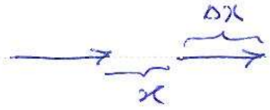


$E(x) + E(x+\Delta x)$ ۲-۱۵

$F(x+h) = \sum \frac{h^n}{n!} f^n(x) \longrightarrow E(x) + E(x+\Delta x) = E(x) + \Delta x \frac{\partial E}{\partial x}$

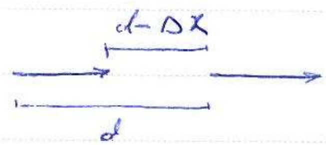
$F = Eq = -qE(x) + qE(x+\Delta x) = -q(x) + q(x) + q\Delta x \frac{\partial E}{\partial x} = q\Delta x \frac{\partial E}{\partial x}$

$F_{\text{خارج}} = q\Delta x \frac{\partial E}{\partial x}$

$F = qE(x) - qE(x+\Delta x) = qE(x) - qE(x) - q\Delta \frac{\partial E}{\partial x}$

$F_{\text{داخل}} = -q\Delta x \frac{\partial E}{\partial x}$

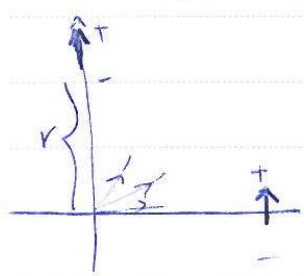
$E = -\nabla V \implies V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{P}{x^2} \implies E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2P}{x^3}$



$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{6P}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^4} \implies \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{dP}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(d-\Delta x)^4}$

$F_{\text{خارج}} = \frac{6P^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(d-\Delta x)^4}$

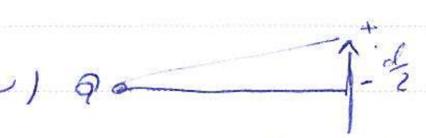
۳-۱



$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(r-r')}{|r-r'|^3} \qquad r' = 0 \qquad r = r\hat{j}$

$F = -qE(r) + qE(r+\Delta r) = q\Delta r \frac{\partial E}{\partial r} = P \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{KQ r \hat{j}}{r^3} \right) = \frac{-2PKQ\hat{j}}{r^3}$

ب)



$E = \frac{KQ(r-r')}{|r-r'|^3}$

$\vec{E} = KQ \frac{x\hat{i} + \frac{d}{2}\hat{j}}{(x^2 + \frac{d^2}{4})^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{x \gg d} E_+ = KQ \frac{x\hat{i} + \frac{d}{2}\hat{j}}{x^3} \qquad E_- = KQ \frac{x\hat{i} - \frac{d}{2}\hat{j}}{x^3}$

Subject 50
Date

PAPCO

۲۰/۱۲/۹۲ - فیزیک ۲

۱-۱ دی الکتریک ها:

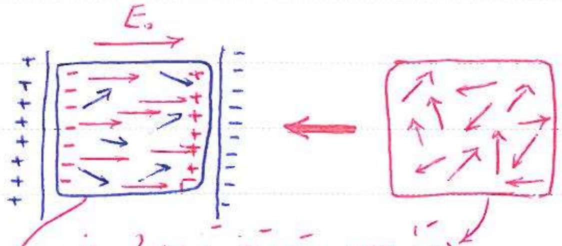
$C = KC_0$

⇐ اگر ولتاژ ثابت: $q = Kq_0$, $C = \frac{q}{V}$ ⟵ $U_0 = \frac{1}{2}C_0V^2 \Longrightarrow U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}KC_0V^2 = KU_0$

⇐ اگر بار ثابت: $V = \frac{1}{K}V_0$, $C = \frac{q}{V}$ ⟵ $U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2KC_0} = \frac{1}{K}U_0$, $U_0 = \frac{q^2}{2C_0}$

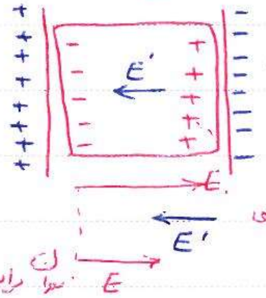
۱-۱ دی الکتریک ها از دیدگاه اتمی:

⇐ بار ثابت:



دوقطبی ها به صورت تصادفی توزیع شده اند

بیشتر دوقطبی ها هم جهت با میدان

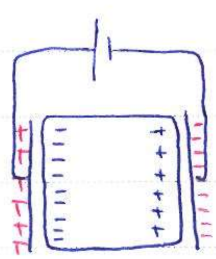


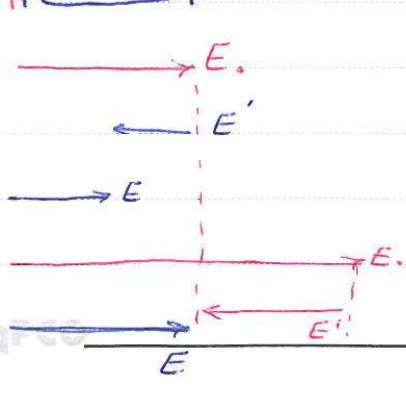
میدان کاهش پیدا کرده در نتیجه اختلاف پتانسیل کم می شود. $\frac{E}{E_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{1}{K}$

(حاصل بارها) میدان ناشی از دوقطبی ها

میدان برایند

⇐ ولتاژ ثابت:



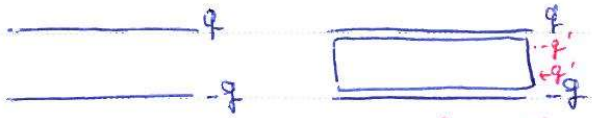


پس با افزایش بار موجب می شود که میدان E_0 قوی تر شده تا با کاهش E' (بار القایی) هم مقدار E_0 ثابت بماند.

میدان برایند برابر با میدان اولیه می شود.

بردارهای سه گانه یا سه بردار $\vec{E}$ ، $\vec{P}$ ، $\vec{D}$:

دو خازن مشابه با بار یکسان داریم...



$E_0 = \dfrac{q}{\varepsilon_0 A}$ $\quad E = \dfrac{q}{\varepsilon_0 A} - \dfrac{q'}{\varepsilon_0 A}$

$E = \dfrac{E_0}{K}$

$$\longrightarrow \frac{q}{\varepsilon_0 A} = K\left(\frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A}\right)$$

$$1)\ \frac{q}{K} = q - q' \longrightarrow \boxed{q' = q\left(1 - \frac{1}{K}\right)}$$

$$2)\ \frac{q}{K\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A} \longrightarrow \frac{q}{A} = \varepsilon_0 \frac{q}{K\varepsilon_0 A} + \frac{q'}{A}$$

$$\sigma = \frac{q' d}{A d} = \frac{P}{V} = P\left(\frac{C}{m^2}\right) \longrightarrow \boxed{P = \frac{\sum_i P_i}{V}}$$ گشتاور دو قطبی القایی (در واحد حجم)

$$3)\ \underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{q}{A}}}^{D}}_{} = \varepsilon_0 \underbrace{\boxed{\frac{q}{K\varepsilon_0 A}}}_{E} + \overbrace{\boxed{\frac{q'}{A}}}^{P} \longrightarrow D = \frac{q}{A}$$ بردار جابجایی الکتریکی

$D \leftarrow$ متعلق به بارهای آزاد مربوط است.

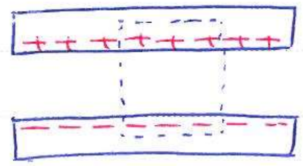
$P \leftarrow$ " " مقید مربوط است.

$$\longrightarrow \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$ $\qquad P, D\left(\frac{C}{m^2}\right)$, $E\left(\frac{N}{C}\right)$

$$4)\ \frac{q}{A} = K\varepsilon_0\left(\frac{q}{K\varepsilon_0 A}\right) = K\varepsilon_0 E \longrightarrow \boxed{\vec{D} = K\varepsilon_0 \vec{E}} \qquad \boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 (K-1)\vec{E}}$$

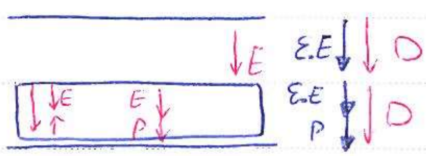
$$5)\ P = \frac{q'}{A} = \frac{1}{A} q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{q}{A}\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{q}{K\varepsilon_0 A} K\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \varepsilon_0 (K-1)\vec{E}$$

قانون گاوس در دی الکتریک ها:



$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q-q') = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q - q\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{k}\right) \longrightarrow \oint k\vec{E}\cdot\vec{ds} = q \longrightarrow \boxed{\oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = q}$$

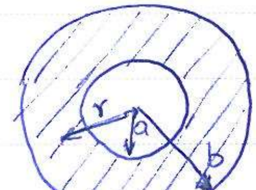


D: در داخل و خارج دی الکتریک ثابت است.

P: در خارج از دی الکتریک صفر است.

E: مولفه مماسی آن در مرز دی الکتریک پیوسته است.

مثال) یک خازن کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با یک دی الکتریک (K) پر شده است و بار q_0 در مرکز کره قرار داده‌ایم:



الف) بردارهای سه گانه $\vec{P}$ و $\vec{E}$ و $\vec{D}$ را در دی الکتریک محاسبه کنید.

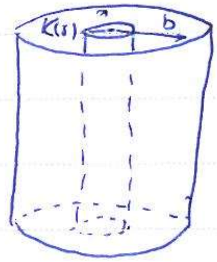
ب) بار القایی در سطح داخلی دی الکتریک چقدر است.

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = q_0 \longrightarrow D(4\pi r^2) = q_0 \longrightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D} = K\varepsilon_0\vec{E} \longrightarrow \vec{E} = \frac{q}{K\varepsilon_0 4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(K-1)\vec{E} = \varepsilon_0(K-1)\frac{q}{4\pi K\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi}\,\frac{K-1}{Kr^2}\hat{r}$$

مثال) یک خازن استوانه‌ای طولانی شکل با مادهٔ دی‌الکتریک $K(r)$ پر شده است. اگر بار صفحات خازن q باشد $K(r)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که میدان بین صفحات مقدار ثابت شود.



$$\oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = q \longrightarrow K\varepsilon_0 E(2\pi r l) = q \longrightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 K r l}$$

$$K = \frac{\alpha}{r} \longrightarrow Kr = \frac{\alpha}{r}r = \alpha$$

ظرفیت چنین خازنی؟

انرژی ذخیره شده در خازن؟

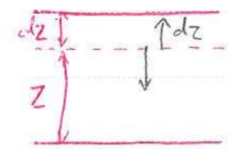
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \alpha l}{b-a}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2(b-a)}{4\pi\varepsilon_0 l \alpha}$$

یا $u = \frac{1}{2}K\varepsilon_0 E^2$

$\hookrightarrow \int u\,dv$

مثال) یک خازن با بار ثابت داریم، صفحات خازن یکدیگر را با چه نیرویی جذب می‌کند؟



$$U = \frac{q^2}{2C} \qquad C = \varepsilon_0 \frac{A}{z} \quad \rightsquigarrow \quad U(z+dz) = \frac{q^2}{2}\frac{1}{C(z+dz)} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}(z+dz)$$

$$\Rightarrow U(z+dz) - U(z) = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A} dz$$

چون کار در خلاف جهت dz است. : $-F_z dz = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A} dz \longrightarrow \boxed{F = \frac{-q^2}{2\varepsilon_0 A}}$ (جاذبه)

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dz}\Big|_{q\ \text{ثابت}}} \longrightarrow F = -\frac{d}{dz}\left\{\frac{q^2 z}{2\varepsilon_0 A}\right\} = \frac{-q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

نکته! ←
هر تغییر انرژی مکانیکی منفی انرژی ذخیره شده در خازن است.

