بسمه تعالی

نام جزوه: دینامیک ماشین

نام استاد: **دکتر اسلامی**

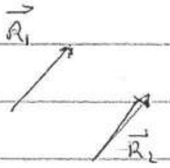
دانشگاه: **صنعتی امیرکبیر**

Unit II

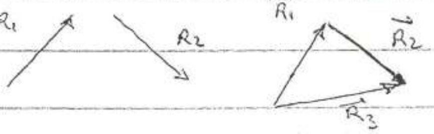
Velocity Analysis of Linkages

objective 1 : تعریف بردارها و خواص آن ها :

۱ـ دو بردار مساوی $\vec{R_1} = \vec{R_2}$

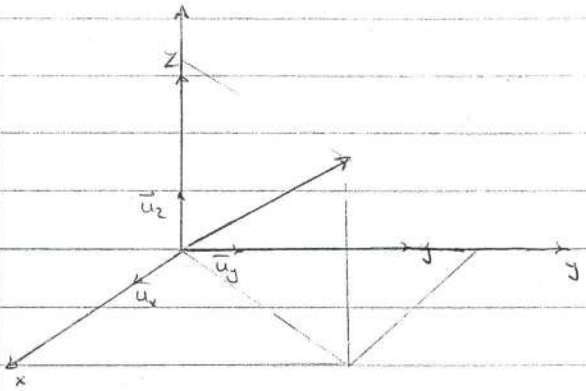


۲ـ جمع دو بردار



$\vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{R_3}$

۳ـ بردار برحسب مؤلفه ها :



$$\vec{R} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + Z\bar{u}_z$$

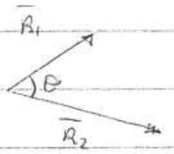
$$\bar{R} = r\bar{u}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\bar{U} = \frac{x}{r}\bar{u}_x + \frac{y}{r}\bar{u}_y + \frac{Z}{r}\bar{u}_z$$

۴ـ حاصلضرب داخلی (Dot product)

$$R_1 . R_2 = R_1 R_2 \cos\theta$$



۵- حاصلضرب خارجی (cross product)

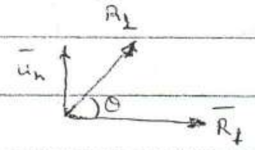
$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

$$\overline{R}_1 \times \overline{R}_2 = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\overline{R}_1 = x_1\overline{u}_x + y_1\overline{u}_y + z_1\overline{u}_z$$

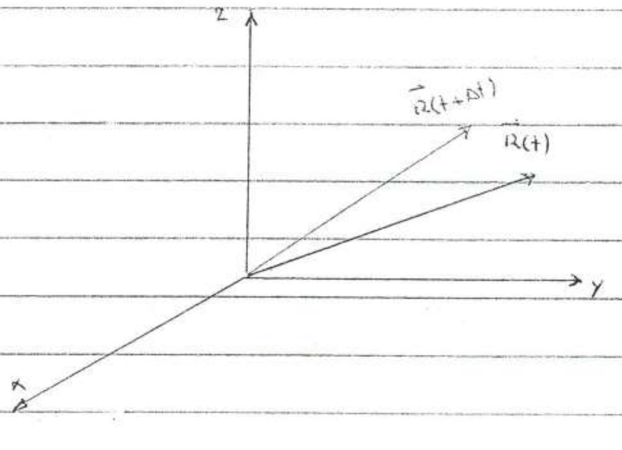
$$\overline{R}_2 = x_2\overline{u}_x + y_2\overline{u}_y + z_2\overline{u}_z$$

$$\overline{R}_1 \times \overline{R}_2 = R_1 R_2 \sin\theta \, \overline{u}_n$$



۶- مشتق یک بردار نسبت به زمان:

$$\vec{R} = \vec{R}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$$

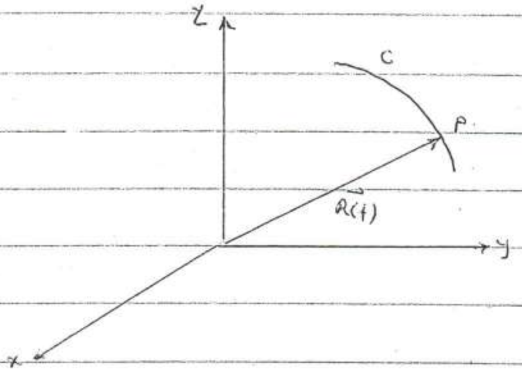


objective 2 — تعیین سرعت یک ذره نسبت به متغیرهای مسیر:

مشتق بردار مکان نسبت به زمان سرعت یا (velocity) است.

2. بنابر تعریف velocity یک ذره متحرک در فضا عبارت است از مشتق position vector نسبت

بزمان



$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$$

از سیستم کوردهای کمک برحسب متغیرهای مسیر (cordinate systems in term of زمانی استفاده
path variable

می‌گیم یک ذره‌ی متحرک روی مسیری که معادله مسیر نسبت به کوردینات xyz معلوم باشد در حال

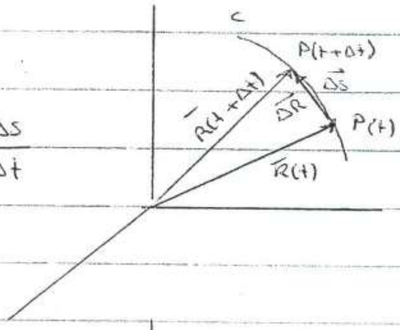
حرکت است.

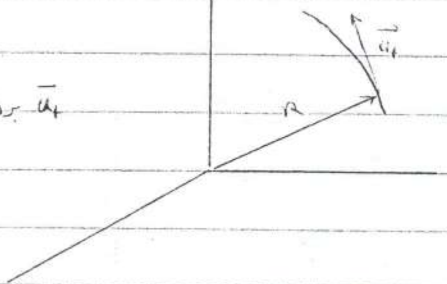
بنابه تعریف سرعت ذره‌ی P برابر است با $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$ یا برابر است با:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \\ \Delta s} \to 0} \frac{\overleftrightarrow{\Delta R}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \frac{ds}{dt} \cdot \text{بردار واحد}$$



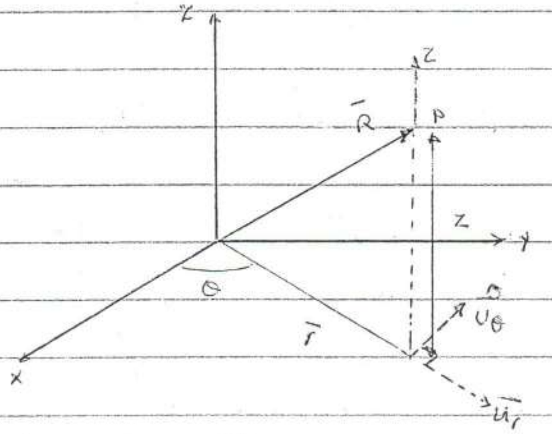


$\vec{u_t}$ بردار واحد مماس بر مسیر در جهت حرکت است

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{U_t}}$$

محور مختصات استوانه‌ای:

از این محور مختصات زمانی استفاده می‌کنیم که ذره بر روی مسیر دایره‌ای حرکت نماید و دارای حرکت دورانی باشد.



$\vec{R} = \bar{r}\bar{u}_r + z\vec{u}_z$

$0 \le \theta \le 2\pi$

بنابر تعریف velocity ذره‌ی P برابر است با:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = \frac{d\bar{r}}{dt}\vec{u}_r + \bar{r}\frac{d\bar{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

$$+ z\frac{d\bar{u}_z}{dt}$$

از دینامیک:

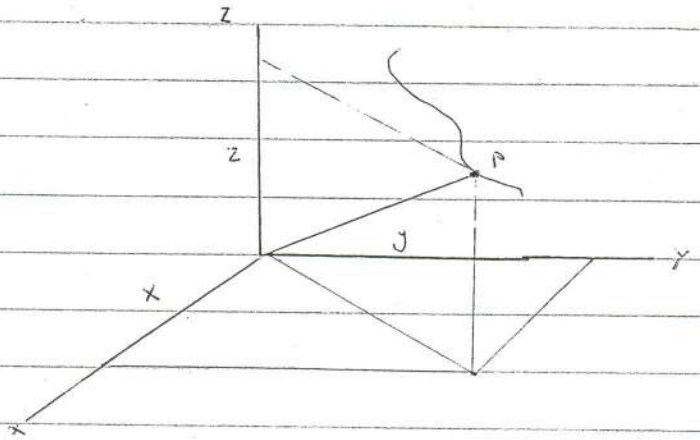
$$\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \dot{\theta}d\theta$$

$$\frac{du_z}{dt} = 0$$

$$\boxed{\bar{v} = \dot{\bar{r}}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}$$

Part III سرعت در مختصات xyz

سیستم در مختصات xyz مفروض است:



$$\bar{R} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z \Rightarrow V = \frac{dR}{dt} = \dot{x}\bar{u}_x + \dot{y}\bar{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

objective 3 : کاربرد اعداد مختلط:

یک عدد مختلط را به شکل زیر نمایش داده می شود: $R = re^{j\theta}$

r = magnitute

θ = argument

$j = \sqrt{-1}$

$$R = \underbrace{r(\cos\theta}_{\text{real part}} + \overbrace{j\sin\theta)}^{\text{imaginary part}}$$

برای عدد مختلط زیر: $R = a + jb$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

جمع اعداد مختلط:

$$R_1 = r_1 e^{J\theta_1}$$

$$R_2 = r_2 e^{J\theta_2}$$

$$R_1 + R_2 = r_1 e^{J\theta_1} + r_2 e^{J\theta_2} = r_1 \cos\theta_1 + J r_1 \sin\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 + J r_2 \sin\theta_2$$

$$= \underbrace{(r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)}_{\text{Real}} + J\underbrace{(r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2)}_{\text{imaginary}}$$

منطبق بر جمع بردارها است.

تفریق اعداد مختلط:

$$R_1 - R_2 = (r_1 \cos\theta_1 - r_2 \cos\theta_2) + J(r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2)$$

منطبق بر تفریق بردارها است.

حاصلضرب اعداد مختلط:

$$R_1 . R_2 = r_1 e^{J\theta_1} . r_2 e^{J\theta_2} = r_1 r_2 e^{J(\theta_1 + \theta_2)}$$

منطبق بر هیچ نوع ضرب برداری (داخلی و خارجی) نمی باشد.

تقسیم اعداد مختلط:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1 e^{J\theta_1}}{r_2 e^{J\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{J(\theta_1 - \theta_2)}$$

مشتق اعداد مختلط :

$$R = re^{J\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{J\theta} + Jr\dot{\theta}e^{J\theta}$$

منطبق بر مشتق بردارها است.

در بردارها $\bar{R} = r\bar{u}_r$ و $v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta$ با مقایسه با مشتق اعداد مختلط :

$$\frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{J\theta} + Jr\dot{\theta}e^{J\theta} \qquad \bar{u}_r = e^{J\theta}$$

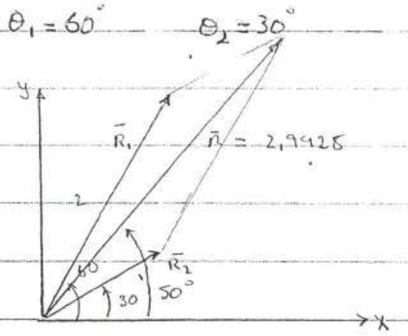
$$\bar{u}_\theta = Je^{J\theta}$$

مثال : حالت مختلط برداری را حل کنید :

$r_1 = 2$ $\quad r_2 = 1$

$\theta_1 = 60°$ $\quad \theta_2 = 30°$

اگر بردار باشند



اگر مختلط باشند

$R_1 = 2e^{J60} \qquad R_2 = 1e^{J30}$

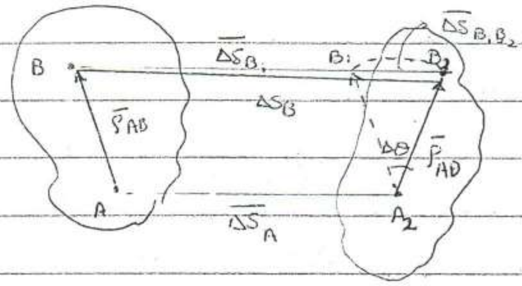
$$R_1 + R_2 = 2\cos 60 + J\,2\sin 60 + 1\cos 30 + J\sin 30$$

$$= (2\cos 60 + \cos 30) + J(2\sin 60 + \sin 30) = 1.866 + J2.232 = R_3$$

$$r_3 = \sqrt{1{,}866^2 + 2{,}232^2} = 2{,}9928$$

$$\bar{\theta}_3 = \tan^{-1}\frac{2{,}232}{1{,}866} = 50°$$

objective 9: تعیین رابطه بین سرعت دو نقطه از یک جسم صلب



pure translation حالتی است که سرعت همه‌ی نقاط یکسان باشد

طبق قضیه chasler هر حرکت کلی یک جسم صلب برابر است با یک pure translation

به‌علاوه‌ی یک pure rotation .

از روی شکل: $\overline{\Delta S}_B = \overline{\Delta S}_{B_1} + \overline{\Delta S}_{B_1B_2}$

$$\overline{\Delta S}_B = \overline{\Delta S}_A + \overline{\Delta S}_{B_1B_2} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta S}_{B_1B_2}}{\Delta t}$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_{AB} \quad Ⓐ \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A} \quad Ⓑ$$

$$\overline{V}_{B/A} = \overline{\omega} \times \overline{\rho}_{AB} \quad Ⓒ$$

رابطه‌ی ⓑ یک مثلث برداری است.

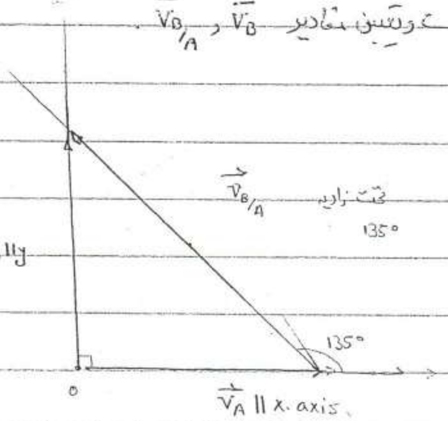
مثال: از یک جسم صلب اطلاعات زیر معلوم است:

1- $\bar{V}_A$ برابر $20\ ^{in}/_{s}$ موازی محور x

2- $\bar{V}_B$ موازی محور y حرکت می‌کند

3- $\bar{V}_{B/A}$ تحت زاویه 135° با محور x حرکت می‌کند

مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت و تعیین مقادیر $\bar{V}_B$ و $\bar{V}_{B/A}$.



