استاد بابامحمدی - سیاهکلی

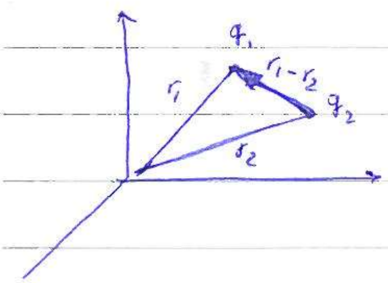
Year. ا Month. Day. Subject. "فیزیک ۲"

منابع: ۱- فیزیک هالیدی (ویرایش ۸ به بعد) ۲- جزوه آمادگی خوارزمی ۳- سوالات امتحانی و تمرین های ترم گذشته

بار الکتریکی و قانون کولن:

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{C^2}{N.m^2}$$

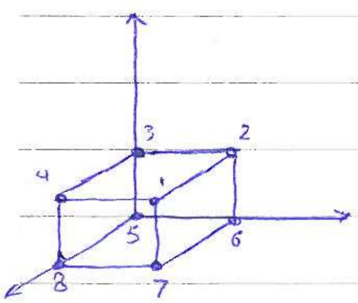


$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|r_1 - r_2|^2}\frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{|r_1 - r_2|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|r_1 - r_2|^3}(\vec{r_1} - \vec{r_2})$$

اگر چند بار نقطه ای داشته باشیم:

$$\boxed{F_{کل} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41}}$$ ← چون سیستم خطی است.

مثال) هشت بار نقطه ای در گوشه های یک مکعب به ضلع a قرار دارد. نیروی وارد بر q_1 را حساب کنید.



$$F_{کل} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{81}$$

$$\vec{F}_{51} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{|r_1 - r_5|^3}(\vec{r_1} - \vec{r_5}) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}}{3\sqrt{3}\,a^3}$$

$$r_1 = a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k} \qquad |r_1 - r_5| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$r_5 = 0$$

$$F_{کل} = \frac{0{,}15}{\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^3}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

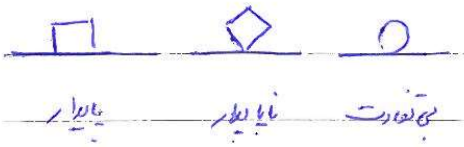
iman

تمرین) چه مقدار بار لازم است تا جاذبه گرانش بین زمین و ماه خنثی شود؟ $q = 5.7\times10^{13}\,c$

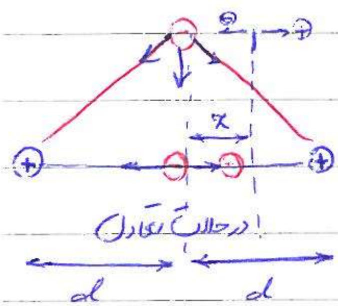
تمرین: اگر هر هیدروژن یک الکترون بدهد چند هیدروژن احتیاج داریم؟ ۶۰۰ تن

. تعادل:

انواع تعادل:



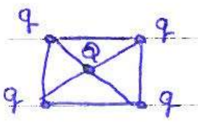
نکته!) در یک راستا و دو راستا می‌توان تعادل پایدار داشت ولی در سه بعد تعادل پایدار به وسیله نیروهای الکترواستاتیکی غیرممکن است.



$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(d-x)^2}-\frac{1}{(d+x)^2}\right\}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(d(1-\frac{x}{d}))^2}-\frac{1}{(d(1+\frac{x}{d}))^2}\right\}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left\{(1-\frac{x}{d})^{-2}-(1+\frac{x}{d})^{-2}\right\}$$

$$=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left\{1+\frac{2x}{d}-1+\frac{2x}{d}\right\}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\{4x\}>0.$$ تعادل ناپایدار

$$(1+x)^n=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n(n-1)x^2}{2!}$$

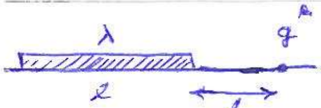


تمرین) در راستای قطر مربع آیا بار $Q+$ در تعادل پایدار است؟

نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q از طرف یک توزیع بار:

چگالی بار:
- خطی λ ← $\lambda = \frac{Q}{L}$
- سطحی σ ← $\sigma = \frac{Q}{A}$
- حجمی ρ ← $\rho = \frac{Q}{V}$

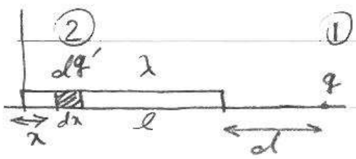
⇐ هر سه می‌توانند ثابت یا متغیر باشند.



مثال) یک میله با چگالی بار یکنواخت λ و طول l داریم.

الف) یک بار نقطه‌ای به فاصله d از این میله قرار می‌دهیم. چه نیرویی بر بار نقطه‌ای وارد می‌شود؟

ب) اگر یک میله مشابه همین میله در فاصله d از آن قرار دهیم چه نیرویی به یکدیگر وارد می‌کنند.



$$d\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq' q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$

$dq' = \lambda\, dl = \lambda\, dx$

$r = (l+d)\hat{i}$

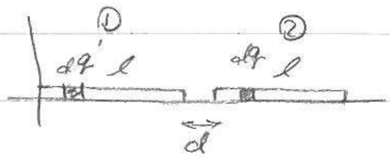
$r' = x\hat{i}$

$$\vec{F} = \int dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda\, dx}{(l+d-x)^3} (l+d-x)\hat{i}$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^l \frac{dx}{(l+d-x)^2} (\hat{i}) = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{-du}{u^2} = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{(l+d-x)} \Big|_0^l \right\} \hat{i} = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{d} - \frac{1}{l+d} \right\} \hat{i}$$

تغییر متغیر ⇐ $u = l+d-x \rightarrow du = -dx$

ب)



$dq = \lambda\, dx \quad dq' = \lambda\, dx'$

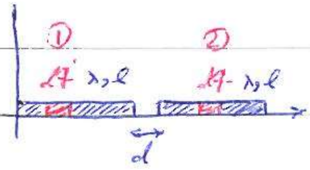
$r = x\hat{i} \quad r' = x'\hat{i}$

$$F = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_1 - r_2|^3} (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \Rightarrow \vec{F}_{21} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{dx\, dx'}{|r' - r|^3} (r' - r)$$

Year. Month. 4 Day. Subject.

iman

فیزیک ۲ - ۹۲/۱۱/۸



$$dq = \lambda dx \qquad \vec{r}_1 = x'\hat{i}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq\,dq'}{|r_1 - r_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \qquad dq = \lambda dx' \qquad \vec{r}_2 = x\hat{i}$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l dx' \int_{d+l}^{d+2l} \frac{dx}{(x'-x)^2}\,(\hat{i})$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{d+l}^{d+2l} dx \left\{\frac{1}{l-x} - \frac{1}{-x}\right\}(\hat{i})$$

$$\boxed{F = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(l+d)^2}{d(2l+d)}\,(-\hat{i})}$$

میدان الکتریکی:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \sim\!\!\to \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|r-r'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')}$$

$$\vec{F} = \frac{E}{q_0} \sim\!\!\to \boxed{\vec{E} = \lim_{q \to 0}\frac{\vec{F}}{q}}$$

محاسبه میدان الکتریکی:

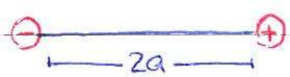
الف) توزیع بار گسسته:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{n} E_i$$

دوقطبی الکتریکی:

برداری است به اندازه $2aq$، هرگاه یک بار مثبت q و یک بار منفی $-q$ به فاصله $2a$ از یکدیگر قرار بگیرند.

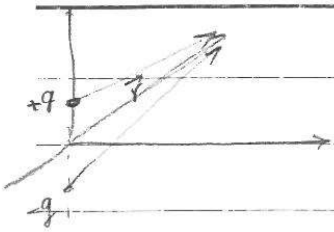
(بار ها نقطه ای و اندازه بار ها یکسان)



جهت بردار از بار منفی به سمت بار مثبت در راستای خط واصل بین دو بار

$$|\vec{P}| = 2aq$$

مثال صفحه ۳۵ جزوه



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

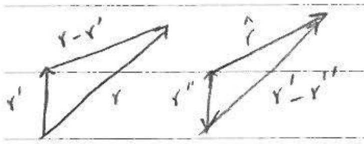
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{(r-r')}{|r-r'|^3} - \frac{(r-r'')}{|r-r''|^3} \right\}$$

F Où r $\quad r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

+q ,، Où r' $\quad r' = ak$

-q ، ،، r' $\quad r'' = -ak$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+(z-a)\hat{k}}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x\hat{i}+y\hat{j}+(z+a)\hat{k}}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$



$$|r-r'|^3 = (r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}$$
$$|r-r''|^3 = (r^2+a^2+2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+(z-a)\hat{k}}{(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+(z+a)\hat{k}}{(r^2+a^2+2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$\boxed{\frac{a}{r} \ll 1} \leftarrow \boxed{a \ll r}$

نغير $(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}} = \left(r^2\left(1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\cos\theta\right)\right)^{\frac{3}{2}}$

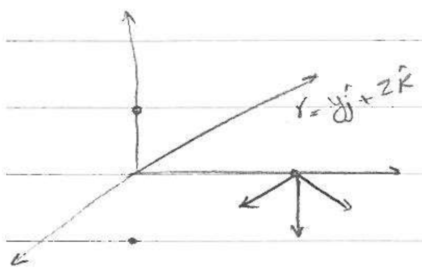
$$\boxed{(1+X)^n \approx 1+nX \quad ; \quad X \ll 1}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{ (x\hat{i}+y\hat{j}+(z-a)\hat{k})\Big(1+\underbrace{\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\cos\theta}_{X}\Big)^{-\frac{3}{2}} - (x\hat{i}+y\hat{j}+(z+a)\hat{k})\Big(1+\underbrace{\frac{a^2}{r^2}+\frac{2a}{r}\cos\theta}_{X}\Big)^{-\frac{3}{2}} \right.$$

$$\left(1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{3}{2}} \simeq 1+\frac{3a}{r}\cos\theta$$