مثال) اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت است، صفحات یکدیگر را با چه نیرویی جذب می‌کنند؟

$$U = \frac{1}{2}CV^2, \quad C = \varepsilon_0 \frac{A}{z} \longrightarrow U(z+dz) - U(z) = \frac{1}{2}V^2\left\{C(z+dz) - C(z)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}V^2\left\{\frac{\varepsilon_0 A}{z+dz} - \frac{\varepsilon_0 A}{z}\right\}$$

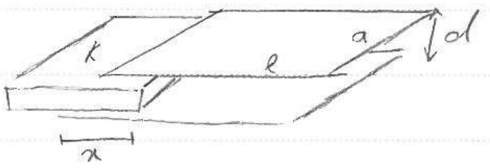
انرژی باتری: $U = qV \rightsquigarrow qV = V^2\left\{C(z+dz) - C(z)\right\}$

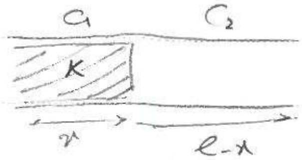
$$-F_z dz = U(z+dz) - U(z) - V^2\left\{C(z+dz) - C(z)\right\}$$

$$F_z = \frac{-q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{F = \frac{dU}{dz}\Big|_{V\ \text{ثابت}}}$$

مثال) یک خازن انرژی‌دار داریم (بار ثابت) یک دی‌الکتریک وارد آن می‌کنیم، دی‌الکتریک با چه نیرویی جذب می‌شود؟





$F = -\frac{dU}{dx}$, $U = \frac{q^2}{2C}$ دو خازن موازی : $C_T = C_1 + C_2$

$$= K\varepsilon_0 \frac{ax}{d} - \varepsilon_0 \frac{a(l-x)}{d}$$

فرض می‌کنیم : $\boxed{K\varepsilon_0 = \varepsilon}$

$$= \frac{a}{d}\{\varepsilon x + \varepsilon_0 (l-x)\}$$

$U = \frac{q_0^2 d}{2a}\left\{\frac{1}{\varepsilon x + \varepsilon_0 (l-x)}\right\}$ $F = -\frac{dU}{dx} = \frac{-q^2 d}{2a}\left\{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{(\varepsilon x - \varepsilon_0 (l-x))^2}\right\}$ $F > 0$ جاذبه است

← نیروی وارد از طرف خازن

مثال) در یک خازن با اختلاف پتانسیل ثابت، یک دی‌الکتریک وارد می‌کنیم. نیروی وارد بر دی‌الکتریک را بدست آورید.

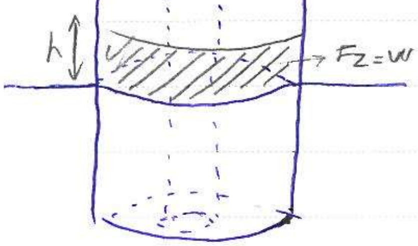
$F = \frac{dU}{dx}\Big|_{\text{ثابت } V}$ $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}V^2\left\{\frac{a}{d}(\varepsilon x + \varepsilon_0 (l-x))\right\}$

$$= \frac{V^2 a}{2d}\{\varepsilon - \varepsilon_0\} > 0$$ نیرو جاذبه است

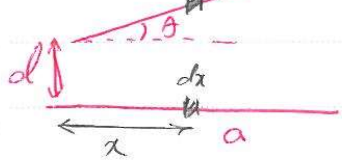
با وارد کردن دی‌الکتریک ظرفیت خازن و انرژی ذخیره شده افزایش می‌یابد اما انرژی‌ای که باتری تأمین می‌کند برای ثابت ماندن اختلاف پتانسیل دو برابر انرژی خازن است.

مثال) خازن استوانه ای به اختلاف پتانسیل ثابت را درون مایع دی الکتریک غوطه ور می کنیم. مایع دی الکتریک تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

مایع دی الکتریک تا ارتفاعی بالا می آید تا نیروی جاذبه؛ دی الکتریک با نیروی وزن برابر شود.



مثال) دو صفحه مربعی شکل به ابعاد a و به فاصله خیلی کم d از هم مطابق شکل قرار دارند. ظرفیت این خازن را حساب کنید. (θ خیلی کوچک)



ظرفیت خازن برابر است با مجموع ظرفیت های خازن های موازی

$$C=\int dC \qquad C=\varepsilon_0\frac{A}{d} \longrightarrow dC=\varepsilon_0\frac{a\,dx}{d+y}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\longrightarrow y=x\tan\theta$$

چون θ خیلی کوچک است ← $\tan\theta\simeq\theta$

$$C=\int\varepsilon_0\frac{a\,dx}{d+y}$$

$$=\int_0^a\varepsilon_0\frac{a\,dx}{d+x\tan\theta}=\varepsilon_0 a\int_0^a\frac{dx}{d+\theta x}=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left\{\ln(d+a\theta)-\ln d\right\}$$

$$=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln\left(\frac{d+a\theta}{d}\right)=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln\left(1+\frac{a\theta}{d}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a\theta}{d}\ll 1\longrightarrow \ln(1+x)\simeq x-\frac{x^2}{2}$$

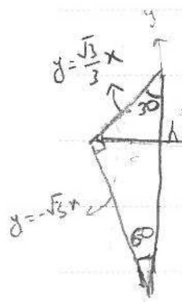
$$\Longrightarrow C=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left\{\frac{a\theta}{d}-\frac{a^2\theta^2}{2d^2}\right\}=\boxed{\frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1-\frac{a\theta}{2d}\right)}$$

حل سؤالات سری دوم :

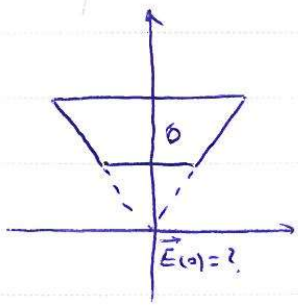
10)

نکات انتگرال دوگانه: ۱) تعیین منظم و نامنظم بودن ناحیه (رسم خطوط مرزی)

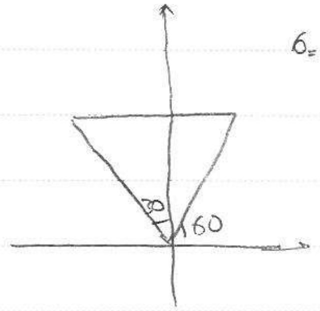
2) بازه متغیری که نامنظم است ← انتگرال سمت چپ



$$S=\int_0^h dx\int_{-\sqrt{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}dy$$



$\Longrightarrow$



$$\sigma=\alpha(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$E(0)?\longrightarrow E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma\,dx\,dy\,(0-x\hat{i}-y\hat{j})}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\underbrace{-\iint_0^0 x\,dx\,dy\,\hat{i}}_{I}-\iint y\,dx\,dy\,\hat{j}\Big]$$

$$I=\iint x\,dx\,dy=\hat{i}\int_0^h dy\int_{\sqrt{3}y}^{\frac{-y}{\sqrt{3}}}x\,dx=\hat{i}\int dy\,\frac{x^2}{2}\Big|_{\sqrt{3}y}^{\frac{-y}{\sqrt{3}}}=\hat{i}\int_0^h\frac{dy}{2}\Big(\frac{y^2}{3}-3y^2\Big)=-\hat{i}\,\frac{4y^3}{9}\Big|_0^h=-\frac{4}{9}h^3\,\hat{i}$$

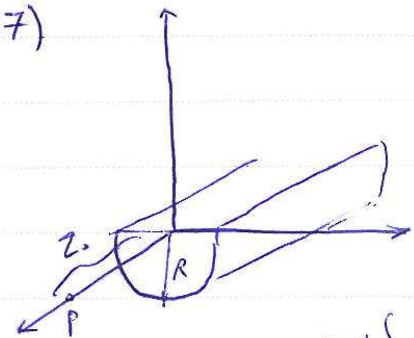
$$\longrightarrow\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon}\Big[-\iint x\,dx\,dy\,\hat{i}-\iint y\,dx\,dy\,\hat{j}\Big]=\hat{j}\iint y\,dx\,dy=\int y\,dy\int dx=\int y\,dy\,\Big(\frac{-y}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}y\Big)$$

$$=\frac{-4}{3\sqrt{3}}y^3\Big|_0^h=\frac{-4}{3\sqrt{3}}h^3$$

m_Niknam@physics.iust.ac.ir

دو قطبی $\leftarrow E = \dfrac{3KP\vec{r}\cos\theta}{r^4} - \dfrac{\vec{K}P}{r^3}$ $\quad \tau = \vec{r} \times \vec{F}$

7)



$$E = \frac{K\int \sigma ds(z\hat{k} - R\hat{\rho} - z'\hat{k})}{(R^2 + (z_0 - z')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= K\sigma \int \frac{R d\varphi dz'((z_0 - z')\hat{k} - R\hat{\rho})}{[R^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

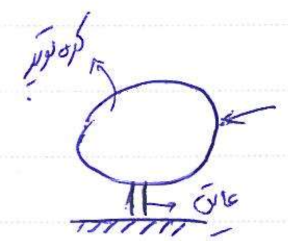
$$E = K\sigma \int \frac{R d\varphi dz'((z_0 - z')\hat{k}}{\text{مخرج}} + K\sigma \int \frac{R d\varphi dz'(-R\hat{\rho})}{\text{مخرج}} \qquad \hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$$

$z_0 - z' = f \longrightarrow -dz' = df$

$$E = K\sigma R\pi\hat{k} \int \frac{-f df}{(R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}} - K\sigma R^2 \int \frac{d\varphi\hat{\rho}(-df)}{(R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = K\sigma R\left[\pi\hat{k}\frac{1}{(R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = -2R\hat{j}\frac{f}{R^2(R^2 + f^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad f = z_0 - z'$$

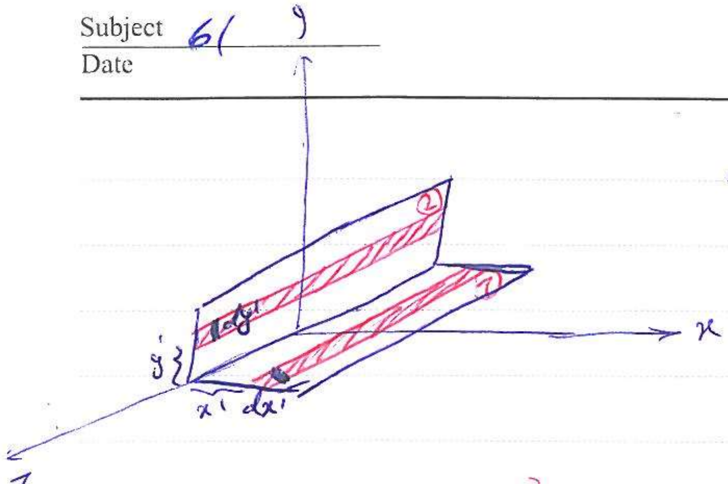
س) روش اندازه گیری دکاسه؟ Q را به صورت عملی بیان کنید.



