فصل دوم:

حل روابط بازگشتی

فصل دوم
حل روابط بازگشتی

مفهوم روابط بازگشتی

دنباله مقادیر a_0، a_1، a_2، a_3، .....، a_n را در نظر بگیرید. اگر جمله عمومی (a_n) این دنباله در ارتباط با بعضی از اعضای این دنباله در دسترس باشد، اغلب می‌توان با دانستن مقادیر ابتدایی مناسب دنباله، هر جمله دلخواه از دنباله را محاسبه کرد. به رابطه a_n برحسب مقادیر قبلی دنباله، **رابطه بازگشتی یا معادلات تفاضلی** می‌گویند.

مثال ۱ : در رابطه بازگشتی زیر مقادیر a_2 تا a_5 را به دست آورید :

$$\begin{cases} a_n = na_{n-1} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

حل :

$$a_2 = 2\times a_1 = 2\times 1 = 2 \quad , \quad a_3 = 3\times a_2 = 3\times 2 = 6$$
$$a_4 = 4\times a_3 = 4\times 6 = 24 \quad , \quad a_5 = 5\times a_4 = 5\times 24 = 120$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود جمله عمومی a_n در واقع همان $n!$ است. منظور از حل رابطه بازگشتی آن است که a_n را بر حسب n به صورت مستقیم به دست آوریم. یعنی :

$$\begin{cases} a_n = na_{n-1} \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = n!$$

مثال ۲ : با مثال نشان دهید که :

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = 2^n - 1$$

حل : از روی رابطه مستقیم $a_n = 2^n - 1$ داریم :

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2^2 - 1 = 3 \quad , \quad a_3 = 2^3 - 1 = 7 \quad , \quad a_4 = 2^4 - 1 = 15$$

از روی روابط بازگشتی داریم :

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2\times 1 + 1 = 3 \quad , \quad a_3 = 2\times a_2 + 1 = 2\times 3 + 1 = 7$$
$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2\times 7 + 1 = 15$$

در درس آمار و احتمالات جهت شمارش از روش‌های استانداردی مثل جایگشت و ترکیب استفاده کرده‌اید. ولی مسائل زیادی وجود دارند که جهت شمارش حالات مختلف آنها نمی‌توان به سادگی از راههای مذکور استفاده کرد. در این دسته از مسائل ابتدا باید تعداد حالات را به صورت یک رابطه بازگشتی نوشته و سپس این روابط را در صورت نیاز حل کرد.

مثال ۳ : فرض کنید a_n تعداد راههایی باشد که می‌توان n شیء مختلف را در یک ردیف کنار هم قرار داد. یک رابطه بازگشتی برای a_n بنویسید.

حل : جهت قرار دادن یک عنصر در اولین محل، n شانس انتخاب داریم. پس از قرار دادن اولین عنصر، تعداد حالات قرار دادن $(n-1)$ شیء باقی مانده برابر a_{n-1} خواهد بود، پس :

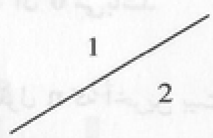
$$a_n = na_{n-1}$$

همان‌طور که قبلاً گفتیم با توجه به شرط اولیه $a_1 = 1$ جواب رابطه بازگشتی فوق $a_n = n!$ است.

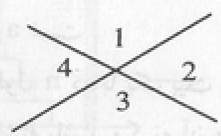
مثال ٤ : مسأله خطوط و صفحه : اگر حداکثر تعداد نواحی که با رسم n خط راست متقاطع در صفحه بوجود می‌آیند را با R_n نمایش دهیم، رابطه‌ای بازگشتی برای R_n به دست آورید. توجه کنید که هیچ دو خطی موازی نبوده و همچنین هیچ سه خطی از یک نقطه نمی‌گذرند.

حل :

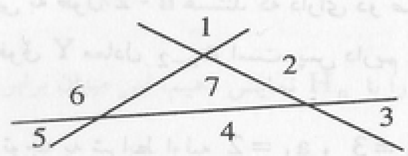
اگر $n = 1$ باشد، داریم : $\Rightarrow \quad R_1 = 2$



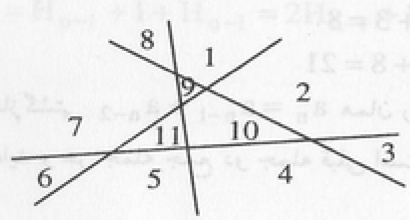
برای $n = 2$ ، داریم : $\Rightarrow \quad R_2 = 4$



برای $n = 3$ ، داریم : $\Rightarrow \quad R_3 = 7$



برای $n = 4$ ، داریم : $\Rightarrow \quad R_4 = 11$



توجه کنید که هنگام رسم خط سوم، دو خط قبلی در ۲ نقطه قطع می‌شود و در نتیجه ۳ ناحیه جدید به نواحی قبلی اضافه می‌شود، یعنی $R_3 = R_2 + 3$

همچنین هنگام رسم خط چهارم، سه خط قبلی در ۳ نقطه قطع شده و ٤ ناحیه جدید به نواحی قبلی اضافه می‌شود، یعنی $R_4 = R_3 + 4$. پس حدس می‌زنیم که در حالت کلی باید داشته باشیم :

$$R_n = R_{n-1} + n \qquad (n \geq 2)$$

البته حدس فوق را می‌بایست با استقرا ثابت کنیم که از آن می‌گذریم.

