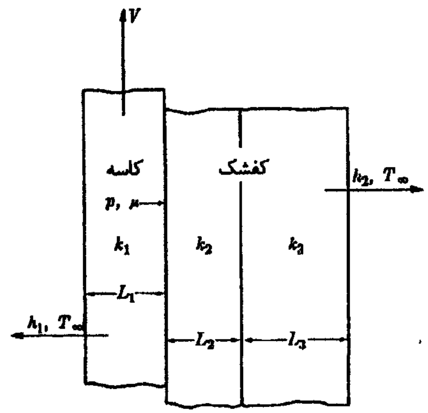
ب) مدار الکتریکی مربوط به قسمت الف را رسم کنید.

۳-۴. به‌علت ناچیز بودن اثر انحناء فرض می‌شود که بتوان ترمز یک وسیله نقلیه را به‌وسیله یک صفحه تخت (کاسه ترمز) که در یک صفحه کامپوزیت (کفشک ترمز) با سرعت ثابت V حرکت می‌کند، شبیه‌سازی نمود (شکل ۳-۴۳). فشار سطح تماس ثابت و یکنواخت p و ضریب اصطکاک μ، دمای محیط T_∞ و ضرایب انتقال حرارت h_1 و h_2 هستند. ضریب هدایت حرارتی و ضخامت صفحات به ترتیب k_1، k_2، k_3 و L_1، L_2، L_3 هستند.

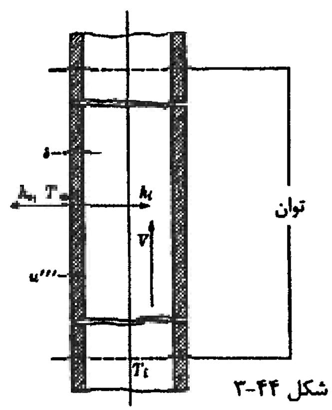
الف) حرارت منتقل شده به کاسه و به کفشک ترمز را محاسبه کنید.

ب) حداکثر دمای ترمز را بیابید.

ج) مدار الکتریکی مربوط به قسمت (الف) را رسم کنید.



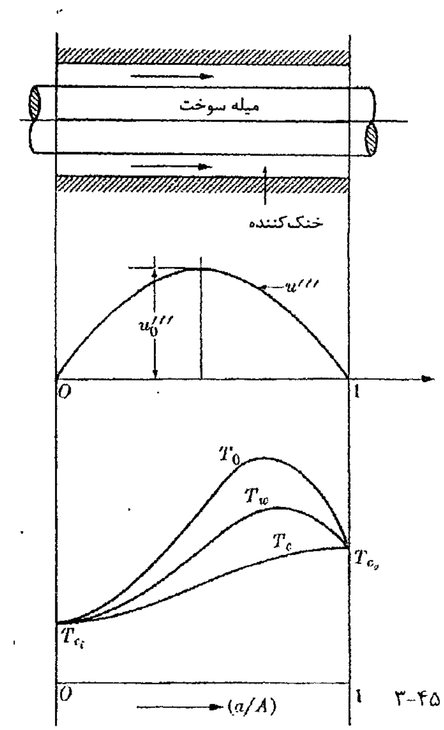
شکل ۳-۴۵



شکل ۳-۴۴

۳-۵. آب تحت فشار با سرعت V در میان یک لوله توخالی در جریان است (شکل ۳-۴۴). دمای آب ورودی T_i و دمای محیط اطراف T_∞ است. ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی به

ترتیب h_i و h_0 هستند. انرژی داخلی ثابت u''' به‌طور یکنواخت در دیواره های لوله تولید می‌شود. هدایت محوری ناچیز است. توزیع دمای محوری و متمرکز شعاعی سیستم را (الف) مطابق با فرض اشتباه $h_i \sim h_o$ و (ب) با توجه به $h_i \gg h_0$ بیابید.



شکل ۳-۴۵

۳-۶. یک سلول واحد از هسته راکتور با خنک‌کننده مایع به‌وسیله یک خنک‌کننده که به‌طور هم‌محور با میله سوختی بر روی آن جریان دارد، شبیه‌سازی شده است. (شکل ۴۵-۳). انرژی داخلی تولیدی در میله $u''' = u_0''' \sin\pi(a/A)$ است که در آن a و A به‌ترتیب سطوح انتقال حرارت محلی و کل هستند. هدایت محوری ناچیز است و ضریب انتقال حرارت h میان میله سوختی و خنک‌کننده ثابت فرض شده است. نشان دهید که

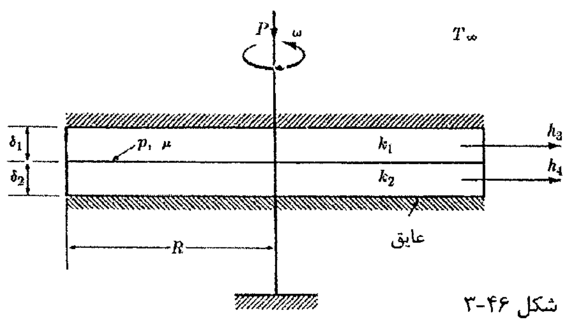
$$\frac{T_c - T_{c_i}}{T_{c_o} - T_{c_i}} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\pi\frac{a}{A}\right),$$

$$\frac{T_\omega - T_{c_i}}{T_{c_o} - T_{c_i}} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\pi\frac{a}{A}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega c}{Ah}\right)\sin\pi\frac{a}{A},$$

$$\frac{T_0 - T_{c_i}}{T_{c_o} - T_{c_i}} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\pi\frac{a}{A}\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega c}{Ah}\right)\left(1 + \frac{hR}{2k}\right)\sin\pi\frac{a}{A}\cdot$$

که در آن ω سرعت جریان خنک‌کننده، T_c دمای محلی خنک‌کننده، T_{c_i} و T_{c_o} دماهای ورودی و خروجی خنک‌کننده، c گرمای ویژه خنک کننده، k ضریب هدایت حرارتی میله، R شعاع خارجی میله، T_ω دمای سطح تماس میله و خنک‌کننده و T_0 دمای خط مرکزی میله است.

۳-۷. یک دیسک دیواره نازک با سرعت دورانی ω بر روی یک دیسک دیواره نازک ثابت دیگر می‌چرخد (شکل ۴۶-۳). سطوح بالایی و پایینی سیستم عایق‌بندی شده‌اند. فشار سطح تماس p، ضریب اصطکاک μ، ضرایب انتقال حرارت محیطی h_3 و h_4 و دمای محیط T_∞ است. شعاع، ضخامت و ضریب هدایت حرارتی دیسک‌ها به ترتیب R، δ_1 و δ_2، k_1، k_2 هستند. توزیع دما در دیسک‌ها را بیابید.