1- مبدا O_v و مقیاس مناسبی انتخاب می‌کنیم $1in = 10\ ^{in}/_{sec}$

2- سرعت $\bar{V}_A$ را از مبدا O_v رسم می‌کنیم

3- سرعت نقطه B:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{B/A}$$

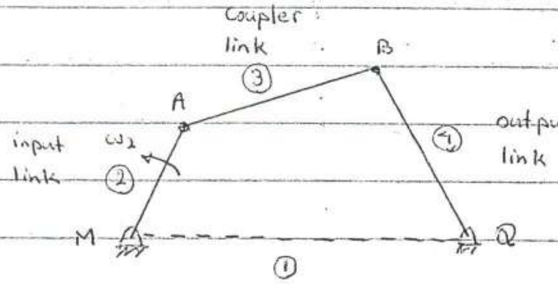
چون از مثلث برداری بالا $\bar{V}_A$ معلوم و $\bar{V}_B \parallel y_{axis}$ و $\bar{V}_{B/A}$ تعداد زاویه 135° نسبت به x_{axis} می‌باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

4- با استفاده از مقیاس
$$\begin{cases} V_B = 20\ \frac{in}{sec} \\ V_{B/A} = 20\sqrt{2}\ ^{in}/_{sec} \end{cases}$$

objective 5

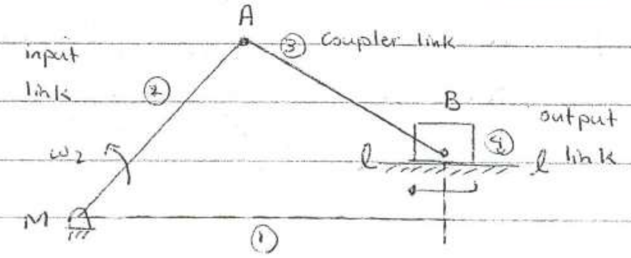
مکانیزم های چهار میله ای ساده:

هدف: سرعت دورانی ساده و با انتخاب ابعاد مناسب یک حرکت دلخواه را بدست آوریم.

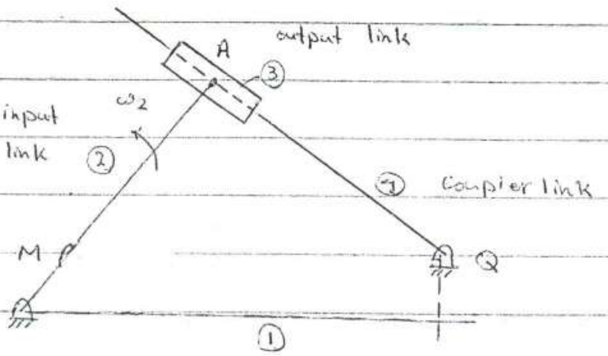


Four-bar linkage System

هدف: با سرعت دورانی ساده و با انتخاب ابعاد مناسب حرکت خطی دلخواه را بدست می‌آوریم.

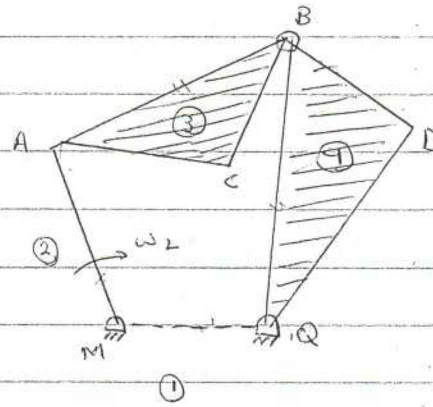


Slider crank Mechanism



Inverted slider crank Mechanism

مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم چهار میله‌ای زیر



MA = 4"

AB = 8"

QB = 5,5"

MQ = 5"

$\omega_2 = 94,2$ rad/sec

ترسیم:

۱- مبدا را Q و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم — 1in $\xrightarrow{10\ \text{ft/sec}}$

2- سرعت نقطه‌ی A — $\vec{V}_A = \vec{V}_M + \vec{V}_{A/M}$

$V_A = MA\cdot\omega_2 = 94.2 \times 4 = 376,8 \times \frac{1}{12} = 31,4\ \text{ft/sec} \perp MA$

3- سرعت نقطه‌ی B — $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $V_{B/A}$ عمود بر AB و V_B عمود بر QB می‌باشد

لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

۴- با استفاده از مقیاس

$V_{B/A} = 20$ ft/sec

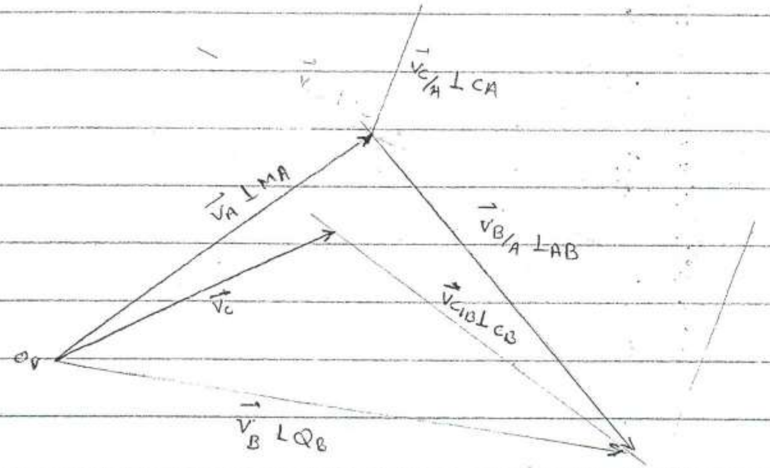
$V_B = 34$ ft/sec

5- سرعت دورانی میله‌های ③ و ④

$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{20}{8} \times 12 = 30$ rad/sec (ساعت

$\omega_4 = \frac{V_B}{QB} = \frac{34}{5,5} \times 12 = 74.2$ rad/sec (ساعت

V

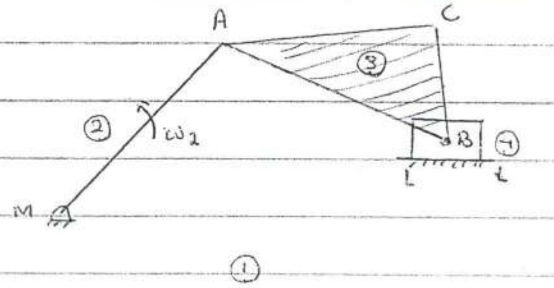


5: سرعت نقطه‌ی C:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}$$
$$\vec{V}_C = V_B + \vec{V}_{C/B}$$

چون $\vec{V}_{C/A}$ عمود بر CA و $\vec{V}_{C/B}$ عمود بر BC می‌باشد لذا از تلاقی دو معادله‌ی برداری بالا $\vec{V}_C$ پیدا می‌شود

مثال: مطلوبست دیاگرام سرعت یک slider _ cranck Mechanism



MA = 2"

AB = 3"

AC = 1,5"

$n_2 = 600$ rpm

1_ مبدأ O_V و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم   1in ⟶ 5,23 ft/sec

2. سرعت نقطه‌ی A:

$$\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi \times 600}{60} = 62,8 \ \text{rad/sec}$$

$$\vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_M} + \vec{V}_{A/M} \Rightarrow V_{A/M} = \omega_2 \times AM = 62,8 \times \frac{2}{12} = 10,46 \ \text{ft/sec} \perp MA12$$

3. سرعت نقطه B $: \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$

چون $\vec{V}_{B/A}$ عمود بر $\vec{AB}$ و $\vec{V}_B$ موازی LL است لذا مثلث برداری قابل ترسیم است

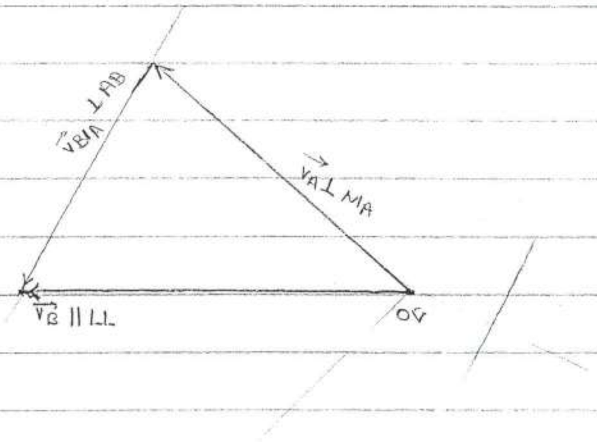
۴- با استفاده از مقیاس

$V_B = 10,46$ Ft/sec

$V_{B/A} = 6,59$ Ft/sec

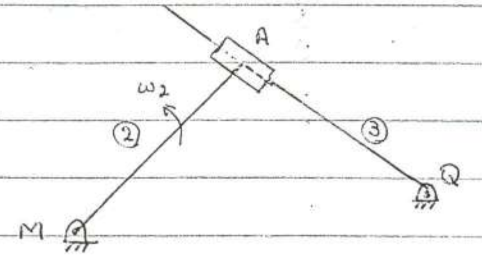
5. سرعت دورانی میله ③

$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = \frac{6,54}{3} \times 12 = 26,16 \ \text{rad/sec}$$ (ساعتی)



۸

مثال ۲ : مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم inverted slider crankk



MA = 2''

MQ = ۴٫۲''

$n_2 = 600$ rpm

$Q_A = 3''$

ترسیم :

۱- مبدا o_v و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم   1in = 5.23 ft/sc

۲- سرعت نقطه A روی میله ② (A_2) $\vec{V}_{A_2} = \cancel{\vec{V}_M} + \vec{V}_{A_2/M}$

$V_{A_2/M} = AM \cdot \omega_2 = \frac{2}{12} \times \frac{2\pi 600}{60} = 10{,}96$ ft/sec $\perp AM$

3. سرعت نقطه A_3 (نقطه A روی میله ③) : $\vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_2} + \vec{V}_{A_3/A_2}$

چون $\vec{V}_{A_3} \perp QA$ و $\vec{V}_{A_3/A_2} \parallel AQ$ می باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

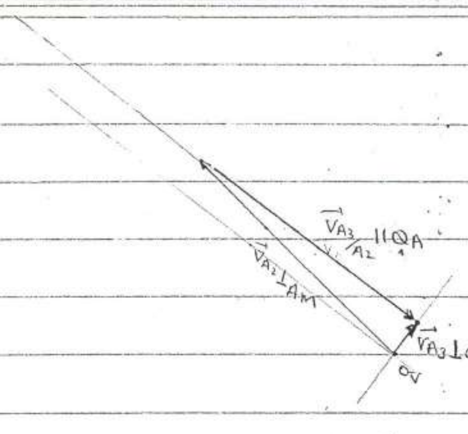
۴- پس مقیاس :

$V_{A_3/A_2} =$ [illegible]

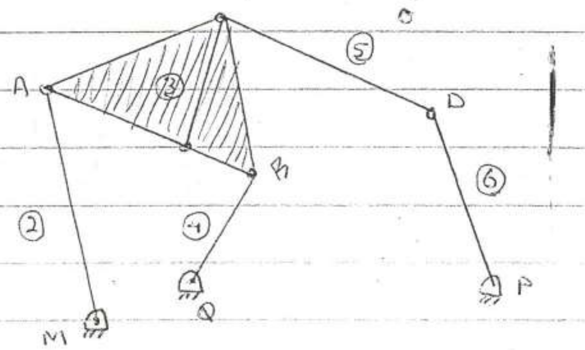
$V_{A_3} = ٫6 \times 5{,}23$

5 سرعت دورانی میله 3 :

$\omega_3 = \frac{V_{A_3}}{QA} = \frac{٫6 \times 5{,}23 \times 12}{3} = 12.55$ rad/sec   ساعت)



مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام سرعت مکانیزم ۵ میله‌ای:



MA = 2"

PD = 2"

$n_2 = 900$ rpm

ترسیم:

۱. مبدأ Ov و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم 1in = 5,23 ft/sec

2. سرعت نقطه A
$$\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi 900}{60} = 94,2 \frac{rad}{sec}$$

$$\vec V_{A_2} = \cancel{\vec V_M} + \vec V_{A_2/M}$$

$$\vec V_{A/M} = AM \cdot \omega_2 = 2 \times \frac{94,2}{12} = 15,7 \ Ft/_{sec} \perp AM$$

3. سرعت نقطه B: $\vec V_B = \vec V_A + \vec V_{B/A}$

چون $\vec V_{B/A} \perp BA$ و $\vec V_B \perp QB$ می‌باشد لذا مثلث برداری قابل ترسیم است.

4_ سرعت نقطه‌ی C

$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}$

$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$

چون $\vec{V}_{C/A} \perp AC$ و $\vec{V}_{C/B} \perp BC$ و $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ معلوم می‌باشند لذا از تلاقی دو خط‌های ۱ و ۲ $\vec{V}_C$ بدست می‌آید

5. سرعت نقطه‌ی D

$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{D/C}$

چون $\vec{V}_D \perp PD$ و $\vec{V}_{D/C} \perp DC$ لذا مثلث برداری قابل رسم است.

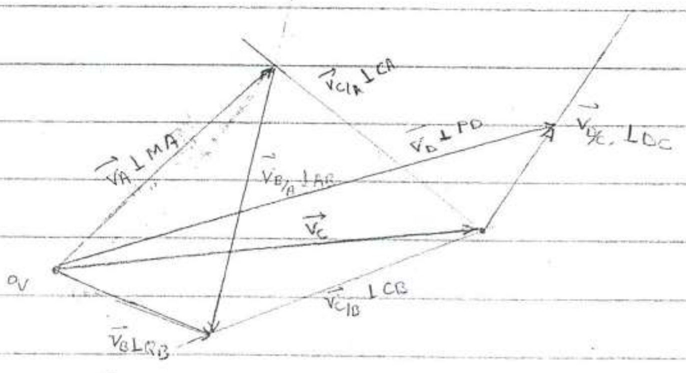
6. از تساوی:

$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{AB} = 5,23 \times \frac{۲,۹}{۱,۹ \times 12} = 62,8 \ \text{rad/sec} \ \overset{\text{ساعت}}{\circlearrowright}$$

$$\omega_4 = \frac{V_B}{QB} = 5,23 \times \frac{2,6 \times 12}{1,75} = 93,6 \ \text{rad/sec} \ \circlearrowright \ \text{ساعت}$$

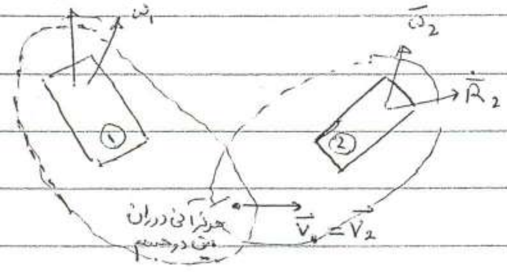
$$\omega_5 = \frac{V_{D/C}}{DC} = 5,23 \times \frac{.6 \times 12}{2,1} = 17,9 \ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \ \circlearrowleft \ \text{مثلثاتی}$$

$$\omega_6 = \frac{V_D}{PD} = 5,23 \times \frac{3,3 \times 12}{2} = 103,55 \ \circlearrowright \ \text{ساعت}$$



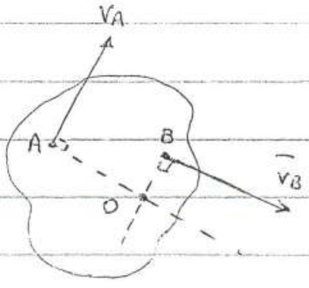
تعیین مرکز آنی دوران : objective 7 :

مرکز آنی دوران بین دو جسم صلب عبارت است از نقطه‌ای در روی دو جسم و یا در امتداد فرضی دو جسم قرار گرفته و velocity آن بین دو جسم در آن نقطه یکسان باشد.