مثال ٥ : یک رابطه بازگشتی با شرایط ابتدایی مناسب بنویسید که تعداد رشته بیت‌هایی به طول n را نشان دهد که دارای هیچ دو صفر متوالی نباشند. سپس به کمک این رابطه بازگشتی بگوئید چند رشته بیت ٦ بیتی با این ویژگی وجود دارد.

حل : بدیهی است که برای حالت a_1 یعنی رشته‌ای به طول یک بیت هر دو حالت 0 و 1 صادق است چرا که دو صفر متوالی ندارند. لذا $a_1 = 2$ می‌باشد. برای حالت دو بیتی نیز سه حالت به صورت‌های 01، 10 و 11 داریم لذا $a_2 = 3$ است. حال برای موارد بالاتر از ۲ بیت استدلال زیر را انجام می‌دهیم. بدیهی است که :

تعداد همین نوع رشته بیت‌ها که آخرین بیت آن 0 می‌باشد + تعداد همین نوع رشته بیت‌ها که آخرین بیت آن 1 می‌باشد = تعداد رشته بیت‌های به طول n که بدون دو صفر متوالی باشند.

$$a_n = X + Y$$

رشته بیت‌هایی به طول n که آخرین بیت آنها 1 باشد و دارای دو صفر متوالی نباشد، همان رشته بیت‌های به طول n - 1 می‌باشند که دارای دو صفر متوالی نیستند و یک بیت 1 به آخر آنها اضافه شده است؛ پس در معادله فوق X معادل a_{n-1} است.

رشته بیت‌هایی به طول n که با یک بیت صفر ختم شده‌اند و دارای دو بیت صفر متوالی نیستند باید مقدار 1 در بیت n-1 ام خود داشته باشند وگرنه آن رشته شامل دو صفر متوالی می گردد. پس این رشته‌ها در واقع رشته بیت‌هایی به طول n - 2 هستند که دارای دو صفر متوالی نبوده و در آخر آنها 10 اضافه شده است. لذا در معادله فوق Y معادل a_{n-2} است. پس داریم :

$$(n > 2) \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

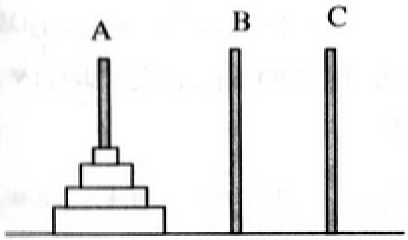
حال با توجه به شرایط اولیه $a_1 = 2$ و $a_2 = 3$ خواهیم داشت :

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5 \quad , \quad a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13 \quad , \quad a_6 = a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21$$

رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ همان رابطه بازگشتی سری فیبوناچی است که در درس ساختمان‌داده‌ها خوانده‌اید و هر جمله جمع دو جمله قبلی است با شروط اولیه $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$:

0,1,1,2,3,5,8,13,21,...

مثال ۶ : مسأله استاندارد برج‌های هانوی : این مسأله را در درس ساختمان داده‌ها خوانده‌اید که می‌خواهیم n دیسک با قطرهای متمایز را از روی میله A به میله C و به کمک میله B انتقال دهیم :

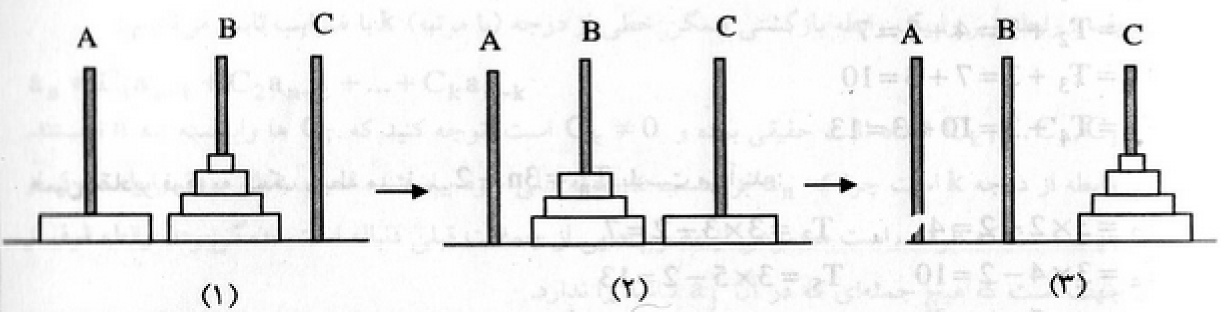


در این جابه‌جایی دو محدودیت داریم، یکی آنکه در هر بار انتقال فقط یک دیسک را می‌توان منتقل ساخت و دوم اینکه یک دیسک با قطر بزرگتر نباید روی دیسکی با قطر کوچکتر قرار گیرد. الگوریتم بازگشتی این مسأله به صورت زیر است :

۱ـ ابتدا $(n-1)$ دیسک را با رعایت دو شرط گفته شده از میله A به B انتقال می‌دهیم.

۲ـ سپس دیسک آخر را از میله A به C می‌بریم.

۳ـ (n-1) دیسک موجود در میله B را با رعایت دو شرط گفته شده از میله B به C منتقل می‌کنیم.



پس بدیهی است که اگر تعداد حرکات لازم برای انتقال n دیسک را با H_n نمایش دهیم، این میزان برابر است با:

$$H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1$$

و شرط اولیه $H_1 = 1$ می‌باشد.

حل روابط بازگشتی ساده با روش جایگذاری

برای یک دسته از مسائل ساده مثل حالتی که a_n فقط به a_{n-1} بستگی داشته باشد می‌توان از روش جایگذاری، روابط بازگشتی راحل کرد.

