استاتیک

دکتر مهدی قاسمیه

دانشکده مهندسی عمران پردیس دانشکده های فنی

آخرین نسخه ی سال ۱۳۸۸

فهرست

فصل ۱ مقدمه ۱

فصل ۲ استاتیک نقاط مادی ۳

فصل ۳ اجسام صلب سیستم نیروهای معادل ۱۶

فصل ۴ تعادل اجسام صلب ۴۲

فصل ۵ نیروهای گسترده (مرکز سطح یا مرکز خط یا منحنی) ۵۷

فصل ۶ تحلیل سازه‌ها ۸۶

فصل ۷ کابل‌ها و تیرها ۱۱۱

فصل ۸ اصطکاک ۱۳۱

فصل ۹ نیروهای گسترده: (گشتاور لختی) ۱۴۵

فصل ۱۰ کار مجازی ۱۶۴

مطالعه مکانیک مقدماتی بر شش اصل بنیادین است که همه مبنای تجربی دارند:

- **قانون متواضی الاضلاع برای جمع بستن نیروها:** به جای دو نیرو که به ذره اثر میکندیک تک نیرو به نام برایند قرار داد که از رسم قطر متواضی الاضلاعی بدست می اید که دو ضلع مجاورش همان دو نیروی معلومند.

- **اصل انتقال پذیری:** اگر نیروی واردبر نقطه ای از یک جسم صلب را بوسیله نیروی دیگری که با نیروی اول ازنظر مقدار وجهت برابر,ولی نقطه اثر ان متفاوت است جایگزین کنند,وضعییت تعادل یا حرکت جسم تغییر نخواهد کرد,به شرط انکه دو نیرو یک خط اثر داشته باشند.

سه قانون بنیادین نیوتن:

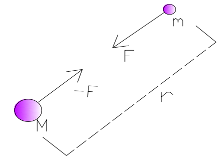
- **قانون اول:** اگر برایند نیروهایی که به ذره وارد می شود صفر باشد,ذره در حالت سکون می ماند و اگر در حرکت باشد به حرکت یکنواختش بر روی خط راست ادامه میدهد.

- **قانون دوم:** اگر برایند نیروهایی که به ذره وارد می شود صفرنباشد,ذره در امتداد این برایند و متناسب با بزرگی ان شتاب می گیرد. $F=ma$

  که a,m,F به ترتیب نماینده برایند نیروهای وارد بر ذره, جرم ذره و شتاب ذره اند که با یکاهای سیستم سازگار بیان میشوند.

- **قانون سوم:** نیروهای عمل وعکس العمل میان دو جسم که باهم تماس دارند هم اندازه اند,در یک امتدادند و در خلاف جهت هم اثر می کنند.

- **قانون گرانش نیوتن:** دو ذره به جرم های m,M یکدیگر را با نیروی مساوی و مختلف الجهت (F,F-)جذب میکنند



r فاصله دو ذره,G ثابت گرانش

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون ,نیروی جاذبه زمین بر روی یک ذره واقع بر سطح ان است. در این مورد نیروی Fرا کهزمین به ذره وارد میکند ,به عنوان وزن ان (W)تعریف میکنند .اگر mرا جرم زمین mرا جرم ذره وr را مساوی شعاع زمین (R)بگیریم ,وثابت $g = \frac{GM}{R^2}$ را وارد کنیم مقدار W وزن یک ذره به جرم m را می شود به این صورت بیان کرد:

W=mg $\qquad$ g=9.81 m/s^2 یا 32.2 ft/s^2

سیستم یکا ها

یکا های اصلی طول , جرم , زمان است که انها را به ترتیب متر(m),کیلوگرم(Kg),وثانیه (s) مینامند.

جدول ۲.۱ یکاهای اصلی SI که در مکانیک به کار می‌روند

کمیت	یکا	نماد	فرمول
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	...	m/s^2
زاویه	رادیان	rad	*
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر مجذور ثانیه	...	rad/s^2
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	...	rad/s
سطح	مترمربع	...	m^2
چگالی	کیلوگرم بر مترمکعب	...	kg/m^3
انرژی	ژول	J	N.m
نیرو	نیوتون	N	$kg.m/s^2$
بسامد	هرتز	Hz	s^{-1}
ضربه	نیوتون ـ ثانیه	...	kg.m/s
طول	متر	m	**
جرم	کیلوگرم	kg	**
گشتاور نیرو	نیوتون ـ متر	...	N.m
توان	وات	W	J/s
فشار	پاسکال	Pa	N/m^2
تنش	پاسکال	Pa	N/m^2
زمان	ثانیه	s	**
سرعت	متر بر ثانیه	...	m/s
حجم			
جامدات	مترمکعب	...	m^3
مایعات	لیتر	L	$10^{-3}m^3$
کار	ژول	J	N.m

تبدیل یکاها

جدول ۳.۱ یکاهای معمول .U.S و معادل آنها در SI

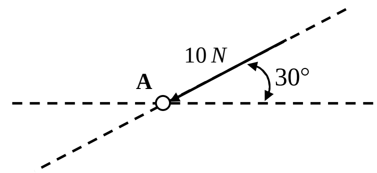
مقدار	یکای معمول در .U.S	معادل در SI
شتاب	ft/s۲	۰٫۳۰۴۸ m/s۲
	in./s۲	۰٫۰۲۵۴ m/s۲
مساحت	ft۲	۰٫۰۹۲۹ m۲
	in۲	۶۴۵٫۲ mm۲
انرژی	ft.lb	۱٫۳۵۶ J
نیرو	kip	۴٫۴۴۸ kN
	lb	۴٫۴۴۸ N
	oz	۰٫۲۷۸۰ N
ضربه	lb.s	۴٫۴۴۸ N.s
طول	ft	۰٫۳۰۴۸ m
	in	۲۵٫۴۰ mm
	mi	۱٫۶۰۹ km
جرم	oz mass	۲۸٫۳۵g
	lb mass	۰٫۴۵۳۶ kg
	slug	۱۴٫۵۹ kg
	ton	۹۰۷٫۲ kg
گشتاور یک نیرو	lb.ft	۱٫۳۵۶ N.m
	lb.in	۰٫۱۱۳۰ N.m
گشتاور لختی		
یک سطح	in۴	۰٫۴۱۶۲x۱۰۶ mm۴
یک جرم	lb.ft.s۲	۱٫۳۵۶ kg.m۲
مقدار اندازه حرکت	lb.s	۴٫۴۴۸ kg.m/s
توان	ft.lb/s	۱٫۳۵۶ W
	hp	۷۴۵٫۷ W
فشار یا تنش	lb/ft۲	۴۷٫۸۸ Pa
	lb/in۲(psi)	۶٫۸۹۵ kPa
سرعت	ft/s	۰٫۳۰۴۸ m/s
	in/s	۰٫۰۲۵۴ m/s
	mi/h (mph)	۰٫۴۴۷۰ m/s
	mi/h (mph)	۱٫۶۰۹ km/h
حجم	ft۳	۰٫۰۲۸۳۲ m۳
	in۳	۱۶٫۳۹ cm۳
مایعات	gal	۳٫۷۸۵ L
	qt	۰٫۹۴۶۴ L
کار	ft.lb	۱٫۳۵۶ J

فصل دوم :

استاتیک نقاط مادی

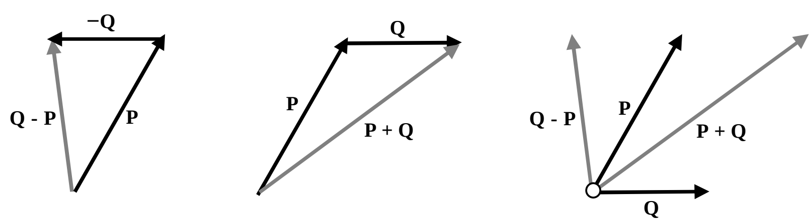
استاتیک نقاط مادی (ذرات):

عملکرد یک جسم را روی جسم دیگر نیرو می نامند که توسط نقطه وارده , مقدار و جهت آن مشخص می شود.
نیرو را توسط یک بردار نشان می دهند . یک بردار دارای مقدار , خط اثر و جهتی مشخص است که آن را با یک پیکـان نشان می دهند .

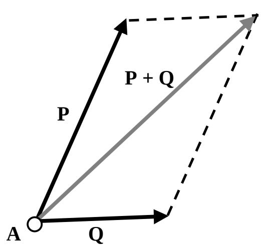


برای تجزیه و تحلیل یک جسم اهمیتی ندارد که نیرو به کدام نقطه ی آن وارد می شود تنها باید در امتدادخط اثـرش باشد. البته این موضوع تنها در مورد تجزیه و تحلیل نیروهای خارجی صدق می کند و برای نیروهای داخلـی نقطـه اثـر نیرو باید دقیقا مشخص شده باشد.

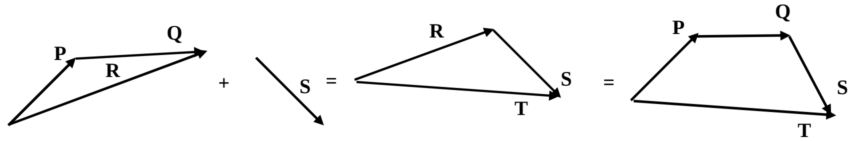
جمع بردارها به روش مثلث :



جمع بردارها به روش متوازی الاضلاع :



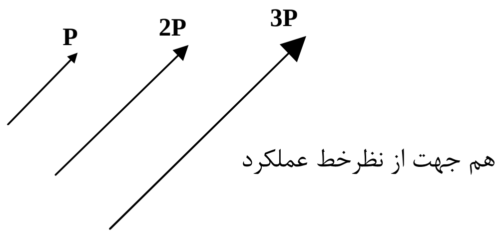
برای جمع سه بردار Q و P و S داریم :



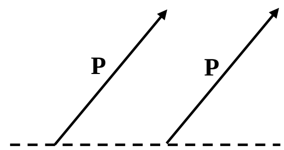
P +Q =R **R+S =T** **P+Q+S=T**

$$\vec{Q}+\vec{P}+\vec{S}=\vec{R}+\vec{S}=\mathrm{T}$$

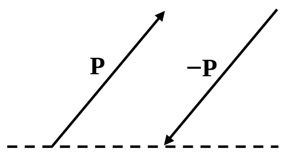
ضرب یک بردار در یک عدد :



اگر $P \| F$ آنگاه $\vec{P} = r\vec{F}$.

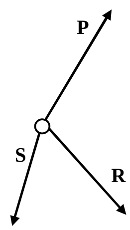


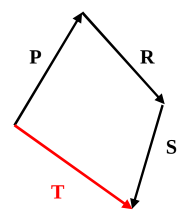
$\vec{P} = \vec{F}$ اگر و فقط اگر $F \| P$ و $r = 1$.



P قرینه Q است اگر و فقط اگر $F \| P$ و $r = -1$.

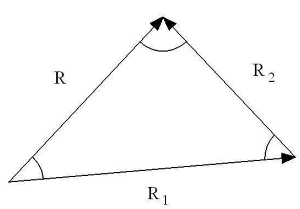
براینده چندین نیرو که از یک نقطه عبور می کنند :





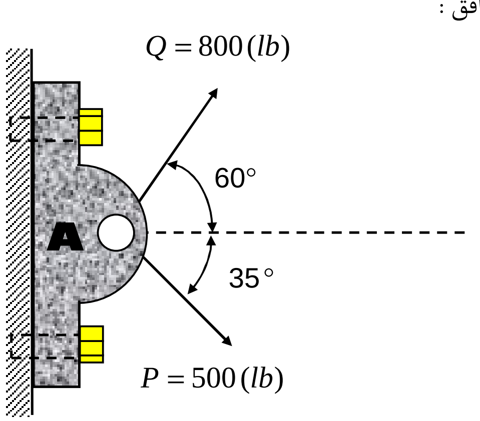
$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{S} = \vec{T}$$

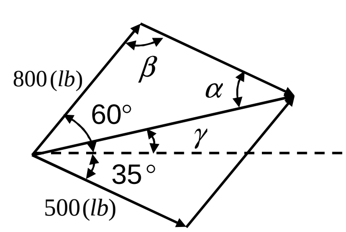
تجزیه نیرو به مولفه‌ها (عکس عمل جمع دو بردار) :



$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

مثال: مطلوب است برایند دو نیروی $\vec{Q}, \vec{P}$ و زایه ی آن با سطح افق :





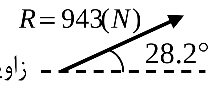
با استفاده از قانون کوسینوسها :

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\theta \qquad (\beta = 85^0)$$

$$R = \sqrt{500^2 + 800^2 - 2\times 50\times 800\times \cos 85} = 943N$$

با استفاده از قانون سینوسها :

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 85} \Rightarrow \frac{500}{\sin\alpha} = \frac{943}{\sin 85} \Rightarrow \alpha = 31.8$$

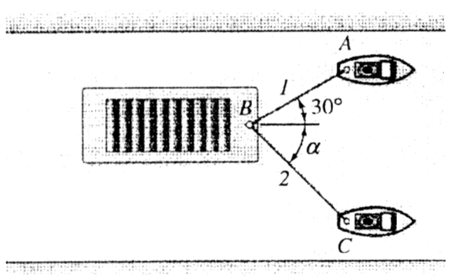


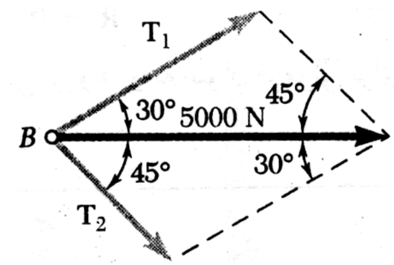
زاویه با افق: $\gamma = 60 - 31.8 = 28.2^\circ$

مثال: کشتی B توسط دو قایق A و C در حال حمل می باشد اگر برایند نیروهایی که کابل هـای ۱ و ۲ بـه کشـتی B وارد می کنند برابر با 5000N باشد و در جهت مثبت X باشدء مطلوب است:

الف) نیروهای کششی به هر کابل وقتی که $\alpha = 45^\circ$.

ب)مقدار زاویه α به طوری که نیروی کششی در کابل ۲ حداقل گردد.



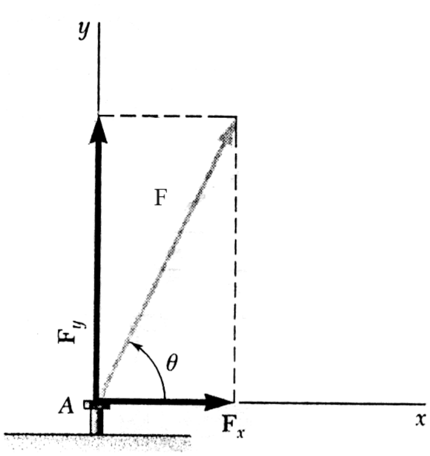


بوسیله قانون سینوسها و قانون متوازی الاضلاع می‌توان T_1 و T_2 را به دست آورد.

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{T_1}{\sin 45} = \dfrac{T_2}{\sin 30} = \dfrac{R}{\sin 105} = \\ R = 5000\,(N)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 3660\,(N) \\ T_2 = 2590\,(N)\end{cases}$$

برای اینکه T_2 Minimum باشد باید $T_1 \perp T_2$ باشد :

$$\left.\dfrac{T_1}{\sin 60} = \dfrac{T_2}{\sin 30} = \dfrac{R}{\sin 90} = \right| \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 4330 \ (N) \\ T_2 = 2500 \ (N)\end{cases}$$

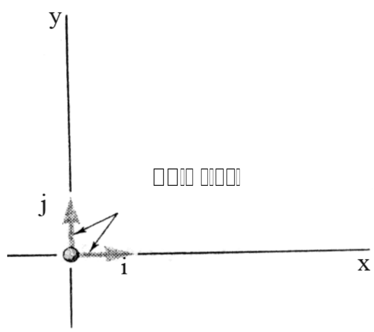


مولفه های متعامد (مستطیلی) یک بردار

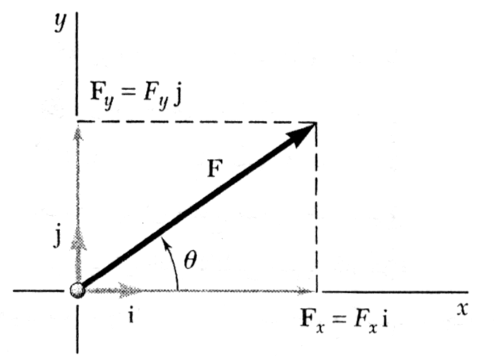
$$F_x = F\cos\theta$$

$$F_y = F\sin\theta$$

- **بردار واحد برداری است که اندازه آن ۱ واحد باشد.**
- **بردار واحد در جهت x را $\vec{i}$ و در جهت y را $\vec{j}$ می‌نامیم.**



با توجه به ضرب بردارها خواهیم داشت:



$$\vec{F}_x = F_x\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_y = F_y\,\vec{j}$$

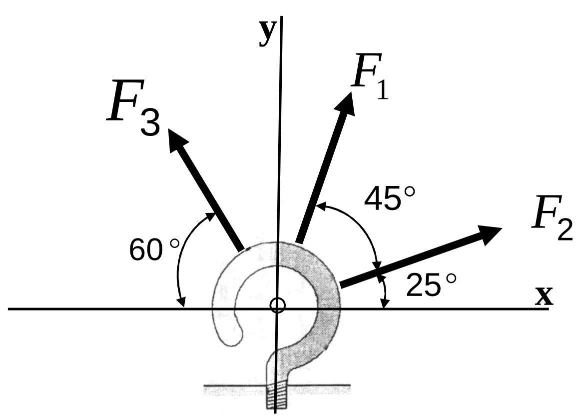
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j}$$

$$F_x = F\cos\theta \quad , \quad F_y = F\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \qquad F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$

مثال: برایند نیروهای زیررا بیابید.

$$F_3 = 600(N),\ F_2 = 350(N)\ ,\ F_1 = 800(N)$$

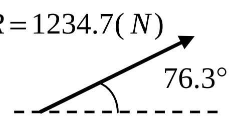


شکل ۲ . ۱۴

نیرو	مقدار	F_x	F_y
F_1	800	800cos70	800sin70
F_2	350	350cos25	350sin25
F_3	600	-600cos60	600cos60
$R = \sum F_i$		+291 (N)	1200 (N)

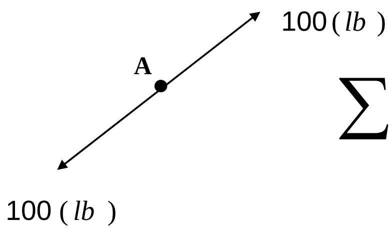
$$R = 291\vec{i} + 1200\vec{j}$$

$$\theta = Arc\tan\frac{1200}{291} = 76.3^\circ$$



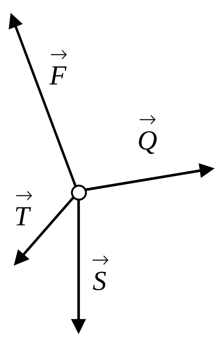
تعادل یک ذره (نقطه)

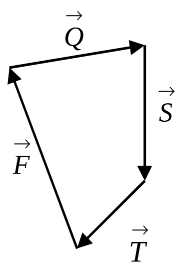
اگر برآیند نیروهایی که روی یک جسم و یا یک ذره اثر می‌کنند برابر با صفر باشد ، آنگاه آن جسم در حال تعادل است.



$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow$$

□□ □□□□ □□ A □□□





$$\vec{Q} + \vec{S} + \vec{T} + \vec{F} = 0$$

اگر نیروها در صفحه xy باشند.

$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0$$

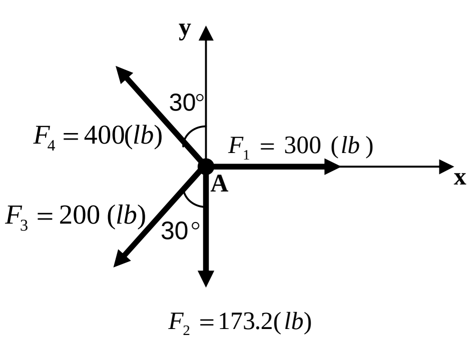
اگر نیروها درفضای xyz باشد.

$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0$$

$$\oplus \downarrow \sum F_z = 0$$

مثال: آیا نقطه A در حال تعادل است؟



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0\ ,\ \sum F_y = 0$$

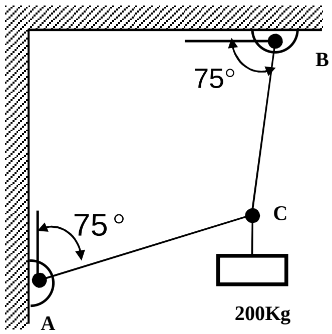
$$R_x = \sum F_x = 0:\ F_1 - F_3 \sin 30 - F_4 \sin 30 = 300 - 200 \sin 30 - 400 \sin 30 = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0: F_4 \cos 30 - F_3 \cos 30 - F_2 = 400 \cos 30 - 200 \cos 30 - 173 = 0$$

چون R_x و R_y هر دو صفر می‌باشند پس نقطه A در تعادل است.

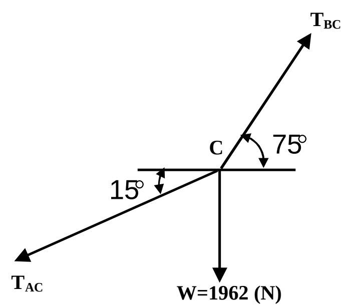
مثال: کشش در طنابها را بدست آورید.

(W وزن جسم است)



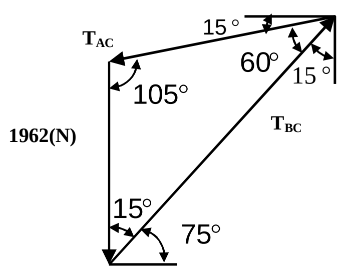
در مرحله اول باید همواره دیاگرام آزاد نیروها را رسم کنیم.

$$W = mg = 200(9.81) = 1962\,(N)$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AC} \sin\alpha + T_{BC} \sin\beta - W = 0$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow -T_{AC} \cos\alpha + T_{BC} \cos\beta = 0$$



$$w = 1962(N)$$

$$T_{BC} \sin 15 - T_{AC} \cos 15 = 0$$

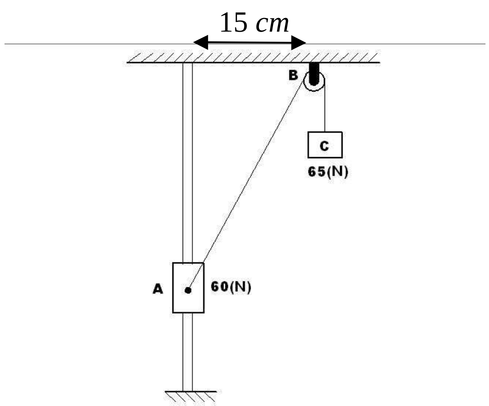
$$T_{BC} \cos 15 - T_{AC} \sin 15 - W = 0$$

$$\Rightarrow T_{AC} = 586.3(N)$$

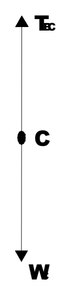
$$\Rightarrow T_{BC} = 2188(N)$$

مثال: یک طوقه به وزن $60\ (N)$ می‌تواند روی یک میله بدون اصطکاک حرکت کند و بـه یـک وزنـه $65\ (N)$ متصل باشد. h را طوری تنظیم کنید که سیستم در حال تعادل باشد. $W_C = 65\,(N)\ ,\ W_A = 60\,(N)$

حل: $AB = \sqrt{(15)^2 + h^2}$



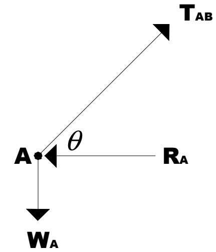
تعادل وزنه C:



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0\ ,\ \sum F_y = 0$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{BC} - W_C = 0 \Rightarrow T_{BC} = W_C = 65(N)$$

تعادل وزنه A :

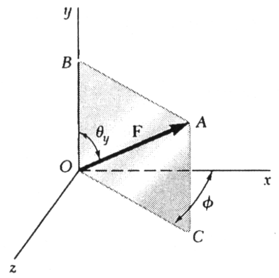
$$T_{AB} = 65(N)$$



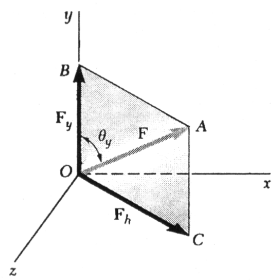
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0\ ,\ \sum F_y = 0$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AB}\cos\theta - R_A = 0$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB}\sin\theta - W_A = 0$$
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{W}{T} \Rightarrow h = 15 * \tan\theta = 36(cm)$$

نیروها در فضای سه بعدی:

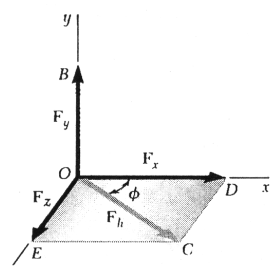
مولفه های متعامد :



(الف)



(ب)

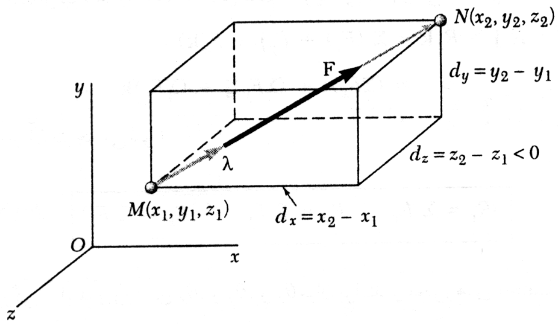


(ج)

$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$
$$\vec{F}_x = \left|\vec{F}_x\right| = \left|\vec{F}\right| \cos\theta_x$$
$$\vec{F}_y = \left|\vec{F}_y\right| = \left|\vec{F}\right| \cos\theta_y$$
$$\vec{F}_z = \left|\vec{F}_z\right| = \left|\vec{F}\right| \cos\theta_z$$
$$\vec{F}_x == F_x\vec{i}\ ,\ \vec{F}_y = F_y\vec{j}\ ,\ \vec{F}_z = F_z\vec{k}$$
$$\vec{F} = F(\cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k})$$
$$\vec{F} = F\lambda \quad (\lambda = \cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k})$$
$$\vec{\lambda} = \lambda_x\vec{i} + \lambda_y\vec{j} + \lambda_z\vec{k}$$
$$\lambda_x = \lambda\cos\theta_x$$
$$\lambda_y = \lambda\cos\theta_y$$
$$\lambda_z = \lambda\cos\theta_z$$
$$\lambda_x = \lambda\cos\theta_x\ ,\ \lambda_y = \lambda\cos\theta_y\ ,\ \lambda_z = \lambda\cos\theta_z$$
$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

$$\vec{F} = F_y + F_h \quad ,\quad F_h = F_z + F_x$$
$$F_y = F\cos\theta_y\ ,\ F_h = F\sin\theta_y$$
$$F_x = F_h\cos\phi = F\sin\theta_y\cos\phi$$
$$F_z = F_h\sin\phi = F\sin\theta_y\sin\phi$$

نیرویی که توسط مقدار و دو نقطه روی خط آن مشخص می‌شود



$$\overrightarrow{MN} = d_x\vec{i} + d_y\vec{i} + d_z\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} d_x &= x_2 - x_1 \\ d_y &= x_2 - x_1 \\ d_z &= x_2 - x_1 \end{aligned}\right\} d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k})$$

$\vec{\lambda}$ بردار واحد در جهت بردار MN می باشد

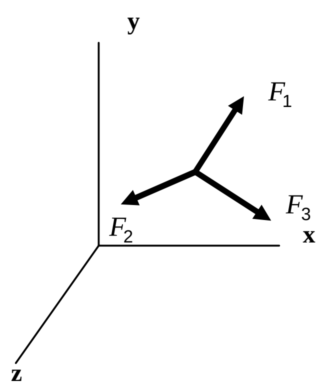
$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k})$$

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad , \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad , \quad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

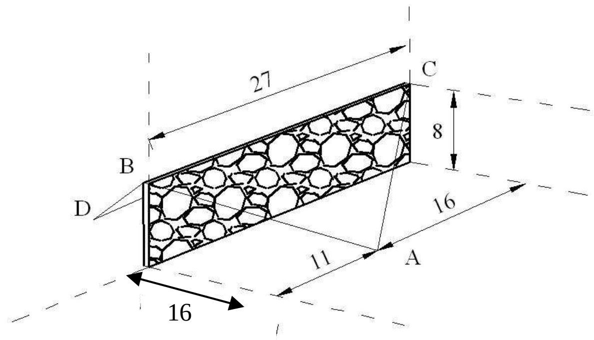
جمع نیروهایی که از یک نقطه در فضا می‌گذرند

$$\vec{R} = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$$
$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$
$$R_x = (\sum F_x)$$
$$R_y = (\sum F_y)$$
$$R_z = (\sum F_z)$$

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + R_y^2 + R_Z^2}$$



مثال: یک دیوار بتنی توسط ۴ طناب نگه‌داشته شده است. اگر نیروی کششی در طناب AB برابر $840(N)$ باشد و نیروی کششی درطناب AC برابر $1200(N)$ باشد به دست آورید مقدار نیروی برآیندی که توسط طنابهای AB و AC بر نقطه A وارد می‌شود.



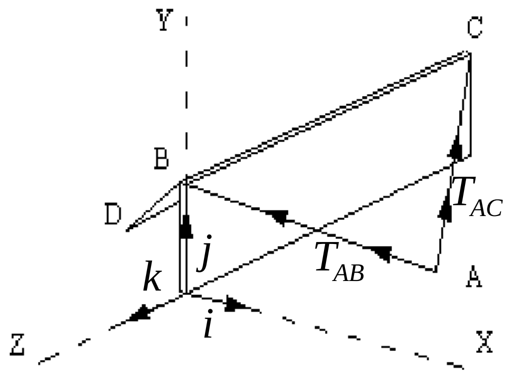
$$\vec{R}_A = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC}$$

$$\vec{R}_A = T_{AB}\vec{\lambda}_{AB} + T_{AC}\vec{\lambda}_{AC}$$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{-16\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}}{24}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{-16\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k}}{21}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{T_{AC}} = \frac{1200}{24}(-16\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k})$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{T_{AB}} = \frac{840}{21}(-16\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k})$$

$$\vec{R}_A = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} = -1440\vec{i} + 720\vec{j} - 360\vec{k}\left(N\right)$$

$$R_A = \sqrt{(-1440)^2 + (720)^2 + (-360)^2} = 1650\left(N\right)$$

$$\sum F = 0$$

$$\sum F_x = 0 \, , \sum F_y = 0$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1440}{1650} \quad \Rightarrow \quad \theta_x = 150/8^\circ$$

$$\cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{720}{1650} \quad \Rightarrow \quad \theta_y = 64/1^\circ$$

$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360}{1650} \quad \Rightarrow \quad \theta_z = 102/6^\circ$$

تعادل یک نقطه درفضا:

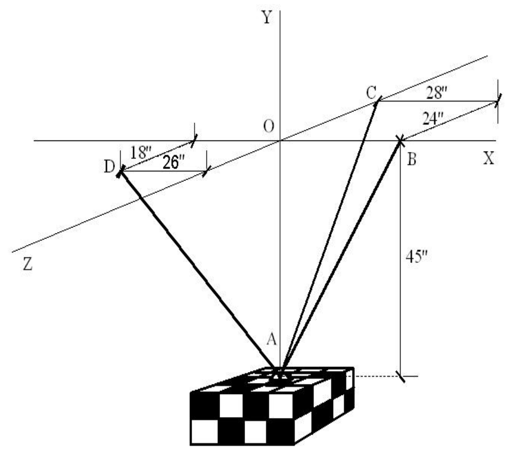
تعادل در فضای دو بعدی:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

تعادل در فضای سه بعدی:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

مثال: مطلوب است وزن جسم مکعب مستطیل، اگر نیروی کششی در کابل AD برابر 924N باشد.



$$\sum F = 0 \Rightarrow T_{AB} + T_{AC} + T_{AD} + W = 0$$

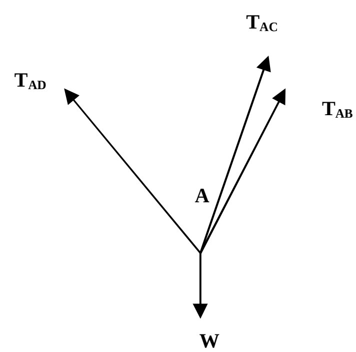
$$\vec{T}_{AB} = T_{AB}\vec{\lambda}_{AB} \,,\, \vec{T}_{AC} = T_{AC}\vec{\lambda}_{AC} \,,\, \vec{T}_{AD} = T_{AD}\vec{\lambda}_{AD} \,,\, \vec{W} = -Wj$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{28\vec{i} + 45\vec{j}}{53}$$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{45\vec{j} - 24\vec{k}}{51}$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{-26\vec{i} + 45\vec{j} + 18\vec{k}}{55}$$

$$\vec{T}_{AB} = \frac{T_{AB}}{53}\left(28\vec{i} + 45\vec{j}\right)$$



$$\vec{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{51}\left(45\vec{j} - 24\vec{k}\right)$$

$$\vec{T}_{AD} = \frac{924}{55}\left(-26\vec{i} + 45\vec{j} + 18\vec{k}\right)$$

$$\vec{W} = -W\vec{j}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{28}{53}T_{AB} - \frac{924(26)}{55} = 0 \Rightarrow T_{AB} = 8268$$

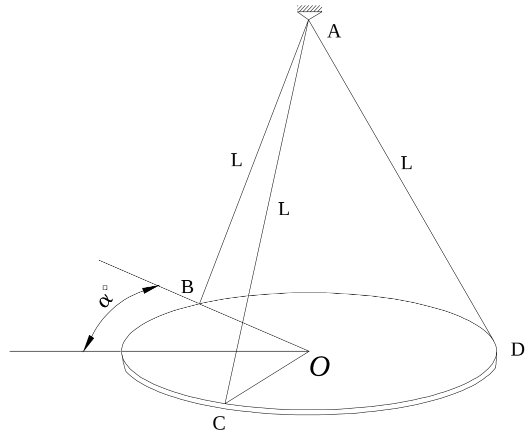
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{45}{53}T_{AB} + \frac{45}{51}T_{AC} + \frac{924(45)}{55} - W = 0$$

$$\sum F_Z = 0 \Rightarrow -\frac{24}{51}T_{AC} + \frac{924(18)}{55} = 0$$

$$\Rightarrow W = 2009 \ (N)$$

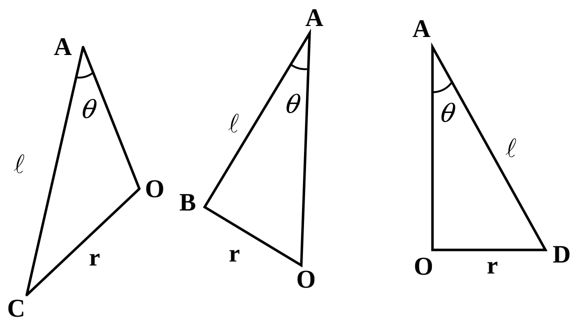
$$\Rightarrow \vec{T}_{AC} = 624.6 \ (N)$$

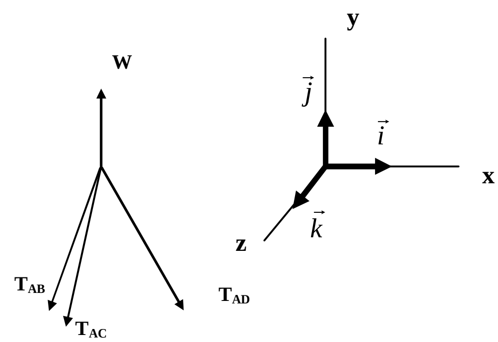
مثال: ورقه دایره‌ای به شعاع $200 \ (mm)$ توسط ۳ طناب نگه داشته‌شده‌است و $\alpha = 30^0$ می باشد.
مطلوب است کمترین طول لازم ℓ برای اینکه کشش در طناب از $35(N)$ بیشتر نشود. جرم ورق $6(Kg)$ می‌باشد.



$$\mathrm{M} = 6(\mathrm{kg}) \Rightarrow \mathrm{W} = 6\mathrm{g} = 58.86(\mathrm{N})$$

دیاگرام آزاد جسم:





$$\sum F = 0 \xrightarrow{1} \sum F_Z = 0 \Rightarrow T_{AB} = T_{AC}$$

$$\xrightarrow{2} \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AD} Sin\theta - (T_{AC} Sin\theta \cos 30) \times 2 = 0$$

$$\xrightarrow{3} \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AD} \cos\theta - (T_{AC} \cos\theta) \times 2 + 6g = 0$$

$T_{AD} = 1.73 T_{AB}$

$T_{AB} = T_{AC} = \dfrac{15.77}{\cos\theta}$, $T_{AD} = \dfrac{27.32}{\cos\theta}$

$\theta = 38.7° \; (T_{AD} = 35)$

$\sin\theta = \dfrac{0.2}{l} \Rightarrow l = 0.32\,(m) = 320(mm)$

فصل سوم

اجسام صلب سیستم

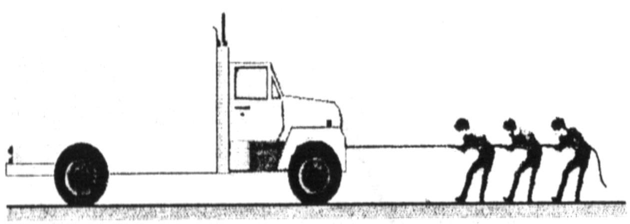
نیروهای معادل

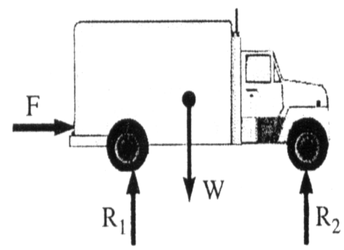
اجسام صلب : سیستم نیروهای معادل

- اکثراً در طبیعت ما با اجسام سر و کار داریم تا نقاط, و می توانیم اجسام را تشکیل شده از نقاط بدانیم .
- در این فصل در مورد اجسام سخت و یا صلب در حالت استاتیک صحبت خواهیم کرد ، یعنی اینکه جسم هیچ نوع تغییر شکلی نخواهد پذیرفت . در اصل این یک فرض می باشد چون که هیچ جسمی بطور صد در صد صلب نخواهد بود . ولی این کمبود در صلبیت جسم, در نیروها هیچ نوع اثری نخواهد گذاشت .
- در این فصل راجع به اجسام صلب و نیروهای معادل نیروهای وارد شده بر آن صحبت خواهیم کرد .
- در این فصل همچنین راجع به اصل انتقال نیروهای معادل صحبت خواهیم کرد .

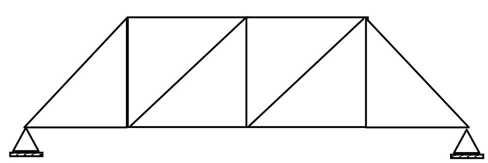
نیروهای داخلی و خارجی

- نیروهای خارجی ، نیروهایی می باشند که اثر سایر اجسام خارجی را روی جسم صلب می گذارند . آنها کاملاً مسئول رفتار جسم صلب می باشند .
- نیروهای داخلی ، نیروهایی می باشند که نگهدارنده اجزاء مختلف یک جسم صلب بصورت یک عضو می باشند.





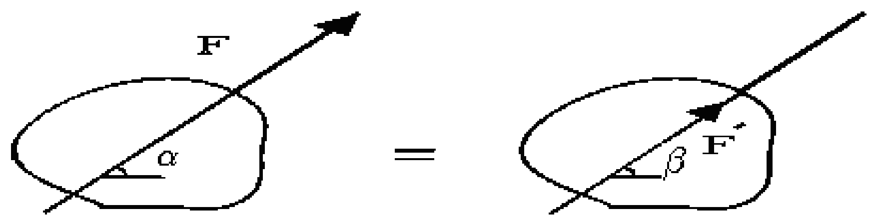
دیاگرام آزاد جسم صلب(نیروهای خارجی)



دیاگرام آزاد یک خرپا(نیروهای داخلی)

اصل انتقال- نیروهای معادل

این اصل می گوید که تعادل یک جسم بهم نخواهد خورد در صورتی که نیروئی که بر آن جسم وارد شده را بر روی خطی که آن نیرو اثر می کند انتقال دهیم .

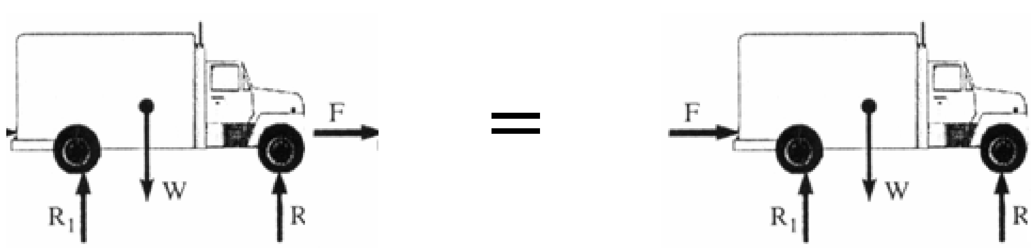


$F=F'$ U هم مقدار

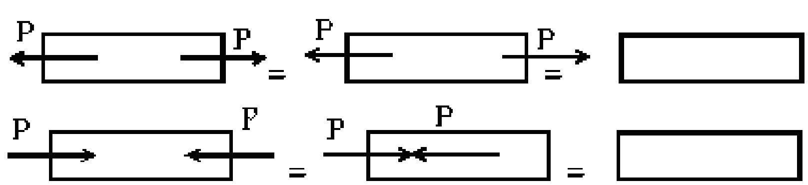
$\beta=\alpha$ U هم جهت

این قانون را نمی توانیم هم اکنون ثابت کنیم , مگر در دینامیک و در بخش سیستم های هم ارز و فقط می توانیم به آزمایش ها استناد کنیم .

- اثر این قانون در مثال قبلی به این شکل خواهد بود که در کامیون ، می توان نیروی وارد شده F را در جلو به انتهای کامیون وارد کرد .



نکته : در مورد نیروهای داخلی این قانون ممکن است که سیستم های معادل را بسازد اما اثر نیروها را درست در نظر نگیرد .



حاصلضرب برداری دو بردار

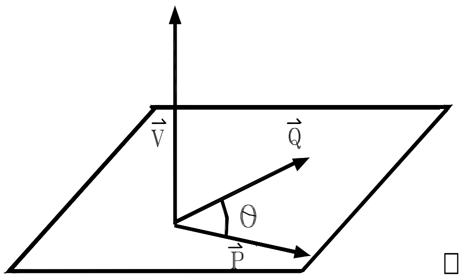
از حاصلضرب برداری در مبحث ممان , گشتاور یک نیرو حول یک نقطه و یا یک محور استفاده خواهیم کرد. حاصلضرب برداری دو بردار چنین تعریف می شود که مثلاً در

$\vec{V}=\vec{P}\times\vec{Q}$

الف) امتداد $\vec{V}$ عمود بر صفحه ای باشد که $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ در آن قرار دارند .

ب) مقدار $\vec{V}$ برابر باشد با $PQ\,\mathrm{Sin}\,\theta$ که θ زاویه بین $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ می باشد .

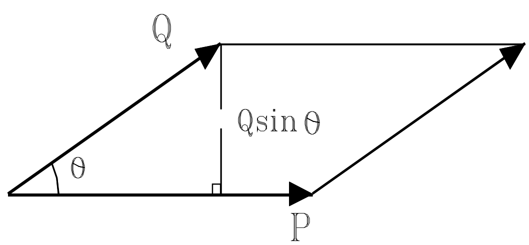
ج) جهت $\vec{V}$ از قانون دست راست بدست بیاید .