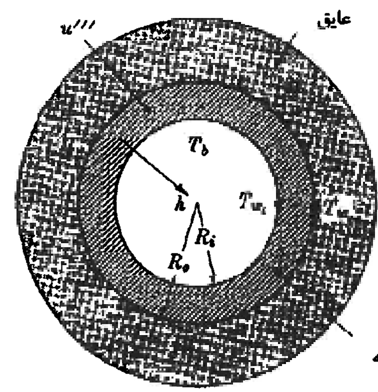


شکل ۳-۴۶

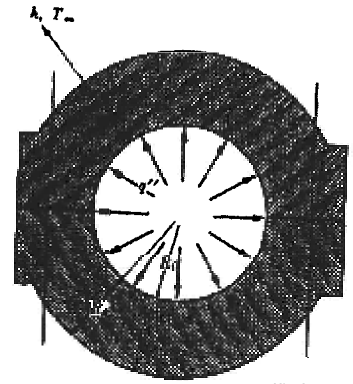
۳-۸. ضریب انتقال حرارت محلی در یک لوله به‌صورت تجربی به‌دست آمده است. برای این منظور مساله ۵-۳ را با مفروضات عایق بودن لوله و توزیع دمای شعاعی و محوری در آن در نظر می‌گیریم. مطابق تعریف ضرایب انتقال حرارت در لوله‌ها، رابطه محلی زیر موجود است:

$$h = \left(\frac{R_0^2 - R_i^2}{2R_i}\right)\frac{u'''}{T_{w_i} - T_b},$$

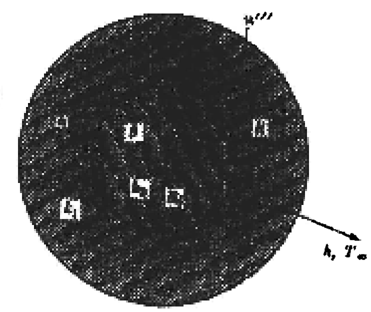
که در آن R_i و R_o به‌ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی لوله، T_{w_i} دمای داخلی دیواره و T_b دمای توده سیال است (شکل ۴۷-۳). محاسبه دمای محلی توده T_b برحسب مقدار T_i ورودی اندازه‌گیری شده، قسمت (ب) مساله ۴-۳ را تشکیل می‌دهد. از آنجایی‌که دمای داخلی دیواره T_{w_i} به سختی اندازه‌گیری می‌شود (چرا؟)، به‌جای آن دمای خارجی دیواره اندازه‌گیری شده است. یک عبارت که مقدار محلی T_{w_i} را به T_{w_o} اندازه‌گیری شده مرتبط سازد، بیابید.



شکل ۴۷-۳



شکل ۴۸-۳



شکل ۴۹-۳

۳-۹. سطح داخلی یک بمب گرماسنج[1] تحت شار حرارتی q'' حاصل از فرآیند واکنش شیمیایی گرمازا قرار گرفته است. (شکل ۴۸-۳). شعاع‌های داخلی و خارجی گرماسنج به‌ترتیب R_i و R_o هستند. ضریب انتقال حرارت خارجی h و دمای محیط T_∞ است.

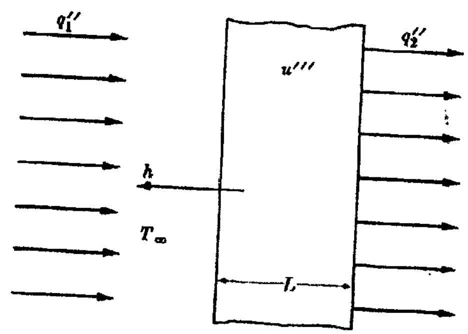
(الف) دمای سطح داخلی گرماسنج را به‌دست آورید.

(ب) آیا ممکن است که بتوان بدون تغییر R_i و R_o، q'' و T_∞ این دما را کاهش داد؟

۳-۱۱. انرژی داخلی u''' به‌طور یکنواخت در یک صفحه تولید می‌شود. سطح سمت چپ صفحه به‌طور یکنواخت تحت شار حرارتی q_1'' قرار دارد که با فاصله‌ای از آن ساطع می‌شود. شار حرارتی

1- Calorimeter

یکنواخت q_2'' از سطح سمت راست صفحه اعمال می‌شود. (شکل ۵۰-۳). ضریب انتقال حرارت و دمای محیط در سمت چپ صفحه به ترتیب h و T_∞ است. با استفاده از اصل جمع‌پذیری، مساله را به تعدادی مسائل مناسب ساده‌تر تقسیم کنید (این مسائل را حل نکنید).



شکل ۵۰-۳

۳-۱۲. (الف) از عبارت قانون هدایت فوریه شروع کرده و نشان دهید که در غیاب هرگونه تولید انرژی داخلی، وقتی‌که ضریب هدایت حرارتی به‌طور خطی $k = k_o(1+\beta T)$ به دما وابسته است، هدایت یک‌بعدی در یک صفحه صاف را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$q = k_m A \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1},$$

در آن $k_m = (k_1 + k_2)/2$، x_1 و x_2 مختصات سطوح صفحه و T_1 و T_2 دمای مربوط به آنها هستند. توزیع دمای صفحه را توسط (ب) انتگرال مستقیم و (پ) با روش کرشهف به‌دست آورید.

۳-۱۳. در مسائلی که ضریب هدایت حرارتی وابسته به دما است، به غیر از روش کرشهف روش معروف دیگری برای استفاده درمسائل یک بعدی پایا با مرز عایق شده، یا مسائلی که دارای صفحه محور تقارن می‌باشند، وجود دارد. این روش بر پایه بسط دمای نامعلوم در یک سری تیلور حول مرز عایق شده یا حول صفحه یا محور تقارن استوار است. سپس جملات سری توسط معادله حاکم مساله و مشتقات متوالی آن محاسبه می‌شوند. برای تشریح روش به مثال ۸-۳ توجه کنید. دمای صفحه را حول $x = 0$ بسط می‌دهیم که به این ترتیب سری تیلور به سری مک‌لورن تبدیل می‌شود. جملات سری را از معادله حاکم بر مساله به‌دست آورید.

$$\frac{dk}{dT}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + k(T)\frac{d^2T}{dx^2} + u''' = 0,$$

و مشتقات متوالی آن را با در نظر گرفتن $(dT/dx)_{x=0} = 0$ محاسبه کنید. نشان دهید که نتیجه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$T(x) = T_0 - \frac{u'''}{k(T_0)}\frac{x^2}{2!} - \frac{3u'''^2}{k^3(T_0)}\left(\frac{dk}{dT}\right)_{T=T_0}\frac{x^4}{4!} + \cdots ,$$

که در آن T_0 دمای صفحه در $x = 0$ است.

حداکثر خطای ناشی از برش[1] ϵ_{max} سری مذکور چنین است:

$$\epsilon_{max} < \left(\frac{d^6T}{dx^6}\right)_{max}\frac{L^6}{6!} .$$

باید متذکر شد که $(d^6T/dx^6)_{max}$ به‌سختی تقریب زده می‌شود. اگرچه به‌دلیل تغییرات کند دما می‌تواند به‌وسیله $(d^6T/dx^6)_{x=0}$ تقریب زده شود. در حالت کلی دمای سطحی صفحه T_∞ صفحه (یا شرط مرزی دیگر) به جای T_0 داده می‌شود. بنابراین یک فرآیند حدس و خطا برای مرتبط کردن دمای نامشخص T_0 به T_∞ داده شده، نیاز است. به عنوان اولین تقریب می‌توان حالت ضریب هدایت حرارتی ثابت را مورد استفاده قرار داد. وقتی که مقدار T_0 حاصل را در سری مک‌لورن قرار دهیم دمای سطح به‌دست آمده با T_∞ متفاوت است. این فرآیند با تغییر T_0 تا زمانی‌که اختلاف میان دماهای داده شده و به‌دست آمده کوچک‌تر از مقدار مشخصی شود، تکرار می‌شود.