مثال ۷ : رابطه بازگشتی $a_n = na_{n-1}$ را با شرط اولیه $a_1 = 1$ حل کنید.

$$a_2 = 2a_1 = 2\times(1) = 2! \quad , \quad a_3 = 3a_2 = 3\times(2\times1) = 3!$$
$$a_4 = 4a_3 = 4\times(3\times2\times1) = 4!$$
$$a_5 = 5a_4 = 5\times4! = 5!$$

پس در حالت کلی داریم $a_n = n!$

مثال ۸ : رابطه بازگشتی $(n \geq 2)$ $\quad T_n = T_{n-1} + 3$ با شرط اولیه $T_1 = 1$ را حل کنید.

$$\begin{aligned}
T_n &= T_{n-1} + 3 = (T_{n-2} + 3) + 3 = T_{n-2} + 2\times3 \\
&= (T_{n-3} + 3) + 2\times3 = T_{n-3} + 3\times3 \\
&= (T_{n-4} + 3) + 3\times3 = T_{n-4} + 4\times3 \\
&= \dots = T_{n-(n-1)} + (n-1)\times3 = T_1 + (n-1)3 \\
&= 1 + 3(n-1) = 3n - 2
\end{aligned}$$

مثلاً به کمک رابطه بازگشتی داریم :

$$\begin{aligned}
T_2 &= T_1 + 3 = 1 + 3 = 4 \\
T_3 &= T_2 + 3 = 4 + 3 = 7 \\
T_4 &= T_3 + 3 = 7 + 3 = 10 \\
T_5 &= T_4 + 3 = 10 + 3 = 13
\end{aligned}$$

همین مقادیر فوق به کمک رابطه مستقیم $T_n = 3n - 2$ بدست می‌آیند :

$$T_2 = 3\times2 - 2 = 4 \quad , \quad T_3 = 3\times3 - 2 = 7$$
$$T_4 = 3\times4 - 2 = 10 \quad , \quad T_5 = 3\times5 - 2 = 13$$

مثال ۹ : رابطه بازگشتی تعداد حرکات مهره‌ها در مسأله برج‌های هانوی که به صورت $a_n = 2a_{n-1} + 1$ و با شرط اولیه $a_1 = 1$ بود را حل کنید.

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + 1 + 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + (2+1) \\
&= 2^2(2a_{n-3} + 1) + (2+1) = 2^3 a_{n-3} + (2^2 + 2 + 1) \\
&= 2^4 a_{n-4} + (2^3 + 2^2 + 2 + 1) = \dots \\
&= 2^{n-1} a_1 + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1)
\end{aligned}$$

می‌دانیم که $a_1 = 1$ است :

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1$$

می‌دانیم جمله تصاعد هندسی n جمله، با جمله اول t_1 و ضریب تصاعد q برابر است با : $\frac{t_1(q^n-1)}{q-1}$

در تصاعد هندسی فوق $t_1=1$، $q=2$ و تعداد جملات n می‌باشد، لذا :

$$a_n=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1\Rightarrow a_n=2^n-1$$

مثلاً برای انتقال ٤ مهره به $2^4-1=15$ حرکت نیاز داریم.

مثال ۱۰ : تعداد نواحی ایجاد شده توسط n خط متقاطع که با رابطه بازگشتی $(n\geq 2)$ $a_n=a_{n-1}+n$ و شرط اولیه $a_1=2$ بیان می‌شد را به صورت مستقیم محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+n=a_{n-2}+(n-1)+n=a_{n-3}+(n-2)+(n-1)+n\\&=a_{n-4}+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n=\ldots\\&=a_1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n=2+2+3+4+\ldots+n\\&=1+(1+2+3+\ldots+n)=1+\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

تقسیم‌بندی روابط بازگشتی

در حالت کلی یک روش عمومی جهت حل تمام روابط بازگشتی وجود ندارد ولی در ادامه حل چند دسته از روابط بازگشتی معروف و پراستفاده را شرح می‌دهیم.

تعریف : رابطه زیر را یک رابطه بازگشتی همگن خطی از درجه (یا مرتبه) k با ضرایب ثابت می‌نامیم :

$$a_n=C_1a_{n-1}+C_2a_{n-2}+\ldots+C_ka_{n-k}$$

که $C_1,C_1,\ldots,C_k$ اعداد ثابت حقیقی بوده و $C_k\neq 0$ است. توجه کنید که C_i ها وابسته به n نیستند. این رابطه از درجه k است چرا که a_n بر حسب k جمله قبلی خود بیان شده است. خطی بودن رابطه فوق از آن جهت است که طرف راست مجموعی از مضرب‌هایی از جملات قبلی دنباله است. همگن‌بودن رابطه فوق از آن جهت است که هیچ جمله‌ای که در آن a_j نباشد را ندارد.

مثال ۱۱ : رابطه $a_n=3a_{n-1}$ یک رابطه بازگشتی خطی، همگن از درجه 1 می‌باشد. رابطه $a_n=5a_{n-1}+7$ رابطه خطی درجه ۱ است ولی همگن نیست چرا که جمله 7 وابسته به a_i نمی‌باشد.

رابطه $a_n=5a_{n-1}+3a_{n-2}^2+n$ خطی نیست چرا که جمله a_{n-2} به توان ۲ رسیده است همچنین همگن نیست زیرا که جمله n در سمت راست آن وجود دارد.