$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Subject 61

Date



$E = \frac{2K\lambda}{\rho}\hat{\rho}$ ← ابتدا میدان خطی (میلهٔ بی‌نهایت) را می‌نویسیم

میدان دو صفحه را بدست می‌آوریم :

← (σ را به λ تبدیل می‌کنیم)

$$dE_2 = \frac{2K\lambda}{y-y'}\hat{j} = \frac{2K\overbrace{\boxed{\sigma_2\, dy'}}^{\lambda}}{y-y'}\hat{j} \longrightarrow E_2 = \int_0^d \frac{2K\sigma_2\, dy'}{y-y'} \Rightarrow E_2 = 2K\sigma_2 \ln\left(\frac{y}{y-d}\right)\hat{j}$$

$dE_1 =$

Subject 62
Date

PAPCO

جریان الکتریکی و مقاومت :

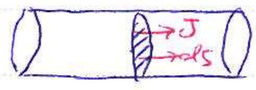
هرگاه بین دو سر رسانا یا دو نقطه‌ی یک رسانا اختلاف پتانسیل برقرار باشد . پس یک جریان نیاز خواهیم داشت برای هم پتانسیل کردن ، در رسانا میدان الکتریکی خواهیم داشت که موجب حرکت الکترون ها می‌شود .

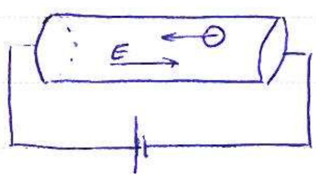
کمیت میکروسکوپیک جریان الکتریکی را چگالی جریان تعریف می‌کنیم

J

$i=\frac{dq}{dt}$

$i=\int \vec{J}\cdot d\vec{s}$





به خاطر اختلاف پتانسیل ← میدان ← نیرو ← شتاب ← سرعت

$F=eE=ma \qquad v^2=2al$

به خاطر برخورد الکترون ها با هسته ها سرعت الکترون کمتر است (V_d) از سرعت واقعی .

$q=n(Al)e \qquad t=\frac{l}{V_d} \qquad JA=i=\frac{q}{t}=\frac{nAle}{\frac{l}{V_d}}=nAeV_d$

$\Rightarrow \boxed{\vec{J}=ne\vec{V}_d}$ n: تعداد الکترون‌های رسانشی در واحد حجم

مثال) سیم مسی به شعاع 900 mm و i = 17mA داریم، سرعت دریفت V_d را بدست آورید .

فرض می‌کنیم هر اتم یک الکترون رسانشی دارد .

$n=\frac{6.02\times10^{23}}{1mol}\times\frac{1mol}{63.5gr}\times\frac{8960gr}{m^3}\longrightarrow V_d=1.8\frac{mm}{h}$

مقاومت :

هرگاه به دو سر ماده ای اختلاف پتانسیل V وصل کنیم و جریان عبوری i را اندازه بگیریم :

$R = \frac{V}{i} \quad [\Omega]$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

مقاومت ویژه : $\rho = \frac{E}{J}$

رسانایی ویژه : $\sigma = \frac{1}{\rho}$

$$\boxed{R = \rho \frac{L}{A}}$$

قانون اهم :

هرگاه مقاومت با تغییر V یا i ثابت بماند ، یا به عبارتی V برحسب i خطی باشد ، مقاومت اهمی نامیده می‌شود

توان در مقاومت :

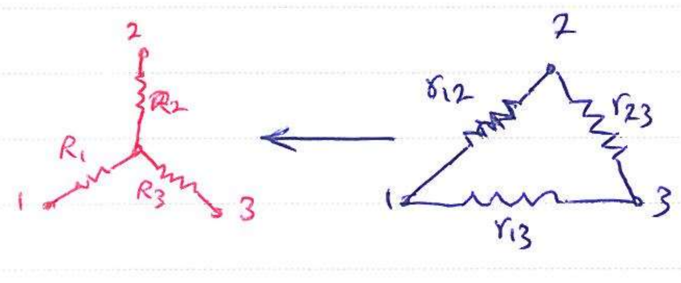
$$dW = V dq = V i dt \longrightarrow \frac{dW}{dt} = P = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$

مقاومت های معادل :

سری : $R = R_1 + R_2 + \cdots$

موازی : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$

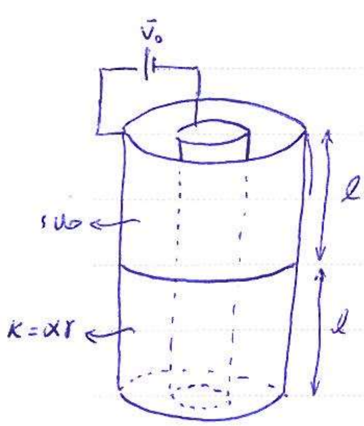
تبدیل مثلث به ستاره :



$R_1 = \frac{r_{12} \cdot r_{13}}{r_T} \qquad r_T = r_{12} + r_{13} + r_{23}$

$R_2 = \frac{r_{12} \cdot r_{23}}{r_T} \qquad R_3 = \frac{r_{13} \cdot r_{23}}{r_T}$

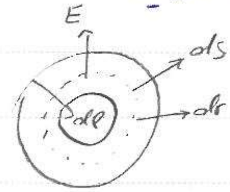
تمرین ۲ - ۹۳/۱/۱۹



مثال) یک خازن استوانه‌ای مطابق شکل به اختلاف پتانسیل V_0 وصل شده است.
شعاع داخلی a و شعاع خارجی b است.
الف) ظرفیت خازن ب) بردارهای پلاریزاسیون را بدست آورید.

$\frac{x}{r}$

αr^2



دو خازن موازی : $C_T = C_1 + C_2$

$$C_1 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = q \rightsquigarrow \oint k\varepsilon_0 E \cdot ds = q \longrightarrow \alpha r\, \varepsilon_0 E(2\pi r l) = q$$

$$\vec{E} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 l\alpha r^2}\hat{\rho}$$

$$V = -\int E\cdot dl = +\int_b^a E dl - \int_b^a E\cdot dr$$

$$V = \frac{-q_2}{2\pi\varepsilon_0 l\alpha}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l\alpha}\left\{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right\}$$

$$C_2 = \frac{q_2}{V} = 2\pi\varepsilon_0 l\alpha\frac{ab}{b-a}$$

$$C_T = C_1 + C_2 = 2\pi\varepsilon_0 l\left\{\frac{\alpha ab}{b-a} + \frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\right\}$$

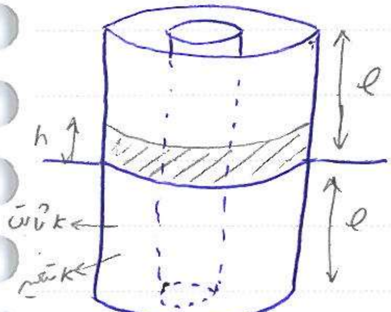
ب) نیمه پایینی $P = \frac{q\, d}{A d}$ $\oint \vec{D}\cdot\vec{ds} = q \longrightarrow D(2\pi r l) = q$

$$D = \frac{q}{2\pi r l} = \frac{\varepsilon_0\alpha V_0}{r}\frac{ab}{b-a}$$

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon_0\alpha V_0}{r}\frac{ab}{b-a}\hat{r} \implies \vec{D} = k\varepsilon_0 E \implies E = \frac{V_0}{r^2}\frac{ab}{b-a}\hat{r}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0 V_0\frac{ab}{b-a}\left\{\frac{\alpha}{r} - \frac{1}{r^2}\right\}\hat{r}$$

مثال) استوانه‌ای شکل ثابت در داخل مایع دی‌الکتریک قرار دارد، مایع تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟



مایع تا ارتفاعی بالا می‌آید که نیروی وزن با F جاذبه برابر شود.

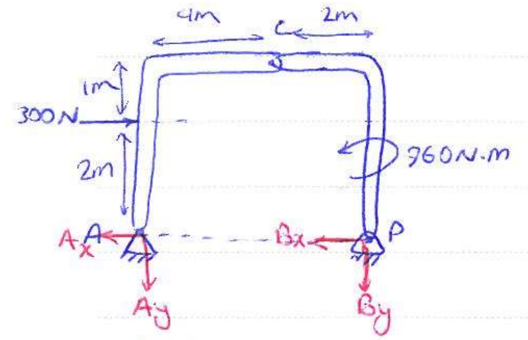
$$W = mg = \rho V g = \rho g \pi h (b^2 - a^2)$$

$$F = \frac{du}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2} C V^2\right) = \frac{V^2}{2} \frac{d}{dh} \{C_T\}$$

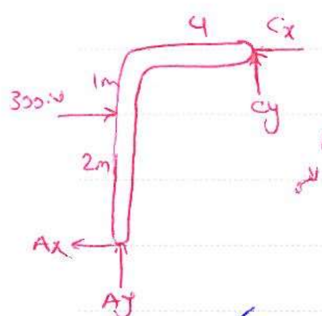
$$K = \alpha r \longrightarrow C = 2\pi \varepsilon_0 \left\{ \frac{(\alpha a b) l + h}{b - a} + \frac{l - h}{\ln \frac{b}{a}} \right\}$$

$$K = \text{ثابت} \longrightarrow C = \frac{2\pi l}{\ln \frac{b}{a}} \{\varepsilon_0 + \varepsilon\} = \frac{2\pi}{\ln \frac{b}{a}} \{\varepsilon_0 (l - h) + \varepsilon (l + h)\}$$

مثال) عکس العمل های A و B را در قاب نشان داده شده محاسبه کنید:



قاب: $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times 6 - 300 \times 2 + 960 \longrightarrow A_y = 60N$

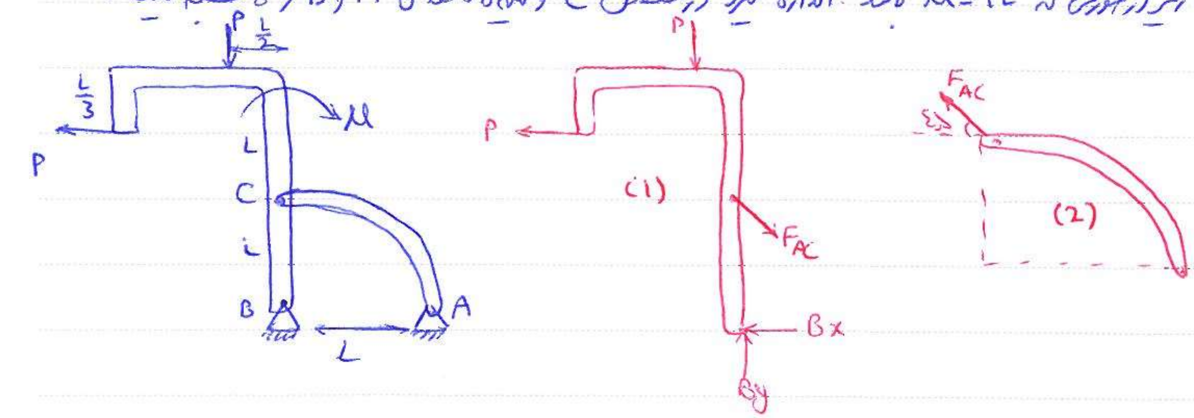


$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow -A_x \times 3 - 60 \times 4 + 300 \times 1 = 0 \longrightarrow A_x = 20N$

