مجموعه فرمول ها و نکات کنکوری

معادلات دیفرانسیل

تالیف دکتر بهزاد خداکرمی

سامانه: ۱۰۰۰۱۰۰۰۹

وب سایت: www.kanoonarshad.com

ایمیل: B_khodakarami@yahoo.com

فصل ۱

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل معمولی

۱ ـ ۱ ـ تعاریف

معادله دیفرانسیل: هر معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد را معادله دیفرانسیل نامند. هرگاه یک متغیر مستقل داشته باشیم معادله دیفرانسیل را معمولی (عادی) و اگر دو یا چند متغیر مستقل داشته باشیم معادله دیفرانسیل را با مشتقات جزئی (پاره‌ای) می‌نامیم.

مرتبه: بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌نامیم. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به‌صورت زیر است:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = ۰$$

درجه: توان مشتق با بالاترین مرتبه را درجه معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

معادله خطی و غیرخطی: هر معادله دیفرانسیل معمولی اگر به صورت

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-۱}(x)y^{(n-۱)} + \cdots + a_۱(x)y' + a_۰(x)y = f(x)$$

باشد آن را یک معادله دیفرانسیل خطی می‌نامیم.

☼ **نکته:** اگر در معادله دیفرانسیلی توان‌های متغیر وابسته و مشتقاتش یا توابع غیرجبری برحسب متغیر وابسته یا مشتقاتش ظاهر شود آن معادله دیفرانسیل، غیرخطی است.

$f(x) = ۰ \Rightarrow$ معادله همگن است

$f(x) \neq ۰ \Rightarrow$ معادله ناهمگن است

☼ **نکته:** هر معادله دیفرانسیل خطی از درجه یک است.

جواب معادله: هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند، جواب معادله نامیده می‌شود.

جواب عمومی: جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل، جوابی است که شامل یک یا چند ثابت دلخواه بوده و اگر هر مقدار دلخواهی را به این ثابت‌ها نسبت دهیم، آن جواب در معادله موردنظر صدق نماید.

☼ **نکته:** جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه n ام شامل n ثابت دلخواه است.

شرایط اولیه: اگر تمام مقادیر تابع و مشتقات آن در یک نقطه خاص از متغیر مستقل بیان شده باشند، مسئله را با شرایط اولیه گوییم.

جواب خصوصی: اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه یا مرزی مسئله قرار دهیم و مقدار ثابت‌ها را تعیین کنیم، جواب خاص معادله به‌دست می‌آید.

جواب غیرعادی: جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل تابعی است که بر تمام منحنی‌های مربوط به جواب عمومی مماس می‌باشد. جواب غیرعادی را پوش منحنی نیز گویند.

☼ **نکته:** معادلات خطی جواب غیر عادی ندارند و هر معادله غیرخطی نیز الزاماً جواب غیرعادی ندارد.

۱ ـ ۲ ـ تشکیل معادله دیفرانسیل

دسته منحنی چندپارامتری: یک دسته‌ی منحنی یک پارامتری، معادله‌ای به صورت $f(x,y,c)=0$ است که در آن c یک ثابت دلخواه است و با مقدار دادن به آن، منحنی‌ها حاصل می‌شود.

در حالت کلی یک دسته منحنی n پارامتری دارای شکلی به صورت زیر است.

$$f(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$$

طرز تشکیل معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌ها: جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت یک دسته منحنی n پارامتری است. حال با داشتن یک دسته منحنی n پارامتری می‌خواهیم یک معادله دیفرانسیل بدست آوریم که جواب عمومی آن دسته منحنی مذکور باشد. برای این کار به تعداد ثابت‌های دلخواه به طور متوالی از معادله دسته منحنی نسبت به x مشتق می گیریم و ثابتها را بین معادله دسته منحنی و مشتقات آن حذف می کنیم تا معادله دیفرانسیل مربوطه حاصل شود.

☼ **نکته:**: اگر معادله دسته منحنی‌ها به صورت

$$y=c_1y(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

باشد از بسط دترمینان زیر می توان معادله دیفرانسیل دسته منحنی را تعیین نمود:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & \cdots & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

۱ ـ۳ـ تعیین مسیرهای متعامد

الف) مختصات دکارتی $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

$\frac{dy}{dx}\to-\frac{dx}{dy}\Rightarrow$ معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد

ب) مختصات قطبی

$\frac{rd\theta}{dr}\to-\frac{dr}{rd\theta}\Rightarrow$ معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد

از حل معادله دیفرانسیل فوق معادله مسیرهای متعامد بر دسته منحنی مفروض بدست می‌آید.

۱ـ ٤ـ پوش

پوش یک خانواده منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ منحنی مانند $y=f(x)$ است که بر همه اعضای خانواده منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ در یک نقطه مماس است.

برای تعیین پوش دسته منحنی‌های $f(x,y,c)=0$، c را بین دستگاه‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial c}(x,y,c)=0 \quad , \quad f(x,y,c)=0$ حذف می کنیم تا به پوش $y=f(x)$ برسیم.

☼ **نکته:** پوش یک جواب منفرد است.

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۲ـ۱ـ مقدمه

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را می توان به یکی از صورت‌های زیر نشان داد:

$$(۱)\qquad f(x,y,y')=۰$$

$$(۲)\qquad y'=f(x,y)$$

$$(۳)\qquad M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$$

۲ـ۲ـ حل معادلات جداشدنی

هرگاه بتوان یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را به صورت $f(y)dy=g(x)dx$ نوشت آن را معادله دیفرانسیل جداشدنی مـی نـامیم. بـرای حل چنین معادلاتی از طرفین معادله انتگرال می گیریم تا جواب عمومی حاصل شود

☼ **نکته: اگر** معادله به شکل $y'=f(ax+by+c)$ باشد با تغییر متغیر $u=ax+by+c$ به یک معادله جداشدنی تبدیل می‌شود.

☼ **نکته:** هر معادله به شکل $yf(xy)dx+xg(xy)dy=۰$ با تغییر متغیر $z=xy$ به یک معادله تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود.

۲ـ۳ـ حل معادلات همگن

تابع همگن: تابع دو متغیره $f(x,y)$ را همگن از درجه‌ی n می‌نامیم هرگاه به ازای $t>۰$ که $(tx,ty),(x,y)\in D_f$، داشته باشیم:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول را همگن نامیم هرگاه به یکی از دو حالت زیر باشد:

حالت اول: معادله به صورت $M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$ باشد که توابع M و N همگن از درجه یکسان باشند.

حالت دوم: معادله به صورت $y'=f(x,y)$ باشدکه $f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد.

در این‌صورت می‌توان معادله همگن $y'=f(x,y)$ به‌صورت زیر بیان کرد:

$$y'=g(\frac{y}{x})$$

برای حل معادلات دیفرانسیل همگن از تغییر متغیر $u=\frac{y}{x}$ استفاده می کنیم.

$$y=vx \quad\Rightarrow\quad y'=xv'+v$$

☼ **نکته:** معادله دیفرانسیل $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ را در نظر بگیرید.

الف) $\frac{b}{b'} \neq \frac{a}{a'}$: دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ متقاطع هستند.

اگر نقطه (α,β) محل تلاقی آن‌ها باشد آن‌گاه با تغییر متغیر $\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$ معادله به یک معادله همگن $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$ تبدیل می‌شود.

ب) اگر $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$: دو خط موازی هستند و با تغییر متغیر $u = ax+by$ معادله به یک معادله جداشدنی تبدیل می‌شود.

۲ـ٤ـ حل معادلات کامل

اگر توابع M و N و $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ توابعی پیوسته از x و y باشند آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل باشد آن است که: $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$.

روش اول:

باید تابعی مانند $f(x,y)=c$ را پیدا کنیم که
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M & (۱) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow f(x,y) = \int M dx + g(y) \qquad (۳) \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) + g'(y) \quad (۴)$$

$$(۲)\,,\,(۴) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) + g'(y) = N \Rightarrow g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right)$$

با انتگرال‌گیری از معادله فوق $g(y)$ و با جایگذاری در رابطه (۳)، $f(x,y)$ تعیین می شود

روش دوم: روش تستی

۱) تمام جملات شامل y را در M(x,y) حذف و از جملات باقیمانده آن نسبت به x انتگرال می گیریم.

۲) از تمام جملات N(x,y) نسبت به y انتگرال می گیریم.

۳) حاصل جمع انتگرال‌های مراحل قبل را برابر c قرار داده و همین جواب معادله خواهد بود.

☼ **نکته:** هر معادله دیفرانسیل جداشدنی کامل است.