رابطه $a_n=2a_{n-1}+na_{n-3}$ رابطه خطی است ولی ضریب آن ثابت نیست چرا که ضریب a_{n-3} برابر n می‌باشد. درجه این رابطه $k=3$ می‌باشد.

تعریف : شکل کلی روابط بازگشتی خطی ناهمگن از درجه k با ضرایب ثابت به صورت زیر است :

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} + f(n)$$

که در آن $f(n)$ یک تابع برحسب n است، C_1، C_2، ... ، C_k اعداد ثابت حقیقی بوده و $C_k \neq 0$ است.

مثال ۱۲ : رابطه $a_n - a_{n-1} = 3n^2$ یک رابطه بازگشتی خطی از درجه 1 و ناهمگن است.

رابطه $a_n = 5a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2^n + n^3$ یک رابطه بازگشتی خطی از درجه ۲ و ناهمگن است.

حل روابط بازگشتی درجه اول

عموماً روابط بازگشتی درجه اول با روش جایگذاری به سادگی حل می‌شوند.

مثال ۱۳ : رابطه $a_n = Ca_{n-1}$ را حل کنید که C عدد ثابتی است و شرط اولیه $a_0 = 1$ می‌باشد.

$$a_n = Ca_{n-1} = C(Ca_{n-2}) = C^2 a_{n-2} = C^2 (Ca_{n-3})$$
$$= C^3 a_{n-3} = \ldots = C^n a_0$$
$$a_n = C^n a_0 \quad , \quad a_0 = 1 \Rightarrow a_n = C^n$$

مثال ۱٤ : رابطه $a_n = 2a_{n-1} + 1$ که در آن $n \geq 1$ و $a_1 = 1$ را حل کنید.

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2\times1 + 1 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$$
$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2\times3 + 1 = 7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$$
$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2\times7 + 1 = 15 = 16 - 1 = 2^4 - 1$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2^n - 1$$

حل روابط بازگشتی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت

فرم کلی این روابط به صورت زیر است :

$$\boxed{C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0}$$

در این حالت جهت به دست آوردن جواب یکتا به دو شرط اولیه نیاز است. جهت حل معادله فوق ابتدا معادله مشخصه آن را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\boxed{C_n r^2 + C_{n-1} r + C_{n-2} = 0}$$

با حل معادله درجه دوم فوق یکی از ۳ حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد :

۱ـ اگر معادله درجه دوم مذکور دو جواب حقیقی و مجزای r_1 و r_2 داشته باشد، جواب رابطه بازگشتی به فرم کلی زیر خواهد بود :

$$\boxed{a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n}$$

۲ـ اگر معادله درجه دوم مذکور یک ریشه حقیقی مضاعف r_1 داشته باشد، جواب رابطه بازگشتی به فرم کلی زیر خواهد بود :

$$\boxed{a_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n}$$

۳ـ اگر معادله درجه دوم مذکور ریشه‌های مختلط r_1 و r_2 را داشته باشد باز هم جواب مثل حالت ۱ می‌شود:

$$\boxed{a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n}$$

در هر حالت ضرایب C_1 و C_2 از طریق دو شرط اولیه به دست می‌آیند.

مثال ۱۵ : رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ را با مقادیر اولیه $a_0 = 2$ و $a_1 = 7$ حل کنید.

حل : $r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow \quad r_1 = 2$ و $r_2 = -1$

پس جواب کلی به صورت $a_n = C_1 2^n + C_2 (-1)^n$ است.

$$a_0 = 2 \Rightarrow 2 = C_1 \times 1 + C_2 \times 1$$
$$a_1 = 7 \Rightarrow 7 = C_1 \times 2 + C_2 \times (-1)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 - C_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow 3C_1 = 9 \Rightarrow C_1 = 3, C_2 = -1$$

جواب $\Rightarrow a_n = 3 \times 2^n - (-1)^n$

مثال ۱۶ : جواب $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ را با شرایط $a_0 = 1$ و $a_1 = 3$ به دست آورید.

حل :

$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$ ریشه مضاعف

پس جواب کلی به صورت زیر است :

$$a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = C_1 \times 2^0 + C_2 \times 0 \times 2^0 = 1 \\ a_1 = C_1 \times 2^1 + C_2 \times 1 \times 2^1 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ 2C_1 + 2C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_n = 2^n + \frac{1}{2} n 2^n \Rightarrow a_n = 2^n + n 2^{n-1} \qquad n \geq 0$$

مثال ۱۷ : با توجه به آنکه می‌دانیم دنباله اعداد فیبوناچی از رابطه $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ به دست می‌آید فرمول صریح F_n را به دست آورید. ($F_0 = 0$ و $F_1 = 1$)

حل :

$$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{l} F_0 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ F_1 = 0 \Rightarrow C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

تذکر : رابطه بازگشتی همگن مرتبه اول با ضرایب ثابت را می‌توان حالت خاصی از موارد فوق فرض کرد که:

با شرط اولیه a_0 معلوم	$a_n + Ca_{n-1} = 0$

معادله مشخصه $\Rightarrow r + C = 0 \Rightarrow r = -C$

جواب : $\boxed{a_n = a_0 r^n = a_0(-c)^n}$

البته قبلاً رابطه درجه اول فوق را با روش جایگذاری حل کرده بودیم.