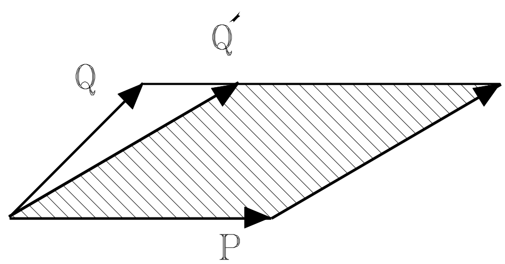
$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q}$$

$$|\vec{V}| = |\vec{P}| \; |\vec{Q}| \; \sin\theta$$

[illegible] P,Q [illegible] V [illegible]



$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = \vec{P} \times \vec{Q}'$$



Q' روی یک ضلع از متوازی الاضلاع اولیه قرار می‌گیرد

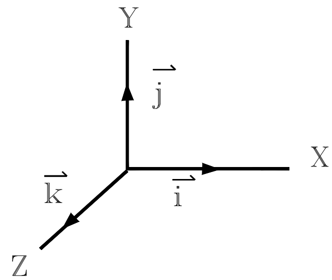
خواص حاصلضرب برداری :

الف) $\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

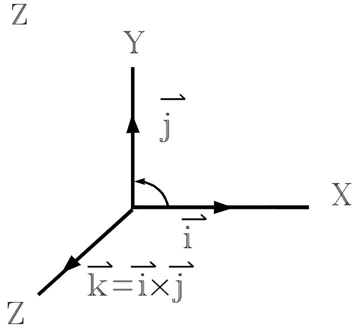
ب) $\vec{P} \times (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \times \vec{Q}_1 + \vec{P} \times \vec{Q}_2$

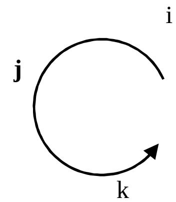
ج) $(\vec{P} \times \vec{Q}) \times \vec{S} \neq \vec{P} \times (\vec{Q} \times \vec{S})$

حاصلضرب برداری بر حسب مؤ لفه های متعامد

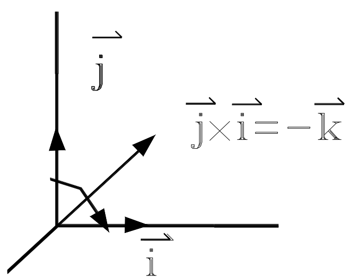


$$\vec{i}\times\vec{i}=0 \qquad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{j}=0 \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{k}=0$$

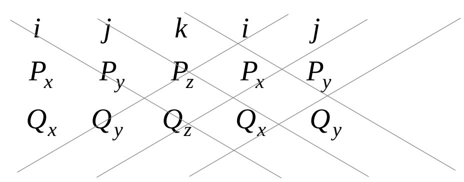




$$\vec{V}=\vec{P}\times\vec{Q}=(P_x\,\vec{i}+P_y\,\vec{j}+P_z\,\vec{k})\times(Q_x\,\vec{i}+Q_y\,\vec{j}+Q_z\,\vec{k})$$
$$\vec{V}=(P_yQ_z-P_zQ_y)\vec{i}+(P_zQ_x-P_xQ_z)\vec{j}+(P_xQ_y-P_yQ_x)\vec{k}$$

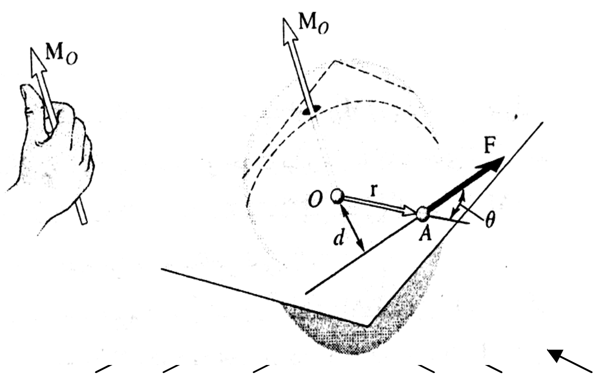


$$|\vec{V}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad (\text{determinate})$$



$P_y Q_x \vec{k}$ $P_z Q_y \vec{i}$ $P_x Q_z \vec{j}$ $P_y Q_z \vec{i}$ $P_z Q_x \vec{j}$ $P_x Q_y \vec{k}$

گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

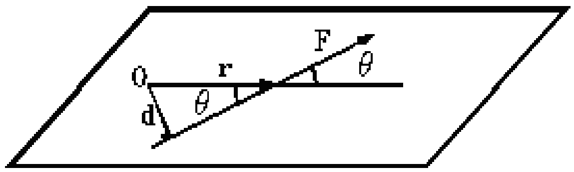


$\vec{F}$ = نیروی وارد بر جسم سخت در نقطه A

$\vec{r}$ = برداری که مکان A را نسبت به نقطه O مشخص می کند (بردار وضعیت)

$\vec{M}_o=\vec{r}\times\vec{F}$ ممان F حول نقطه O

جهت M_o : یک بردار می باشد که عمود بر صفحه $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است و سوی آن توسط قانون دست راست بدست می آید .



مقدار M_o تعیین کننده مقدار دورانی است که نیروی F حول یک محور خاصی که از نقطه O می گذرد ، انجام می دهد .

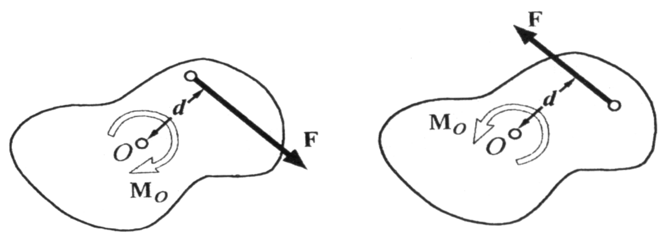
M_o واحد : N.m (SI)

lb.ft (FPS)

اصل جابجائی یک بردار و نیرو را می توان دوباره به این صورت بیان کرد که دو سیستم وقتی معادل خواهند بود که نه تنها نیروهای آنها با هم برابر و هم سو و هم جهت باشند ، بلکه گشتاورهای ایجاد شده در نقاط O یک مقدار باشند .

$$F = F' \qquad M_o = M_o'$$

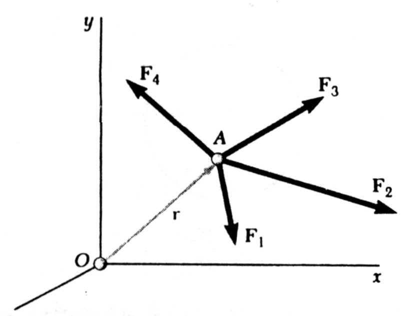
مسائل دو بعدی :



$M_O = -Fd$ (ب) $M_O = +Fd$ (الف)

بعضی مسائل در مکانیک طوری هستند که جسم را در یک صفحه می توان قرار داد و ضخامت آن در مسئله تأثیری نخواهد داشت .

قضیه وارینون

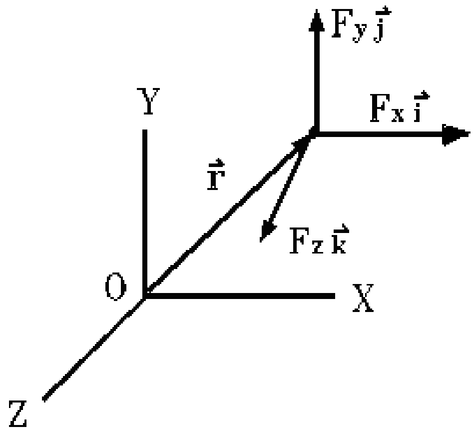


اگر چندین نیرو در یک نقطه اثر کنند مثلاً در نقطه A خواهیم داشت :

$$\vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots)=\vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2+\ldots$$

گشتاور و یا ممان حول نقطه O برای برآیند چندین نیرویی که از یک نقطه می گذرند برابر است با مجموع ممان‌های آن نیروها حول همان نقطه O .

مؤلفه های متعامد گشتاور یک نیرو



$$\vec{r} = r_x\,\vec{i} + r_y\,\vec{j} + r_z\,\vec{k}$$
$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\vec{M}_O = M_x\,\vec{i} + M_y\,\vec{j} + M_z\,\vec{k}$$

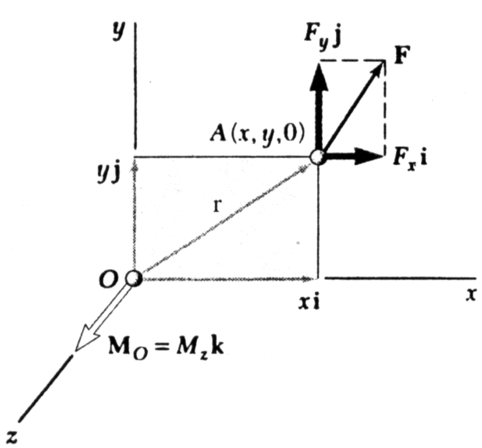
$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$
$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$
$$M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

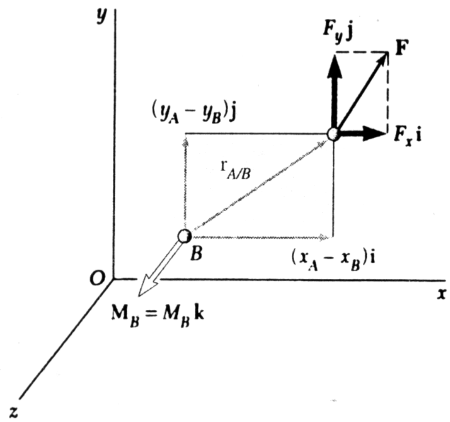
$$\vec{r}_{A/B} = x_{A/B}\,\vec{i} + y_{A/B}\,\vec{j} + z_{A/B}\,\vec{k}$$
$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$
$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$\begin{cases} x_{A/B} = x_A - x_B \\ y_{A/B} = y_A - y_B \\ z_{A/B} = z_A - z_B \end{cases} \qquad \vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

در مسائل دو بعدی :

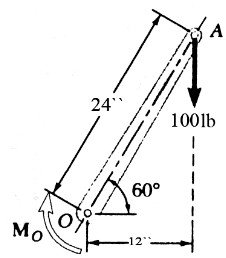


$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$
$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j}$$
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (x\,\vec{i} + y\vec{j}) \times (F_x\vec{i} + F_y\vec{j})$$
$$\vec{M}_O = (xF_y - yF_x)\,\vec{k}$$
$$M_x = 0 \;\;,\;\; M_y = 0 \;\;,\;\; M_z = xF_y - yF_x$$



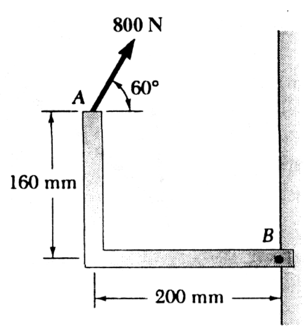
$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$
$$\vec{r}_{A/B} = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j}$$
$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j}$$
$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$
$$\vec{M}_B = \left[(x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x\right]k$$
$$M_x = 0 \;\;,\;\; M_y = 0 \;\;,\;\; M_z = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

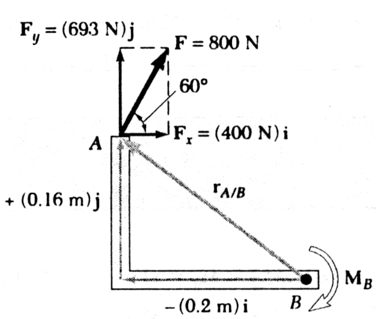
مثال: $M_o = ?$



$$M = rF\;Sin\,\theta = Fd$$
$$= (100)\,(24\,Sin\;30°) = (100)\,(12)$$
$$M = 1200 \quad (lb.inch)$$

مثال: $M_B = ?$

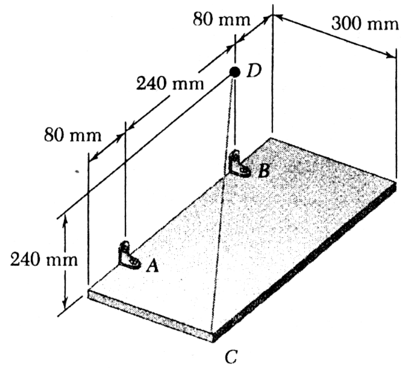


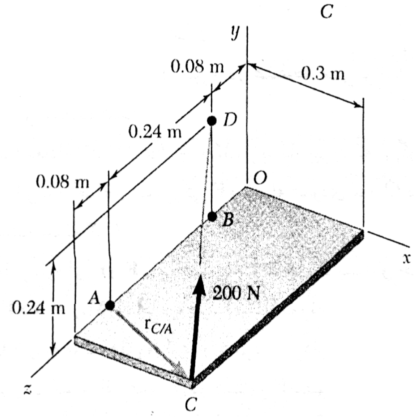


$$\vec{M} = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$
$$\vec{r}_{A/B} = -0.2\,\vec{i} + 0.16\,\vec{j} \quad (m)$$
$$\vec{F} = (800\,Cos\;60°)\,\vec{i} + (800\,Sin\;60°)\,\vec{j}$$
$$= 400\,\vec{i} + 693\,\vec{j} \quad (N)$$
$$\vec{M}_B = \left[-0.2\,\vec{i} + 0.16\,\vec{j}\right] \times \left[400\,\vec{i} + 693\,\vec{j}\right]$$
$$= -138.6\,\vec{k} - 64\,\vec{k} = -202.6\;\vec{k} \quad (N.m)$$
$$M = 202.6 \;\;(N.m)$$

مثال:

یک صفحه توسط دو لولا در نقطه A و B و یک سیم CD نگه داشته شده است . در سیم CD اگر نیروی کشش برابر با 200 N باشد ، بدست آورید ممان آن نیرو را از طرف C حول نقطه A .





$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{C/A} = \vec{AC} = -0.3\vec{i} + 0.08\vec{k}$$

$$\vec{F} = F\,\vec{\lambda}_{CD} = (200)\,\frac{\vec{CD}}{CD}$$

$$\vec{CD} = -0.3\vec{i} + 0.24\,\vec{j} - 0.32\vec{k} \quad (m)$$

$$CD = \sqrt{(-0.3)^2 + (0.24)^2 + (-0.32)^2} = 0.50 \quad (m)$$

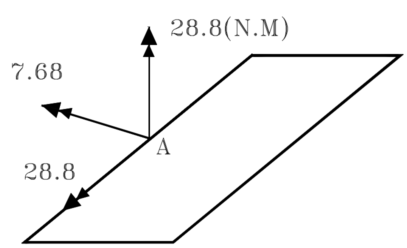
$$\vec{F} = \frac{200}{0.5}\left[-0.3\vec{i} + 0.24\,\vec{j} - 0.32\vec{k}\right] = -120\vec{i} + 96\,\vec{j} - 128\vec{k} \quad (N)$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F} = (0.3\vec{i} + 0.08\vec{k})\;(-120\vec{i} + 96\,\vec{j} - 128\vec{k})$$

$$= (0.3)(96)\vec{k} + (0.3)(-128)(-\vec{j}) + (0.08)(-120)\,\vec{j} + (0.08)(96)(-\vec{i})$$

$$\vec{M}_A = -7.68\vec{i} + 28.8\,\vec{j} + 28.8\vec{k} \quad (N.m)$$

راه حل دوم :

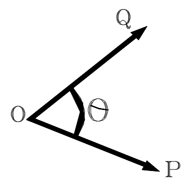


$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = -7.68\,\vec{i} + 28.8\,\vec{j} + 28.8\,\vec{k} \qquad (N.m)$$

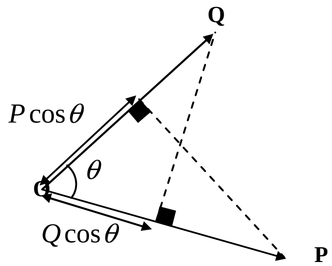
حاصلضرب عددی دو بردار



$$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\,Cos\,\theta$$

$$\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$$

$$\vec{P}.(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P}.\vec{Q}_1 + \vec{P}.\vec{Q}_2$$



$$\vec{P}.\vec{Q} = (P_x\,\vec{i} + P_y\,\vec{j} + P_z\,\vec{k}).(Q_y\,\vec{i} + Q_y\,\vec{j} + Q_z\,\vec{k})$$

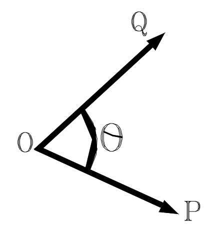
$$\vec{P}.\vec{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

$$\vec{i}.\vec{i} = 1 \qquad \vec{i}.\vec{j} = 0$$

$$\vec{j}.\vec{j} = 1 \qquad \vec{j}.\vec{k} = 0$$

$$\vec{k}.\vec{k} = 1 \qquad \vec{k}.\vec{i} = 0$$

زاویه ای که دو بردار با هم دارند



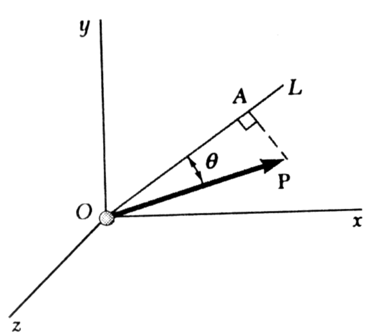
$$\vec{P} = P_x\,\vec{i} + P_y\,\vec{j} + P_z\,\vec{k}$$

$$\vec{Q} = Q_x\,\vec{i} + Q_y\,\vec{j} + Q_z\,\vec{k}$$

$$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\,Cos\,\theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

$$Cos\,\theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ}$$

تصویر یک بردار بر روی یک محور :



تصویر بردار P روی محور L

$$P_{OL} = P\,Cos\,\theta$$

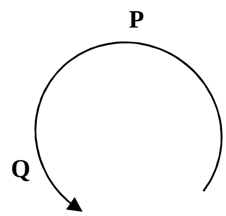
$$P_{OL} = \vec{P}.\vec{\lambda} = P\,\lambda\,Cos\,\theta = P\,(1)Cos\,\theta = P\,Cos\,\theta$$

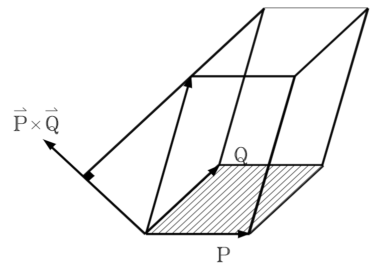
یا

$$P_{OL} = P_x\,Cos\,\theta_x + P_y\,Cos\,\theta_y + P_z\,Cos\,\theta_z$$

$$(\vec{\lambda} = Cos\,\theta_x\,\vec{i} + Cos\,\theta_y\,\vec{j} + Cos\,\theta_z\,\vec{k})$$

ضرب مختلط سه بردار





$\vec{S}.(\vec{P}\times\vec{Q})$ = حجم منشور (مکعب)

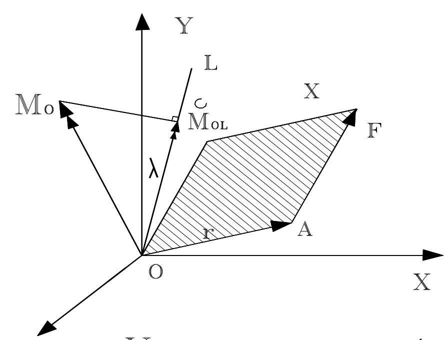
$\vec{P}\times\vec{Q}$ = مساحت متوازی الاضلاع

$$\vec{S}.(\vec{P}\times\vec{Q})=\vec{P}.(\vec{Q}\times\vec{S})=\vec{Q}.(\vec{S}\times\vec{P})$$
$$=-\vec{S}.(\vec{Q}\times\vec{P})=-\vec{P}.(\vec{S}\times\vec{Q})=-\vec{Q}.(\vec{P}\times\vec{S})$$
$$\vec{P}\times\vec{Q}=\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$$
$$\vec{S}.(\vec{P}\times\vec{Q})=\vec{S}.\vec{V}=S_xV_x+S_yV_y+S_zV_z$$
$$\vec{S}.(\vec{P}\times\vec{Q})=S_x(P_yQ_z-P_zQ_y)+S_y(P_zQ_x-P_xQ_z)+S_z(P_xQ_y-P_yQ_x)$$

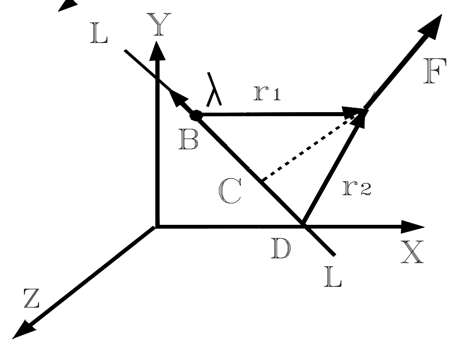
$$\vec{S}.(\vec{P}\times\vec{Q})=\begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

ممان یک نیرو حول یک محور

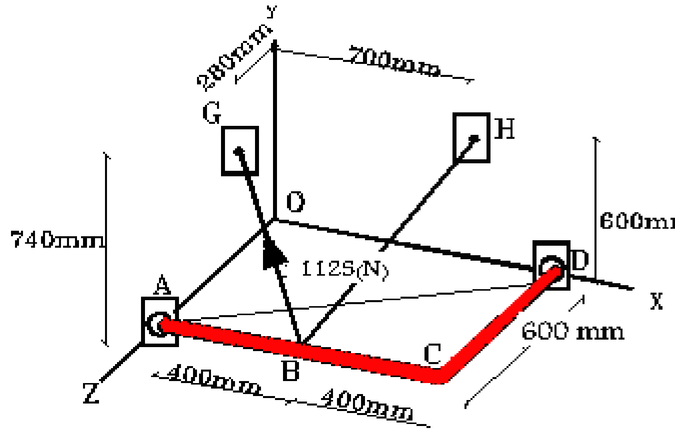
$$\vec{M}_o=\vec{r}\times\vec{F}$$
$$|M_{OL}|=\vec{\lambda}.\vec{M}_o$$
$$\vec{M}_{OL}=M_{OL}\,\vec{\lambda}$$
$$M_{OL}=\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



$$M_{LL}=\vec{\lambda}.\vec{M}_B=\vec{\lambda}_1.(\vec{r}_1\times\vec{F})$$
$$M_{LL}=\vec{\lambda}.\vec{M}_D=\vec{\lambda}_2.(\vec{r}_2\times\vec{F})$$



مثال: ممان نیروی وارد شده در طناب BG را در نقطه B حول محور AD بدست آورید .



$$\vec{AD} = 0.8\vec{i} - 0.6\vec{k} \quad (m) \qquad , \qquad |AD| = 1.00\ m$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\vec{AD}}{|AD|} = 0.8\vec{i} - 0.6\vec{k} \qquad \vec{r}_{B/A} = 0.4\vec{i}$$

$$\vec{BG} = -0.4\vec{i} + 0.74\vec{j} - 0.32\vec{k} \quad (m) \qquad , \qquad |BG| = 0.9\,m$$

$$\vec{\lambda}_{BG} = \frac{\vec{BG}}{|BG|} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{BG} = F_{BG}\frac{\vec{BG}}{|BG|} = 1125\left(\frac{-0.4\vec{i} + 0.74\vec{j} - 0.32\vec{k}}{0.9}\right)$$

$$\vec{F}_{BG} = -500\vec{i} + 925\vec{j} - 400\vec{k}$$

$$\vec{M}_{AD} = \vec{\lambda}_{AD} \cdot (\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_{BG}) = \begin{vmatrix} 0.8 & 0 & -0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ -500 & 925 & -400 \end{vmatrix} = -222 \quad (N.m)$$

مثال: اگر $\vec{P} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{Q} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ و $\vec{S} = 7\vec{i} - \vec{j} + s_z\vec{k}$ باشند . s_z را طوری بدست آورید که هر سه بردار در یک صفحه قرار گیرند .

برای اینکه هر سه بردار در یک صفحه قرار گیرند ، لازم است که $\vec{P}\cdot(\vec{Q}\times\vec{S}) = 0$

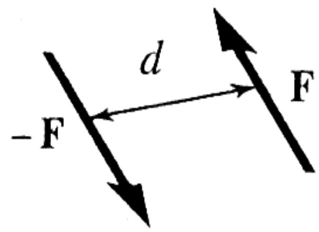
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & -1 & s_z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 16s_z + 70 - 6 - 84 - 20 + 4s_z = 0$$

$$20s_z - 40 = 0$$

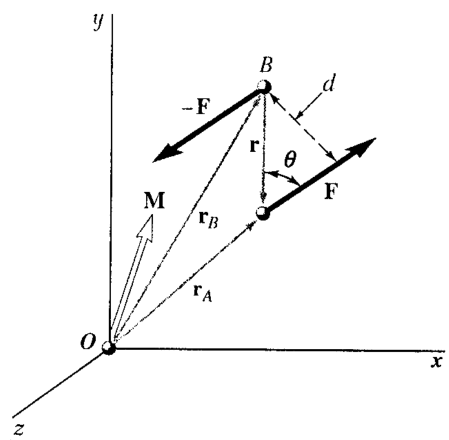
$$\boxed{s_z = 2}$$

ممان یک کوپل

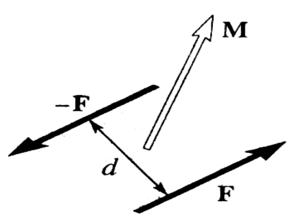
به مجموعه دو نیروی F و F– که دارای یک مقدار باشند و در جهت مخالف هم بوده کوپل می گویند .



$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$$
$$M = F\ .d$$



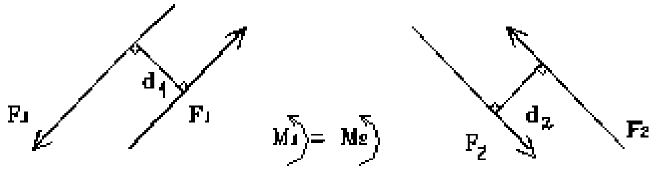
$$\vec{m} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$
$$m = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$m = r\,F \sin\theta = F\,d$$

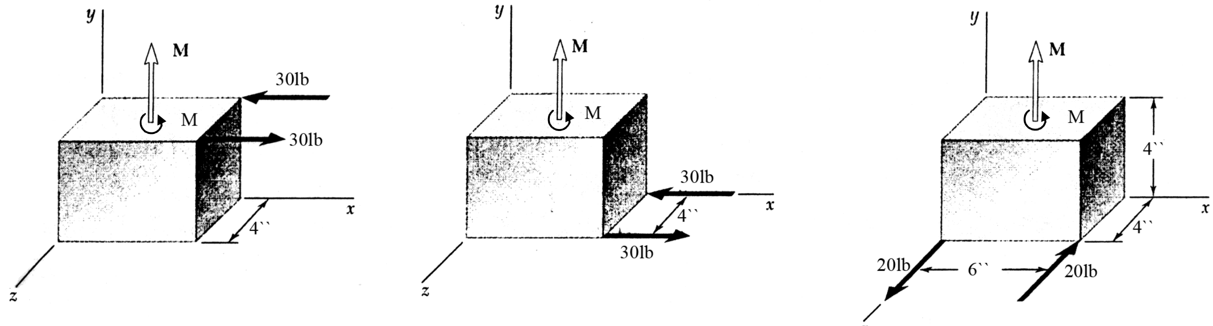
بردار کوپل یک بردار آزاد می باشد ، زیرا که ممان آن بستگی به نقطه خاصی ندارد و نسبت به هر نقطه همان مقدار ممان $F\,d$ را خواهد داشت .

دو کوپل موقعی برابر می باشند که مقدار و جهت ممان های حاصل از آنها با هم برابر باشند .



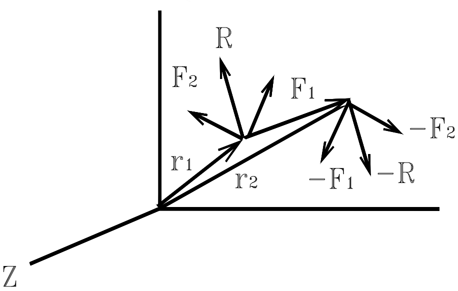
$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

کوپل های معادل

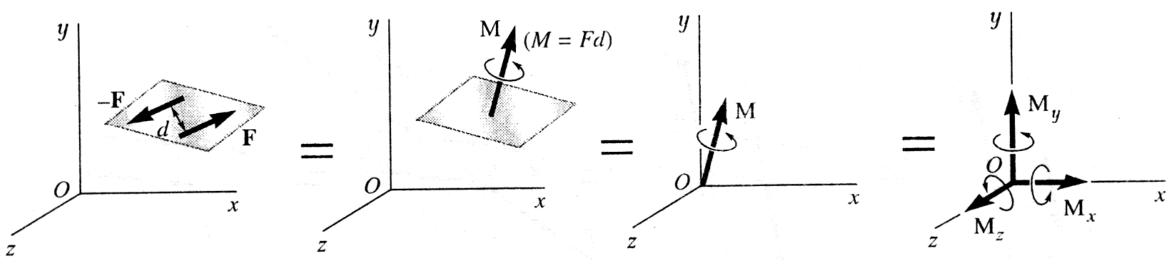


M=30(4)=120(lb.m)　M=30(4)=120(lb.m)　M=20(6)=120(lb.m)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{R} + \vec{r}_2 \times (-\vec{R}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{R}$$
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$



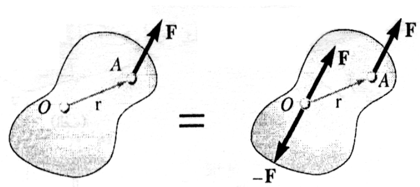
- کوپلی را بوسیله بردار نشان می دهند



(الف)　(ب)　(ج)　(د)

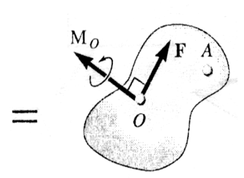
تجزیه یک نیرو به یک نیرو در یک تقطه و یک کوپل

نیروی F در نقطه A واقع شده و به دلیلی می خواهیم آن را به نقطه O منتقل کنیم .

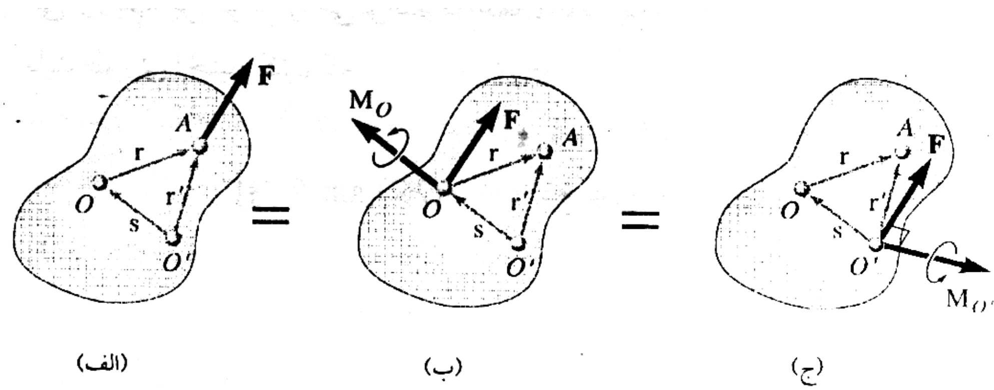


(الف)　(ب)

$$\overrightarrow{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$



(ج)



$$\vec{M}_{O'}=\vec{M}_O+\vec{S}\times\vec{F}$$

$$\vec{M}_{O'}=\vec{r'}\times\vec{F}$$

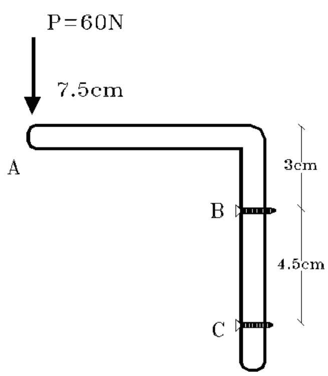
برعکس می توان یک سیستم نیرو – کوپل را به یک نیروی تنها تبدیل کرد . (البته نیرو و کوپل بصورت برداری بایستی بر هم عمود باشند).

مثال:

نیروی P در نقطه A داده شده است . این بخش توسط دو پیچ در نقاط B و C به دیوار نگهداشته شده است .

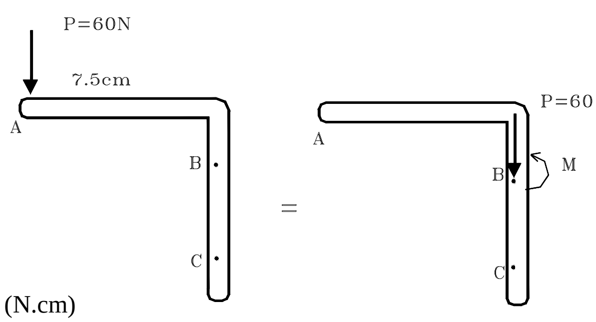
الف) نیروی فوق را با یک سیستم نیروی معادل در نقطه B جایگزین کنید .

ب) دو نیروی افقی در نقاط B و C بدست بیاورید که معادل کوپل بند الف باشد.



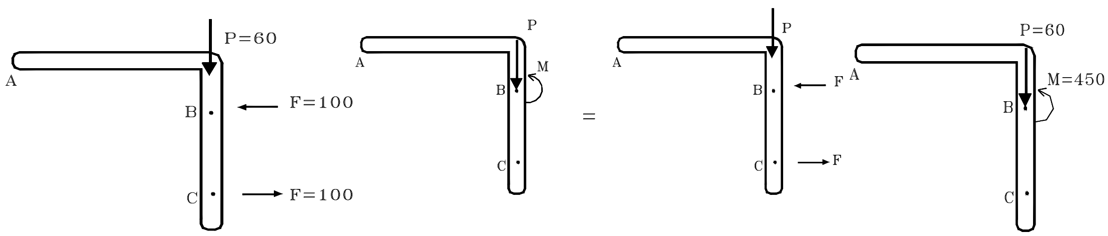
حل:

الف)



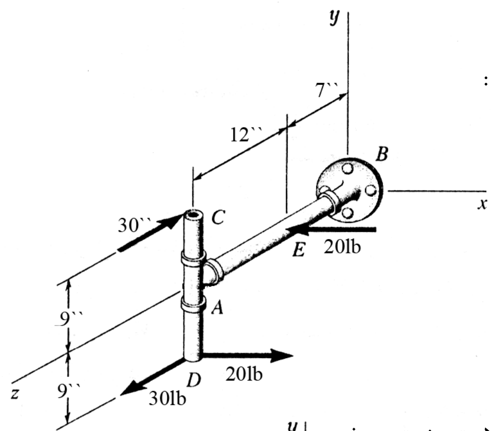
ب)

M=P(7.5)=60(7.5)=450 (N.cm)

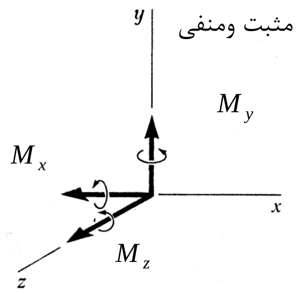


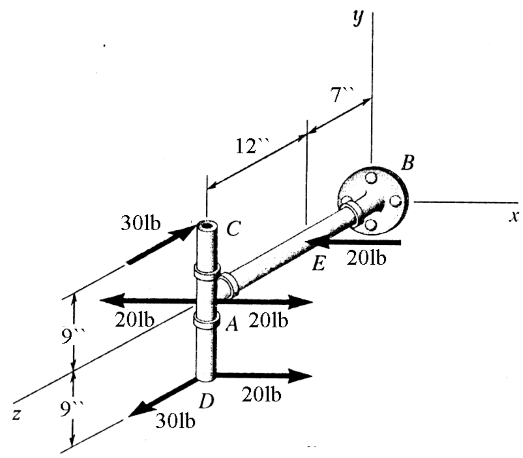
F(4.5)=M
F=450/4.5=100 (N)

مثال: بدست آورید مولفه های یک کوپل معادل دو کوپل در مسئله زیر را :



حل: در نقطه A دو نیرو را که مقدار آنها ۲۰پوند است ، قرار می دهیم باعلامت مثبت ومنفی



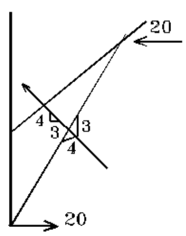


کوپل در صفحه yz $\Rightarrow M_x = -30(18) = -540$ (lb.in)

کوپل در صفحه xz $\Rightarrow M_y = 20(12) = 240$ (lb.in)

کوپل در صفحه xy $\Rightarrow M_z = 20(9) = 180$ (lb.in)

$$\vec{M} = -540\vec{i} + 240\vec{j} + 180\vec{k} \qquad (lb.in)$$



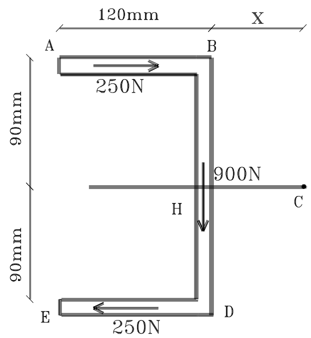
راه دوم : می توان ممان تمام نیروها را در یک نقطه دلخواه مثل نقطه D بدست آورد .

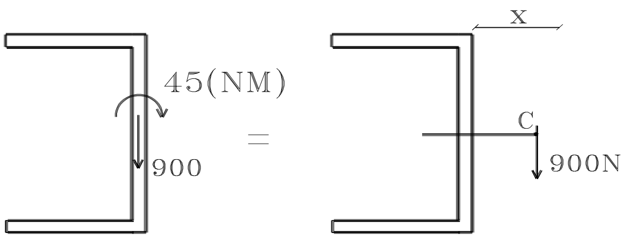
$$\vec{M} = \vec{M}_0 = (18\vec{j}) \times (-30\vec{k}) + (9\vec{j} - 12\vec{k}) \times (-20\vec{i})$$
$$\vec{M} = -540\vec{i} + 240\vec{j} + 180\vec{k} \qquad (lb.in)$$

مثال: نیروهای برشی وارد شده بر سطح این مقطع توسط سه نیرو در بالها و جان نشان داده شده اند .

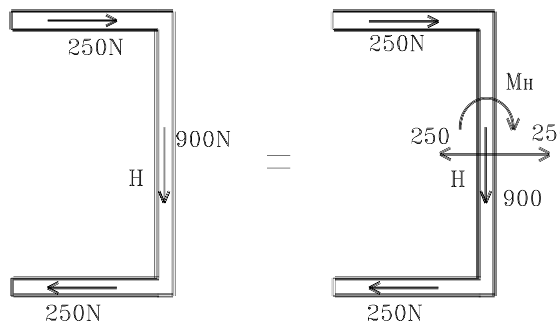
الف) این نیروها را با یک نیرو و کوپل در نقطه H جایگزین کنید .

ب) این نیروها و کوپل را با یک نیرو در نقطه C به فاصله X جایگزین کنید و X را بدست آورید .





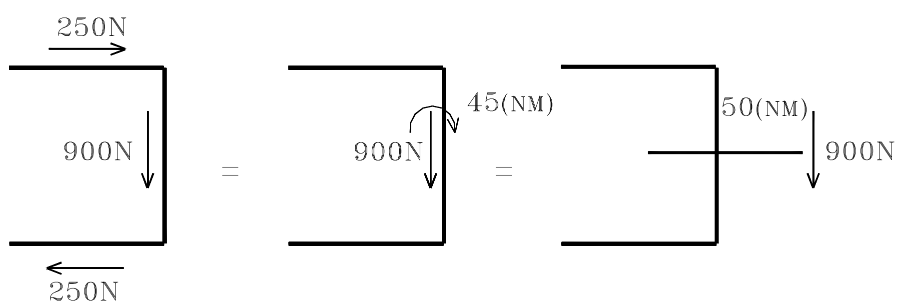
$M_H=250(0.18)=45$ (N.M)



$M_H=45=900(x)$

$x=\frac{45}{900} = 0.05$ m

$x=50$ mm



سیستم نیروهای معادل

دو سیستم موقعی معادل یکدیگرند که مجموع نیروها با هم برابر باشند و همینطور مجموع ممان های حاصل از نیروها در یک نقطه با هم برابر باشند .

سیستم F_1, F_2, F_3

سیستم F_1', F_2', F_3'

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}'$$

$$\sum \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O'$$

$$\sum F_X = \sum F_X' \quad , \quad \sum F_Y = \sum F_Y' \quad , \quad \sum F_Z = \sum F_Z'$$

$$\sum M_X = \sum M_X' \quad , \quad \sum M_Y = \sum M_Y' \quad , \quad \sum M_Z = \sum M_Z'$$

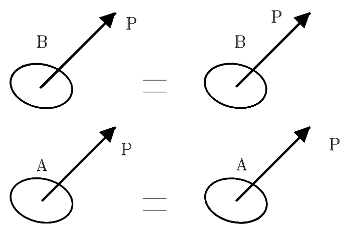
سیستم نیروهای هم ارز

اگر دو سیستم با نیروهای مختلف بر یک جسم سخت اثر کنند و مقدار برآیند آن ها و همینطور ممان های آنها حول یک نقطه برابر باشند با هم در آن سیستم هم ارز خواهند بود .

$$\sum \vec{R} = \sum \vec{R}'$$
$$\sum \vec{M}_o = \sum \vec{M}'_o$$

در حقیقت دو سیستم هم ارز بر روی یک جسم سخت حتماً معادل خواهند بود . ولی آن را نمی توان برای یک سری سیستم جرم ها یا ذرات بسط داد . یعنی اینکه اگر بجای یک جسم سخت یک سری از اجسام باشند و برآیند نیروهای اعمال شده روی آنها برابر باشد و همینطور ممانهای آنها حول یک نقطه ، آن دو سیستم نیرو را می توان هم ارز نامید ولی نمی توان معادل نامید .

سیستم ها هم ارز می باشند ولی معادل هم نمی باشند ، زیرا اثر نیروها بروی اجسام با هم متفاوت می باشد .



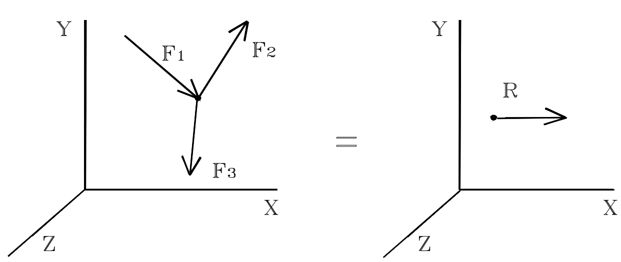
$$\sum \vec{R} \quad = \quad \sum \vec{R}'$$
$$\sum \vec{M}_o \quad = \quad \sum \vec{M}'_o$$

تبدیل یک سیستم نیرو به حداقل ممکنه

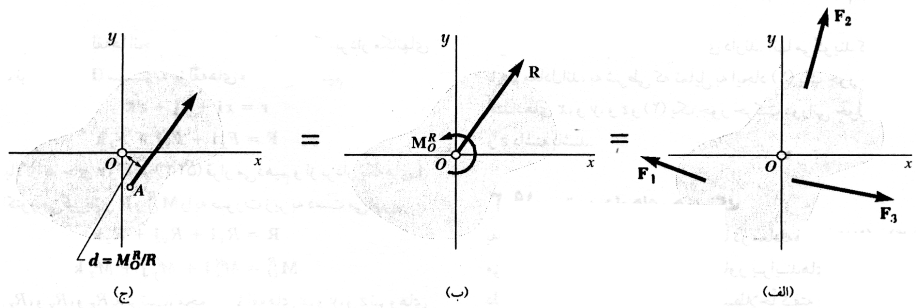
قبلاً نشان داده شد که یک سیستم نیرو را می توان به یک سیستم نیرو – کوپل تبدیل کرد .

حال نشان خواهیم داد که چگونه یک سیستم را می توان تنها به یک سیستم نیرو تبدیل کرد (اما فقط در حالات ذیل)

- **نیروها از یک نقطه عبور می کنند .**

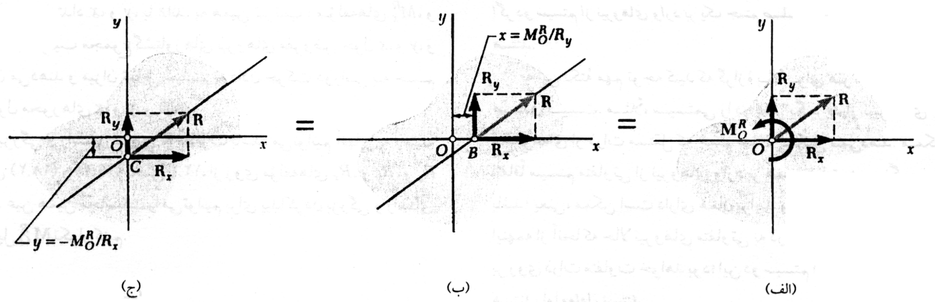


- **نیروها در یک صفحه قرار دارند .**



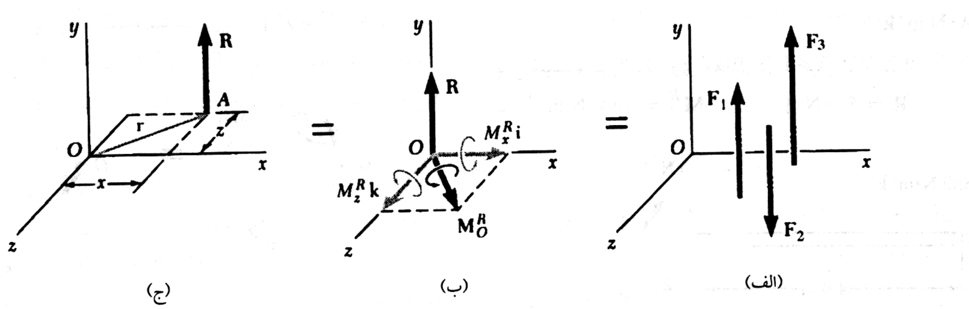
$$d = \frac{M_o}{R} \qquad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_o = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$



$$x R_y - y R_x = M_o$$
$$R_x = \sum F_x$$
$$R_y = \sum F_y$$
$$M_o = \sum M_o$$

- **نیروها موازی اند**



$$R = R_y = \sum F_y \qquad \bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_o^R$$

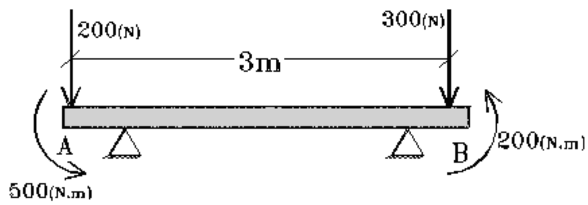
$$M_x^R = \sum M_x \qquad (x\,\bar{i} + z\,\bar{k}) \times R_y\,\bar{j} = M_x^R\,\bar{i} + M_z^R\,\bar{k}$$

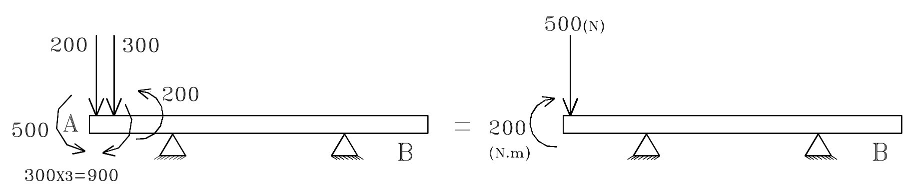
$$M_z^R = \sum M_z \qquad \begin{cases} -z R_y = M_x^R \\ x R_y = M_z^R \end{cases}$$

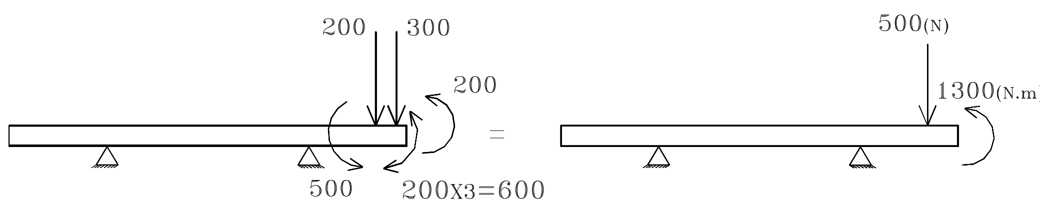
در حالت کلی در فضای سه بعدی , سیستم نیروها را می توان با یک سیستم نیرو ممان جایگزین کرد اما نمی توان آن را به حداقل رساند و به یک سیستم نیروها تبدیل کرد .