۲ ـ ۵ـ عامل انتگرال‌ساز

فرض کنید معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد. هرگاه تابعی مانند $\mu(x,y) \neq 0$ موجود باشد به طوری که با ضرب کردن معادله در تابع μ یعنی $(\mu M)(x,y)dx + (\mu N)(x,y)dy = 0$ کامل شود در این صورت μ را عامل انتگرال‌ساز یا فاکتور انتگرال معادله گویند.

حالت های خاص:

۱) $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$ آن‌گاه μ تابعی از x است و $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$

۲) $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=g(y) \Rightarrow \mu(y)=e^{-\int g(y)dy}$

۳) $\frac{1}{yN-xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(xy) \Rightarrow \mu=e^{\int f(z)dz}, z=xy$

۴) $\frac{y^2}{xM+yN}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(\frac{x}{y}) \Rightarrow \mu=e^{\int f(z)dz}, z=\frac{x}{y}$

۵) $\frac{x^2}{xM+yN}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(\frac{y}{x}) \Rightarrow \mu=e^{-\int f(z)dz}, z=\frac{y}{x}$

۶) $\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x+y) \Rightarrow \mu=e^{\int f(z)dz}, z=x+y$

۷) $\frac{1}{2(xN-yM)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x^2+y^2) \Rightarrow \mu=e^{\int f(z)dz}, z=x^2+y^2$

☼ **نکته:** اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را بتوان به شکل

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$$

نوشت و $f(xy)\neq g(xy)$ آنگاه معادله یک عامل انتگرال‌ساز به صورت زیر دارد:

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM-yN}=\frac{1}{xy\left(f(xy)-g(xy)\right)}$$

☼ **نکته:** اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن باشد آن‌گاه دارای یک عامل انتگرال‌ساز به صورت زیر دارد:

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xM+yN} \quad , \quad xM+yN\neq 0$$

☼ **نکته:** هر معادله دیفرانسیل به صورت

$$x^m y^n(aydx+bxdy)+x^k y^s(\alpha ydx+\beta xdy)=0$$

که $a\beta-\alpha b\neq 0$ است دارای عامل انتگرال‌سازی به صورت $\mu=x^p y^q$ است که برای تعیین p و q باید μ را در معادله ضرب کرده و از شرط کامل بودن استفاده کنیم.

☼ **نکته:** اگر معادله دیفرانسیل جواب داشته باشد آن‌گاه بی‌نهایت عامل انتگرال‌ساز دارد.

☼ **نکته:** هر معادله دیفرانسیل خطی $a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$ دارای عامل انتگرال‌ساز $\mu(x)=\frac{1}{a_1(x)}\int\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx$ است.

۲ـ٦ـ حل معادله به کمک دیفرانسیل کامل

از روابط دیفرانسیلی زیر می توان در حل برخی از معادلات دیفرانسیل استفاده کرد:

۱) $xdy + ydx = d(xy)$

۲) $\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$

۳) $\frac{xdy + ydx}{xy} = d(\ln xy)$

۴) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

۵) $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$

۶) $\frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2} = d\left(\ln(x^2 + y^2)\right)$

۲ـ۷ـ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$y' + p(x)y = q(x)$$

جواب عمومی : $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + c\right)$

اگر معادله دیفرانسیل به صورت $x' + p(y)x = q(y)$ باشد داریم:

جواب عمومی : $x = e^{-\int p(y)dy}\left[\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy + c\right]$

☼ **نکته** : اگر $y_1(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $y' + p(x)y = q(x)$ باشد آن‌گاه جواب عمومی آن عبارت است از:

$$y = y_1(x) + ce^{-\int p(x)dx}$$

☼ **نکته** : شکل کلی یک معادله دیفرانسیل خطی به‌صورت زیر است:

$$f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x)$$

که با تغییر متغیر $u = f(y)$ به معادله مرتبه اول خطی شکل (۱) تبدیل خواهد شد:

$$u' + p(x)u = q(x)$$

۲ـ۸ـ معادلات برنولی

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad , \quad n \neq 0,1$$

معادله فوق معادله‌ی برنولی از درجه n است

برای حل این معادله از تغییر متغیر $u=y^{1-n}$ استفاده می کنیم و آنرا به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می کنیم:

$$u'+(1-n)p(x)u=q(x)$$

۲ـ۹ـ معادلات ریکاتی

$$y'+p(x)y=q(x)+r(x)y^2$$

هرگاه $y=y_1(x)$ یک جواب برای معادله بالا باشد، با تغییر متغیر

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{v(x)}$$

به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل می‌شود.

☼ **نکته:** اگر در معادله ریکاتی از تغییر متغیر $y=y_1+u$ استفاده کنیم آن‌گاه معادله به یک معادله برنولی تبدیل می‌شود

۲ـ۱۰ـ معادلات لاگرانژ

شکل کلی یک معادله لاگرانژ به‌صورت زیر است:

$$y=xf(y')+g(y')$$

که با فرض $y'=p$ و با مشتق گیری نسبت به x از طرفین معادله بالا با توجه به روند زیر به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل می‌شود:

$$y'=f(p)+\left[xf'(p)+g'(p)\right]\frac{dp}{dx},$$

$$p-f(p)=\left[xf'(p)+g'(p)\right]\frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dx}{dp}-\frac{f'(p)}{p-f(p)}\quad x=\frac{g'(p)}{p-f(p)}$$

۲ـ۱۱ـ معادله کلرو

$$y=xy'+f(y')$$

جواب عمومی: $y=cx+f(c)$

جواب منفرد: از حذف c در دستگاه $\begin{cases} y=cx+f(c) \\ 0=x+f'(c) \end{cases}$ تعیین می گردد.

۲ـ۱۲ ـ معادلات مرتبه اولی که نسبت به مشتق حل نمی‌شوند.

۲ـ۱۲ـ۱ ـ معادلات فاقد x

این نوع معادلات به شکل $f(y,y')=0$ هستند:

الف) $y'=g(y)$: در این حالت معادله جدایی‌پذیر است

ب) $y=g(y')$: در این حالت با فرض $y'=p$ داریم:

$$y=g(p) \Rightarrow dy=g'(p)dp \Rightarrow pdx=g'(p)dp \qquad (\frac{dy}{dx}=p)$$

$$\Rightarrow dx=\frac{g'(p)}{p}dp \Rightarrow x=\int \frac{g'(p)}{p}dp$$

از حل دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} y=g(p) \\ x=\int \dfrac{g'(p)}{p}dp \end{cases}$$

ج) اگر نتوان y و y' را برحسب هم بیان نمود:

$$y=\alpha(t) \quad , \quad y'=\beta(t)$$

$$dy=\alpha'(t)dt \quad , \quad \frac{dy}{dx}=\beta(t)$$

$$\Rightarrow \beta(t)dx=\alpha'(t)dt \Rightarrow dx=\frac{\alpha'(t)}{\beta(t)}dt \Rightarrow x=\int \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)}dt+c$$

از حل دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} y=\alpha(t) \\ x=\int \dfrac{\alpha'(t)}{\beta(t)}dt+c \end{cases}$$

۲ـ۱۲ـ۲ ـ معادلات فاقد y

این نوع معادلات به شکل $f(x,y')=0$ هستند:

الف) $y'=g(x)$: در این حالت معادله جدایی‌پذیر است.

ب) $x=g(y')$: در این‌حالت با فرض $y'=p$ داریم:

$$x=g(p)\Rightarrow dx=g'(p)dp \Rightarrow \frac{dy}{p}=g'(p)dp \qquad (\frac{dy}{dx}=p)$$

$$\Rightarrow dy=pg'(p)dp \Rightarrow y=\int pg'(p)dp+c$$

از حل دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} x=g(p) \\ y=\int pg'(p)dp+c \end{cases}$$

حالت سوم: اگر نتوان x و y' را برحسب هم بیان نمود:

$$x=\alpha(t)\ ,\ y'=\beta(t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\beta(t)\quad ,\ dx=\frac{dy}{\beta(t)}\quad \Rightarrow \frac{dy}{\beta(t)}=\alpha'(t)dt \ \Rightarrow dy=\beta(t)\alpha'(t)dt$$

$$\Rightarrow y=\int \beta(t)\alpha'(t)dt+c$$

از حل دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} x=\alpha(t) \\ y=\int \beta(t)\alpha'(t)dt+c \end{cases}$$

۲ـ۱۲ـ۳ـ معادلات فاقد متغیر x و y

هرگاه این نوع معادلات که به شکل $f(y')=0$ هستند دارای حداقل یک ریشه $y'=k$ باشند:

جواب عمومی : $f(\frac{y-c}{x})=0$

۲ـ۱۲ـ٤ـ معادلات به شکل $y=f(x,y')$

در این حالت با فرض $y'=p$ داریم:

$$y=f(x,p)$$

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

از حذف p در دستگاه معادلات زیر، جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} y = f(x,p) \\ p = \frac{\partial f}{\partial x} + (\frac{\partial f}{\partial p})\frac{dp}{dx} \end{cases}$$

اگر نتوان p را از دستگاه بالا حذف کرد، جواب به صورت پارامتری بالا بیان می‌شود.