حالت خاص : مرکز آنی دوران یک جسم و زمین :

چون velocity زمین صفر فرض می‌شود مرکز آنی دوران جسم و زمین عبارت است از نقطه‌ای در روی جسم و یا در امتداد فرضی آن قرار گرفته و velocity آن صفر می‌باشد



O : مرکز آنی دوران بین جسم و زمین

اگر جسمی تنها انتقال داشته باشد مرکز آنی دوران آن در بی‌نهایت قرار دارد.

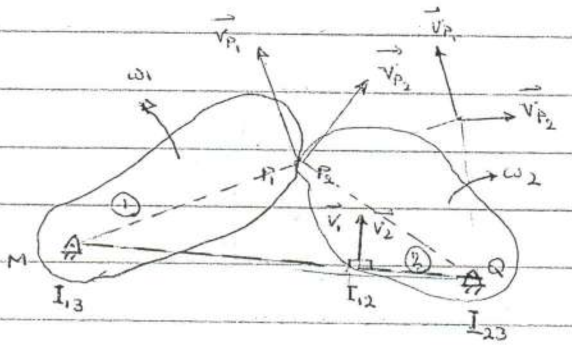
تعداد کل مراکز آنی دوران بین n جسم برابر است با :

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

Kennedy's Theorem

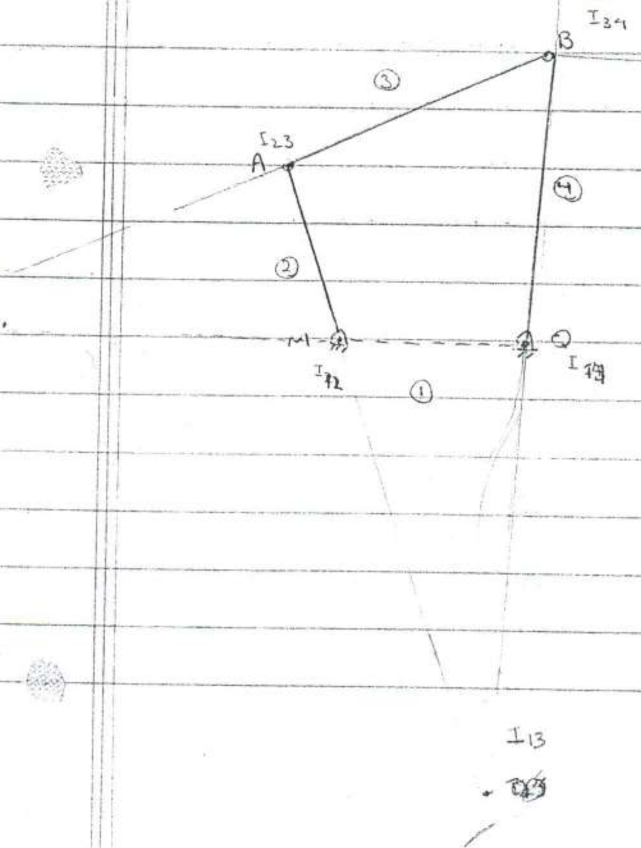
هر سه جسم صلب نسبت به هم مجموعاً دارای سه مرکز آنی دوران می باشند که روی یک خط مستقیم قرار دارند

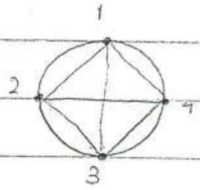
اثبات :

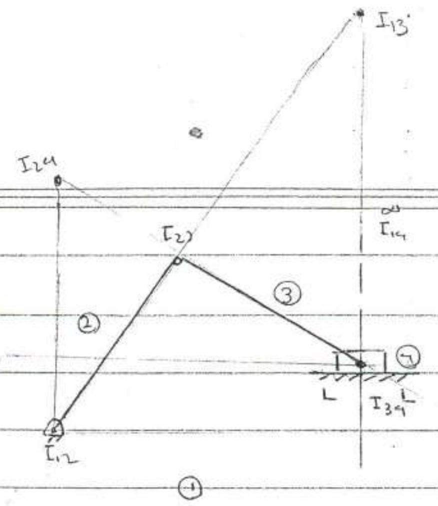


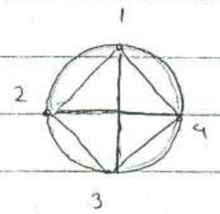
③

$$I_{13}I_{12} \times \omega_1 = I_{12}I_{23} \times \omega_2$$









11

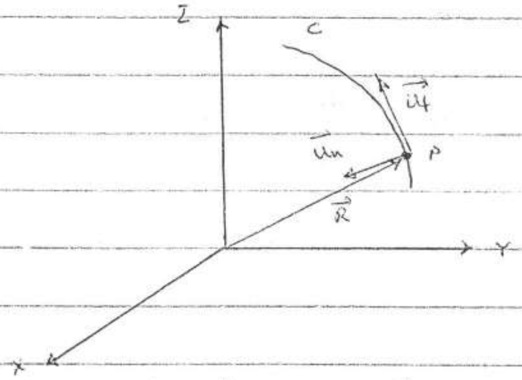
Unit III : Acceleration Analysis of Linkages :

objective 1 : تعریف شتاب در کورهای مختصات کلی :

با به تعریف Velocity : $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$

و تعریف Acceleration : $\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\Big)_{xyz}$

Part I : شتاب در کور مختصات برحسب متغیرهای مسیر



$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}\Big)_{xyz}$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u_t}$$

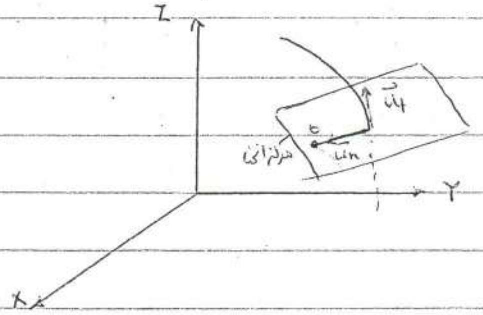
$$\vec{A} = \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u_t} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u_t}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{d\vec{u_t}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

از دینامیک داریم : $\frac{d\vec{u_t}}{ds} = \frac{\vec{u_n}}{\rho}$

لذا داریم : $\vec{A} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u_t} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\vec{u_n}}{\rho}$

ρ شعاع انحناء $\vec{u_n}$ برداریکه در جهت مرکز انحنا است و همه در osculating plane قرار دارند



osculating plane

شتاب در مختصات استوانه‌ای : Part II

$$\vec{A} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{\bar{r}}\vec{u}_r + \bar{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{A} = \ddot{\bar{r}}\bar{u}_r + \dot{\bar{r}}\frac{d\bar{u}_r}{dt} + \dot{\bar{r}}\dot{\theta}d\vec{u}_\theta + \bar{r}\ddot{\theta}u_\theta + \bar{r}\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{\bar{u}}_z$$

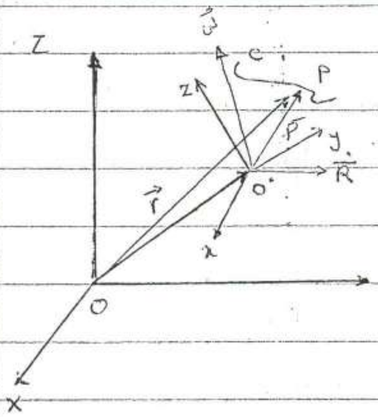
$$\vec{A} = (\ddot{\bar{r}}\bar{u}_r + \dot{\bar{r}}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \bar{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \bar{r}\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \bar{r}\dot{\theta}^2\bar{u}_r + \ddot{z}\bar{u}_z)$$

$$\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\vec{A} = (\ddot{\bar{r}} - \bar{r}\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{\bar{r}}\dot{\theta} + \bar{r}\ddot{\theta})\bar{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

شتاب ذره در دو محور مختصات : Parts III , IV , V

فرض کنید ذره‌ی متحرک P در داخل محور مختصات xyz در حال حرکت است. محور مختصات xyz متحرک دارای حرکت کلی $\vec{R}$ و $\vec{\omega}$ نسبت به محور مختصات اینرسی XYZ می باشد



می‌خواهیم سرعت و شتاب مطلق ذره‌ی P را در محور مختصات مطلق XYZ تعیین کنیم.

$\vec{R}$ = بردار موقعیت مرکز مختصات xyz در XYZ.

$\vec{r}$ = بردار موقعیت ذره‌ی P در XYZ.

همواره رابطه‌ی برداری زیر برقرار است: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

همواره مشتق رابطه‌ی بالا نسبت به زمان در مختصات اینرسی XYZ برقرار است:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{XYZ} + \left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{XYZ} \qquad ⓐ$$

چون ρ در مختصات متحرک xyz که قبلاً تعریف شد لذا مشتق آن در مختصات اینرسی XYZ نسبت به زمان گرفته شده لذا داریم:

$$\left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \qquad ⓑ$$

در معادله‌ی ⓐ قرار می‌دهیم:

$$\left.\frac{dr}{dt}\right)_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{XYZ} + \left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{xyz} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}$$

و یا داریم:

$$\overline{V}_{XYZ} = \dot{\vec{R}} + \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

برای محاسبه‌ی شتاب از سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\Big)_{XYZ} + \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big)_{XYZ} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big)_{XYZ} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}\Big)_{XYZ} \quad ⓒ$$

چون $\vec{V}_{xyz}$ و $\vec{\rho}$ در مختصات متحرک xyz تعریف می‌شوند ولی مشتق آن‌ها نسبت به زمان در مختصات اینرسی گرفته شده ولذا :

$$\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz}$$

$$\frac{d\rho}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\rho}{dt}\Big)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

در رابطه‌ی ⓒ قرار می‌دهیم :

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\Big)_{XYZ} + \overset{\vec{A}_{xyz}}{\boxed{\frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}\Big)_{xyz}}} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \frac{d\omega}{dt}\Big)_{XYZ} * \vec{\rho}$$

$$+ \vec{\omega} \times \underset{\vec{V}_{xyz}}{\boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt}\Big)_{xyz}}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

بنابراین :

$$\vec{A}_{XYZ} = \ddot{\vec{R}} + \vec{A}\Big)_{xyz} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

در معادلات فوق :

$\vec{V}_{XYZ}$: سرعت ذره در مختصات مطلق XYZ

$\vec{A}_{XYZ}$: شتاب ذره در مختصات مطلق XYZ

$\dot{\vec{R}}$: سرعت مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

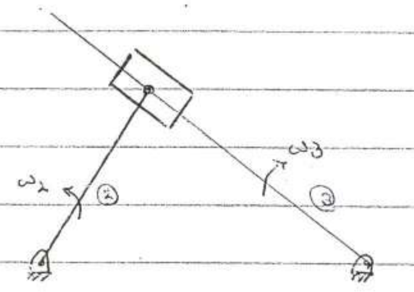
$\ddot{\vec{R}}$: شتاب مرکز مختصات متحرک xyz در مختصات مطلق XYZ

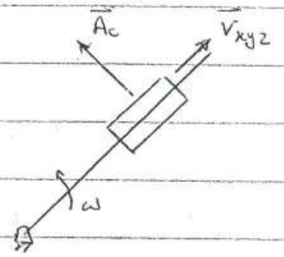
$\vec{V}_{xyz}$: سرعت ذره P در مختصات متحرک xyz

$\vec{a}_{xyz}$: شتاب ذره P در مختصات متحرک xyz

Coriolis acceleration : $2\omega \times V_{xyz}$

و زمانی بوجود می آید که جسم دارای دوران باشد و همزمان سرعت خطی هم داشته باشد





جهت شتاب کوریولیس از قانون دست راست بدست می آید

کاربرد اعداد مختلط : objective 2

$$R = re^{j\theta} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \dot{r}e^{j\theta} + jr\dot{\theta}e^{j\theta}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_r = e^{j\theta}$$

$$v = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\theta}\bar{u}_\theta \qquad \bar{u}_\theta = je^{j\theta}$$

حال برای بدست آوردن شتاب دوباره از رابطه ی بالا مشتق می گیریم :

مشتق دوم اعداد مختلط :

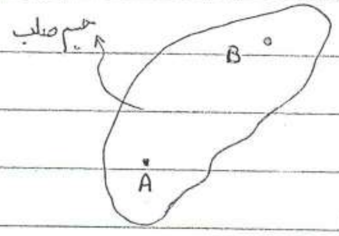
$$\frac{d^2R}{dt^2} = \ddot{r}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + j\dot{r}\dot{\theta}e^{j\theta} + jr\ddot{\theta}e^{j\theta} - r\dot{\theta}^2e^{j\theta}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{j\theta} + j(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{j\theta}$$

objective 3

شتاب بین دو نقطه از یک جسم صلب

اثبات شد: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB}$



از رابطه‌ی سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt}\Big)_{XYZ} = \frac{d\vec{V}_A}{dt}\Big)_{XYZ} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})$$

و یا:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})}_{\vec{A}_{B/A}}$$

لذا داریم:

$$\boxed{\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}}$$

که:

$$\vec{A}_{B/A} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB}}_{\vec{A}^t_{B/A}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})}_{\vec{A}^r_{B/A}}$$

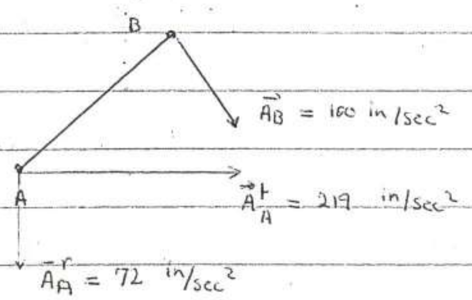
زیرا:

$$\vec{A}^t_{B/A} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} \perp AB$$

$$\vec{A}^r_{B/A} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB}) \parallel AB$$

همواره مقدار $A^r_{B/A}$ مشخص است اما ابتدا از رسم دیاگرام سرعت

مثال 3: از جسم صلب AB شتاب نقاط A و B در شکل نشان داده شده‌اند دیاگرام شتاب را رسم کنید



AB = 1in

ترسیم:

۱- مبدأ O_A و مقیاس مناسب را رسم می‌کنیم: $1\text{in} = 50\ \text{in/sec}^2$

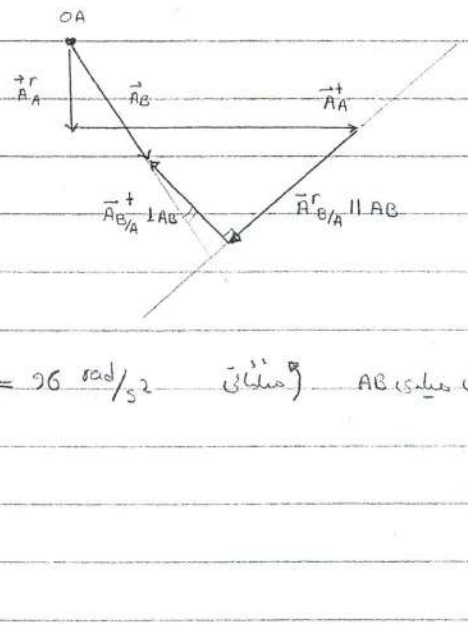
2- شتاب نقطه‌ی B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A}$$

برحسب مؤلفه‌ها

$$\vec{A}_B = \vec{A}^r_A + \vec{A}^t_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A}$$

چون $\vec{A}^r_{B/A}$ موازی AB، $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می‌باشند لذا چندضلعی برداری قابل ترسیم است:

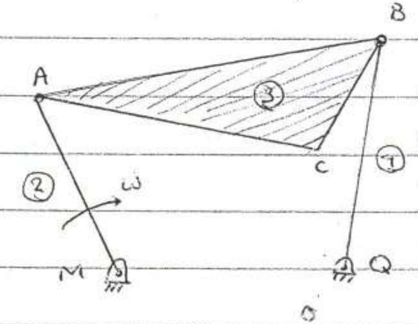


3. شتاب دورانی میله‌ی AB (مثلثاتی) $\alpha_{AB} = \dfrac{A^t_{B/A}}{AB} = \dfrac{96}{1} = 96\ \text{rad/s}^2$

objective 5

روش ترسیم دیاگرام شتاب مکانیزم ها

مثال : مکانیزم چهارمیله ای زیر مفروض است . مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب .