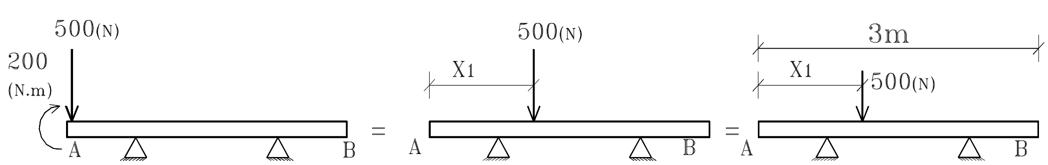
مثال: در تیر مقابل بدست آورید

الف) سیستم معادل نیروهای مقابل در نقطه A بصورت نیرو – کوپل
ب) سیستم معادل نیروهای مقابل در نقطهB بصورت نیرو – کوپل
ج) سیستم معادل بصورت یک نیرو آنها

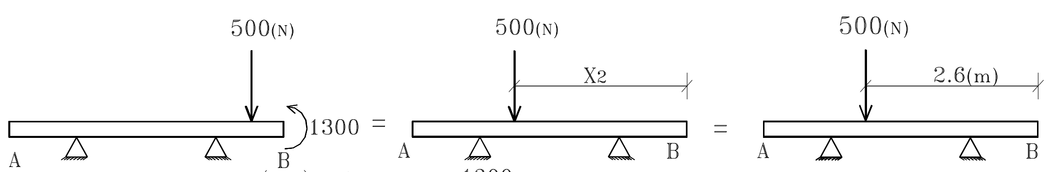






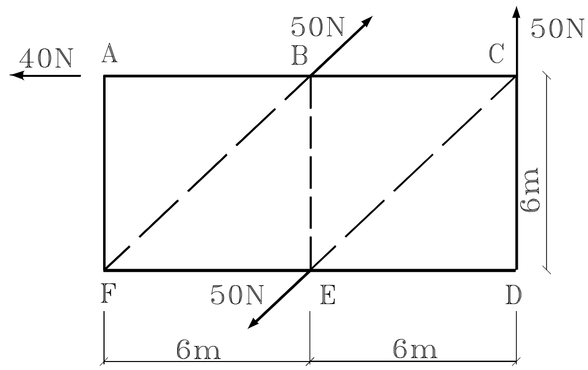


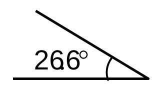
$200=500(X_1) \rightarrow X_1=\frac{200}{500}=0.4(m)$



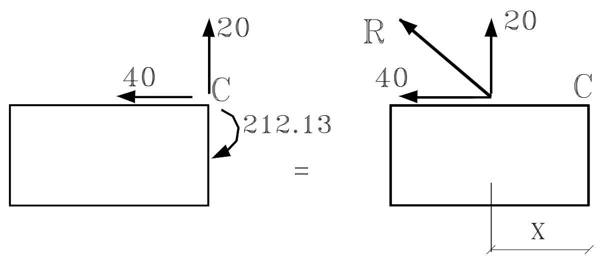
$1300=500(X_2) \rightarrow X_2=\frac{1300}{500}=2.6(m)$

مثال: در صفحه $6m \times 12m$ مقابل که تحت اثر چهار نیرو قرار گرفته است مطلوبست برآیند تمام چهار نیرو و محل اثر آن .



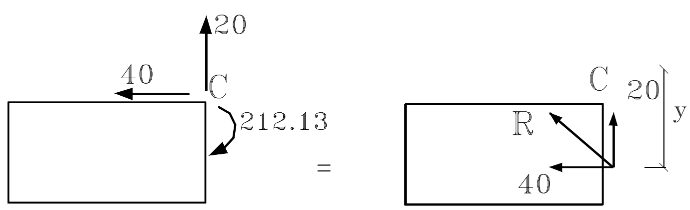


$$\vec{R} = -40\,\vec{i} + 20\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad R = 44.7\ (N)$$
$$\vec{M}_C = \vec{r}_{B/C} \times \vec{F} + 0 = -6\vec{i} \times 50\,(Cos\,45°\,\vec{i} + Sin\,45°\,\vec{j})$$
$$\vec{M}_C = -212.13\,\vec{k} \quad (N.m)$$



تقاطع با خط AC

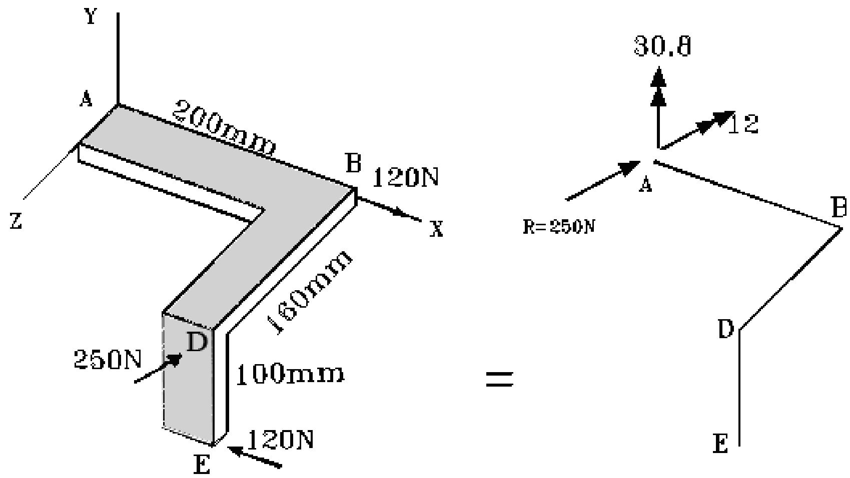
$$\vec{M}_C = -x\,\vec{i} \times 20\,\vec{j}$$
$$-212.13\,\vec{k} = -20x\,\vec{k}$$
$$x = 10.61 \quad m$$



تقاطع با خط CD

$$\vec{M}_C = -y\,\vec{i} \times -40\vec{i}$$
$$-212.13\vec{k} = -40y\,\vec{k}$$
$$y = 5.30 \quad m$$

مثال: مطلوبست سیستم معادل نیرو در نقطه A .

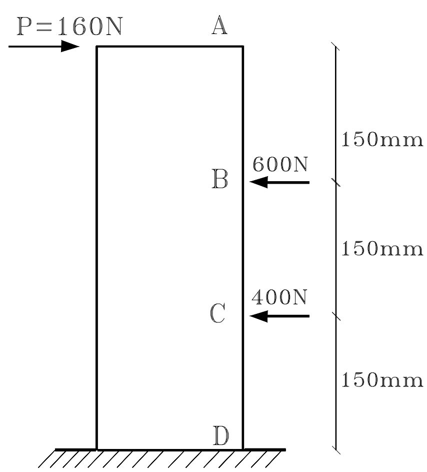


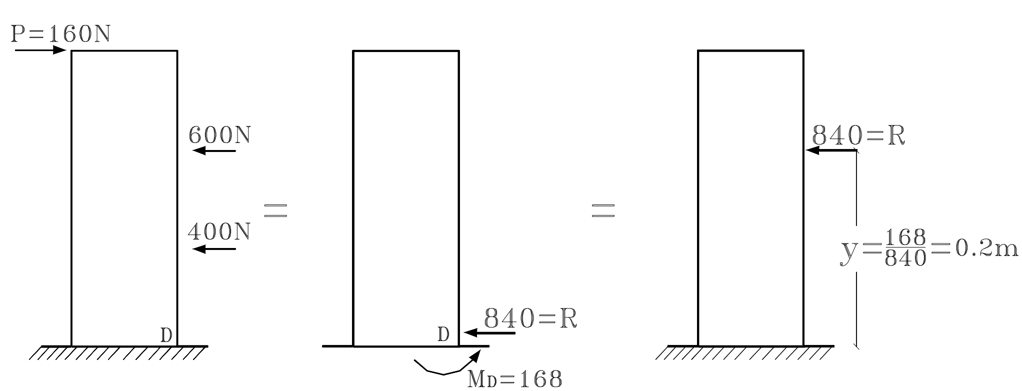
$$\vec{R} = 120\ \vec{i} - 120\ \vec{i} - 250\ \vec{k} = -250\ \vec{k}$$

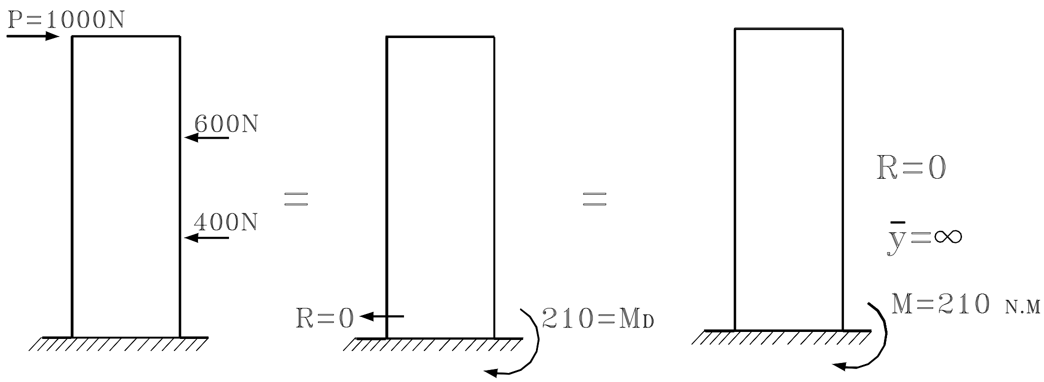
$$\vec{M}_A^R = -0.2\,\vec{i} \times (-250\ \vec{k}) + \left[-0.1\ \vec{j} + 0.16\ \vec{k}\right] \times (-120\ \vec{i}) = 50\ \vec{j} - 12\ \vec{k} - 19.2\ \vec{j}$$

$$\vec{M}_A^R = 30.8\ \vec{j} - 12\ \vec{k}$$

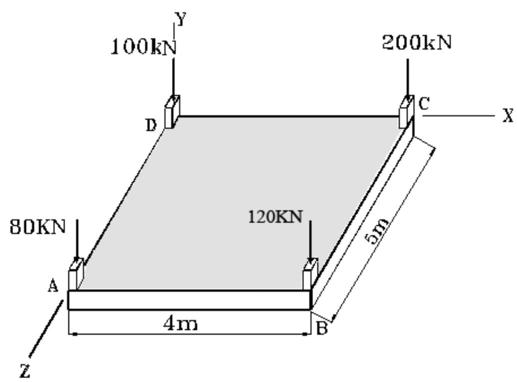
مثال: مطلوبست برآیند نیروهای مقابل و سیستم معادل بصورت واحد و محل اثر آن .







مثال: مطلوبست نیروی معادل چهار نیروی وارده بر فونداسیون گسترده (MAT) به صورت نیروی واحد و مطلوبست محل اثر آن .



سیستم نیروی معادل در نقطه D

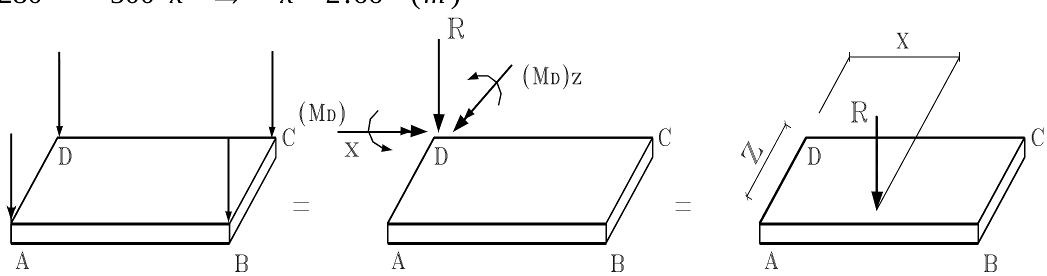
$$\vec{R} = -80\ \vec{j} - 120\ \vec{j} - 200\ \vec{j} - 100\ \vec{j} = -500\ \vec{j} \quad (kN)$$

$$\vec{M}_D^R = 5\vec{k} \times (-80\ \vec{j}) + \left[4\vec{i} + 5\vec{k}\right] \times (-120\ \vec{j}) + 4\vec{i} \times (-200\ \hat{j})$$

$$\vec{M}_D^R = 1000\ \vec{i} - 1280\ \vec{k} = -500\ x\vec{k} + 500\ z\vec{i}$$

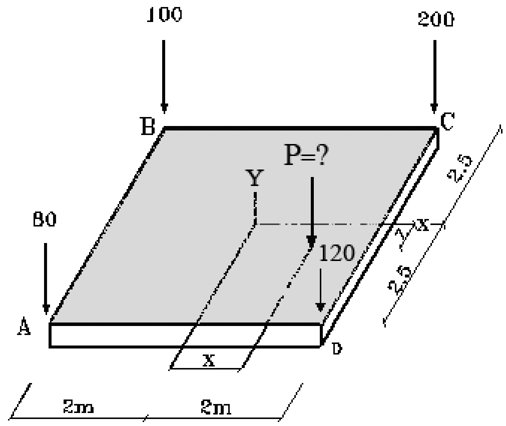
$$1000 = 500\ z \quad \Rightarrow \quad z = 2\ \ (m)$$

$$1280 = -500\ x \quad \Rightarrow \quad x = 2.66\ \ (m)$$



مثال: در مثال قبلی مطلوبست کمترین نیرویی که به عنوان نیروی اضافه می تواند بر سیستم گسترده وارد گردد که برآیند چند نیرو از برآیند پنج نیرو از مرکز آن زاویه بگذرد ، همچنین مطلوبست محل اثر آن نیرو .

P=? (x =? , z = ?)



اگر P نیروی اضافه باشد برای آنکه محل برآیند پنج نیرو در مرکز زاویه باشد ، خواهیم داشت $\vec{M}_O^R=0$

$$\sum \vec{M}_O^R = \sum \vec{r}\times\vec{F} = (-2\,\vec{i} + 2.5\,\vec{k})\times(-80\,\vec{j}) + (2\,\vec{i} + 2.5\,\vec{k})\times(-120\,\vec{j})$$
$$+ (2\,\vec{i} - 2.5\,\vec{k})\times(-200\,\vec{j}) + (-2\,\vec{i} - 2.5\,\vec{k})\times(-100\,\vec{j}) +$$
$$(x\,\vec{i} + z\,\vec{k})\times(-P\,\vec{j}) = 0$$

$$(200 + 300 - 500 - 250 + P\,z)\,\vec{i} + (160 - 240 - 400 + 200 - P\,x)\,\vec{k} = 0$$

$$P\,z = 250 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{250}{z}$$

$$P\,x = -\,280 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{-\,280}{x}$$

$$|x| \le 2\ (m) \quad \Rightarrow \quad P \ge \frac{280}{2} = 140 \quad (kN)$$

$$|z| \le 2.5\ (m) \quad \Rightarrow \quad P \ge \frac{250}{2.5} = 100 \quad (kN)$$

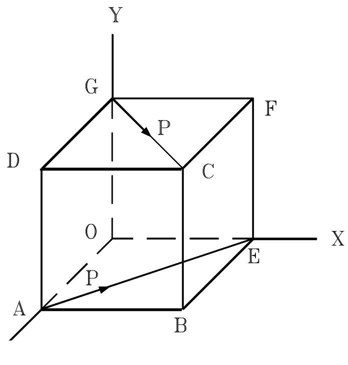
بنابراین حداقل نیروی وارده می باید $\Leftarrow$ P = 140 kN

P = 140 kN قابل قبول است $\begin{cases} 140\,z = 250 & \Rightarrow \quad z = 1.786\ (m) \\ 140\,x = -\,280 & \Rightarrow \quad x = -\,2\ (m) \end{cases}$

روی لبه AD و 0.714 m از نقطه A .

قابل قبول نیست $\begin{cases} 100z = 250 & \Rightarrow \quad z = 2.5\ (m) \\ 100x = -280 & \Rightarrow \quad x - 2.8\ (m) \end{cases}$

مثال: در سیستم نیروهای زیر ابتدا سیستم معادل آنها را در نقطه O بدست بیاورید و سپس سیستم معادل را بصورت آچار یا wrench بدست بیاورید .



$$\vec{R}=\frac{P}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{P}{\sqrt{2}}\vec{j}+\frac{P}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{P}{\sqrt{2}}\vec{k}=\sqrt{2}P\vec{i}$$

$$\vec{M}_O^R=a\,\vec{j}\times\left(\frac{P}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{P}{\sqrt{2}}\vec{k}\right)+a\,\vec{k}\times\left(\frac{P}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{P}{\sqrt{2}}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{Pa}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$$

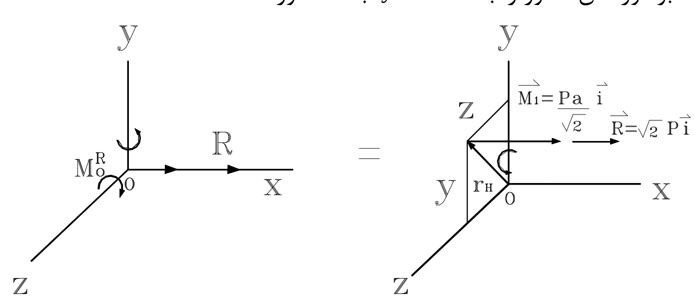
سیستم کوپل و نیرو در O

$$M_1=\frac{\vec{R}.\vec{M}_O^R}{R}=\frac{\sqrt{2}P\vec{i}-\frac{Pa}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})}{\sqrt{2}p}=\frac{Pa}{\sqrt{2}}$$

$$p=\frac{M_1}{R}=\frac{\frac{Pa}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}P}=\frac{a}{2}$$

محور آن آچار موازی محور x می باشد .

حال می بایستی که نقطه برخورد آن محور را با صفحه yz بدست آورد :



$$\vec{M}_O^R=\vec{M}_1+\vec{r}_H\times\vec{R}$$

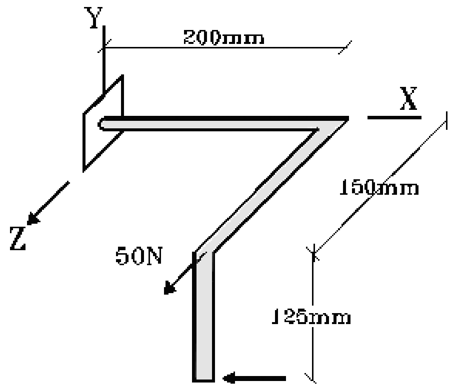
$$\frac{Pa}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=\frac{Pa}{\sqrt{2}}\vec{i}+(y\,\vec{j}+z\,\vec{k})\times\sqrt{2}P\vec{i}$$

$$=\frac{Pa}{\sqrt{2}}\vec{i}-\sqrt{2}P\,y\,\vec{k}+\sqrt{2}P\,z\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{lll}-\frac{Pa}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}P\,y & \Rightarrow & y=\frac{a}{2}\\ \frac{Pa}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}P\,z & \Rightarrow & z=\frac{a}{2}\end{array}\right\}\rightarrow$$

پس محور آچار (wrench) بایستی در نقطه y = z = a/2 با صفحه yz تقاطع پیدا کند .

مثال:



مطلوبست : الف) سیستم نیروی معادل در نقطه O

ب) سیستم نیروی آچاری (wrench)

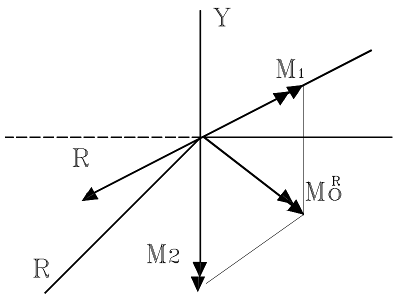
$\vec{R} = -100\ \vec{i} + 50\ \vec{k} \quad (N)$

الف) $\vec{M}_O^R = (-0.125\ \vec{j} + 0.15\ \vec{k}) \times (-100\ \vec{i}) + (0.2\ \vec{i}) \times (50\ \vec{k})$

$= -12.5\ \vec{k} - 15\ \vec{j} - 10\ \vec{j}$

$\vec{R} = -100\ \vec{i} + 50\ \vec{k} \quad (N)$

$\vec{M}_O^R = -25\ \vec{j} - 12.5\ \vec{k} \quad (N.m)$



$R = \sqrt{100^2 + 50^2} = 111.8 \quad (N)$

$Cos\ \theta_x = -\dfrac{100}{111.8} \quad \Rightarrow \quad \theta_x = 153.4°$

$Cos\ \theta_z = -\dfrac{50}{111.8} \quad \Rightarrow \quad \theta_z = 63.4°$

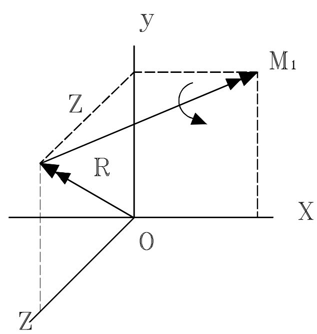
$Cos\ \theta_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_y = 90°$

ب)

$M_1 = \dfrac{\vec{R}.\vec{M}_O^R}{R} = \dfrac{(-100\ \vec{i} + 50\ \vec{k}).(-25\ j - 12.6\ k)}{111.8} = \dfrac{50\ (-12.5)}{111.8}$

$M = -5.59 \quad (N.m)$

$pitch = p = \dfrac{M_1}{R} = \dfrac{-5.59}{111.8} = -0.05 \quad (m)$



$\vec{R} = -100\ \vec{i} + 50\ \vec{k}$

$\vec{M}_1 = \dfrac{M_1}{R}\vec{R} = -0.05\ \vec{R} = 5\ \vec{i} - 2.6\ \vec{k}$

محور آچار موازی با صفحه xz می باشد . می بایستی تقاطع آن با صفحه yz مشخص شود .

$\vec{M}_O^R = \vec{r} \times \vec{R} + \vec{M}_1 \qquad , \qquad \vec{r}_D = y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$

$-25\ \vec{j} - 12.5\ \vec{k} = (y\vec{j} + z\vec{k}) \times (-100\ \vec{i} + 50\ \vec{k}) + 5\ \vec{i} - 2.5\ \vec{k}$

$-25\ \vec{j} - 12.5\ \vec{k} = 100\ y\ \vec{k} + 50\ y\ \vec{i} - 100\ z\ \vec{j} + 5\ \vec{i} - 2.5\ \vec{k}$

$0 = 50\ y + 5 \quad \Rightarrow \quad y = -0.1 \quad (m)$

$-25 = -100\ z \quad \Rightarrow \quad z = 0.25 \quad (m)$

فصل چهارم

تعادل اجسام صلب

تعادل جسم در صفحه دو بعدی:

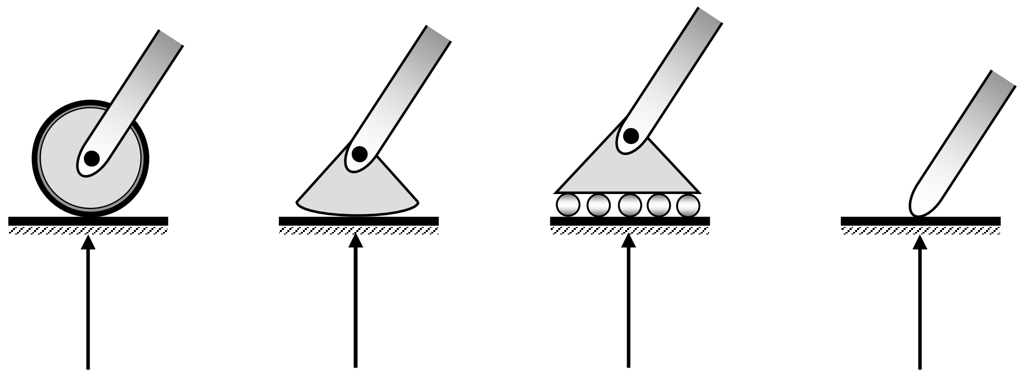
$\sum \vec{F}=0 \Rightarrow \sum F_x=0\,,\ \sum F_y=0$ جلوگیری از حرکت انتقالی

$\sum M_x=0, \sum M_y=0 \quad , \quad \sum M_z=0$ جلوگیری از حرکت دورانی

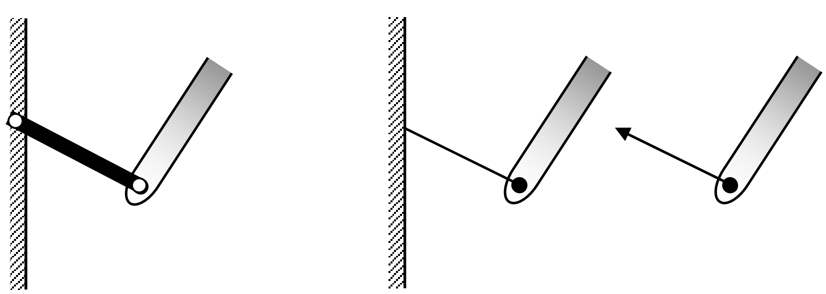
شرایط تکیه گاه های دو بعدی:

۱) تکیه گاههایی که دارای یک عکس العمل در جهت مشخص هستند.

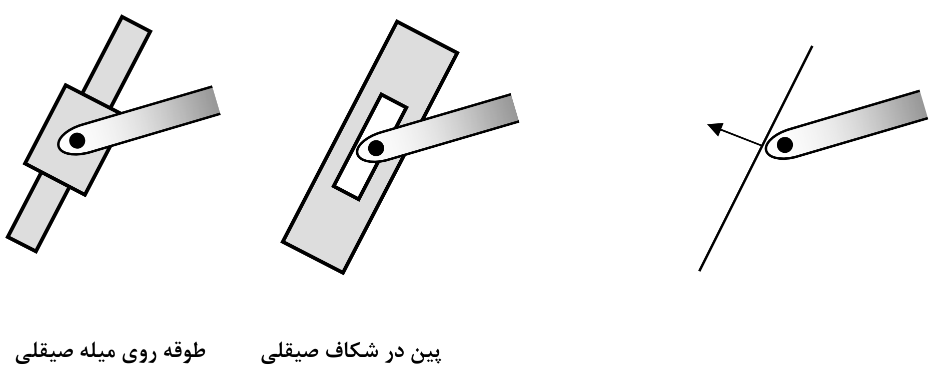
کابل تنها نیروی کششی را تحمل می کند.



میله روی سطح بدون اصطکاک **غلطان(Rocker)** **مقاطع مخروطی (Rocker)** **کره غلطان**

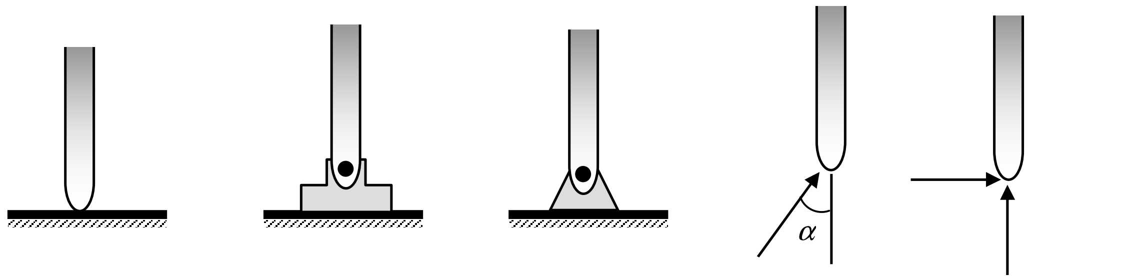


کابل کوتاه(short cable) **بست کوتاه (short link)**



پین در شکاف صیقلی **طوقه روی میله صیقلی**

۲) تکیه گاههایی که دارای دو عکس العمل در جهت مشخص باشند (یا دارای یک عکس العمل و جهت نامشخص باشند.)



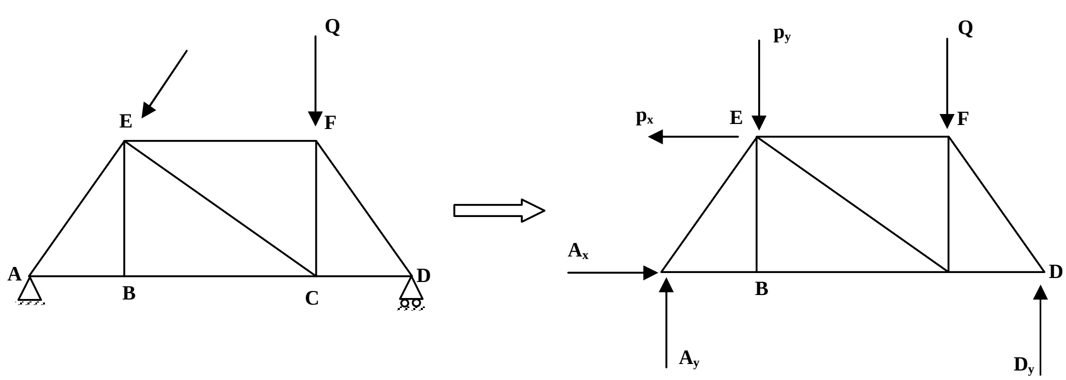
سطح با اصطکاک　　　پین یا مفصل یا تکیه‌گاه ساده　　　دارای دو مجهول اند

۳) تکیه گاههایی که دارای سه عکس العمل می باشند.

تکیه‌گاه ثابت　　　ازایجاددوران جلوگیری میکنند

تعادل یک جسم صلب دو بعدی:

مثال: تعادل جسم زیر را بررسی می کنیم



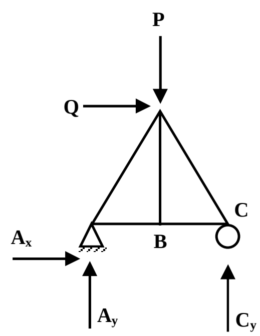
دیاگرام آزاد جسم

$$\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0 , \sum M_A = 0$$

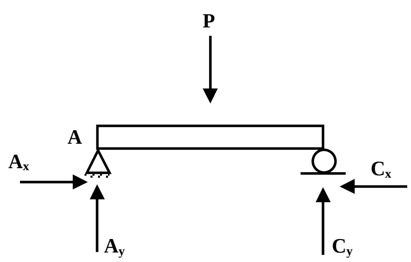
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S - Ax = 0$$
$$A_x = S$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -P = A_y - Q + B_y = 0$$
$$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -P(a) - Q(a+b) - S(d) + B_y(a+b+c) = 0$$

می توانستیم به جای استفاده از رابطه $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$ از مجموعه روابط $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_B = 0$ یا از $\sum F_x = 0, \sum M_B = 0, \sum M_A = 0$ استفاده کنیم.

عکس العمل های نامعین:

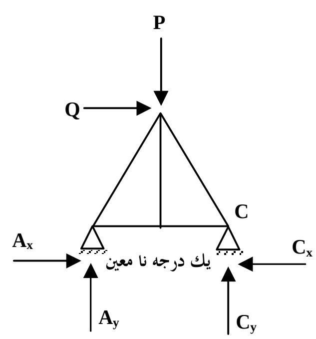


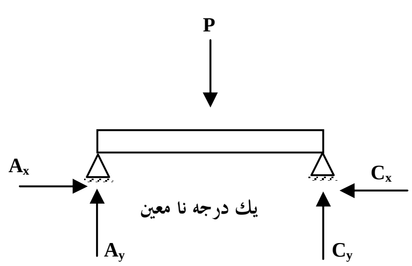
۱)



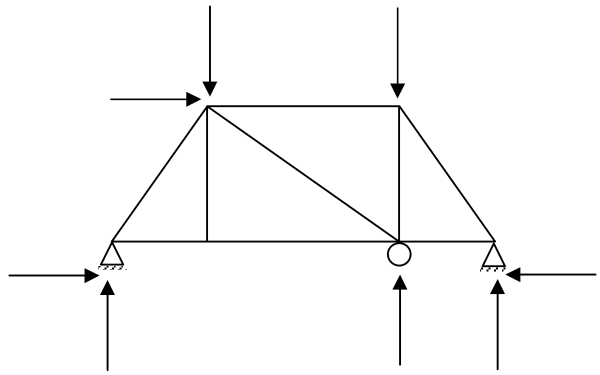
۲)

۱) سازه پایدار معین (سه معادل و سه مجهول)
۲) سازه پایدار نامعین (یک درجه) (سه معادل و چهار مجهول)





سازه پایدار نامعین (یک درجه) (سه معادل و چهار مجهول)

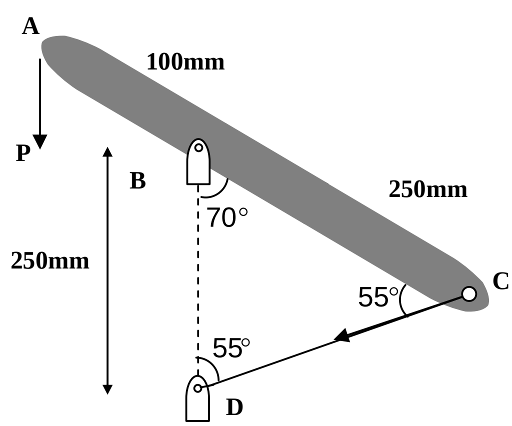


سازه پایدار نامعین (دو درجه) (سه معادل و پنج مجهول)

سازه ناپایدار:

اغلب به سازه هایی گفته می شود که نمی توانند از حرکت انتقالی یا دورانی جسم در یک یا چند جهت (بدلیل نحوه قرارگرفتن تکیه گاه درآنها) جلوگیری کنند. در اغلب این سازه ها هنگام محاسبه ی گشتاور نیروها،خط اثر نیروها از یک نقطه عبور کرده و در نتیجه لنگر صفر نمی شود.

مثال: مطلوب است عکس العمل در تکیه گاه B و نیروی کششی در کابل CD.

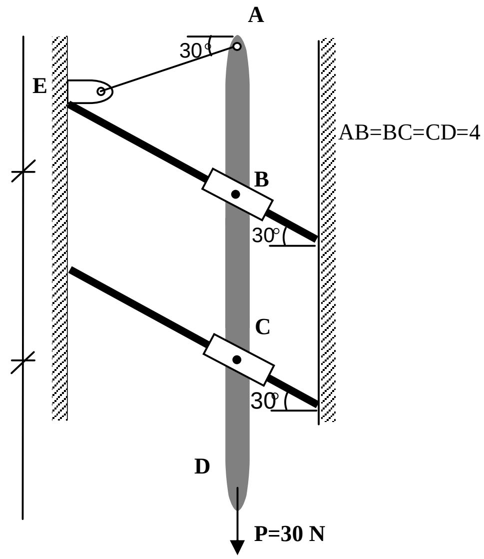


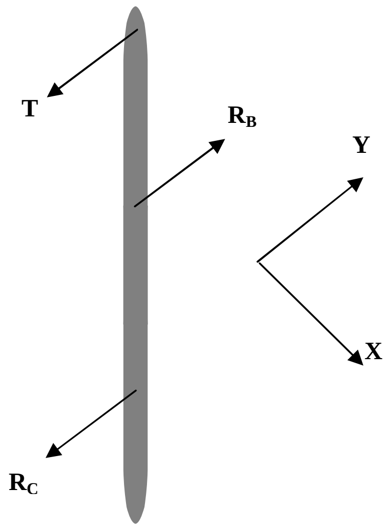
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 0.1Cos(P) - 0.25Cos\,35T = 0$$
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -B_X(0.25) + P(0.1Cos\ 20) = 0$$
$$B_X = 150.3(N) \rightarrow$$

می توان با لنگر گرفتن نسبت به نقطه E ، B_y را بدست آورد.یا راه آسانتر:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -p + B_y - T\sin 35 = 0$$
$$B_Y = 505(N)\uparrow$$

مثال: مطلوب است عکس العمل C,B و کشش کابل در AE.





دیاگرام آزاد شکل

$$+\searrow \quad \sum F_X = 0 \Rightarrow$$

$$BCos\ 60 - TCos\ 60 = 0 \Rightarrow \qquad T = 30\,(N)$$

$$+\circlearrowright \quad \sum M_B = 0$$

$$TCos30(4) + R_C Sin30(4) = 0$$

$$R_C = -52(KN)$$

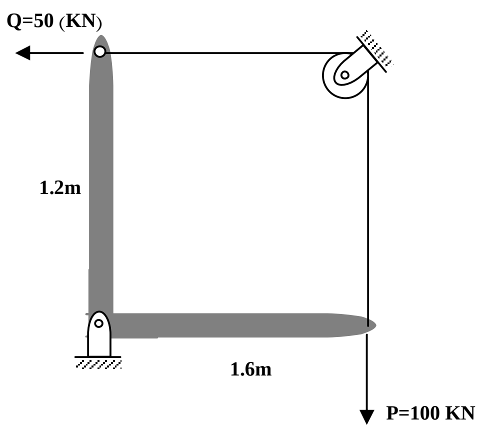
$$+\circlearrowright \quad \sum M_C = 0 \Rightarrow$$

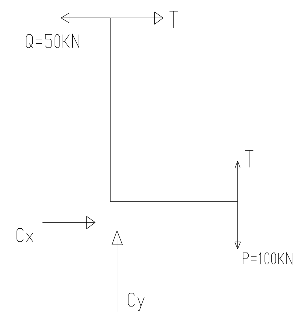
$$T.COS30(8) - R_B \sin 30(4) = 0$$

$$R_B = 103.7(KN)$$

مثال: مطلوب است کشش در دو کابل

کشش در دو طرف کابل یک اندازه است. زیرا در قرقره داریم:





$$\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$-D_X + T\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$D_X = 90$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-4(2\circ) - T\left(4/5\right) + D_Y = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_E = 0 \Rightarrow T = T'$$

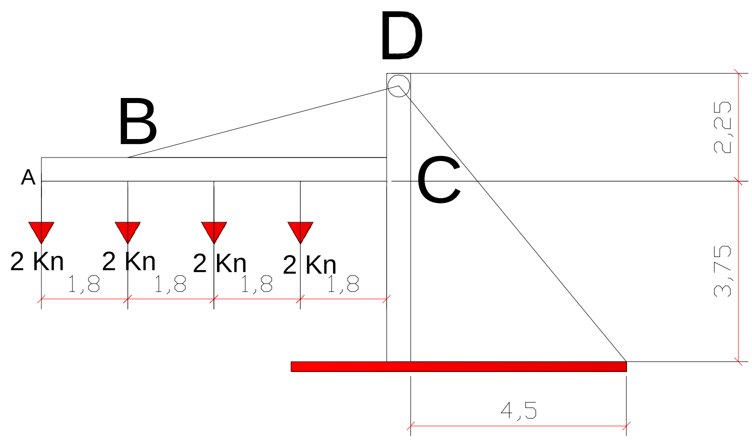
$$\Rightarrow D_y = 200(KN)\uparrow$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$

$$-M_D + 20(1.8)(1+2+3+4) - T\left(4/5\right)$$

$$\Rightarrow M_D = -180(KN.m)$$

مثال: اگر نیروی کشش در کابل 150kNباشد مطلوب است عکس العمل ها در تکیه گاه D.



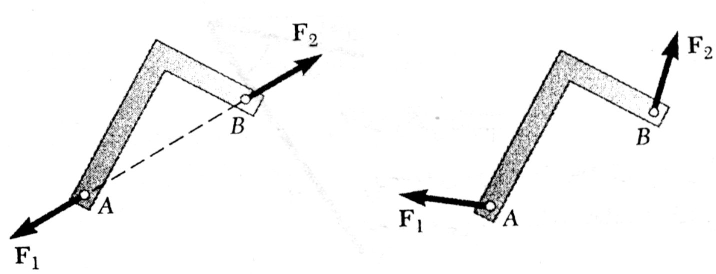
$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0$$
$$-D_X + T\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$D_X = 90$$
$$\uparrow \sum F_y = 0$$
$$-4(2\circ) - T\left(\frac{4}{5}\right) + D_Y = 0$$
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow T = T'$$
$$\Rightarrow D_y = 200KN \uparrow$$
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$
$$-M_D + 20(1.8)(1+2+3+4) - T\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$\Rightarrow M_D = -180(KN.m)$$

تعادل جسم تحت اثر دو نیرو

بعضی از اوقات یک جسم امکان دارد تحت اثر فقط دو نیرو قرار گیرد، درا ین حالت به آن جسم دو نیرویی می‌گویند. در این حالت دو نیرو می‌بایستی در یک راستا و مخالف جهت یکدیگر باشند.

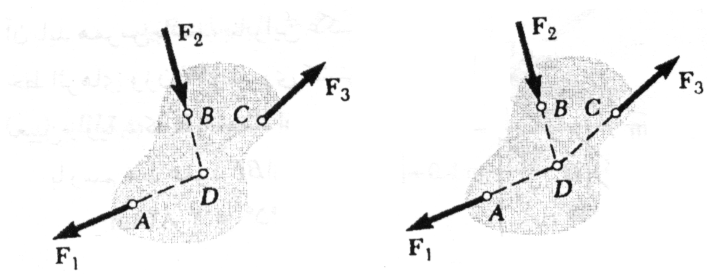


بنابراین دو نیرو باید در یک راستا و با هم برابر باشند.

$$\sum \overleftarrow{F} = \circ, \sum \overrightarrow{M} = \circ$$

تعادل جسم تحت اثر سه نیرو

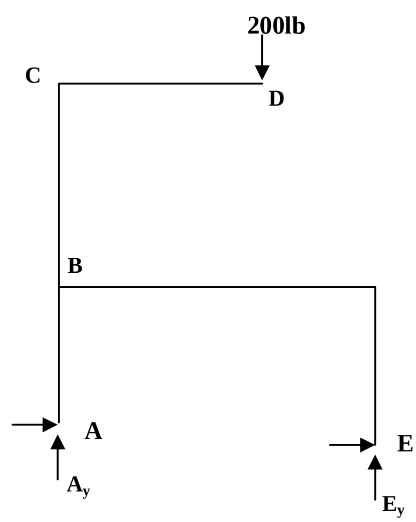
در بعضی از مواقع یک جسم امکان دارد تحت اثر سه نیرو قرار گیرد در این حالت به آن جسم سه نیرویی می‌گویند در این حالت سه نیرو می‌بایستی از یک نقطه عبور کنند و یا با هم موازی باشند.

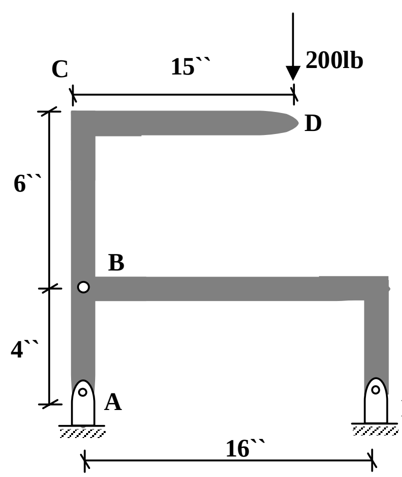


$$\sum \overleftarrow{F} = 0, \sum \overrightarrow{M} = 0$$

اگر نیروها با هم موازی نباشند باید سه نیرو همرس باشند تا جسم در تعادل باشد. با استفاده از قانون سینوس ها می توان مقادیر محصول را بدست آورد.

مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاه در A و E





با گشتاور گرفتن نسبت به G به آسانی داریم:

$$A_y = E_y = 100(N)$$

برایند سه نیروی P،A،E برابر صفر و این سه نیرو در H همرسند.