۳-۱۴. با استفاده از روش حل مساله ۳-۱۳، مساله ۳-۸ را با فرض این‌که ضرایب هدایت حرارتی و الکتریکی لوله به‌طور خطی به دما وابسته‌اند مجدداً حل کنید.

۳-۱۵. پیل سوختی کروی مثال ۳-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید که تولید انرژی هسته‌ای داخلی در ماده قابل شکافت یکنواخت باشد. ضریب هدایت حرارتی این مواد به‌صورت خطی به دما وابسته است در حالی‌که برای پوشش فلزی ثابت است. با استفاده از روش مساله ۳-۱۳ توزیع دما در پیل سوختی را بیابید.

۳-۱۶. با شروع از صورت کلی معادله هدایت برای محیط‌های ایزوتروپیک همگن:

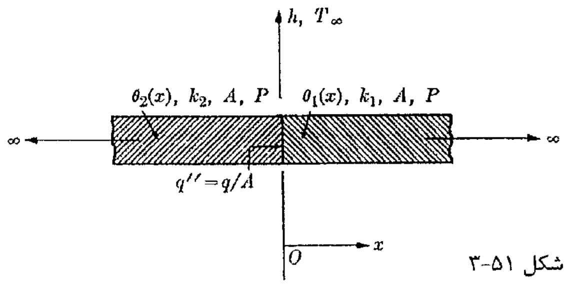
$$\frac{dT}{dt} = a\nabla^2T + \frac{u'''}{\rho c},$$

معادله حاکم بر صفحات گسترش‌یافته با سطح مقطع ثابت را به‌دست آورید.

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \left(\frac{hP}{kA}\right)(T - T_\infty) = 0 .$$

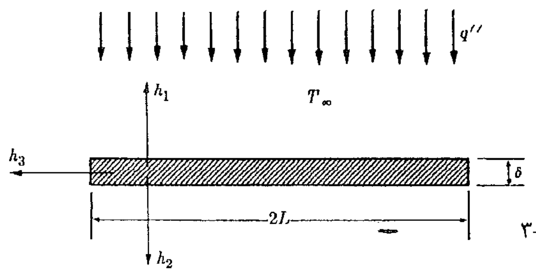
۳-۱۷. یک پره بی‌نهایت متشکل از دو پره نیمه بینهایت را در نظر بگیرید (شکل ۳-۵۱). شار حرارتی یکنواخت q'' در محل اتصال تولید می‌شود. هندسه پره‌ها مشخص است. ضرایب هدایت حرارتی k_1 و k_2 هستند. توزیع دمای سیستم را بیابید.

1- Truncation error



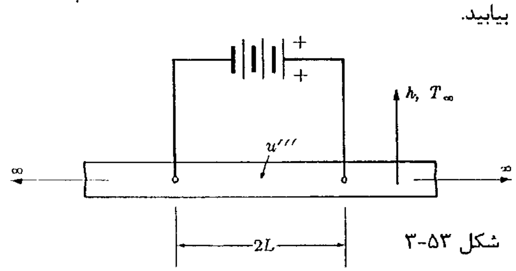
شکل ۳-۵۱

۳-۱۸. صفحه مسطحی در دمای محیط T_∞ از منبعی شار حرارتی تشعشعی خالص q'' را دریافت می‌دارد (شکل ۳-۵۲). ضخامت صفحه σ بسیار کمتر از طول $2L$ آن است بعد سوم صفحه به بینهایت میل می‌کند. ضرایب انتقال حرارت بالا و پایینی به‌ترتیب h_1 و h_2 هستند. ضریب انتقال حرارت از انتهای صفحه در صورت نیاز به‌صورت $h_3 \neq h_1 \neq h_2$ داده شده است. توزیع دمای سیستم را بیابید.



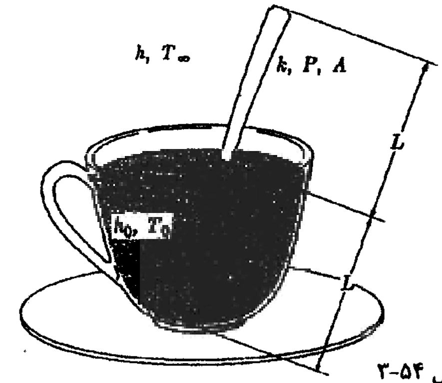
شکل ۳-۵۲

۳-۱۹. یک پره‌ی بینهایت را در نظر بگیرید. انرژی داخلی u''' به‌طور یکنواخت در قسمت نشان داده شده از پره در شکل ۳-۵۳ تولید می‌شود؛ ضریب هدایت حرارتی، مساحت سطح مقطع و محیط جانبی پره به‌ترتیب k، P و A هستند. ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط T_∞ است. دمای پایای پره را بیابید.



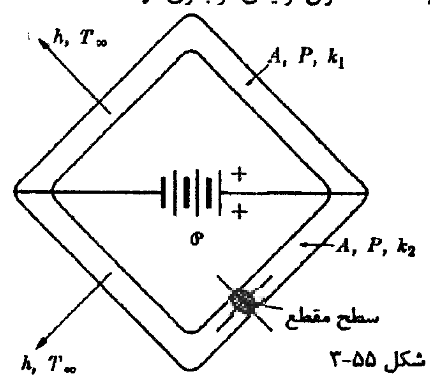
شکل ۳-۵۳

۳-۲۰. یک قاشق در یک فنجان چای را می‌توان به عنوان یک میله با سطح مقطع ثابت تقریب زد (شکل ۳-۵۴). ضریب هدایت حرارتی، طول، محیط جانبی و مساحت سطح مقطع قاشق به ترتیب k، $2L$، P و A می‌باشند. ضرایب انتقال حرارت h_0 و h هستند. نصف قاشق در چای است. فرض کنید که دمای چای ثابت باقی می‌ماند و انتهای قاشق عایق‌بندی شده است. دمای حالت پایای قاشق را بیابید.



شکل ۳-۵۴

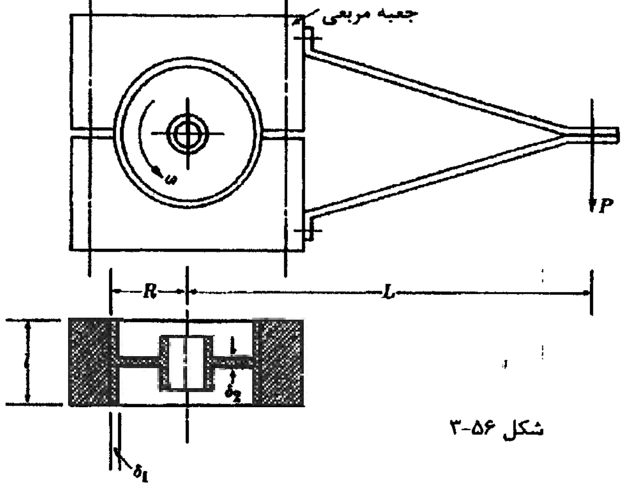
۳-۲۱. توزیع دما در میله مربعی نشان داده شده در شکل ۳-۵۵ را بیابید. ضریب هدایت حرارتی قسمت بالایی و پایینی میله k_1 و k_2 می‌باشند. مقاومت الکتریکی کل قسمت‌های بالایی و پایینی به‌ترتیب R_1 و R_2 هستند. توان تولیدی در باتری $\wp$ است.