مثال ۱۸ : رابطه $a_n = 7a_{n-1}$ را با شرط $a_2 = 98$ $(n \ge 1)$ حل کنید.

$$a_n - 7a_{n-1} = 0 \Rightarrow r - 7 = 0 \Rightarrow r = 7$$

$$a_n = (7)^n a_0 \quad , \quad a_2 = 7^2 a_0 \Rightarrow 98 = a_0 7^2 \Rightarrow a_0 = 2$$

جواب $\Rightarrow a_n = 2(7)^n$

حل روابط بازگشتی ناهمگن مرتبه اول و دوم

فرم کلی این روابط به صورت زیر است :

$$a_n + Ca_{n-1} = f(n) \quad ; \; n \ge 1$$

$$a_n + ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n) \; ; \; n \ge 2$$

که $f(n)$ یک تابع بر حسب n است.

یکی از روش‌های حل معادله فوق استفاده از جواب عمومی (U_n) و جواب خصوصی (P_n) است. اگر U_n یک جواب عمومی قسمت همگن و P_n یک جواب خاص رابطه بازگشتی فوق باشند، آنگاه $U_n + P_n$ یک جواب عمومی رابطه بازگشتی ناهمگن فوق است. به دست آوردن قسمت U_n همواره ساده

بوده و با قرار دادن $f(n)=0$ و تبدیل معادله به حالت همگن طبق قسمت قبلی به دست می‌آید. ولی به دست آوردن جواب خصوصی P_n ممکن است به سادگی امکان‌پذیر نباشد و ابتدا به کمک $f(n)$ باید آن را حدس زد و سپس با جایگذاری در رابطه اصلی آن را محاسبه کرد.

مثال ۱۹ : رابطه $a_n = 3a_{n-1} + 5\times 7^n$ برای مقادیر $n \geq 1$ و با شرط اولیه $a_0 = \frac{39}{4}$ را حل کنید.

حل :

$$a_n - 3a_{n-1} = 0 \Rightarrow r-3=0 \Rightarrow r=3$$

$$U_n = \alpha_1 3^n \qquad \text{جواب عمومی :}$$

با توجه به اینکه $f(n)=5\times 7^n$ می‌باشد، جواب خصوصی را به صورت $P_n = C7^n$ حدس می‌زنیم:

$$C7^n = 3C7^{n-1} + 5\times 7^n \Rightarrow 7C - 3C = 5\times 7 \Rightarrow C = \frac{35}{4}$$

$$a_n = (\alpha_1 3^n) + (\frac{35}{4}7^n)$$

$$a_0 = \frac{39}{4} \Rightarrow \frac{39}{4} = \alpha_1 3^0 + \frac{35}{4}7^0 \Rightarrow \frac{39}{4} = \alpha_1 + \frac{35}{4} \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

$$\Rightarrow a_n = 3^n + \frac{5}{4}7^{n+1}$$

مثال ۲۰ : رابطه بازگشتی $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ را حل کنید.

حل : ابتدا جواب عمومی را به دست می‌آوریم :

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r_1 - 2)(r_2 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 2 \quad , \quad r_2 = 3 \Rightarrow U_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n$$

با توجه به اینکه $f(n)=7^n$ می‌باشد، حدس می‌زنیم $P_n = C7^n$ باشد، با جایگذاری در رابطه اصلی داریم:

$$C7^n = 5C7^{n-1} - 6C.7^{n-2} + 7^n \Rightarrow 49C = 35C - 6C + 49$$

$$C = \frac{49}{20} \Rightarrow P_n = \frac{49}{20}7^n$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n + (\frac{49}{20})7^n$$

قاعده ۱ : در حالت کلی اگر در رابطه بازگشتی ناهمگن $f(n)=kq^n$ بوده (که k یک ثابت معلوم است) و q یک ریشه معادله مشخصه نباشد آنگاه جواب خاص را به صورت $P_n = Cq^n$ می‌گیریم و با جایگذاری آن در رابطه بازگشتی ناهمگن، مقدار C را به دست می‌آوریم. مثال‌های فوق اینگونه بودند.

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

ولی اگر در معادله ناهمگن q یک ریشه ساده معادله مشخصه باشد جواب خاص را به صورت Cnq^n در نظر می‌گیریم.

مثال ۲۱ : رابطه $a_n = 3a_{n-1} + 5\times 3^n$ را برای $n \ge 1$ و با شرط اولیه $a_0 = 2$ حل کنید.

حل :

$$a_n - 3a_{n-1} = 0 \Rightarrow r - 3 = 0 \Rightarrow r = 3$$

$$U_n = \alpha 3^n$$

از آنجا که $f(n) = 5\times 3^n$ و $q = 3$ یکی از ریشه‌های ساده معادله همگن فوق است، لذا :

$$P_n = C.n3^n$$

$$\Rightarrow Cn3^n - 3C(n-1)3^{n-1} = 5\times 3^n \qquad \Rightarrow \quad 3^n \text{ طرفین تقسیم بر}$$

$$\Rightarrow Cn - C(n-1) = 5 \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha 3^n + 5n3^n$$

$$a_0 = \alpha 3^0 + 5\times 0\times 3^0 = 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$a_n = 2\times 3^n + 5n3^n \Rightarrow a_n = (2+5n)3^n$$

قاعده ۲ : در حالت کلی اگر در رابطه بازگشتی ناهمگن $f(n) = Kn^q$ بوده (که k یک ثابت معلوم است) و عدد 1 ریشه معادله مشخصه نباشد آنگاه شکل کلی جواب خاص به صورت زیر است :

$$P_n = C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \ldots + C_q n^q$$

ولی اگر 1 ریشه ساده معادله مشخصه باشد، شکل کلی جواب خاص به صورت زیر است :

$$P_n = C_0 n + C_1 n^2 + \ldots + C_q n^{q+1}$$

مثال ۲۲ : جواب عمومی و خصوصی معادله $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n^4$ را به دست آورید.