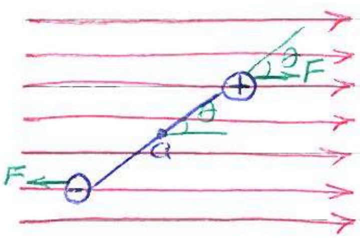
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{(x\hat{i}+y\hat{j}+(z-a)\hat{k})(1+\frac{3a}{r}\cos\theta)-(x\hat{i}+y\hat{j}+(z+a)\hat{k})(1-\frac{3a}{r}\cos\theta)\right\}$$

$$E_x=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\{3xz\} \qquad E_y=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\{3yz\} \qquad E_z=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\{3z^2-r^2\}$$



$$\hat{r}=y\hat{j} \Rightarrow E=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 y^3}(-\hat{k})$$

دو قطبی الکتریکی در حضور میدان الکتریکی یکنواخت :



$$|\vec{F}_+|=|\vec{F}_-|$$

$$|\tau|=2aF\sin\theta$$

$$=2aEq\sin\theta$$

$$=PE\sin\theta \rightsquigarrow \boxed{\vec{\tau}=\vec{P}\times E}$$ گشتاور

$$\int \tau\, d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta} PE\sin\theta\, d\theta \rightsquigarrow \boxed{U=-\vec{P}\cdot\vec{E}}$$ انرژی پتانسیل

Year. Month. Day. Subject.

8

iman

دستگاه های مختصات :

دکارتی:

المان حجم	المان سطح	المان طولی
$dV = dx\,dy\,dz$	$dA = dy\,dz\,\hat{i}$	$d\vec{l} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$
	$dA = dx\,dz\,\hat{j}$	
	$dA = dx\,dy\,\hat{k}$	

استوانه ای : $0 \leq r < +\infty$

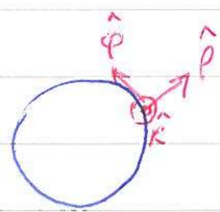
r, θ, z $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

ρ, φ, z $\quad -\infty < z < +\infty$

مرکز استوانه دقیقاً در مبدا قرار گرفته است.

المان حجم : $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

از بالا :

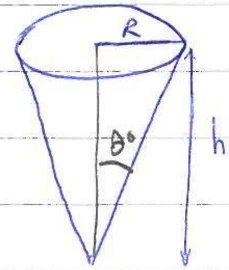


10

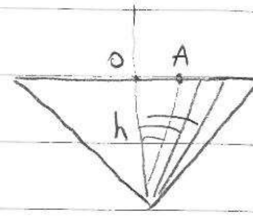
Year. Month. Day. Subject.

iman

مثال: حجم و سطح جانبی شکل زیر را بدست آورید.



$$V=\int dV=\int_0^{\frac{h}{\cos\theta}}\int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$



برای هر مقدار θ ، r از مقدار صفر تا OA تغییر می‌کند

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{h}{OA}\longrightarrow OA=\frac{h}{\cos\theta}$$

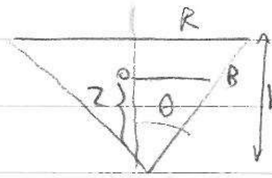
$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\theta_0}\frac{h^3}{\cos^3\theta}\sin\theta\, d\theta=\frac{2\pi h^3}{3}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^3\theta}=\frac{2\pi h^3}{3}\int_0^{\theta_0}\underbrace{\tan\theta}_{u}\underbrace{(1+\tan^2\theta)\, d\theta}_{du}$$

$$=\frac{\pi h^3}{3}\left\{\tan^2\theta_0\right\}=\frac{\pi h^3}{3}\times\frac{R^2}{h^2}$$

$$\boxed{=\frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

* * * * * *

محاسبه حجم در مختصات استوانه‌ای:



$$\tan\theta_0=\frac{OB}{z}\rightsquigarrow OB=z\tan\theta_0$$

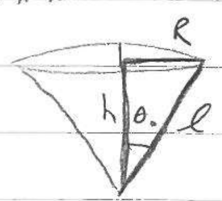
$$dV=\int_0^{z\tan\theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{h} dz\,(z^2\tan^2\theta_0)=\pi\tan^2\theta_0\frac{h^3}{3}=\frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

* * * * * *

سطح جانبی مخروط:

در راستای $\hat{\theta}$:

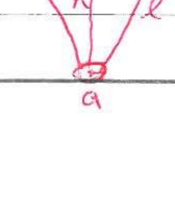


$$A=\int dA=\int_0^{\ell}\int_0^{2\pi} r\sin\theta\, dr\, d\varphi$$

$$=\frac{R}{\ell}(2\pi)\left(\frac{\ell^2}{2}\right)=\pi R\ell$$

تمرین: سطح جانبی مخروط ناقص.

ج: $\pi(a+b)\ell$



12

Year. Month. Day. Subject.

محاسبهٔ میدان الکتریکی برای توزیع بار پیوسته :

بردار میدان الکتریکی برای یک بار نقطه‌ای $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$

توزیع بار پیوسته $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$

۱) باتوجه به مسئله دستگاه مختصات مناسب در نظر بگیرید.

۲) رابطهٔ بالا را بنویسید.

۳) باتوجه به مسئله (خطی، سطحی، حجمی).
یکی از روابط روبه رو را در رابطه قرار می‌دهیم.

$dq = \lambda dl$

$dq = \sigma dA$

$dq = \rho dV$

۴) $\vec{r}$ مکان نقطه‌ای است که می‌خواهیم میدان را حساب کنیم و $\vec{r}'$ مکان بار dq است.

۵) المان مختصات مناسب را اختیار می‌کنیم.

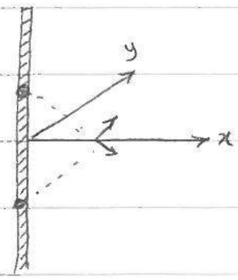
۶) مقادیر بدست آمده را در انتگرال قرار دهید و با توجه به حدود انتگرال، انتگرال را محاسبه کنید.

۷) با توجه به تقارن مسئله، جواب نهایی را تحلیل کنید.

۸) بردارهای $\hat{\rho}$ و $\hat{\varphi}$ و $\hat{r}$ به خبر $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را برحسب $\hat{x}$ و $\hat{y}$ قرار دهید.

iman

مثال) یک سیم بی نهایت طویل به چگالی بار λ داریم، در فاصله‌ی ρ از سیم میدان الکتریکی را حساب کنید.



$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|r-r'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\begin{cases} dq=\lambda\, dl=\lambda\, dz \\ \vec{r}=\rho\hat{\rho} \\ \vec{r}\,'=z\hat{k} \end{cases} \Rightarrow E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(\rho\hat{\rho}-z\hat{k})$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\, dz}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\rho}-\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\, dz}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}}^{\,0}\right\}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\lambda\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}\Bigg\}\hat{\rho}$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}$$

انتگرال های پرکاربرد :

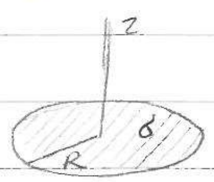
1) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

3) $\int\frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}$

2) $\int\frac{x\, dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

مثال) یک دیسک دایره‌ای به چگالی σ و شعاع R داریم، میدان الکتریکی را در فاصله‌ی z از محور دیسک حساب کنید. (محور عمود بر دیسک، گذرنده از مرکز دیسک)



$$dq=\sigma\, dA=\sigma\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$\vec{r}=z\hat{k}$$

$$\vec{r}\,'=\rho\hat{\rho} \longrightarrow E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sigma\rho\, d\rho\, d\varphi}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{z\rho\, d\rho\, d\varphi}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}-\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\, d\rho\, d\varphi}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\rho}\right\}$$

Year. Month. Day. Subject.

انتگرال دوم: $\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi (\cancel{\cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \hat{j}}) \xrightarrow{\text{دلیل}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0$

انتگرال اول: $\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{z\rho d\rho d\varphi}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{-1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \Big]_0^R \right\} \hat{k}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right\} \hat{k}$$

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k} \longleftarrow z << R$ اگر صفحه بی‌نهایت باشد

مثال) میدان ناشی از حلقه با چگالی λ را در نقطه z به دست آورید.

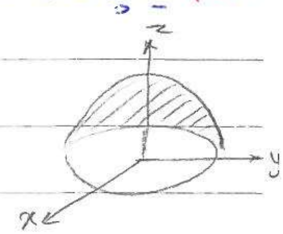
$dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi$

$\vec{dl} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{k}$

$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r'} = R\hat{\rho}$

مثال) یک پوسته کروی به شعاع R و چگالی σ را نصف می‌کنیم، میدان الکتریکی را در نقطه O حساب کنید.

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{(r-r')^3}(r-r')$



$$\left\{ \begin{array}{l} dq = \sigma dA = \sigma R^2 \sin\theta d\varphi d\theta \\ \vec{r} = 0 \\ \vec{r'} = R\hat{r} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{R^3} (-R\hat{r})$$

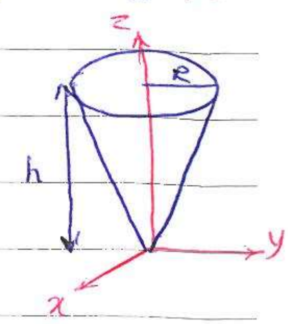
$$= \frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi (\cancel{\sin\theta\cos\varphi \hat{i}} + \cancel{\sin\theta\sin\varphi \hat{j}} + \cos\theta \hat{k})$$

$\vec{E} = \frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta (\hat{k})$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\theta = u \\ \cos\theta d\theta = du \end{array} \right. \quad = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}(-\hat{k})}$$

Year. Month. Day. Subject.