شکل ۳-۵۵

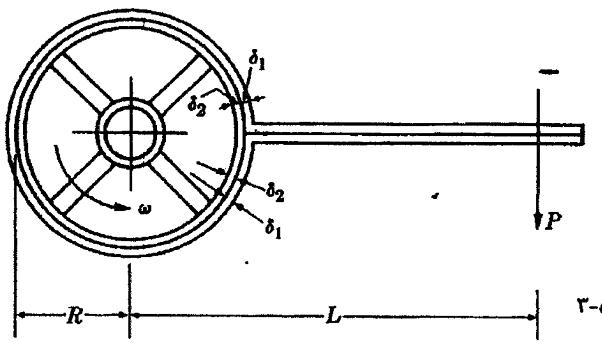
۳-۲۲. تحت شرایط پایا و با استفاده از یک ترمز پرونی، گشتاور موتور با سرعت زاویه‌ای ω به‌وسیله نیروی P متعادل می‌شود (شکل ۳-۵۶). ضریب اصطکاک خشک μ است. ضریب هدایت

حرارتی جعبه مربعی در مقایسه با چرخ گردان کوچک است. پس می‌توان فرض کرد کل حرارت تولیدی در چرخ گردان جریان می‌یابد. توزیع دمای چرخ گردان را به‌دست آورید.



شکل ۳-۵۶

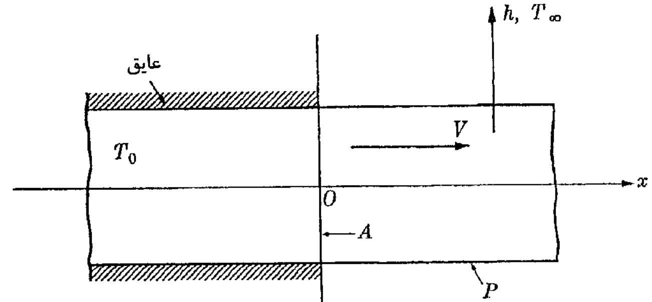
۳-۲۳. مساله ۳-۲۲ را در حالتی که ترمز پرونی نشان داده شده در شکل ۳-۵۷ جایگزین شده باشد مجدداً حل نمایید. فرض کنید که همه ضرایب هدایت دارای یک اندازه باشند.



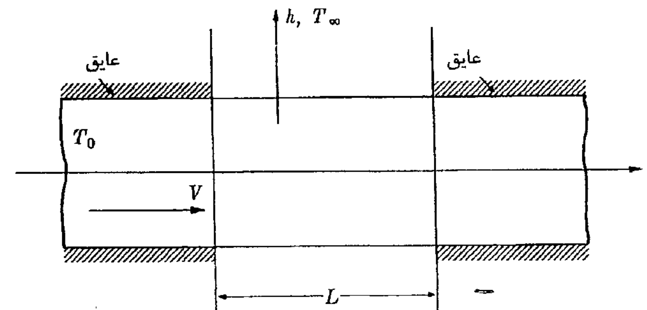
شکل ۳-۵۷

۳-۲۴. یک مایع غیرگرانرو با خواص ثابت دارای سرعت V و دمای بالادست جریان T_0 بصورت پایا در امتداد یک لوله با سطح مقطع A و سطح جانبی p در جریان است (شکل ۳-۵۸). ضخامت دیواره لوله ناچیز است. نیمه پایین دست جریان از لوله در انتقال حرارت با محیط دمای T_∞ بوده و نیمه بالا دست جریان از لوله عایق‌بندی شده است. ضریب انتقال حرارت h است. توزیع دمای محوری در مایع را بیابید.

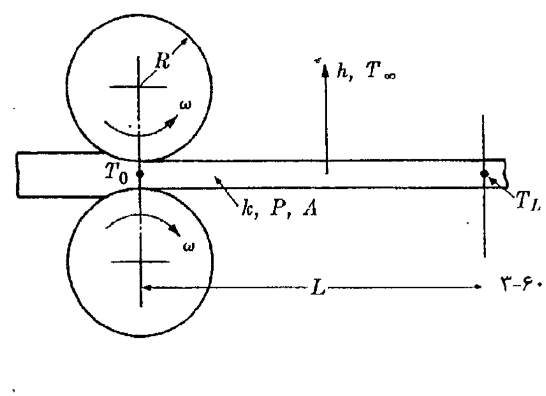
۳-۲۵. مساله ۳-۲۴ را با در نظر گرفتن این‌که این بار بخشی از لوله به طول L با محیطی به دمای T_∞ تبادل حرارتی دارد (شکل ۳-۵۹)، مجدداً حل نمایید.



شکل ۳-۵۸



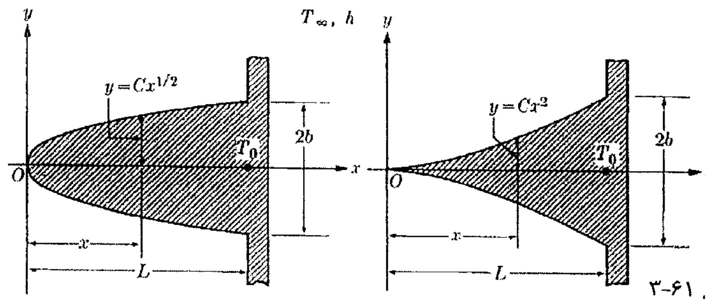
شکل ۳-۵۹



شکل ۳-۶۰

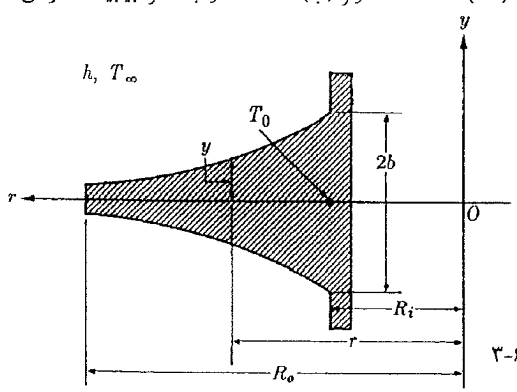
۳-۲۶. یک ماشین پرس حرارتی در شکل ۳-۶۰ نشان داده شده است. انتقال حرارت از سیم پرس شده به محیط در دمای T_∞ و با ضریب هدایت حرارتی h انجام می‌شود. در محل L، برای انجام یک عملیات شیمیایی نیاز به دانستن T_L داریم. دمای ورودی سیم در T_0 تنظیم شده است. سرعت زاویه‌ای دیسک‌های چرخان را محاسبه کنید. مساله را با استفاده از یک سیستم حجم کنترل تحلیل کنید.