۲ـ۱۲ـ۵ ـ معادلات به شکل $x = f(y, y')$

در این حالت با فرض $y' = p$ داریم:

$$x = f(y,p)$$

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + (\frac{\partial f}{\partial p})\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + (\frac{\partial f}{\partial p})\frac{dp}{dy} \quad , \quad (\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p})$$

از حذف p در دستگاه معادلات زیر، جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} x = f(y,p) \\ \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + (\frac{\partial f}{\partial p})\frac{dp}{dy} \end{cases}$$

اگر نتوان p را از دستگاه بالا حذف کرد، جواب به صورت پارامتری بالا بیان می‌شود.

۲ـ۱۳ ـ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از درجه n

معادله مرتبه اول ودرجه n زیر را در نظر می گیریم:

$$\alpha_n(x,y)(y')^n + \alpha_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + \alpha_0(x,y) = 0$$

اگر بتوان معادله فوق را به صورت $\big(y' - g_1(x,y)\big)\big(y' - g_2(x,y)\big)\cdots\big(y' - g_n(x,y)\big) = 0$ تجزیه نمود $F_i(x,y,c) = 0$ ها جواب هریک از معادلات دیفرانسیل $y' = g_i(x,y)$ و $1 \le i \le n$ خواهد بود در این صورت جواب معادله فوق عبارت است از:

$$F_1(x,y,c)F_2(x,y,c)\cdots\ F_n(x,y,c) = 0$$

فصل ۳

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

۳ـ۱ـ معادله مرتبه دوم خطی

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به صورت زیر نشان داده می شود:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$f(x) = 0 \Rightarrow$ معادله همگن

$f(x) = 0 \Rightarrow$ معادله ناهمگن

برای یک معادله همگن داریم:

۱- هرگاه y_1 یک جواب معادله باشد، در این‌صورت c_1y_1 نیز یک جواب برای این معادله است.

۲- هرگاه y_1 و y_2 جواب‌های معدله باشند، در این‌صورت ترکیب خطی این جواب‌ها یعنی $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز یک جواب برای این معادله است.

۳- اگر y_1 و y_2 در جواب مستقل خطی باشند یعنی y_1 ضریبی از y_2 نباشد، در این‌صورت $c_1y_1 + c_2y_2$ یک جواب عمومی معادله خواهد بود و با y_c یا y_h نشان می‌دهیم.

☼ **نکته**: دو تابع y_1 و y_2 که $y_2 \neq 0$، مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $\frac{y_1}{y_2}$ ثابت نباشد.

رونسکین توابع $(n-1)$ بار مشتق‌پذیر، $y_1, y_2, \dots, y_n$ عبارت است از:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

فرض می کنیم توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ بر بازه I، $(n-1)$ بار مشتق‌پذیر باشند:

الف) اگر W در هیچ نقطه‌ای از I صفر نشود آن‌گاه این توابع مستقل خطی هستند.

ب) اگر این توابع بر I وابسته خطی باشند، آن‌گاه W در هر نقطه از I برابر صفر است.

☼ **نکته**: ممکن است رونسکین توابع صفر باشد ولی توابع مستقل خطی باشند

برای یک معادله ناهمگن داریم:

۱) هرگاه $y_1(x)$ و $y_2(x),...,y_n(x)$ جواب‌های معادله باشند آن‌گاه هر ترکیب خطی از آن‌ها نیز جواب معادله هستند.

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

۲) اگر $y_h(x)$ جواب عمومی معادله همگن متناظر و $y_p(x)$ جواب خصوصی معادله غیرهمگن باشد آن‌گاه جواب عمومی معادله غیرهمگن عبارتست از: $y=y_h+y_p$

بنابراین حل یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن ابتدا باید یک جواب عمومی y_h برای قسمت همگن بدست آوریم و سپس یک جواب خصوصی y_p برای قسمت غیرهمگن تعیین کنیم مجموع دو جواب ($y=y_h+y_p$) جواب عمومی معادله غیرهمگن خواهد شد.

از مطالب ذکر شده می توان برای هر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n استفاده نمود.

۳ـ۲ـ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت

$$ay''+by'+cy=0$$

a, b, c مقادیر ثابتی هستند.

با فرض اینکه e^{mx} جواب معادله فوق باشد با جایگذاری در معادله داریم:

$$(am^2+bm+c)e^{mx}=0$$

با توجه به اینکه $e^{mx}\neq 0$:

معادله مشخصه : $m^2+am+b=0$

حالت اول: هردو ریشه حقیقی و متمایز به صورت m_1 و m_2 هستند.

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x} \quad \text{یا} \quad y=c_1\sinh m_1x+c_2\cosh m_2x$$

حالت دوم: هردو ریشه حقیقی و برابر باشند. $m_1=m_2=m$

$$y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$$

حالت سوم: هردو ریشه مختلط و به صورت $m_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ باشد.

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x) \quad \text{یا} \quad y=c_1e^{(\alpha+\beta i)x}+c_2e^{(\alpha-\beta i)x}$$

توجه : این سه حالت را می‌توان برای معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت از مرتبه n نیز تعمیم داد.

۳ـ۳ـ معادله اویلر

معادله دیفرانسیل اویلر مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$x^2y''+axy'+by=0$$

با تغییر متغیر $x=e^z$ یا $z=\ln x$ می توان معادله فوق را به یک معادله همگن با ضرایب ثابت تبدیل کرد:

$$y''+(a-1)y'+by=0$$

معادله مشخصه : $m^2+(a-1)m+b=0$

حالت اول: هردو ریشه حقیقی و متمایز به صورت m_1 و m_2 هستند.

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$$

حالت دوم: هردو ریشه حقیقی و برابر باشند. $m_1 = m_2 = m$

$$y = c_1 x^m + c_2 x^m \ln x$$

حالت سوم: هردو ریشه مختلط و به صورت $m_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ باشد.

$$y = x^\alpha \left[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right]$$

☼ **نکته:** شکل کلی معادله دیفرانسیل اویلر به صورت زیر است:

$$a_n (ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = R(x)$$

با تغییر متغیر $e^z = ax+b$ معادله فوق به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می شود.

۳ـ ٤ ـ تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن

برای تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن از روش های زیر استفاده می کنیم:

۱) روش ضرایب نامعین

۲) روش عملگرهای معکوس

۳) روش تغییر پارامترها

۳ـ٤ـ۱ ـ روش ضرایب نامعین

از این روش برای معادلات دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت استفاده می شود:

$$a y'' + b y' + c y = g(x)$$

معادله مشخصه معادله همگن متناظر:

$$a m^2 + b m + c = 0$$

در این روش با توجه به عبارت $g(x)$ و ریشه های معادله مشخصه، یک جواب خصوصی با ضرایب نامشخص را حدس می زنیم و با جاگذاری آن در معدله این ضرایب مجهول را تعیین می کنیم:

الف) $g(x) = P_n(x)$

جواب حدس زده شده: $y_p = x^m Q_n(x)$

m تعداد ریشه های صفر در معادله مشخصه

$Q_n(x)$ چند جمله ای درجه n با ضرایب مجهول

ب) $g(x) = e^{\beta x} P_n(x)$

جواب حدس زده شده: $y_p = x^m e^{\beta x} Q_n(x)$

m: تعداد ریشه های مساوی β در معادله مشخصه

$Q_n(x)$: چند جمله ای درجه n با ضرایب مجهول

ج) $g(x) = P_n(x) \sin \beta x + Q_m(x) \cos \beta x$

جواب حدس زده شده: $y_p = x^m \left[R_r(x) \sin \beta x + S_r(x) \cos \beta x\right]$

m: تعداد ریشه های مساوی $\pm i\beta$ در معادله مشخصه

$S_r(x), R_r(x)$: چند جمله ای درجه r با ضرایب مجهول ($r = \max\{m,n\}$)

د) $g(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\right]$

جواب حدس زده شده: $y_p = x^m e^{\alpha x}\left[R_r(x)\sin\beta x + S_r(x)\cos\beta x\right]$

m : تعداد ریشه های مساوی $\alpha \pm i\beta$ در معادله مشخصه

$S_r(x), R_r(x)$: چند جمله ای درجه r با ضرایب مجهول ($r = \max\{m,n\}$)

☼ **نکته** : اگر $g(x)$ شامل مجموع چند عبارت ذکر شده در فوق باشد برای تک تک عبارت ها مثل فوق جواب خصوصی جداگانه تعیین می کنیم و جواب خصوصی برابر مجموع این جواب های خصوصی خواهد بود.