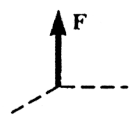
داریم: $\dfrac{E_X}{E_Y}=\dfrac{GE}{GT}$

تعادل سه بعدی:

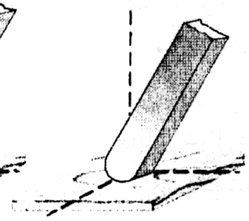
$$\sum\vec{F}=\circ\Rightarrow\sum F_X=\circ,\sum F_y=\circ,\sum F_Z=\circ$$
$$\sum\vec{M}=\circ\Rightarrow\sum M_X=\circ,\sum M_y=\circ,\sum M_Z=\circ$$

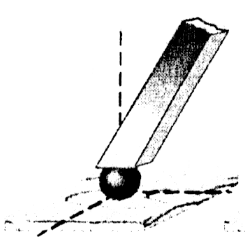
تکیه گاههای سه بعدی

۱) تکیه گاههایی با یک عکس العمل:

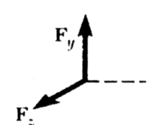


نیرو با خط اثر معلوم
(یک مجهولی)

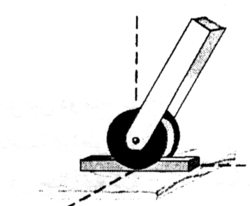

سطح بدون اصطکاک

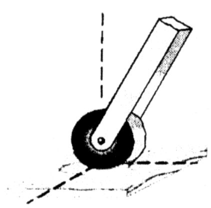

کره

۲) تکیه گهای با دو عکس العمل

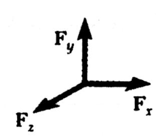


دو مؤلفه نیرو

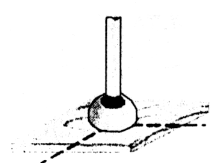

چرخ بر روی ریل

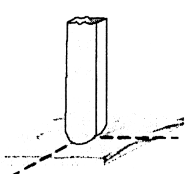

غلتک بر روی سطح صاف

۳) تکیه گاههای با سه عکس العمل

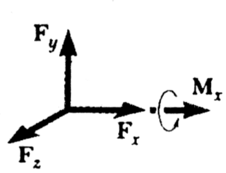


سه مؤلفه نیرو

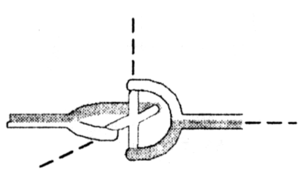

کاسه و ساچمه


سطح ناصاف

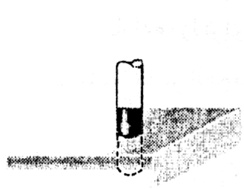
۴) تکیه گاههای دارای چهار عکس العمل

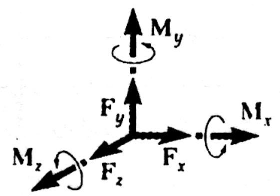


سه مؤلفه نیرو و یک کوپل


اتصال گردان

۵) تکیه گاههای با شش عکس العمل

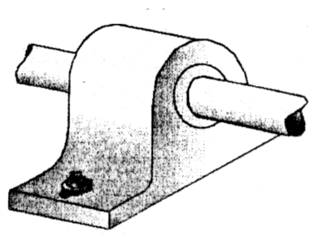


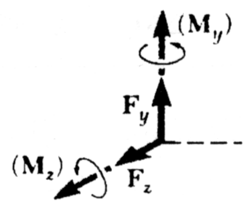


تکیه‌گاه ثابت

سه مؤلفه نیرو و سه کوپل

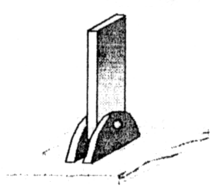
۶) تیکه گاه یاتاقان

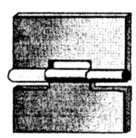


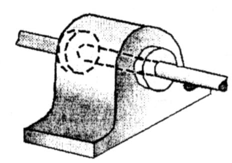


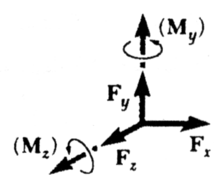
لولا و یاتاقان برای نگهداری بار شعاعی

مؤلفه‌های دو نیرو (ودو کوپل)







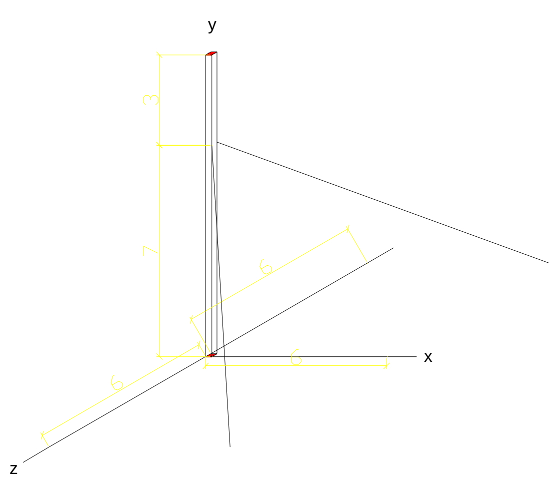


پین و دیوارکوب

لولا و یاتاقان برای نگهداری
فشارمحوری و بارشعاعی

سه مؤلفه نیرو
(ودو کوپل)

مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاه A و نیروهای کشش در کابل های BD و BC



معادلات

$$\sum F_X = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_Z = 0$$
$$\sum M_X = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_Z = 0$$

تقارن نسبت به صفحه xy:

$$A_X = 0$$

$$T_{BD} = T_{BE}$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD}\overrightarrow{\lambda_{BD}} = T_{BD}\left(\frac{6\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}}{h}\right)$$

و داریم:

$$\overrightarrow{T_{BE}} = T_{BE}\overrightarrow{\lambda_{BE}} = T_{BE}\left(\frac{6\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k}}{h}\right)$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -8.4 + A_X + \frac{T_{BE}}{h}(6) + \frac{T_{BD}}{h}(6) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{T_{BD}}{h}(7) - \frac{T_{BE}}{h}(7) = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \sum \vec{r_i} \times \vec{F_i} = 0$$

$$(10\vec{j}) \times (-8.4\vec{i}) + (7\vec{j})\overrightarrow{T_{BD}} + 7\vec{J} \times (\vec{T}_{BE}) = 0$$

و داریم:

$$\sum M_Z = 0$$

$$10 \times (8.4) - \frac{4}{11}T_{AD}(7) - \frac{4}{11}T_{AE}(7) = 0$$

$$T_{AD} = T_{AE} = 11(KN)$$

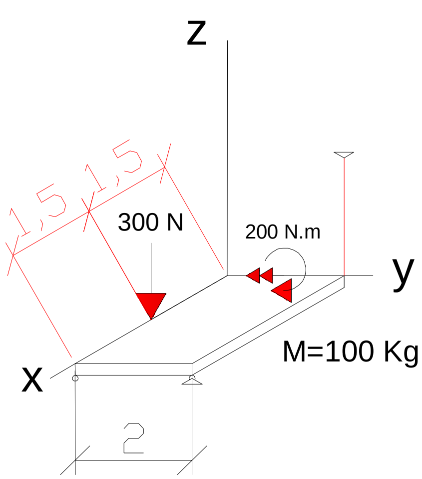
$$A_X = -3.6(KN) \leftarrow$$

$$A_y = 14(kN) \uparrow$$

مثال: جرم 100kg مطلوب است تعیین عکس العمل ها.

تعداد معادلات مجهول ۶

تعداد مجهولات ۵



$$\sum F_X = 0 \rightarrow B_X = 0$$

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow B_Y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_Z + B_Z - 300 - 981 + T_{CD} = 0$$

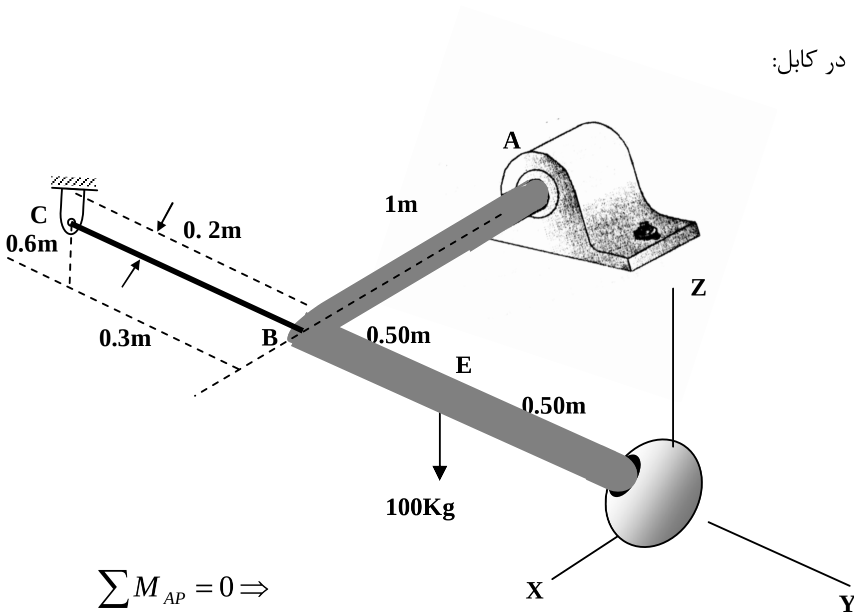
$$\sum M_{ox}=0 \Rightarrow T_{CD}(2)+B_z(2)-981(1)=0$$
$$\sum M_{oy}=0$$
$$\Rightarrow -200+300(1.5)+981(1.5)-A_z(3)-B_z(3)=0$$

$$A_z=790\ \ N\uparrow$$
$$B_z=-219N\downarrow$$
$$T_{CD}=707N$$

از آنجایی که نیرویی وجود ندارد که حول محور Z ایجاد لنگر کند داریم :

$$\sum M_{OZ}=0$$

مثال: مطلوب است نیروی کششی در کابل:



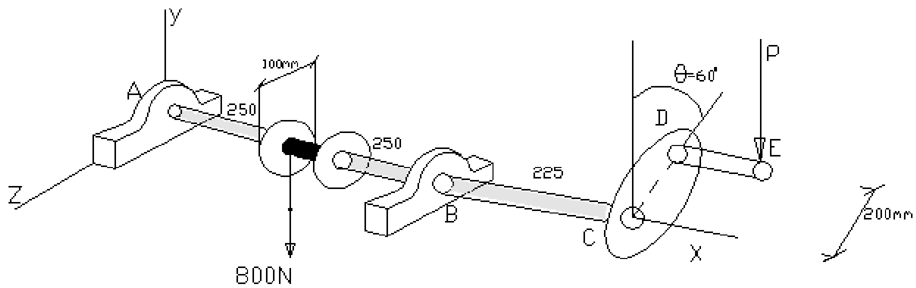
$$\sum M_{AP}=0\Rightarrow$$

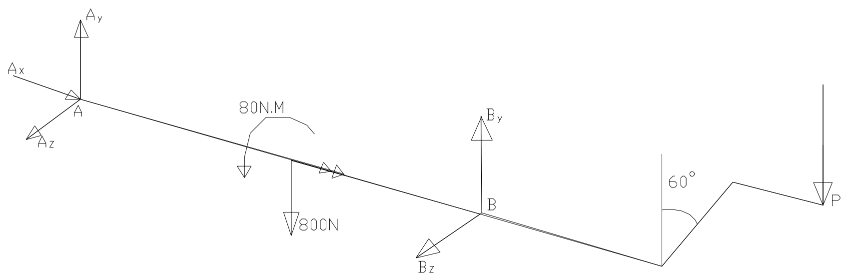
$$\lambda_{AD}.\left(\sum r_i\times F_i\right)=0$$
$$\lambda_{ad}.\left(\overrightarrow{r_{BD}}\times\overrightarrow{T_{BD}}+\overrightarrow{r_{EO}}\times\left(-981\vec{k}\right)\right)$$

$$r_{AD}=\overrightarrow{r_B}=-j$$
$$\overrightarrow{r_{BD}}=\overrightarrow{r_C}=-0.5j$$
$$\overrightarrow{T}=T_{BC}\overrightarrow{\lambda_{AC}}=T_{AC}\left(\frac{0.2\vec{i}-0.3\vec{j}+0.6\vec{k}}{0.7}\right)$$

$$\overrightarrow{\lambda_{PA}}=\frac{\overrightarrow{PA}}{|PA|}=\frac{-i-j}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow\ \ T_{BC}\ =\ 572\ (N\ )$$
$$\Rightarrow\ T_{BD}\ =\ 572\left(\frac{0.2\vec{i}-0.3\vec{j}+0.6\vec{k}}{0.7}\right)$$

مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاهها و نیروی P جهت ایجاد تعادل





$$\sum F = 0 \Rightarrow$$
$$A_X \vec{i} + A_y \vec{j} + A_Z \vec{K} + B_y \vec{j} + B_Z \vec{K} - 800\vec{j} - P\vec{j} = 0$$

از طرفی داریم:

$$\sum M_X = 0 \Rightarrow 80 - 0.2p\sin 60 = 0$$
$$\Rightarrow \ p = 462\ (N)$$

حل از رابطه (۱) داریم:

$$\begin{cases} A_X = 0 \\ A_y + A_y - 80 - 462 = 0 \\ A_Z + B_Z = 0 \end{cases}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \left(0.25\vec{i} + 0.1\vec{k}\right)\times\left(-800\vec{j}\right) + \left(0.5\vec{j}\right)\times\left(B_y\vec{j} + B_Z\vec{K}\right) + \left(0.8\vec{i} + 0.2\cos 60\vec{j} - 0.2\sin 60\vec{k}\right)\times\left(-462\vec{j}\right) = 0\,j$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow 0.5B_2 = 0 \rightarrow B_2 = 0$$
$$\sum M_Z = 0 \Rightarrow -2 + 0.5B_y - 0.8(462) = 0 \rightarrow B_y = 1139(N)$$
$$\rightarrow A_Z = 0$$
$$\rightarrow \ A_y = 123(N)$$

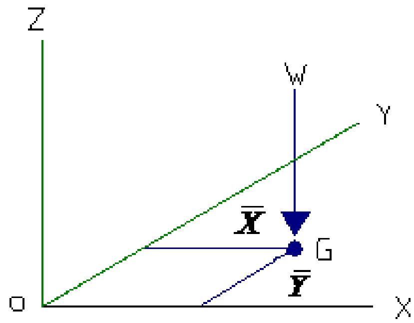
فصل پنجم

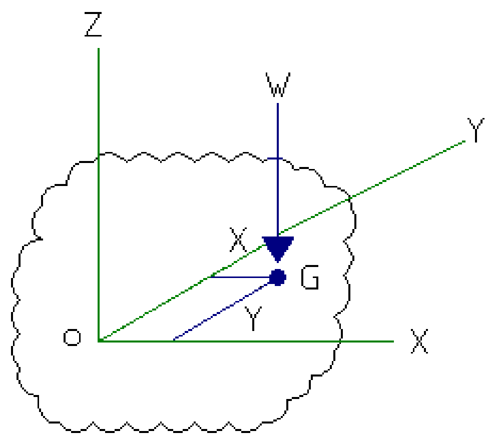
نیروهای گسترده , مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

مرکز ثقل‌ها و مرکز سطوح :

مرکز ثقل سطوح :

مثلا در فصل های قبلی گفتیم که وزن یک جسم را که نیرویی است که بر آن جسم وارد می شود می تـوانیم بصـورت یـک نیـروی تنها در یک نقطه قرار دهیم. این نیرو کلا بصورت بار گسترده ای است که بر آن جسم وارد می شود، ولی می توان بـه جـای آنهـا از سیستم نیروی معادل استفاده کرد و تمام آن و یا برآیند آنها را در یک نقطه که به آن نقطه مرکز ثقل می نامیم قرار دهیم.





مختصات مرکز ثقل جسم دو بعدی نسبت به دستگاه X,Y,Z

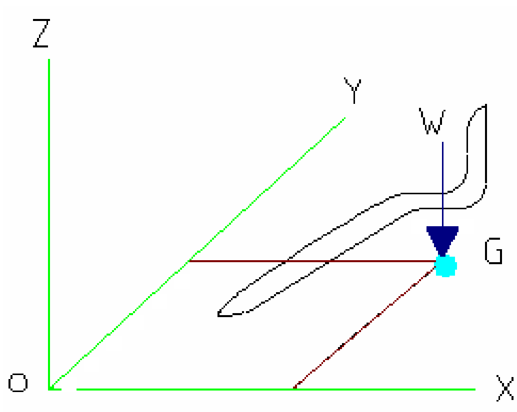
$$W=\sum \Delta w_i=\Delta w_1+\Delta w_2+\Delta w_3+\cdots+\Delta w_n$$

$$\bar{X}W=x_1\Delta w_1+x_2\Delta w_2+x_3\Delta w_3+\cdots+x_n\Delta w_n=\sum x_i\Delta w_i$$

$$\bar{Y}W=y_1\Delta w_1+y_2\Delta w_2+y_3\Delta w_3+\cdots+y_n\Delta w_n=\sum y_i\Delta w_i$$

$$\bar{X}=\frac{\sum x_i\Delta w_i}{w},\bar{Y}=\frac{\sum y_i\Delta w_i}{w},W=\sum \Delta w_i$$

$$\bar{X}=\frac{\int xdw}{w},\bar{Y}=\frac{\int ydw}{w},W=\int dw$$



$$G(X,Y)=(\bar{X},\bar{Y})$$

مراکز سطوح و خطوط :

هنگامیکه جسمی در یک صفحه دارای ضخامت یکنواخت و جنس هموژنیس و یا یکسان (همگن) باشد می توان نوشت :

γ = **وزن مخصوص**   **t = ضخامت** ΔA = **مساحت** $\Delta W = \gamma . t . \Delta A$

$$W = \int dw = \int \gamma . t . \Delta A = \gamma . t \int dA$$

$$A = \int dA$$

$$\int xdw = \int x \gamma . tdA = \gamma . t \int xdA$$

$$\int ydw = \int y \gamma . tdA = \gamma . t \int ydA$$

$$\overline{X} = \frac{\int xdw}{W} = \frac{\int xdA}{A}$$

$$\overline{Y} = \frac{\int ydw}{W} = \frac{\int ydA}{A}$$

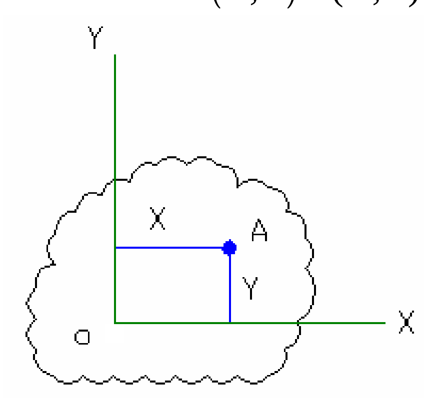
مرکز سطح یک جسم دو بعدی نسبت به دستگاه مختصات X,Y,Z

پس اگر یک جسمی دو بعدی دارای ضخامتی یکنواخت و جنس همگنی باشد، نقطه مرکز سطح با نقطه مرکز ثقل در یک نقطه قرار می گیرد.

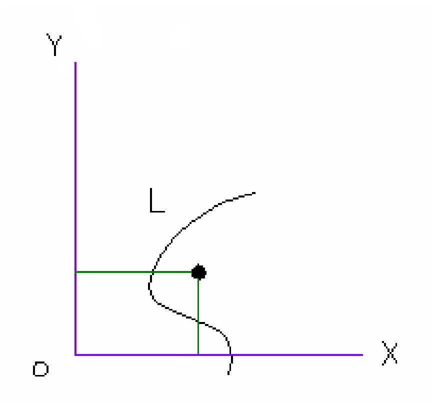
$\int xdA =$ گشتاور مساحت A نسبت به محور y می نامند

$\int ydA =$ گشتاور مساحت A نسبت به محور x می نامند

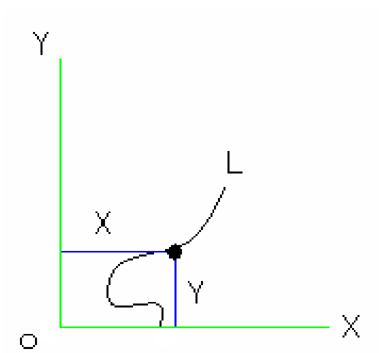
$$C(X,Y) = (\overline{X}, \overline{Y})$$



برای یک مفتول یا سیم :



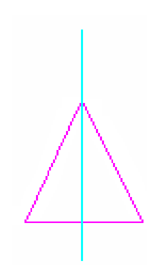
γ = وزن مخصوص   **a = مساحت سطح مقطع سیم**   **ΔL = طول** $\Delta W = \gamma . a\Delta L$



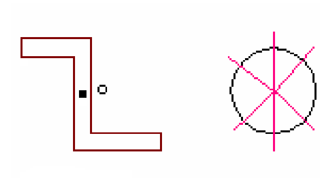
$$\overline{X} = \frac{\int xdL}{L}, \overline{Y} = \frac{\int ydL}{L}$$

محورهای تقارن :

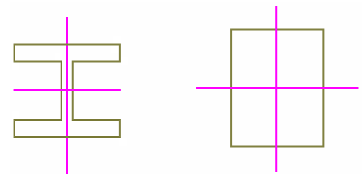
تقارن با یک محور:



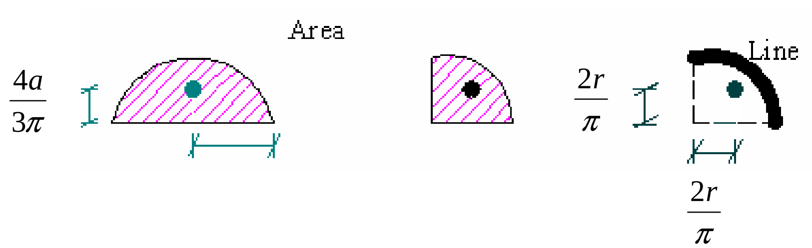
تقارن نسبت به یک نقطه



تقارن با دو محور

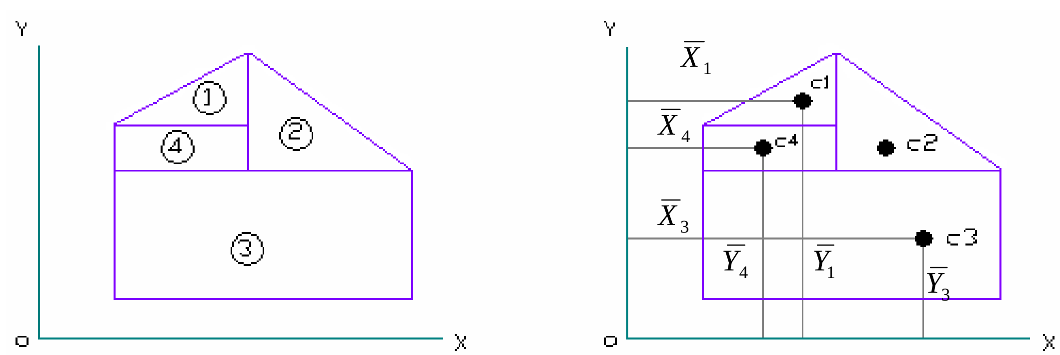


مرکز سطح اشکال عمومی



سطوح و خطوط مختلط :

در خیلی از موارد یک جسم دو بعدی و یا یک خط از چندین مقطع مختلط تشکیل می شود مانند دایره و مستطیل و یـا مثلـث. در اینگونه موارد می توان آن سطح را به اشکال منتظم هندسی تقسیم کرد و از روابط گذشته اسـتفاده کـرد و مرکـز سـطح را بدسـت آورد.



$C_1 =$ مرکز سطح قسمت یک

$C_2 =$ مرکز سطح قسمت دو

$C_3 =$ مرکز سطح قسمت سه

$C_3 =$ مرکز سطح قسمت چهار

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\bar{X}_1 A_1 + \bar{X}_2 A_2 + \bar{X}_3 A_3 + \bar{X}_4 A_4 = \bar{X} A$$

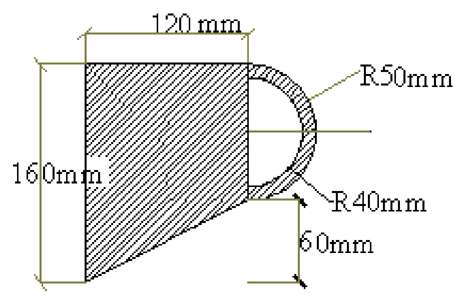
$$\bar{Y}_1 A_1 + \bar{Y}_2 A_2 + \bar{Y}_3 A_3 + \bar{Y}_4 A_4 = \bar{Y} A$$

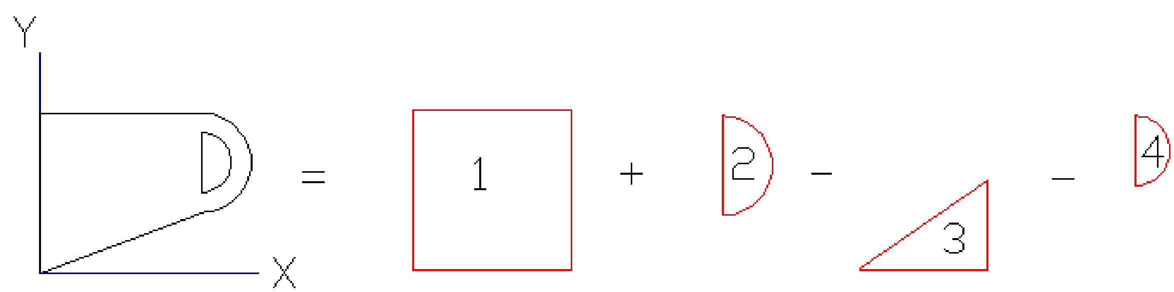
$$A = \sum A_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x}_i dA_i}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int \bar{y}_i dA_i}{A}$$

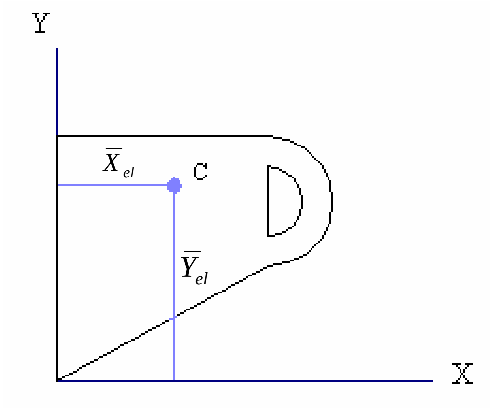
مثال: مختصات مرکز سطح شکل زیر ا بدست آورید.





قسمت	علامت	(mm^2) A	$\bar{X}_i$	$\bar{Y}_i$	$A\bar{X}_i$	$A\bar{Y}_i$
1	+	120×160=19.200	60	80	1,152,000	1,536,000
2	+	$\frac{\pi.(50)^2}{2}=3927$	$120+\frac{40(50)}{3\pi}=140$	110	553,707	431,970
3	–	$\frac{120\times160}{2}=3600$	80	20	-288,000	-72,000
4	–	$\frac{\pi.(40)^2}{2}=2513$	$120+\frac{4(40)}{3\pi}=137$	110	-344,281	-276,430
کل		17140			1,073,426	1,614,540

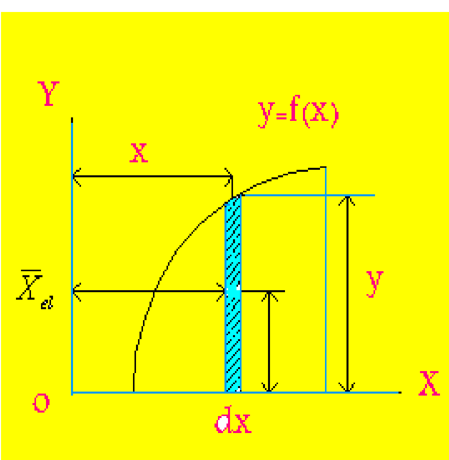
$$\bar{X} = \frac{\sum Ax_i}{\sum A_i} = \frac{1073426}{17140} = 62.6(mm)$$
$$\bar{Y} = \frac{\sum Ay_i}{\sum A_i} = \frac{1619540}{17140} = 94.5(mm)$$

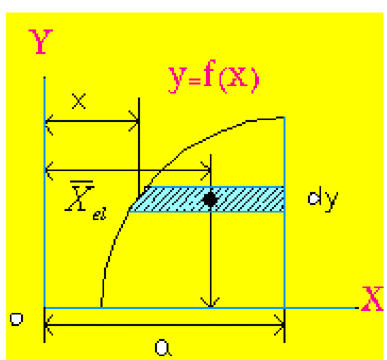


بدست آوردن مرکز سطح به روش انتگرال گیری :

$$\bar{X} = \frac{\int xdA}{A}, \bar{Y} = \frac{\int ydA}{A}$$

برای سطوحی که اشکال منتظم هندسی نداشته باشند و از اشکال نا منتظم و یا اشکالی که اطـراف آن هـا سـطح از منحنــی هـای مختلف است ، تشکیل شده باشند ، می توان از روش انتگرال گیری استفاده کرد و مرکز سطح را بدست آورد :





مرکز سطح ریمان برای شکل ۱ (سمت راست) :

$$\overline{X}_{el} = x, \overline{Y}_{el} = \frac{y}{2}$$

مرکز سطح ریمان برای شکل ۲ (سمت چپ) :

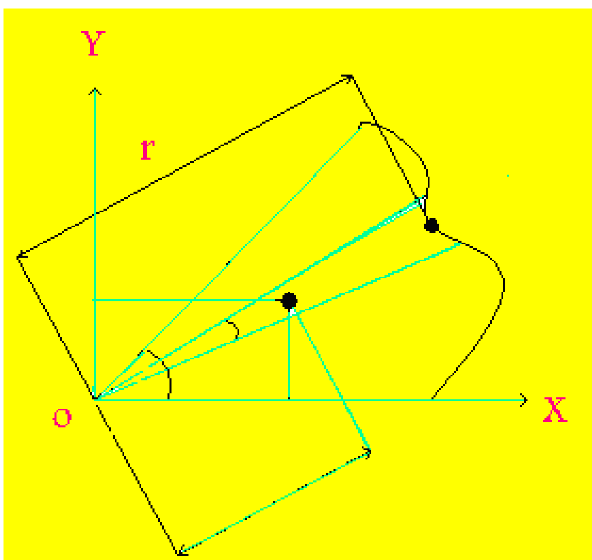
$$\overline{X}_{el} = \frac{a+x}{2}, \overline{Y}_{el} = y$$

مساحت ریمان برای شکل ۱ (سمت راست) :

$$dA = ydx$$

مساحت ریمان برای شکل ۲ (سمت چپ) :

$$dA = (a-x)dy$$



$$\overline{X}_{el} = \frac{2r}{3}\cos\theta$$

$$\overline{Y}_{el} = \frac{2r}{3}\sin\theta$$

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

گشتاور اولیه نسبت محور y :

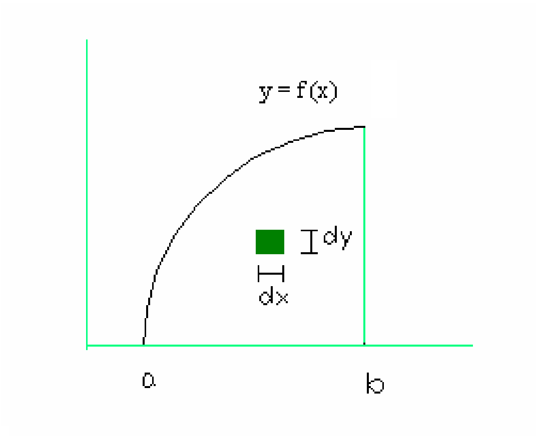
$$\sum M_y : A\overline{X} = \int \overline{X}_{el} dA$$

گشتاور اولیه نسبت محور x :

$$\sum M_x : A\overline{Y} = \int \overline{Y}_{el} dA$$

برای بدست آوردن مرکز سطح از فرمول فوق استفاده می کنیم و باید X_{el} و Y_{el} را بر حسب X و Y جـایگزین کـرده و dA را بـر حسب X و Yمحاسبه کنیم ، سپس $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ را به دست آوریم .

برای شکل زیر داریم :

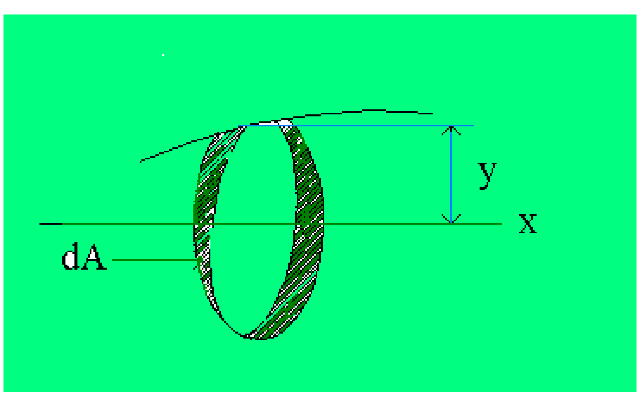


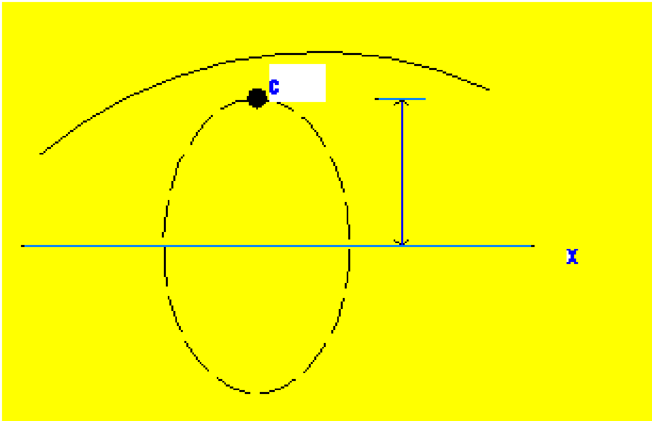
$$\int x dA = \int\int x dy dx = \int x\left(\int dy\right)dx = \int_a^b x\left(\int_0^{f(x)} dy\right)dx$$

تئوری پاپیوس – گلدینیوس :

تئوری اول :

سطح یک منحنی دورانی برابر است با طول آن منحنی ضرب در فاصله ای که مرکز سطح آن منحنی می پیماید ، تـا آن سـطح بـه وجود آید .





$$dA = (2.\pi.y)dL$$

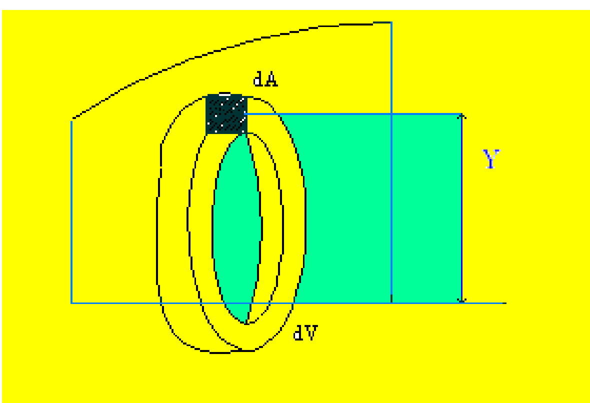
$$A = \int 2.\pi.ydL$$

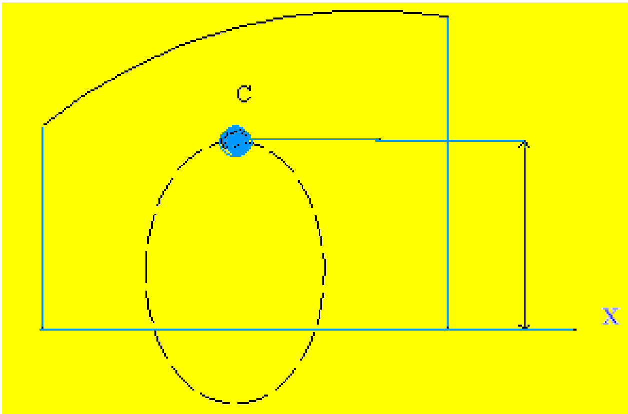
$$\int ydL = \bar{Y}L$$

$$A = 2.\pi.\bar{Y}L$$

تئوری دوم :

حجم جسمی که از دوران یک منحنی حول یک محور بدست می آید برابر است با سطح مقطع آن جسم ضرب در فاصله ای که مرکز سطح آن منحنی هنگام دوران می پیماید .





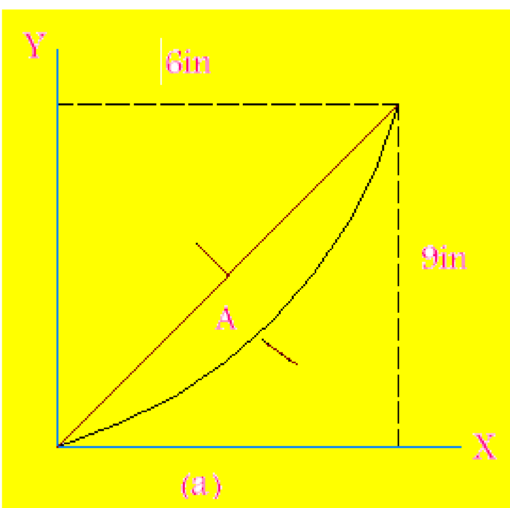
$$V = \int dv$$

$$dv = 2\pi . ydA$$

$$V = \int 2\pi . ydA$$

$$\int ydA = \bar{Y}A \Rightarrow V = 2\pi . \bar{Y}A$$

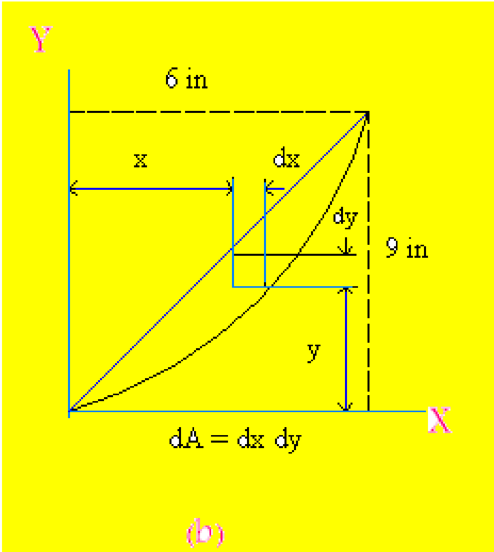
مثال: مطلوب است : محورهای مرکز سطح که بین خط مستقیم $x = \frac{2y}{3}$ و سهمی $x^2 = 4y$ قرار گرفته اند(شکل a) . از روشهای (۱) انتگرال دوگانه،(۲) انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح افقی، (۳) انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح عمودی، استفاده کنید (x و y بر اساس اینچ) .



حل :

قسمت اول – انتگرال دوگانه :

المان دیفرانسیل سطح دوگانه در شکل b نشان داده شده است. بر اساس اینکه بخواهیم نسبت به x یا y انتگرال بگیریم dA را می توان به صورت dx.dy یا dy.dx نوشت .پس ابتدا نسبت به y انتگرال می گیریم، مساحت برابر است با :



$$A = \int dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} dy \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 9(in^2).$$

اولین لحظه سطح برای محور y برابر است با :

$$Q_y = \int_A x dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} x dy \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) x dx = 279(in^3).$$

اولین لحظه سطح برای محور x برابر است با :

$$Q_x = \int_A y dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} y dy \right) dx$$

$$= \int_0^6 \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx = 32.4(in^3).$$

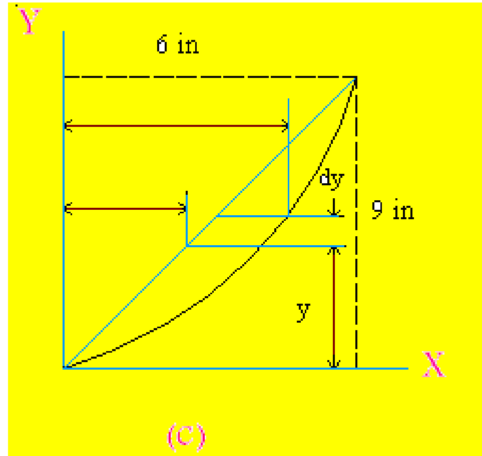
بنابراین محورهای مرکز سطح برابر است با :

$$\overline{X} = \frac{Q_y}{A} = \frac{27}{9} = 3(in.)$$

$$\overline{Y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{32.4}{9} = 3.6(in).$$

اگر ابتدا نسبت به x انتگرال می گرفتیم ، آنگاه داشتیم :

$$A = \int dA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} dx \right) dy$$



$$Q_y = \int_A xdA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} xdx \right) dy$$

$$Q_x = \int_A ydA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} ydx \right) dy$$

توجه داریم که این انتگرالها معادل انتگرالهای قبلی است.

قسمت دوم - انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح افقی :

در شکل c ، dA و $\overline{X}_{el}$ مشخص شده اند پس برای محاسبه مساحت داریم :

$$A = \int_A dA = \int_0^9 \left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = 9(in^2)$$

$$dQ_y = \overline{X}_{el} dA \Rightarrow dQ_y = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{y} + \frac{2y}{3} \right)\left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = \left(2y - \frac{2y^2}{9} \right) dy$$

اولین لحظه سطح برای محور y برابر است با :

$$Q_y = \int_0^9 \left(2y - \frac{2y^2}{9} \right) dy = 27(in^3).$$

$$dQ_x = ydA \Rightarrow dQ_x = y\left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = \left(2y^{\frac{3}{2}} - \frac{2y^2}{3} \right) dy$$

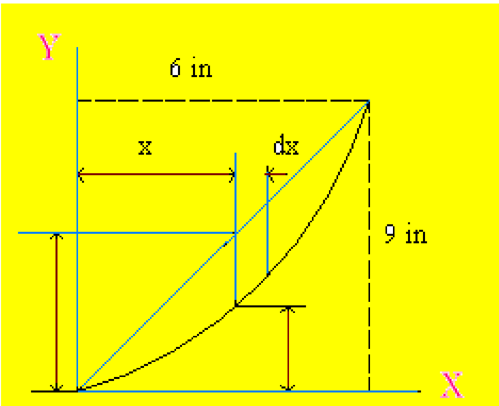
اولین لحظه سطح برای محور x برابر است با :

$$Q_x = \int_0^9 \left(2y^{\frac{3}{2}} - \frac{2y^2}{3} \right) dy = 32.4(in^3).$$

توجه شود که A ، Q_x و Q_y برابر همان مقدارهای حساب شده در قسمت اول اند ، بنـابراین محورهـای مرکـز سـطح نیـز همـان است.

قسمت سوم - انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح عمودی :

در شکل d ، dA و $\bar{Y}_{el}$ مشخص شده اند .پس برای محاسبه مساحت داریم :



(d)

$$A = \int_A dA = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 9(in^2).$$

با استفاده از اطلاعات موجود در شکل d داریم:

$$dQ_y = xdA = x\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

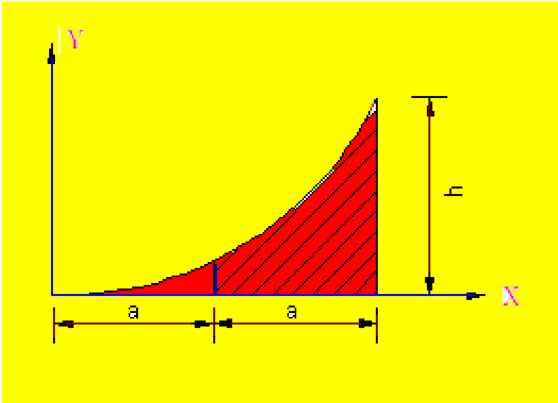
بنابراین اولین لحظه برای محور y برابر است با:

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_0^6 \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{4} \right) dx = 27(in^3).$$

$$dQ_x = \bar{y}_{el} dA \Rightarrow dQ_x = \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4} \right)\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx$$

$$\Rightarrow Q_x = \int_A dQ_x = \int_0^6 \frac{1}{2}\left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx = 32.4(in^3).$$

مقادیر بدست آمده A ، Q_x و Q_y در قسمت بالا همان مقادیر بدست آمده در قسمت های ۱ و ۲ می باشند، بنابراین $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ نیز همان مقادیر هستند .