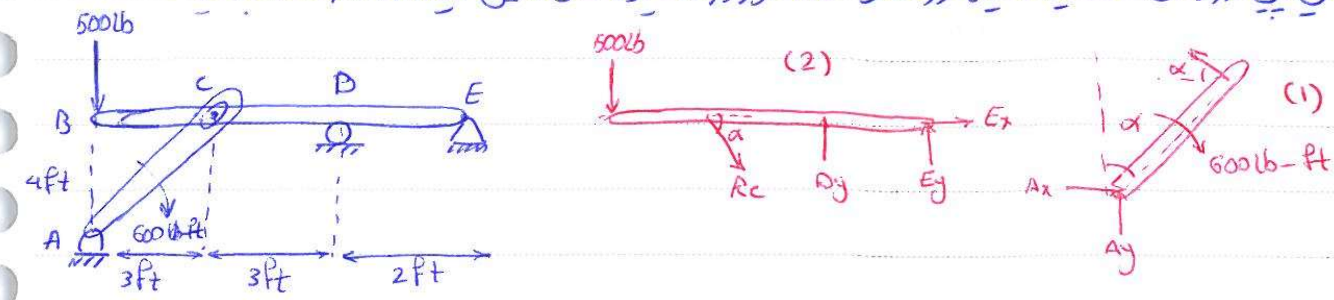
در شکل بالا $\Sigma F_x = 0 \longrightarrow 300 - A_x - B_x = 0 \longrightarrow B_x = 280N$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y - B_y = 0 \longrightarrow B_y = A_y = 60N$

مثال) در شکل زیر در صورتی که $M = PL$ باشد. اندازه نیرو در مفصل C و تکیه‌گاه های A و B را محاسبه کنید.



مثال) دو عضو همانند شکل زیر در نقطه C به یکدیگر با پین متصل شده‌اند. پین C در عضو BDE قرار گرفته، از طرفی این پین در داخل شیار صیقلی در عضو AC قرار دارد، نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه D ها را محاسبه کنید.



(1) عضو : $\Sigma M_A = 0 \longrightarrow R_c \times 5 - 600 = 0 \longrightarrow R_c = 120\ lb$

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x - R_c \cos\alpha = 0 \longrightarrow A_x = 120 \times \frac{4}{5} = 96\ lb$

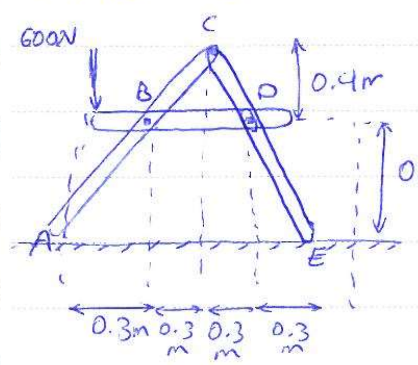
$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y + R_c \sin\alpha = 0 \longrightarrow A_y = -120 \times \frac{3}{5} = -72\ lb$

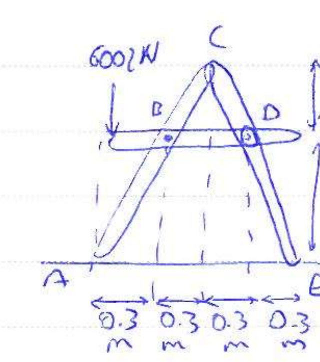
(2) عضو : $\Sigma F_x = 0 \longrightarrow E_x + R_c \cos\alpha = 0 \longrightarrow E_x = -96\ lb$

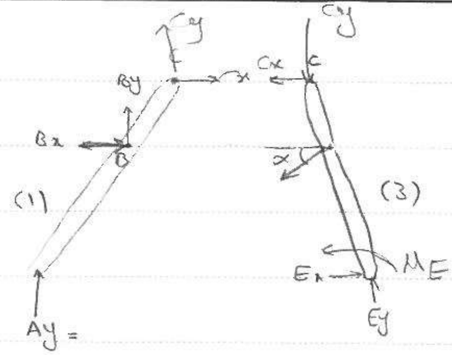
$\Sigma M_E = 0 \rightarrow 500 \times 8 + R_c \sin\alpha \times 5 - D_y \times 2 = 0 \longrightarrow D_y = 2180\ lb$

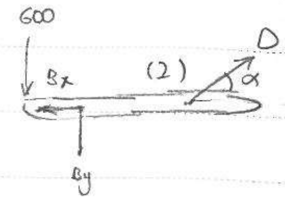
$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow E_y = -1608\ lb$

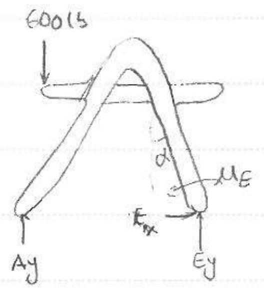
مثال) عکس‌العمل ها در تکیه‌گاه ثابت E و تکیه‌گاه صیقلی A را پیدا کنید. پینی که در سمت راست عضو BD قرار دارد از شیار صاف در D می‌لغزد.











$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$(2): \ \Sigma M_B = 0 \longrightarrow R_D \sin\alpha \cdot 0.6 + 600 \times 3 \longrightarrow R_D = -500\ N$

[illegible]: $\Sigma F_x = 0 \longrightarrow E_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y + E_y = 600 \ (I)$

$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow 1.2 E_y + M_E = 0 \ (II)$

(3) عضو : $\Sigma M_C = 0 \longrightarrow -R_D \times 0.5 + E_y \times 0.6 + E_x \times 0.8 + M_E = 0$

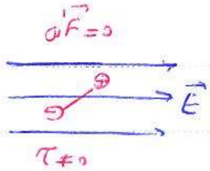
$\longrightarrow 250 + 0.6 E_y + M_E = 0 \ (III)$

حل سه معادله: $\begin{cases} E_y = 416.7\ N \\ A_y = 183.3\ N \\ M_E = -500\ N.m \end{cases}$

Subject 70
Date

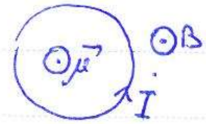
PAPCO

میدان مغناطیسی:



$$\begin{cases} \tau=\vec P\times\vec E \\ U<0 \longrightarrow P \\ U=-\vec P\cdot\vec E \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau=\vec\mu\times\vec B \\ U=-\vec\mu\cdot\vec B \end{cases} \qquad \vec\mu=Ni\vec A$$



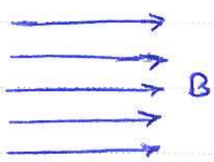
قاعده دست راست

$$U=\int \tau\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} NiAB\sin\theta\, d\theta=-\mu B\cos\theta \Longrightarrow \boxed{U=-\vec\mu\cdot\vec B}$$

$U<0$ →

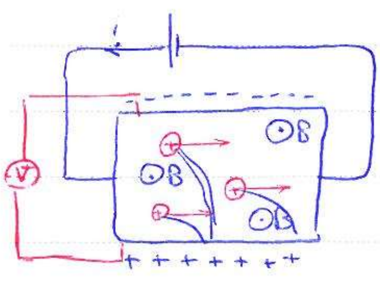
$U=0$ ↑

$U>0$ ←

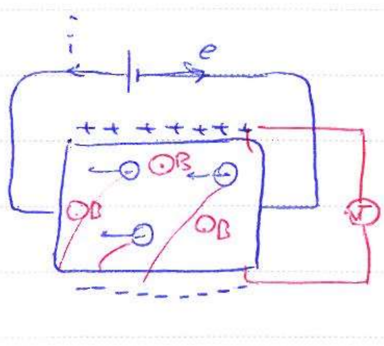


اثر هال:

یک نوار فلزی با عرض ثابت حامل جریان I است. این نوار را در میدان مغناطیسی عمود بر نوار قرار می‌دهیم.

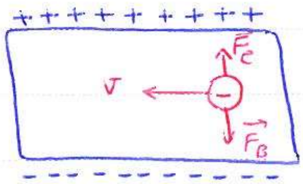


الف) نشان دادن حامل های بار مثبت: ✗



ب) حامل های بار منفی: ✓

⇐ آزمایش نشان داد که لبهٔ پایینی تجمع بار منفی است.



$$\vec F = q\vec E + q\,\vec v \times \vec B$$

$$\boxed{V_{xy} = \frac{iB}{neh}}$$

(ولتاژ عرضی نوار)

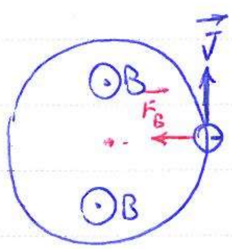
n: تعداد حامل های بار در واحد حجم

h: ضخامت نوار

i: جریان ، B: میدان مغناطیسی

e: بار الکترون

بارهای درحال دوران:

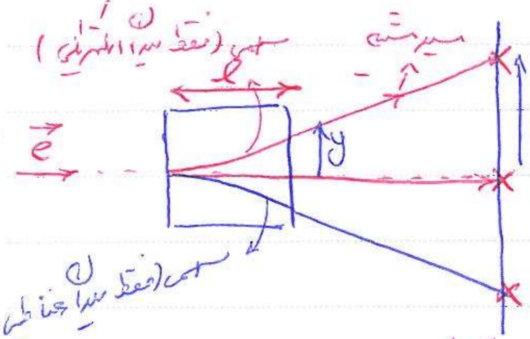


$\vec F_B$ عمود بر $\vec v$ (سرعت) است لذا نمی‌تواند باعث شتاب شود.

$$qvB = \frac{mv^2}{R} = mr\omega^2$$

فرکانس حرکت دایره ای در میدان مغناطیسی ثابت در سرعت های کم $\Leftarrow f = \frac{qB}{2\pi m}$

انحراف الکترون به کمک میدان الکتریکی و مغناطیسی (تامسون):



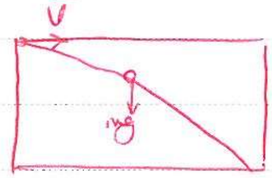
$\Leftarrow$ با حضور هر دو میدان دوباره نقطهٔ مرکزی (بدون حضور میدان ها) روشن شود.

$$\boxed{\frac{|q|}{m} = \frac{2yE}{B^2 l^2}}$$

E: میدان الکتریکی

B: میدان مغناطیسی

l: طول صفحات منحرف کننده



$x = vt$

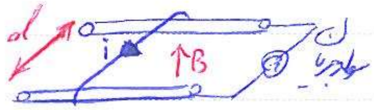
$y = -\frac{1}{2} g t^2$

$F = Eq \rightarrow mg = Eq$

$g = \frac{Eq}{m}$

مثال) یک سیم فلزی به جرم m مطابق شکل روی دو ریل افقی قرار گرفته است. (بدون اصطکاک) این ریل ها در میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت B قرار دارند. اگر در سیم همیشه جریان I برقرار باشد. سرعت سیم را پیدا کنید.
(برحسب زمان)

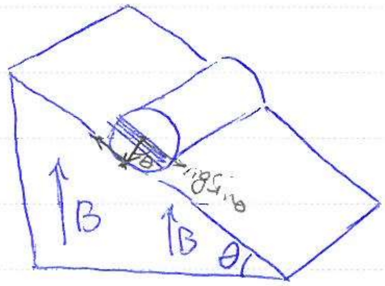
$$\vec F = i\vec l \times \vec B \longrightarrow |F| = iBd$$



سیم به سمت چپ حرکت می کند.

$$F = m.a \longrightarrow a = \frac{iBd}{m} \longrightarrow V = V_0 + at = \frac{iBd}{m}t$$

مثال) مانند شکل که دور سیم به دور استوانه ای به جرم m و طول l و شعاع R پیچیده شده است. حداقل جریان عبوری از سیم پیچ چقدر باشد تا استوانه پایین نلغزد.