۳ـ۴ـ۲ ـ روش عملگر معکوس

عملگر مشتق را با D نشان می‌دهیم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = Dy \quad , \quad y'' = D^2 y, \dots, y^{(n)} = D^n y$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = g(x)$$

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \;\Rightarrow\; L(D)y = g(x)$$

معکوس عملگر مشتق، عملگر انتگرال گیری است و با نماد $\frac{1}{D} = D^{-1}$ نشان می‌دهیم.

برخی از خواص عملگرها

برای توابع مشتق‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ و عدد ثابت k داریم:

۱) $D\{f(x) \pm g(x)\} = Df(x) \pm Dg(x)$

۲) $D\{k f(x)\} = k Df(x)$

۳) $D^m\left(D^n f(x)\right) = D^{m+n} f(x)$

۴) $L(D)e^{kx} = L(k)e^{kx}$

۵) $L(D)\left(e^{kx} f(x)\right) = e^{kx} L(D+k) f(x)$

۶) $L(D^2)(\sin kx) = L(-k^2)\sin kx$

۷) $L(D^2)(\cos kx) = L(-k^2)\cos kx$

برای تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به روش عملگر معکوس داریم:

$$L(D)y = g(x) \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{1}{L(D)} g(x) = \frac{1}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0} g(x)$$

حالت‌های خاص:

۱) $g(x) = k e^{ax}$

الف) هرگاه $L(a) \neq ۰$ و a و k اعدادی ثابت باشند آن‌گاه:

$$y_p(x) = \frac{k e^{ax}}{L(a)}$$

ب) a ریشه مرتبه s ام معادله $L(m) = ۰$ باشد:

$$L(D) = (D-a)^s P(D) \qquad P(a) \neq ۰$$

$$y_p(x) = \frac{x^s}{s!} \frac{k e^{ax}}{P(a)}$$

۲) $g(x)=f(x)$ ($f(x)$ چندجمله‌ای از درجه n باشد)

$L(D)$ را بر جهت توان‌های صعودی نوشته را بر $L(D)$ تقسیم می کنیم خارج قسمت را تا جمله D^n ادامه می‌دهیم بنابراین:

$$y_p = \frac{۱}{L(D)} g(x) = \frac{۱}{L(D)} f(x) = (b_۰ + b_۱ D + \cdots + b_n D^n) g(x)$$

$b_۰ + b_۱ D + \cdots + b_n D^n$ بسط تابع $\frac{۱}{L(D)}$ است که از جملات بعد از D^n صرفنظر شده است.

۳) $g(x) = e^{ax} f(x)$

$$y_p = e^{ax} \frac{۱}{L(D+a)} f(x)$$

۴) $g(x) = \sin ax$ یا $g(x) = \cos ax$

الف) $L(-r^۲) \neq ۰$

جواب خصوصی به ترتیب عبارتست از: $y_p = kL(-a^۲) \sin ax$ و $y_p = k(-a^۲) \cos ax$

ب) $L(-r^۲) = L'(-r^۲) = \cdots = L^{(k-۱)}(-r^۲) = ۰ \quad , \quad L^{(k)}(-r^۲) \neq ۰$

$$y_p = \frac{x^k}{L^{(k)}(-r^۲)} R(x)$$

ج) هرگاه $L(D)$ یک عملگر خطی باشد، آن‌گاه:

$$\frac{۱}{L(D)} x f(x) = x \frac{۱}{L(D)} f(x) - \frac{L'(D)}{(L(D))^۲} f(x)$$

☼ **نکته:** اگر $g(x)$ به صورت $\sin \alpha x$ یا $\cos \alpha x$ باشد می‌توان فرض کرد که $g(x) = e^{i\alpha x}$ و مانند حالت e^{ax} جواب را به دست آوریم. اگر جواب مختلط باشد آن را با z_p نمایش می‌دهیم. حال اگر $g(x)$ به صورت $\sin \alpha t$ باشد قسمت موهومی z_p جواب است و اگر $g(x)$ برابر $\cos \alpha x$ باشد قسمت حقیقی جواب است.

۳ـ۴ـ۳ ـ روش تغییر پارامترها

از این روش برای معادلات خطی با ضرایب غیرثابت نیز می‌توان استفاده کرد. البته باید جواب عمومی را معادله همگن متناظر را داشته باشیم.

معادله روبرو را در نظر می گیریم: $y'' + p(x) y' + q(x) y = g(x)$

اگر y_1 و y_2 جواب های مستقل خطی معادله همگن متناظر باشند یک جواب خصوصی معادله ناهمگن از رابطه زیر بدست می آید:

$$y_P = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2$$

$$v_1(x) = \int \frac{y_2 g(x)}{W}dx \quad , \quad v_2(x) = \int \frac{y_1 g(x)}{W}dx$$

۳ـ۵ ـ استفاده از یك جواب مشخص جهت تعیین جواب دیگر

اگر $y_1(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، در این‌صورت جواب دیگر آن را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)$$

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

و جواب عمومی برابر خواهد شد با:

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

و اگر معادله ناهمگن باشد به کمک روش تغییر پارامترها می‌توان y_P را یافت

☼ **نکته: برای معادله دیفرانسیل** $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ داریم:

۱) اگر $a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) = 0$: $y = e^x$ یک جواب معادله است.

۲) اگر $a_0(x) - a_1(x) + a_2(x) = 0$: $y = e^{-x}$ یک جواب معادله است.

۳) اگر $a_1(x) + a_2(x) = 0$: $y = x$ یک جواب معادله است.

۴) اگر $k^2 a_0(x) + k a_1(x) + a_2(x) = 0$: $y = e^{kx}$ یک جواب معادله است.

۵) اگر $a_2(x) = -a \ , \ a_1(x) = ax + b$: $y = ax + b$ یک جواب معادله است.

با توجه به نکته فوق با تشخیص y_1 و فرض $y_2 = vy_1$ می‌توان جواب عمومی معادله همگن را بدست آورد.

۳ـ۶ ـ حالت‌های خاص و نکاتی دیگر

۳ـ۶ـ۱ ـ معادلات فاقد متغیر مستقل

این نوع معادلات به صورت $y'' = f(y, y')$ هستند

با فرض $y' = p$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \ , \ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

و معادله به صورت $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$ تبدیل می شود که یک معادله مرتبه اول است.

۳ـ۶ـ۲ ـ معادلات فاقد تابع

این نوع معادلات به شکل $y'' = f(y, y')$ هستند.

با فرض $y' = p$ معادله فوق به یک معادله مرتبه اول به شکل $p' = f(x, p)$ تبدیل می‌شود.

۳ـ۶ـ۳ـ معادلات فاقد تابع و متغیر مستقل

این نوع معادلات به شکل $f(y',y'')=0$ هستند

با فرض $y'=p$ معادله فوق به معادله $f(p,p')=0$ تبدیل می‌شود که یک معادله مرتبه اول خواهد بود.

۳ـ۷ـ روش قضیه آبل

هرگاه y_1,y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد، در این‌صورت رونسکین جواب‌هابرابراست با:

$$W(y_1,y_2)=ce^{-\int p(x)dx}$$

که c یک ثابت معین و وابسته به y_1,y_2 است.

۳ـ۸ـ شکل نرمال معادلات خطی مرتبه دوم همگن

برای معادله مرتبه دوم خطی $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ را در نظر می گیریم

با تغییر متغیر $v(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$ و فرض $y=w(x)v(x)$ معادله فوق به شکل زیر در می آید:

$$w''+r(x)w=\frac{g(x)}{v(x)}$$

که در آن: $r(x)=q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x)$

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری‌ها

٤ـ۱ ـ نقاط عادی و تکین

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

را در نظر بگیرید. نقطه $x=a$ یک نقطه عادی برای معادله فوق است هرگاه توابع $p(x)$ و $q(x)$ و $g(x)$ در نقطه a تحلیلی باشند در غیر این صورت نقطه تکین یا منفرد معادله است.