مثال) یک مخروط توپر با چگالی ρ_0 و شعاع R و ارتفاع h میدان الکتریکی را در رأس مخروط حساب کنید.



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|r-r'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

استوانه‌ای
$$\begin{cases} dq = \rho_0 dv = \rho_0\, \rho d\rho d\varphi dz \\ \vec{r} = 0 \\ \vec{r}' = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \end{cases}$$

کروی
$$\begin{cases} dq = \rho_0 dv = \rho_0 r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi \\ \vec{r} = 0 \\ \vec{r}' = r\hat{r} \end{cases}$$

استوانه‌ای

$$E = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{z\tan\theta_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{h} \frac{\rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\rho\hat{\rho} - z\hat{k})$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\cancel{\iiint \frac{-\rho^2 d\rho d\varphi dz}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\underbrace{\hat{\rho}}_{\cos\varphi\hat{i}+\sin\varphi\hat{j}}} - \int_0^{z\tan\theta_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{h} \frac{z\rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}\right\}$$

$$= \frac{-\rho_0}{2\varepsilon_0}\int_0^h z dz \int_0^{z\tan\theta_0} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} = \frac{-\rho_0}{2\varepsilon_0}\int_0^h z dz\left\{\frac{-1}{\sqrt{z^2\tan^2\theta_0+z^2}} + \frac{1}{z}\right\}\hat{k} = \frac{-\rho_0}{2\varepsilon_0}\left\{\int_0^h dz - \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{1+\tan^2\theta_0}}\right\}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}h(1-\cos\theta_0)(-\hat{k})$$

کروی

$$E = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi}{r^3}(-r\hat{r})$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{h}{\cos\theta}}\int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, dr d\theta\, d\varphi(-\hat{r})$$

$$\cancel{\square}\,\hat{i} + \cancel{\square}\,\hat{j} + \square\,\hat{k}$$

$$= \frac{-\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{h}{\cos\theta}}\int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, dr d\theta d\varphi\,(\hat{k}) = \frac{-\rho_0 h}{2\varepsilon_0}\int_0^{\theta_0}\sin\theta d\theta\,\hat{k} = \frac{\rho_0 h}{2\varepsilon_0}\left\{\cos\theta - 1\right\}\hat{k}$$

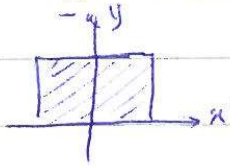
$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}h(1-\cos\theta_0)(-\hat{k})$$

iman

16

Year. Month. Day. Subject.

مثال) مربعی به ضلع b و چگالی $\sigma = \alpha(x^2+y^2)$ (α مقدار ثابت) میدان الکتریکی در مبدا مختصات حساب کنید.



$$\begin{cases} dq = \sigma dA = \sigma dx\,dy \\ \vec{r} = 0 \\ \vec{r'} = x\hat{i} + y\hat{j} \end{cases}$$

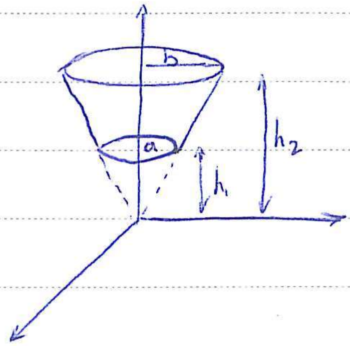
$$E = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{(x^2+y^2)\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(-x\hat{i} - y\hat{j})$$

$$= \frac{-\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^b \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\hat{i} + \iint \frac{y\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{-\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^b dy + \int dx \int\right.$$

iman

مثال: یک مخروط ناقص که سطح جانبی آن چگالی بار σ دارد. میدان الکتریکی را در رأس مخروط (نقطه O) حساب کنید.



$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\begin{cases} dq=\sigma dA=\sigma r\sin\theta\, d\varphi\, dr \\ \vec{r}=0 \\ \vec{r}'=r\hat{r} \end{cases}$$

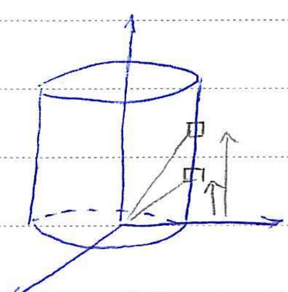
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma r\sin\theta\, d\varphi\, dr}{r^3}(-r\hat{r})=\frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\, d\varphi\, dr}{r}\{\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{k}\}$$

توضیحات مسائل قبلی

$$\Rightarrow\vec{E}=\frac{-\sigma\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\ln\frac{r_2}{r_1}(\hat{k})$$

محاسبه نهایی بر حسب مفروضات مسئله :
$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{h_1}{r_1}=\frac{h_2}{r_2} \\ \sin\theta=\frac{a}{r_1}=\frac{b}{r_2}\end{cases}$$

مثال) یک استوانه با چگالی بار σ داریم. میدان الکتریکی را در مرکز قاعده آن حساب کنید. (سطح جانبی باردار است)



$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|r-r'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\begin{cases} dq=\sigma R\, d\varphi\, dz=\sigma dA \\ \vec{r}=0 \\ r'=R\hat{\rho}+z\hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\frac{\sigma R\, d\varphi\, dz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\cancel{R\hat{\rho}}-z\hat{k})$$

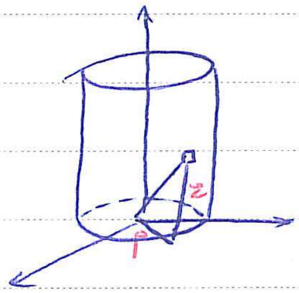
$\hat{\rho}\to\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\varphi\,\hat{j}$

$$=\frac{-\sigma R}{2\varepsilon_0}\int_0^{h}\frac{z\,dz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(\hat{k})$$

Subject 18

Date

مثال) استوانه توپر با چگالی ρ_0 میدان الکتریکی از نقطه z بالاتر از قاعده بالایی استوانه روی محور.



$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

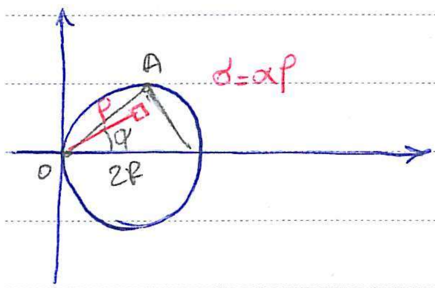
$$\begin{cases} dq=\rho_0\, dV=\rho_0\ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\ \vec{r}=z_0\hat{k}=a\hat{k} \\ r'=\rho\hat{\rho}+z\hat{k} \end{cases} \qquad |\vec{r}-\vec{r}'|=(z_0-z)\hat{k}-\rho\hat{\rho}$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^h\frac{\rho_0\ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}{((z_0-z)^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\left((z-z_0)\hat{k}-\rho\hat{\rho}\right)$$

$$\hat{\rho}\to\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\varphi\,\hat{j}$$

$$\int_0^h(z_0-z)\,dz\int_0^R\frac{\rho\, d\rho}{((z_0-z)^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{یا} \quad \int_0^R\rho\, d\rho\int\frac{(z_0-z)\,dz}{((z_0-z)^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال) یک قرص دایره‌ای به شعاع R و چگالی بار سطحی $\sigma=\alpha\rho$ (مطابق شکل) داریم، میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات حساب کنید.



$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|r-r'|^3}(r-r')$$

$$\begin{cases} dq=\sigma dA=(\alpha\rho)\,\rho\, d\rho\, d\varphi \\ \vec{r}=0 \\ r'=\rho\hat{\rho} \end{cases}$$

$$\cos\varphi=\frac{OA}{2R}\longrightarrow OA=2R\cos\varphi$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2R\cos\varphi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha\rho^2\, d\rho\, d\varphi}{\rho^3}(-\rho\hat{\rho})$$

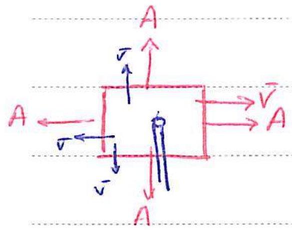
$$=\frac{-\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2R\cos\varphi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\rho\, d\varphi\,(\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\varphi\,\hat{j})\longrightarrow$$ اینجا نباید بگوییم صفر می‌شود

$$=\frac{-\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2R\cos\varphi)(\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\varphi\,\hat{j})\,d\varphi=\frac{-\alpha R}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi\,\hat{i}+\cancel{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\,\hat{j}}^{\,0}\right\}$$

قانون گاوس :

برای هر سطح بسته ، کل شار میدان الکتریکی عبوری از سطح بسته برابر است با جمع کل بار الکتریکی تقسیم بر ε_0 .

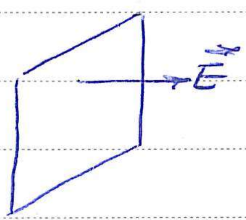
تعریف شار: با نماد Φ خاصیتی است برای میدان های برداری



Φ $V.A$ ⇐ نکته 1) کل شار عبوری از یک سطح بسته می توانیم با ... ⇐ اطلاعاتی در مورد چشمه و چاهک در داخل سطح بسته به ما می دهد .