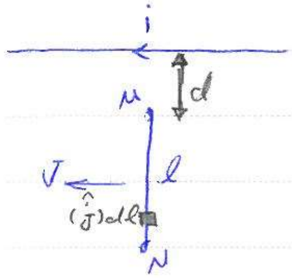
$$|\vec\tau_{mg}| = |\vec\tau_B| \Rightarrow \otimes\ \vec\tau_{mg} = mgR\sin\theta \quad (1)$$

$$|\vec\tau_B| = |\vec\mu\times\vec B| = NiAB\sin\theta \quad (2)$$

$$(A = 2Rl)$$

$$(1),(2) \Rightarrow i = \frac{mg}{2NlB}$$

مثال) اگر دامنه میدان مغناطیسی در اطراف یک سیم طولانی برابر است با $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$. در شکل زیر اگر سیم به طول l با سرعت V حرکت کند. چه نیروی محرکه ای در دو سر آن القا می شود.



در اثر حرکت نیروی میدان مغناطیسی به الکترون ها وارد می شود
الکترون ها در انتهای (N) سیم جمع می شوند تا زمانی که نیروی
لورنس صفر شود.

$$d\vec F = 0 \qquad q\vec E_H + q\vec V_d\times\vec B = 0$$

$$E_H = -\vec V_d\times\vec B$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat k$$

$$\vec E_H = (-V\hat i)\times\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\hat k\right) = \frac{\mu_0 i V}{2\pi y}\hat j \Rightarrow \Delta V = -\int_M^N \vec E.\vec{dl} = -\int \frac{\mu_0 i \vec V}{2\pi y}dy$$

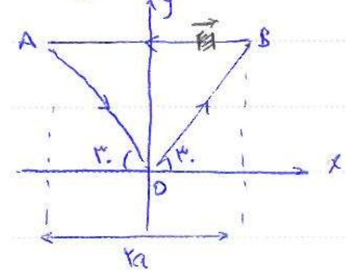
$$= -\frac{\mu_0 i V}{2\pi}\ln\left(\frac{d+l}{d}\right)$$

Subject 74
Date

۹۳

PAPCO

مثال امتحانی) میدان غیر یکنواخت $\vec{B} = y\hat{i} + x\hat{j}$ در صفحه xy مفروض است. اگر مثلث OAB در صفحه xy حامل جریان i مطابق شکل باشد نیروی وارد بر مثلث را حساب کنید.



$$\vec{F} = F_1 + F_2 + F_3$$

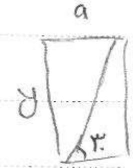
$$\vec{F}_{BA} = \int i\vec{dl} \times \vec{B}$$

$$i\vec{dl} = i(-dx)\hat{i}$$

$$F_{BA} = \int -idx\hat{i} \times (y\hat{i} + x\hat{j}) = -i\int_{-a}^{a} xdx\hat{k} = -i\frac{x^2}{2}\Big]_{-a}^{a}\hat{k} = \boxed{0}$$

$$\vec{F}_{OB} = \int i\vec{dl} \times \vec{B}$$

$$idl = i(dx\hat{i} + dy\hat{j}) \longrightarrow \vec{F}_{OB} = \int i(dx\hat{i} + dy\hat{j}) \times (y\hat{i} + x\hat{j}) = i\left\{\int_0^a xdx\hat{k} + \int_0^{a\tan 30 = \frac{a\sqrt{3}}{3}} ydy(-\hat{k})\right\}$$



$$= i\left\{\int_0^a xdx\hat{k} + \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{3}} ydy(-\hat{k})\right\} = i\left\{\frac{a^2}{2}\hat{k} + \frac{3a^2}{2\times 9}(-\hat{k})\right\} = i\left\{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}\right\}\hat{k} = \boxed{\frac{ia^2}{3}\hat{k}}$$

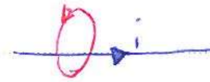
مثال) سیمی به طول l را چند دور حلقه بزنیم تا گشتاور max شود؟

محیط هر حلقه $= \frac{l}{N}$

شعاع حلقه $= \frac{l}{2\pi N} \longrightarrow A = \frac{l^2}{4\pi N^2} \longrightarrow \mu = NiA = \frac{il^2}{4\pi N} \rightsquigarrow \boxed{N = 1 \longrightarrow \mu_{max}}$

قانون آمپر و بیوساوار:

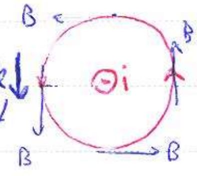
از یک سیم طولانی جریان i می‌گذرد.



$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i}$$

قانون آمپر

dl در جهت سیم

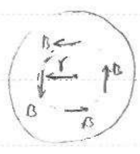


$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int B\,dl = B\int dl$$

$$= B(2\pi r) = \mu_0 i \longrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

مثال) میدان مغناطیسی در داخل سیم استوانه‌ای به شعاع R که حامل جریان یکنواخت i است را حساب کنید.



$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 i' \longrightarrow B\oint dl = \mu_0 i \longrightarrow B(2\pi r) = \mu_0 i$$

J ثابت یکنواخت هر مقطعی از سیم

$$J=J \longrightarrow \frac{i}{A} = \frac{i'}{A'} \longrightarrow \frac{i}{\pi R^2} = \frac{i'}{\pi r^2}$$

$$\longrightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} i \longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}}$$

مثال) استوانه شکل مقابل را به صورت توخالی در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی را در محدوده $a<r<b$ حساب کنید.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b^2-a^2)}\,\frac{r^2-a^2}{r}$$

قانون بیو و ساوار:

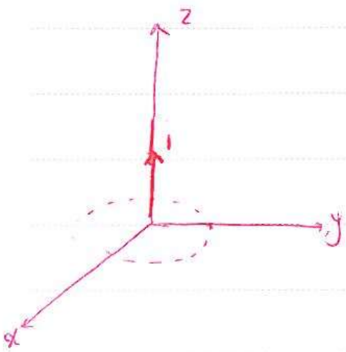
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,\vec{dl}\times(r-r')}{|r-r'|^3}$$

dl: المان طول

r: مکان محاسبه میدان

r': مکان المان جریان

خط نامتناهی با جریان i



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,dl\times(r-r')}{|r-r'|^3}$$

$$\begin{cases} i\vec{dl} = i\,dz\,\hat{k} \\ r = \rho\hat{\rho} \longrightarrow (r-r') = \rho\hat{\rho} - z\hat{k} \longrightarrow |r-r'|^3 = (\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \\ r' = z\hat{k} \end{cases}$$

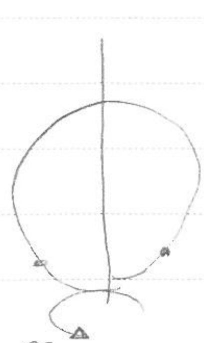
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,dz\,\hat{k}\times(\rho\hat{\rho}-z\hat{k}) \quad (1)}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \quad (2)}$$

$(1): i\,dz\,\hat{k}\times(\rho\hat{\rho}-z\hat{k}) = i\,dz\,(\rho\hat{\varphi})$

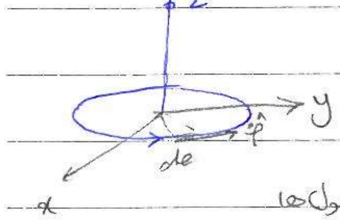
$$\longrightarrow B = \frac{\rho\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cancel{\rho}\,dz\,\hat{\varphi}}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \boxed{\frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\,\hat{\varphi}}$$

Subject

Date



مثال) یک حلقه به شعاع R حامل جریان i است. میدان مغناطیسی در فاصله z از مرکز حلقه و در راستای محور گذرنده از مرکز آن حساب کنید.



$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i\,d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

طول ها
$$\begin{cases} i\,d\vec{l}=iR\,d\varphi\,\hat{\varphi} \\ \vec{r}=z\hat{k} \\ \vec{r}\,'=R\hat{\rho} \end{cases}$$

$\cos\varphi\,\hat{i}+\sin\varphi\,\hat{j}$

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{iR\,d\varphi\times(z\hat{k}-R\hat{\rho})}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 iR}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{z\,d\varphi\,\hat{\rho}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}+\int_0^{2\pi}\frac{R\,d\varphi\,\hat{k}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_0 iR^2}{2(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}}$$

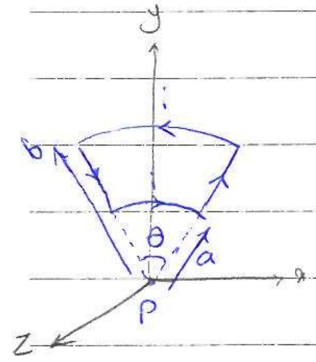
پس به خاطر تقارن مولفه های افقی میدان هر المان با المان قرینه اش برابر است و لذا فقط مولفه های عمودی میدان داریم.

$$\Rightarrow\begin{cases} \text{حالت مرکزی}: z=0 \longrightarrow \vec{B}=\dfrac{\mu_0 i}{2R}\hat{k} \\ z\gg R \longrightarrow \vec{B}=\dfrac{\mu_0 iR^2}{2z^3}=\dfrac{\mu_0 i\pi R^2}{2\pi z^3}\longrightarrow \vec{B}=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{\vec{\mu}}{z^3} \end{cases}$$

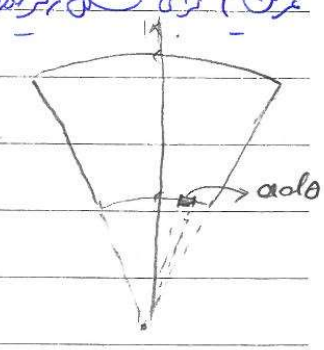
$A=\pi r^2,\ \mu=NiA=i\pi R^2$

$\vec{\mu}$ ← شبیه دوقطبی مغناطیسی حلقه

تمرین) برای شکل زیر میدان را در نقطه P حساب کنید.



$$\begin{cases} i\,d\vec{l}=ia\,d\varphi(-\hat{\varphi}) \\ r=0 \\ r'=a\hat{\rho} \end{cases}$$

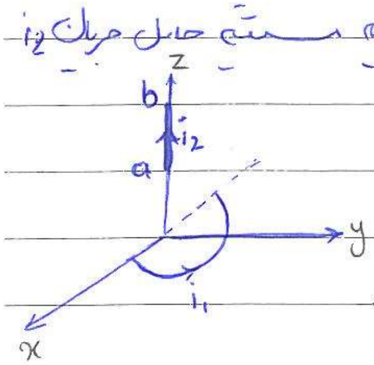


$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i\,d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|r-r'|^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}}\frac{ia\,d\varphi(-\hat{\varphi})\times(-a\hat{\rho})}{a^3}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi a}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}}d\varphi(-\hat{k})=\frac{\mu_0 i}{4\pi a}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\hat{k}=\boxed{\frac{\mu_0 i\theta}{4\pi a}(-\hat{k})}$$

Year. Month. Day. Subject.