$MA = 4''$

$AB = 8''$

$QB = 5.5''$

$MQ = 5''$

$\omega_2 = 94.2 \ rad/sec$

$\alpha_2 = 0$

$\omega_3 = 30 \ rad/s$

$\omega_4 = 74.2 \ rad/s$

ترسیم :

۱. مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب میکنیم . $1in = 1000 \ ft/sec^2$

2. شتاب نقطه A :

$$\vec{A}_A = \cancel{\vec{A}_M} + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}^r_{A/M} + \cancel{\vec{A}^t_{A/M}}$$

$$A^r_{A/M} = MA \times \omega_2^2 = \frac{4}{12} \times (94.2)^2 = 2960 \ ft/sec^2 \quad \parallel AM$$

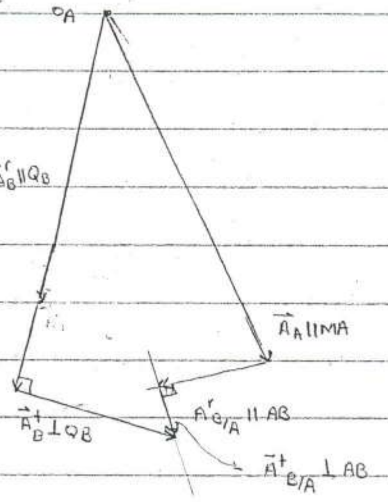
3. شتاب نقطه B :

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} \Rightarrow \vec{A}^r_B + \boxed{\vec{A}^t_B} = \vec{A}_A + \vec{A}^r_{B/A} + \boxed{\vec{A}^t_{B/A}} \quad ⓐ$$

$$A^r_B = BQ \times \omega_4^2 = \frac{5.5}{12} \times (74.2)^2 = 2520 \ ft/sec^2 \quad \parallel QB$$

$$A^r_{B/A} = AB \times \omega_3^2 = \frac{8}{12} \times 30^2 = 600 \ ft/sec \quad \parallel AB$$

چون $\vec{A}^t_B$ عمود بر QB و چون $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می باشد لذا چندضلعی بردارها قابل ترسیم است :

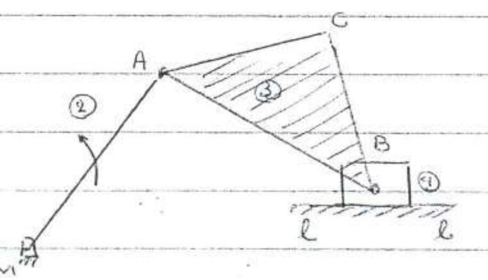


۴: با توجه به مقیاس داریم : جهت $\vec{A}^t_B$ و $\vec{A}^t_{B/A}$ با توجه به معادله (a) معلوم رسم می‌شود جهت آن‌ها با توجه به مقیاس معلوم می‌شود

5 : شتاب زاویه‌ای : ساعت $\alpha_3 = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{120}{8/12} = 180 \ rad/sec^2$

ساعت $\alpha_4 = \frac{A^t_B}{QB} = \frac{1150}{\frac{5,5}{12}} = 2510 \ rad/sec^2$

مثال : مطلوب است رسم دیاگرام شتاب مکانیزم slider - crank :



$MA = 2''$

$AB = 3''$

$AC = 1,5''$

$\omega_2 = 52,8$ rps

$\omega_3 = 26,16$ rps

$\alpha_2 = 0$

ترسیم:

۱- مبدأ O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم: $1in = 200\ Ft/sec^2$

2- شتاب نقطه‌ی A:

$$\vec{A}_A = \cancel{\vec{A}_M} + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}^r_{A/M} + \cancel{\vec{A}^t_{A/M}}$$

$$A^r_{A/M} = AM.\omega_2^2 = \frac{2}{12}\times 62{,}8^2 = 657{,}6 \quad \frac{Ft}{sec^2} \parallel MA$$

3- شتاب نقطه‌ی B:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{B/A} = \vec{A}_A + \vec{A}^r_{B/A} + \vec{A}^t_{B/A} \quad ⓐ$$

چون $\vec{A}_B$ موازی ll و $\vec{A}^t_{B/A}$ عمود بر AB می باشد لذا چند ضلعی برداری قابل ترسیم است.

$$A^r_{B/A} = AB\times\omega_3^2 = \frac{3}{12}\times(26{,}16)^2 = 171 \quad Ft/sec^2 \parallel AB$$

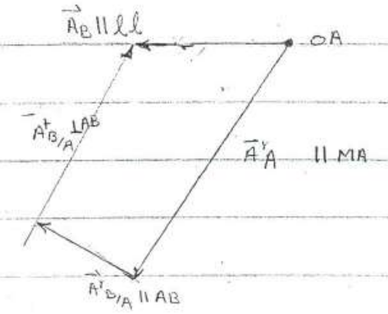
۴- از مقیاس:

$$A_B = 397 \quad Ft/sec^2$$

$$A^t_{B/A} = 496 \quad Ft/sec^2$$

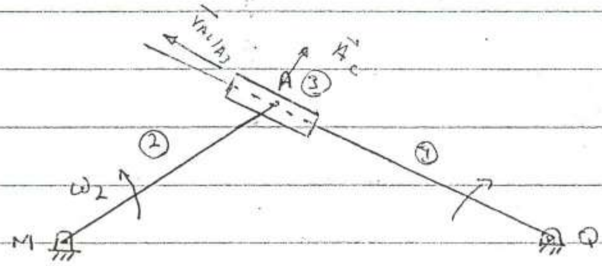
جهت $\vec{A}_B$ و $\vec{A}^t_{B/A}$ از معادله‌ی ⓐ معلوم می‌شود:

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{B/A}}{AB} = \frac{496}{3/12} = 1985 \quad rad/sec^2$$ ساعتی



29.

مثال: مطلوب است ترسیم دیاگرام شتاب مکانیزم زیر.



$MA = 2"$

$MQ = 4.1"$

$\omega_2 = 62.8$ rps

$V_A = 10,46$ ft/sec

$V_{A_2/A_3} = 9.93$ ftps

$QA = 3"$

$\alpha_2 = 0$

ترسیم:

۱. مبدا O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم. 1in = 150 Fps

[illegible]

۲. شتاب نقطه A:

$$\vec{A}_{A_2} = \cancel{\vec{A}_M} + \vec{A}_{A_2/M} = \vec{A}^r_{A_2/M} = MA\,\omega_2^2$$

$$= \frac{2}{12} \times (62,8)^2 = 657 \text{ Fps}^2 \parallel MA$$

۳. شتاب

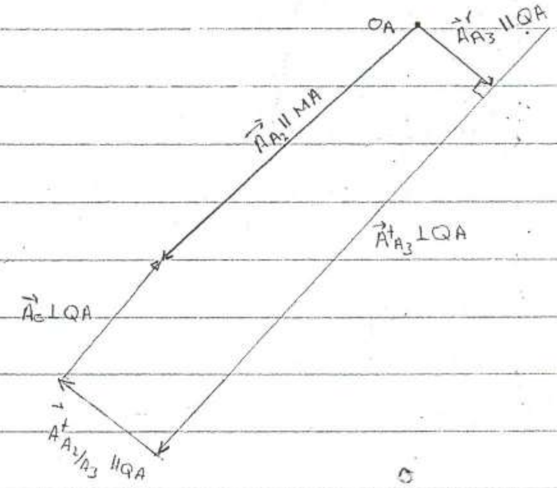
$$\vec{A}_{A_2} = \vec{A}_{A_3} + \vec{A}_{A_2/A_3} + \vec{A}_C = \vec{A}^r_{A_3} + \vec{A}^t_{A_3} + \cancel{\vec{A}^r_{A_2/A_3}} + \vec{A}^t_{A_2/A_3} + \underbrace{\vec{A}_C}_{2\vec{\omega}_3 \times \vec{V}_{A_2/A_3}}$$

$\vec{A}^r_{A_2/A_3}$ برابر صفر در نظر گرفته و A^t آن برابر شتاب نسبی

چون $\vec{A}^t_{A_2}$ عمود بر QA و $\vec{A}^t_{A_2/A_3}$ موازی با QA می‌باشند لذا چند ضلعی بردارها قابل ترسیم است:

$$A^r_{A_3} = QA\,\omega_3^2 = \frac{3}{12} \times (12,55)^2 = 39,9 \text{ ft/sec}^2 \parallel QA$$

$$A_C = 2\omega_3 \times V_{A_2/A_3} = 2 \times 12,55 \times 9/93 = 249 \text{ ft/sec}^2 \perp QA$$



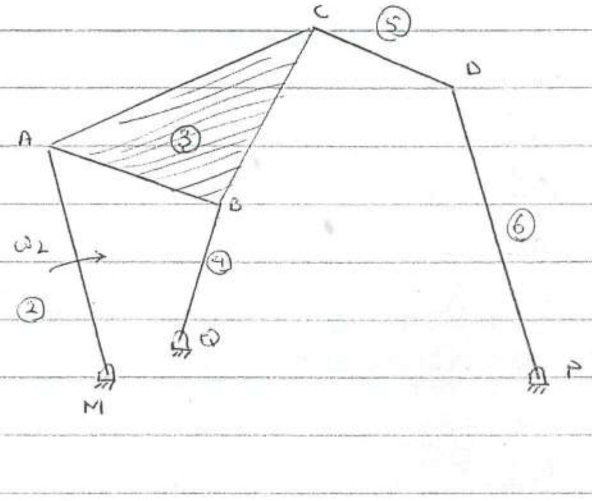
۴. از مقیاس:

$A^t_{A_3} = 857 \ Ft/sec^2$

$A^t_{A_2/A_3} =$

5. شتاب دورانی میله 3: مثلثاتی $\alpha_3 = \frac{A^t_3}{QA} = \frac{857}{3/12} = 3428 \ rad/sec^2$

مثال:



$\omega_2 = 79.2$ rps

$V_A = 15.7$ Fps

$\omega_3 = 62.8$ rps

$\omega_4 = 93.6$ rps

$\omega_5 = 17.9$ rps

$\omega_6 = 103.55$

رسم:

1- مبدأ O_A و مقیاس مناسب انتخاب می‌کنیم. $1\,in = 500\ Ft/sec^2$

2- شتاب A

$$\vec{A}_A = \vec{A}_M + \vec{A}_{A/M} = \vec{A}^r_{A/M}$$

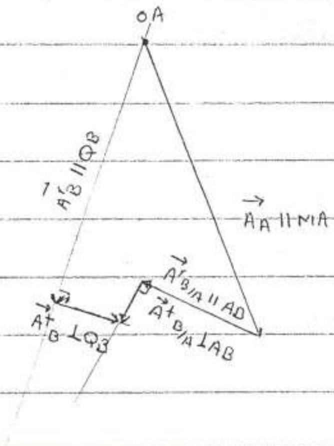
$$A^r_{A/M} = MA \times \omega_2^2 = \frac{2}{12} \times (99,2)^2 = 1479\ Ft/sec^2 \parallel MA$$

3- شتاب نقطه B

$$\boxed{\vec{A}^t_B} + \vec{A}^r_B = \vec{A}_A + \vec{A}^r_{B/A} + \boxed{\vec{A}^t_{B/A}}$$

$$A^r_B = QB\,(\omega_4)^2 = \frac{1,75}{12} \times (93,6)^2 = 1278\ Ft/sec^2 \parallel QB$$

$$A^r_{B/A} = AB \times (\omega_3)^2 = \frac{1,88}{12} \times (62,8)^2 = 618\ Ft/sec^2 \parallel AB$$

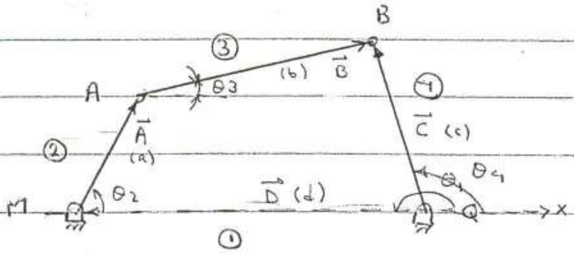


OA
$\vec{A}^r_B \parallel QB$
$\vec{A}_A \parallel MA$
$\vec{A}^r_{B/A} \parallel AB$
$\vec{A}^t_B \perp QB$
$\vec{A}^t_{B/A} \perp AB$

Unit III

Displacement Velocity and Acceleration Analysis of Linkage Using Analytical Methods.

objective 1 تحلیل مکانیزم چهارمیله‌ای



همواره در حین حرکت مکانیزم بالا رابطه‌ی برداری زیر برقرار است :

$$\vec{D} + \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = 0$$

در مقایسه با اعداد مختلط :

$$D = de^{J\theta_1}$$
$$A = ae^{J\theta_2}$$
$$B = be^{J\theta_3}$$
$$C = ce^{J\theta_4}$$