۳-۲۷. یک پره مستقیم با پروفایل سهموی (شکل ۳-۶۱) را در نظر بگیرید. ضریب هدایت حرارتی، ضخامت پایه، و طول پره به‌ترتیب k، $2b$، و L هستند. ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط T_∞ می‌باشد. دمای پایا و کل حرارت منتقله از پره را با فرض این‌که معادله سهمی (الف) $y = Cx^{1/2}$ (ب) $y = Cx^2$ باشد را بیابید، که C یک ثابت است.



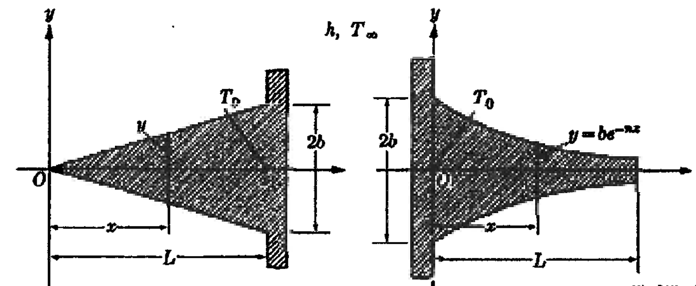
شکل ۳-۶۱

۳-۲۸. یک پره حلقوی با پروفایل هذلولی (شکل ۳-۶۲) را در نظر بگیرید. ضریب هدایت حرارتی، ضخامت پایه و شعاع‌های داخلی و خارجی پره به‌ترتیب k، $2b$، R_i و R_o هستند. ضریب انتقال h و دمای محیط T_∞ است. دمای پایا و کل حرارت منتقله از پره را با فرض این‌که معادله هذلولی به‌صورت (الف) $yr^{1/2} = C$ و (ب) $yr^2 = C$، باشد را بیابیدکه در آن C یک ثابت است.



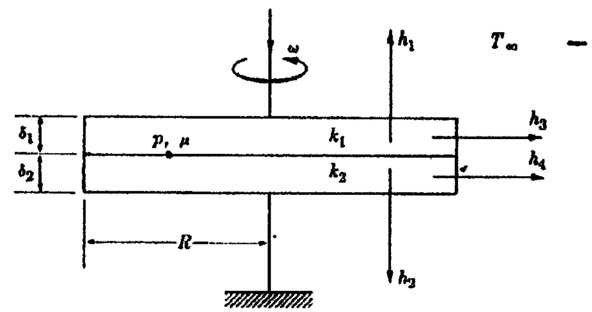
شکل ۳-۶۲

۲۹-۳. یک پره سوزنی با سطح مقطع متغیر (شکل ۶۳-۳) را در نظر بگیرید. ضریب هدایت حرارتی، ضخامت پایه و طول پره به‌ترتیب k، $2b$ و L هستند. ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط T_∞ است. دمای پایا و کل حرارت تلف شده از پره را با فرض اینکه سطح مقطع آن به‌طور الف) خطی ب) نمایی تغییر کند، بیابید.



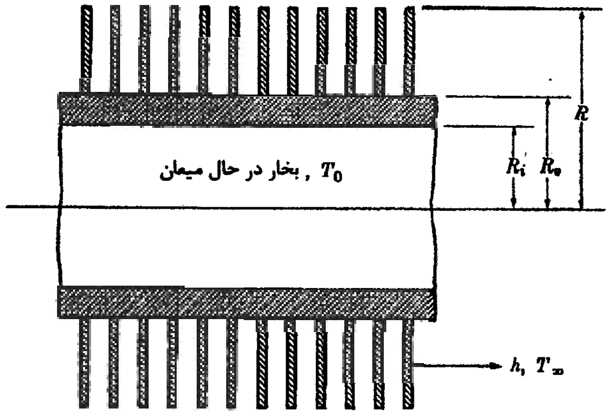
شکل ۶۳-۳

۳۰-۳. یک دیسک دیواره نازک با سرعت زاویه‌ای ω بر روی یک دیسک ساکن می‌چرخد (شکل ۶۴-۳). فشار سطح تماس p، ضریب اصطکاک خشک μ و دمای محیط T_∞ است. ضرایب انتقال حرارت بالایی، پایینی و جانبی به‌ترتیب h_1، h_2، h_3 و h_4 هستند. شعاع، ضخامت و ضریب هدایت حرارتی صفحات R، δ_1، δ_2، k_1 و k_2 هستند. دمای پایای سیستم را بیابید.



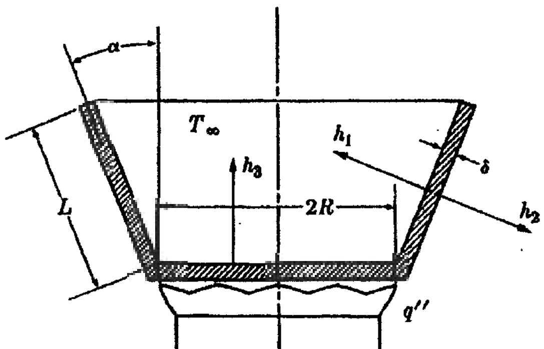
شکل ۶۴-۳

۳۱-۳. بخار در حال میعان در دمای T_0 در یک لوله پره دار شده جریان می‌یابد (شکل ۶۵-۳). شعاع خارجی لوله و شعاع خارجی پره‌ها به‌ترتیب R و R_o هستند. ضخامت پره δ است و ضریب انتقال حرارت میان پره و محیط h و دمای محیط T_∞ است. توزیع دما در پره‌ها را بیابید.



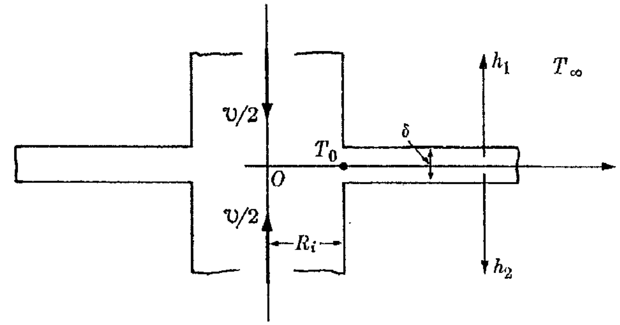
شکل ۶۵-۳

۳۲-۳. یک کتری خالی از قسمت زیرین تحت شار حرارتی یکنواخت q'' قرار گرفته است (شکل ۶۶-۳). دمای محیط T_∞ است و ضرایب انتقال ترتیب h_1، h_2 و h_3 هستند. ضریب هدایت حرارتی، طول، شعاع کف و ضخامت کتری به ترتیب k، L، R و δ هستند. با استفاده از ساده‌ترین فرمولاسیون ممکن برای مساله، دمای پایای کتری را بیابید.

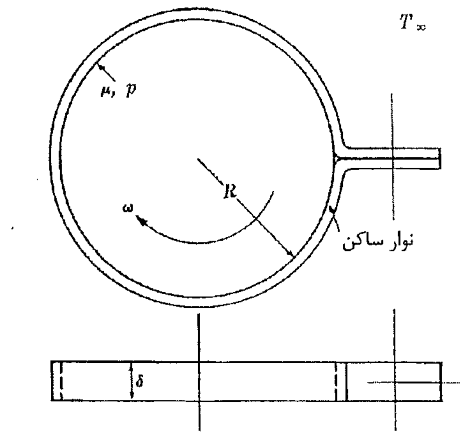


شکل ۶۶-۳

۳۳-۳ یک سیال تراکم‌ناپذیر به‌طور پایا و شعاعی بین دو دیسک موازی هم‌مرکز با ضخامت ناچیز جریان می‌یابد (شکل ۶۷-۳). فاصله δ میان دیسک‌ها کم است. دمای ورودی سیال در T_0 تنظیم شده است. دبی حجمی v، ضریب هدایت حرارتی سیال k، دمای محیط T_∞، شعاع داخلی دیسک R_i و ضرایب انتقال بالایی و پایینی ترتیب h_1 و h_2 هستند. توزیع دمای شعاعی در سیال را بیابید.