نقطه $x=a$ یک نقطه تکین منظم برای معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ است اگر $(x-a)p(x)$ و $(x-a)^2q(x)$ هردو در نقطه a تحلیلی باشند یا به عبارت دیگر حدود زیر موجود باشند.

$$\lim_{x\to a}(x-a)p(x) \quad , \quad \lim_{x\to a}(x-a)^2q(x)$$

اگر نقطه a نقطه تکین منظم نباشد یعنی یکی از حدود فوق موجود نباشد گوئیم نقطه a نقطه تکین غیرمنظم است.

☼ **نکته:** اگر $x=a$ ریشه مخرج $p(x)$ یا $q(x)$ یا $g(x)$ باشد این نقطه تکین است.

٤ـ۲ ـ جواب‌های سری حول نقطه عادی

فرض کنید x_0 یک نقطه عادی معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد. جواب معادله را به شکل سری $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ درنظر گرفته و با فرض این که سری در بازه $|x-x_0|<R$ به‌ازای مقداری از R همگرا باشد، در این‌صورت می‌توان y'',y' را محاسبه و با جایگذاری در معادله و صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف x، a_nها را محاسبه نمود.

☼ **نکته:** ضریب x^k در بط مکلورن جواب یک معادله دیفرانسیل عبارت است از: $\frac{y^{(k)}(0)}{k!}$

توجه داشته باشید که بسط مکلورن تابع f عبارت است از: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

٤ـ٣ـ جواب های سری حول یك نقطه تكین (روش فروبنیوس)

اگر $x=x_0$ یک نقطه تکین منظم معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد در این‌صورت جواب معادله را به شکل $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}$ درنظر می گیریم و با جایگذاری y'',y',y مقدار r با استفاده از معادله زیر بدست می آید:

معادله مشخصه: $F(r)=r(r-1)+p_0 r+q_0=0$

$$p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x) \quad , \quad q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 q(x)$$

اگر r_1,r_2 دو جواب معادله مشخصه باشند داریم:

الف) $r_1\neq r_2$ و r_1-r_2 عددی غیرصحیح:

$$y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad , \quad y_2=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

ب) $r_1=r_2=r$:

$$y_1=x^{r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad , \quad y_2=y_1\ln(x-x_0)+x^{r}\sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

ج) $r_1\neq r_2$ و r_1-r_2 عددی صحیح:

$$y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad , \quad y_2=a\,y_1\ln(x-x_0)+x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

٤ـ٤ـ معادله بسل

٤ـ٤ـ١ ـ معادله بسل معمولی

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

نقطه $x=0$ نقطه تکن نظم معادله فوق است.

جواب عمومی معادله بسل به‌صورت زیر است:

اگر p عدد صحیح باشد: $y=AJ_p(x)+BY_p(x)$

اگر p عدد صحیح نباشد: $y=AJ_p(x)+BJ_{-p}(x)$

$$J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

که تابع بسل نوع اول مرتبه p نامیده می‌شود.

اگر p عدد صحیح باشد $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ مستقل خطی نیستند.

$$Y_p(x)=\frac{1}{\sin p\pi}\left[J_p(x)\cos p\pi-J_{-p}(x)\right]$$

که تابع بسل نوع دوم مرتبه p نامیده می‌شود.

توجه: در حالت‌های خاص $p=0,1,\frac{1}{2}$ داریم:

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\times 4^2}-\cdots$$

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}\,n(n+1)!}=\frac{2}{2}-\frac{x^3}{1!\times 2!\times 2^3}+\frac{x^5}{2!\times 3!\times 2^5}-\cdots$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

اگر p عدد صحیح باشد $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ وابسته خطی هستند و داریم:

$$J_{-p}(x)=(-1)^p J_p(x)$$

☼ **نکته:**

الف) صفرهای مثبت توابع $J_p(x)$ و $J_{p+1}(x)$ به‌طور متناوب ظاهر می‌گردند یعنی بین هر دو صفر مثبت متوالی از یکی دقیقاً یک صفر از دیگری قرار دارد.

ب) صفرهای مثبت توابع $Y_p(x)$ و $Y_{p+1}(x)$ به‌طور متناوب ظاهر می‌گردند یعنی بین هر دو صفر مثبت متوالی از یکی دقیقاً یک صفر از دیگری قرار دارد.

۴ـ۴ـ ۲ ـ تبدیل برخی از معادلات دیفرانسیل به معادله بسل

برخی از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به معادله دیفرانسیل بسل تبدیل نود. در زیر چند حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱) معادلات دیفرانسیل به شکل $x^2y''+xy'+(n^2x^2-m^2)y=0$ را می‌توان با تغییر متغیر $z=nx$ به معادله بسل $z^2y''+xy'+(z^2-m^2)y=0$ تبدیل کرد:

$$m\text{ صحیح}: y(z)=c_1J_m(z)+c_2Y_m(z) \quad\Rightarrow\quad y(x)=c_1J_m(nx)+c_2Y_m(nx)$$

$$m\text{ غیرصحیح}: y(z)=c_1J_m(z)+c_2J_{-m}(z) \quad\Rightarrow\quad y(x)=c_1J_m(nx)+c_2J_{-m}(nx)$$

۲) معادله دیفرانسیل $x^2y''+(2k+1)xy'+(m^2x^{2x}+n^2)y=0$ را که در آن m، n، s و k اعداد ثابت هستند می‌توان به معادله دیفرانسیل بسل تبدیل نمود.

$$: y=x^{-k}\left[c_1J_{\frac{a}{x}}\left(\frac{m}{x}x^s\right)+c_2Y_{\frac{a}{s}}\left(\frac{m}{s}x^s\right)\right] \qquad \left(a=\sqrt{k^2-n^2}\right)$$

۳) معادله دیفرانسیل $xy''+(2k+1)y'+xy=0$ را می‌توان با تغییر متغیر $z=x^ky$ به معادله دیفرانسیل بسل $x^2z''+xz'+(x^2-k^2)z=0$ تبدیل نمود:

$$m\text{ صحیح}: z(x)=c_1J_k(x)+c_2Y_k(x) \quad\Rightarrow\quad y(x)=x^{-k}\left[c_1J_k(x)+c_2Y_k(x)\right]$$

$$m\text{ غیرصحیح}: z(x)=c_1J_k(x)+c_2J_{-k}(x) \quad\Rightarrow\quad y(x)=x^{-k}\left[c_1J_k(x)+c_2J_{-k}(x)\right]$$

۴) معادله دیفرانسیل $x^2y''+axy'+(b+cx^m)y=0$ را که در آن a، b، c و m ثابت (c و m غیرصفر) هستند می‌توان با در نظر گرفتن دو متغیر جدید t و u به شکل $t=\gamma x^{\beta}$ و $u=x^{\alpha}t$ به معادله بسل تبدیل نمود.

۴ـ۴ـ ۳ ـ خواص توابع بسل

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n}J_n(x)\right]=x^{n}J_{n-1}(x)$$

با استفاده از دو رابطه فوق داریم:

$$\int x^{n}J_{n-1}(x)\,dx = x^{n}J_{n}(x)+c$$

$$\int x^{-n}J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n}J_{n}(x)+c$$

$$\int J_{n+1}(x)\,dx = \int J_{n-1}(x)\,dx - 2J_{n}(x)$$

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_{n}(x)-J_{n-1}(x)$$

$$J'_{n}(x)=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\right]$$

$$J''_{n}(x)=\frac{1}{2}\left[J_{n-2}(x)-2J_{n}(x)-J_{n+2}(x)\right]$$

$$xJ'_{n}(x)=nJ_{n}(x)-xJ_{n+1}(x)$$

$$xJ'_{n}(x)=xJ_{n-1}(x)-nJ_{n}(x)$$

برای $Y_n(x)$ هم می‌توان روابطی مشابه روابط فوق نوشت.

☼ **نکته:** برای انتگرال $\int x^{\alpha}J_{\beta}(x)\,dx$ داریم: (با فرض $\alpha+\beta\geq 0$)

الف) اگر $\alpha+\beta$ فرد باشد حاصل انتگرال فوق به شکل صریح برحسب توابع بسل خواهد بود.

ب) اگر $\alpha+\beta$ زوج باشد پس از محاسبه انتگرال فوق جمله $\int J_0(x)\,dx$ باقی خواهد ماند.

٤ـ٤ـ٤ معادله بسل اصلاح شده

	$x^2y''+xy'-(x^2+p^2)y=0$
اگر p عدد صحیح یا صفر نباشد:	$y=AI_p(x)+BI_{-p}(x)$
اگر p عدد صحیح یا صفر باشد:	$y=AI_p(x)+BK_p(x)$

$$I_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}$$

$$K_x(x)=\exp\left[\frac{1}{2}(P+1)\pi i\right]\left[J_p(ix)+iY_p(ix)\right]$$

٤ـ٤ـ٥ رفتار توابع بسل وقتی $x\to 0$

$P=0: J_0(0)=I_0(0)=1$
$P>0: J_p(0)=I_p(0)=0$
$p: J_{-p}(0), \pm I_{-p}(0)\to\pm\infty$ مثبت و غیرصحیح
$-Y_p(0), K_p(0)\to\infty$ به ازای کلیه مقادیر p

بنابراین تنها $J_p(x)$ و $I_p(x)$ جواب‌های فیزیکی قابل قبول در $x=0$ هستند.