لذا داریم :

$$de^{J\theta_1} + ae^{J\theta_2} + be^{J\theta_3} - ce^{J\theta_4} = 0$$

با تفکیک معادله‌ی بالا به قسمت حقیقی و موهومی :

$$d\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 = 0$$

$$d\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - c\sin\theta_4 = 0$$

چون θ_1 مساوی با 180 :

$$\begin{cases} -d + a\cos\theta_1 + b\cos\theta_2 - c\cos\theta_4 = 0 \\ a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - c\sin\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[-d + a\cos\theta_2 - c\cos\theta_4\right]^2 = (-b\cos\theta_3)^2$$

$$+ \qquad \left[a\sin\theta_2 \;\; c\sin\theta_4\right]^2 = (-b\cos\theta_3)^2$$

$$a^2 \qquad c^2$$

$$d^2 + a^2\cancel{\cos^2}\theta_2 + c^2\cancel{\cos^2}\theta_4 - 2da\cos\theta_2 + 2dc\cos\theta_4 - 2ac\cos\theta_2\cos\theta_4 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$a^2\cancel{\sin^2\theta_2} + c^2\cancel{\sin^2\theta_4} - 2ac\sin\theta_2\sin\theta_4 = b^2\cos^2\theta_3$$

$$d^2 + a^2 - b^2 + c^2 = 2ad\cos\theta_2 + 2dc\cos\theta_4 - 2ac(\cos\theta_2\cos\theta_4 +$$

$$\sin\theta_2\sin\theta_4) = 0$$

$$K_1\cos\theta_4 - K_2\cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$K_1 = d/a$$

$$K_2 = d/c$$

$$K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$\sin\theta/_{4} = \frac{2\tan\theta_4/2}{1 + \tan^2\theta_4/2} \qquad \cos\theta_4 = \frac{1 - \tan^2\theta_4/2}{1 + \tan^2\theta_4/2}$$

برحسب $\tan\theta/2$:

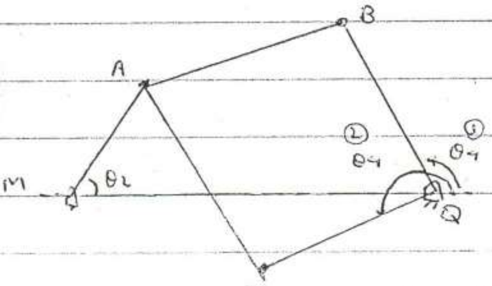
$$A\tan^2\frac{\theta_4}{2} + B\tan\frac{\theta_4}{2} + C = 0$$

$$A = \cos\theta_2 + K_3 - K_2 - K_2\cos\theta_3 \qquad K_1 = \frac{d}{a}$$

$$B = -2\sin\theta_2 \qquad k_2 = \frac{d}{c}$$

$$C = K_1 + K_3 - (1+K_2)\cos\theta_2 \qquad K_3 = \frac{a^2-b^2+c^2+d^2}{2ac}$$

$$\tan\frac{\theta_4}{2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4ac}}{2A}$$



working space : $B^2 - 4ac \geq 0$

به دلیل این که دو شکل مختلف برای شروع حرکت داریم

به همین دلیل ± داریم

working space برای θ_2 است.

هر دو Link MA و BQ می‌توانند 360 بچرخند

در صورتی که طول این دو میله باهم و AB و MQ باهم برابر باشد.

محاسبه‌ی رابطه‌ی سرعت:

از معادله‌ی تغییر مکان نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$de^{j\theta_1} + ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} = 0$$

مشتق رابطه‌ی بالا نسبت به زمان:

3.7 $$aj\omega_2 e^{j\theta_2} + bj\omega_3 e^{j\theta_3} - cj\omega_4 e^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

$$\begin{cases} -a\omega_2 \sin\theta_2 - b\omega_3 \sin\theta_3 + c\omega_4 \sin\theta_4 = 0 \\ a\omega_2 \cos\theta_2 + b\omega_3 \cos\theta_3 - c\omega_4 \cos\theta_4 = 0 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول ω_3 و ω_4 :

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b} \frac{\sin(\theta_4-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_4)}$$

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2}{c} \cdot \frac{\sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_4-\theta_3)}$$

کاسیری رابطه شتاب:

از رابطه ی سرعت نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$aj\alpha_2 e^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2} + bj\alpha_3 e^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3} - c\alpha_4 e^{j\theta_4}$$

$$+ c\omega_4^2 e^{j\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم:

$$-a\alpha_2 \sin\theta_2 - a\omega_2^2 \cos\theta_2 - b\alpha_3 \sin\theta_3 - b\omega_3^2 \cos\theta_3 + c\alpha_4 \sin\theta_4$$

$$+ bc\omega_4^2 \cos\theta_4 = 0$$

$$a\alpha_2 \cos\theta_2 - a\omega_2^2 \sin\theta_2 + b\alpha_3 \cos\theta_3 - b\omega_3^2 \sin\theta_3 - c\alpha_4 \cos\theta_4$$

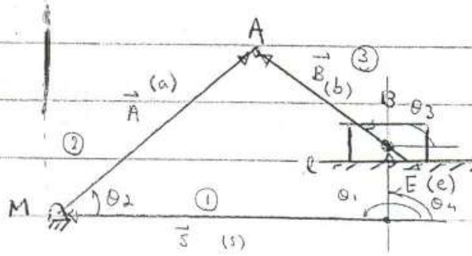
$+ C\omega_4^2 \sin\theta_4 = 0$

حال برای معادله داریم :

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD}$$

$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

آنالیز تغییر مکان مکانیزم slider_crank :



برحسب اعداد مختلط :

$$\vec{S} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0 \Rightarrow Se^{J\theta_1} + ae^{J\theta_2} - be^{J\theta_3} - ee^{J\theta_4} = 0$$

با تفکیک داریم :

$$S\cos\theta_1 + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$$

$$S\sin\theta_1 + a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0 \qquad \theta_1 = 0 \ , \ \theta_4 = 90$$

$$\begin{cases} -S + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 = 0 \\ a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e = 0 \end{cases}$$

$(-s + a\cos\theta_2)^2 = (b\cos\theta_3)^2 \Rightarrow s^2 + a^2\cos^2\theta_2 - 2sb\cos\theta_2 = b^2\cos^2\theta_3$

$(-e + a\sin\theta_2)^2 = (b\sin\theta_3)^2 \Rightarrow e^2 + a^2\sin^2\theta_2 - 2ea\sin\theta_2 = b^2\sin^2\theta_3$

$Ls^2 + Ms + N = 0 \qquad L = 1$

$M = -2a\cos\theta_2$

$N = a^2 + e^2 - b^2 - 2ae\sin\theta_2$

$$s_{1,2} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

$\sin\theta_3 = 1/b\,[a\sin\theta_2 - e] \Rightarrow \theta_3 = \sin^{-1} 1/b\,[a\sin\theta_2 - e]$

محاسبه‌ی سرعت :

$\dot{s}je^{j\theta_1} + a\omega_2 je^{j\theta_2} - bj\omega_3 e^{j\theta_3} = 0$

$\dot{s}\cos\theta_1 - a\omega_2\sin\theta_2 + b\omega_3\sin\theta_3 = 0$

$\theta_1 = 180$

$\dot{s}\sin\theta_1 + a\omega_2\cos\theta_2 - b\omega_3\cos\theta_3 = 0$

$$\begin{cases} -\dot{s} - a\omega_2\sin\theta_2 + b\omega_3\sin\theta_3 = 0 \\ a\omega_2\cos\theta_2 - b\omega_3\cos\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b}\,\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}$$

$$\dot{S} = a\omega_2\,\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\cos\theta_3}$$

محاسبه‌ی شتاب‌ها :

$$\ddot{S}e^{J\theta_1} + aJ\alpha_2 e^{J\theta_2} - a\omega^2 e^{J\theta_2} - bJ\alpha_3 e^{J\theta_3} + b\omega_3^2 e^{J\theta_3} = 0$$

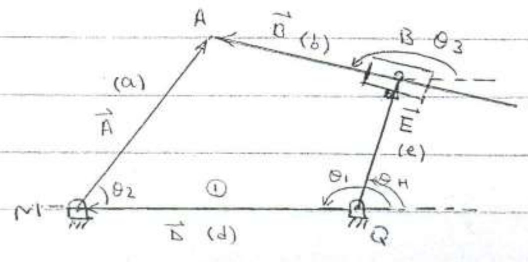
با تبدیل داریم :

$$\begin{cases} \overset{-\ddot{S}}{\ddot{S}\cos\theta_1} - a\alpha_2\sin\theta_2 - a\omega^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\sin\theta_3 + b\omega_3^2\cos\theta_3 = 0 \\ \overset{0}{\ddot{S}\sin\theta_1} + a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega^2\sin\theta_2 - b\alpha_3\cos\theta_3 + b\omega_3^2\sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \frac{a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega_2^2\sin\theta_2 + b\omega_3^2\sin\theta_3}{b\cos\theta_3}$$

$$\ddot{S} = \left[-a\alpha_2\sin\theta_2 - a\omega_2^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\sin\theta_3 + b\omega_3^2\cos\theta_3\right]$$

آنالیز تغییر مکان مکانیزم Inverted slider crank :



$$\vec{D} + \vec{A} - \vec{B} - \vec{E} = 0$$

برحسب ابعاد کلی :

$$de^{J\theta_1} + ae^{J\theta_2} - be^{J\theta_3} - ee^{J\theta_4} = 0$$ $\theta_1 = 180$

$$\overset{-d}{d\cos\theta_1} + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$$ $\theta_3 + 90 + 180 - \theta_4 = 360$

$\theta_3 - \theta_4 = 90°$

$\theta_3 = 90 + \theta_4 \Rightarrow \omega_3 = \omega_4$

$$\overset{0}{d\sin\theta_1} + a\sin\theta_2 - b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0$$ $\alpha_3 = \alpha_4$

$$-d + a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - e\cos\theta_4 = 0$$

$$a\sin\theta_2 + b\sin\theta_3 - e\sin\theta_4 = 0$$

$$\begin{cases} -d + a\cos\theta_2 - e\cos\theta_4 + b\sin_4 = 0 \\ a\sin\theta_2 - e\sin\theta_4 - b\cos\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$$b = \frac{a\sin\theta_2 - e\sin\theta_4}{\cos\theta_4}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}$$

$$K_1\tan\frac{\theta_4}{2} + K_2\tan\frac{\theta_4}{2} + K_3 = 0$$

$$\tan\theta_4/2 = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1K_3}}{2K_1}$$

$K_1 = d - e - a\cos\theta_2$

$K_2 = 2a\sin\theta_2$

$K_3 = a\cos\theta_2 - d - e$

رابطه‌ی سرعت :

$$a j \omega_2 e^{j\theta_2} - \dot{b} e^{j\theta_3} - b j \omega_3 e^{j\theta_3} - e j \omega_4 e^{j\theta_4} = 0$$

$$\begin{cases} -a\omega_2 \sin\theta_2 - \dot{b}\cos\theta_3 + b\omega_3 \sin\theta_3 + e\omega_4 \sin\theta_4 = 0 \\ a\omega_2 \cos\theta_2 - b \sin\theta_3 - b\omega_3 \cos\theta_3 - e\omega_4 \cos\theta_4 = 0 \end{cases}$$

$\omega_3 = \omega_4$

$\theta_3 = 90 + \theta_4$

$$\omega_4 = \omega_3 = \frac{a\omega_2}{b} \sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$\dot{b} = \frac{a\omega_2}{b} \left[b\cos(\theta_4 - \theta_2) - e\sin(\theta_4 - \theta_2) \right]$$

رابطه‌ی شتاب :

$$a j \alpha_2 e^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2} - \ddot{b} e^{j\theta_3} - \dot{b} j \omega_3 e^{j\theta_3} + \dot{b} j \omega_3 e^{j\theta_3} - b j \alpha_3 e^{j\theta_3}$$

$$+ b\omega_3^2 e^{j\theta_3} - e j \alpha_4 e^{j\theta_4} + e\omega_4^2 e^{j\theta_4} = 0 \qquad \theta_3 = 90 + \theta_4$$

$$-a\alpha_2 \sin\theta_2 - a\omega_2^2 \cos\theta_2 - \ddot{b}\cos\theta_3 + 2\dot{b}\omega_3 \sin\theta_3 + b\alpha_3 \sin\theta_3 + b\omega_3^2 \cos\theta_3$$

$$+ B\alpha_4 \sin\theta_4 + e\omega_4^2 \cos\theta_4 = 0$$

$$a\alpha_2 \cos\theta_2 - a\omega_2^2 \sin\theta_2 - \ddot{b}\sin\theta_3 + 2\dot{b}\omega_3 \cos\theta_3 - b\alpha_3 \cos\theta_3 + b\omega_3^2 \sin\theta_3$$

$$- e\alpha_4 \cos\theta_4 + e\omega_4^2 \sin\theta_4 = 0$$

$$\alpha_4 = \frac{AF - CD}{AE - BD}$$

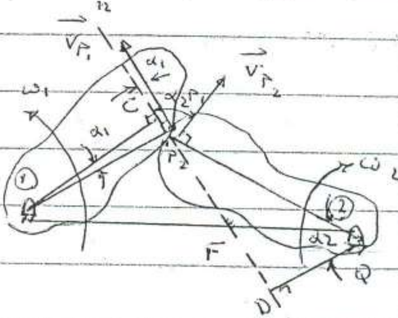
$$\ddot{b} = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

Unit V

Fundamental of uniform Rotary Transmission

بنا به تعریف نسبت سرعت بین دو جسم :

$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} =$



از روی شکل داریم :

$$V_{P_1} = MP_1 \cdot \omega_1 \implies \omega_1 = \frac{V_{P_1}}{MP_1}$$

$$V_{P_2} = QP_2 \cdot \omega_2 \implies \omega_2 = \frac{V_{P_2}}{QP_2}$$

لذا داریم :

$$\text{Speed ratio : } SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{P_2} \cdot MP_1}{V_{P_1} \cdot QP_2}$$

می‌خواهیم که حرکت ما به صورت uniform منتقل شود :

باید در جهت نرمال سرعت های یکی باشد در جهت t می‌توانند یکی نباشند در این صورت لغزش داریم.

برای تماس دو جسم در حین انتقال سرعت دارای شرط تماس :

$$V_{P_1}^{n} = V_{P_2}^{n}$$

خطوط QD و MC را بر خط نرمال مشترک nn عمود می‌کنیم :

شرط تماس

$$V_{P_1}^{n} = V_{P_1}\cos\alpha_1 = V_{P_2}^{n} = V_{P_2}\cdot\cos\alpha_2$$

از روی شکل:

$$QP_2 = \frac{QD}{\cos\alpha_2}$$

$$MP_1 = \frac{MC}{\cos\alpha_1}$$

لذا:

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{P_2}\,MP_1}{V_{P_1}\,QP_2} = \frac{V_{P_2}\cos\alpha_2\,MC}{V_{P_1}\cos\alpha_1\cdot QD}$$

با رعایت شرط تماس:

$$SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD}$$

دو مثلث QDF و MCF بنا بر دو زاویه مساوی متشابهند لذا:

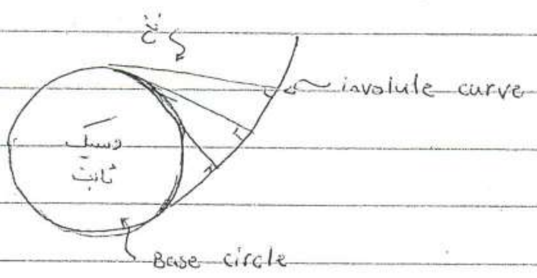
$$\boxed{SR = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{MC}{QD} = \frac{MF}{QF} = \frac{FC}{FD}}$$

اگر نقطه F کوچکترین ارتعاشی در آن باشد SR دارای ارتعاش است، اگر مطلق ثابت باشد SR به صورت uniform انتقال می‌یابد

* قانون دوم: اگر نرمال مشترک خط المرکزین را در یک نقطه قطع کند آن نقطه باید مطلق ثابت باشد.