مثال) نیروی مغناطیسی ناشی از یک نیم حلقه دایروی که حامل جریان i_1 است بر سیم مستقیم حامل جریان i_2 (مطابق شکل) را حساب کنید.



$\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi}\left\{\int_0^{\pi}\frac{z\,d\varphi\,\hat{\rho}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\pi}\frac{R\,d\varphi\,\hat{k}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 i R}{4\pi}\left\{\frac{2z\hat{j}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{R\pi\hat{k}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

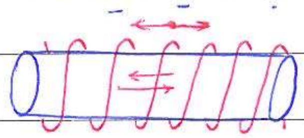
$$F = \int_a^b i\,d\vec{l}\times\vec{B} = \int_a^b i_2\,dz\,\hat{k}\times\frac{\mu_0 i R}{4\pi}\left\{\frac{2z\hat{j}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{R\pi\hat{k}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$i\,dl = i_2\,dz\,\hat{k}$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\int_a^b\frac{z\,dz\,(-\hat{i})}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\left\{\frac{-1}{\sqrt{R^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right\}(-\hat{i})$$

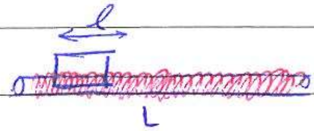
سیملوله:

اگر به صورت فشرده تعداد زیادی دور از یک سیم را پشت سر هم بپیچیم و جریانی از آن عبور کند، یک سیملوله ساخته‌ایم.



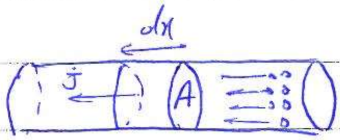
$$\boxed{|\vec{B}| = \mu_0 n i}$$

اگر سیملوله ایده‌آل باشد، سیم‌ها به صورت فشرده دور آن پیچیده شده و طول آن در مقایسه با عرض آن خیلی زیاد باشد.



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i \longrightarrow Bl = \mu_0 N i \longrightarrow B = \mu_0\frac{N}{l}i \longrightarrow B = \mu_0 n i$$

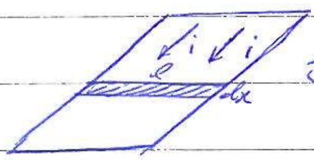
قانون بیوساوار:



$$i = \int \vec{J} \cdot \vec{ds}$$

سرعت

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho dv}{dt} = \frac{\rho A dx}{dt} = \rho A \vec{v} \Longrightarrow \boxed{\vec{J} = \rho \vec{v}}$$



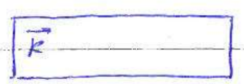
K چگالی جریان سطحی

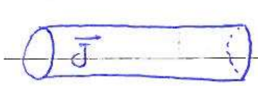
K برای تمامی سطوح ثابت و متغیر است

$$i = \int K\, dl = Kl \qquad i = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma dA}{dt} = \frac{\sigma l dx}{dt} = \sigma l \vec{v}$$

$$\boxed{K = \sigma \vec{v}}$$

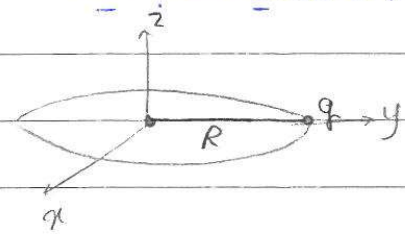

برای یک سیم حامل جریان: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ $\boxed{i\vec{dl} = q\vec{v}}$


یک صفحه نازک حامل جریان: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} \cdot ds \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ $\boxed{K = \sigma \vec{v}}$


یک حجم حامل جریان: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J \cdot dv \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ $\boxed{\vec{J} = \rho \vec{v}}$

Year. Month. Day. Subject.

مثال) یک الکترون در مسار دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد. میدان مغناطیسی آن را در مرکز دایره حساب کنید.



راه حل الف)

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\begin{cases}\vec{r}=0\\ \vec{r}\,'=R\hat{\rho}\\ \vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\omega\hat{k}\times R\hat{\rho}=R\omega\hat{\varphi}\end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qR\omega\hat{\varphi}\times(-R\hat{\rho})}{R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\omega}{R}\hat{k}\rightarrow \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 q\omega}{4\pi R}\hat{k}}$$

راه حل ب) بار در حال دوران مشابه یک حلقه با جریان i است: $\vec{B}=\frac{\mu_0 i}{2R}\hat{k}$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\qquad i=\frac{dq}{dt}=\frac{q}{T}=\frac{q\omega}{2\pi}\longrightarrow \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 q\omega}{4\pi R}\hat{k}}$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی:

راه حل ج) جهت ⇐ قاعده دست راست

$$\vec{\mu}=NiA \rightsquigarrow \vec{\mu}=i\pi R^2\hat{k}$$

$$\vec{\mu}=\frac{q\omega}{2\pi}\pi R^2\hat{k}=\frac{q\omega R^2}{2}\hat{k}$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی بار در حال دوران

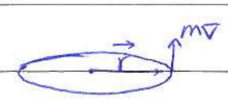
$$\boxed{\vec{\mu}=\frac{q}{2m}\vec{L}}$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی

جرم

اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=R\hat{\rho}\times mv\hat{\varphi}$$
$$=Rmv\hat{k}=R^2m\omega\hat{k}$$

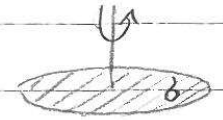


$$\longrightarrow \vec{\mu}=\frac{q}{2m}R^2m\omega\hat{k}\Rightarrow \boxed{\mu=\frac{qR^2\omega}{2}\hat{k}}$$

iman

Year. Month. Day. Subject.

مثال) یک قرص دایره‌ای به شعاع R حامل چگالی بار سطحی σ است. با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری گذرنده از مرکز آن و عمود بر قرص در حال دوران است. مطلوب است:



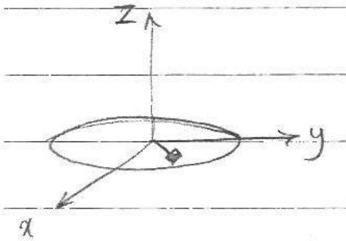
الف)

الف) میدان مغناطیسی در مرکز قرص:

ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی.

راه حل اول

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{K}ds\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\qquad K=\sigma V\longrightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\sigma\vec{V}ds\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$



$$\begin{cases}\vec{r}=0\\ \vec{r}'=\rho\hat{\rho}\\ ds=\rho d\rho d\varphi\\ \vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}'=\omega\hat{k}\times\rho\hat{\rho}=\rho\omega\hat{\varphi}\end{cases}$$

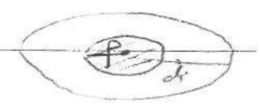
$$\longrightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\sigma\rho\omega\hat{\varphi}\,\rho d\rho d\varphi\times(-\rho\hat{\rho})}{\rho^3}\longrightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}d\rho\, d\varphi\,\hat{k}$$

$$\boxed{=\frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi}R(2\pi)\hat{k}=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}\hat{k}}$$

راه حل دوم

$$B_{\text{حلقه}}=\frac{\mu_0 i}{2R}\hat{k}$$

$$\vec{B}=\sum_{\text{حلقه‌ها}}\vec{B}_i\xrightarrow{\text{پیوسته}}B=\int_{\text{حلقه‌ها}}dB\longrightarrow dB=\frac{\mu_0 di}{2\rho}\hat{k}$$



$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{\sigma dA}{dt}=\frac{\sigma\rho d\rho d\varphi}{dt}\xrightarrow{\omega} i=\sigma\rho d\rho\omega=\int_0^R\sigma\rho\omega d\varphi=\int_0^R di$$

$$\boxed{B_{\text{مرکز}}=\int dB=\int_0^R\frac{\mu_0}{2\rho}\sigma\rho\omega d\rho\hat{k}=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}\hat{k}}$$

تمرین) همین سؤال در z.

ب) راه حل اول

$\vec{\mu} = NiA = \int d\vec{\mu}$

$\vec{\mu} = NiA = i\pi R^2 \hat{k} \rightsquigarrow d\mu = di\, \pi\rho^2 \hat{k} = \pi\rho^2 \sigma \rho\omega\, d\rho\, \hat{k}$

$$\boxed{\vec{\mu} = \int_0^R \pi \rho^3 \sigma\omega\, d\rho\, \hat{k} = \frac{\sigma\pi\omega R^4}{4}\hat{k}}$$

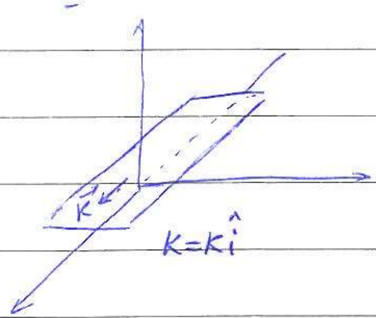
راه حل دوم $\vec{\mu} = \vec{L}\frac{q}{2m}$

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

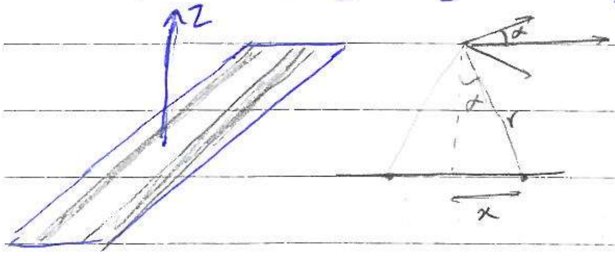
$|\vec{L}| = I\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega\hat{k} \rightsquigarrow \vec{\mu} = \frac{1}{2}mR^2\omega\frac{q}{2m}\hat{k}$ که $q = \sigma A = \sigma\pi R^2$

$$\boxed{= \frac{qR^2\omega}{4} k = \frac{\sigma\pi R^4\omega}{4}\hat{k}}$$

مثال) یک صفحه‌ی بی‌نهایت حامل چگالی جریان $\hat{k}$ است. میدان مغناطیسی را در فاصله‌ی z از صفحه با تقریب حساب کنید.



مثال) تسمه‌ای نازک (با ضخامت ناچیز) به پهنای a حامل جریان i است. میدان مغناطیسی را در فاصله‌ی Z به فاصله‌ی عمودی از خط مرکز تسمه بدست آورید.



$$|B| = 2\int dB \cos\alpha = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{r}\cos\alpha$$

$$= \left\{ \frac{\mu_0 i R}{2\pi a} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{R^2+x^2} \right\} \times 2$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \tan^{-1}\frac{a}{2R}$$

$$\xrightarrow[\tan^{-1}x = x]{R \gg a} |\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

تمرین) دو سیم به فاصله‌ی طولانی از هم قرار دارند به فاصله‌ی d. نشان دهید اگر جریان دو سیم i و 2i باشد نیروی وارد بر هر کدام از سیم‌ها از طرف دیگری با هم برابر است.

86

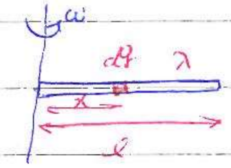
Year. Month. Day.