شار جرمی آبی که از سطح A می گذرد

⇐ شار میدان الکتریکی :



$$\boxed{\Delta\Phi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{s}}$$

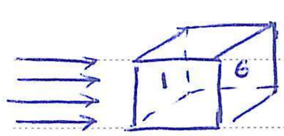
$$\boxed{\Phi = \sum \vec{E}\cdot\Delta\vec{s}} \Longrightarrow \Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

تعریف شار الکتریکی

نقش چشمه یا چاهک

شار میدان الکتریکی در از سطح بسته ⇐ $\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} \longrightarrow \Phi_E = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_0}}$

قانون گاوس برای هر سطح بسته ای برقرار است ولی برای راحتی محاسبه ، شکل های خاص در نظر می گیریم :

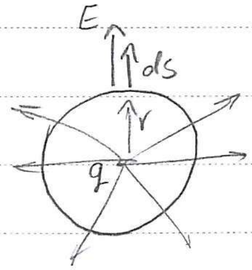


$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{s} + \dots + \int_6 \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int \vec{E}_1\cdot d\vec{s} + \int \vec{E}_6\cdot d\vec{s}$$

$$= -\int E\,ds + \int E\,ds = -EA + EA = 0$$

مثال) بار نقطه‌ای q داریم، میدان الکتریکی را در اطراف آن به کمک قانون گاوس حساب کنید. (کره به شعاع r)



$$\phi = \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oint E\,ds = E\oint ds = E\,4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

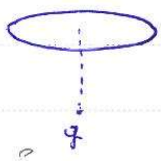
1) برای این مثال خاص در نظر می‌گیریم که E در همه جا یکسان باشد تا بتوانیم E را از انتگرال خارج کنیم.

2) اگر میدان از جسم چند بار مختلف داشته باشیم، E برای تمام سطوح یکسان نمی‌شود، و باید برابر را در تمام سطوح محاسبه کنیم. اما باز هم در نهایت به $\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ می‌رسیم.

3) سطحی را در نظر می‌گیریم که متقارن باشد و E برای تمام سطوح ثابت یا یکسان باشد.

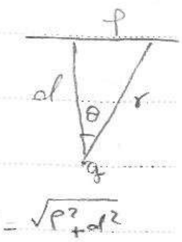
4) وقتی E و ds در یک راستا باشند علامت (.) را برمی‌داریم.

مثال) یک بار نقطه‌ای q از یک قرص دایره‌ای به فاصله d که قرار گرفته است. شار میدان الکتریکی گذرنده از قرص دایره‌ای را حساب کنید.



روش اول

$$\Phi=\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E\,ds\cos\theta = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,\frac{d}{r}$$



$$=\frac{qd}{2\varepsilon_0}\int\frac{\rho\,d\rho}{r^3} = \frac{qd}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qd}{2\varepsilon_0}\left\{\left.\frac{-1}{\sqrt{\rho^2+d^2}}\right]_0^R\right\}$$

$r=\sqrt{\rho^2+d^2}$

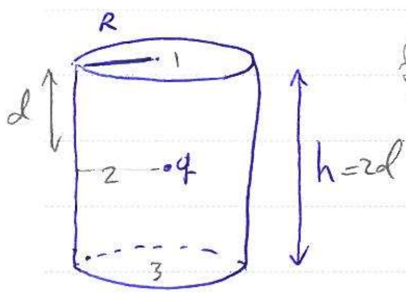
$$=\frac{q}{2\varepsilon_0}\left\{1-\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right\}$$

روش دوم

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,\hat{k} = \int \frac{q\rho\,d\rho\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overbrace{\left(\frac{d}{r}\right)}^{\cos\theta}$$

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{k}$$

مثال) یک بار نقطه‌ای در مرکز یک استوانه قرار دارد. شار گذرنده از سطح جانبی استوانه را حساب کنید.



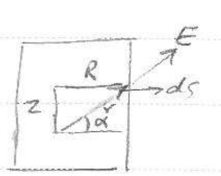
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{s}+\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{s}+\int \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_2 \vec{E}_2\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}-2\frac{q}{2\varepsilon_0}\left\{1-\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right\} = \frac{q}{\varepsilon_0}-\frac{q}{\varepsilon_0}+\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}$$

$$=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}$$

روش ۲

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E\,ds\cos\alpha$$



$$=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}R\,d\varphi\,dz\,\frac{R}{r}$$

$$\frac{qR^2}{2\varepsilon_0}\int\frac{dz}{r^3} = \frac{qR^2}{2\varepsilon_0}\times 2\int_0^d\frac{dz}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{\varepsilon_0}\left\{\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right\}$$

روش برداری

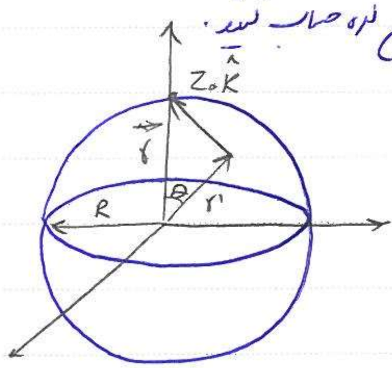
$$\int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}\cdot \rho\, dz\, d\varphi\, \hat{\rho} = \int \frac{q\,\rho\, dz\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}\cdot\hat{\rho}$$

$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$

$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$

$\hat{r}\cdot\hat{\rho} = \sin\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\sin^2\varphi = \sin\theta$

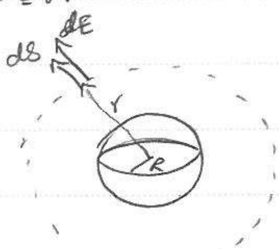
مثال) کره توپر به شعاع R و چگالی بار حجمی ρ داریم. میدان الکتریکی را داخل و خارج کره حساب کنید.



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\, r'^2 \sin\theta\, dr'\, d\theta\, d\varphi}{(z_0^2 + r'^2 - 2r'z\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$r = z_0\hat{k} \qquad |r - r'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$

$r' = r'\hat{r}$



سطح گاوسی یک کره به شعاع r در نظر می‌گیریم:

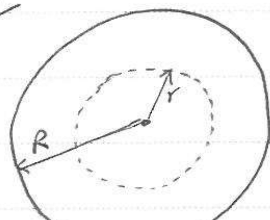
$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$= \oint E\cdot ds = E\oint ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \xrightarrow{q_{in} = \rho V} E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$ خارج کره

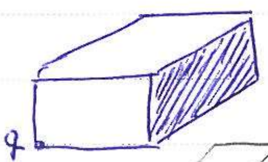
داخل کره

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oint E\, ds = E\oint ds = E(4\pi r^2)$$

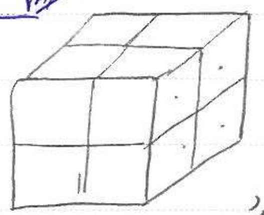


$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \longrightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\hat{r}}$$ داخل کره

مثال) یک بار نقطه‌ای در گوشه‌ی یک مکعب به ضلع a قرار گرفته است، شار گذرنده از سطح هاشور خورده را حساب کنید.



از ۶ وجه مکعب تنها از ۳ وجه شار می‌گذرد و شار عبوری از سه وجه یکسان است!



۷ مکعب دیگر کنار آن قرار می‌دهیم،

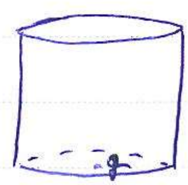
بار q را وسط قرار می‌دهیم

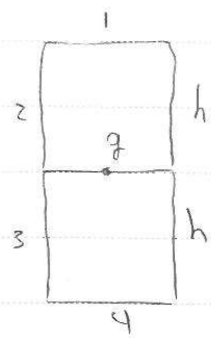
شاری که از یک وجه مکعب می‌گذرد $= \frac{\Phi_E}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0}$

$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

سطح هاشور خورده $\Phi_E = \frac{1}{4} \times \frac{q}{6\varepsilon_0} = \boxed{\frac{q}{24\varepsilon_0}}$

مثال) یک استوانه به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h داریم. یک بار نقطه‌ای q در مرکز قاعده‌ی آن قرار می‌دهیم. شار کل عبوری از استوانه چقدر است؟





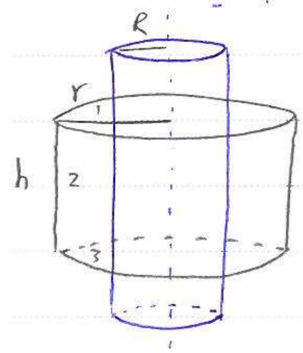
$\Phi_E = \oint E \cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$= \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 = \frac{q}{\varepsilon} \longrightarrow \int_1 + \int_2 = \frac{q}{2\varepsilon_0}$

Subject 24
Date

PAPCO

مثال) استوانه طویل با چگالی ρ_0 داریم. میدان الکتریکی را در فاصله r از مرکز استوانه حساب کنید.



$$r>R: \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \cancel{\int_1 \vec{E}\cdot ds} + \int_2 \vec{E}\cdot\vec{ds} + \cancel{\int_3 \vec{E}\cdot ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

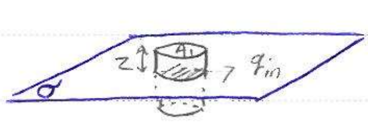
$$\Rightarrow \int \vec{E}\,\vec{ds} = \int E\,ds = E\int ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

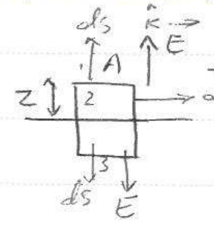
$$\Rightarrow E(2\pi r h) = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\rho_0(\pi R^2 h)}_{\text{بار داخل}} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\rho}}$$ خارج

$$r<R: \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \cancel{\int_1 \vec{E}\,\vec{ds}} + \int_2 \vec{E}\cdot\vec{ds} + \cancel{\int_3 \vec{E}\,\vec{ds}} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int \vec{E}\,\vec{ds} = \int E\,ds = E\int ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(2\pi r h) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0(\pi r^2 h) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\hat{\rho}}$$ داخل

مثال) یک صفحه بی‌نهایت با چگالی σ داریم. میدان الکتریکی را در فاصله z از صفحه بیابید.