منحنی اینولوت : (involute curve)

عبارت است از مکان هندسی انتهای یک نخ که از روی یک دیسک ثابت باز می‌شود.



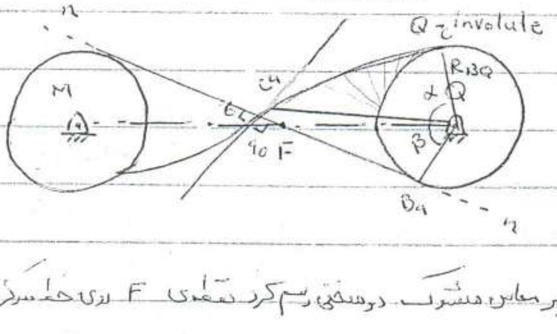
منحنی اینولوت دارای خواص زیر است:

1. در هر نقطه از منحنی شعاع انحنا طول نخ باز شده است.

2. مرکز انحنا هر نقطه از منحنی محل تماس نخ باز شده با دیسک است.

3. همواره امتداد نخ باز شده در نقطه‌ای مورد نظر عمود بر پروفیل منحنی involute است.

اثبات ثابت بودن نقطه‌ی F :



تنها جائی که می‌توان از آن دو عمود بر مماس مشترک دو منحنی رسم کرد نقطه‌ی F روی خط مرکز مشترک دو دیسک است.

اثبات منحنی involute :

از روی شکل طول قوس دایره Q از نقطه C تا B_4 :

$$\overset{\frown}{CB_4} = R_{BQ}(\alpha+\beta)$$

با توجه به خاصیت منحنی اینولوت :

$$\overset{\frown}{CB_4} = C_4B_4$$

از روی شکل :

$$\tan\beta = \frac{C_4B_4}{R_{BQ}} = \frac{R_{BQ}(\alpha+\beta)}{R_{BQ}} \Rightarrow$$

$$\tan\beta = \alpha+\beta \Rightarrow \boxed{\alpha = \tan\beta - \beta = \mathrm{Inv}(\beta)}$$

Unit VI

Gear Tooth Technology :

objective 1 :

1. Base circale : (دایره مبنا)

عبارت است از دایره‌ی نامرئی روی چرخدنده که منحنی involute

دندانه‌ها از روی آن ساخته شده است.

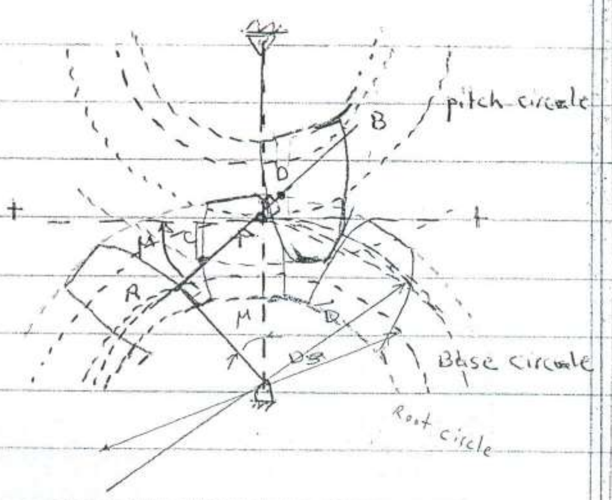
2. Pitch circale

عبارت است از دایره‌ی معادل یک دیسک

به طوری که دو چرخدنده‌ی درگیر دایره‌ی گامشان

با یکدیگر مماس باشند این دایره روی چرخدنده

نامرئی می‌باشد.



3. Root circale

عبارت است از دایره‌ی مرئی روی چرخدنده که از انتهای ریشه‌ها می‌گذرد

4. Addendum circle

عبارت است از دایره‌ی فرضی روی چرخ‌دنده که از انتهای ریشه‌ها می‌گذرد

5. Pitch point

عبارت است از نقطه‌ی تماس دایره Pitch circle .

6. Addendum (سردنده یا)

عبارت است از سردنده یا منطقه بین دایره Addendum و Pitch از یک دندانه

7. Deddendum

عبارت است از ته‌دنده یا منطقه بین دایره Pitch و root از دندانه

8. clearance

عبارت است فاصله‌ی شعاعی بین دایره Addendum یک چرخ‌دنده تا دایره root چرخ‌دنده درگیر

9. working Depth

عبارت است از عمق عمل یا فاصله‌ی شعاعی بین دایره Addendum دو چرخ‌دنده درگیر یا برابر است

Addemdun + Deddendum منهای clearance .

10. Tooth face

عبارت است قسمتی از سطح دندانه که دارای منحنی involute می باشد. این قسمت کمر است بین دایره‌ی Base و Addendum

11. Tooth thickness

عبارت است از ضخامت طول قوس روی دایره pitch از یک سطح دندانه تا نقطه‌ی مقابل دندانه یا طول قوس بین دو pitch point دندانه.

12. Tooth flank

عبارت است از قسمتی از دندانه که دارای منحنی involute نمی باشد. این قسمت کمر بین دایره Base و root یک چرخدنده است.

13. line of action

۱. مماس مشترک دو دایره Base است
۲. مکان هندسی نقاط تماس بین دو چرخدنده‌ی درگیر روی این خط قرار دارد
۳. در نقطه‌ی تماس بین دو دندانه عمود بر profile منحنی های involute است
۴. امتداد نیروی انتقالی بین دو چرخدنده‌ی درگیر روی این خط قرار می گیرد
۵. از pitch point می گذرد

$= \frac{VQ}{It}$

14. Pressure angle

عبارت است از زاویه بین خط عمل و مماس مشترک بین دو دایره Pitch . توجه می‌شود که امتداد نیروی انتقالی بین دو چرخ دنده درگیر روی خط عمل می‌باشد.

15. circular pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره گام از یک نقطه روی یک دندانه تا نقطه نظیر روی دندانه دیگر

$P_c = \frac{\pi D}{N}$ N : تعداد دندانه‌ها

16. Base pitch

عبارت است از طول قوس روی دایره Base از یک نقطه روی یک دندانه تا نقطه نظیر روی دندانه دیگر

$P_B = \frac{\pi D_B}{N}$ D_B : قطر دایره Base

از روی شکل داریم: $R_B = R_p \cos\mu$

$$R_B = \frac{\pi D_B}{N} = \frac{\pi D \cos\mu}{N} \Rightarrow P_B = P_c \cos\mu$$

17. Diametral pitch

بنابراین عبارت است از عددی که برای استاندارد کردن چرخ دنده‌ها از آن استفاده می‌شود و برابر

است یعنی: $P_D = \frac{N}{D}$

$$P_D = \frac{1}{m_o}$$

مدول عبارت است از استاندارد چرخ دنده‌ها در استاندارد اروپایی یا متریک

قانون مهم: دو چرخ دنده درگیر باید دارای Diametral pitch یکسان باشند

اگر از چرخ دنده بالایی یک دنده رد شود از پایینی هم باید یک دنده رد شود پس باید P_c های آنها مساوی باشد

بنابراین:

$$Pc_1 = Pc_2 \Rightarrow \frac{\pi D_1}{N_1} = \frac{\pi D_2}{N_2} \Rightarrow \frac{D_1}{N_1} = \frac{D_2}{N_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{D_1}} = \frac{1}{P_{D_2}} \Rightarrow P_{D_1} = P_{D_2}$$ قانون درگیری چرخ دنده

از تعریف circular pitch داریم:

$$P_c = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{N/D} = \frac{\pi}{P_D} \Rightarrow P_c P_D = \pi$$

18. Angle of action

عبارت است از زاویه‌ی حرکتی روی چرخ دنده بین نقطه‌ی شروع و نقطه‌ی خاتمه درگیری بین دو چرخ دنده درگیر.

اگر شعاع دایره گام دو چرخ دنده درگیر مساوی نباشند، زاویه درگیری بین دو چرخ دنده درگیر با هم متفاوت

است.

19. Pitch angle

عبارت است از زاویه‌ی مرکزی circular pitch درصورتی که pitch angle زیاد شود
نیروی بیشتری را منتقل می‌کند.

20. Interfrence

عبارت است از شرایطی که یک سطح اینولوت با یک سطح غیر اینولوت بین دو چرخ دنده درگیر تماس حاصل
کند.

این شرایط در جعبه دنده‌های نو و کارکرده به صورت زیر اتفاق می‌افتد:

۱- جعبه دنده‌های نو: چنانچه در جعبه دنده‌های نو در حین کارکرد روغن جعبه دنده گرم شود، سر و صدا در حین کارکرد
بوجود آید، جعبه دنده ارتعاش نماید و در نهایت جعبه دنده قفل کند عامل آن تداخل بین چرخ دنده‌ها می‌باشد
اگر از دقت تراش چرخ دنده اطمینان وجود دارد باید استحکام خمشی محور چرخ دنده‌ها را چک نمود چون
ممکن است در حین انتقال قدرت زیاد تماس در سمت Flank برقرار شده باشد.

۲- جعبه دنده‌های کارکرده: این نوع جعبه دنده‌ها مدت زمانی بدون هیچ یک از مشکلات فوق کار کرده‌اند تداخل
بصورت گرم شدن روغن جعبه دنده خود را نشان می‌دهد.

21. Undercut

چنانچه بنابر نصب غلط چرخ دنده‌ها در داخل جعبه دنده، تماس در قسمت Flank برقرار شود می‌توان سطح دندانه پایین دایره‌ی Base و دایره root تراش داد بطوری که تماس از بین می‌رود. این عمل را undercut می‌گویند که باعث تضعیف استحکام خمشی دنده‌ها می‌گردد

22. Contact Ratio

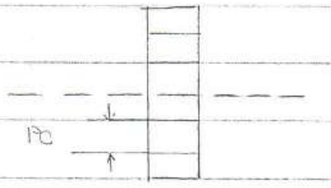
بنابه تعریف نسبت تماس عبارت است از تعداد دندانه درگیر دو چرخ دنده‌ی درگیر

$$CR = \frac{\text{Angel of action}}{\text{Pitch angle}} \overset{?}{=} \frac{CD}{P_c \cos\phi}$$ اثبات در امتحان

حل ۲

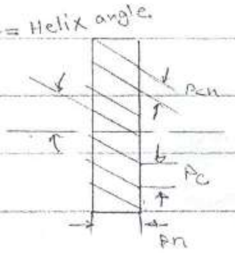
23. path of Contact = CDH

عبارت است از بخشی از خط عمل که مکان هندسی و انتقال نقاط تماس بین دو چرخ دنده درگیر باشد. این قسمت بخشی از خط عمل محصور بین دو دایره Addendum دو چرخ دنده‌ی درگیر است.



Spure

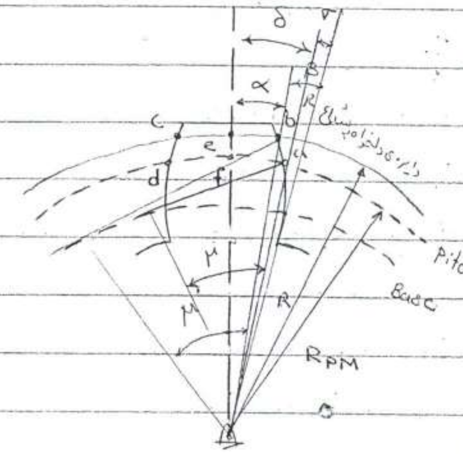
$P_c \cdot P_D = \pi$



Hellical gear

$P_{cn} \cdot P_{DN} = \pi$

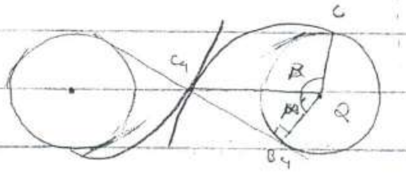
محاسبه‌ی ضخامت دندانه در سطح دلخواه R :



$$\alpha = \hat{eMb} = \frac{t_{bc}}{2R}$$

$$\delta = \hat{fMa} = \frac{t_{ad}}{2R_{PM}}$$

حال از تعریف منحنی involute استفاده می‌کنیم



$$\beta = \mathrm{Inv}\,\mu'$$

$$\beta = \mathrm{Inv}\,\mu' = \tan\mu' - \mu'$$

$$\nu = \mathrm{Inv}\,\mu = \tan\mu - \mu$$

حال از روی شکل داریم :

$$\alpha + \beta = \delta + \nu \Rightarrow \frac{t_{bc}}{2R} + \mathrm{Inv}\,\mu' = \frac{t_{ad}}{2R_{PM}} + \mathrm{Inv}\,\mu$$

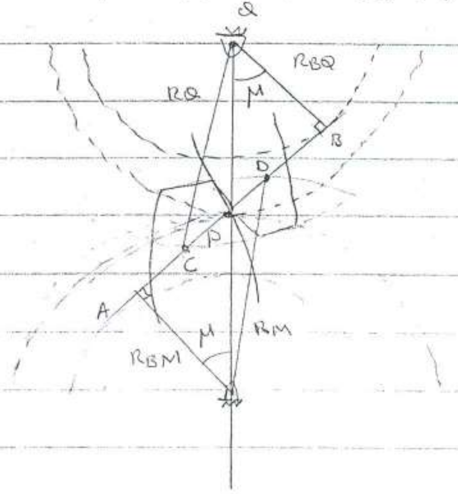
$$t_{bc} = 2R\left(\frac{t_{ad}}{2R_{PM}} + Inv\mu - Inv\mu'\right)$$

ضخامت دندانه در شعاع R.