مثال: مطلوبست مرکز سطح شکل مقابل:

$$y = kx^2$$

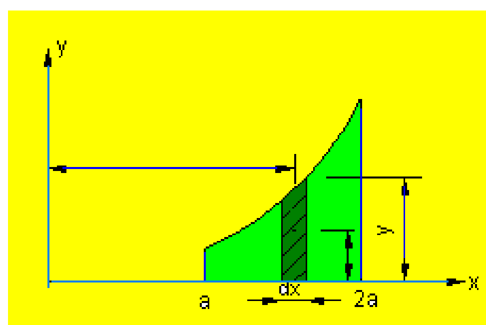
$$x = 2a \ , \ y = h: \ h = k(2a)^2 \Rightarrow k = \frac{h}{4a^2}$$

$$y = \frac{h}{4a^2}x^2$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{1}{2}y = \frac{h}{8a^2}x^2$$

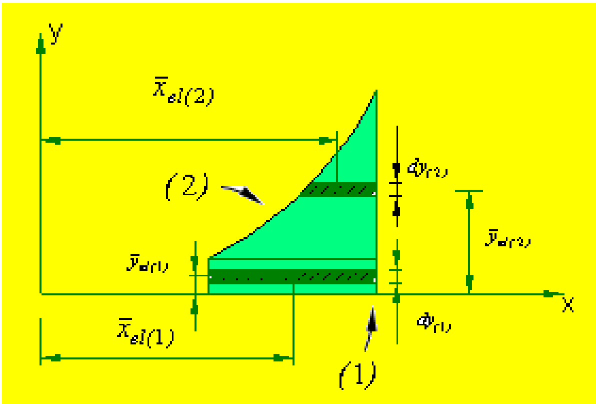
$$\bar{x}_{el} = x$$

$$dA = ydx = \frac{h}{4a^2}x^2 dx$$



$$A = \int dA = \frac{h}{4a^2}\int_a^{2a} x^2 dx = \frac{7}{12}ah$$

$$\left.\begin{aligned}\int \bar{x}_{el} dA &= \int_a^{2a} x\left(\frac{h}{4a^2}\right)x^2 dx = \frac{15}{16}ha^2 \\ \int \bar{y}_{el} dA &= \frac{1}{2}\int_a^{2a}\left(\frac{h}{4a^2}x^2\right)dx = \frac{31}{160}h^2 a\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int \bar{x}_{el} dA}{\int dA} = \frac{45}{28}a = 1.61a \\ \bar{y} &= \frac{\int \bar{y}_{el} dA}{\int dA} = \frac{93}{280}h = 0.33h\end{aligned}\right.$$



$$\bar{y}_{el(1)} = y, \bar{x}_{el(1)} = \frac{3}{2}a$$

$$dA_{(1)} = ady$$

$$y = \frac{h}{4a^2}x^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{\frac{y}{h}}$$

$$\bar{y}_{el(2)} = y$$

$$\bar{x}_{el(2)} = \frac{2a + x}{2} = \frac{2a + 2a\sqrt{\frac{y}{h}}}{2} = a\left(1 + \sqrt{\frac{y}{h}}\right)$$

$$dA_{(2)} = (2a - x)dy = 2a\left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}}\right)dy$$

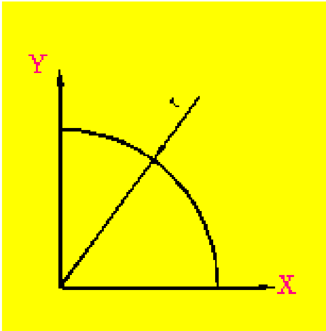
$$\bar{x}_{(2)} = \frac{\int \bar{x}_{el(2)}dA}{A_{(2)}}, \bar{y}_{(2)} = \frac{\int \bar{y}_{el(2)}dA}{A_{(2)}}$$

$$A_{\text{کل}} = A_{(1)} + A_{(2)}$$

$$\rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\bar{x}_{(1)}A_{(1)} + \bar{x}_{(2)}A_{(2)}}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\bar{y}_{(1)}A_{(1)} + \bar{y}_{(2)}A_{(2)}}{A}$$

مثال: منحنی مقابل یک چهارم دایره کامل می باشد . مرکز خط آنرا بدست آورید.

حل:



$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el} dL}{L} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el} dL}{L}$$

به علت قرینه بودن این کمان حول زاویه 45° داریم :

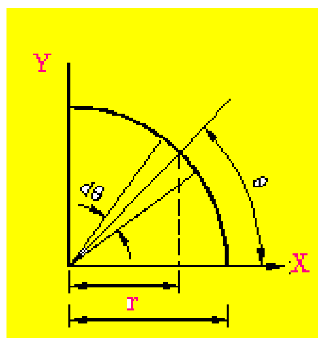
$$\bar{x} = \bar{y}$$

$\bar{x}_{el} = r \cos\theta$

$dL = r d\theta$

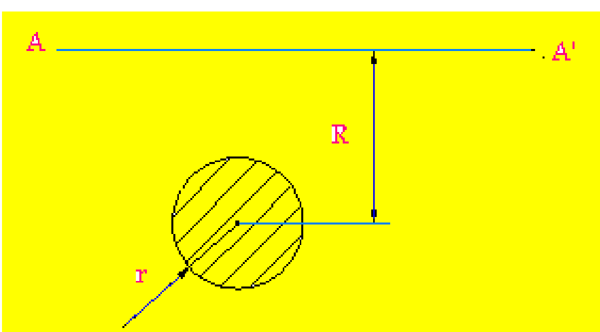
$$\int \bar{x}_{el} dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\theta \, d\theta = r^2 \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2$$

$$\bar{x}L = \int \bar{x}_{el} dL \quad \Rightarrow \quad \bar{x}(\frac{1}{2}\pi r) = r^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$



مثال: مطلوبست سطح دورانی و نیز حجم حاصل از دوران دایره به شعاع r و به فاصله R از محور AA' حول محور AA' .

حل:



سطح دورانی : $2\pi\bar{y}L = 2\pi R(2\pi r) = 4\pi^2 r^2 R$

حجم دورانی : $2\pi\bar{y}A = 2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$

مرکز ثقل اجسام سه بعدی:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}W &= \int x dW \\ \bar{y}W &= \int y dW \\ \bar{z}W &= \int z dW\end{aligned}\right\} \quad W = \gamma V$$

برای اجسام همگن داریم :

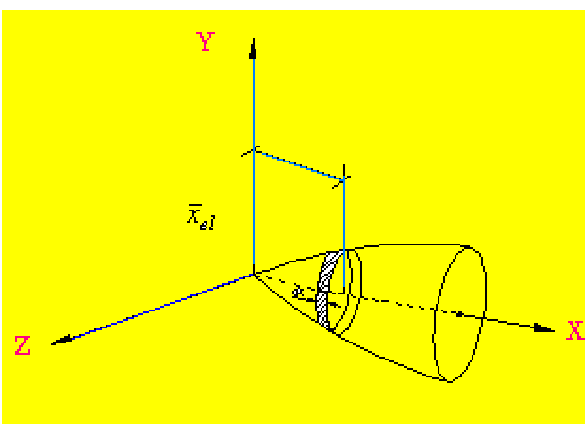
$$\bar{x}V = \int x dV, \bar{y}V = \int y dV, \bar{z}V = \int z dV$$

برای اجسام مختلط :

$$\bar{x}\sum W = \sum \bar{x}W \qquad \bar{y}\sum W = \sum \bar{y}W \qquad \bar{z}\sum W = \sum \bar{z}W$$
$$\bar{x}\sum V = \sum \bar{x}V \qquad \bar{y}\sum V = \sum \bar{y}V \qquad \bar{z}\sum V = \sum \bar{z}V$$

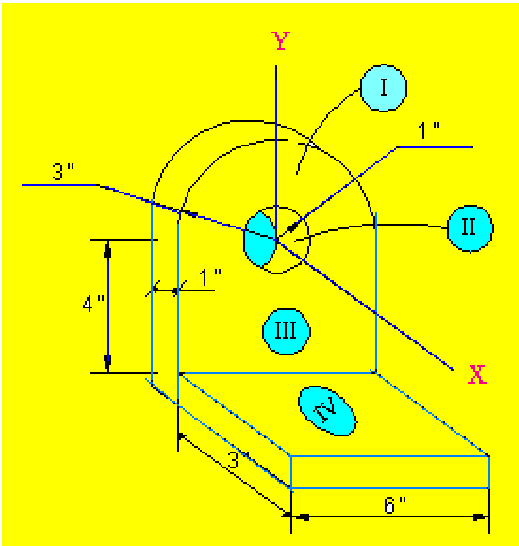
بدست آوردن مرکز ثقل به وسیله انتگرال:

$$\bar{x}V = \int x dV \qquad \bar{y}V = \int y dV \qquad \bar{z}V = \int z dV$$
$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el} dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el} dV$$



مثال: مرکز ثقل جسم روبرو را بدست بیاورید

.



حل:

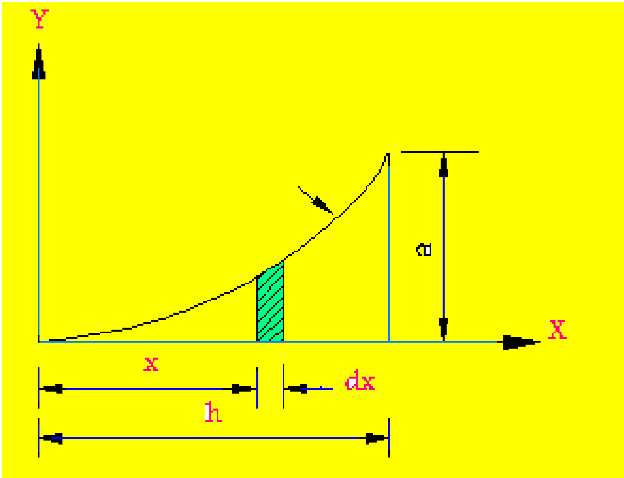
	$V(in^{3})$	$\bar{x}(in)$	$\bar{y}(in)$	$\bar{y}V(in^4)$	$\bar{x}V(in^4)$
I	$\frac{\pi}{2}(3)^2 = 14.14$	*0*	$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{\pi}\right) = 1.27$	*18*	*0*
II	$-\pi(1)^2 = -\pi$	*0*	*0*	*0*	*0*
III	*(1)(5)(6)=30*	*0*	*-2.5*	*-75*	*0*
IV	*(3)(6)(1)=18*	*2*	*-4.5*	*-81*	*36*
$\sum$	*59*			*-138*	*36*

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}V}{V} = \frac{36}{59} = 0.61''$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}V}{V} = \frac{-138}{59} = -2.34''$$

مثال: مرکز ثقل جسمی را که از دوران قسمت هاشور زده

در شکل روبرو حول محور x ایجاد می شود ، بدست آورید . معادله ی منحنی $y = kx^n$ است.



حل:

$$dV = \pi r^2 dx = \pi k^2 x^{2n} dx$$

$$V = \int dV = \pi k^2 \int_0^h x^{2n} dx = \frac{\pi k^2 h^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\int \bar{x}_{el} dV = \pi k^2 \int_0^h x^{2n+1} dx = \frac{\pi k^2 h^{2n+2}}{2n+2}$$

$$\bar{x} V = \int \bar{x}_{el} dV \Rightarrow \bar{x}.\left(\frac{\pi k^2 h^{2n+1}}{2n+1}\right) = \frac{\pi k^2 h^{2n+2}}{2n+2}$$

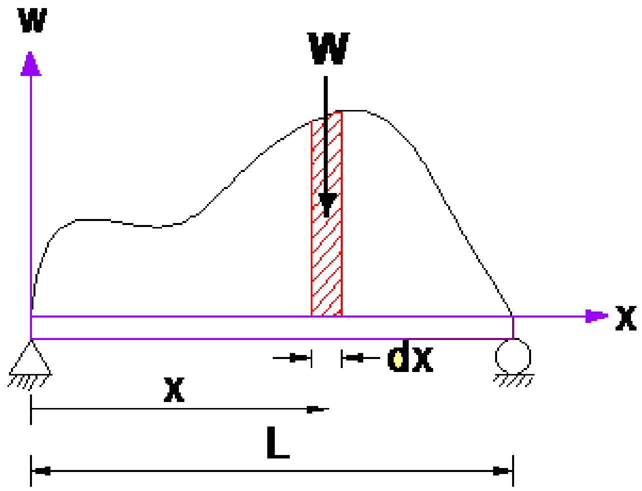
$$\bar{x} = \frac{2n+1}{2n+2} h$$

برای مخروط $\quad n = 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{2(1)+1}{2(1)+2} h = \frac{3}{4} h$

برای قطع مخروط $\quad n = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{3} h$

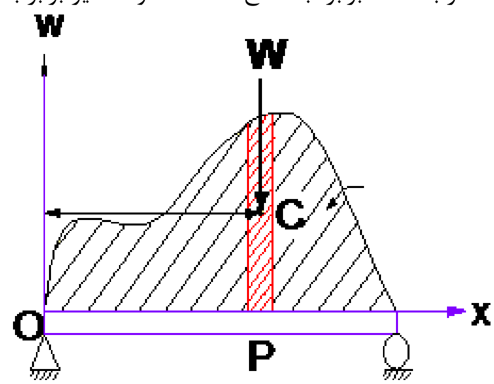
توزیع نیرو روی میله ها:

کاربرد مرکز سطح برای مسائل نیرو های موجود روی تیرها نیز می باشد. فرض می کنیم مصالح روی یک جسم مطابق شکل مقابل باشد . توسط شکل مقابل می توان توزیع بار بر حسب وزن بر واحد طول تیر را نشان داد.



$$dW = wdx \;\Rightarrow\; W = \int_0^L wdx$$

حاصلضرب wdx برابر با سطح dA است و W نیز برابر با سطح کل A می باشد .



$$W = \int dw$$
$$dw = wdx$$

$$A\bar{x} = \int xdA$$
$$(OP)W = \int xdw$$
$$(OP)W = \int_0^L x(w)dx$$

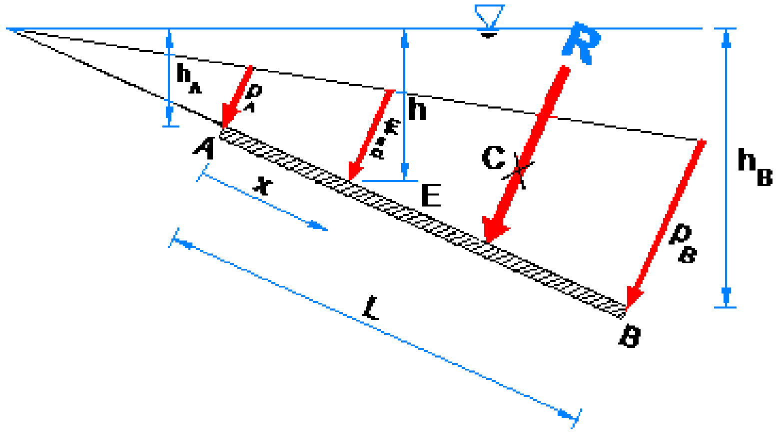
نیروهای وارده بر سطوح اجسام غوطه ور:

$p = \gamma h$

وزن مخصوص $= \gamma$

ارتفاع سطح تا سطح آزاد مایع $= h$

نقطه E مرکز سطح



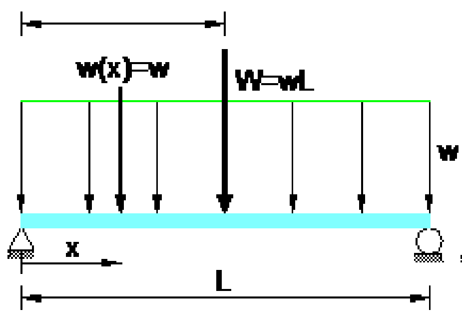
نقطه C مرکز فشار

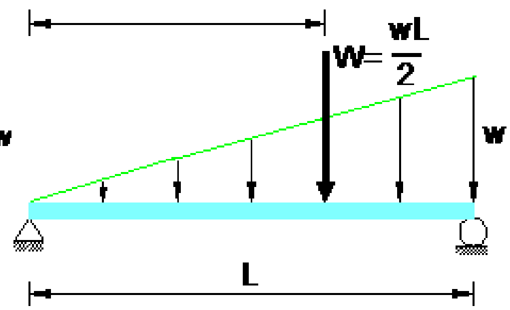
فشار وارد بر صفحه (کلّ) $R = \quad R = p_E L = \frac{1}{2}(p_A + p_B)L$

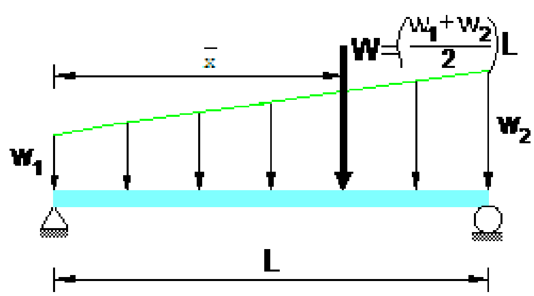
بار گسترده یکنواخت :

$$\bar{x} = \frac{L}{2}$$

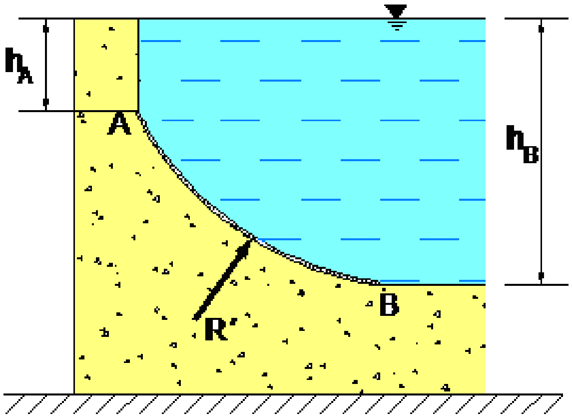
$$\bar{x} = \frac{2L}{3}$$

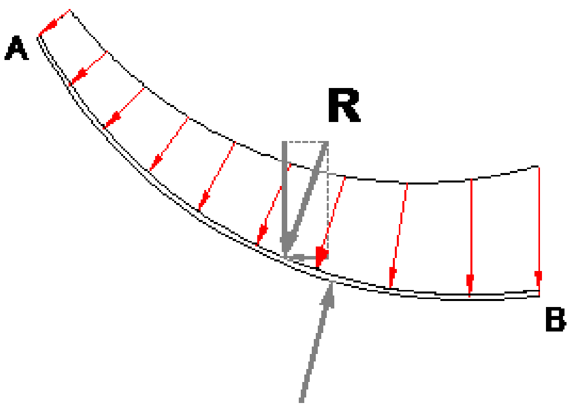






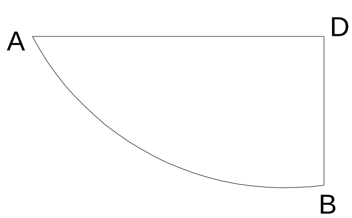
برای محاسبه نیروی برآیند از طرف آب که بر بخش AB در سد نمایش داده شده زیر وارد می شود مراحل زیر را انجام می دهیم:



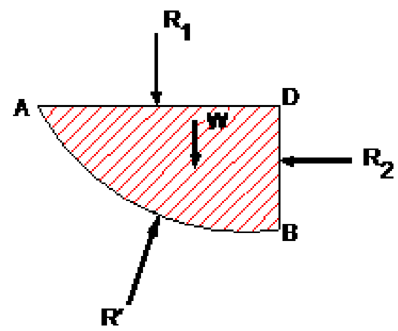


نیروی برآیند وارد شده از طرف آب بر سطح منحنی

حجم مایع ABD را جدا می کنیم.



و برآیند نیروهای وارد بر سطح AB (یعنی R) را بصورت مؤلفه های افقی و عمودی درنظر می گیریم:



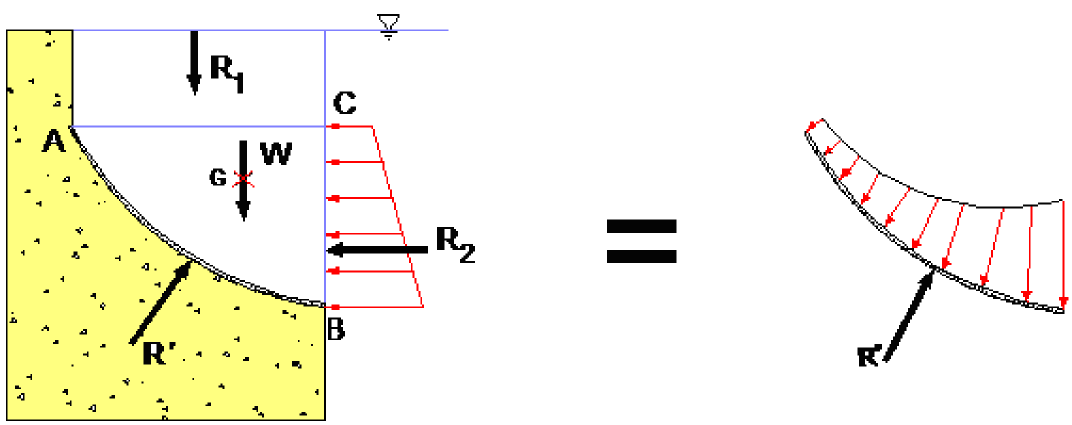
$W =$ مربوط به حجم مایع جدا شده

مؤلفه های عمودی $\leftarrow$ برآیند نیروهای خارجی وارد بر سطح AD

برآیند نیروهای خارجی وارد بر سطح BD $= R_2 \leftarrow$ مؤلفه افقی

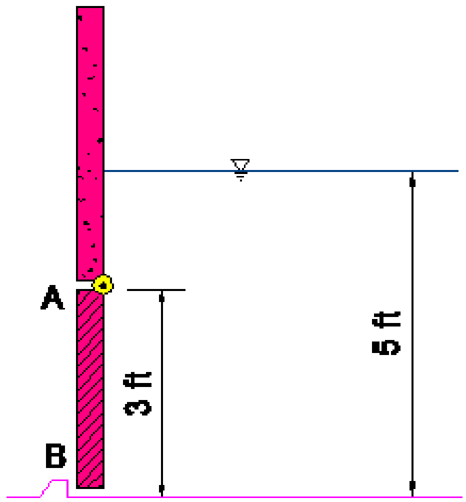
(برآیند نیروی وارد بر سطح منحنی، قسمت پایین) $= R' = R -$(نیروی وارد بر سطح منحنی، قسمت بالا)

در شکل زیر ، دو حالت نمایش داده شده معادل هم هستند، اما انتگرال گیری در حالت سمت راست دشوار است زیرا هم فشار و هم ارتفاع تغییر می کند، درصورتیکه اگر قسمت ABC را بصورت سمت چپ درنظر بگیریم دچار مشکل نخواهیم شد.



مثال: درب $3\,ft \times 3\,ft$ در پائین دیوار بتنی قرار گرفته است؛

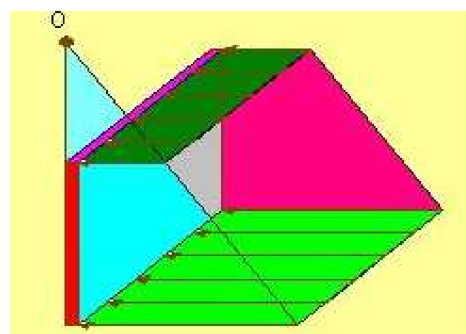
الف) مقدار و محل برآیند نیروهای وارد بر درب را معین کنید.

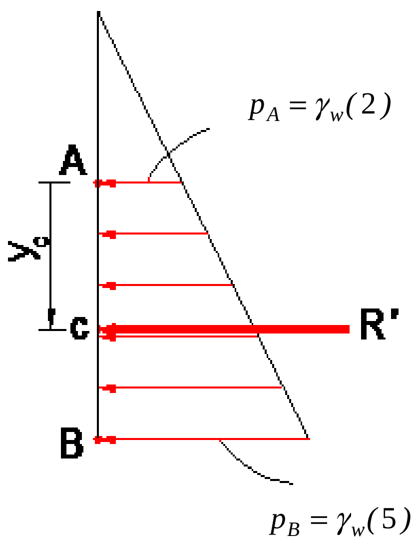


ب) اگر این درب در نقطه A به دیوار بتـنی لـولا شـده باشـد نیروی وارد بر نقطه B را بدست آورید.

$$\gamma_{conc} = 150(\frac{lb}{ft^3}) \qquad \gamma_{water} = 62.4(\frac{lb}{ft^3})$$

حل الف)

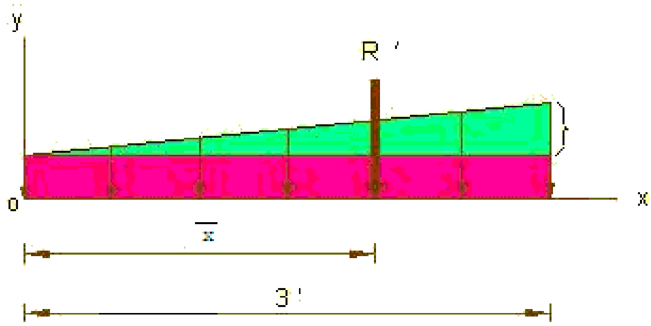




$$R' = \frac{1}{2}(p_A + p_B)L$$

$$R' = \frac{1}{2}[\gamma_w(2) + \gamma_w(5)]\,(3) = \frac{21}{2}\gamma_w$$

$$= (3)R' = \frac{63}{2}\gamma_w \quad R_{کل}$$



$3\gamma_w$

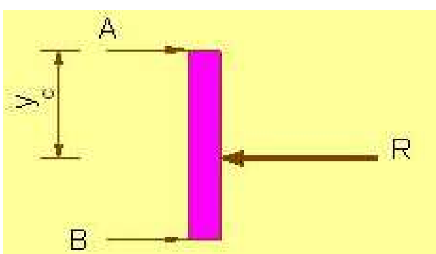
$$\bar{x}R' = [2\gamma_w(3)]\,(1.5) + [1.5\gamma_w(3)]\,(2) = 9\gamma_w + 9\gamma_w = 18\gamma_w$$

$$\bar{X}R' = \sum \bar{x}_i R_i'$$

$$y_c = \bar{X} = \frac{18\gamma_w}{\frac{21}{2}\gamma_w} = \frac{36}{21} = \frac{12}{7} = 1.714'$$

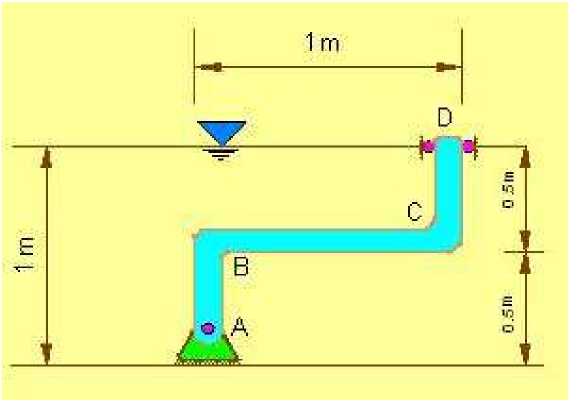
Rکل = ۳۱.۵ × ۶۲.۴ =۱۹۶۶ (**lb**)

حل ب) $\sum M_A = 0$



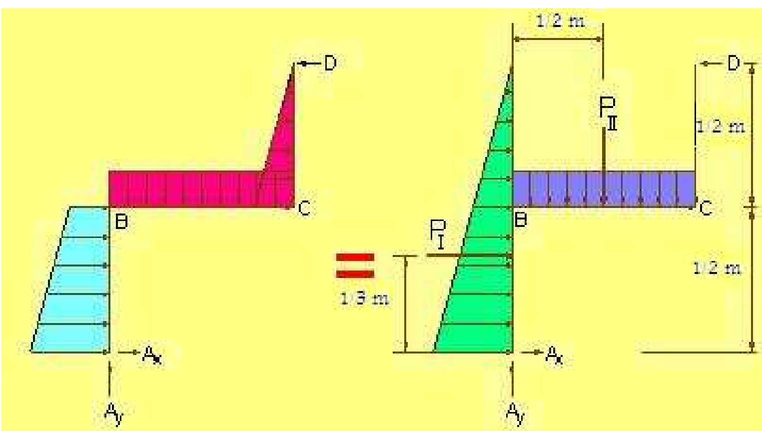
$\Rightarrow\ 3B - y_c R = 0 \ \Rightarrow$ B=1123(lb)

مثال: دریچه ABCD که از ورق ساخته شده و دارای عرض ۲ متر است در نقطه A به زمین لولا شده است . عکس العمل ها را در نقاط A و B بدست آورید.



$$\gamma = \rho\, g = 1000(9.81) = 9.81(kn/m^3)$$

حل:



$$w_A = 2\gamma(1) = 2\gamma \qquad P_I = \frac{1}{2} w_A(1) = \gamma$$

$$w_B = 2\gamma(\frac{1}{2}) = \gamma \qquad P_{II} = w_B(1) = \gamma$$

$$+\sum M_A = 0 \Rightarrow (1)D - \frac{1}{3}P_I - \frac{1}{2}P_{II} = 0$$

$$D - \frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{2}\gamma = 0$$

$$D = \frac{5}{6}\gamma = \frac{5}{6}(9.81) = 8.18(kN) \leftarrow$$

$$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_I - D = 0$$

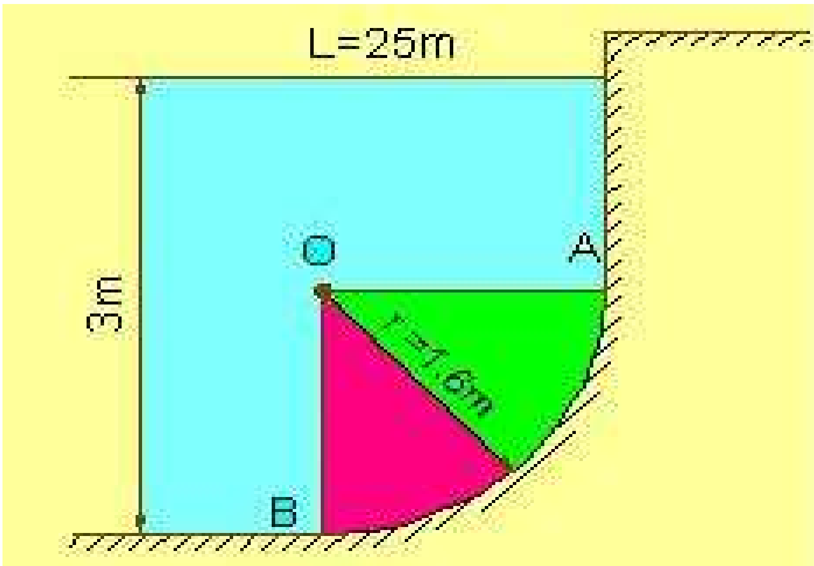
$$A_x = \frac{5}{6}\gamma - \gamma = \frac{1}{6}\gamma = \frac{1}{6}(9.81)$$

$$A_x = 1.635(kN) \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P_{II} = 0$$

$$A_y = \gamma = 9.81(kN)\uparrow$$

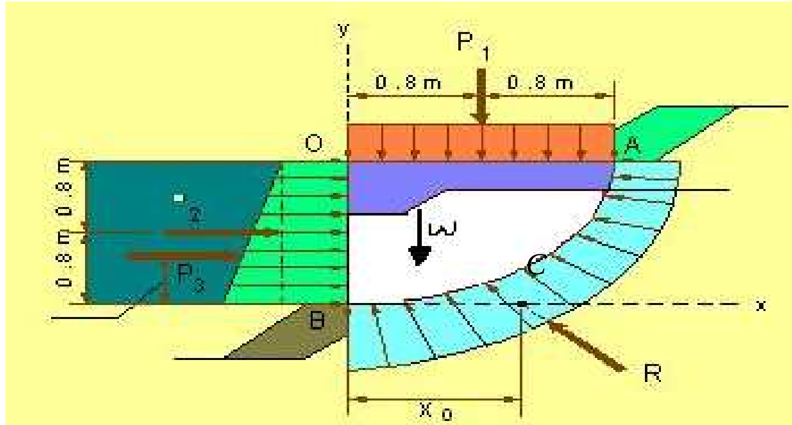
مثال: یک استخر شنا تا عمق ۳ متر از آب پر شده است (مطابق شکل).
بزرگی و خط اثر نیروی برآیندی که بر ربع دایره AB وارد می شود را تعیین کنید. طول دیوار ۲۵ متر و چگالی آب برابر $1000(kg/m^3)$ است.



حل:

$$\gamma = \rho g = 1000(9.81) = 9.81\,(kN/m^3)$$

$$\frac{4(1.6)}{3\pi} = 0.6791(m)$$



$$p_1 = \gamma h = (9.81)(1.4)$$
$$= 13.734 \ (kN/m^2)$$
$$p_3 = \gamma h = (9.81)(3)$$
$$= 29.43 \ (kN/m^2)$$

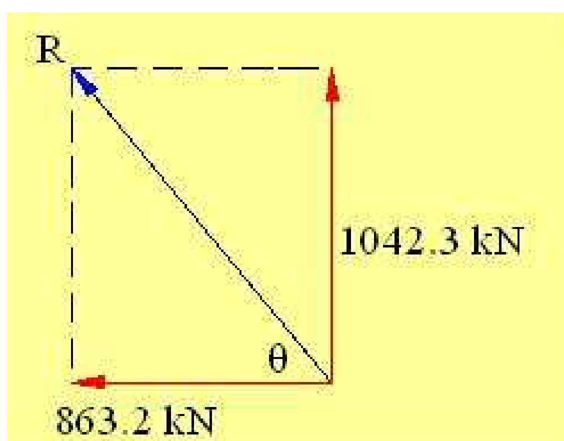
$$p_2 = \gamma h = (9.81)(3)$$
$$= 29.43 (kN/m^2)$$

$$P_1 = p_1 A = (13.73)(1.6)(25) = 549.2 \ (kN)$$
$$P_2 = p_2 A = (13.73)(1.6)(25) = 549.2 \ (kN)$$
$$P_3 = \frac{p_2 - p_1}{2} A = \frac{29.43 - 13.73}{2}(1.6)(25) = 314.0 \ (kN)$$

$$W = (9.81)\frac{\pi (1.6)^2}{4}(25) = 493.1 \, kN$$

$W = \gamma \times$(وزن آب موجود درناحیهOAB)

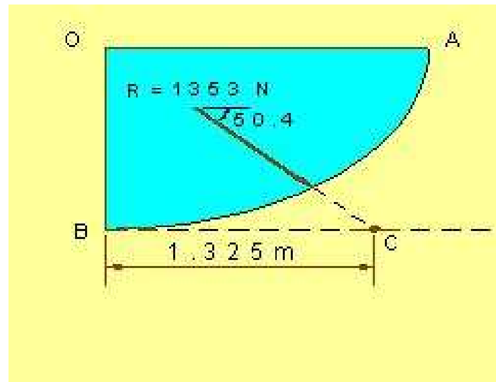
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow P_2 + P_3 - R_x = 0$$
$$R_x = P_2 + P_3 = 549.2 + 314.0 = 863.2 (kN)$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow R_y - W - P_1 = 0$$
$$R_y = W + P_1 = 493.1 + 549.2 = 1042.3 \ (kN)$$



$$R=\sqrt{(863.2)^2+(1042.3)^2}=1353\,kN$$

$$\theta=tan^{-1}\frac{1042.3}{863.2}=50.4^{\circ}$$

برای یافتن خط اثر R داریم:



تذکر: X ، فاصله بین B و C (محل تقاطع R و محور xها) می باشد.

$$\sum M_B=0 \quad \Rightarrow R_y x_0-P_1(0.8)-P_2(0.8)-P_3(0.5333)-W(0.6791)=0$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{549.2(0.8)+549.2(0.8)+314.0(0.5333)+493.1(0.6791)}{1042.3}=1.325(m)$$

نیرویی که توسط آب بر دیوار اعمال می شود مساوی و در خلاف جهت نیرویی است که در بالا تعیین شد.

فصل ششم

تحلیل سازه‌ها

مقدمه

در فصلهای قبل،مسائل تعادل اجسام یک جسم صلب تنها را بررسی کردیم. دراین مسائل تمام نیروهـا خـارجی بودنـد.حـال تعـادل سازه هایی را بررسی می کنیم که ازچند قسمت تشکیل شده اند.دراین حالت،نه تنهانیروهای خارجی وارد بـر سـازه، بلکـه نیروهـای بین قسمت های مختلف آن را،که برای کل سازه به عنوان نیروهای داخلی اند،می یابیم.

در این فصل سه گروه مهم از سازه های مهندسی را بررسی می کنیم:

خرپاها

۱)سازه های مقید کامل اند که برای تحمل بار به کار می روند و معمولاً ساکن اند.

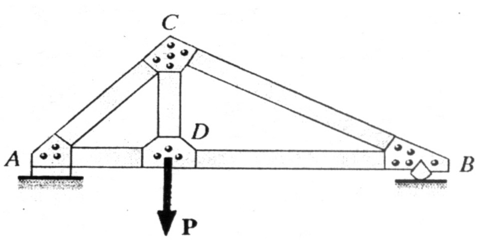
۲)از عضو های مستقیمی ساخته شده اند که در دو انتها به هم مفصل شده اند. لذا عضوهای خرپا دو نیرویی اند،یعنی،عضوی کـه دو نیروی برابر و ناهمسو در امتداد آن اثر می کنند. (بصورت کششی یا فشاری است)

۳) نیروها در مفصل قرار می‌گیرند.

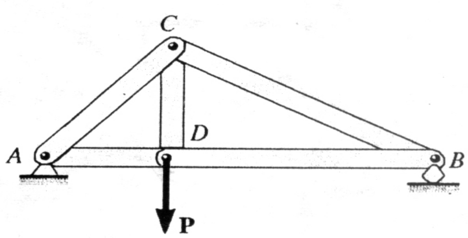
۴) نقاط مشترک مفصل فرض می‌شود.

۵) وزن‌ها هم فرض می‌شود که در مفصل‌ها وارد می‌گردد.

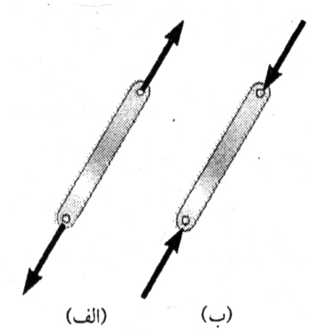
۶) تمام عضوهای خرپا در گره ها به یکدیگر لولا می شوند یعنی می توانند دوران کنند .(گشتاور در نظر گرفته نمی شود.)



(الف)



(ب)

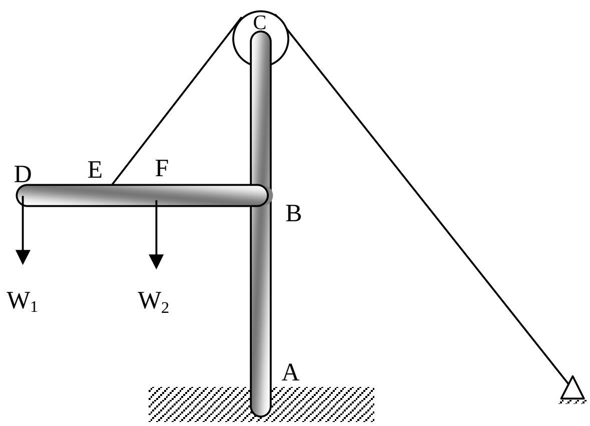

(الف) (ب)

قاب ها

۱)سازه های مقید کامل اند که برای تحمل بار به کار می روند و معمولا ساکن اند.

۲)قاب ها همواره شامل حداقل یک عضو چند نیرویی هستند، یعنی، عضوی که سه یا تعداد بیشتری نیرو،که معمولا در امتداد عضـو نیستند، بر آن اثر می کنند.

۳) وظیفه قاب انتقال نیرو به تکیه گاه ها می باشد.



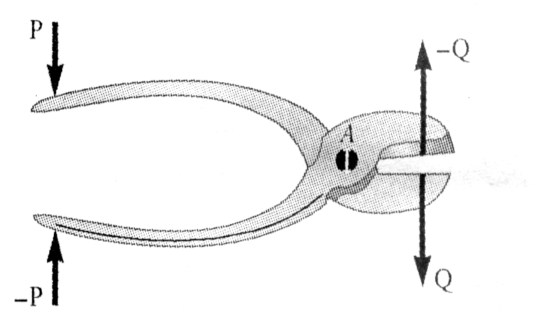
ماشین ها

۱)سازه هایی هستند که دارای قطعات متحرک اند.

۲)برای انتقال و تبدیل نیرو ها به کار می روند.

۳)ماشین ها مانند قاب ها، همواره شامل حداقل یک عضو چند نیرویی هستند.

۴)وظیفه آن ها انتقال نیرو یا تبدیل نیروست.



تحلیل خرپا با روش مفصل‌ها (اتصالات)

۱)ترسیم نمودار آزاد جسم خرپا(برای تعیین واکنش در تکیه گاه ها)

۲)انتخاب مفصل اول(انتخاب مفصل اول یکتا نیست،با تعیین واکنش در تکیه گاه های خرپا هر یک از دو مفصل رابـه عنـوان نقطـه شروع تحلیل میتوان انتخاب کرد).

۳) ترسیم نمودار آزاد مفصلی که فقط دو عضو را به هم متصل کرده است.

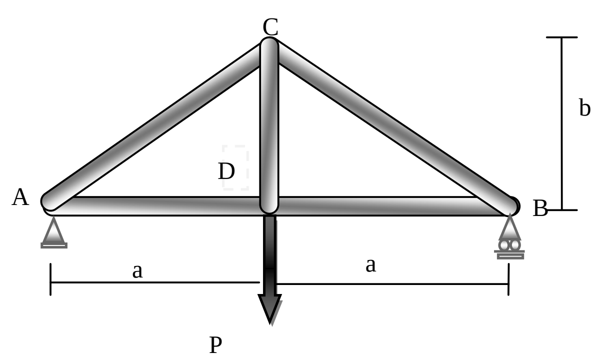
۴)) ترسیم نمودار آزاد مفصلی که فقط نیروها در دو عضو اتصالی مجهولند.

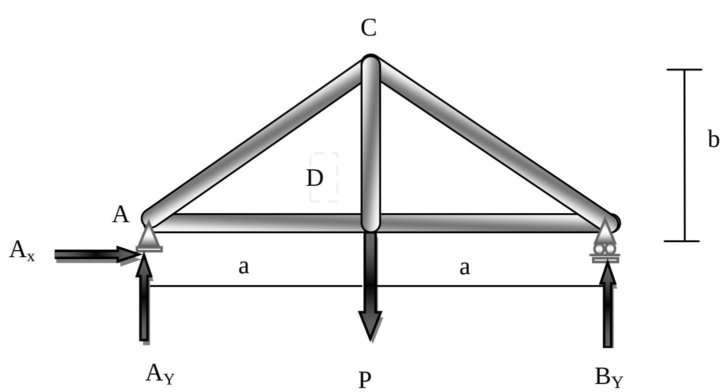
۵)تکرار این روش تا نیروها درتمام عضوهای خرپا تعیین شوند.

مثال:

با استفاده از روش مفصل ها،نیرو درهریک از عضوهای خرپای نشان داده شده را تعیین کنید وبگوییدهرعضوتحت کشش اس فشار؟

نکته:درخرپادونوعنیروداریم:فشاری (compression)یاکششی (tension)که به اختصاربا (C)و (T)نشان می دهیم.هنگامی که نیروداخل گره رود فشاری (C)است وهنگامی که نیرو از گره خارج شود کششی (T) است.



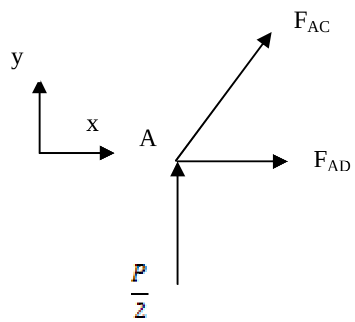


$$+\longrightarrow \sum F_x=0 \Longrightarrow A_X=0$$

$$\sum M_A=0 \Longrightarrow -P\times a+B_y\times 2a=0 \Longrightarrow B_y=\frac{P}{2}$$

$$+\uparrow \sum F_y=0 \Longrightarrow A_y=\frac{P}{2}$$

در دیاگرام جسم آزاد A خواهیم داشت:



دو معادله داریم چون سؤال در صفحه است .

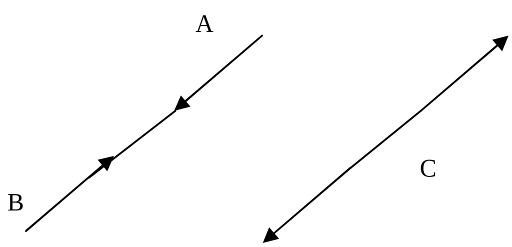
$$+\uparrow \sum F_y=0$$

$$\frac{P}{2}+F_{AC}\sin\theta=0 \Longrightarrow F_{AC}=-\frac{P}{2\sin\theta} \qquad \text{(C)}$$

$$+\longrightarrow \sum F_X=0 \Longrightarrow$$

$$F_{AC}\cos\theta+F_{AD}=0 \qquad F_{AD}=+\frac{P}{2\sin\theta}\cos\theta \qquad \text{(T)}$$

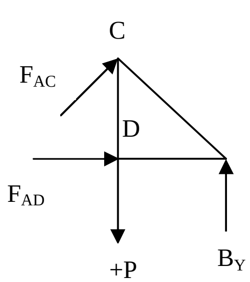
عضو c تحت کشش است .



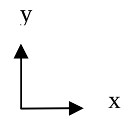
$F_{AC} > 0$

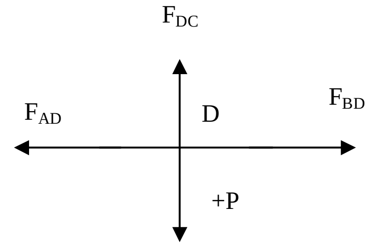
لازم به ذکر است تحلیل باید از گره های معین شروع شود.

بقیه شکل:



دیاگرام آزاد جسم D:





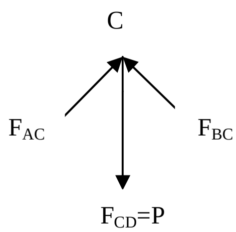
$\sum F = 0$

$\sum F_X = 0$

$\Rightarrow F_{BD} - F_{AD} = 0$

$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{CD} = P \qquad (T)$

دیاگرام آزاد جسم C:



$\sum F_C = 0$

$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow F_{BC} = F_{AD}$

لازم به ذکر است تحلیل گره(B) برای چک کردن درستی جواب ها مفید است ولی لازم نیست که آن را تحلیل کنیم.