حل : برای قسمت همگن :

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \ , \ r_2 = 2 \Rightarrow U_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n$$

با توجه به اینکه عدد 1 یک جواب ساده معادله مشخصه است، شکل جواب خاص برابر خواهد بود با :

$$P_n = C_0 n + C_1 n^2 + C_2 n^3 + C_3 n^4 + C_4 n^5$$

قاعده ۳ : اگر در رابطه بازگشتی ناهمگن $f(n) = k$ یعنی عدد ثابتی باشد در واقع حالت خاصی از قاعده ۲ بوده و $P_n = C$ می باشد که با جایگذاری در رابطه بازگشتی ناهمگن مقدار C به دست می‌آید.

مثال ۲۳ : جواب $a_{n+1} = 2a_n + 1$ را که در آن $n \ge 0$ و $a_0 = 0$ است را حل کنید.

$$a_{n+1} - 2a_n = 0 \Rightarrow r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2$$

$$U_n = \alpha 2^n$$
$$P_n = C \Rightarrow C = 2C + 1 \Rightarrow C = -1$$
$$a_n = U_n + P_n \Rightarrow a_n = \alpha 2^n - 1$$
$$a_0 = 0 \Rightarrow 0 = \alpha 2^0 - 1 \Rightarrow \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow a_n = 2^n - 1$$

این مسأله را قبلاً نیز با روش ساده جایگذاری حل کرده بودیم.

قاعده ٤ : اگر $f(n)$ ترکیبی خطی از قواعد ۱و۲و۳ باشد جواب خاص نیز به فرم ترکیب خطی آنها خواهد بود.

مثال ۲٤ : جواب $a_n = a_{n-1} + 4^n + 2^n$ را به دست آورید.

حل :

$$a_n - a_{n-1} = 0 \Rightarrow r - 1 = 0 \Rightarrow U_n = \alpha(1)^n$$
$$f(n) = 4^n + 2^n \Rightarrow P_n = C_1 4^n + C_2 2^n$$

با جایگذاری در معادله ناهمگن اصلی :

$$C_1 4^n + C_2 2^n \equiv C_1 4^{n-1} + C_2 2^{n-1} + 4^n + 2^n$$
$$C_1 4^n + C_2 2^n \equiv (\frac{C_1}{4} + 1)4^n + (\frac{C_2}{2} + 1)2^n$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{C_1}{4} + 1 \Rightarrow C_1 = \frac{4}{3}, C_2 = \frac{C_2}{2} + 1 \Rightarrow C_2 = 2$$
$$\Rightarrow a_n = \alpha(1)^n + \frac{4}{3}(4)^n + 2(2)^n$$

مثال ۲۵ : جواب عمومی و خصوصی معادله $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3^n + n^2 - 4n$ را به دست آورید.

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2 \Rightarrow U_n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2(2)^n$$
$$f(n) = (3^n) + (n^2 - 4n) \Rightarrow P_n = \beta(3)^n + C_0 n + C_1 n^2 + C_2 n^3$$

توجه کنید از آنجا که عدد 1 یک جواب معادله همگن است برای $n^2 - 4n$ باید تا توان ۳ جلو برویم.

مثال ۲٦ : برای رابطه $a_n = 3a_{n-1} + 4n^2 - 2n$ جواب خصوصی را به صورت $P_n = C_0 + C_1 n + C_2 n^2$ در نظر می‌گیریم.

رابطه بازگشتی همگن خطی از درجه سوم و بالاتر

تذکر : حل روابط بازگشتی خطی همگن از درجه سوم و بالاتر که شامل ریشه‌های مجزا و ساده هستند مشابه روابط درجه دوم است.

مثال ۲۷ : رابطه بازگشتی $a_n - a_{n-1} - 4a_{n-2} + 4a_{n-3} = 0$ را با شرایط اولیه $a_0 = \frac{1}{2}$ ، $a_1 = 1$ و $a_2 = 0$ حل کنید.

حل : معادله مشخصه رابطه فوق برابر است با :

$$r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-1)(r+2)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -2, r_3 = 2$$

لذا جواب عمومی به صورت $a_n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3(2)^n$ است :

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2} \\ a_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ a_2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = \frac{-1}{6}, \alpha_3 = 0$$

پس جواب به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2}{3}(1)^n - \frac{1}{6}(-2)^n$$

به طور کلی جواب معادله بازگشتی خطی مرتبه n :

$$a_n = C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \ldots + C_ka_{n-k}$$ (C_iها ثابت‌های حقیقی هستند)

اگر معادله مشخصه زیر k ریشه مجزای $r_1, r_2, \ldots, r_k$ داشته باشد، به صورت زیر است :

$$a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n + \ldots + \alpha_kr_k^n$$

که α_i ها ثابت‌های دلخواه هستند و اگر k مقدار اولیه داده شده باشد، یک جواب خاص برای a_n بـه دست می‌آید.