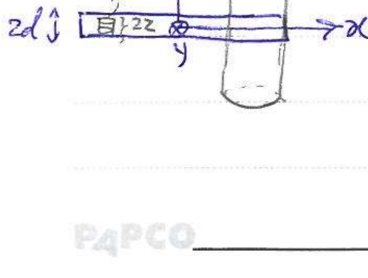




$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_1 \vec{E}\cdot\vec{ds} + \cancel{\int_2 \vec{E}\cdot\vec{ds}} + \int_3 \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow 2\int \vec{E}\,\vec{ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow 2EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(A) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

مثال) یک صفحه به ضخامت 2d داریم که در صفحه xy واقع است. میدان را در داخل و خارج آن محاسبه کنید.

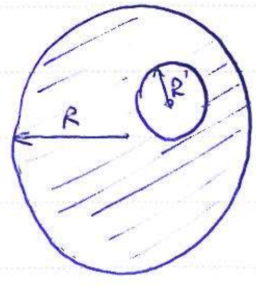


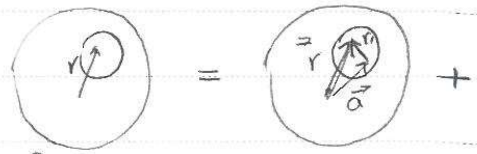
$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow 2E\int ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow 2EA = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}(2zA)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0 z}{\varepsilon_0}\hat{k}}$$ داخلی

اصل برهم نهی :

مثال) از یک کرهٔ توپر به شعاع R و چگالی ρ_0 ، یک کره به شعاع R' خالی می کنیم (مطابق شکل) . میدان الکتریکی را در داخل حفره حساب کنید .





r : نقطه ای داخل حفره نسبت به مرکز

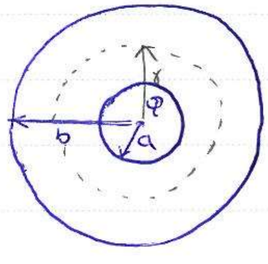
r' : همان نقطه مورد نظر نسبت به مرکز

$$\text{کره}\left\{\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = E + \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\hat{r}'\right.$$

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}') = \boxed{\frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}}$$

$\Rightarrow$ که ثابت ، و وابسته به بردار a به مرکز کره حفره را به هم وصل می کند .

مثال) ناحیهٔ کروی $a<r<b$ دارای بار در حجم $\rho = \frac{A}{r}$ است .(A مقدار ثابت) بار نقطه ای Q در $r=0$ قرار داده شده است . A چقدر باشد تا بزرگی میدان در ناحیهٔ $a<r<b$ ثابت بماند ؟



$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \oint E\,ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E\int ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{in} = Q + \int \rho\, dv \longrightarrow$$ چون ρ متغیر است باید انتگرال بگیریم

$$\int \rho\, dv = \int_a^r\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A}{r}r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 2\pi(A)(2)\left(\frac{1}{2}(r^2-a^2)\right)$$

$$= 2\pi A(r^2-a^2)$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q + 2\pi A(r^2-a^2)\right) \Longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$= \frac{A}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0}\right)}$$

برای اینکه میدان ثابت باشد نباید به r وابسته باشد در نتیجه :

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0} = 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{Q}{2\pi a^2}}$$

«فیزیک ۲» - «۹۲/۱۲/۴»

پتانسیل الکتریکی:

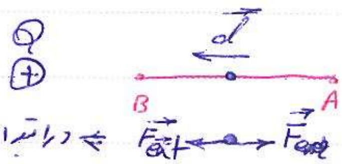
• اختلاف پتانسیل الکتریکی:

یعنی با سرعت ثابت

اگر بار آزمون q_0 را از نقطه‌ی A به B طوری انتقال دهیم که همیشه در حال تعادل باشد آنگاه نسبت کار انجام شده توسط عامل خارجی به بار آزمون q_0 برابر است با اختلاف پتانسیل در نقطه‌ی A و B.

$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$ $\frac{J}{C}$

⇐ در حالت تعادل: سرعت ثابت (شتاب صفر)



در ابتدا و انتهای مسیر اندکی نیرو وارد می‌شود که ناچیز است. ⇐

$W > 0 \Rightarrow V_B - V_A > 0 \Rightarrow V_B > V_A$

نکته) اختلاف پتانسیل الکتریکی به مسیر بستگی ندارد چون نیروی الکتریکی پایستار است.

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

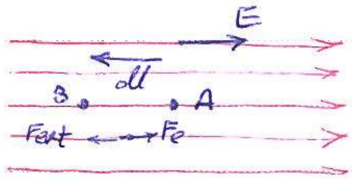
$$W_{AB} = \int \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} = -\int \vec{F}_e \cdot \vec{dl} = -q_0 \int \vec{E} \cdot \vec{dl} \Rightarrow \boxed{V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}}$$

نکته) همیشه سطوح هم پتانسیل بر خطوط میدان الکتریکی عمودند.

← سطوح هم پتانسیل:

⇐ از به هم وصل کردن نقاط هم پتانسیل سطوح هم پتانسیل ایجاد می‌شود.

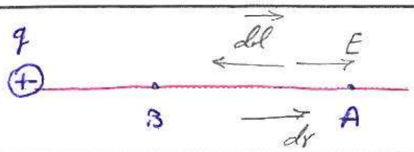
← به دلیل آنکه در سطوح هم پتانسیل هیچ کاری برای جابه جایی q_0 احتیاج ندارد
پس میدان الکتریکی E باید بر مسیر جابه جایی $\vec{dl}$ عمود باشد.



$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_A^B E\,dl = E\int_A^B dl = El$$

دیمانسیون $[E] = \frac{V}{m}$

مثال)

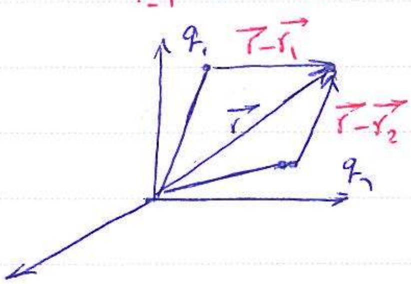


$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_A^B E\,dl = \int_A^B \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dl}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right\}$$

قرارداد
$$\begin{cases} V_A \longrightarrow \infty \\ V_B \longrightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_B} \longrightarrow \boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

• پتانسیل الکتریکی برای توزیع بار گسسته :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$



$\vec{r}$ مکانی که می‌خواهیم پتانسیل را حساب کنیم، $\vec{r}_i$ مکان هر بار نقطه‌ای

• پتانسیل الکتریکی برای توزیع بار پیوسته :

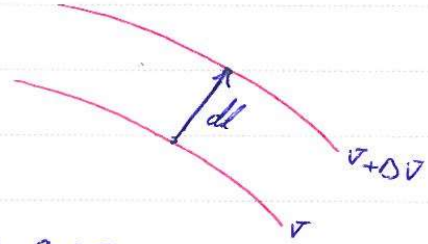
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

محاسبه میدان الکتریکی به کمک پتانسیل الکتریکی :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

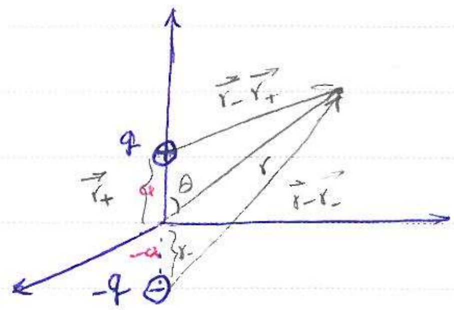
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$



$$\Delta W = q_0 \Delta V$$

$$\Delta W = F \cdot \Delta l = -q_0 E \cdot \Delta l \longrightarrow \Delta V = E \cdot dl \longrightarrow \boxed{E = -\vec{\nabla} V}$$

مثال بار گسسته) پتانسیل الکتریکی را برای یک دو قطبی که در محور z ها مرکز قرینه است، حساب کنید.



$$\vec{r}_+ = a\hat{k}$$

$$\vec{r}_- = -a\hat{k}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_+|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_-|}\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(r^2+a^2+2ar\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$r \gg a$: برای نقاط دور

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\frac{1}{(1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{2a}{r}\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right\} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{(1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} - (1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{2a}{r}\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(1+\frac{q}{r}\cos\theta) - (1-\frac{q}{r}\cos\theta)\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\frac{2a\cos\theta}{r}\right\}$$

$$\boxed{V = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

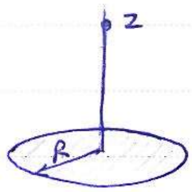
$$V=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\longrightarrow V=\frac{P\,z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{Pz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x=\frac{-Pz}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-\frac{3}{2}(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}=\frac{3Pzx}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

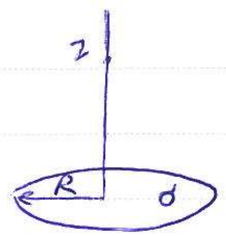
$$E_y=\frac{3Pzy}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\qquad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{Pz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{-P}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-}{(\quad)^2}\right\}$$

$$=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left\{3z^2-r^2\right\}$$

مثال) پتانسیل الکتریکی یک صفحه دایره ای به شعاع R و چگالی بار سطحی σ را حساب کنید.