شکل ۶۷-۳

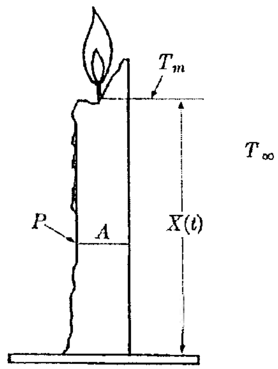


شکل ۶۸-۳

۳۴-۳. پره‌های صنعتی (مستقیم، شعاعی یا نوک تیز) اغلب از صفحات فلزی نازک با ضخامت یکنواخت که به لوله‌ها جوش داده می‌شوند، ساخته شده‌اند. انتقال حرارت به محیط در طول پره ثابت باقی نمی‌ماند، زیرا اختلاف دما میان پره و محیط در طول پره کاهش می‌یابد و در نتیجه استفاده ضعیفی از مواد صورت می‌گیرد. می‌خواهیم برای تصحیح این وضعیت مساحت سطح مقطع پره را طوری تغییر دهیم که شار حرارتی q/A در طول پره ثابت باقی بماند. پروفایل پره‌های مستقیم، شعاعی و نوک تیز با ضخامت نوک صفر را که شرایط مذکور را دارا باشد، بیابید.

۳۵-۳. می‌خواهیم یک ترمز پرونی را به‌وسیله یک دیسک جامد با شعاع R و ضخامت δ که به‌صورت محیطی با یک لایه با ضخامت نازک احاطه شده است، شبیه‌سازی کنیم (شکل ۶۸-۳). فشار سطحی P و ضریب اصطکاک خشک μ است. ابتدا ترمز در دمای محیط T_∞ قرار دارد سپس فرض می‌شود که به‌طور ناگهانی تحت سرعت زاویه‌ای ω قرار گیرد. دمای ناپایای ترمز را بیابید.

۳۶-۳. یک شمع روشن را در نظر بگیرید. طول اولیه و طول لحظه‌ای شمع به‌ترتیب L و $x(t)$ و محیط آن P است. سطح مقطع شمع نیز A می‌باشد (شکل ۶۹-۳). دمای ذوب شدن موم شمع T_m و دمای محیط T_∞ است. سرعت ذوب شدن شمع را بیابید.



شکل ۶۹-۳

۳۷-۳. مثال ۱۰-۳ را دوباره در نظر بگیرید. توزیع دمای سطح گسترش‌یافته را با فرض وابستگی ضریب هدایت حرارتی آن به حالات زیر به‌دست آورید:

الف) وابستگی به دما به‌صورت $k = k(t)$،

ب) وابستگی به مکان به‌صورت $k = k_0x^n$ و به‌طوری‌که n می‌تواند سه حالت داشته باشد: $0 < n < 1$، $n = 2$ و $n \neq 2$ ولی عددی صحیح.

فصل چهارم

مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها، توابع متعامد

مباحث قبلی‌مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می‌شد. به‌طورکلی از آنجایی‌که این‌گونه مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می‌کنند، معمولاً قابل حل می‌باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حاصل می‌کنند، که هیچ راه حل کلی برای آن‌ها وجود ندارد. در این فصل و در فصول ۵، ۶، و ۷ چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی‌که مرزهای یک مساله هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد[1] مثل مختصات‌های کارتزین، استوانه‌ای، و کروی باشد، راه دقیق توسط روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. یک روش متداول براساس جداسازی متغیرها، و دیگری براساس تبدیل لاپلاس می‌باشد. دلایل قانع‌کننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهند این دو روش بسیار متداول، برای حل مسائل ویژه مناسب‌تر از سایر روش‌ها می‌باشند؛ البته، روش تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، و نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته‌تری می‌باشد. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را به فصل ۷ موکول می‌کنیم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می‌دهیم. در چهار بخش بعدی مروری بر روابط ریاضی ضروری برای این روش، خواهیم داشت.

1- Orthogonal

۴-۱. مسائل مقدار مرزی[1]، مسائل مقدار مشخصه[2]

در ابتدا یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم که از فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله هدایت یک بعدی پایا حاصل می‌شود را در نظر بگیرید. جواب این مساله شامل دو ثابت اختیاری است که توسط دو شرط تعیین می‌شوند، که هر کدام از این شرایط در یکی از مرزهای مساله قرار دارند. به این‌گونه مسائل، مسائل مقدار مرزی گفته می‌شود و با مسائل مقدار اولیه که در آن‌ها همه شرایط در یک مکان تعیین شده است، متفاوت می‌باشد. یک مثال از مساله مقدار اولیه سقوط آزاد یک جسم است که در فصل ۱ به آن اشاره شد[3].

حال یک معادله خطی همگن[4] مرتبه دوم را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_2(x)y=0, \qquad (۴-۱)$$

که در مرزهای $x=a$ و $x=b$ مقدار تابع y به صفر می‌رسد،

$$y(a)=0, \quad y(b)=0. \qquad (۴-۲)$$

جواب کلی این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \qquad (۴-۳)$$

که در آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های مستقل خطی و C_1، C_2 ثوابت اختیاری می‌باشند. از ترکیب این جواب با شرایط مرزی داریم:

$$C_1y_1(a)+C_2y_2(a)=0, \qquad (۴-۴)$$
$$C_1y_1(b)+C_2y_2(b)=0.$$

یک جواب این معادله همگن به ازای $C_1=C_2=0$ به‌دست می‌آید که به آن جواب بدیهی $y\equiv 0$ می‌گویند. اگر دترمینان ضرایب C_1 و C_2 غیرصفر باشد، جواب بدیهی، تنها جواب است. اگر دترمینان ضرایب صفر باشد، داریم:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}=0. \qquad (۴-۵)$$

حال دو معادله (۴-۴) یکسان بوده و یک ثابت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دیگری با استفاده از یکی از معادلات بیان نمود، و ثابت دوم اختیاری است. بنابراین اگر معادله (۴-۵) صادق بوده و با

1- Boundary Value Problems
2- Characteristic Value Problems
۳- وقتی که یک مساله ناپایا متمرکز باشد به یک مساله مقدار اولیه تبدیل می‌شود، و به یک مساله مقدار اولیه و مقدار مرزی تبدیل می‌شود اگر به صورت توزیع‌شده فرموله شود.
۴- بخش ۴-۳ را برای تعریف معادلات دیفرانسیل همگن و ناهمگن و شرایط مرزی ببینید.