Subject.

iman

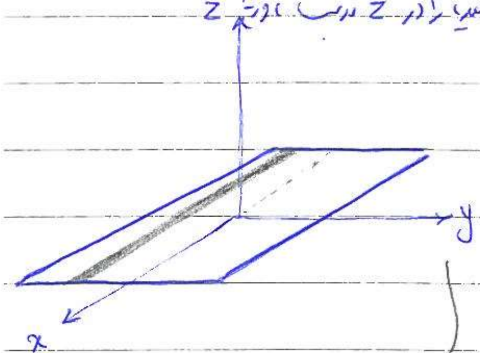
Year. Month. Day. Subject. فیزیک ۲

مثال) یک میله به طول l و چگالی بار λ حول محور عمود بر میله (مطابق شکل) با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. B در مرکز دوران چقدر است؟



$$\vec{B}=\int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq\,\vec{v}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad |\vec{v}|=x\omega$$

مثال) یک صفحه‌ی بی‌نهایت در صفحه‌ی xy حامل جریان $\vec{K}=K\hat{i}$ است. میدان را در z مثبت بیابید. z



$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{K}ds\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad d_i=\frac{dx_i}{a}$$

$$\begin{cases} ds=dx\,dy \\ \vec{K}=K\hat{i} \\ \vec{r}=z\hat{k} \\ \vec{r}'=x\hat{i}+y\hat{j} \end{cases} \Rightarrow B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{K\,dx\,dy\,\hat{i}\times(z\hat{k}-x\hat{i}-y\hat{j})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{K\,dx\,dy\,(-z\hat{j}-y\hat{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 K}{4\pi}\left\{\int\frac{z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\hat{j})-\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(\hat{k})}^{\,0}\right\}$$

تابع فرد نسبت به y

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 K z}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\hat{j})$$

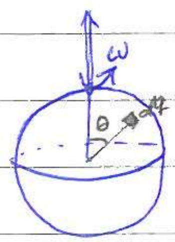
(در مختصات قطبی (استوانه‌ای)): $\vec{B}=\frac{\mu_0 K z}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\hat{j})=\frac{\mu_0 K z}{2}\int_0^{\infty}\frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-\hat{j})$

$$=\frac{\mu_0 K z}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\Big]_0^{\infty}\right)\longrightarrow \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 K}{2}(-\hat{j})}$$

iman

$$|B| = \frac{\mu_0 i z}{\pi a} \int_0^{a/r} \frac{dx}{(z^2 + x^2)}$$

Year. Month. Day. Subject.



مثال) یک کره با چگالی ρ و شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. مطلوب است:

الف) میدان مغناطیسی در مرکز کره.

ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی کره.

الف) دستگاه مختصات به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

بیو ساوار $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}\, \overset{\text{حجم}}{dv} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

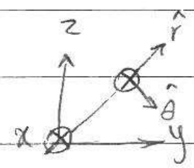
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho \vec{v}\, dv\, (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = 0 \\ r' = r\hat{r} \\ \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times r\hat{r} = \omega \hat{k} \times (\sin\theta \cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \sin\theta \hat{j} + \cos\theta\hat{k}) \end{cases}$$

$$= r\omega(\sin\theta \cos\varphi \hat{j} - \sin\theta \sin\varphi \hat{i})$$

$$= r\omega \sin\theta(-\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j})$$

$$= r\omega \sin\theta(\hat{\varphi})$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho r\omega \sin\theta\, \hat{\varphi} \times (-r\hat{r})}{r^3} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{\mu_0 \rho\omega}{4\pi} \iiint r \sin^2\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, (-\hat{\theta})$$

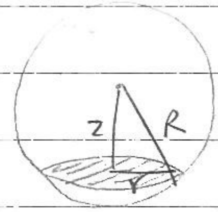
$$= \frac{\mu_0 \rho\omega}{4\pi} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin^2\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, (\cancel{-\cos\theta \cos\varphi \hat{i}} \cancel{- \cos\theta \cos\varphi \hat{j}} + \sin\theta \hat{k})$$

$$= \frac{\mu_0 \rho\omega}{2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin^3\theta\, dr\, d\theta\, \hat{k} = \frac{\mu_0 \rho\omega}{4} R^2 \left\{ -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^\pi \Big\} \hat{k}$$

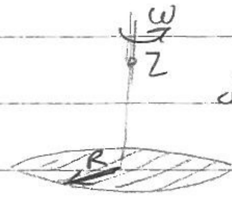
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega \rho R^2}{3} \hat{k}$$

89

~~ادامه درس دوم~~



$$\vec{B} = \int dB \longleftarrow \sum_{\text{دیسک‌ها}} B_{1} = \text{میدان مغناطیسی کره}$$



$$d\vec{B}_{\text{دیسک}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left\{ \frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z \right\} \hat{k}$$

$\rho \longleftarrow$ کره $\qquad \sigma \xleftarrow{\text{وابسته}}$ میدان دیسک

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sigma dz \longrightarrow \frac{q\ell}{A} \neq \frac{q}{\ell} \\ \boxed{\rho dz = \sigma} \longrightarrow \frac{q}{V}\ell = \frac{q}{A} \end{array} \right.$$

$$q = \rho V = \rho A dz \Longrightarrow \vec{B} = \int_0^R \frac{\mu_0 \omega \rho dz}{2} \left\{ \frac{R^2+z^2}{R} - 2z \right\} \times 2\hat{k} \qquad r^2+z^2 = R^2$$

$$= \mu_0 \omega \rho \left\{ \int_0^R \left(R + \frac{z^2}{R} - 2z\right) dz \,\hat{k} \right.$$

$$= \mu_0 \omega \rho \left\{ R^2 + \frac{R^2}{3} - R^2 \right\} = \boxed{\frac{\mu_0 \omega \rho R^2}{3} \hat{k}}$$

90

Year. Month. Day. Subject.

iman

91

Year. Month. Day. Subject. «فیزیک ۲ - ۹۳/۲/۱۶»

حل تمرین ب

روش ۱

ممان دو قطبی مغناطیسی:

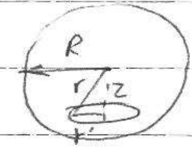
$$\vec{L} = I\omega\hat{k} = \frac{2}{5}mR^2\omega\hat{k} = \frac{q}{2m}\frac{2}{5}mR^2\omega\hat{k}$$

$$\longrightarrow q = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \longrightarrow \mu = \frac{\rho}{5}\frac{4}{3}\pi R^5\omega\hat{k} = \frac{4}{15}\rho\pi\omega R^5\hat{k}$$

روش ۲

$$\vec{\mu} = \int d\vec{\mu}$$

ممان دو قطبی حلقه‌ها



$$\vec{\mu} = iA = i\pi r'^2$$

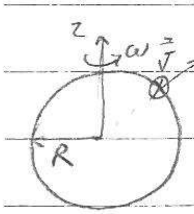
$$\vec{\mu} = \int d\mu = \int \pi r'^2 di \longrightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\rho dv}{dt} = \rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta \boxed{\frac{d\varphi}{dt}} \to \omega$$

$$\vec{\mu} = \int \pi r'^2 \omega \rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, \hat{k} \qquad \begin{cases} z = r\cos\theta \\ r'^2 = r^2 - z^2 = r^2\sin^2\theta \end{cases}$$

$$= \int_0^R\int_0^\pi \pi r^4 \sin^3\theta\, \omega\rho\, dr\, d\theta\, \hat{k}$$

$$= \pi\omega\frac{R^5}{5}\frac{4}{3}\hat{k} = \frac{4}{15}\rho\pi\omega R^5\hat{k}$$

پوسته کروی با چگالی بار سطحی σ:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{K}ds\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\sigma\vec{V}ds\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3}$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ r' = R\hat{r} \\ \vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r} = R\omega\sin\theta\hat{\varphi} \end{cases} \longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\sigma R\omega\sin\theta\hat{\varphi}\times(-R\hat{r})R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{R^3}$$

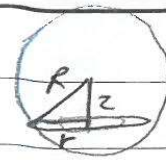
$$= \frac{\mu_0 R\omega\sigma}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi(-\hat{\theta}) = \frac{\mu_0 R\omega\sigma}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\left(\cancel{-\cos\theta\cos\varphi\hat{i}} \cancel{-\cos\theta\sin\varphi\hat{j}} + \sin\theta\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 R\omega\sigma}{2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta\, \hat{k} = \boxed{\frac{2}{3}\mu_0 R\omega\sigma\hat{k}}$$

iman

Year. Month. Day. Subject.

~~روش حلقه‌ها~~ $\vec{B} = \int dB$ حلقه‌ها



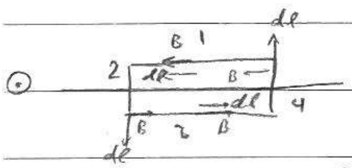
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\int \frac{r^2 di}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

$$di = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma dA}{dt} = \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \boxed{\overset{\omega}{\frac{d\varphi}{dt}}} = \frac{\mu_0}{2}\int \frac{\omega r^2 \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta}{R^3}\hat{k}$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2}\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \, \hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{2\mu_0 \omega \sigma R}{3}\hat{k}}$$

کره دوار / صفحه / حلقه‌ی دوار / حلقه دوار

مثال) یک صفحه‌ی بی‌نهایت (واقع در صفحه‌ی xy) میدان مغناطیسی در فاصله‌ی z را حساب کنید.



$$\oint B \cdot dl = \mu_0 i$$

$$\int_1 B \cdot dl + \cancel{\int_2} + \int_3 + \cancel{\int_4} \Rightarrow \oint B \cdot dl = 2BL = \mu_0 K L$$

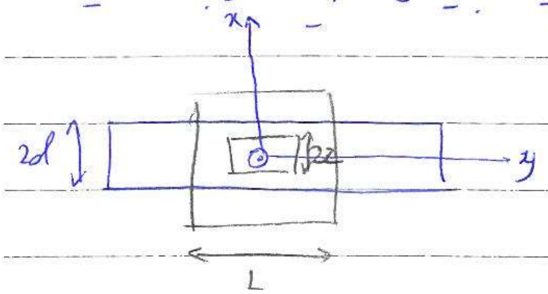
عمودند

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2}(-\hat{j}) \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2}(\hat{j})$$

Year. Month. Day. Subject.

مثال) یک تیغه‌ی بی‌نهایت در صفحه‌ی xy با ضخامت 2d حامل چگالی جریان $\vec{J}$ دارد. مطلوب است میدان



در داخل و خارج تیغه

$\oint B \cdot dl = \mu_0 I_{in}$

$B(2L) = \mu_0 J(2dL)$

$\begin{cases} B = \mu_0 J d(-\hat{j}) & \text{بالای تیغه} \\ B = \mu_0 J d(\hat{j}) & \text{پایین تیغه} \end{cases}$

داخل تیغه $\Rightarrow$ $\oint B \cdot dl = \mu_0 I_{in}$

$2BL = \mu_0 J(2Z L)$

$\vec{B} = \mu_0 JZ(-\hat{j})$

iman

94

Year. Month. Day. Subject.

iman

القای مغناطیسی:

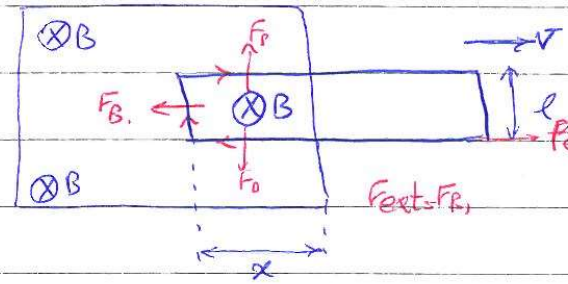
هرگاه شار میدان مغناطیسی عبوری از یک حلقه یا مسیر بسته تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در مسیر القا می‌شود که جریان القایی در مسیر بوجود می‌آید.

$$\boxed{\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}} \qquad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot \vec{ds}$$

قانون لنز:

جهت جریان القایی به گونه‌ای است که با تغییر شار مخالفت می‌کند که اگر شار زیاد شود جریان القایی به گونه‌ای است که میدان را کاهش دهد و برعکس.