مثال)



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{|r - r'|}$$

$$\begin{cases} dq = \sigma dA = \sigma \rho \, d\rho \, d\varphi \\ \vec{r} = z\hat{k} \\ \vec{r'} = \rho\hat{\rho} \end{cases} \longrightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \rho \, d\rho \, d\varphi}{(z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{\rho \, d\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2+\rho^2} \right\}_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left\{ \sqrt{R^2+z^2} - z \right\}$$

اگر $z \gg R \longrightarrow \frac{z}{R} \ll 1$

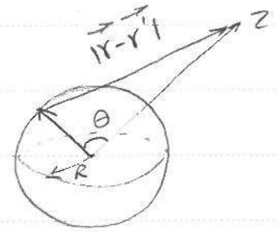
$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left\{ z\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}} - z \right\} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left\{ \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left\{ 1 + \frac{R^2}{2z^2} - 1 \right\} = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon z}$$

$$= \frac{Q}{\pi R^2} \frac{R^2}{4\varepsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z}$$

$V(0,0,z) \rightsquigarrow E_z = ?$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \sqrt{R^2+z^2} - z \right\} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{2z}{2\sqrt{R^2+z^2}} - 1 \right\} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right\}$$

مثال) این پوسته‌ی کروی به شعاع R دارای چگالی بار سطحی σ است. پتانسیل الکتریکی را در فاصله r به دست آورید.



$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\begin{cases} dq=\sigma dA=\sigma R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ \vec{r}=r\hat{k} \\ \vec{r}'=R\hat{r} \end{cases}$$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

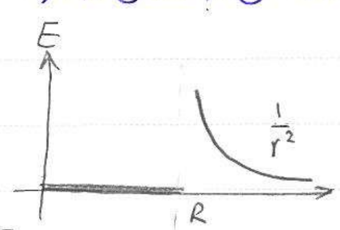
$$=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\left\{\left[\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}\right]_0^{\pi}\right\}$$

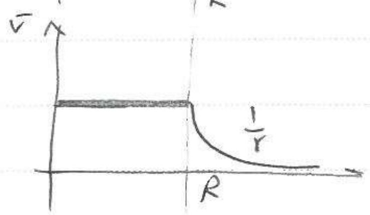
$\sqrt{(R-r)^2}$

اگر $r>R \Rightarrow V=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\{(R+r)-(r-R)\}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}=$

اگر $r<R \Rightarrow V=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\{(R+r)-(R-r)\}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

نکته) هرگاه تقارن کروی داشته باشیم (چگالی تنها تابعی از r باشد) آنگاه میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی شکل ما برابر است با میدان الکتریکی و پتانسیل یک بار نقطه‌ای به اندازه‌ی کل بار شکل که در مرکز تقارن قرار داده شده است.





رسانا:

۱- میدان الکتریکی درداخل رسانا صفر است .

۲- هیچ بار الکتریکی درداخل رسانا وجود ندارد .

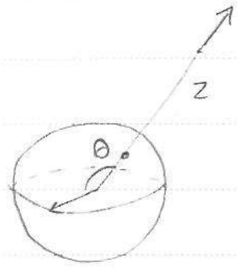
۳- سطح رسانا یک سطح هم پتانسیل است .

۴- میدان الکتریکی بر سطح رسانا عمود است .

۵- داخل رسانا با سطح آن در یک پتانسیل قرار دارد . (پتانسیل درداخل رسانا ثابت و مساوی با سطح است .)

۶- خاصیت حفاظت از میدان الکتریکی خارجی .

مثال) پتانسیل کره توپر به شعاع R و چگالی ρ



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{cases} dq = \rho\, dv = \rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\ \vec{r} \\ \vec{r}' \quad \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta} \end{cases}$$

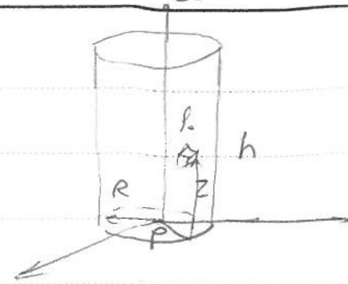
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta}} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int^R r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta}}$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int^R r^2 dr \left(\frac{1}{rz}\right) \left\{ \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta} \,\Big]_0^\pi \right\}$$

$$(z > r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int^R \frac{r}{z} \{(r+z) - (z-r)\}\, dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z} \int^R r^2 dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 z}$$

Subject 3L

Date



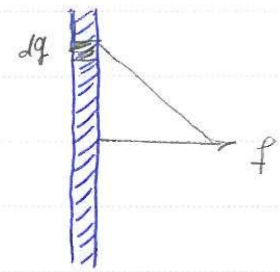
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\begin{cases} dq = \rho_0\, dV = \rho_0\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\ \vec{r} = z_0 \hat{k} \\ \vec{r}' = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \end{cases} \Rightarrow |r-r'| = \sqrt{\rho^2+(z_0-z)^2} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^h \frac{\rho_0\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}{\sqrt{\rho^2+(z_0-z)^2}}$$

۹۲/۱۲/۱۱ - فیزیک ۲

پتانسیل الکتریکی توزیع بار پیوسته

یک خط نامتناهی بار با چگالی بار λ (واحد طول) داریم. پتانسیل الکتریکی را در فاصله‌ی ρ حساب کنید.



$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|r-r'|}\qquad\begin{cases} dq=\lambda dl=\lambda dz\\ \vec{r}=\rho\hat{\rho}\\ \vec{r'}=z\hat{k}\end{cases}$$

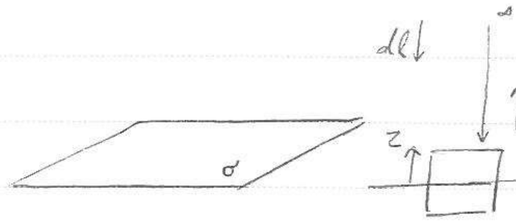
$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda dz}{(\rho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\lambda\times 2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left(z+\sqrt{z^2+\rho^2}\right)\right]^{+\infty}$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\cancel{\ln\infty}-\ln\rho\right\}$$

از مقدار ∞ صرف‌نظر می‌کنیم.

$$V=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\rho\xrightarrow{\text{مشتق}}E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}$$

صفحه‌ی بی‌نهایت:



روش ①

$$V=-\int_{\infty}^{z}\vec{E}\cdot\vec{dl}=\int E\,dl=\int_{\infty}^{z}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-dz)$$

$$=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{z-\cancel{\infty}\right\}=\frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0}$$

صرف‌نظر می‌کنیم.

روش ②

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|r-r'|}\qquad\begin{cases} dq=\sigma dA=\sigma\rho\,d\rho\,d\varphi\\ \vec{r}=z\hat{k}\\ \vec{r'}=\rho\hat{\rho}\end{cases}$$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma\rho\,d\rho\,d\varphi}{(z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\rho\,d\rho}{(z^2+\rho^2)}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\sqrt{z^2+\rho^2}\right]_0^{\infty}\Big\}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\{\infty-z\}$$

$$=\frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0}$$

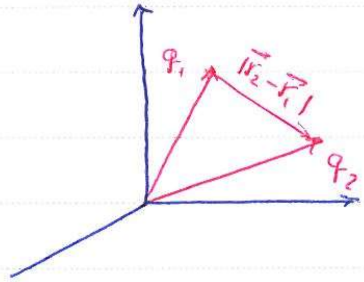
انرژی پتانسیل الکتریکی: انرژی لازم برای کنار هم قرار دادن بارهای الکتریکی.

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} q_2$$

انرژی پتانسیل برای توزیع بار گسسته:

1) فقط بار q_1 را داشته باشیم که برای حرکت دادن آن احتیاج به هیچ انرژی نداریم.

2) بار q_2 را از بی‌نهایت می‌آوریم در کنار بار q_1 قرار می‌دهیم.

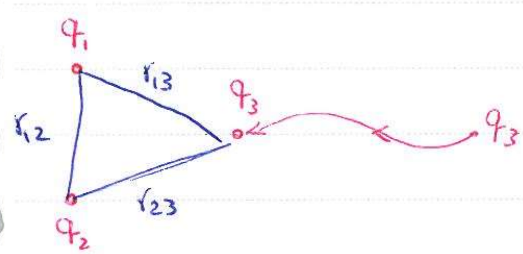


$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \times q_2$$

$$\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \times q_1$$

3) بار q_3 را می‌آوریم در کنار دو بار q_1 و q_2 قرار می‌دهیم.



$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right\}$$

4) بار q_4 را کنار این سه بار نقطه‌ای قرار می‌دهیم.

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right\}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

انرژی پتانسیل توزیع بار پیوسته :

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\iint\frac{dq_i\,dq_j}{r_{ij}}$$

$dq_i=\rho\,dv=\rho(\vec{r}\,')\,dv'$

$dq_j=\rho\,dv=\rho(\vec{r})\,dv$

$r_{ij}=|\vec{r}-\vec{r}\,'|$

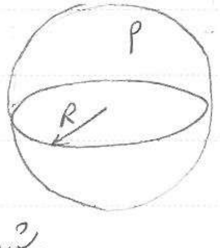
$$\Rightarrow U=\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\frac{1}{2}\iint\underbrace{\boxed{\frac{\rho(\vec{r}\,')\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}}_{V(r)}\rho(\vec{r})\,dv$$

$$\boxed{U=\frac{1}{2}\int\varphi(\vec{r})\,\rho(r)\,dv}$$ این انتگرال روی توزیع بار گرفته می‌شود.