۴ـ۴ـ۶ـ رفتار توابع بسل وقتی $x\to\infty$

هرگاه x مقدار بزرگی باشد داریم:

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$Y_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$I_n(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$
$$K_n(x)\sim\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

توابع $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ و $K_n(x)$ با افزایش x میرا می‌شوند.

تابع $I_n(x)$ با افزایش x واگرا می‌شود.

(**توجه:** لزومی به خاطر سپردن چهار رابطه فوق نیست.)

۴ـ۴ـ۷ـ رابطه بین توابع بسل مرتبه p و $-p$

هرگاه p یک عدد صحیح باشد،

$$J_{-p}(x)=(-1)^p J_p(x)$$

$$Y_{-p}(x)=(-1)^p Y_p(x)$$

$$I_{-p}(x)=I_p(x)$$

$$K_{-p}(x)=K_p(x)$$

۴ـ۵ـ معادله لژاندار

$$(x^2-1)y''+2xy'-m(m+1)y=0$$

m: عدد حقیقی

نقطه $x=0$ یک نقطه عادی معادله است پس دو جواب مستقل خطی به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ دارد با جایگذاری در معادله به رابطه بازگشتی زیر می رسیم:

$$c_{n+2}=\frac{(n-m)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}c_n\quad ,\quad n\ge 0$$

حاصل تمام ضرایب زوج برحسب a_0 و تمام ضرایب فرد برحسب a_1 محاسبه می‌شوند.

$$y=a_0\left(1-\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}x^4+\cdots\right)$$

$$+a_1\left(x-\frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3+\frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}x^5+\cdots\right)$$

بنابراین جواب عمومی معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

اگر m یک عدد طبیعی باشد جواب معادله لژاندر را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$y=c_1P_m(x)+c_2Q_m(x)$$

اگر n زوج باشد سری $y_1(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است اگر n فرد باشد سری $y_2(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است.

اگر $c_m=\dfrac{(2m)!}{2^m(m!)^2}$ انتخاب شود رابطه مربوط به چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

☼ **نکته:** رابطه رودریگس

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

☼ **نکته:** چندجمله‌ای های لژاندر $P_n(x)$، ضرایب t^n در بسط مک‌لوران تابع $(1-2xt+t^2)^{\frac{-1}{2}}$ هستند :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$P_0(x)=1\quad,\quad P_1(x)=x\quad,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\quad,\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

☼ **نکته:** $P_n(1)=1\quad,\quad P_n(-1)=(-1)^n$

در حالت کلی $P_n(-x)=(-1)^nP(x)$

☼ **نکته:** چون به ازای nهای فرد $p_n(x)$ تابعی فرد است لذا $P_{2n+1}(0)=0$ و همچنین

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$$

☼ **نکته:** چندجمله‌ای‌ها لژاندر در بازه $[-1,1]$ متعامد هستند:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0\qquad n\neq m$$

$$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$$

☼ **نکته:** برای چندجمله‌ای های لژاندر داریم:

۱) $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$

۲) $P'_{n+1}(x) = P'_n(x) + (n+1)P_n(x)$

☼ **نکته:** اگر تابع f در هر زیر بازه از $[-1,1]$ حداکثر در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی حد چپ و راست و مشتق چپ و راست موجود باشند آن‌گاه در هر نقطه پیوستگی تابع f در بازه $(-1,1)$ می‌توان این تابع را به صورت بسطی بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندار به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x) \quad , \quad c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx$$

٤ـ٦ ـ تابع بتا

تابع بتا به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

تابع بتا به ازای $n, m > 0$ همگراست.

به سادگی می‌توان نشان داد که: $B(m,n) = B(n,m)$

رابطه تابع بتا با تابع گاما به شکل زیر است:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

٤ـ٧ ـ تابع خطا

تابع خطا به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt$$

تابع خطای مکمل:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

خواص تابع خطا و تابع خطای مکمل

۱) $\operatorname{erf}(0) = 0 \quad , \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1$

۲) $\operatorname{erfc}(0) = 1 \quad , \quad \operatorname{erfc}(\infty) = 0$

۳) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$

۴) $\frac{d}{dx}\operatorname{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

فصل ۵

تبدیل لاپلاس

۵ ـ ۱ ـ تعریف تبدیل لاپلاس

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

که s می‌تواند یک متغیر حقیقی یا مختلط باشد.

توجه داشته باشید که می‌توانیم انتگرال ناسره فوق را به شکل زیر هم بنویسیم:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)\,dt$$

در تعریف فوق فرض شده است که تابع $f(t)$ برای $t \geq 0$ تعریف شده باشد.

تابع $f(t)$ را عکس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ می‌نامیم و به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

قضیه وجود تبدیل لاپلاس: فرض می‌کنیم که تابع $f(t)$ روی بازده $[0,\infty)$ به‌صورت تکه تکه پیوسته باشد و از مرتبه نمایی باشد. در این‌صورت تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به ازای $s > a$ موجود است.

(از مرتبه نمایی بودن تابع $f(t)$ به این مفهوم است که با افزایش t، $|f(t)|$ افزایش می‌یابد ولی این افزایش سریع‌تر از افزایش یک تابع نمایی نیست یعنی به ازای هر $t \geq M$ داشته باشیم: $|f(t)| \leq ce^{at}$ که a، c و M ثابت‌های حقیقی (c و M لزوماً مثبت) هستند.)

☼ **نکته:** تبدیل لاپلاس یک تبدیل یک به یک است.

☼ **نکته:** هرگاه دو تابع دارای تبدیل لاپلاس یکسان باشند آن دو تابع یکسان هستند.

☼ **نکته:** تبدیل لاپلاس و عکس تبدیل لاپلاس تبدیل‌های خطی هستند.

هرگاه توابع $f_i(t)$، $i = 1,2,\ldots,n$ دارای تبدیلات لاپلاس $F_i(s)$ و c_iها اعداد ثابتی باشند، داریم:

$$L\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s)$$

$$L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s)\right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i L^{-1}\{F_i(s)\}$$

تبدیل لاپلاس برخی از توابع مهم در جدول زیر ارائه شده است.

تابع $f(t)$	تبدیل لاپلاس $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$ $(s>0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $(s>a)$
t^n (n عدد صحیح و مثبت)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s>0)$
t^m $(m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$ $(s>0)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$

۵ ـ ۲ ـ خواص تبدیل لاپلاس

۵ ـ ۲ ـ ۱ ـ قضیه اول انتقال

هرگاه a یک عدد حقیقی دلخواه و $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$$

یا

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$$

۵ ـ ۲ ـ ۲ ـ قضیه دوم انتقال

هرگاه a یک عدد حقیقی دلخواه، $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و $u(t)$ یک تابع پله‌ای واحد باشد، داریم:

$$L\{u(t-a)f(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=u(t-a)f(t-a)$$

۵ ـ ۲ ـ ۳ ـ تبدیل لاپلاس حاصلضرب تابع $f(t)$ در t^n

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

یا

$$L^{-1}\{F^n(s)\}=(-1)^n t^n f(t)$$

$F^n(s)$ مشتق مرتبه n ام تابع $F(s)$ نسبت به s است.

۵ ـ ۲ ـ ٤ ـ خاصیت تغییر مقیاس

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و a یک عدد ثابت باشد داریم:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

۵ ـ ۲ ـ ٥ ـ تبدیل لاپلاس مشتقات یك تابع

هرگاه تابع $f(t)$ و مشتقات آن تا مرتبه $(n-1)$ام در بـازه $[0,\infty)$ پیوسته و $f^{(n)}(t)$ در ایـن بـازه تکه‌تکه پیوسته باشد داریم:

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

در رابطه فوق $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است.

$$n=1 \Rightarrow L\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

$$n=2 \Rightarrow L\left\{f''(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$n=3 \Rightarrow L\left\{f^{(3)}(t)\right\} = s^3F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

۵ ـ ۲ ـ ٦ ـ تبدیل لاپلاس انتگرال یك تابع

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\,du$$

☼ **نکته:** در حالت کلی هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{(s+a)^n}\right\} = e^{-at}\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t e^{au} f(u)(du)^n$$

در حالت خاص $a=0$:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t f(u)(du)^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\,du$$

و در حالت خاص $n=1$:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\,du$$

۵ ـ ۲ ـ ۷ـ قضیه مقدار اولیه تابع

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

در رابطه فوق فرض شده است $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ موجود باشد.