خرپای معین (از نظر داخلی و خارجی):

هرخرپای ساده ای که دارای تکیه گاه ساده است مقید کامل ومعین استاتیکی است

اگر تعداد گره هادر خرپا برابر j و تعداد عضوها m و تعداد عکس العمل ها r باشد. داریم تعداد معادلات 2j است و تعـداد مجهـولات m+r است پس اگر:

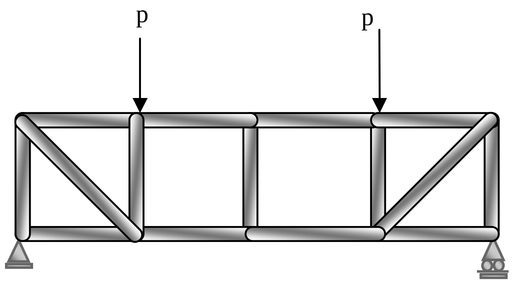
1) m+r < 2n ⟸ مقید ناقص (چون برخی از معادله ها برقرارند)

2) m+r > 2n ⟸ نامعین (چون بعضی مجهولات را نمی توان تعیین کرد)

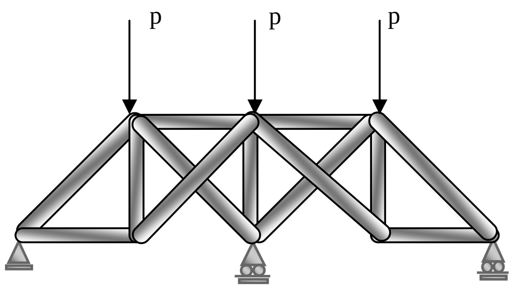
3) m+r=2n ⟸ تعداد معادلات و مجهولات با هم برابرند البته نه به این معنی که میتوان تمام مجهولات را حل کرد یا تمام معادلات برقرار میشوند برای این که خرپا مقید کامل است یا ناقص باید بررسی کرد که آیا میتوان تمام واکنش ها ونیرو ها در تمام عضو ها را تعیین کرد یا نه؛اگر میتوان خرپا مقید کامل ومعین استاتیکی است.

$m + r - 2j =$ درجه نامعین

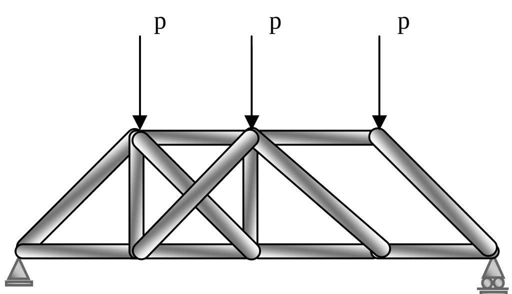
مثال: سازه های نشان داده شده را بر حسب مقید کامل،مقید ناقص،مقید نادرست طبقه بندی کنید.(آن هایی که مقید کاملندبر حسب معین ونامعین طبقه بندی کنید).



خرپای ساده با $r=3$، $m=16$، $n=10$ بنابراین $m+r=19 < 2n=20$ در نتیجه سازه مقید ناقص است.



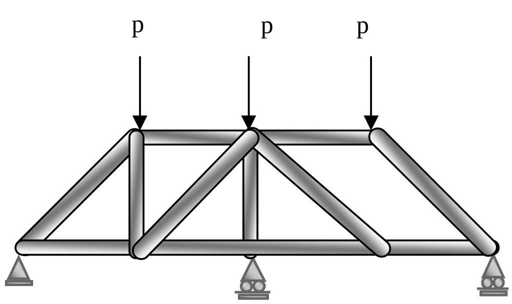
خرپای ساده با $r = 4$، $m=13$، $n=8$ بنابراین $r+m=17 > 2n=16$ در نتیجه مقید ولی نامعین است.



خرپای غیرساده با $r = 3$، $m=13$، $n=8$ بنابراین $r + m = 16 = 2n$

$$\sum M_A=aF_1\neq 0$$

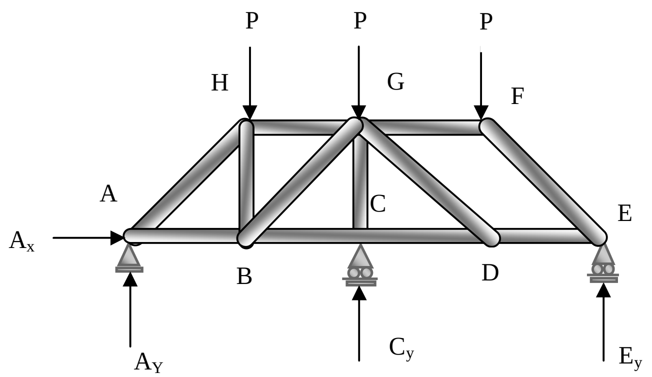
بنابراین سازه قید نامناسب است.

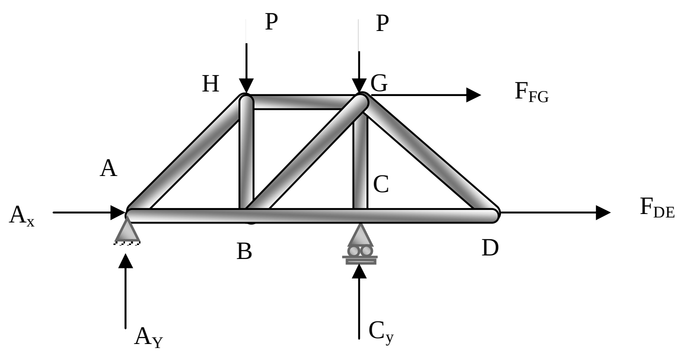


خرپای غیر ساده با $r = 4$، $m = 12$، $n = 8$ بنابراین $r + m = 16= 2n$

بررسی برای معین بودن:

یک بار می توان مفصل F به ازای نیروهای در FG،EF ومفصل E به ازای E_y ونیرو در DE حل کرد.

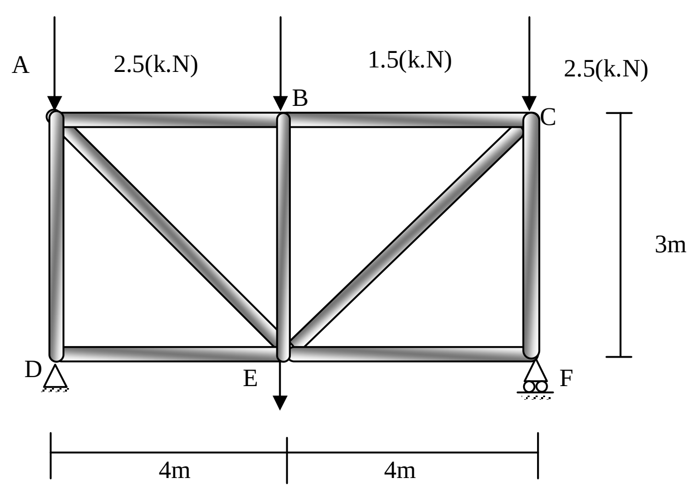




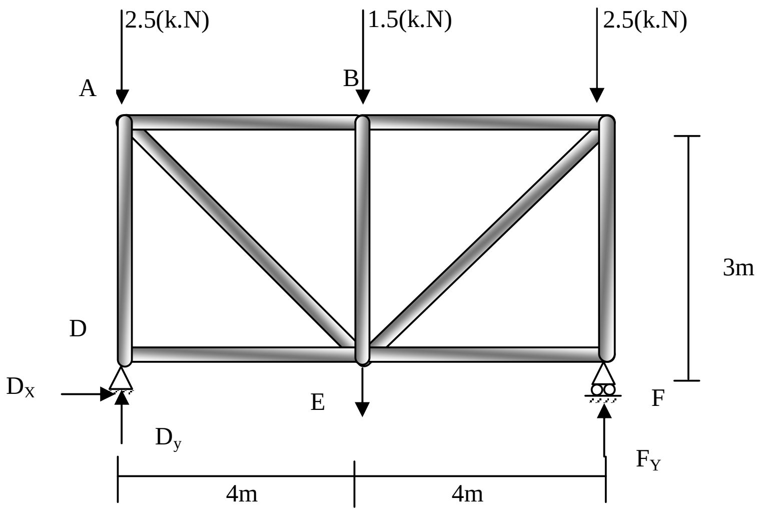
این سطوح یک خرپای ساده ABCDGH با

$R = 3$ ،$m = 9$، $n = 6$ بنابراین $r + m = 12 = 2n$ سازه به طور کامل مقید ومعین است.

مثال: با استفاده از روش مفصل ها،نیرو درهریک از عضوهای خرپای نشان داده شده را تعیین کنید وبگویید هر عضو تحت کشش است یا فشار؟



دیاگرام آزاد جسم :   C



خرپای فوق معین است زیرا:

$m=9 \quad r=3 \quad j=6 \qquad\qquad m + r = 2J$

براثر تقارن در بارگذاری داریم:

$\xrightarrow{+} \sum F_X = \mathbf{0} \Longrightarrow$

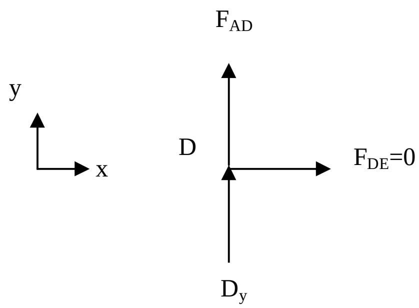
$\mathbf{D_x = 0}$

$+\uparrow \sum F_Y = 0$

$\Longrightarrow \quad \mathbf{D_y = F_y}$

درگره D داریم:

$D_y + F_y = 8$



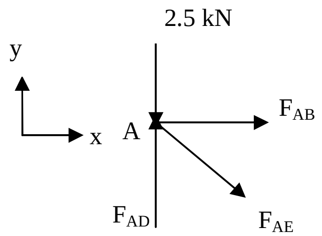
$\Longrightarrow$

$D_y = F_y = 4$ k N

$F_{AD} = 4$ k.N$= D_y = F_{CF}$ (C)

$F_{DE} = 0$

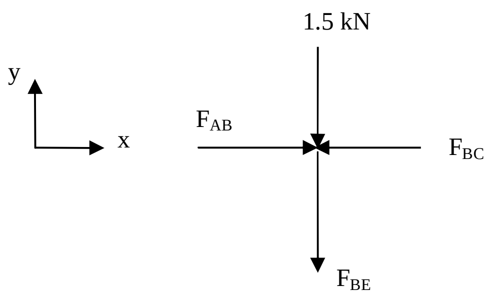
در گره A داریم:



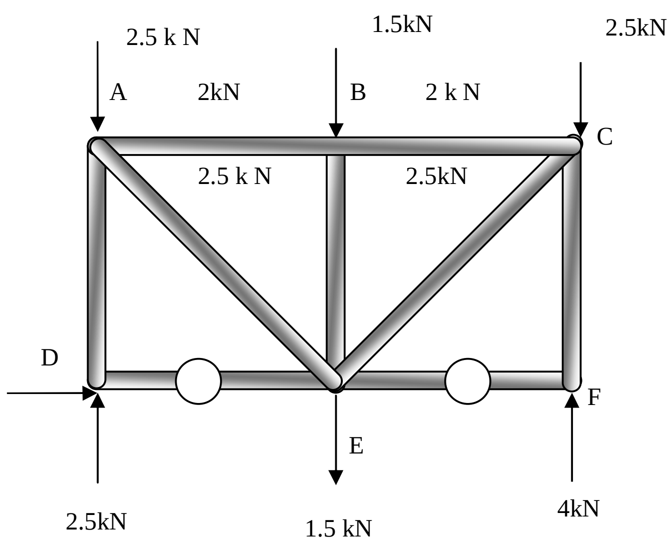
$$F_{AE} \times \frac{3}{5} + 4 - 2.5 = 0 \Longrightarrow F_{AE} = -2.5 \quad \text{kN} \quad (\text{T})$$

$$F_{AB} - F_{AE} \times \frac{4}{5} = 0 \Longrightarrow F_{AB} = 2 \quad \text{kN}$$

در گره B داریم:



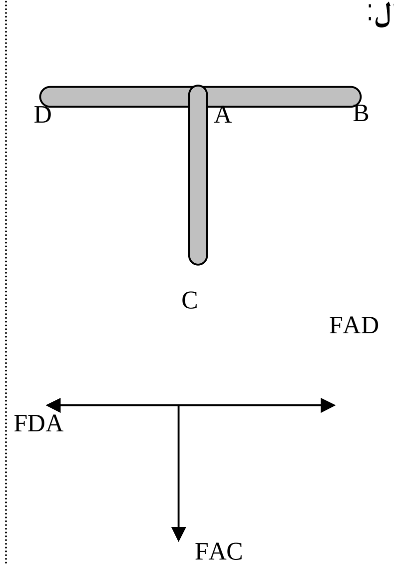
$F_{BE} = 1.5$ K N



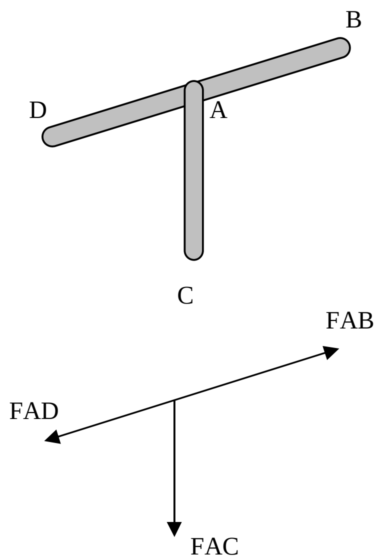
حالات خاص گره‌ها:

اگرسه عضو در گره به هم متصل شوند و نیروی خارجی به مفصل وارد نشود و دو عضو در یک راستا باشند عضـو دیگـر عضـو صفر نیرویی گویند .

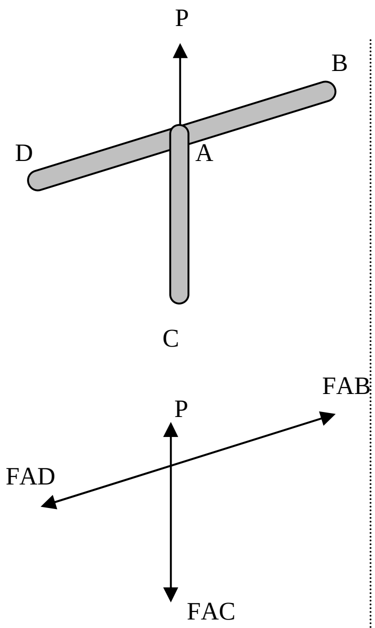
مثال:



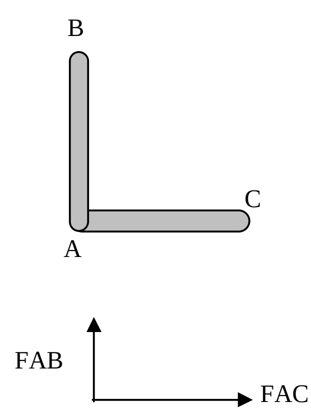
FAC=0
FDA=FAB



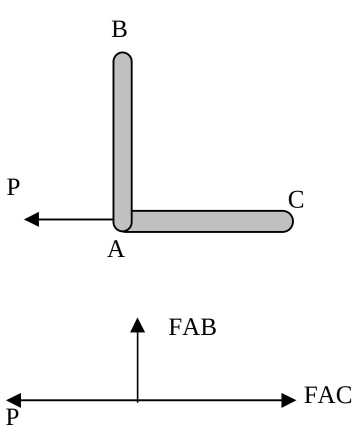
FAC=0
FDA=FAB



FAC=P
FDA=FAB

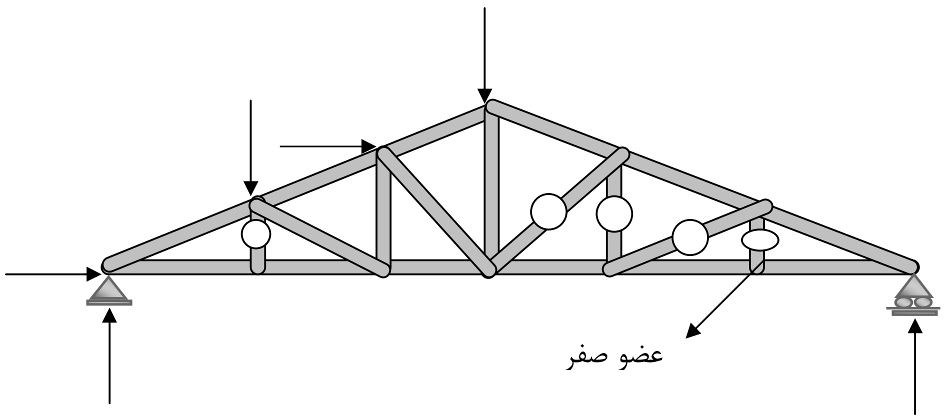


FAB=0
FAC=0



FAC=P
FAB=0

مثال: عضوهای صفر نیروی را نشان دهید.



تحلیل خرپا به روش برش

روش قطع یا روش برش:(section)

برای تعیین نیروها در تمام عضو های یک خرپای سادهروش مفصل ها که قبلا بررسی شد معمولا بهترین روش است ولی برای تعیین نیرو در یک عضو تنها یا در چند عضو اندک یک خرپای ساده،روش مقاطع بهتر است.

۱))ترسیم نمودار آزاد جسم خرپا(برای تعیین واکنش در تکیه گاه ها)

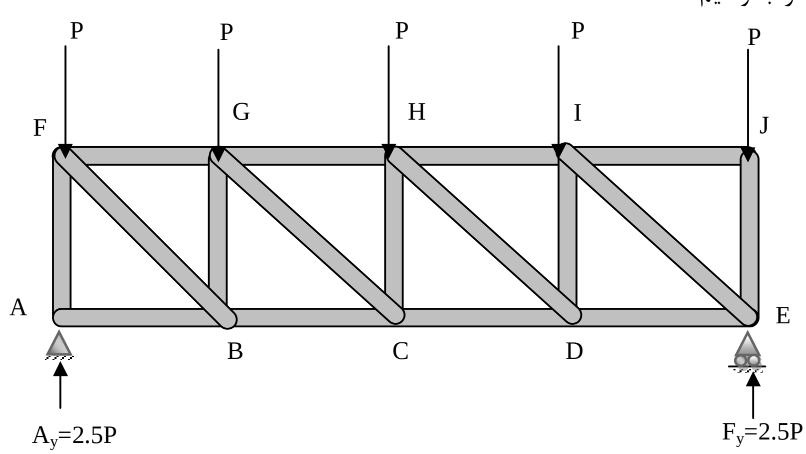
۲)عبورخط برش ازسه عضو خرپا ،که یکی ازآنها عضو مورد نظر است.پس از حذف این عضوها خرپا به دوسمت جداگانه تقسیم می شود.

۳)انتخاب یکی از دو قسمت خرپا وترسیم نمودار جسم آزاد آن

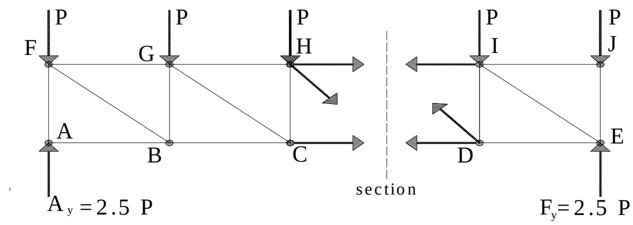
۴)نوشتن سه معادله تعادل

درعبورخط برش باید دقت شودکه خط برش فقط سه عضوراقطع کندزیراباحل معادله های تعادل نمی توان بیش ازسه مجهول را حل کرد.

مثال: فرض کنیم F_{HD} را بخواهیم :



برش روبرو میتواند مقادیر F_{HD} بدهد .



سازه باید دارای دو نیمه در تعادل باشد.

از تعادل در صفحه سه معادله و سه مجهول و F_{HD} بدست می آید.

باید توجه داشته باشیم که از آنجایی که سه معادله تعادل داریم برش ما باید به گونه ای باشد که سه نیروی مجهول داشته باشیم .

ضمنا می توانستیم بجای نیمه ی سمت چپ نیمه سمت راست را مورد نظر قرار دهیم.

با برش فوق داریم:

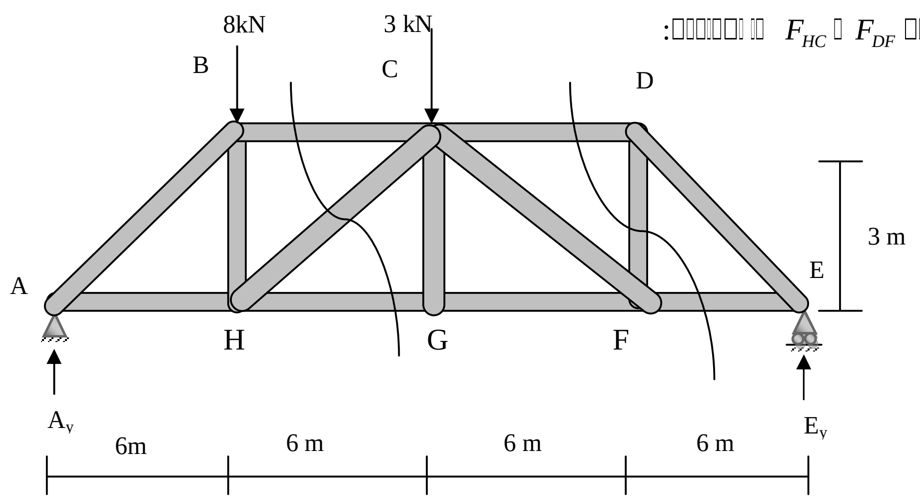
$$+\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Longrightarrow$$

$$F_{HD} \sin\theta - 2P + 2.5P = 0 \Longrightarrow \qquad F_{HD} = \frac{-0.5P}{\sin\theta}$$

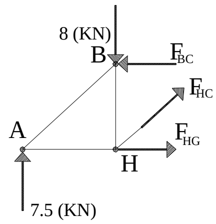
$$\sum M_A = 0$$

مثال: [illegible] F_{DF} [illegible] F_{HC} [illegible]:



برش روبرو می تواند مقادیر F_{HC} بدهد.

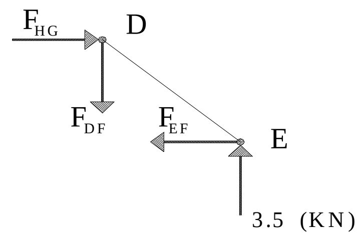
سازه باید دارای دو نیمه در تعادل باشد.



از تعادل در صفحه سه معادله و سه مجهول داریم و F_{HC} بدست می آید.

ضمنا می توانستیم بجای نیمه ی سمت چپ نیمه سمت راست را مورد نظر قرار دهیم.

برش روبرو می تواند مقادیر F_{DF} بدهد.



$$+\uparrow\sum \mathbf{M_E} = \mathbf{0} \quad A_y * 24 + 8 \times 18 + 3 \times 12 = 0 \Longrightarrow A_y = 7.5 \quad kN$$

$$\Longrightarrow (+)\sum \mathbf{F_y} = \mathbf{0} \qquad E_y = 3.5 \ KN$$

با برش سمت چپ داریم:

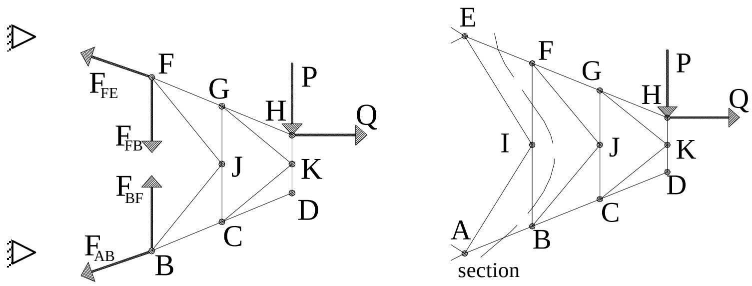
$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 7.5 - 8 + F_{HC} \times \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow F_{HC} = \frac{5}{8} \ (KN) \ (T)$$

با برش سمت راست داریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Longrightarrow F_{DF} = 3.5 \quad kN \quad (T)$$

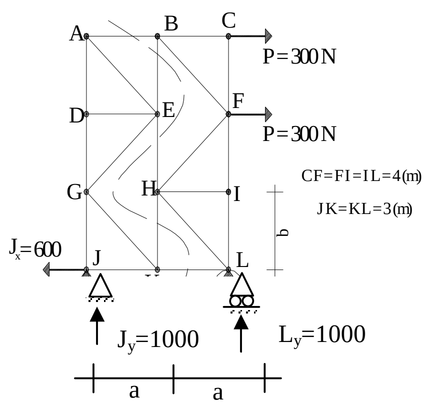
نکته:گاهی ممکن است برای بدست آوردن نیروی داخلی مورد نظر چند برش قبل از رسیدن به عضو مورد نظر بزنیم تا مجهولات برش اصلی کاهش یابد.

□□□:



$\odot \sum M_F = 0 \Rightarrow$ بدست می آید F_{AB} .

مثال:

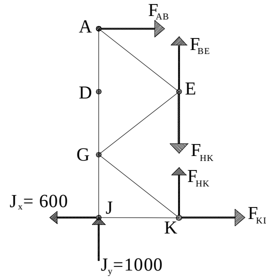


M = 21 r = 3 j = 12 m + r = 2j :خرپای پایدار معین

$$L_y \times (2\times 3) = (2\times 4)\times p + (3\times 4)\times p$$

$$\Rightarrow L_y = \left(\frac{5\times 4}{2\times 3}\right)\times p = 1000 \quad (N)$$

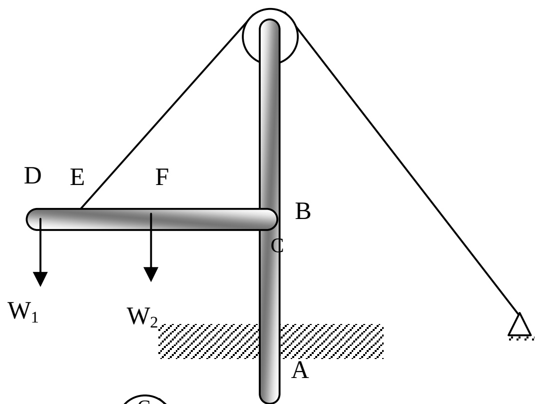
$$-j_y + L_y = \circ \rightarrow j_y = \left(\frac{5\times 4}{2\times 3}\right)\times p = 600 \quad (N)$$

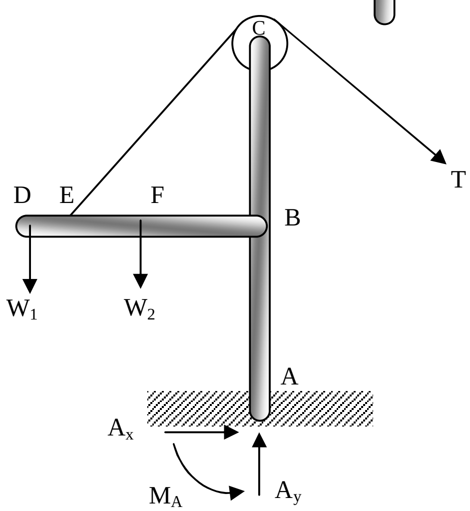


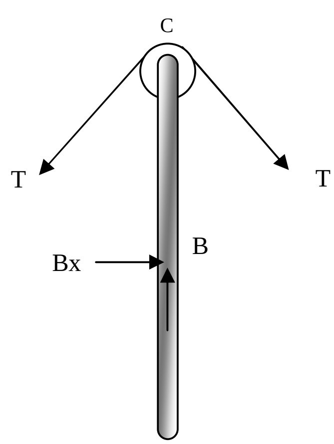
$$\odot \sum M_K = 0 \rightarrow j_y \times (3) - F_{AB} \times (3\times 4) = 0 \Rightarrow F_{AB} = 250 \ (N) \ (T)$$

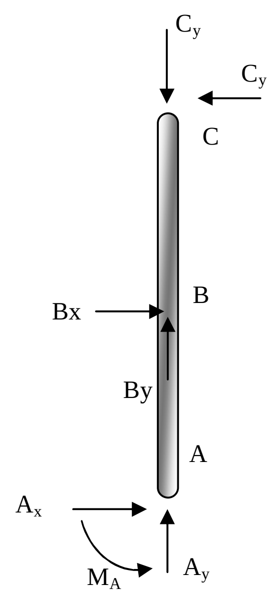
قاب هاوماشین ها:

برخلاف خرپاها که سازه هایی هستند با عضوهای صاف و مستقیم و دو نیروئی، قاب ها و ماشین ها سازه هایی هستند که حداقل یکی از آن عضوها از دو نیرویی بیشتر باشد.عضوچندنیرویی طبق تعریف عضوی است که سه یا تعداد بیشتری نیرو وسه یا تعداد بیشتری کوپل به آن وارد می شود.قاب سازه ای است که برای تحمل بار طراحی می شود ومعملا در محل خود ثابت است.ماشین سازه ای است که دارای قطعات متحرک است وبرای تبدیل نیرو یا کوپل ورودی یا کوپل خروجی معینی طراحی می شود.برای تعیین نیرو های وارد بر هر یک از ایضای سیستم آن را منزوی می کنیم و دیاگرام آزاد آن را رسم می کنیم ومعادلات تعادل را برای آن می نویسیم.هنگام نمایش نیروها در دیاگرام آزاد اعضای مختلف بای عمل و عکس العمل را با دقت رعایت می کنیم.





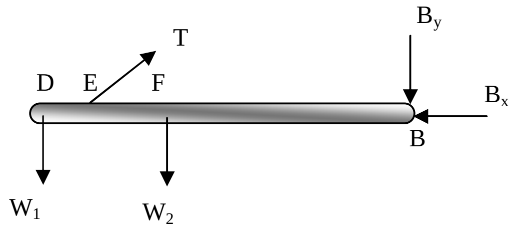


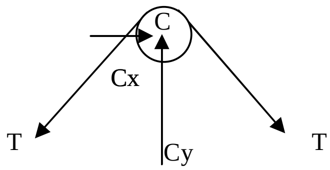


□- دیاگرام آزاد عضو AC بدون قرقره

۲- دیاگرام آزاد عضو AC با قرقره

۱- دیاگرام آزاد قاب

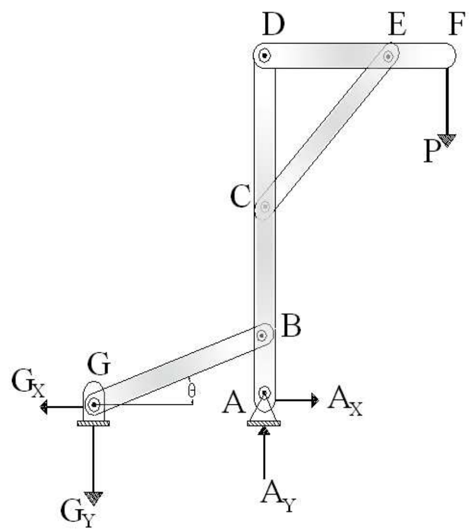




□- دیاگرام آزاد عضو DB

۴- دیاگرام آزاد قرقره

:□□□



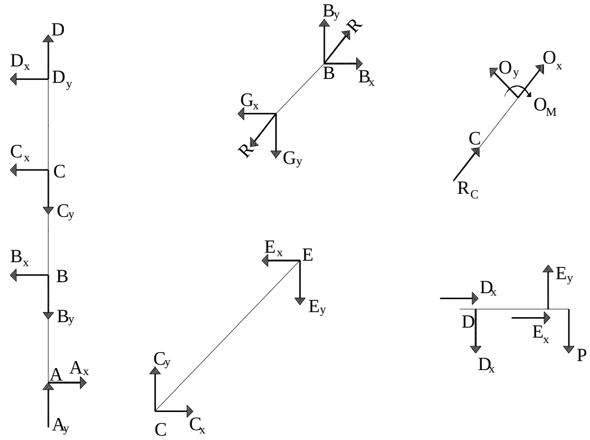
$$Tan\,\theta=\frac{G_y}{G_x}\Rightarrow G_x=\frac{G_y}{Tan\,\theta}$$

$$\oplus \odot \sum M_D=0\Rightarrow C_x=?\ \&\ C_y=?$$

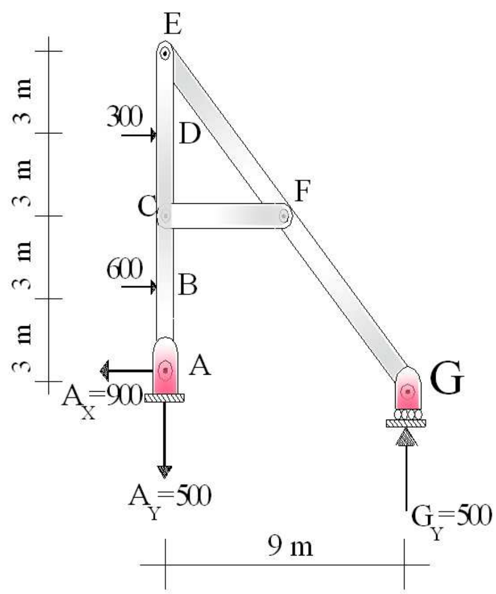
$$\oplus\uparrow\sum F_y=0\Rightarrow O_y=0$$

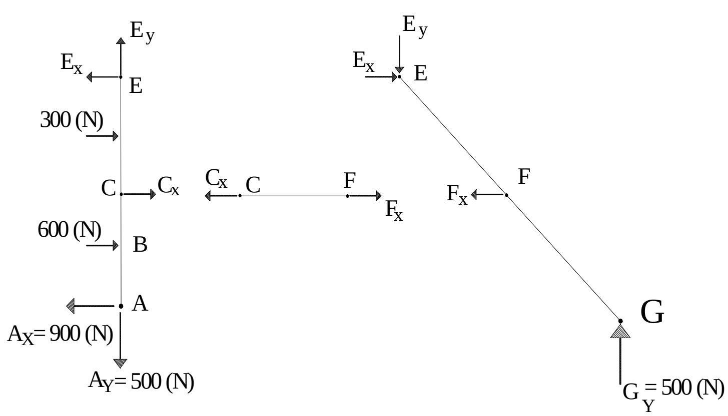
$$\oplus\ q\sum M_O=0\Rightarrow O_M=0$$

$$\oplus \_\_\sum F_X=0\Rightarrow R_C+O_X=0\Rightarrow O_X=-R_C$$



□□□: نیروهای داخلی را بیابید .





ابتدا نیروهای عکس العمل را محاسبه می کنیم سپس نیروهای داخلی :

$$\oplus \odot \sum M_A = 0 \Rightarrow G_y = P \Rightarrow 600\times(3)+300\times(9) = G_y\times(9) \Rightarrow G_y = 500\,(N)$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = -500\,(N)$$

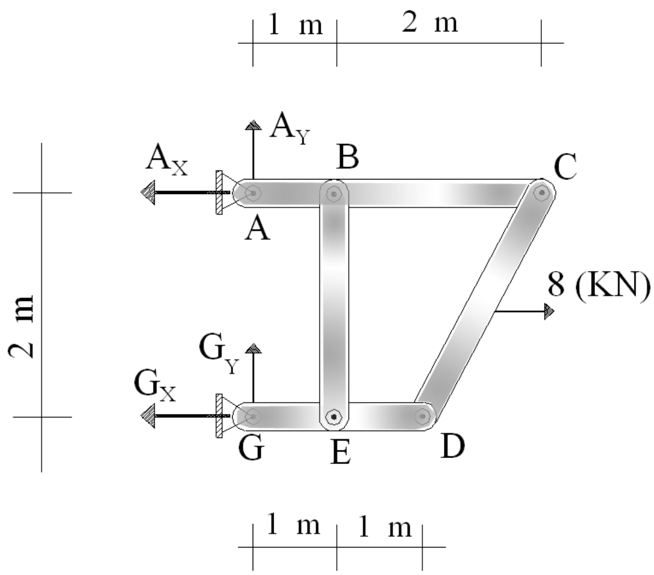
$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_X = 900\,(N)$$

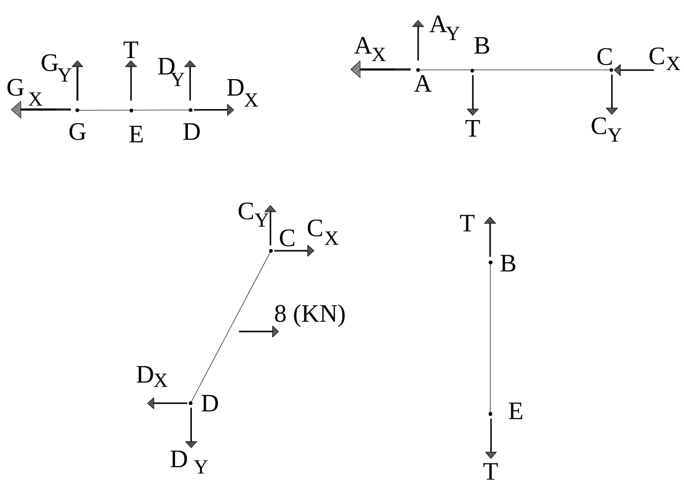
$$\oplus \odot \sum M_C = 0 \Rightarrow -900\times(6)+600\times(3)-300\times(3)-E_y\times(6) = 0 \Rightarrow$$

$$E_y = -750\,(N)$$

نکته: در قاب‌ها نیروها می‌توانند در نقطه ای به غیر از مفصل نیز وارد شوند.

□□□:

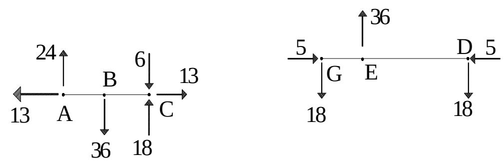


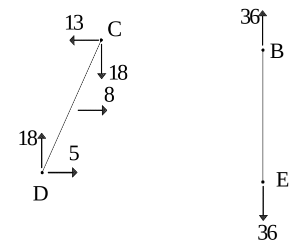


9 معادله و 9 مجهول زیرکه قابل حل می باشد .

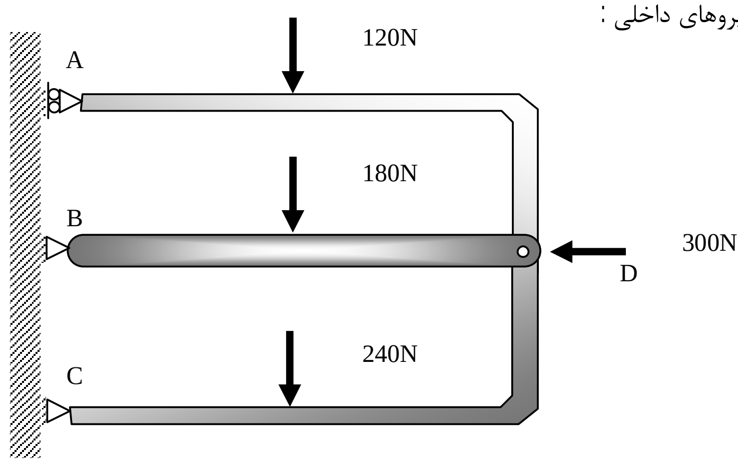
$$A_x, A_y, T, C_x, C_y, D_x, D_y, G_x, G_y$$

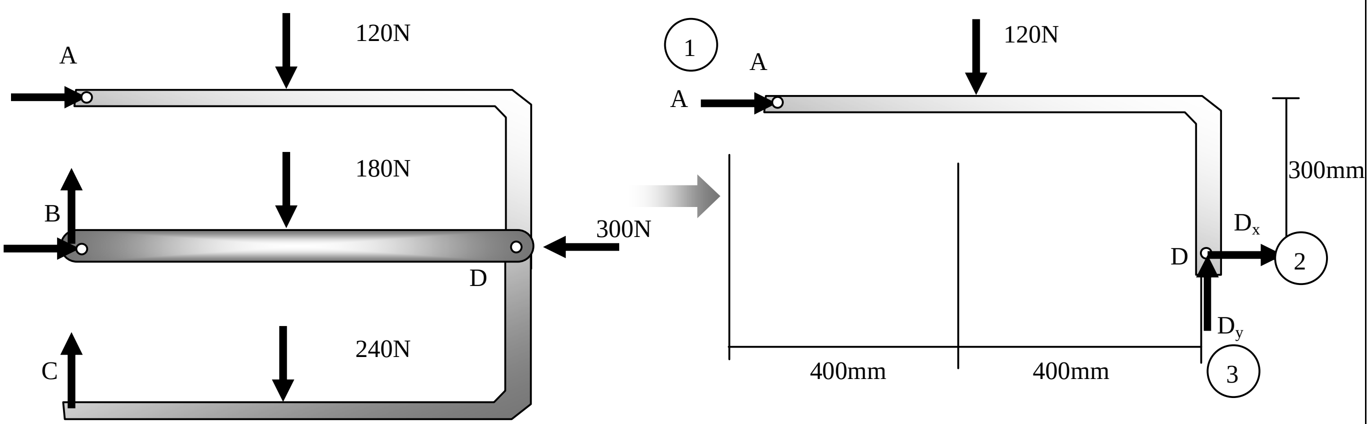
اگرنیروی (KN) 6 روی گره C قرارگیرد در این صورت دیاگرام جواب ها پس از حل معادلات به صورت زیر در می آیند .





□□□: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی :

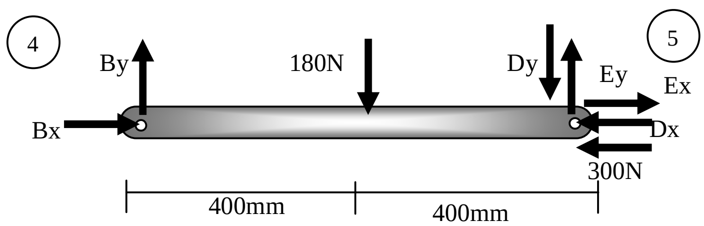




$$(1)\quad +\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow A = 160 \rightarrow$$

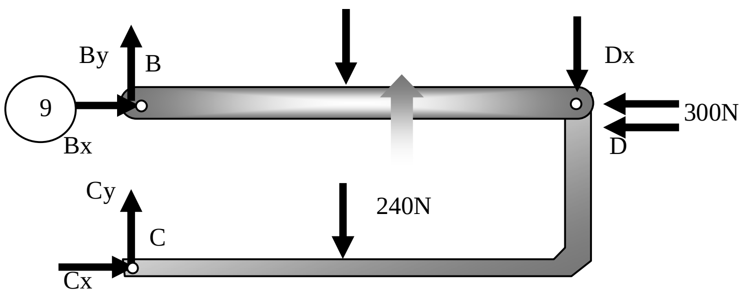
$$(2)\quad +\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 160 \leftarrow$$

$$(3)\quad +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow D_y = 120 \uparrow$$



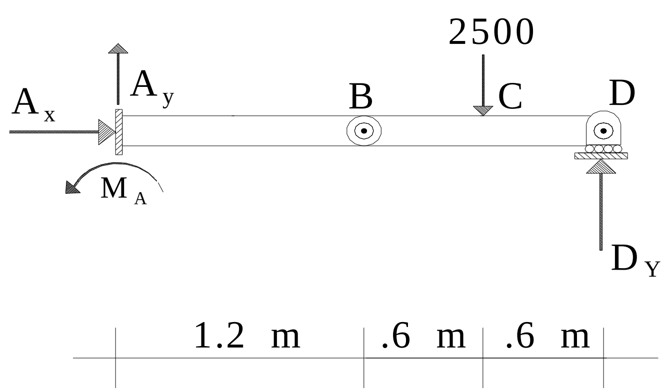
$$(4)\quad +\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow B_y = 90 \uparrow$$

$$(5)\quad +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow E_y = 210 \uparrow$$

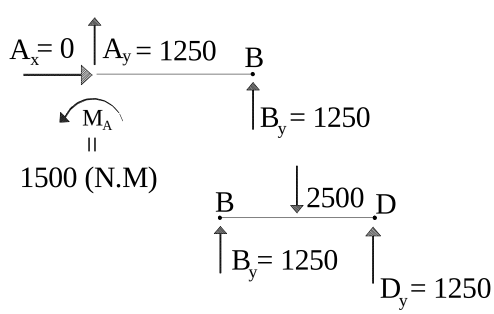


$$(9) + \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 740 \leftarrow$$

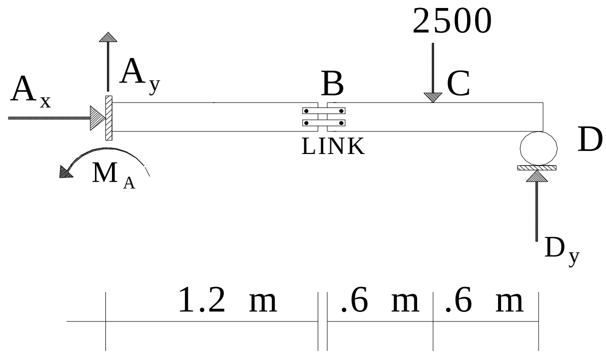
□□□: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی :



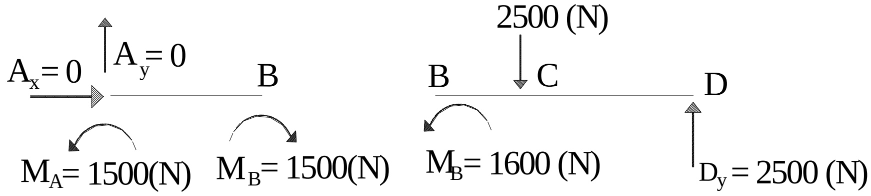
پس از حل کردن داریم :



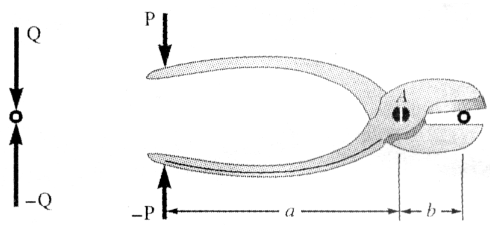
□□□: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی :



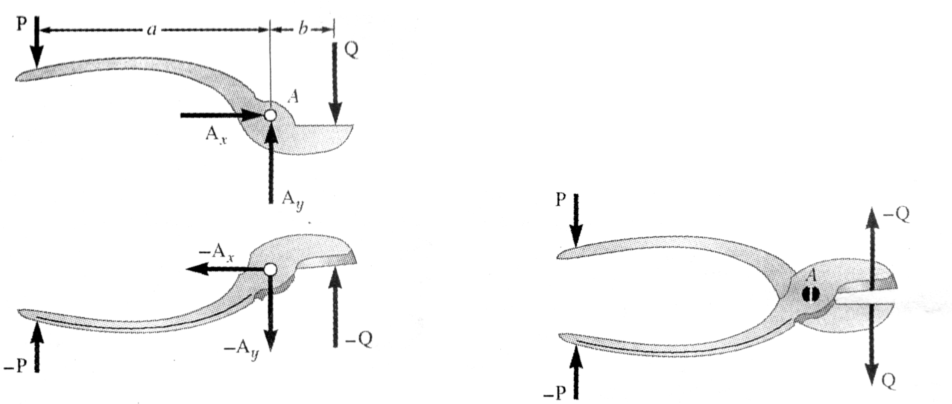
در واقع چون دو نیرو با هم فاصله دارند یک کوپل ایجاد می کنند .