می‌توان اثبات کرد که انرژی پتانسیل مربوط به کنار هم قرار دادن یک توزیع بار برابر است با:

$U=\frac{1}{2}\int\varepsilon_0E^2\,dv$ این انتگرال روی تمام فضا است

مثال ۱) انرژی لازم برای ایجاد یک کره با چگالی ρ و شعاع R چقدر است؟



① روش

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2dv=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left\{\int E_{in}^2dv+\int E_{out}^2dv\right\}$$

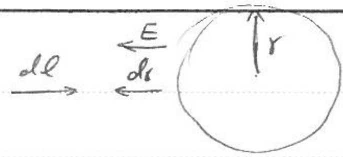
$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left\{\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2r^2}{9\varepsilon^2}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\right.$$

$$\left.+\int_R^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\right\}$$

$$=\frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left\{\int_0^R r^4dr+\int_R^\infty\frac{R^6}{r^2}dr\right\}=\frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left\{\frac{R^5}{5}+R^5\right\}=\frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left\{\frac{6R^5}{5}\right\}$$

$$=\boxed{\frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}}$$

روش ①



$\rho(\vec{r})$ پتانسیل داخل کره را باید حساب کنیم.

$$V = -\int_{\infty}^{r} E\cdot dl$$

$$= \int E\,dl = \int E(-dr) = -\int_{\infty}^{R} E_{out}\,dr - \int_{R}^{r} E_{in}\,dr = -\left\{\int_{\infty}^{R} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,dr + \int_{R}^{r} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,dr\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{R}\right) + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r^2 - R^2\right)\right\}$$

$$= \boxed{\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}}$$ پتانسیل داخل کره

$$U = \frac{1}{2}\int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right)\rho r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{2\pi\rho^2}{\varepsilon_0}\left\{\int_0^R \frac{R^2}{2} r^2\,dr - \int_0^R \frac{r^4}{6}\,dr\right\}$$

$$= \frac{2\pi\rho^2}{\varepsilon_0}\left\{\frac{R^2}{2}\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{30}\right\} = \frac{2\pi\rho^2}{\varepsilon}\left\{\frac{R^5}{6} - \frac{R^5}{30}\right\} = \boxed{\frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}}$$

منزل ۲ - ۹۲/۱۲/۱۳

مثال) انرژی لازم برای کنار هم قرار دادن میله و دیسک.

توزیع ناپیوسته:

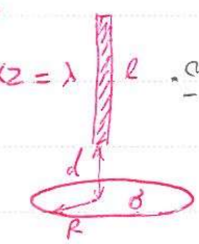
$$W = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{V(r)}{r}$$

نشان نقطه ای که q_i در آن قرار می گیرد

پیوسته:

$$W = \int \varphi(r)\, dq(r) \Rightarrow \begin{cases} W = \int \varphi(r)\, \rho(r)\, dv \\ W = \int \varphi(r)\, \sigma(r)\, dA \\ W = \int \varphi(r)\, \lambda(r)\, dl \end{cases}$$

حل مثال



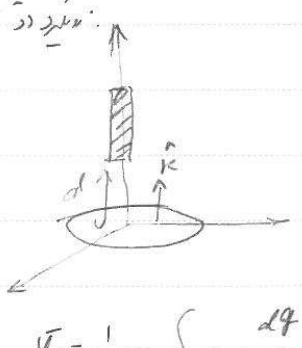
فرض:
۱- دیسک ثابت و میله را از بی نهایت می آوریم کنار دیسک قرار می دهیم.
۲- میله ثابت و دیسک را از بی نهایت می آوریم کنار میله قرار می دهیم.

روش اول:

$$W = \int \underbrace{\varphi(r)}_{\text{پتانسیل دیسک}} \lambda(r)\, dl = \int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\sqrt{R^2+z^2} - z\right\} \lambda\, dz$$

$$= \frac{\sigma \alpha}{2\varepsilon_0}\left\{\int_d^{d+l} z\sqrt{R^2+z^2}\, dz - \int_d^{d+l} z^2 dz\right\}$$

روش دوم:



$$W = \int \varphi(r)\, \sigma(r)\, dA$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sqrt{\rho^2+(d+l)^2} - \sqrt{\rho^2+d^2}\right\}$$

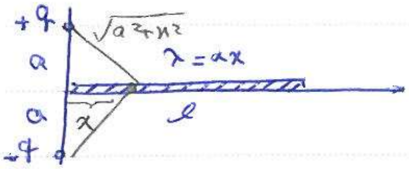
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|r-r'|} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+l} \frac{z\, dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sqrt{\rho^2+z^2}\,\Big]_d^{d+l}\right\}$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sqrt{\rho^2+(d+l)^2} - \sqrt{\rho^2+d^2}\right\}$$

Subject

Date

مثال) یک میله با چگالی متغیر $\lambda = \alpha x$ مطابق شکل در کنار دو بار نقطه‌ای قرار گرفته است. انرژی لازم برای تشکیل این آرایش را حساب کنید.



روش اول: دو بار نقطه‌ای را نزدیک میله می‌کنیم.

$W = \sum q_i V = 2qV \qquad d\ell = dx + dy$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|r-r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\alpha x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sqrt{a^2+x^2}\,\Big|_0^{\ell}\right\} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\sqrt{a^2+\ell^2}-a\right\}$$

$dq = \lambda\, d\ell = \lambda\, dx$

$r = a\hat{j}$

$r' = x\hat{i} \quad \Longrightarrow \quad W = \dfrac{\alpha q}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\sqrt{a^2+\ell^2}-a\right\}$

روش دوم: میله را نزدیک دو بار می‌کنیم.

$\text{پتانسیل دو بار نقطه‌ای} = 2\,\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$W = \int \underbrace{\varphi(x)}\,\lambda(x)\,d\ell$

$$= \int \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\alpha x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{q\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\ell}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\alpha q}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\sqrt{a^2+\ell^2}-a\right\}$$

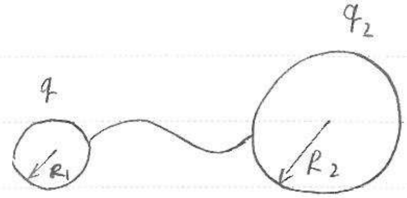
$r=0$

$r'=r\hat{r}$

$$\int \frac{\sigma\, r\,dr\,d\theta}{r^3}(-r\hat{r})$$

$\pi-\theta_0$, $\displaystyle\int \frac{dr}{r}\,d\theta$, θ_0

دو کره ی رسانا به شعاع R_1 و R_2 که در فاصله ی خیلی دور از هم قرار دارند داریم، به وسیله ی یک سیم این دو کره را به هم وصل می کنیم. (کره ها هرکدام بار q_1 و q_2 دارند.)



پتانسیل سطح یک کره رسانا و منزوی

$$V_{\text{بیرون کره}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$V=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}=\frac{q}{4\pi R^2}\cdot\frac{R}{\varepsilon_0}$$

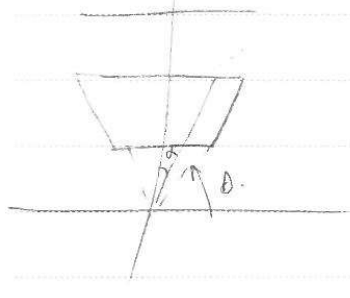
دو را هم پتانسیل شدن

هم پتانسیل می شوند: $\displaystyle\frac{q_1'}{4\pi R_1\varepsilon_0}=\frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$$\frac{q_1'}{q_2'}=\frac{R_1}{R_2}\Rightarrow \sigma_1=\frac{q_1'}{4\pi R_1^2}\qquad \sigma_2=\frac{q_2'}{4\pi R_2^2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{q_1'}{q_2'}\times\frac{R_2^2}{R_1^2}=\frac{R_2}{R_1}$$

⇐ کره ای که شعاع کمتری دارد، چگالی سطحی بیشتری دارد.

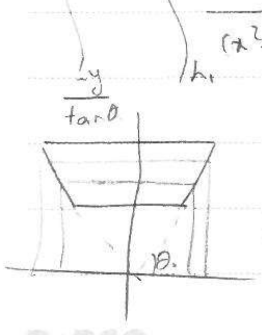


$$=\int \frac{\sigma r\,dr\,d\theta}{r^3}(-r\hat{r})$$

$$\begin{cases}\vec{r}=0\\ r'=r\hat{r}\end{cases}\qquad \cos\alpha=\frac{h_1}{OA}\qquad \alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\int_{\frac{h_1}{\cos\alpha}}^{\frac{h_1}{\cos\alpha}}\frac{dr}{r}\,d\theta\,(-\hat{r})$$

$$\int_{\frac{y}{\tan\theta_0}}^{\frac{-y}{\tan\theta_0}}\int_{h_1}^{h_2}\frac{\sigma\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(-x\hat{i}-y\hat{j})$$



$y=x+\tan\theta_0$

Subject 42
Date

PAPCO

Subject 43

Date

۱۸، ۱۲، ۹۲ ـ فیزیک ۲

خازن:

هرگاه دو رسانا را به فاصله‌ی d از هم قرار دهیم به طوری که روی هر کدام از آنها بار q (روی یکی +q و دیگری -q) قرار گیرد، یک خازن ساخته‌ایم.

آزمایش نشان داده است که بار روی رساناها با ولتاژی که به دو سر خازن وصل شده است، متناسب است.

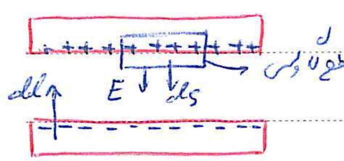
$q \propto V$

$q = CV$

انواع خازن‌ها:

۱ـ خازن تخت:

دو صفحه‌ی موازی با مساحت A و با فاصله‌ی d از هم که در خلأ قرار دارند.



$\oint E\cdot ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

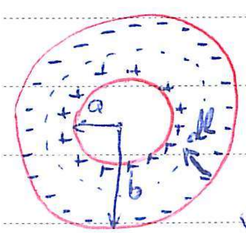
$EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow q = \varepsilon_0 EA$

اختلاف پتانسیل صفحات

$V = -\int \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int E\,dl = Ed \Rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 EA}{Ed} = \boxed{\varepsilon_0 \frac{A}{d}}$

۲ـ خازن کروی:

دو کره‌ی هم مرکز به شعاع‌های a و b.