☼ **نکته:** هرگاه تابع $f(t)$ شامل تابع دیراك و یا مشتقات آن باشد $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ موجود نبوده و نمی‌توان از قضیه مقدار اولیه استفاده نمود.

☼ **نکته:**

الف) اگر دو تابع $F_1(t)$ و $F_2(t)$ وقتی $t\to 0$ همارز باشند توابع $F_1(s)$ و $F_2(s)$ هم وقتی $s\to\infty$، همارز خواهند بود.

ب) اگر دو تابع $F_1(t)$ و $F_2(t)$ وقتی $t\to\infty$ همارز باشند توابع $F_1(s)$ و $F_2(s)$ هم وقتی $s\to 0$ همارز خواهند بود.

۵ ـ ۲ ـ ۸ـ تبدیل لاپلاس نسبت تابع $f(t)$ به $t+a$

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ بوده و $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t+a}$ موجود باشد داریم:

$$L\left\{\frac{F(t)}{t+a}\right\} = e^{as}\int_s^\infty e^{-au}\,F(u)\,du$$

$a>0$ است.

در حالت خاص $a=0$ داریم:

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$$

یا

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)\,du\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

☼ **نکته:** هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + \delta(t)f(0)$$

۵ ـ ۳ـ قضیه پیچش (کانولوشن)

هرگاه $F(s)$ و $G(s)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ باشند داریم:

$$L\{f*g\}=F(s)G(s)$$

که در آن:

$$f*g=\int_{\cdot}^{t}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$f*g$ را کانولوشن دو تابع f و g می‌نامیم.

τ یک متغیر مجازی است که پس از انجام انتگرال گیری حذف می گردد.

خواص کانولوشن:

الف) خاصیت جابه‌جایی:

$$f*g=f*g$$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$(f*g)*h=f*(g*h)$$

ج) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$f*(g+h)=f*g+f*h$$

د)

$$f*^{\cdot}=\cdot*f=\cdot$$

هـ) در حالت کلی داریم:

$$f*۱\neq f$$

و) با توجه به تعریف کانولوشن دو تابع داریم:

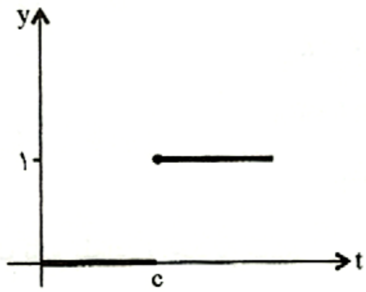
$$۱*f=\int_{\cdot}^{t}f(t)dr \quad \text{یا} \quad L[۱*f]=\frac{L\{f(t)\}}{s}$$

۵ ـ ٤ـ تابع پله‌ای واحد

تابع پله‌ای واحد یا هوی ساید (Heaviside) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u_c(t) \quad \text{یا} \quad u(t-c)=\begin{cases}\cdot & t<c\\ ۱ & t\geq c\end{cases}$$

نمودار تابع پله‌ای واحد به شکل زیر است:



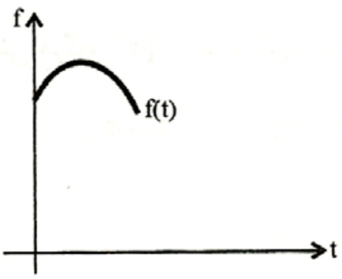
هرگاه تابع $f(t-c)$ در $u_c(t)$ ضرب شود. نتیجه‌اش این خواهد بود که تابع $f(t)$ به میزان c در امتداد محور tها منتقل شده و مقدار آن در $t<c$ صفر می‌باشد.

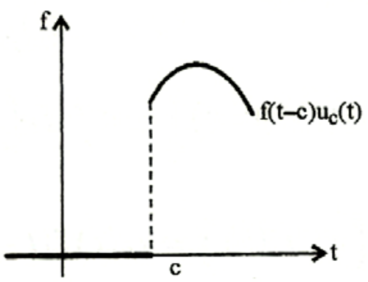
توجه داشته باشید که هرگاه تابع $f(t)$ به شکل

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) & 0<t<a_1 \\ f_2(t) & a_1<t<a_2 \\ f_3(t) & t>a_2 \end{cases}$$

تعریف شود می‌توان آن را به شکل یک تابع پله‌ای واحد نوشت:

$$f(t)=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]u_{a_1}(t)+[f_3(t)-f_2(t)]u_{a_2}(t)$$





تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد:

$$L\{u_c(t)\}=\frac{e^{-cs}}{s} \qquad (s>0)$$

در حالت کلی هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\{u_c(t)f(t-c)\}=e^{-cs}L\{f(t)\}=e^{-cs}F(s) \quad (s>a)$$

یا

$$L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}=u_c(t)f(t-c)$$

c یک ثابت مثبت است.

۵ ـ ۵ـ تبدیل لاپلاس یك تابع متناوب

هرگاه تابع $f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ به‌صورت تکه تکه پیوسته بوده و دارای دوره تناوب T باشد داریم:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{\tau} e^{-st}f(t)\,dt$$

۵ ـ ۶ـ تابع دلتای دیراك

تابع $g_\tau(t)$ را که برای هر $\tau>0$ در بازه $[0,\infty)$ تعریف شده است در نظر می گیریم:

$$g_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{۱}{\tau} & ۰<t<\tau\\ ۰ & t>\tau \quad \text{یا} \quad t<۰\end{cases}$$

نمودار تابع فوق به ازای $\tau>۰$ به‌صورت زیر است:

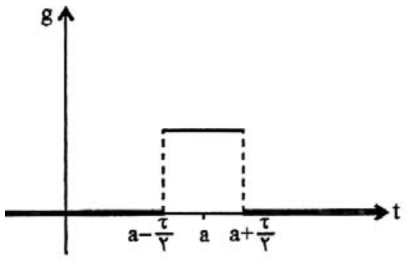
با توجه به تعریف تابع $g_\tau(t)$ و نمودار فوق مشخص است که:

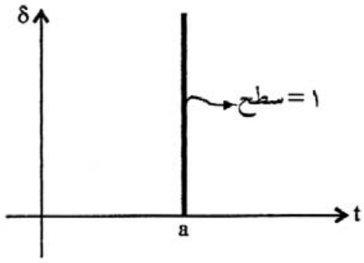
$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\tau(t)\,dt=۱$$

تابع دلتای دیراک یا تابع ضربه واحد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to ۰} g_\tau(t)$$

نمودار تابع دلتای دیراک به‌صورت زیر است:





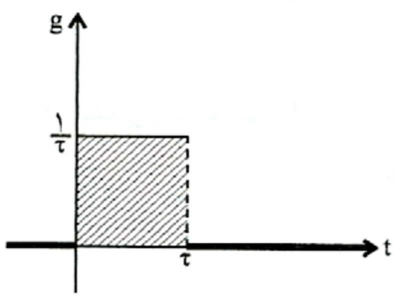
اگر تابع g را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$g_\tau(t,a)=\begin{cases}\dfrac{۱}{\tau} & |t-a|<\dfrac{\tau}{۲}\\ ۰ & |t-a|>\dfrac{\tau}{۲}\end{cases}$$

داریم:

$$\delta(t-a)=\lim_{\tau\to ۰} g_\tau(t,a)$$

نمودارهای $g_\tau(t,a)$ و $\delta(t-a)$ در زیر نشان داده شده است.