در نظر گرفتن اولین معادله (۴-۴) $C_2y_2(a)=-C_1y_1(a)$ به‌دست می‌آید. با تعریف ثابت جدید C به‌صورت $C_1=Cy_2(a)$ معادله $C_2=-Cy_1(a)$ به‌دست می‌آید و معادله (۴-۳) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=C[y_2(a)y_1(x)-y_1(a)y_2(x)]. \qquad (۴-۶)$$

به سادگی می‌توان دید که معادله (۴-۶) در شرایط مرزی صدق می‌کند. یک شرط، $y(a)=0$ است که به‌طور مستقیم از معادله (۴-۶) حاصل می‌شود و شرط دیگر یعنی $y(b)=0$ معادله (۴-۶) را به $y_2(a)y_1(b)-y_1(a)y_2(b)=0$ تبدیل می‌کند، که این عبارت، منفی معادله (۴-۵) است. شایان ذکر است که معادله (۴-۶) جواب غیربدیهی است اگر فقط $y_1(a)$ و $y_2(a)$ هر دو صفر نباشند. اگر $y_1(a)=y_2(a)=0$ باشد معادله اول (۴-۴) پاسخ بدیهی خواهد بود، که در این مورد تنها معادله دوم ممکن است برای به‌دست آوردن رابطه بین ثوابت C_1، C_2 مورد استفاده قرار گیرد. و پاسخ غیربدیهی به‌صورت زیر خواهد بود:

با این شرط که $y_1(b)$ و $y_2(b)$ هر دو صفر نیستند. اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ هر دو در نقاط $x=a$ و $x=b$ صفر شوند، آن‌گاه برای مقادیر اختیاری ثوابت C_1، C_2 معادله (۴-۳) در معادله (۴-۲) صدق می‌کند. اگر معادله (۴-۵) صادق نباشد، تنها پاسخ مساله، پاسخ بدیهی یا $y\equiv 0$ خواهد بود.

پاسخ مسائل هدایت پایای دو و سه‌بعدی، و همچنین پاسخ مسائل ناپایای یک و چند بعدی ممکن است به پاسخ معادله (۴-۱) تبدیل شوند، که در معادله (۴-۱) ضرایب $f_1(x)$ یا $f_2(x)$ به پارامتر λ وابسته هستند. در چنین مسائلی ممکن است دترمینان معادله (۴-۵) تنها برای مقادیر حقیقی λ ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots$) به صفر میل کند؛ این مقادیر، مقادیر مشخصه نامیده می‌شوند. به ازای هر مقدار از λ یک پاسخ، مشابه معادله (۴-۶) حاصل می‌شود؛ این پاسخ‌های ویژه توابع مشخصه مساله هستند و مسائلی این‌چنینی مسائل مقدار مشخصه نامیده می‌شوند. که در این مورد واژه‌های مقادیر ویژه[1] و توابع ویژه[2] و مسائل مقدار ویژه[3] نیز استفاده می‌شوند.

روند کلی مذکور را می‌توان با استفاده از یک مثال به طور واضح‌تری شرح داد. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

1- Eigenvalues
2- Eigenfunctions
3- Eigenvalue problems

این معادله در بخش ۶-۳ برای نشان دادن روش سری‌های توانی برای حل معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفت. علاوه برآن فرض می‌کنیم که این معادله همگن شامل یک پارامتر λ به‌صورت زیر است:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y=0, \qquad (۴-۷)$$

و شرایط مرزی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(0)=0, \qquad (۴-۸)$$

$$y(L)=0. \qquad (۴-۹)$$

پاسخ کلی معادله (۴-۷) به‌صورت زیر است:

$$y=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x. \qquad (۴-۱۰)$$

با استفاده از معادله (۴-۸)، $C_2=0$ می‌شود و خواهیم داشت:

$$y=C_1\sin\lambda x, \qquad (۴-۱۱)$$

و از ترکیب معادله (۴-۹) با معادله (۴-۱۱) معادله $C_1\sin\lambda L=0$ حاصل می‌شود. تنها اگر λ در معادله $\sin\lambda L=0$ صدق کند، معادله دارای پاسخ غیربدیهی است. بنابراین،

$$\lambda_n=n\pi/L, \qquad n=1,2,3,\ldots, \qquad (۴-۱۲)$$

و پاسخ متناظر با معادله (۴-۱۱) به‌صورت زیر است:

$$y=C_1\varphi_n(x), \qquad \varphi_n(x)=\sin(n\pi/L)x. \qquad (۴-۱۳)$$

وقتی‌که n دارای مقدار صحیح منفی باشد هیچ پاسخ جدیدی حاصل نمی‌شود.

بنابراین مساله مقدار مرزی مذکور، یعنی معادلات (۴-۷)، (۴-۸)، و (۴-۹) تنها دارای پاسخ بدیهی $y\equiv 0$ می‌باشد، مگر این‌که λ دارای مقدار مشخصه‌ای حاصل از معادله (۴-۱۲) باشد. متناظر با هر مقدار λ_n یک تابع مشخصه $\varphi_n(x)$ وجود دارد که توسط معادله (۴-۱۳) حاصل می‌شود، حاصل‌ضرب هر ثابت دلخواهی در این تابع پاسخی از مساله است. نکته مهم این است که مساله مقدار مرزی زیر

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda^2 y=0; \qquad y(0)=0, \quad y(L)=0$$

به ازای $\lambda=0$ تنها دارای پاسخ بدیهی $y\equiv 0$ است. از این‌رو برای این مساله مقادیر مشخصه و توابع مشخصه وجود نخواهد داشت. این امر این واقعیت را نشان می‌دهد که یک مساله مقدار مرزی ممکن است مساله مقدار مشخصه باشد یا این‌که نباشد. وقتی‌که یک مساله مقدار اولیه دارای پاسخ‌های ویژه‌ای با ماهیت متناوب باشد، تبدیل به مساله مقدار مشخصه خواهد شد؛ دوره تناوب و میدان نوسان این پاسخ‌ها ممکن است ثابت و یا متغیر باشد. مثال‌هایی از پاسخ‌های ویژه با ماهیت متناوب شامل توابع دایره‌ای[1] و توابع بسل نوع اول و دوم با هر درجه‌ای است. از آنجایی‌که نقطه آغازین مساله مقدار مشخصه یک مساله مقدار مرزی است، معمولاً به مساله مقدار مشخصه، مساله مقدار مرزی گفته می‌شود.

در سه بخش بعدی ویژگی‌های کلی توابع مشخصه بررسی شده است.