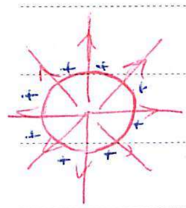


$\oint E\cdot ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi r^2}$

$V = -\int_b^a \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_b^a E\,dl = -\int_b^a E\,dr = \int_a^b \frac{q}{4\pi r^2}\,dr$

$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{b-a}{ab} \longrightarrow C = \frac{q}{V} = \boxed{4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{a-b}}$

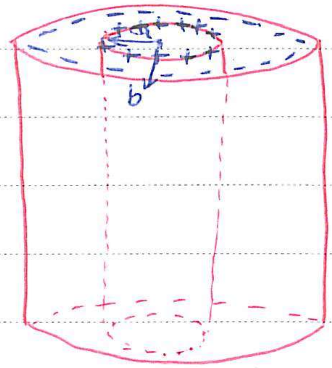


$b \to \infty$

$\lim_{b\to\infty} C = \lim 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b(1-\frac{a}{b})} = 4\pi\varepsilon_0 a \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 a}$ ظرفیت کره منزوی

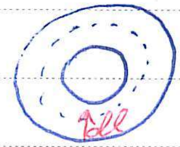
۳- خازن استوانه ای:

دو استوانه ی طول l هم محور به شعاع های a و b



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r l) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_b^a E\,dl = -\int_b^a E\,dr$$

$$= \int_b^a \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\,dr$$

$$= \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

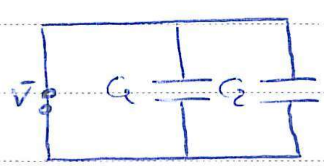
$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}} \rightarrow \text{ظرفیت واحد طول}$$

$$\boxed{C = 2\pi\varepsilon_0\frac{l}{\ln\frac{b}{a}}}$$

خازن های سری و موازی:

۱- موازی:

اختلاف پتانسیل یکسان



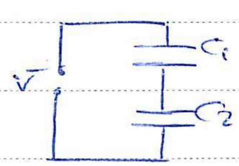
$$q_1 = C_1V_1 \qquad q_2 = C_2V_2$$

$$q_{کل} = q_1 + q_2 = V(C_1 + C_2)$$

$$C_T = C_1 + C_2$$

2- سری:

بارها مساوی

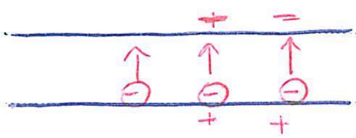


$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \qquad V_2 = \frac{q}{C_2}$$

$$V_T = V_1 + V_2 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

انرژی ذخیره شده در خازن :



$dW = V\,dq' = \frac{q'}{c}\,dq'$

$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{c}\,dq' \Rightarrow \boxed{U = \frac{q^2}{2c} = \frac{1}{2} c V^2}$

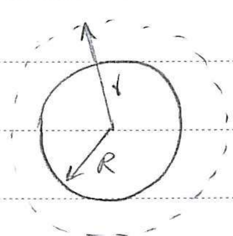
نکته مهم :

برای خازن دقت کنید بار آن ثابت است یا به اختلاف پتانسیل ثابت وصل است .

انرژی ذخیره شده در واحد حجم $u = \frac{\frac{1}{2} c V^2}{Ad} = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d} V^2}{2Ad} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

مثال) یک کره فلزی داریم ، مقدار کل انرژی ذخیره شده در اطراف کره را حساب کنید .

روش اول



$U = \int u\,dv = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

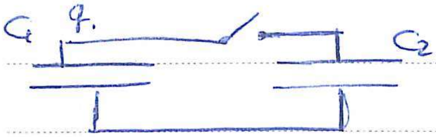
$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 r^2} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$= \frac{\varepsilon_0 4\pi q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \boxed{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$

روش دوم

$U = \frac{1}{2} c V^2 = \frac{q^2}{2c} = \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0 R)2} = \boxed{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$

مثال) خازن C_1 را تا اختلاف پتانسیل V_0 پر می‌کنیم و سپس جدا کرده و به خازن C_2 که خالی است وصل می‌کنیم. تغییر انرژی خازن‌ها را حساب کنید.



$$q_0 = q_1 + q_2$$

$$C_1 V_0 = C_1 V + C_2 V \Rightarrow V = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$$

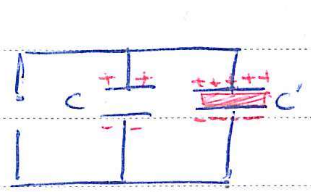
$$U_T = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \frac{V_0^2 C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

$$\boxed{U = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0}$$

دی‌الکتریک:

به خاطر اینکه بتوانیم بار بیشتری بر روی صفحات خازن بدون شکست میدان الکتریکی قرار دهیم و اینکه ظرفیت خازن را افزایش دهیم.

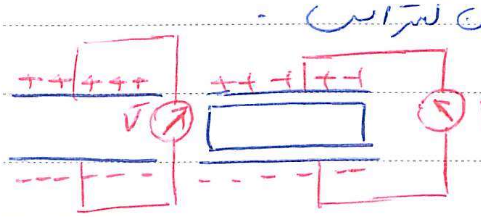
الف) دو خازن، یکی با دی‌الکتریک و دیگری بدون دی‌الکتریک (با ابعاد هندسی یکسان)
هر دو به ولتاژ V وصل می‌شوند؛ خازنی که دی‌الکتریک دارد، بار بیشتری خواهد داشت.



$$q' = kq$$

$$C' = \frac{q'}{V} = \frac{kq}{V} = kC = k\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

ب) دو خازن یکی با دی‌الکتریک و دیگری بدون دی‌الکتریک (با ابعاد هندسی یکسان).
هر دو دارای بار q هستند، خازنی که دی‌الکتریک دارد، ولتاژ دو سر آن کمتر است.



$$V' = \frac{V}{k}$$

$$C' = \frac{q}{V'} = \frac{q}{\frac{V}{k}} = k\frac{q}{V} = kC$$

رسانا:

همواره در الکتروستاتیک میدان الکتریکی داخل رسانا صفر است و هیچ باری در داخل رسانا وجود ندارد.

و رسانا   و نارسانا

مثال) یک کرهٔ نارسانا به شعاع a و بار Q به طور یکنواخت در آن توزیع شده است. در یک پوستهٔ کروی که شعاع داخلی b و شعاع خارجی c قرار گرفته است.

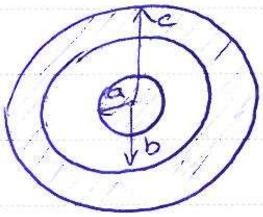
میدان الکتریکی را حساب کنید.

1- $r<a$

2- $a<r<b$

3- $b<r<c$

4- $r>c$



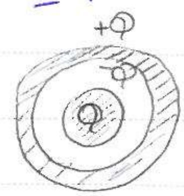
1) $r<a: \quad \vec{E}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$

2) $a<r<b: \quad \vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

3) $b<r<c: \quad \vec{E}=0$

4) $r>c: \quad \vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

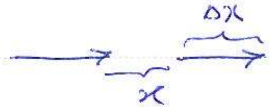
بار القایی روی سطوح داخلی و خارجی را محاسبه کنید.



مثال) استوانهٔ طویل به شعاع R و چگالی ρ داریم، شار گذرنده از صفحهٔ مربعی به ضلع 2R و مماس بر استوانه را حساب کنید. (کتاب دکتر گرجی)

Subject 48
Date

PAPCO



$$E(x)+E(x+\Delta x)$$ ۲-۱۵

$$F(x+h)=\sum \frac{h^n}{n!}f^n(x) \longrightarrow E(x)+E(x+\Delta x)=E(x)+\Delta x\frac{\partial E}{\partial x}$$

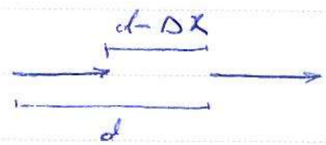
$$F=Eq=-qE(x)+qE(x+\Delta x)=-q(x)+q(x)+q\Delta x\frac{\partial E}{\partial x}=q\Delta x\frac{\partial E}{\partial x}$$

خالص $F=q\Delta x\dfrac{\partial E}{\partial x}$

$$F=qE(x)-qE(x+\Delta x)=qE(x)-qE(x)-q\Delta\frac{\partial E}{\partial x}$$

درون $F=-q\Delta x\dfrac{\partial E}{\partial x}$

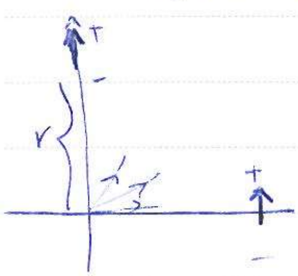
$$E=-\nabla V \implies V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{x^2}\implies E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P}{x^3}$$



$$\frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{6P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^4} \Longleftrightarrow \frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{dP}{4\pi\varepsilon_0(d-\Delta x)^4}$$

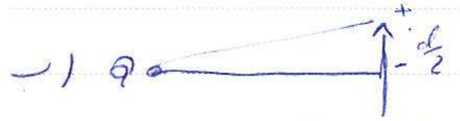
خالص $F=\dfrac{6P^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(d-\Delta x)^4}$

۳-۱



$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r-r')}{|r-r'|^3} \qquad r'=0 \qquad r=r\hat{j}$$

$$E=-q(E(r))+qE(r+\Delta r)=q\Delta r\frac{\partial E}{\partial r}=P\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{kQr\hat{j}}{r^3}\right)=\frac{-2PkQ\hat{j}}{r^3}$$



$$E=\frac{kQ(r-r')}{|r-r'|^3}$$

$$\vec{E}=kQ\frac{x\hat{i}+\frac{d}{2}\hat{j}}{(x^2+\frac{d^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{x\gg d} E_+=kQ\frac{x\hat{i}+\frac{d}{2}\hat{j}}{x^3} \qquad E_-=kQ\frac{x\hat{i}-\frac{d}{2}\hat{j}}{x^3}$$