همچنین اگر در معادله بازگشتی $a_n = C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \ldots + C_ka_{n-k}$ که C_i ها ثابت‌های حقیقی هستند اگر r ریشه m گانه معادله مشخصه باشد $(2 \le m \le k)$، در این صورت قسمتی از جواب عمومی کـه شامل ریشه r است به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\alpha_0r^n + \alpha_1nr^n + \alpha_2n^2r^n + \ldots + \alpha_{m-1}n^{m-1}r^n$$
$$= (\alpha_0 + \alpha_1n + \alpha_2n^2 + \ldots + a_{m-1}n^{m-1})r^n$$

تذکر : در حالت کلی برای رابطه روبه‌رو که a و b و k ثابت هستند : $T(n) = aT(n-k) + b$

حالت اول : $a \ne 1$

$$\text{معادله مشخصه} \Rightarrow r^k - a = 0 \Rightarrow r^k = a \Rightarrow r = a^{\frac{1}{k}}$$

عدد ثابت $= C$ جواب خاص ، جواب قسمت همگن $\Rightarrow \alpha r^n = \alpha a^{\frac{n}{k}}$

با جایگذاری جواب خاص $C = aC + b \Rightarrow C = \frac{b}{1-a}$

$$\Rightarrow T(n) = \alpha a^{\frac{n}{k}} + \frac{b}{1-a} \Rightarrow T(n) = O(a^{\frac{n}{k}})$$

حالت دوم : $a = 1$

$$\Rightarrow r^k = 1 \Rightarrow r = 1$$

جواب قسمت همگن $= \alpha(1)^n = \alpha$

چون عدد 1 ریشه معادله همگن است پس جواب خاص برابر Cn است :

$$Cn = C(n-k) + b \Rightarrow Cn = Cn - Ck + b \Rightarrow C = \frac{b}{k}$$

$$T(n) = \alpha + \frac{b}{k} n \Rightarrow T(n) = O(n)$$

پس در حالت کلی داریم :

$$\boxed{T(n) = aT(n-k) + b \Rightarrow \begin{cases} T(n) = O(a^{\frac{n}{k}}) & \text{اگر } : a \neq 1 \\ T(n) = O(n) & \text{اگر } : a = 1 \end{cases}}$$

مثال ۲۸ :

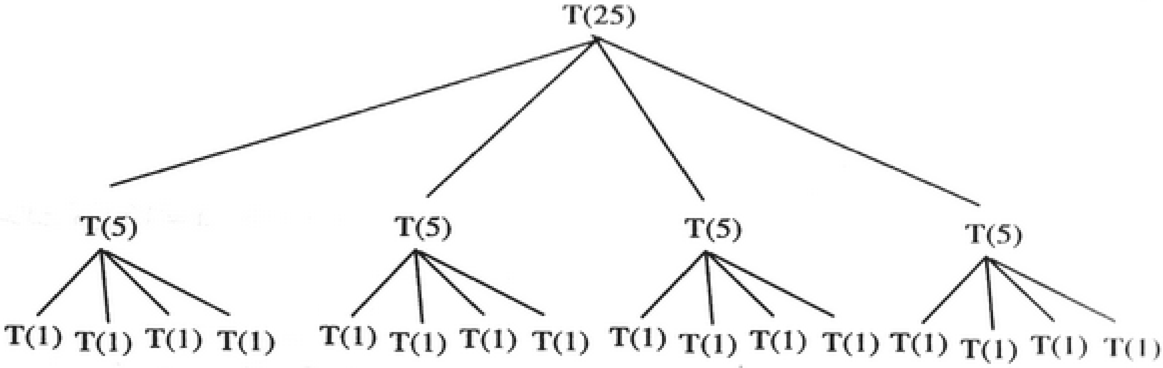
$$T(n) = 3T(n-2) \Rightarrow T(n) = O(3^{\frac{n}{2}})$$

روابط بازگشتی از مدل تقسیم و غلبه

پیچیدگی زمانی بسیاری از الگوریتم‌های بازگشتی به فرم کلی رابطه بازگشتی زیر است :

$$\begin{cases} T(n) = aT(\frac{n}{b}) \\ T(n) = 1 \end{cases}$$

مثلاً برای $a = 4$ و $b = 5$ و $n = 25$ تعداد صدا زدن‌ها به شکل زیر است :



ارتفاع درخت شکل فوق برابر ۲ است یعنی $\log_5^{25} = 2$ که در حالت کلی $\log_b^n$ می‌شود. در هر سطح هر گره به ٤ گره تقسیم می‌شود که در حالت کلی هر گره به a انشعاب تقسیم می‌گردد. پس :

h تعداد کل صدا زدن‌ها در درخت درجه a به ارتفاع $= 1 + a + a + a^2 + \ldots + a^h$

$$= \frac{1 \times (a^{h+1} - 1)}{a - 1} \qquad (a \neq 1)$$

توجه کنید که h را برابر $\log_b^n$ در نظر گرفته‌ایم و ارتفاع، تعداد سطوح منهای یک است.

$$\text{تعداد کل صدازدن‌ها} = \frac{a^{h+1} - 1}{a - 1} = \frac{a^{1+\log_b^n} - 1}{a - 1}$$

مثلاً در شکل فوق که $n = 25$ ، $b = 5$ و $a = 4$ است :

$$\text{تعداد کل صدا زدن‌ها} = \frac{4^{1+\log_5^{25}} - 1}{4 - 1} = \frac{4^3 - 1}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

در حالت کلی :

$$\text{تعداد صدا زدن‌ها} = \frac{a \times a^{\log_b^n} - 1}{a - 1} = \theta(a^{\log_b^n}) = \theta(n^{\log_b^a})$$

پس در حالت کلی داریم :

$$\boxed{\begin{cases} T(n) = aT(\frac{n}{b}) \\ T(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta(n^{\log_b^a}) & (a \neq 1) \\ \theta(\log_b^n) & (a = 1) \end{cases}}$$

یک قضیه اصلی و کلی برای حل روابط تقسیم و غلبه داریم که در حل بسیاری ازمسائل راهگشـا می‌باشـد. از آنجا که اثبات این قضیه قدری طولانی است فقط به ذکر صورت آن اکتفا می‌کنیم.