مثال) حلقه‌ای مطابق شکل درون میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت قرار دارد. حلقه را با سرعت $\vec{V}$ می‌کشیم. جریان القایی چقدر است؟



$$\Phi = \int \vec{B}\cdot\vec{ds} = BA = B(\ell x)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell\left(\frac{dx}{dt}\right) = -B\ell(-V) = \boxed{B\ell V}$$

میله به طول ℓ با سرعت $\vec{V}$ ← $\boxed{\mathcal{E} = B\ell V}$

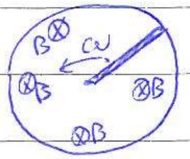
← برای سرعت ثابت ← نیروی خارجی مساوی با F_B احتیاج داریم:

توان خارجی: $P = FV = i\ell BV = \frac{B\ell V}{R}\ell BV = \frac{B\ell^2 V^2}{R}$

توان مصرفی در مقاومت به صورت گرما: $P = RI^2 = R\frac{B^2\ell^2V^2}{R^2} = \frac{B\ell^2 V}{R}$

Year. Month. Day. Subject.

مثال) میله‌ای فلزی به طول l مطابق شکل در یک میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد.
نیروی محرکهٔ القائی دو سر میله چقدر است؟



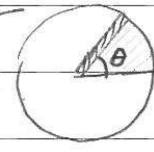
راه اول

سرعت dl ، $\vec{V}$

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int B V dl$$

$$\mathcal{E} = \int_0^l B l \omega \, dl = \frac{B\omega l^2}{2}$$

راه دوم



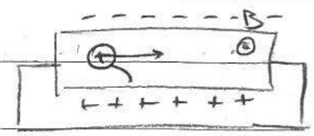
$$\varphi_B = B \frac{1}{2} l^2 \theta$$

$$\mathcal{E} = \frac{-d\varphi_B}{dt} = \frac{1}{2} B l^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} B l^2 \omega$$

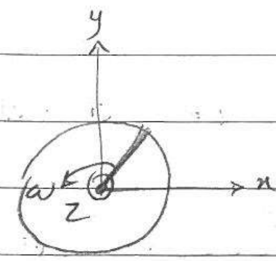
راه سوم

$$F_{کل} = F_E + F_B = 0 \longrightarrow q\vec{E} + q(\vec{V} \times \vec{B}) = 0 \longrightarrow \boxed{E = -\vec{V} \times \vec{B}}$$



$$E = -\vec{V} \times \vec{B}$$

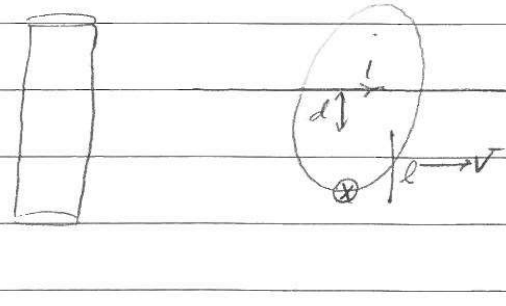
$$E = -\rho\omega \hat{\varphi} \times B(-\hat{k}) = B\rho\omega\hat{\rho}$$



$$\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_0^l B\rho\omega \, d\rho = \frac{B\omega l^2}{2}$$

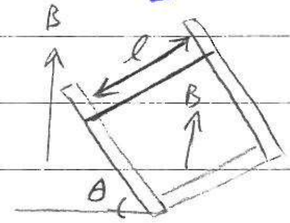
مثال) یک سیم به طول ∞ حامل جریان i است. یک سیم به طول l به فاصلهٔ d و موازی سیم با سرعت $\vec{V}$
حرکت می‌کند.

$$\mathcal{E} = \int B \, dl \, V = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}$$



$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 i V}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

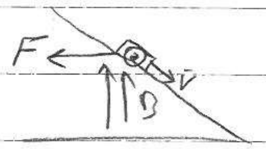
مثال) سیم مطابق شکل بر روی دو ریل قرار گرفته است. سرعت حدی آن را بدست آورید.
ریل ها رسانا و بدون اصطکاک هستند. (جرم سیم m و مقاومت R و طول l)



$B=0$

$$\begin{cases} mg\cos\theta = N \\ mg\sin\theta = ma \end{cases} \longrightarrow a = g\sin\theta$$

$$V = V_0 + at \longrightarrow V = (g\sin\theta)t$$



$\vec{V}$ به سمت پایین
جریان القایی $\longleftarrow \varphi\downarrow$
$B \longleftarrow$ هم جهت با B اصلی

$$F_B = IlB$$

$$B \neq 0 \qquad mg\sin\theta - F_B\cos\theta = ma \longrightarrow mg\sin\theta - ilB\cos\theta = ma$$

$$\boxed{i_{\text{القایی}} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bl\vec{v}}{R}\cos\theta}$$

مولفه ای از $\vec{v}$ که عمود در میدان مغناطیسی است

$$mg\sin\theta - \left(\frac{Bl\vec{v}}{R}\right) lB\cos^2\theta = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\int \longrightarrow \left(1 - \frac{B^2l^2\cos^2\theta}{mgR\sin\theta}\vec{V}\right) = e^{-\frac{B^2l^2\cos^2\theta}{mR}t}$$

$t=0 \longrightarrow V_0$

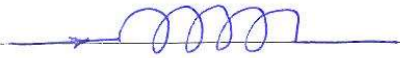
$t \to \infty \longrightarrow V = \dfrac{mRg\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}$

اگر جهت B را عکس کنیم دوباره همین سرعت حد را می رسیم.

القاء ذاتی :

یک سیم‌پیچ ایده‌آل را درنظر بگیرید.

به علت قانون آمپر $\rightarrow B=\mu n i$



$t=0 \rightarrow i=0$
$t\neq 0 \rightarrow i\neq 0$ $\Big\} \Rightarrow \uparrow i \rightarrow \uparrow B \Rightarrow \uparrow \varphi \longrightarrow \Big\{$ حلقه‌های سیم‌پیچ به دلیل افزایش شار عبوری از آن‌ها جریان القایی خواهند داشت که با القای اولیه مخالفت می‌کند.

تجربه نشان داده است که $N\Phi_B$ با جریان متناسب است.

$N\Phi_B = L i$

این ضریب ثابت را خودالقایی می‌نامند.

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{-N\,d\varphi}{dt} = -L\frac{di}{dt}}$$

واحد هانری (یک ولت در ثانیه بر آمپر)

نکته) L در مدارها عنصری نقشی مشابه C در مدار الکتریکی دارد و مستقل از $N\Phi_B$ و i است.

محاسبه L برای یک سیم‌پیچ ایده‌آل به طول l و سطح مقطع A :

$N\Phi_B = L i$

$\int \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int B\,ds \xrightarrow{\text{شار در همه نقاط یکسان است}} \varphi = B\int ds = \mu n i A$

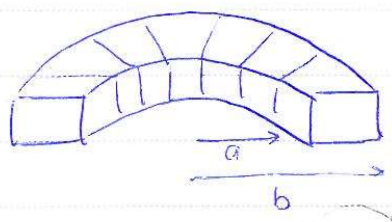
$N\Phi_B = N\mu n i A = n^2 \mu i A l = L i$

القایندگی یک سیم‌پیچ $\rightarrow$ $\boxed{L = \mu_0 n^2 A l}$

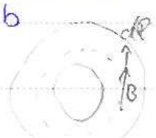
راه دوم $u=\frac{1}{2}Li^2$ ① $\quad u=\int\limits_{\text{فضا}} u\,dv=\int\limits_{\text{داخل}} u\,dv$ زیرا u_{out} برابر صفر است.

$$\int \frac{1}{2\mu_0}B^2 dv=\int \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 n i)^2 dv=\frac{\mu_0 n^2 i}{2}\int dv=\frac{\mu_0}{2}n^2 i^2 A\ell \quad ②$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} u=\frac{1}{2}Li^2 \longrightarrow \frac{\mu_0}{2}n^2 i^2 A\ell=\frac{1}{2}Li^2 \longrightarrow \boxed{L=\mu_0 n^2 A\ell}$$



مثال) سلف این چنبره را حساب کنید ← با سطح مقطع دایره (خرده مزاری)

راه اول 

مسیر آمپری

$$\oint B\cdot dl=\int B\,dl=B\int dl \Rightarrow B(2\pi r)=\mu_0 N i \longrightarrow B=\frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

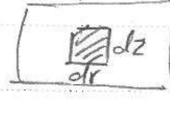
$$\varphi=\int \vec{B}\cdot\vec{ds}=\int B\,ds=\int \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}\,dr\,dz=\frac{\mu_0 N h i}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 N i h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\longrightarrow L=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

راه دوم $\quad u=\frac{1}{2}Li^2 \quad (1)$

$$u=\int u\,dv=\int \frac{1}{2\mu_0}B^2 dv=\frac{1}{2\mu_0}\int \frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{4\pi^2 r^2}\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$=\frac{\mu_0 N^2 i^2 h}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 N^2 i^2 h}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (2)$$



$$\xrightarrow{(1),(2)} L=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

/281 / 278 / 277 / 275 / 272 / 271 / 267 / 263 / 260 / 259 / 249 / 294
286 / مسائل القا شده

Subject ۱۰۰
Date

مثال) خود القائی یک سیم طویل به طول l را حساب کنید.

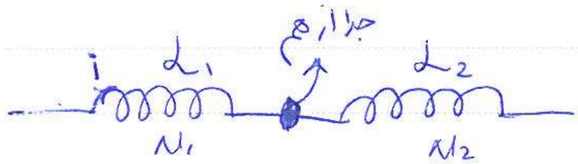
$$u = \frac{1}{2} L i^2 \quad (1)$$

$$U = \int u\,dv = \int \frac{1}{2\mu_0} B^2 dv = \int \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}\right)^2 r\,dr\,d\varphi\,dz = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 i^2}{4\pi^2 R^4}\right)(2\pi)(l)\int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{\mu_0 i l}{16\pi} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \boxed{L = \frac{\mu_0 l}{8\pi}}$$

القای متقابل :



دو سیم پیچ متقابل هم مرکز دارند:
وقتی جریان را وصل می کنیم هر دو به خاطر L_1 و L_2 جریان القائی ایجاد می کنند.
با افزایش i در سیم پیچ اول میدان B ناشی از سیم پیچ اول در سیم پیچ دوم شار افزایش می یابد

$$\boxed{M_{21} = \frac{N_2 \varphi_{21}}{i_1}}$$

شار گذرنده از سیم پیچ ۲ در اثر سیم پیچ شماره ۱

القای متقابل سیم پیچ شماره 2 که در اثر سیم پیچ شماره ۱ ایجاد شده است.

عامل ایجاد تغییر شار

⇐ M به موقعیت قرار گیری دو سیم پیچ بستگی دارد.

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt}}$$

نیروی محرکه القائی در سیم پیچ ۲