۴-۴. تعامد توابع مشخصه

طبق تعریف، دو تابع $\varphi_n(x)$ و $\varphi_m(x)$ در یک بازه محدود (a,b) و با استفاده از تابع وزنی $\omega(x)$ متعامد نامیده می‌شوند اگر انتگرال حاصل‌ضرب $\omega\varphi_n\varphi_m$ در آن بازه صفر باشد و داریم:

$$\int_a^b \omega(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0, \qquad m\neq n. \qquad (۴-۱۴)$$

علاوه برآن، دسته‌ای از توابع در بازه (a,b) متعامد نامیده می‌شوند اگر هر دو جفت متمایز از این توابع در بازه (a,b) متعامد باشند. واژه تعامد از تحلیل برداری گرفته شده است. می‌خواهیم یک بردار در فضای سه بعدی را با $\varphi_m(x_i)$ نشان دهیم که تصاویر این بردار روی محورهای مختصات $\varphi_m(x_1)$، $\varphi_m(x_2)$ و $\varphi_m(x_3)$ است. دو بردار $\varphi_m(x_i)$ و $\varphi_n(x_i)$ متعامدند و یا بر هم عمودند اگر داشته باشیم:

$$\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_n(x_i)=\sum_{i=1}^{3}\varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i)=0.$$

وقتی که واحد طول در محورهای مختصات از یک محور به محور دیگر تغییر کند، حاصل‌ضرب نرده‌ای مذکور را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_n(x_i)=\sum_{i=1}^{3}\omega(x_i)\varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i),$$

که در آن تعداد توابع وزنی $\omega(x_1)$، $\omega(x_2)$، و $\omega(x_3)$ به واحد طولی مورد استفاده در طول سه محور، بستگی دارد. به‌طور مشابه، بردارهای فضای N بعدی و دارای سازنده‌های $\varphi_m(x_i)$ و $\varphi_n(x_i)$ با استفاده از توابع وزنی $\omega(x_i)$ وقتی متعامدند که داشته باشیم:

1- Circular functions

$$\varphi_m(x_i)\cdot\varphi_n(x_i)=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)\varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i)=0. \qquad (۴-۱۵)$$

اگر بردار فضایی دارای تعداد نامحدودی بعد باشد، عبارات $\varphi_m(x_i)$ و $\varphi_n(x_i)$ به‌طور پیوسته متمایز بوده و x_i گسسته نبوده بلکه دارای مقادیر پیوسته است و به آن x می‌گویند؛ در این مورد معادله (۱۵-۴) با معادله (۱۴-۴) یکسان خواهد شد.

اکنون می‌توان نشان داد که توابع مشخصه یک مساله مقدار مشخصه، در یک بازه محدود، و با استفاده از تابع وزنی، متعامدند. برای نشان دادن این واقعیت، مساله مقدار مشخصه شامل معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با شکل کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f_1(x)\frac{dy}{dx}+[f_2(x)+\lambda^2 f_3(x)]y=0$$

و دو شرط مرزی همگن در دو انتهای بازه محدود (a,b) تعیین می‌شوند. اگر این معادله را در عبارت $\exp[\int f_1(x)dx]=q(x)$ و در تابع $f_2(x)p(x)=q(x)$ و $f_3(x)p(x)=\omega(x)$، ضرب نموده و بازآرایی کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+[q(x)+\lambda^2\omega(x)]y=0, \qquad (۴-۱۶)$$

که این معادله برای بحث حاضر مناسب‌تر است.

λ_n و λ_m مقادیر مشخصه متمایز هستند، که در آن‌ها $m\neq n$ بوده و $\varphi_m(x)$ و $\varphi_n(x)$ متناظر با توابع مشخصه است. از آنجایی‌که $y=\varphi_m(x)$ و $y=\varphi_n(x)$ پاسخ‌های معادله (۱۶-۴) هستند، داریم:

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_m}{dx}\right]+[q+\lambda_m^2\omega]\varphi_m=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_n}{dx}\right]+[q+\lambda_n^2\omega]\varphi_n=0.$$

با ضرب معادله اول در φ_n و ضرب معادله دوم در φ_m سپس تفریق معادله دوم از اول خواهیم داشت:

$$\varphi_n\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_m}{dx}\right]-\varphi_m\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_n}{dx}\right]+(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\omega\varphi_m\varphi_n=0.$$

با انتگرال‌گیری از این معادله در بازه محدود (a,b) خواهیم داشت:

$$(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_a^b\omega\varphi_m\varphi_n\,dx=\int_a^b\left[\varphi_n\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_m}{dx}\right]-\varphi_m\frac{d}{dx}\left[p\frac{d\varphi_n}{dx}\right]\right]dx,$$

با انجام انتگرال سمت راست معادله بالا خواهیم داشت:

$$(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_a^b\omega\varphi_m\varphi_n\,dx=\left\{p(x)\left[\varphi_n(x)\frac{d\varphi_m(x)}{dx}-\varphi_m(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]\right\}\Big|_a^b. \qquad (۴-۱۷)$$

از آنجایی‌که هر دو عبارت $y=\varphi_m(x)$ و $y=\varphi_n(x)$ پاسخ‌های ویژه معادله (۱۶-۴) هستند، وقتی‌که یکی از شرایط مرزی زیر در در انتهای بازه (a,b) تعیین شود، سمت راست معادله (۱۷-۴) صفر می‌شود:

$$y=0, \qquad (۴-۱۸)$$

$$dy/dx=0, \qquad (۴-۱۹)$$

$$dy/dx+By=0, \qquad (۴-۲۰)$$

که در آن B یک پارامتر اختیاری است. در واقع وقتی‌که معادله (۲۰-۴) صادق باشد معادله (۱۷-۴) صفر خواهد شد که می‌توان حالت را با بازآرایی قسمت سمت راست معادله (۱۷-۴) و به‌صورت زیر نشان داد:

$$\varphi_n\varphi_m'-\varphi_m\varphi_n'=\varphi_n\varphi_m'-\varphi_m\varphi_n'\pm B\varphi_m\varphi_n=\varphi_n(\varphi_m'+B\varphi_m)-\varphi_m(\varphi_n'+B\varphi_n).$$

به ویژه وقتی‌که در $x=a$ یا $x=b$، $p(x)=0$ باشد، سمت راست معادله (۱۷-۴) صفر خواهد شد، که در این صورت شروط داده شده در معادلات (۱۸-۴) و (۱۹-۴) یا (۲۰-۴)، که در $x=a$ یا $x=b$ صادق باشد را می‌توان از مساله حذف نمود به‌شرطی‌که در نقاط $x=a$ یا $x=b$، y و dy/dx محدود باشد. اگر $p(a)\ =\ p(b)$ باشد، تعامد به شرطی وجود خواهد داشت که شرایط مرزی با شرایط $y(a)\ =\ y(b)$ و $y'(a)\ =\ y'(b)$ جایگزین شود، که به این شرایط اخیر شرایط مرزی متناوب گفته می‌شود.

به عنوان یک مثال، مساله مقدار مشخصه ذکر شده در معادلات (۷-۴) و (۸-۴) و (۹-۴) را دوباره در نظر بگیرید. مقایسه‌ای بین معادلات (۷-۴) و (۱۶-۴)، $\omega(x)=1$ را حاصل می‌کند و شرط تعامد برای این مسائل به‌صورت زیر است:

$$\int_0^L\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=\int_0^L\sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L)\,dx=0,\quad m\neq n,$$

که این امر را می‌توان به‌وسیله انتگرال‌گیری مستقیم و به‌طور مستقل به‌دست آورد.

۳-۴. بسط توابع دلخواه به‌صورت سری توابع متعامد

فرض کنید $\varphi_n(x)$ دسته‌ای از توابع متعامد در بازه محدود (a,b) و به همراه تابع وزنی $\omega(x)$ است. می‌خواهیم تابع دلخواه $f(x)$ را به شکل یک سری به شکل زیر بسط دهیم و داریم:

$$f(x)=b_0\varphi_0(x)+b_1\varphi_1(x)+b_2\varphi_2(x)+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varphi_n(x). \qquad (۴-۲۱)$$