جواب رابطه بازگشتی زیر که در آن a و b و c و k اعداد مثبت، $a \ge 1$ و $b > 1$ هستند به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} T(n) = aT(\frac{n}{b}) + cn^k \\ T(1) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T(n) = \theta(n^{\log_b^a}) & \text{اگر } a > b^k \\ T(n) = \theta(n^k \log_2 n) & \text{اگر } a = b^k \\ T(n) = \theta(n^k) & \text{اگر } a < b^k \end{cases}$$

مثال ۲۹ : رابطه $T(n) = T(\frac{n}{2})$ که در آن $k = 0$ و $b = 2$ و $a = 1$ است شرط $a = b^k$ درست بـوده و لذا $T(n) = \theta(n^0 \log n)$ یعنی $T(n) = \theta(\log n)$ می‌باشد.

مثال ۳۰ : در رابطه $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$ داریم : $k = 0$ و $b = 2$ و $a = 2$ لـذا شـرط $a > b^k$ یعنی $(2 > 2^0)$ برقرار بوده و در نتیجه :

$$T(n) = \theta(n^{\log_b^a}) = \theta(n^{\log_2^2}) = \theta(n)$$

مثال ۳۱ : در رابطه $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$ داریـم : $k = 1$ و $b = 2$ و $a = 2$ لـذا شـرط $a = b^k$ $(2 = 2^1)$ برقرار بوده و در نتیجه :

$$T(n) = \theta(n^k \log n) = \theta(n \log n)$$

مثـال ۳۲ : در رابطـه $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n^2$ داریـم : $k = 2$ ، $b = 3$ و $a = 3$ لـذا شـرط $a < b^k$ $(3 < 3^2)$ برقرار بوده و در نتیجه :

$$T(n) = \theta(n^k) = \theta(n^2)$$

تذکر : قضیه فوق را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

قضیه : در رابطه بازگشتی $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + cf(n)$

اگر $f(n)$ به صورت $\theta(n^k)$ باشد مشابه حالت قبلی حل می‌شود ولی اگر $f(n)$ به صورت $\theta(n^k)$ نباشد آنگاه :

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + cf(n) \Rightarrow \begin{cases} T(n) = O(n^{\log_b^a}) & \text{اگر } n^{\log_b^a} > O(f(n)) \\ T(n) = O(f(n)) & \text{اگر } n^{\log_b^a} < O(f(n)) \\ T(n) = \log n \times O(f(n)) & \text{اگر } a = b \end{cases}$$

مثال ۳۳ : برای معادله زیر :

$$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \log n$$

داریم :

$$n^{\log_b^a} = n^{\log_2^4} = n^2 \quad و \quad O(f(n)) = \log n \Rightarrow n^2 > \log n$$

$$T(n) = O(n^2)$$

مثال ۳٤ :

$$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n\log n$$

$$n^{\log_b^a} = n^{\log_4^3} = n^{0.79} \quad , \quad O(f(n)) = n\log n \Rightarrow T(n) = O(n\log n)$$

مثال ۳۵ :

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n$$

$$a = b = 2 \Rightarrow T(n) = \log n \times O(f(n)) = \log n . n\log n \quad \Rightarrow T(n) = n\log^2 n$$

مثال ۳٦ :

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log n!$$

$$a = b = 2 \Rightarrow T(n) = \log n \times O(f(n)) = \log n \times \log n!$$

$$\log n \times \log n! < \log n \times \log n^n = \log n \times n \times \log n$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n\log^2 n)$$

نکته : در رابطه بازگشتی $T(n) = T(\frac{a}{b}n) + T(\frac{c}{d}n) + ... + f(n)$ اگر $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + ... = 1$ باشد آنگاه داریم: $T(n) = O(\log n \times O(f(n))$.

مثال ۳۷ : پیچیدگی رابطه بازگشتی $T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2}{3}n) + n^2$ را به دست آورید.

حل :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow T(n) = O(\log n \times (n)^2) = O(n^2 \log n)$$

مثال ۳۸ : $T(n)$ را از رابطه بازگشتی $T(n) = 4T(\frac{n}{4}) + Cn$ بدست آورید.

حل : از طریق قضیه اصلی : $a = b \Rightarrow T(n) = \log n \times O(f(n)) = O(n\log n)$

(راه دوم) از طریق نکته فوق هم داریم :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

$$\Rightarrow T(n)=\log n\times O(f(n))=O(n\log n)$$

مثال ۳۹ : پیچیدگی رابطه بازگشتی $T(n)=2T(\sqrt{n})+\log_2 n$ را به دست آورید.

حل : از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم :

$$n=2^m \quad , \quad m=\log_2^n \Rightarrow T(2^m)=2T(2^{\frac{m}{2}})+m$$

$$t(m)=2t(\frac{m}{2})+m \xrightarrow[\text{حالت } a=b \text{ و}]{\text{طبق قضیه اصلی}} t(m)=O(m\log m)$$

$$\Rightarrow T(n)=O(\log n.\log(\log_2 n))$$

تحقیق و مطالعه

ـ در کتاب‌های ساختمان گسسته یا ریاضیات گسسته بحث‌های مفصلی در مورد توابع مولـد و کـاربرد آنـها در حل روابط بازگشتی شده است. این مباحث را مطالعه کنید.