در ریاضی، تابع دیراک را به شکل زیر در نظر می‌گیرند:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=۰\\ ۰ & t\neq ۰\end{cases} \qquad \delta(t-a)=\begin{cases}\infty & t=a\\ ۰ & t\neq a\end{cases}$$

خواص تابع دلتای دیراک

تبدیل لاپلاس تابع دیراک عبارت است از:

$$L\{\delta(t)\}=۱$$
$$L\{\delta(t-a)\}=e^{-as}$$

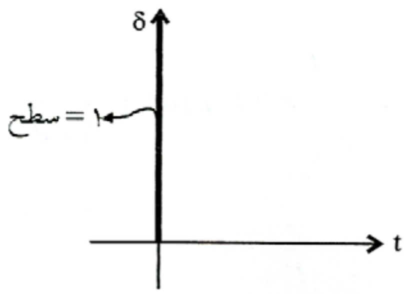
داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)\,dt=۱$$

خاصیت صافی:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-a)\,dt=f(a)$$

$$\delta[g(t)]=\frac{۱}{|g'(a)|}\delta(t-a)\quad,\quad(g'(a)\neq ۰)$$



در حالت خاص $g(t)=at$ داریم:

$$\delta(at)=\frac{۱}{|a|}\delta(t-a)$$
$$f(t)\delta(t-a)=f(a)\delta(t-a)$$

هرگاه $u(t-a)$ یک تابع پله‌ای باشد داریم:

$$\frac{du}{dt}=\delta(t-a)$$
$$\int_{-\infty}^{a}\delta(t)\,dt=\begin{cases}۰ & a<۰\\ ۱ & a>۰\end{cases}=u(a)$$

فصل ۶

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

۶ ـ ۱ـ مقدمه

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

هرگاه در دستگاه معادلات فوق f_1 تا f_n توابعی خطی از متغیرهای x_1 تا x_n باشند دستگاه را خطی و در غیر این‌صورت غیرخطی می‌نامیم. شکل کلی یک دستگاه معادلات خطی عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned}$$

هرگاه در دستگاه معادلات خطی فوق توابع $g_1(t)$ تا $g_n(t)$ در بازه I به ازای کلیه مقادیر t صفر باشند دستگاه معادلات را همگن و در غیر این‌صورت غیرهمگن می‌نامیم.

شرط وجود جواب: هرگاه توابع $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}$ و $g_1, g_2, \dots, g_n$ در بازه I پیوسته باشد دستگاه معادلات خطی فوق دارای جواب یکتایی به شکل $x_1 = \phi_1(t)$، $x_2 = \phi_2(t)$، ...، $x_n = \phi_n(t)$ است که شرط اولیه $x_1(t_0) = x_1^0$، $x_2(t_0) = x_2^0$، ... و $x_n(t_0) = x_n^0$ را ارضا می‌کند و جواب در کل بازه I موجود و x_1^0 و $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ اعداد مفروض و دلخواهی هستند.

هرگاه در دستگاه معادلات فوق، $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}$ اعداد ثابتی باشند دستگاه معادلات را دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت می‌نامیم.

۶ ـ ۲ـ روش حذفی

در این روش با انجام عملیات جبری کلیه مجهولات و مشتقات آنها را به جز یکی حذف کرده و با حل معادله حاصل آن مجهول را تعیین می‌کنیم و با استفاده از سایر معادلات مجهولات دیگر هم به‌دست می‌آیند.

برای آشنایی بهتر با این روش، حل دستگاه دو معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) & (۱) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) & (۲) \end{cases}$$

در دستگاه فوق، a ، b ، c و d ضرایب ثابت و $f(t)$ و $g(t)$ توابع مفروض و $x(t)$ و $y(t)$ مجهولات هستند.

با استفاده از معادله (۱) داریم:

$$x'' = ax' + by' + f'(t) \quad , \quad y = \frac{۱}{b}[x' - ax - f(t)] \qquad (۳)$$

با جاگذاری y' از معادله (۲) در معادلات فوق داریم:

$$x'' = ax' + b\left[cs + d \times \frac{۱}{b}[x' - ax - f(t)] + g(t)\right] + f'(t)$$

با ساده کردن معادله فوق:

$$Ax'' + Bx' + Cx + r(t) = ۰$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت است.

از حل معادله حاصله می‌توان $x(t)$ را تعیین نموده و با جاگذاری آن در معادله (۳)، $y(t)$ را هم به‌دست آورد.

٦ ـ ٣ـ تبدیل لاپلاس

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با n معادله را در نظر می‌گیریم که توابع $x_n(t),...,x_۲(t),x_۱(t)$ جواب‌های این دستگاه می‌باشند برای حل این دستگاه از کلیه معادلات، تبدیل لاپلاس می‌گیریم و با این کار به دستگاه n معادله جبری می‌رسیم که مجهولات آن $X_n(s),...,X_۲(s),X_۱(s)$ هستند. دستگاه جبری حاصل را حل نموده و $X_n(s),...,X_۲(s),X_۱(s)$ را به‌دست می‌آوریم و با تعیین عکس تبدیل لاپلاس آن‌ها، جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل را تعیین می‌کنیم.

برای آشنایی بهتر با این روش، حل دستگاه دو معادله دیفرانسیل را تعیین می‌کنیم.

برای آشنایی بهتر با این روش، حل دستگاه دو معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) & (۱) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) & (۲) \end{cases}$$

شرایط اولیه: $x(۰) = x_۰ \;,\; y(۰) = y_۰$

از طرفین دو معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} sX(s) - x_۰ = aX(s) + bY(s) + F(s) \\ sY(s) - y_۰ = cX(s) + dY(s) + G(s) \end{cases}$$

از حل دستگاه جبری فوق $X(s)$ و $Y(s)$ به‌دست آمده و با تعیین عکس تبدیل لاپلاس آن‌ها می‌توان $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین نمود.

٦ ـ ٤ـ روش اویلر برای حل دستگاه معادلات مرتبه اول خطی همگن با ضرایب ثابت

دستگاه معادلات همگن با ضرایب ثابت $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ را در نظر می‌گیریم برای حل این دستگاه فرض می‌کنیم دستگاه همواره دارای جوابی به شکل $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ است و با جاگذاری آن در دستگاه معادلات به معادله زیر می‌رسیم:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = ۰$$

معادله فوق معادله مشخصه ماتریس A نامیده می‌شود و مقادیر حاصله برای λها مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{K}$های متناظر با آن‌ها هم بردارهای ویژه متناظر می‌باشند.

هرگاه λ_1، ... و λ_n مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{K}_1$، ... و $\mathbf{K}_n$ بردارهای ویژه متناظر با آن‌ها باشند جواب عمومی دستگاه معادلات به شکل زیر می‌باشد:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$$

بنابراین در این روش مراحل زیر را داریم:

الف) ابتدا دستگاه معادلات را به شکل ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

ب) با استفاده از معادله $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ را تعیین می‌کنیم $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

ج) بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه حاصل شده را به‌دست می‌آوریم $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, ..., \mathbf{K}_n)$

د) جواب عمومی دستگاه به شکل $\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$ است.

☼ **نکته:** اگر کلیه مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ ساده باشند، n بردار ویژه $\mathbf{A}$ هر کدام متناظر با یک مقدار ویژه، مستقل خطی هستند.

اگر یکی از مقادیر ویژه ساده نبوده و دارای چندگانگی m باشد دو حالت رخ می‌دهد:

الف) m بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقادیر ویژه موجود است.

ب) تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با این مقادیر ویژه کم‌تر از m است.

توجه: هرگاه معادله مشخصه ماتریس A دارای ریشه مضاعف باشد به طریقه زیر عمل می‌کنیم:

جواب اولی یعنی $x_1(t)$ را مانند قبل به‌دست می‌آوریم و $x_2(t)$ را به شکل $x_2(t) = \mathbf{K}te^{\lambda t} + \zeta e^{\lambda t}$ در نظر می‌گیریم که ζ بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با مقدار ویژه λ نامیده می‌شود.

توجه: هرگاه $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ مقادیر ویژه مختلط و $\lambda_3, ..., \lambda_n$ حقیقی و متمایز باشند داریم:

$$\mathbf{X} = c_1 u(t) + c_2 v(t) + c_3\mathbf{K}_3 e^{\lambda_3 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$$

که در این معادله:

$$v(t) = e^{\alpha t}[a\sin\beta t + b\cos\beta t]$$
$$u(t) = e^{\alpha t}[a\cos\beta t - b\sin\beta t]$$

۶ ـ ۵ـ روش عملگرها

در این روش ابتدا معادلات دیفرانسیل را به شکل عملگری زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&f_1(D)x_1 + g_1(D)x_2 + \ldots = h_1(t)\\
&f_2(D)x_1 + g_2(D)x_2 + \ldots = h_2(t)\\
&\vdots\\
&f_n(D)x_1 + g_n(D)x_2 + \ldots = h_n(t)
\end{aligned}$$

D: عملگر مشتق‌گیری

سپس $x_1, x_2, ..., x_n$ را با استفاده از روش‌های مربوط به حل دستگاه جبری و تعیین جواب عمومی و خصوصی با روش عملگرهای معکوس به‌دست می‌آوریم.

٦ ـ ٦ـ دستگاه معادلات ناهمگن

هرگاه X_p یک جواب دستگاه معادلات ناهمگن $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ در بازه I و $\mathbf{X}_g$ جواب عمومی دستگاه معادلات همگن متناظر آن یعنی $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ باشد جواب عمومی دستگاه ناهمگن به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_g + \mathbf{X}_p$$