Part II محاسبه نسبت تماس :

بنابه تعریف نسبت تماس برابر است با :

$$CR = \frac{\text{Angle of action}}{\text{pitch angle}}$$



$$O = \frac{CD}{P_c \cos\mu}$$

$$CD = CP + PD$$

$$CP = BC - BP$$

از روی شکل داریم :

$$BC^2 = R_Q^2 - R_{BQ}^2$$

$$BP = R_{PQ}\sin\mu$$

$$PD = AD - AP$$

$$AD^2 = R_M^2 - R_{BM}^2$$

$$AP = R_{PM}\sin\mu$$

$$\text{Path of Contact} = CD = (BC - BP) + (AD - AP)$$

$$CD = \sqrt{R_Q^2 + R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM})\sin\mu$$

57

Add شعاع دوایر ← Base → Pitch →

$$CR = \frac{\sqrt{R_Q^2 - R_{BQ}^2} + \sqrt{R_M^2 - R_{BM}^2} - (R_{PQ} + R_{PM})\sin\mu}{P_C \cos\mu}$$

با استفاده از استاندارد R_Q و R_M بدست می آید به عنوان مثال برای چرخ دنده ی 20°

شعاع دوایر Addendum ← شعاع دوایر Pitch

Full Depth داریم:

$$R_M = R_{PM} + \frac{1}{P_D}$$

$$R_Q = R_{PQ} + \frac{1}{P_D}$$

objective 3: تعیین شرایط تداخل

قبل از ساخت یک جفت چرخ دنده درگیری توان چک نمود که آیا در چرخ دنده بعد از ساخت تداخل خواهند داشت یا خیر اطلاعات مورد نیاز عبارتند از:

N_1

N_2

μ

$P_D = \frac{N}{D}$

با داشتن ستاد برنوی:

$$P_D = \frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2}$$

لذا

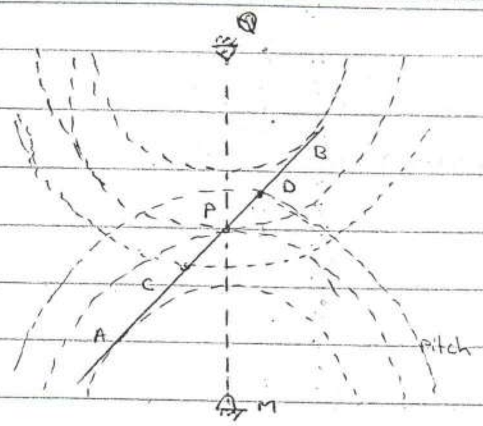
$$2 \times R_{PM} = D_1 = \frac{N_1}{P_D} \qquad D_2 = \frac{N_2}{P_D} = R_{PQ} \times 2$$

و فاصله بین دو مرکز

$$C = R_{P_M} + R_{P_Q} = MQ$$

شعاع دایره Base

$$R_{BQ} = R_{PQ} \cos\mu \qquad R_{BM} = R_{PM} \cos\mu$$



با رسم دایره Base و مماس های آن ها، خط عمل AB رسم می شود.

$R_M = R_{PM} + \dfrac{1}{P_D}$ | با رسم شعاع دایره Addendum

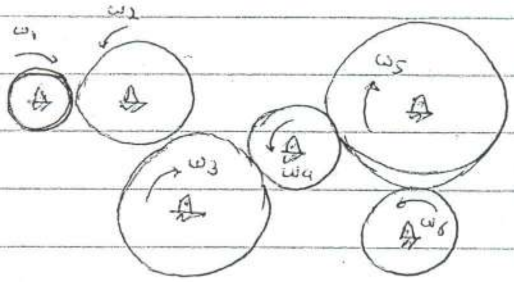
$R_Q = R_{PQ} + \dfrac{1}{P_D}$

درنتیجه path of contact (CD) بدست می آید

اگر چنانچه نقاط C و D بین نقاط A و B قرار بگیرند تداخل نخواهیم داشت

Unit VII Design of Gear Train

1. Simple Gear Train



بنابر تعریف نسبت سرعت در جعبه دنده برابر است با:

$$SR = \frac{\omega_6}{\omega_1}$$

$$\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

چون سرعت خطی بین چرخدنده‌ها یکسان است لذا:

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2 = \ldots$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

لذا از روابط بالا داریم:

$$SR = \frac{R_5}{R_6} \times \frac{R_4}{R_5} \times \frac{R_3}{R_4} \times \frac{R_2}{R_3} \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \boxed{SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6}}$$

چون طبق قانون درگیری بین دو چرخ دنده باید Diametral pitch یکسان باشد :

$$P_D = \frac{N}{D} = \frac{N}{2R} = \frac{N_1}{2R_1} = \frac{N_2}{2R_2} = \frac{N_3}{2R_3} = \dots = \frac{N_6}{2R_6}$$

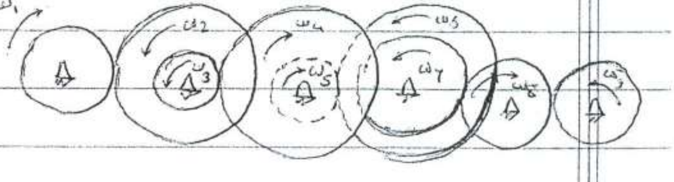
حال داریم :

$$\frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}$$

لذا :

$$\boxed{SR = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_6} = \frac{N_1}{N_6}}$$

2. Compound Gear Train



بنابتعریف نسبت جعبه دنده برابر است با

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_8} \cdot \frac{\omega_8}{\omega_7} \cdot \cancel{\frac{\omega_7}{\omega_6}} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \cancel{\frac{\omega_5}{\omega_4}} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \cancel{\frac{\omega_3}{\omega_2}} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

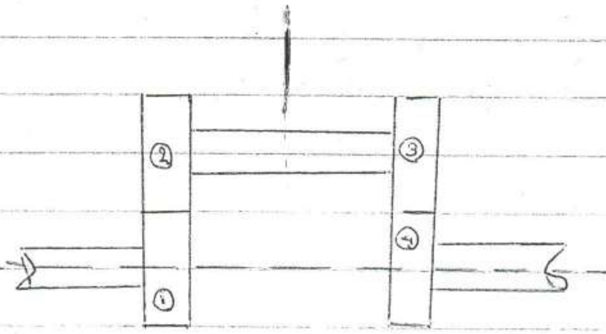
$$SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\omega_9}{\omega_7} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\boxed{SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{R_7}{R_9} \cdot \frac{R_5}{R_6} \cdot \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{R_1}{R_2}}$$

لذا حال داریم :

$$\boxed{SR = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\text{Driver حاصلضرب شعاع دایره گام چرخ دنده های}}{\text{Driven حاصلضرب شعاع دایره گام چرخ دنده های}}}$$

3. Inverted compound Gear Train



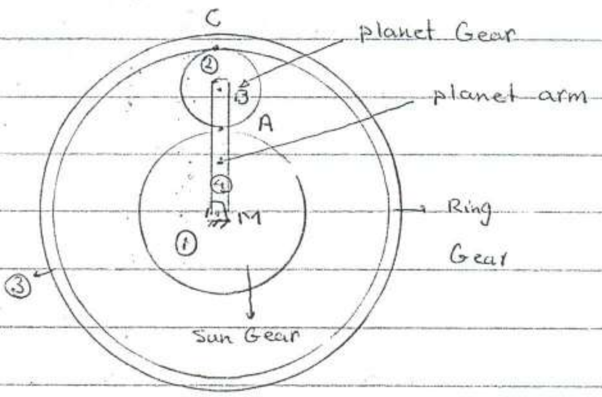
بنابراین نسبت سرعت ها برابر است با :

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_1}$$

$$SR = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \textcircled{\frac{\omega_3}{\omega_2}} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\omega_4 \omega_2}{\omega_3 \omega_1}$$

$$\boxed{SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_3 R_1}{R_4 R_2}}$$

4. Planatary Gear Train



$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$ از روی شکل روی Planet :

$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$ از روی شکل روی Planet :

$\vec{V}_{C/B} = - \vec{V}_{A/B}$ * م۲

لذا داریم : $\vec{V}_{C/B} = \vec{V}_C - \vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

$\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

قدر مطلق : $V_C = R_3 \omega_3$ روی Ring

$V_B = (R_1 + R_2) \omega_4$ روی Planet arm

$V_A = R_1\omega_1$ Sun [illegible]

$$R_3\omega_3 - (R_1 + R_2)\omega_4 = -R_1\omega_1 + (R_1 + R_2)\omega_4$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1\omega_1 + R_3\omega_3 = 2(R_1 + R_2)\omega_4}$$

سه حالت درنظرمی گیریم :

1. Sun Gear is fixed : $\omega_1 = 0$
   input : planet arm
   output: Ring

$$\boxed{SR = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{2(R_1+R_2)}{R_3}}$$

2. Planet arm is fixed: $\omega_4 = 0$
   input : Sun
   output: Ring

$$\boxed{SR = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_3}}$$ Reverse gear

3. Ring is fixed : $\omega_3 = 0$
   input : Sun
   output: planet arm

$$\boxed{SR = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)}}$$

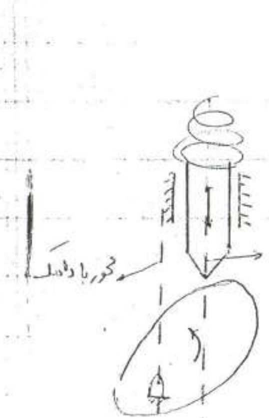
Unit VIII : Cams and Followers

دارای سه سیستم است :

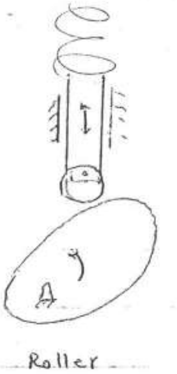
1. Cams
2. Followers
3. Motion programs

انواع پیرو (Followers) :

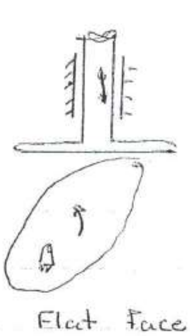
اگر سرعت بالا باشد پیروی Jam اتفاق می‌افتد و بادامک از کار می‌افتد



Knifel edge Followers

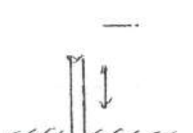


Roller Follower

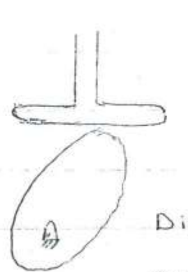


Flat Face Follower

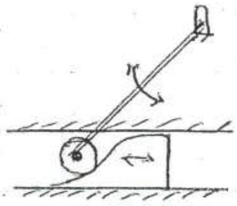
انواع بادامک (:



wedge cam



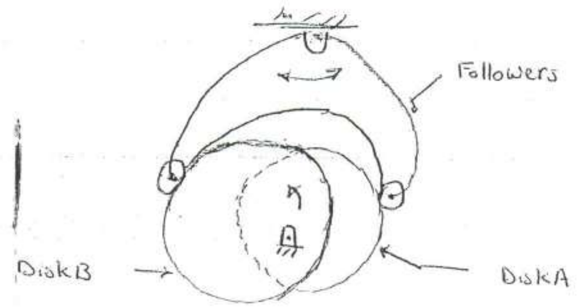
Disk cam



wedge

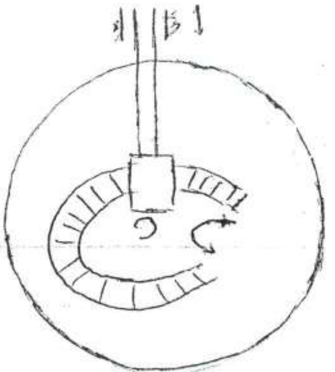
cam with oscllating Followers

اگر سرعت دورانی بادامک بسیار زیاد باشد از این نوع بادامک استفاده می‌شود.



Conjugate

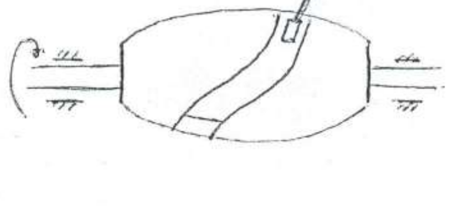
Cam



Spiral Cam

with translating

Follbwers



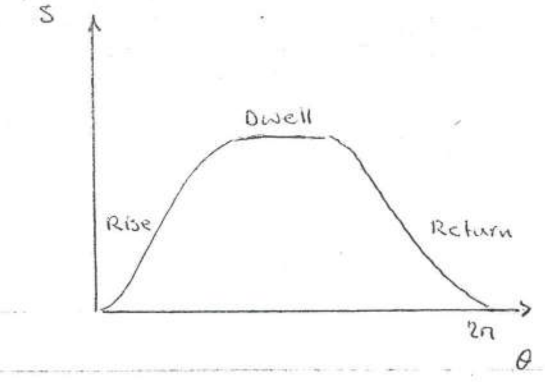
globoidal

cam

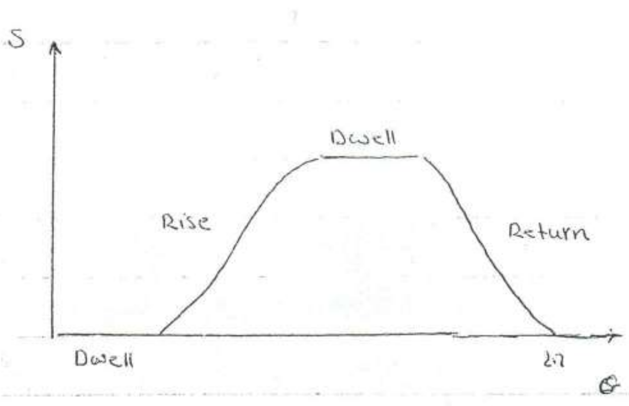
انواع Motion program

برنامه‌ای که باید بادامک حرکت را به پیرو منتقل کند

R_R Motion_program



R_D_R Motion program



D_R_D_R Motion program

objective 3:

نحوه ساخت کانتور بادامک با داشتن Motion programe سیستم پیرو

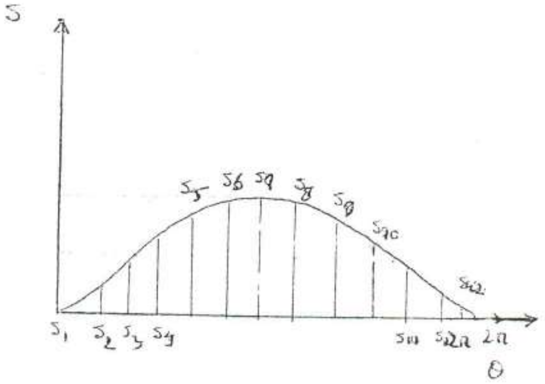
فرض کنید سیستم بادامک و پیرو معلوم است. با داشتن Motion p می‌توان کانتور بادامک را رسم و آن را

در کارگاه ساخت :

مثال :

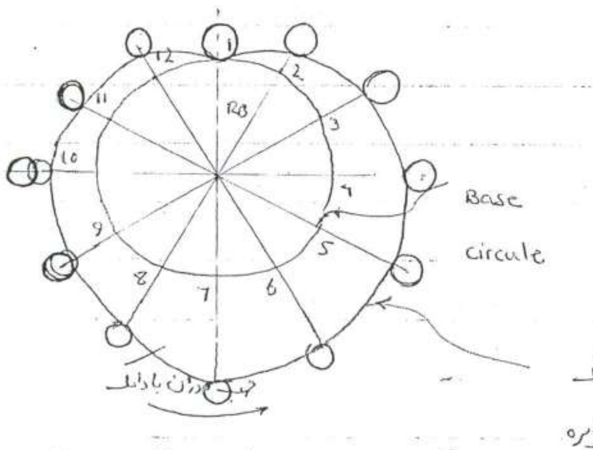
فرض کنید بادامک از نوع دیسک و پیرو از نوع Roller Follower و Translating و هم مرکز با مرکز بادامک می‌باشند.

Motion program مطابق شکل زیر داده شده است.