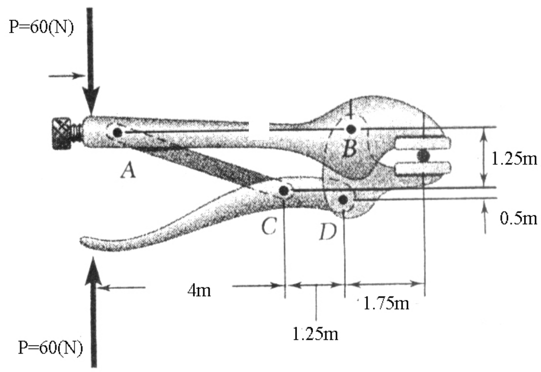
:□□ □□□□□



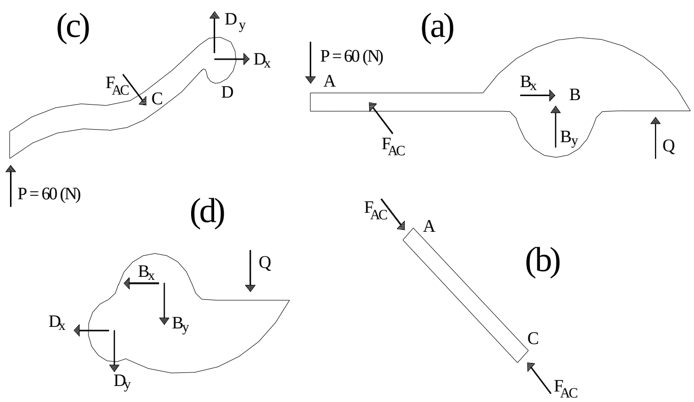
$$\oplus \ \odot \ M_B = 0 \Rightarrow (b)\times Q - (a)\times P = 0 \Rightarrow Q = P\times {}^{a}\!/\!_{b}$$



مثال: مطلوب است تعیین نیروهای وارده بر سیستم در E , F .



توجه به شکل خواهیم داشت:



در دیاگرام (C) داریم:

$$\oplus \odot \sum M_D = 0$$

$$(-60)\times(5.25)+F_{AC}\times\frac{1.25}{\sqrt{(3.5)^2+(1.25)^2}}\times(1.25)-F_{AC}\times\frac{(3.5)}{\sqrt{(3.5)^2+(1.25)^2}}\times(0.25)=0$$

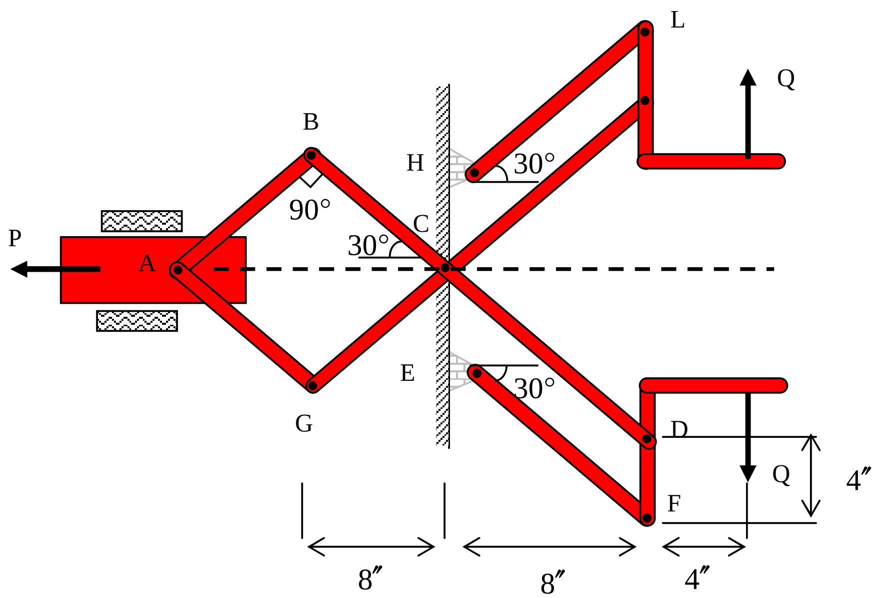
$$\Rightarrow \frac{F_{AC}}{\sqrt{(3.5)^2+(1.25)^2}}=458.2\,(N)$$

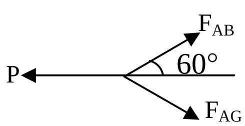
[illegible] (a) [illegible]:

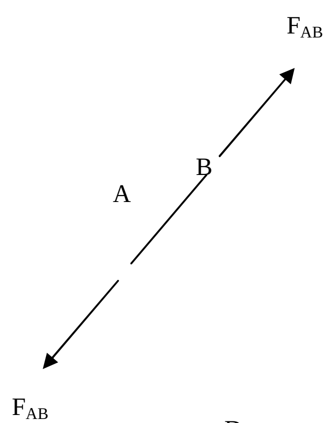
$$\oplus \odot \sum M_B = 0$$

$$Q\times(1.5)+60\times(5.5)-F_{AC}\times\frac{(5)\times(1.25)}{\sqrt{(1.25)^2+(3.5)^2}}=0\Rightarrow Q=1689\,(N)$$

مثال: مکانیزم نشان داده شده کنترل انگشتهای یک روبات را نشان می‌دهد رابطه بین نیروی P و نیروی نگهدارنده Q را.

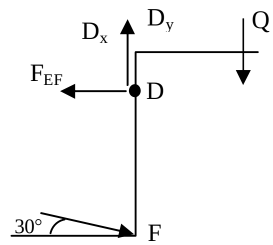






$$P = 2F_{AB}\cos 60°$$
$$F_{AB} = P$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0:$$
$$-\ Q(4) + \left(F_{EF}\cos 30\right)(4) = 0$$
$$F_{EF} = \frac{Q}{\cos_{30}} = 1.15Q$$
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0:$$
$$-D_x + F_{EF}\cos 30 = 0$$
$$D_x = F_{EF}\cos 30$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0:$$
$$D_y - F_{EF}\sin 30 - Q = 0$$
$$D_y = 1.575Q$$



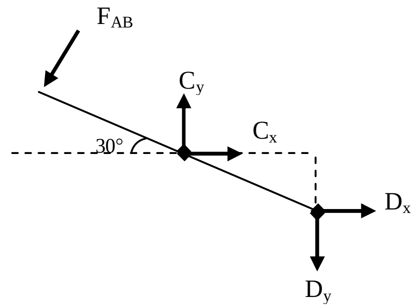
$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0:$$

$$+F_{EB}(9.238) - 8D_y + D_x(8\tan 30) = 0$$

$$+P(9.238) - 8(1.575Q) + (4.619)Q = 0$$

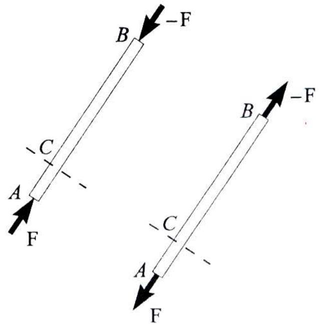
$$+9.238 - 7.98Q = 0$$

$\boxed{Q = 1.157P}$, $\boxed{P = 0.866Q}$

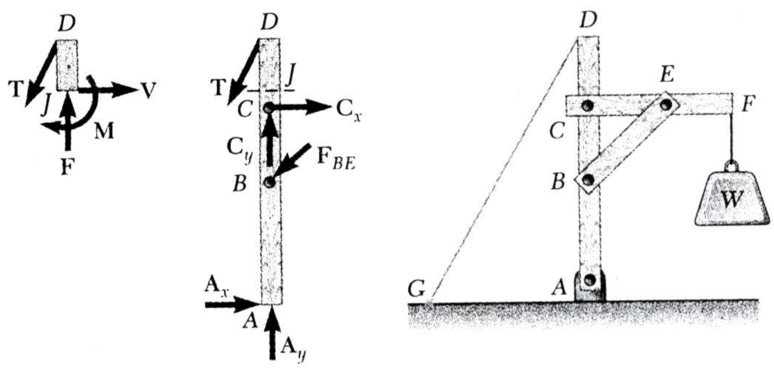


فصل هفتم
نیروها در تیرها و کابلها

عضوهای خرپا - نیروهای دو جهت محور عضو ۰- عضو دو نیروئی

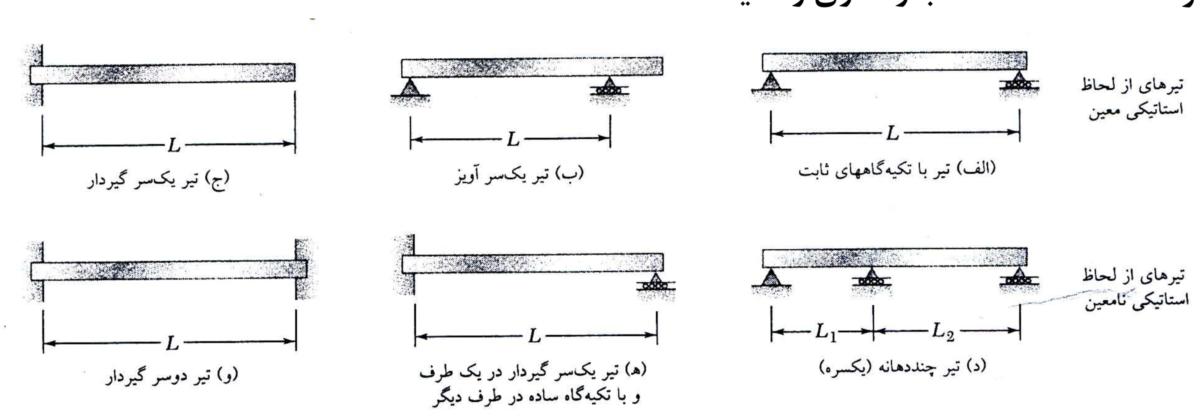


عضوهای قاب – در حالت کلی عضوهایی با نیروهای مانند محوری و برشی و خمشی



(ج) (ب) (الف)

تیرها – حالات مختلف با رگذاری و تکیه‌گاه‌ها



می خواهیم نیرو های داخلی در نقطه c از این تیر را بدست بیاوریم.

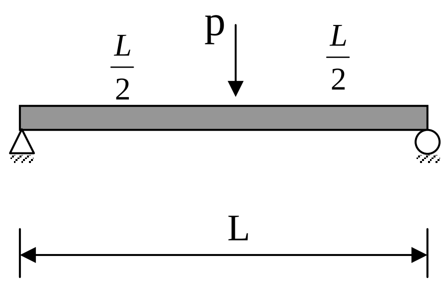
اول به $+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow R_B =$

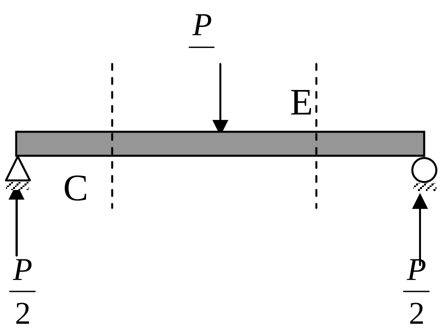
$+\uparrow \sum f_g = 0 \Rightarrow R_A =$

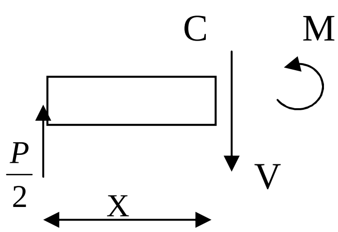
دوم $+\uparrow \sum f_y = 0 \Rightarrow V =$

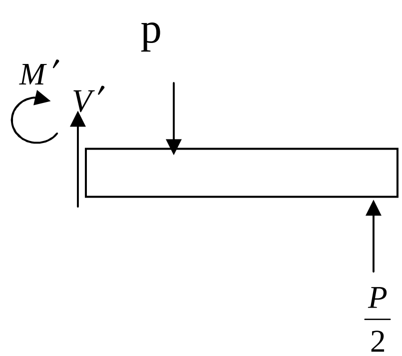
$+\circlearrowleft \sum Mc = 0 \Rightarrow M =$

– دیاگرام برش ها و گشتاورها (خمش ها)









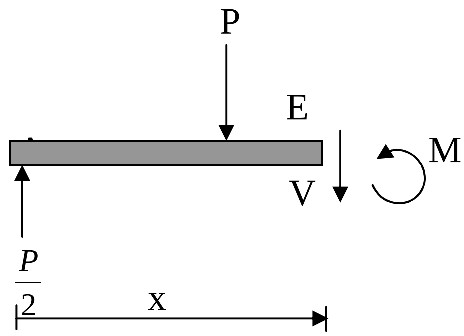
: شکل AC

$$+\uparrow \quad \sum F_y = 0 \qquad \frac{P}{2} - V = 0 \quad V = \frac{P}{2}$$

$$+\uparrow \quad \sum M_C = 0 \qquad M = \frac{P}{2}\,x$$

$$@ \quad x = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{2} \quad , \quad M = 0$$

$$@ \quad x = \frac{L}{2} \Rightarrow V = \frac{P}{2} \; , \quad M = \frac{PL}{4}$$



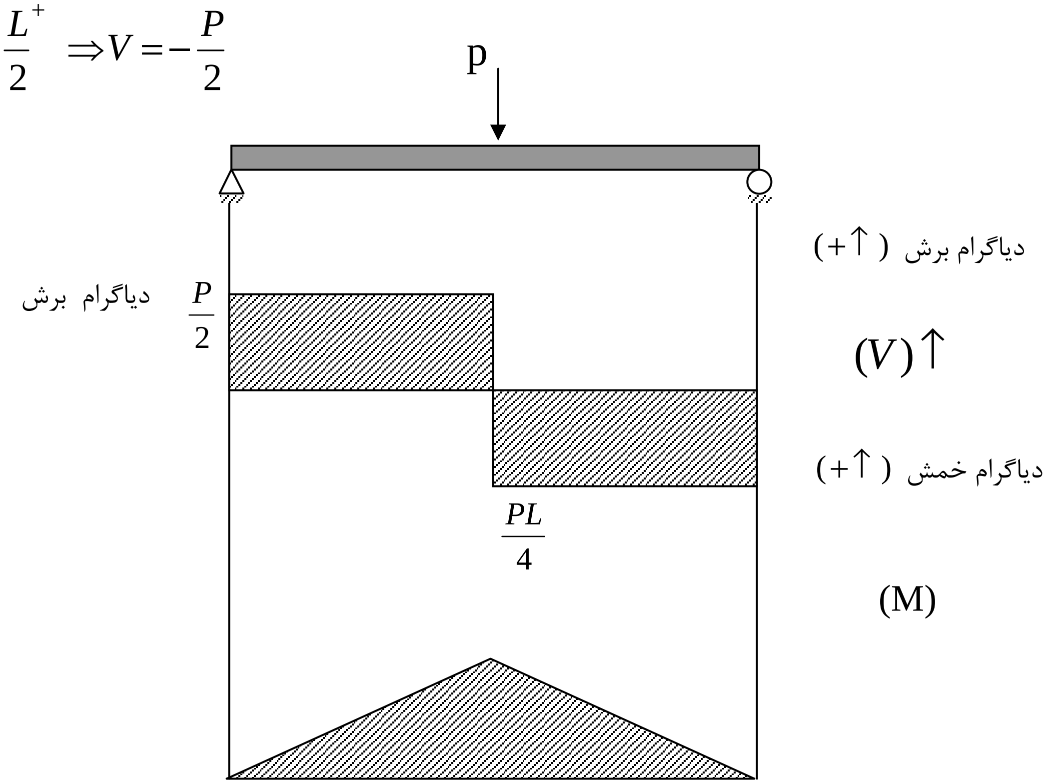
شکل AE : $+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} - P - V = 0 \qquad V = -\frac{P}{2}$

$$+\uparrow \sum M_C = 0 \quad M = P(L-x)/2$$

$$@\ x = \frac{L}{2} \Rightarrow M = \frac{PL}{4} \qquad @\ x = L \Rightarrow M = 0$$

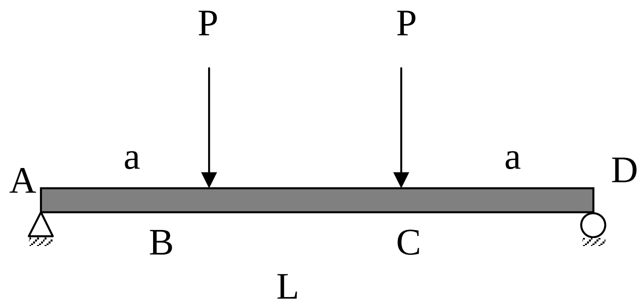
$$@\ x = \frac{L^-}{2} \Rightarrow V = \frac{P}{2} \qquad @\ x = L \Rightarrow V = -\frac{P}{2}$$

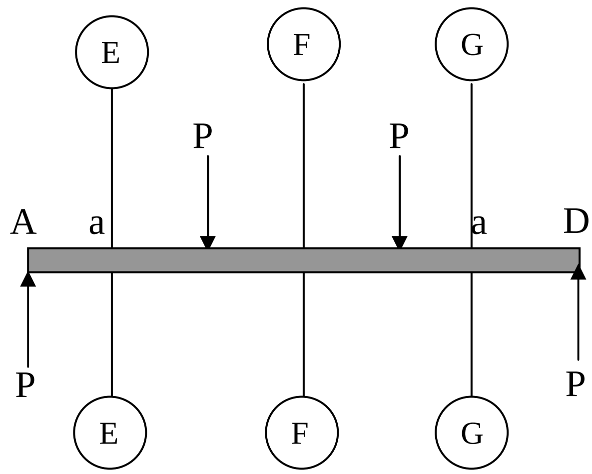
$$@\ x = \frac{L^+}{2} \Rightarrow V = -\frac{P}{2}$$

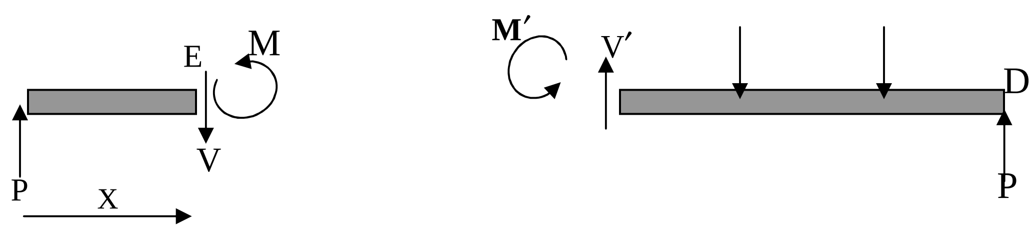


مثال :

نمودار خمش و برش تیر زیر را رسم کنید







$0 < x < a$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = p$

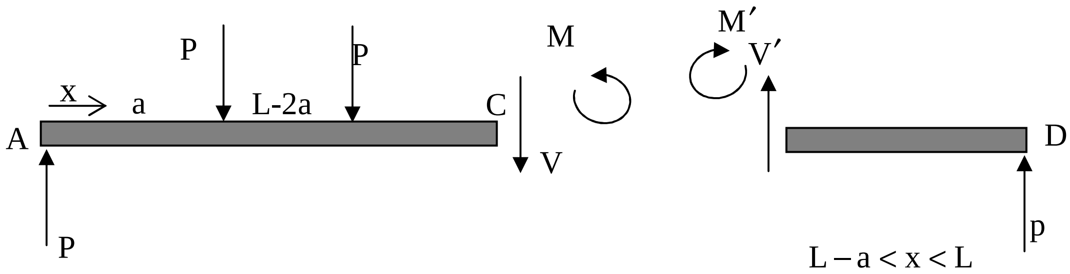
$+\circlearrowleft \sum M_E = 0 \Rightarrow M = Px$

$a < x < L - a$

$+\uparrow\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; V=o$

$+\curvearrowleft\sum M_E=0 \;\Rightarrow\; m=P(x)$

$L-a<L$



$+\uparrow\sum F_y=0 \;\Rightarrow\; V=-p$

$+\curvearrowleft\sum M_G=0 \;\Rightarrow\; m=P(L)-P(x)$

$m-Px+P(x-a)+P\left[x-(L-a)\right]=0$
$m-Px+Px-Pa+Px-P(L-a)=0$

$x=0 \;\Rightarrow\; V=P \;,\; m-0$

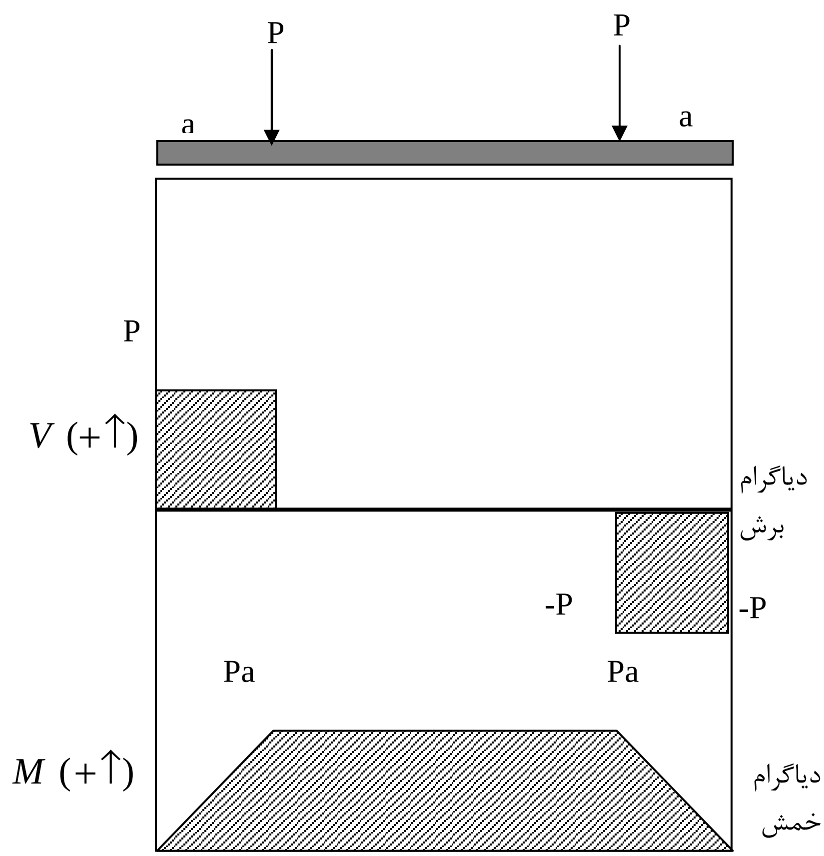
$x=a^- \;\Rightarrow\; V=P \;,\; m=Pa$

$x=a^+ \;\Rightarrow\; V=0 \;,\; m=Pa$

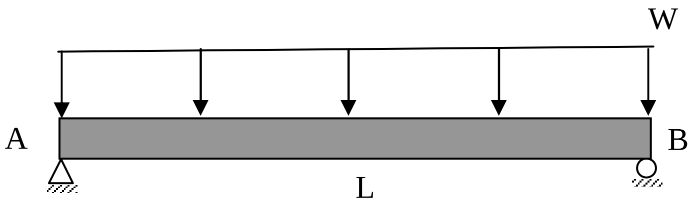
$x=(L-a)^- \;\Rightarrow\; V=0 \;,\; m=Pa$

$x=(L-a)^+ \;\Rightarrow\; V=0 \;,\; m=Pa$

$x=L \;\Rightarrow\; V=-\rho \;,\; m=0$

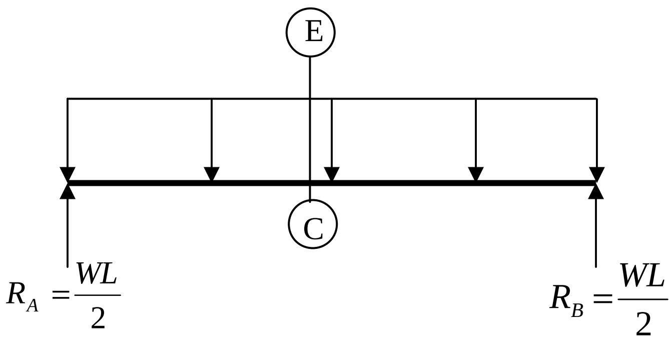


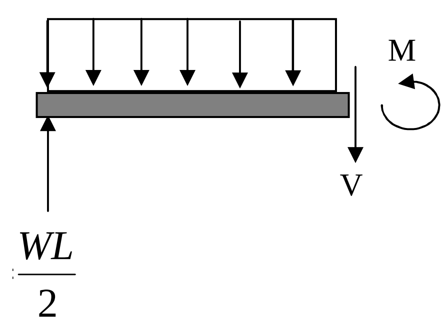
مثال : نمودار خمش برش تیر زیر را رسم کنید .

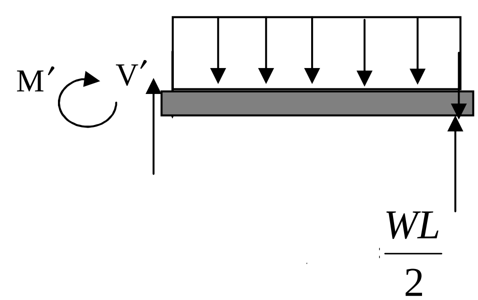


$$+\ \sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{WL}{2}$$

$$R_A = \frac{WL}{2}$$







$$+\uparrow \sum F_y \quad \Rightarrow \quad \frac{WL}{2} - WX - V = 0$$

$$V = W\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

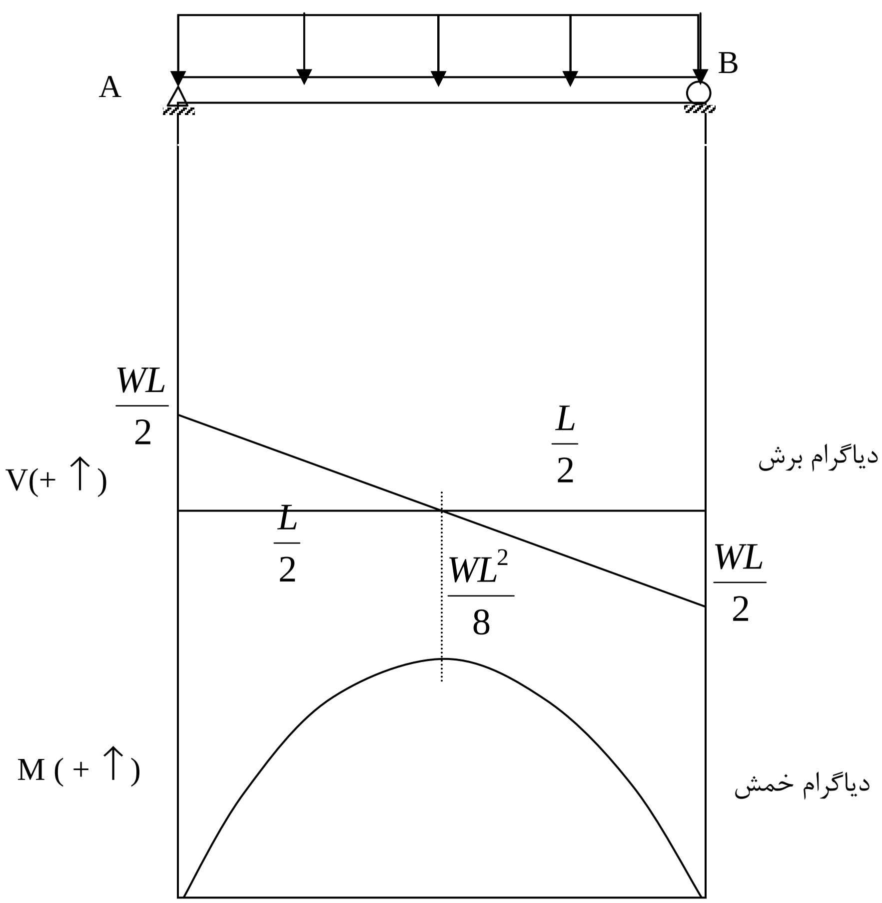
$$+\curvearrowleft \sum M_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{WL}{2}\,x - \frac{Wx^2}{2} + \mathrm{M} = 0$$

$$M = \frac{w}{L}\,(Lx - x^2)$$

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad V=\frac{WL}{2}\ ,\ M=0$$

$$x=\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad V=0\ ,\ M=\frac{WL^2}{8}$$

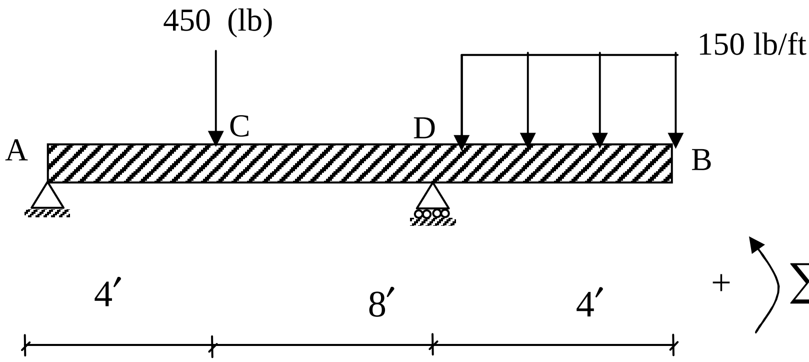
$$x=L \quad \Rightarrow \quad V=-\frac{WL}{2}\ ,\ M=0$$



لنگر خمشی از برش یک درجه بیشتر است .

همواره جایی که برش صفر است ماکزیمم لنگر خمشی داریم .

مثال :



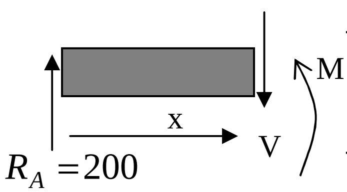
$$+\sum m_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 12\,R_D - 460\ (4) - 600\ (14) = 0$$

$$R_D = 850 \quad (lb) \quad \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 200 (lb) \quad \uparrow$$

از A تا C

$0 < x < 4$

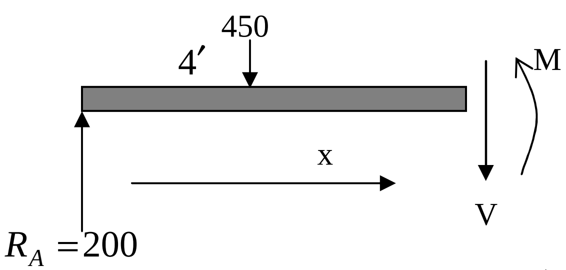


$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 200$$

$$+\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M - 200\,x - 460\ (x - 4) = 0 \quad \Rightarrow m = 1800 - 260\ x$$

از C تا D 4

$9 < x < 12$

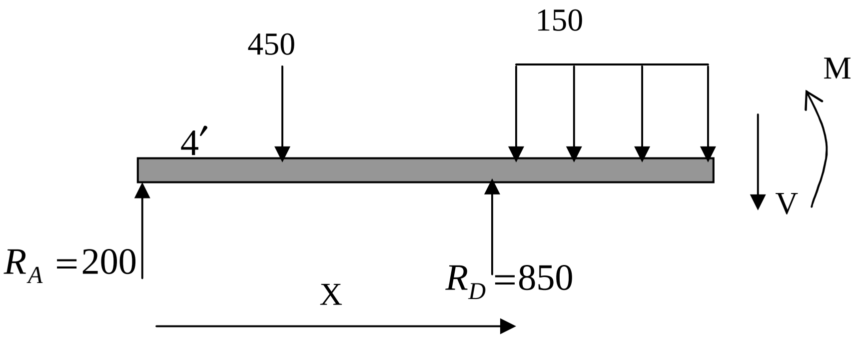


$$+\uparrow \sum f_y \Rightarrow R_A - 450 - V = 0 \Rightarrow V = -250$$

$$+\sum M = 0 \Rightarrow M - 200X - 450(x-4) = 0 \Rightarrow M = 1800 - 250x$$

$12 < x < 16$

D تا B از



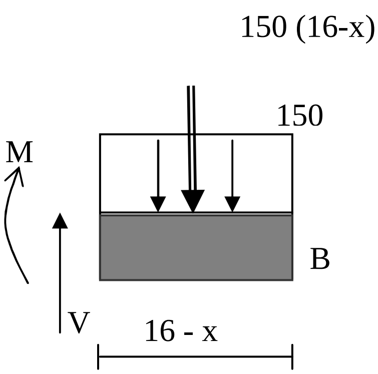
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 200 + 850 - 460 - 160(x-12) - V = 0$$

$$V = 150(16 - x)$$

$$+\sum M = 0 \Rightarrow -200x + 450(x-4) + 150(x-12)\left(\frac{x-12}{2}\right) + M$$

$$-850(x-12) = 0$$

$$M = -75 \ (16 - x)^2$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad V = 150(16 - x)$$

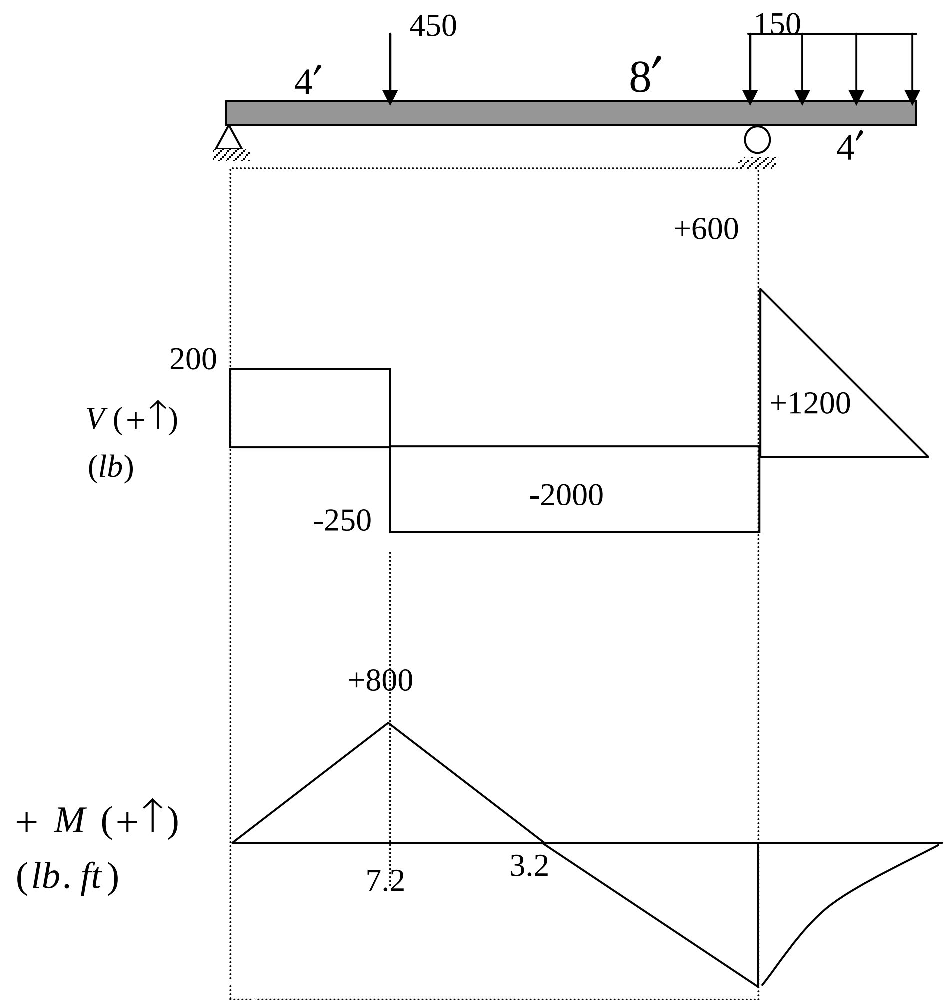
$$+\sum M = 0 \qquad -M = 150\ (16 - x)\ \left(\frac{16 - x}{2}\right) = 0$$

$$M = -75\ (16 - x)^2$$

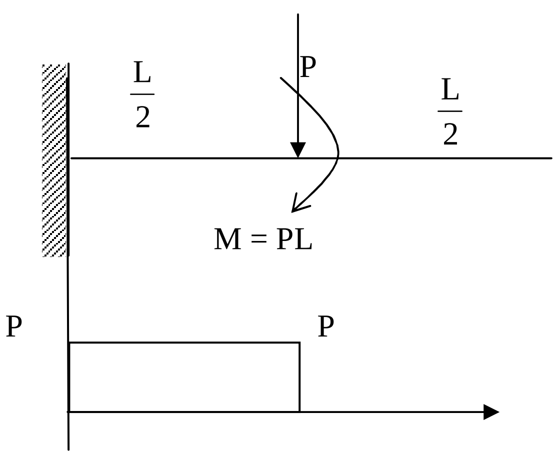
$9 < x < 12$

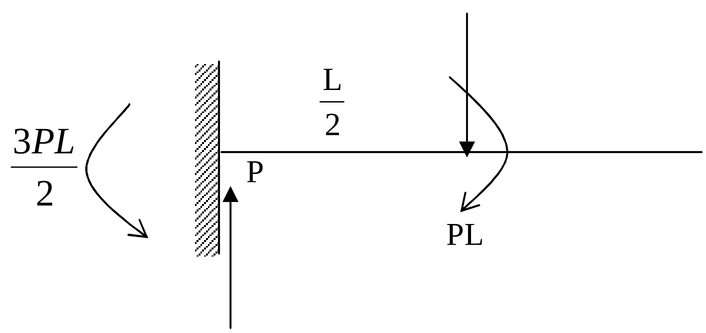
$M = 1800 - 260x = 0$

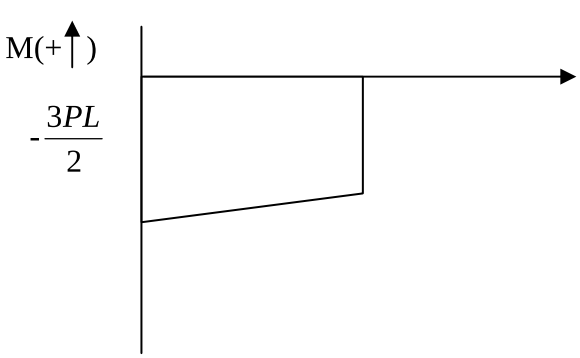
$A = \frac{1800}{250}\ 7.2\ (ft)$

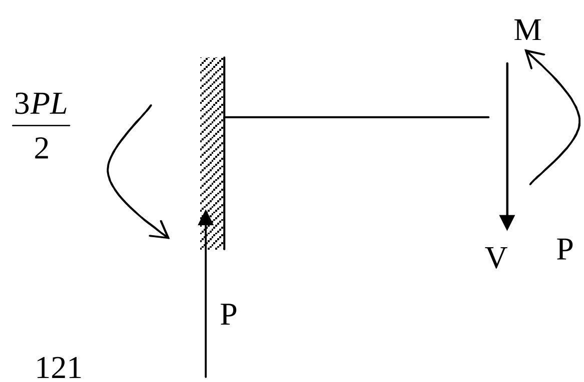


مثال:









$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \Rightarrow \frac{3PL}{L} + M - Px = 0$$

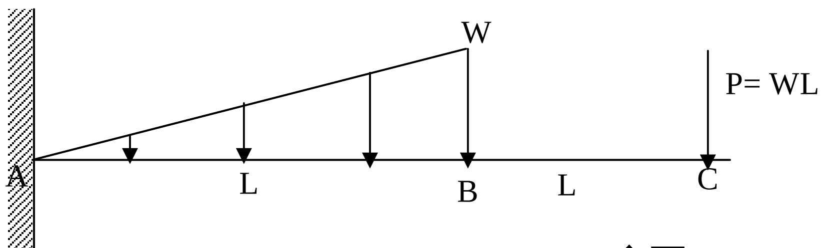
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow P - V = 0 \rightarrow P = V$$

$$M = Px - \frac{3PL}{L}$$

$$x = 0 \Rightarrow V = P, \quad M = -\frac{3PL}{L}$$

$$x = \frac{L}{2}^{2} \Rightarrow V = P, \quad M = -PL$$

مثال :

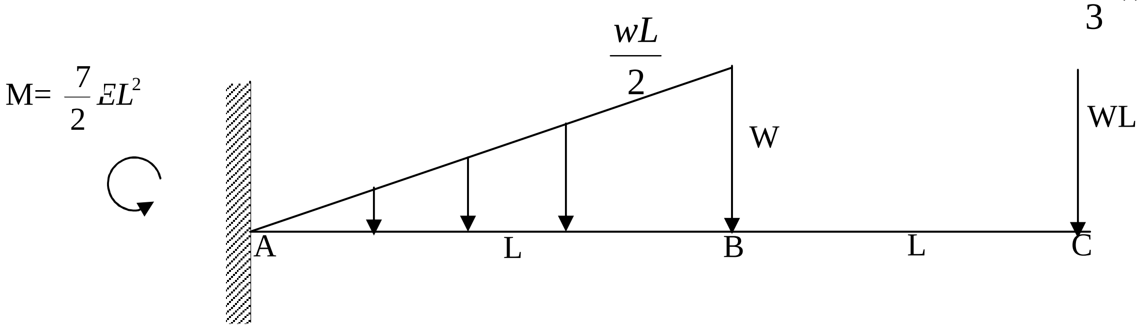


$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{L} - WL + R_A = 0$$

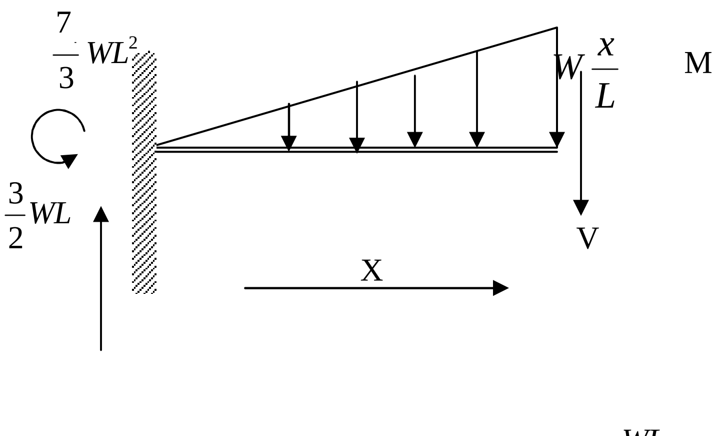
$$+ \circlearrowleft \sum M = 0$$

$$\frac{WL}{2}\left(\frac{qL}{3}\right) + WL(2L) - M = 0$$

$$M = \frac{7}{3} WL^2$$



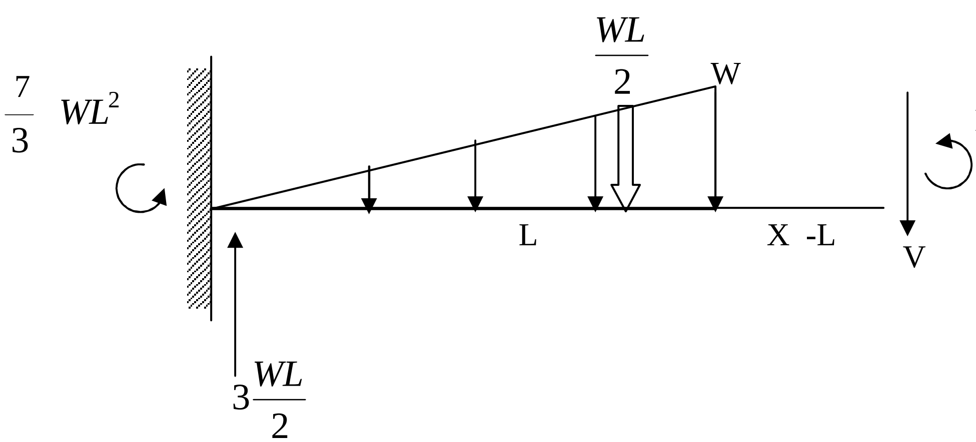
$$R_A = \frac{WL}{2} + WL = 3\frac{WL}{2}$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \quad 3\frac{WL}{2} - V - W\left(\frac{x}{L}\right)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