۱. ابتدا دایره‌ی Base بادامک را تعیین می‌کنیم و شعاع آن را R_B می‌نامیم.

۲. Motion program را به تعداد تقسیمات مساوی تقسیم می‌کنیم (12 قسمت) و ارتفاع هر قسمت را S_i می‌نامیم



۳- دایره‌ی Base را به همان تعداد تقسیم می‌کنیم و در خلاف جهت حرکت بادامک شماره گذاری می‌کنیم.

۴- موقعیت Roller پیرو را در ۱۲ قسمت روی دایره‌ی Base از فرمول زیر مشخص نموده و دایره‌ی پیرو را مشخص می‌کنیم:

$$Y_i = R_B + S_i + r_F$$

r_F برابر با شعاع پیرو یعنی شعاع Roller آن است برای این منظور ابتدا باید Min شعاع انحناء Mp را محاسبه نمود و r_F را طوری انتخاب نمود که کوچکتر از Min شعاع انحناء Mp باشد

۵- برش ۱۲ دایره Roller، کانتور بادامک است.

Unit IX Motion Programs

اگر S تغییرمکان پیرو ، θ زاویه‌ی دوران بادامک داریم :

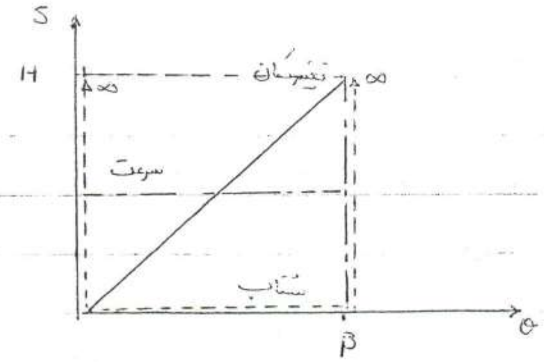
$$V = \frac{ds}{dt} =$$ سرعت پیرو

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} =$$ شتاب پیرو

$$J = \frac{d^3s}{dt^3} =$$ تکان (jerk)

هرچه jerk سیستم را min کنیم آن سیستم ComFort تری باشد

1- Constant velocity Motion programs



در ابتدا و انتها شتاب بی‌نهایت است .

$S = C\theta$ معادله تغییرمکان

$\theta = \beta$

$S = H$

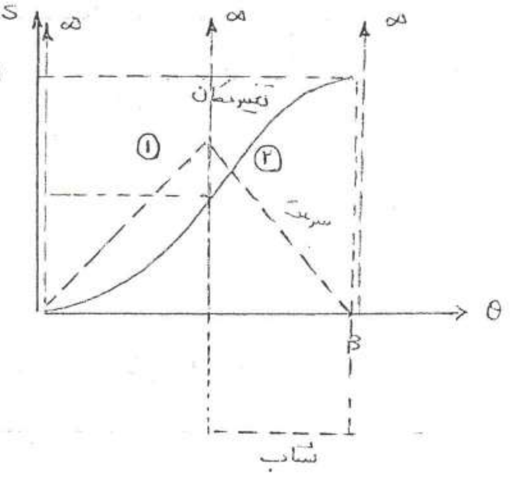
$$\Rightarrow H = C\beta \Rightarrow C = \frac{H}{\beta} \Rightarrow \boxed{S = H\frac{\theta}{\beta}}$$ تغییرمکان

$$V = \frac{ds}{dt} = H\,\frac{\omega}{\beta}$$ سرعت

$$a = 0$$

این سیستم به علت این که در ابتدا و انتهای Rise شتاب بی‌نهایت است باتوجه به جرم پیرو نیروی بی‌نهایت به پیرو منتقل شده که غیر قابل تحمل است برای سرعت های بالا .

2. Constant accelration Motion program.



در سه نقطه جرک بی‌نهایت داریم .

$$S = C\theta^2 \qquad 0 \leq \theta \leq \beta/2$$

$$\theta = \beta/2$$

$$S = H/2$$

$$\Rightarrow \frac{H}{2} = C\beta^2 \Rightarrow C = \frac{2H}{2\beta^2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{2H}{\cancel{2}}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2}$$

$V = \frac{4H}{\beta^2} \omega \theta$ سرعت

$a = \frac{4H}{\beta^2} \omega^2$

$S = C_1\theta^2 + C_2\theta + C_3 \qquad \beta/_2 \leqslant \theta \leqslant \beta$

$\theta = \beta \qquad \theta = \beta \qquad \theta = \beta/_2$

$S = H \qquad V = 0 \qquad V_2 = V_1$

$C_1 = \frac{-2H}{\beta^2} \qquad C_2 = \frac{4H}{\beta} \qquad C_3 = -H$

$$S = H\left[1 - 2\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$$

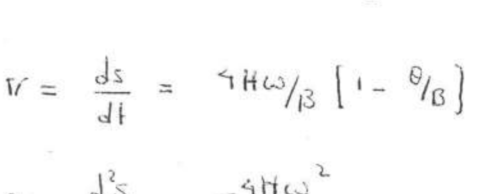
$$V = \frac{ds}{dt} = 4H\omega/_\beta \left[1 - \theta/_\beta\right]$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4H\omega^2}{\beta^2}$$

این سیستم نیز برای شتاب های کم قابل استفاده است.

3. Simple Harmonic Motion program..

معادله منحنی هارمونیک ساده

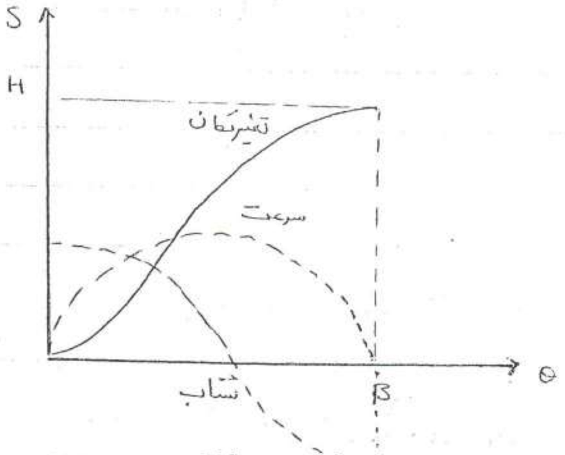


$S = C(1 - \cos\varphi)$

$\varphi = \frac{\pi\theta}{\beta} \qquad C = \frac{H}{2}$

برای حرکت بادامک پیرو

$$S = \frac{H}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$ تغییر مکان



$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$$

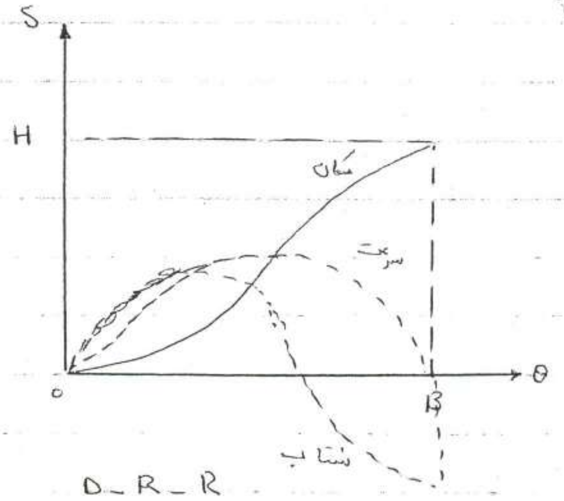
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{H}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2 \cos\frac{\pi\theta}{\beta}$$

4- Modified harmonic Motion programs.

$$S = \frac{H}{2}\left[\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)\right]$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{H\pi\omega}{2\beta}\left(\sin\frac{\pi\theta}{\beta} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$a = \frac{H}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\left(\cos\frac{\pi\theta}{\beta} - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$$



D_R_R

در این جا نه سرعت نه شتاب و نه جرک هیچکدام بی‌نهایت نیست .

5. polynomical Motien programs

شرایط مورد نیاز :

$\theta = 0$ $\theta = 0$ $\theta = 0$
$S = 0$ $V = 0$ $a = 0$

$\theta = \beta$ $\theta = \beta$ $\theta = \beta$
$S = H$ $V = 0$ $a = 0$

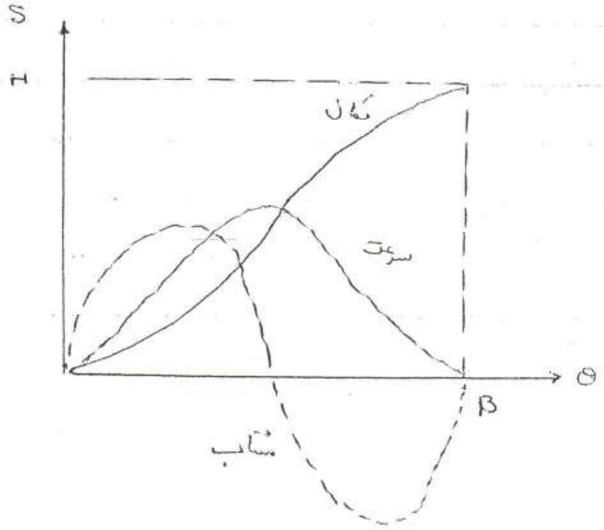
$$S = D_0 + D_1\theta + D_2\theta^2 + D_3\theta^3 + D_4\theta^4 + D_5\theta^5$$

$$V = D_1\omega + 2D_2\omega\theta + 3D_3\theta^2\omega + 4D_4\theta^3\omega + 5D_5\theta^4\omega$$

77 $$a = \underline{D_1} + 2D_2\omega^2 + 6D_3\omega^2\theta + 12D_4\omega^2\theta^2 + 20D_5\omega^2\theta^3$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta=0\\ S=0\end{array}\right\}\Rightarrow D_0=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\theta=0\\ V=0\end{array}\right\}\Rightarrow D_1=0 \qquad \left.\begin{array}{l}\theta=0\\ a=0\end{array}\right\}\Rightarrow D_2=0$$

$$D_3=\frac{10H}{\beta^3} \qquad D_4=-15\frac{H}{\beta^4} \qquad D_5=\frac{6H}{\beta^5}$$



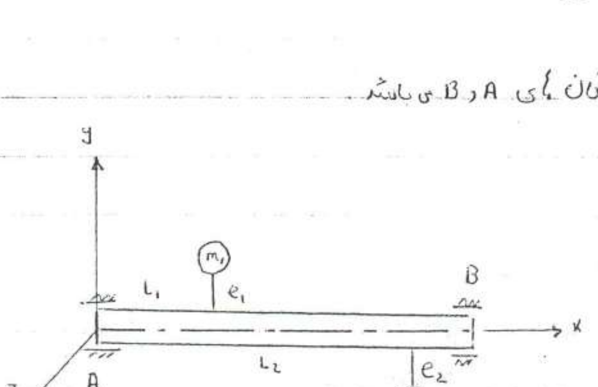
Balancing of Rotating shafts

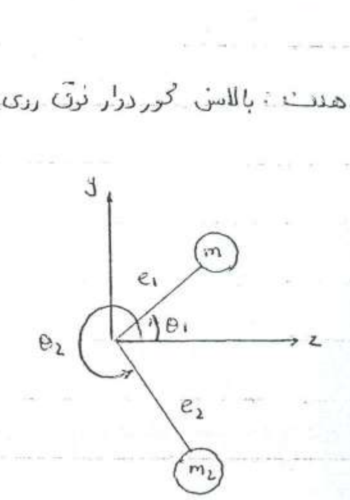
تعادل استاتیکی و دینامیکی در محورها :

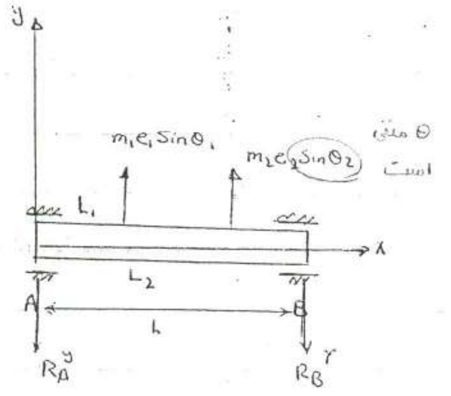
تعادل استاتیکی حول محور ساکن زمانی اتفاق می افتد که نیروهای گریز از مرکز مان حاصل از خود را خنثی کند .

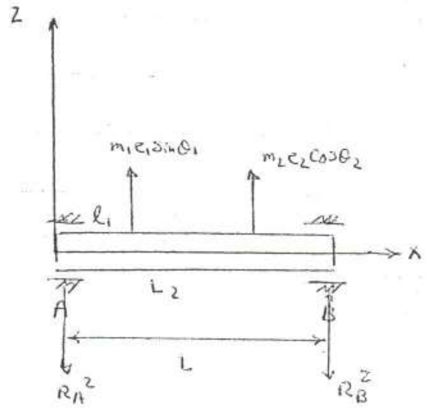
فرض کنید محور دوار AB که روی دو یاتاقان A و B قرار دارد ، دارای تعدادی جرم خارج از مرکز در فواصل مختلف می باشد . به عنوان مثال فرض کنید محور دارای دو جرم خارج از مرکز $(m_1, e_1, l_1, \theta_1)$ و $(m_2, e_2, l_2, \theta_2)$ می باشد . در اثر دوران محور ، عکس العمل نیروهای گریز از مرکز ، جرم های خارج از مرکز روی یاتاقان های A و B ایجاد ممان خمشی نموده دو یاتاقان را جابجا ، تعادل سیستم از بین می برد .

هدف : بالانس محور دوار فوق روی یاتاقان های A و B می باشد









در صفحه x-y :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -R_A^y + m_1 e_1 \sin\theta_1 + m_2 e_2 \sin\theta_2 - R_B^y = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow m_1 e_1 \sin\theta_1 l_1 + m_2 e_2 \sin\theta_2 l_2 - R_B^y l = 0$$

از دو معادله‌ی بالا R_B^y ، R_A^y محاسبه می‌شود

در صفحه‌ی x-z :

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow -R_A^z + m_1 e_1 \cos\theta_1 + m_2 e_2 \cos\theta_2 - R_B^z = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -m_1 e_1 \cos\theta_1 L_1 - m_2 e_2 \cos\theta_2 L_2 + R_B^z L = 0$$

از دو معادله‌ی قبل هم R_A^z ، R_B^z محاسبه می‌شود

$$R_A = \sqrt{R_A^{y\,2} + R_A^{z\,2}} = m_A e_A$$

$$\tan\theta_A = \frac{R_A^y}{R_A^z} \Rightarrow \theta_A = \tan^{-1}\frac{R_A^y}{R_A^z}$$

بنابراین: با اعمال جرم در محل یاتاقان A جرم و بازاویه‌ی مناسب در شعاع مناسب قرار می‌دهیم .

$$R_B = \sqrt{R_B^{y\,2} + R_B^{z\,2}} = m_B e_B$$

$$\tan\theta_B = \frac{R_B^y}{R_B^z} \Rightarrow \theta_B = \tan^{-1}\frac{R_B^y}{R_B^z}$$