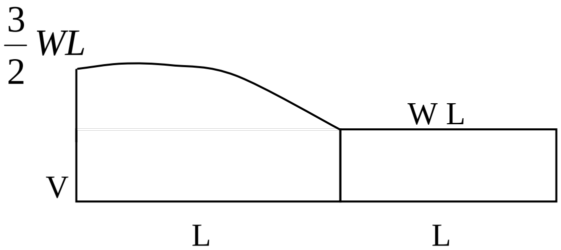
$$V = 3\frac{WL}{2} - \frac{Wx^2}{2L}$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \Rightarrow M + \frac{-7}{3}WL^2 + \frac{3WL}{2}X - W\frac{x^3}{6L}$$



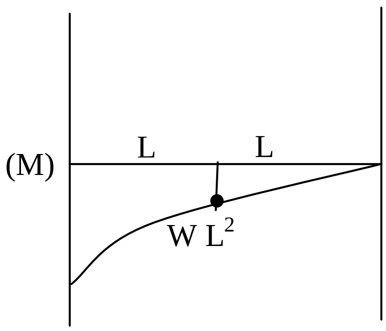
$$3\frac{WL}{2} - V - \frac{WL}{2} = 0$$

$$V = WL$$



$$M + \frac{7}{3}WL^2 - 3\frac{WL}{2}x + \frac{1}{2}WL\ (x - L + \frac{L}{3}) = 0$$

$$M = WL^2 + WLx$$

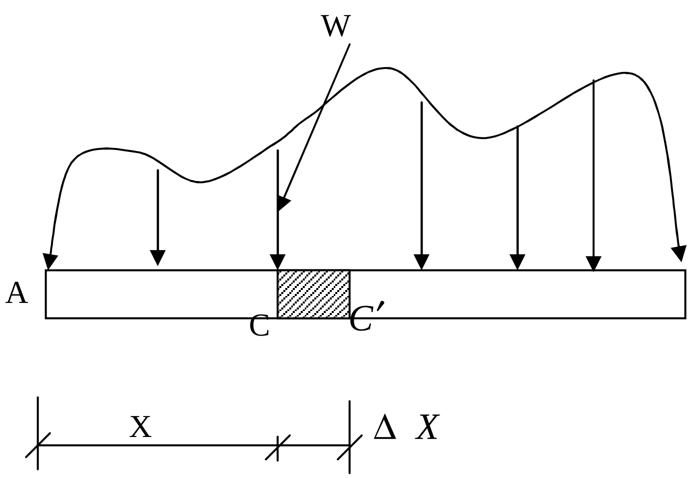


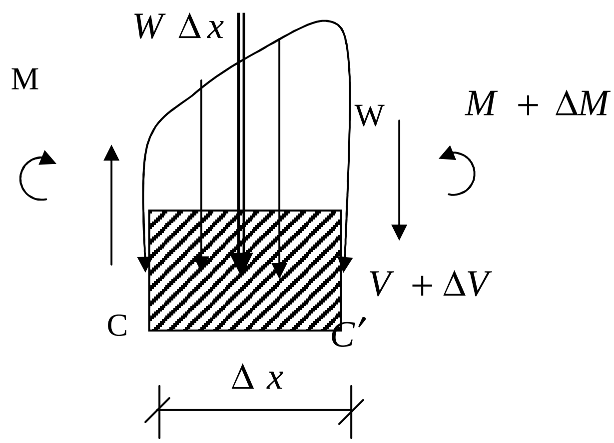
$x=0 \quad \Rightarrow V=3\frac{WL}{2}\ ,\ M=-\frac{7}{2}WL^2 \qquad x=\frac{L}{3} \Rightarrow V=\frac{26}{18}WL$

$x=L \quad \Rightarrow V=WL\ ,\ M=-WL^2 \qquad x=\frac{2L}{3} \Rightarrow V=\frac{23}{18}WL$

$x\ \ 2L \quad \Rightarrow \quad V=wL \quad ,\ M=0$

ارتباط بین نیرو ، برش و خمش





$$v-(v+\Delta v) - w\Delta X = 0$$

$$\Delta V = -W\Delta x$$

ضریب زاویه برش $\boxed{\frac{dV}{dx} = -W}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -W$$

$$\int \frac{dV}{dx}\ dx = \int -W dx$$

$$V \Big|_{V_C}^{V_D} = -\int_{x_c}^{x_D} W\,dx \quad \Rightarrow \quad V_D - V_C = -\int_{x_c}^{x_D} W\,dx =$$ مساحت زیر نیروها بین C و D

این فرمول برای فاصله هائی می باشد که نیروی متمرکز وجود نداشته باشد .
فقط بین نیروهای متمرکز صادق می باشد .

$$(M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + W\,\Delta x\,\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \frac{1}{2} W\,(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = V - \frac{1}{2} W\,(\Delta x)^2 \qquad \Delta x \to 0 \;\Rightarrow\; \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dM}{dx}$$

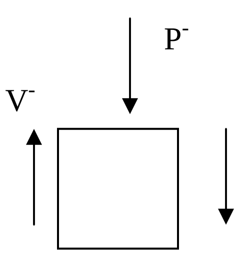
$$\boxed{\frac{dm}{dx} = V}$$

نیروی برش = ضریب زاویه خمش

وقتی که $V = ۰$ ← نقطه ماکزیمم خمش

$$\int \frac{dM}{dx}\,dx = \int V\,dx \quad + \quad \int_{M_c}^{M_D} dM = \int_{x_c}^{x_D} V\,dx$$

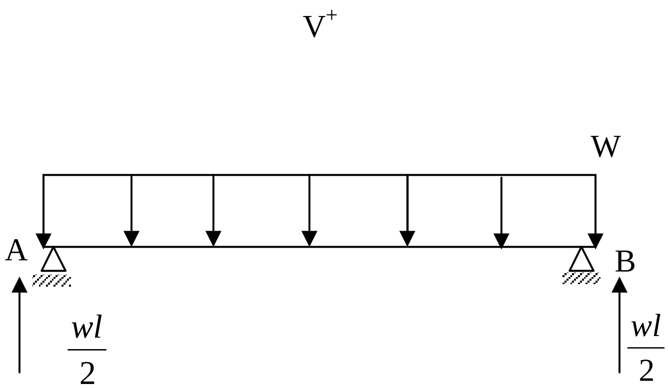
$$\boxed{M_D - M_c = \int_{x_c}^{x_D} V\,dx =}$$ مساحت زیر نیروهای برش بین C و D



$$-P - V^{+} + V^{-} = 0$$

$$V^{+} = V^{-} - P$$

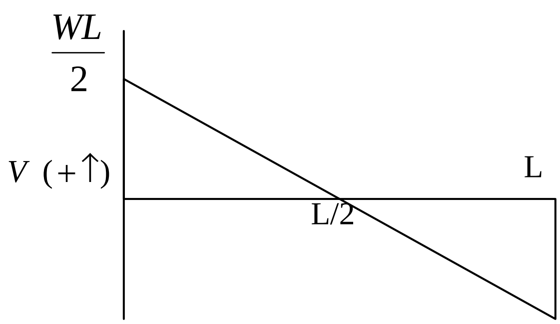
مثال:



$$\frac{dV}{dx} = -W$$

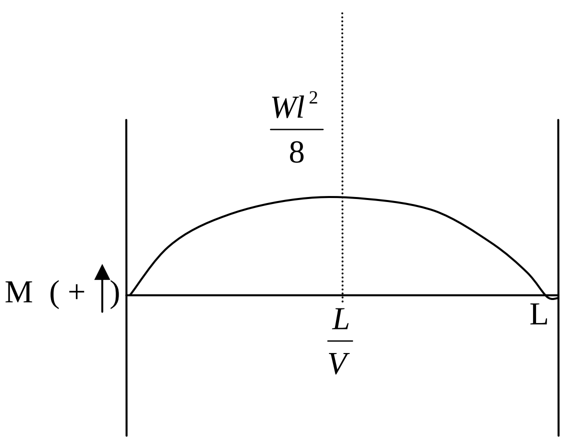
$$V - V_A = -\int_o^x W\,dx = -Wx$$

$$V = V_A - W_x = \frac{WL}{2} - Wx = W\left(\frac{L}{2} - x\right)$$



$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$M - M_A = \int_D^x v\,dx = \int_D^x W\left(\frac{L}{2} - x\right) dx = \frac{W}{2}\left(Lx - x^2\right)$$

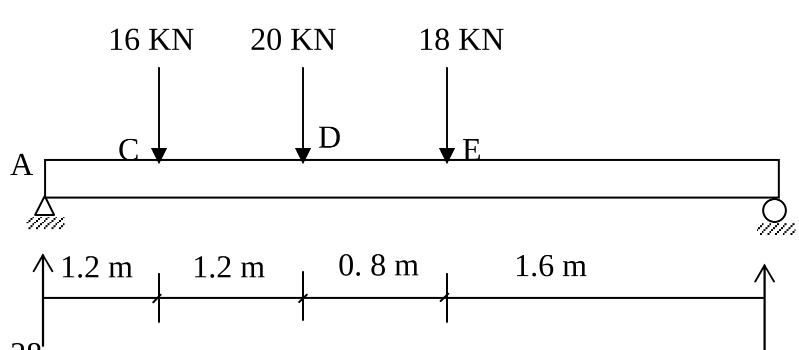


کشتاور خمشی یک سهمی است .

نقطه ماکزیمم در $x = \frac{L}{2}$ قرار دارد چونکه V = ۰

$$x\ \frac{L}{2} \Rightarrow V = 0\ M = M_{max} = \frac{WL^2}{8}$$

مثال



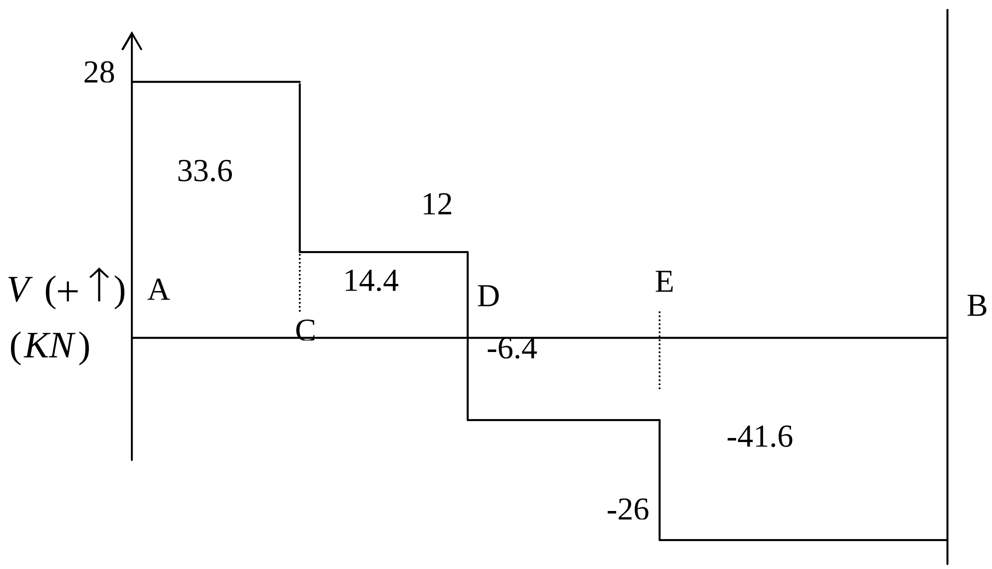
$$V_c - V_A = -\int_{x_A}^{x_C} WAx \;=\; 0$$

$$V_C^{\,-} - V_A \;= 0 \qquad \Rightarrow \quad V_C^{\,-} = V_A = 28 \;(KN)$$

$$\mathrm{V_C^+ = V_C^- - 16 = 12\,(KN\,)}$$

$$V_D^{\,-} - V_C^{\,+} \;= -\int_{x_c}^{x_D} WAx \;\; = 0 \Rightarrow \quad V_D^{\,-} \;= V_C^{\,+} \;= 12 \quad \text{(KN)}$$

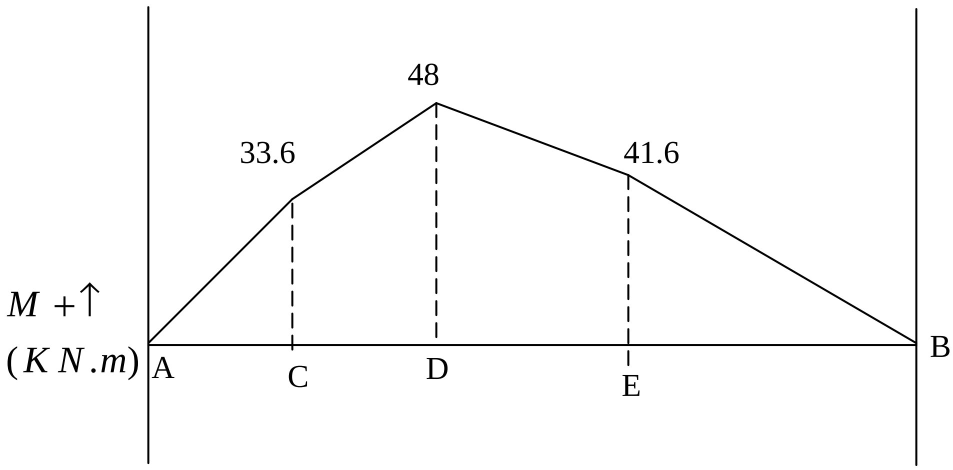
$$V_D^{\,+} = V_D^{\,-} \;- 20 \;= 12 - 20 = -8 \;\text{(KN)}$$



$$V_E^{\,-} \;\; - V_D^{\,+} \;= -\int_{x_D}^{x_E} W\,dx \;\; = 0 \Rightarrow \quad v_E^{\,-} \;= V_D^{\,+} = 8\;KN$$

$$V_E^{\,+} \;= V_E^{\,-} \;- 18 = -\,26\;(KN)$$

$$V_B - V_C^{\,+} = -\int_{x_E}^{x_B} Wdx \;= 0 \quad \Rightarrow \quad V_B \;= V_E^{\,+} \;= \quad \mathbf{-26\ (KN)}$$



$$M_C - M_A = \int_{x_A}^{x_C} V dx = \int_{0}^{1.2} 28 dx = 28\ (1.2)\ 33.6$$

$$M_C = 0 + 33.6 = 33.6\ (KN.m)$$

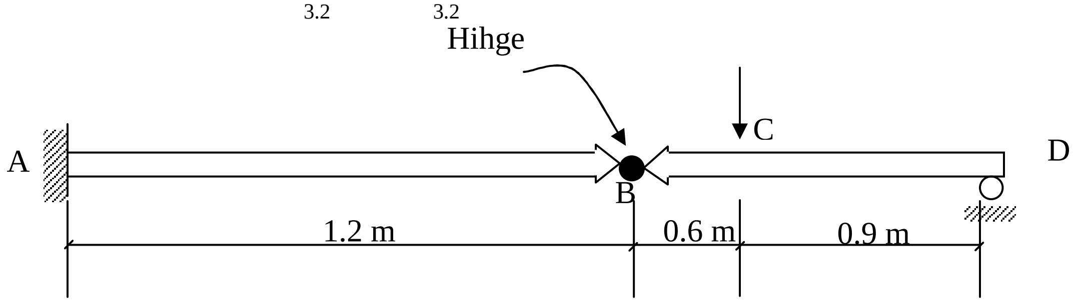
$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\, dx = \int_{1.2}^{2.4} 14.4\, dx = 14.4\ (2.4 - 12)$$

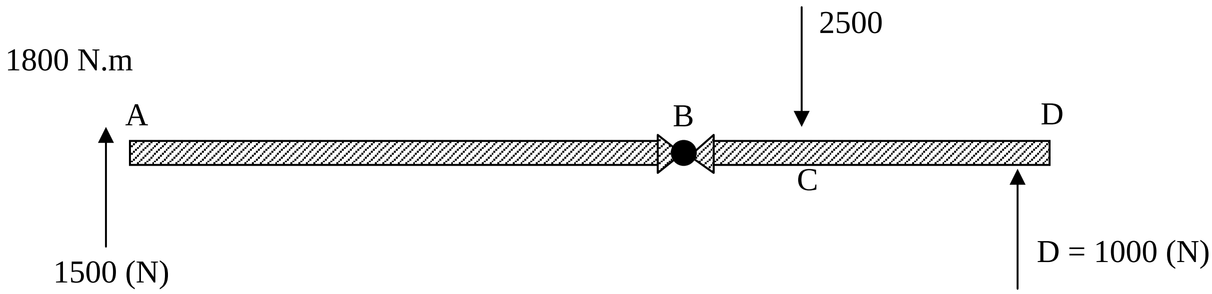
$$M_D = M_C + 14.4 = 33.6 + 14.4 = 48 \quad (KN.m)$$

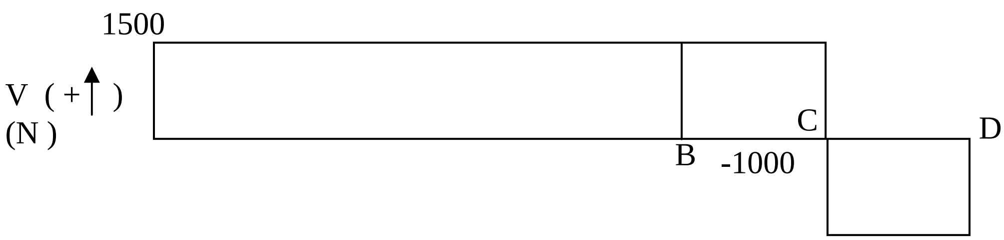
$$M_E - M_D = \int_{x_D}^{x_E} V\ dx = \int_{2.4}^{3.2} (-6.4)\ dx = -6.4\ (3.2 - 2.4)$$

$$M_E = M_D - 6.4 \times 0.8 = 48 - 6.4 \times 0.8 = 44.6 (KN.m)$$

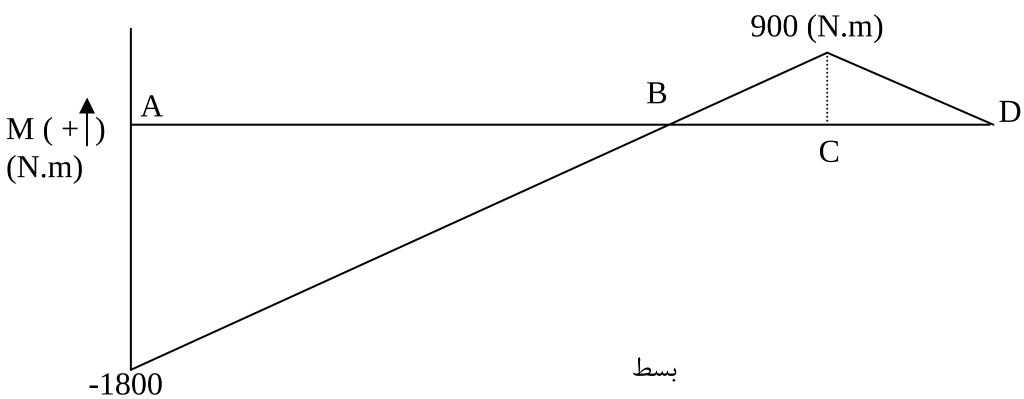
$$M_B - M_E = \int_{3.2}^{4.8} V dx = \int_{3.2}^{4.8} (-41.6) dx = -4.6 (1.6)$$





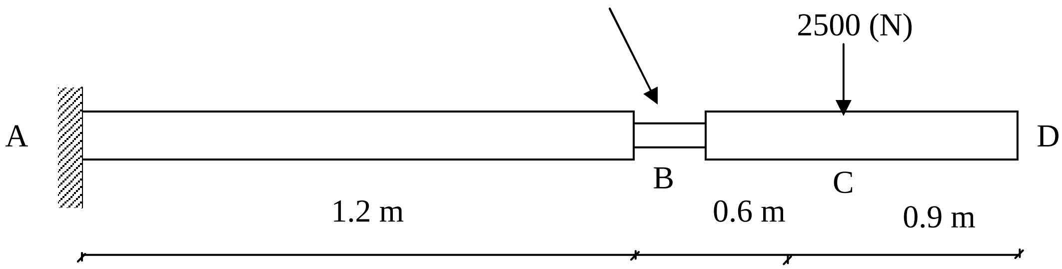


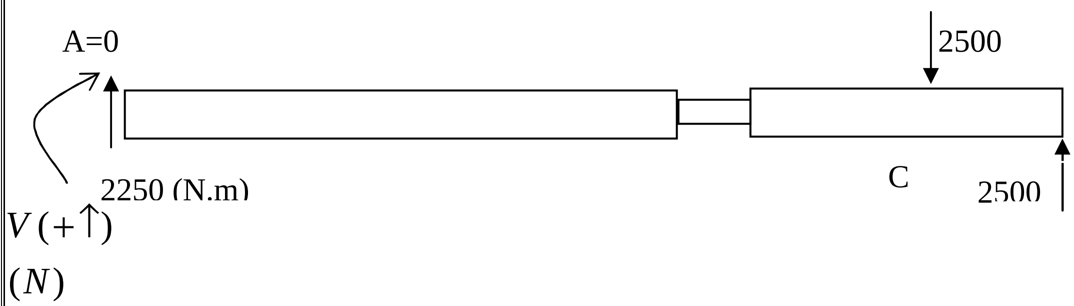
دیاگرام برش

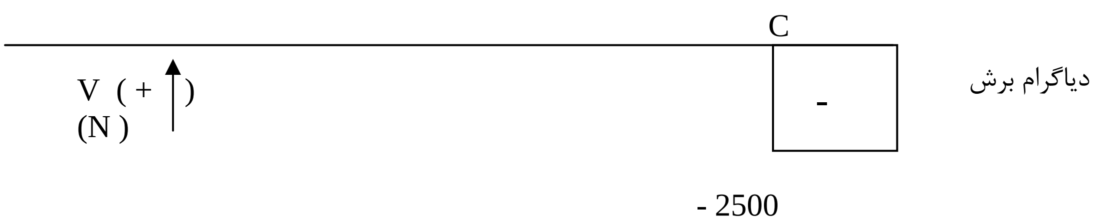


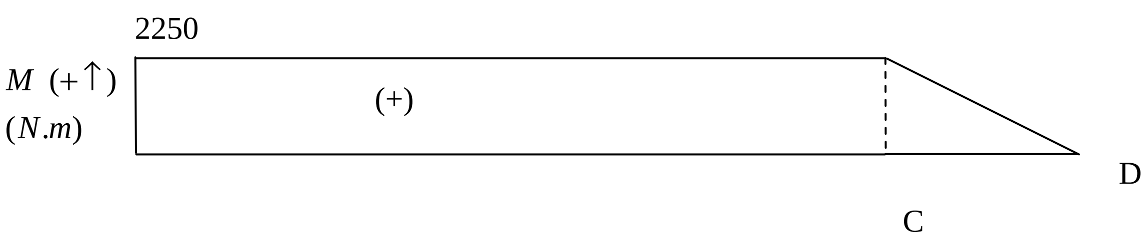
دیاگرام خمش

بسط


2500 (N)
A
D
B
C
1.2 m
0.6 m
0.9 m


A=0
2500
2250 (N.m)
C
2500
V (+↑)
(N)


C
V (+ ↑)
(N)
-
دیاگرام برش
- 2500

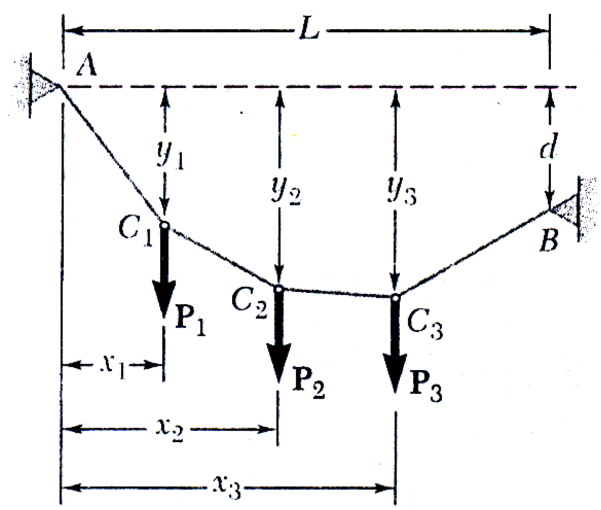

2250
M (+↑)
(N.m)
(+)
D
C

کابل با نیروهای متمرکز :

کابل ها در مهندسی در موارد مختلف استفاده می شوند : پل های معلق ، دکل ها و غیره

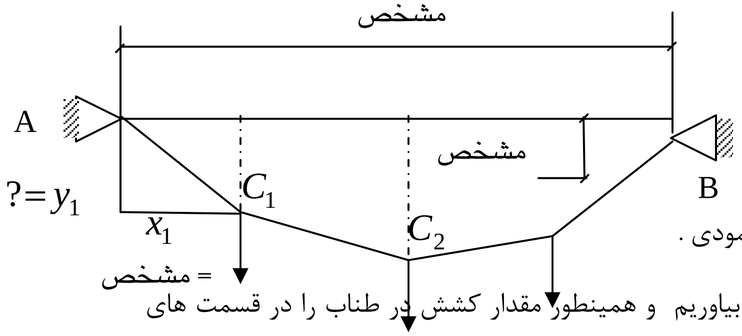
کابل ها را می توان به دو دسته تقسیم کرد :۱- کابل های با نیروی متمرکز .   ۲-کابل‌های تحت نیروی گسترده .

فرض می کنیم که کابل در دو نقطه A و B در تکیه گاه قرار دارد و تحت اثر چند نیرو در نقاط C1 الی C4 قرار گرفته است که فواصل افقی آن مشخص است . فرض می کنیم که کابل کاملاً نرم و در مقابل خمش از خود مقاومتی نشان نمی دهد .



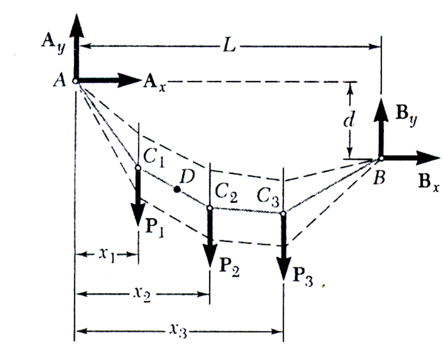
همچنین فرض می کنیم که وزن کابل را می توان در مقابل نیروهای وارده نادیده گرفت .

سپس با در نظر گرفتن وارد شدن نیروها در نقاط مختلف و بدون نیروی گسترده هر قسمت از کابل بین دو نیرو را می توان عضو با دو نیرو در نظر گرفته که در کشش می باشد .



می دانیم فاصله بین A و B را هم در جهت افقی و هم در جهت عمودی .

می بایستی که شکل این کابل را پس از وارد کردن نیروها بدست بیاوریم و همینطور مقدار کشش در طناب را در قسمت های مختلف یعنی در حقیقت مقدار فاصله بین نقطه A از C1 در جهت عمودی مشخص گردد و همینطور مقادیر فواصل بین نقاط A و C2 و C3 و C4 در جهت عمودی مشخص گردد .



یک معادله بر حسب $A_y\ , A_x$

(با گرفتن ممان در نقطه B)

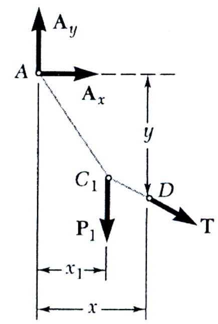
دیاگرام آزاد کل

در این حالت می توانیم یک معادله برای $A_y\ , A_x$

بنویسیم اگر مختصات نقطه D را بدانیم

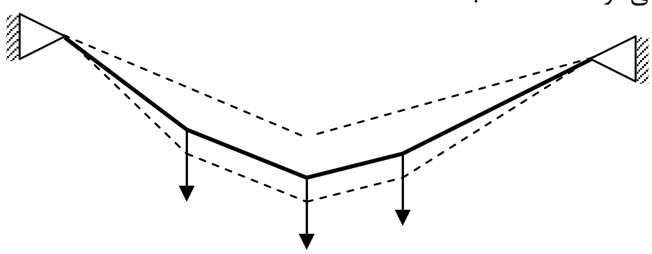
(با گرفتن ممان در نقطه D)

دیاگرام قسمت چپ کابل

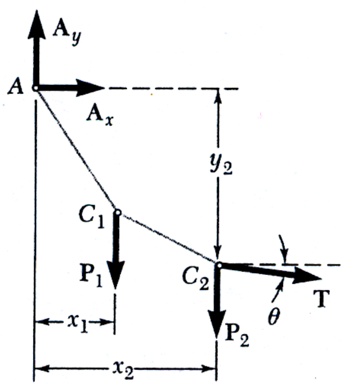


اگر مختصات نقطه D را نداشته باشیم این مسئله بصورت نا معین می بود

و هر جوابی برای کابل در تغییر شکل می توانست داشته باشد .



هنگامیکه عکس العمل در نقطه A مشخص گردد تمام مختصات نقاط زیر نیرو را هم می توان از دیاگرام آزاد قسمتی از کابل مشخص کرد .



$$+ \quad \sum M_{c2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (y_2)(A_x) - A_x\,(x_2) + P_1\,(x_2 - x_1) = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow \quad -T\sin\theta - P_1 - P_2 + A_y = 0$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow \quad T\cos\theta + A_x = \boxed{\text{T Cos } \theta = -A_x}$$

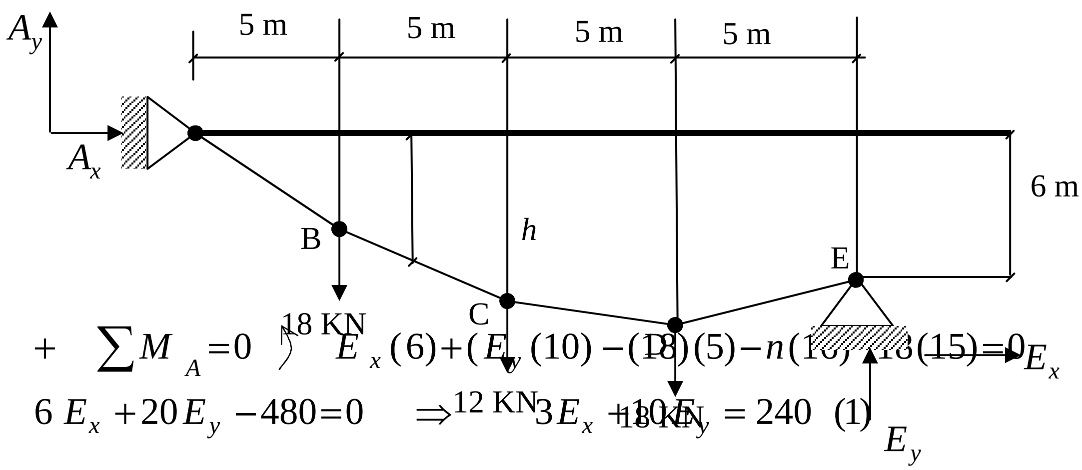
مولفه افقی کشش در کابل در تمام طول طناب یکسان می باشد .

همچنین بدست می آید که کشش بیشترین است وقتی که $Cos\ \theta$ کمترین باشد یعنی در قسمتی که بیشترین زاویه را با افق داشته باشیم که طبیعتاً در دو انتهای کابل نزد تکیه گاه خواهد بود.

مثال_

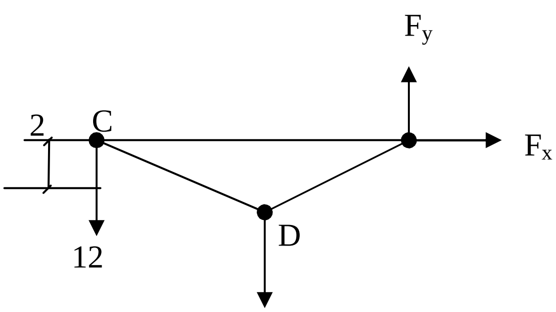
الف) اگر $8m = R_c$ باشد عکس العمل در نقطه E و حداکثر کشش در طناب را بدست بیاورید.

ب) مقدار Rc را طوری بدست بیاورید که قسمت CD کابل افقی باشد و همینطور عکس العمل E بدست بیاورید.



$$+\ \sum M_A = 0 \quad E_x(6)+(E_y)(10)-(18)(5)-n(10)-18(15)=0$$

$$6E_x + 20E_y - 480 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3E_x + 10E_y = 240 \quad (1)$$



$$+\ \sum M_c = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_x(2)-E_y(10)-18(5)=0 \quad \Rightarrow \quad 2E_x - 10E_x = -90 \quad (2)$$

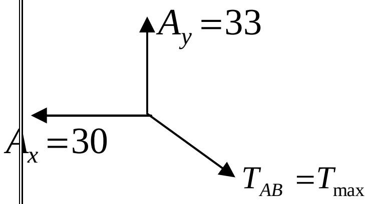
بین (۱) و (۲) خواهیم داشت

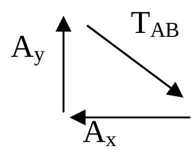
$$E_x = 30\ KN \ \rightarrow$$
$$E_y = 15\ KN \ \uparrow$$

در سیستم کل $\Rightarrow$

$$\sum F_x = 0 \qquad A_x + E_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -30\ KN \quad \Rightarrow \quad A_x = 30\,KN \leftarrow$$

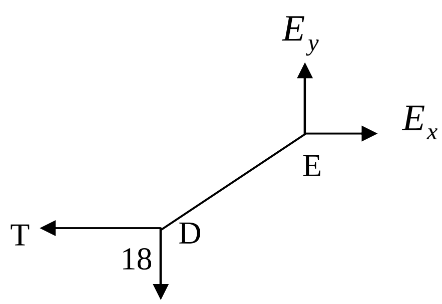
$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 18 - 12 - 18 + E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 33 \uparrow KN$$





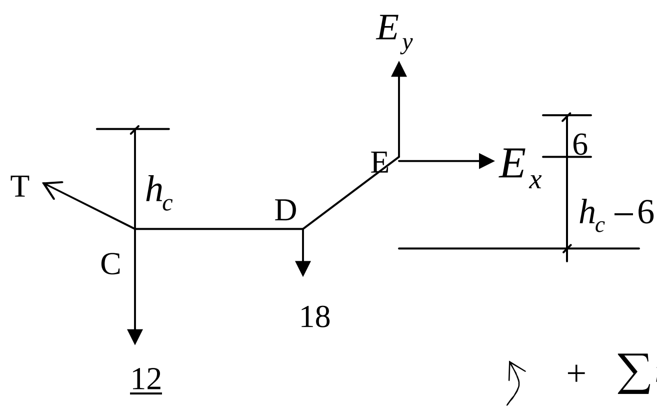
$$T_{AB} = \sqrt{33^2 + 30^2} = 44.6 \quad KN$$

ب)



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = -18 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = 18\ KN \uparrow$$

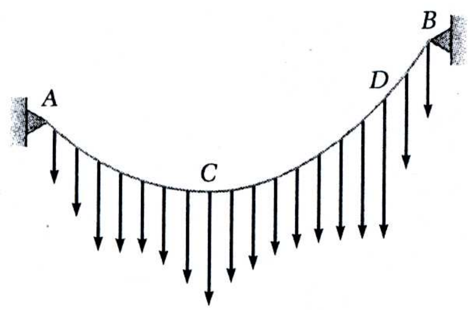
$$3\,E_x + 10\,E_y = 240 \quad (1) \qquad \Rightarrow \qquad E_x = 20 \quad KN \quad \rightarrow$$



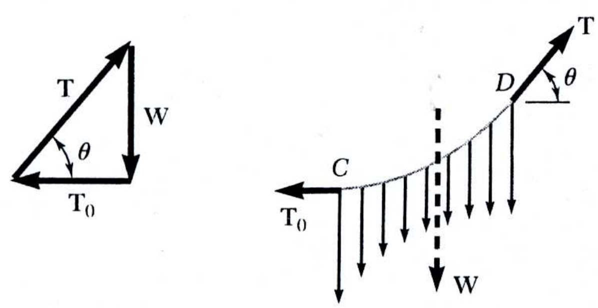
$$\curvearrowleft + \quad \sum m_C = 0 \qquad \Rightarrow (18)(10) - (20)\,(h_c - \frac{\sigma}{6}) - 18(5) = 0$$

$$\boxed{h_C = 10.5\ (m)}$$

کابل با نیروهای گسترده :



(الف)



(ج) (ب)

هر قسمت به صورت منحنی می باشد و نیروی T بصورت مماس بر منحنی می باشد

این رابطه می گوید که مولفه افقی کشش همیشه ثابت است برابر است با T0 (کشش در پائین ترین نقطه کابل)

$$T\ \ Cos\ \theta = T_0$$

این رابطه می گوید که مولفه عمودی کشش برابر است با مقدار نیروی گسترده از پائین ترین نقطه

$$T\ \ A\sin\theta\ = W$$

برای T داریم:

$$T = \sqrt{T_0^{\ \ 2} + W^2}$$

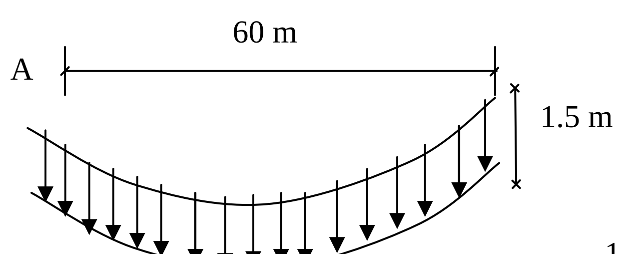
کشش کمترین است در پائین ترین نقطه و ماکزیمم در یکی از دو نقطه تکیه گاه ها

$$\tan\theta = \frac{W}{T_0}$$

مثال –

الف) ماکزیمم کشش را در سیم را بدست بیاورید.

ب)طول سیم را بدست بیاورید.

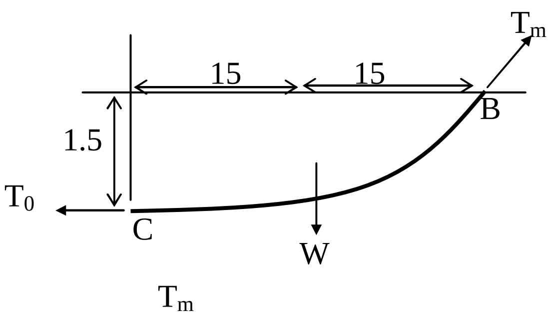


0.6 kg/m =

$L = 60\,m \qquad h = 1.5\ m$

$\omega = 0.6\ (9.8) = 5.89\ \dfrac{N}{m}$

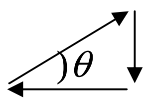
$W = 5.89\ (30) = 176.58\ (N)$



$+ \sum M_B \quad (176.58)\ 765.8)\ (15) - T_0\,(1.5) = 0$

$(1765.8)\ (N) \quad)$

$T_m = \sqrt{(176.5\ (1765.8)^2\ .58)^2} = 1774.6\ (N)$



$W = 176.58$

$T_0 = 1765.8$

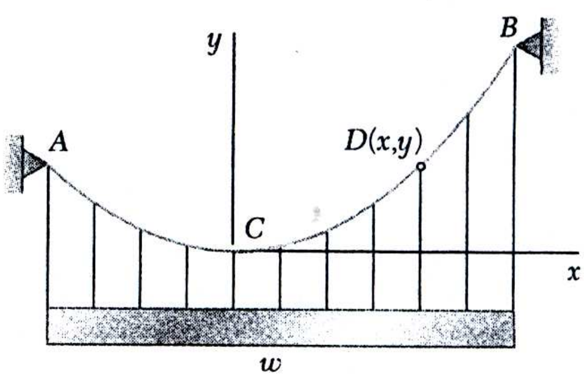
$$S_B = X_B - \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{X_B}\right)^2\right] = 30\ \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1.5}{30}\right)^2\right] = 30.05\ (m)$$

$TOTAL = 2\,S_B = 2\,(30.05) = 60.1\ (m)$

کابل سهمی

(کابل با نیروی گسترده یکنواخت)

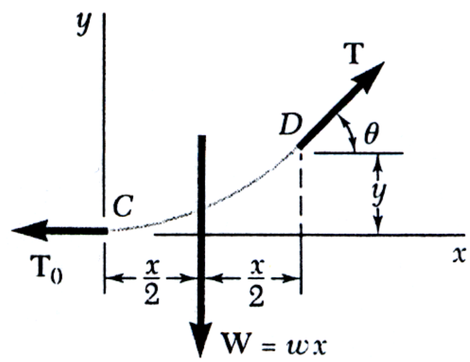
فرض کنیم که وزن سیم ها را صرف نظر کنیم



کل بار در فاصله x $W = \omega x$

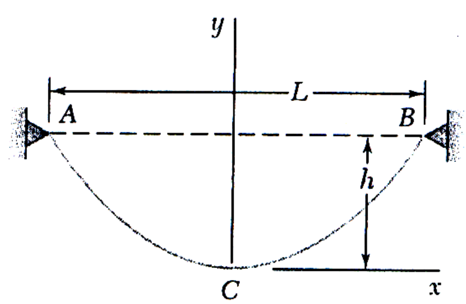
$$T = \sqrt{T_0^{\,2} + \omega^2 x^2}$$

$$\tan\theta = \frac{wx}{T_0}$$



$$+\curvearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow \quad \omega x \left(\frac{x}{2}\right) - T_0\, y = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{\omega x^2}{2\,T_0}$$

معادله سهمی که رأس آن در نقطه C در مرکز مختصات می باشد.



مینیمم کشش در طناب T_0

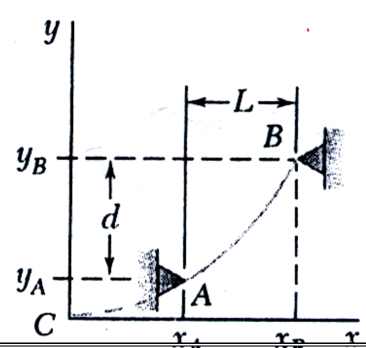
اگر h و L مشخص شود می توانیم کمترین

کشش را بدست بیاوریم با جایگزین کردن

روابط زیر:

$$T_0 = \frac{\omega x^2}{2\,y} = \frac{W L^2}{8\,h} \qquad y = h \qquad , x = \frac{L}{2}$$

اگر هر دو تکیه گاه در یک ارتفاع نباشد دیگر مختصات تکیه گاه‌ها مشخص نیست و می‌بایستی بدست آورد .



می دانیم:

$$y_B - y_A = d \qquad , \qquad x_B - x_A = L$$

$T_{\min}$ $A_x = B_x$

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ B [illegible] C [illegible]

$$S = \int dL$$

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^x \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ dx$$

در بسط نیوتنی

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{W^2 x^2}{T_0^2}}\ dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{W^2 x^2}{2T_0{}^2} - \frac{W^4 x^4}{8\,T_0{}^4} + ...\right) dx$$

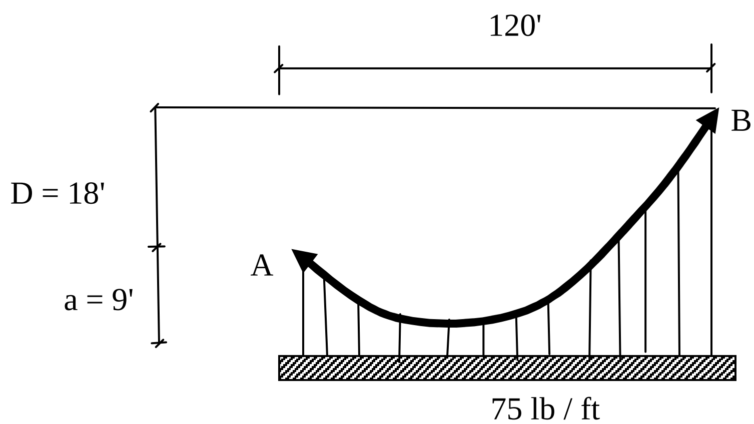
$$S_B = x_B\ (1 + \frac{W^2\ x^2}{6T_0^2} - \frac{W^4\ x_B^4}{40\ T_6^4} + ...) \qquad \frac{W\,x_B^2}{2T_0}\ y_B$$

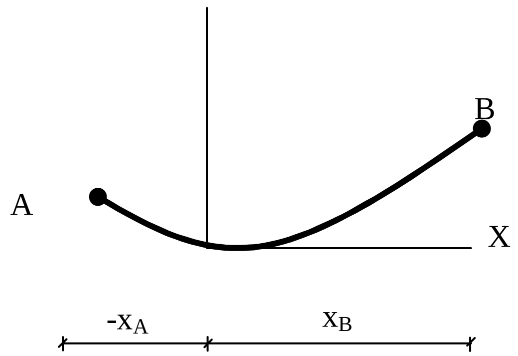
$$S_B = x_B \left[1 + \frac{2}{3}\ (\frac{y_B}{x_B})^2 - \frac{2}{3}\,(\frac{y_B}{x_B})^4 + ...\right] \quad \Rightarrow \quad S_B \approx x_B \left[1 + \frac{2}{3}\,(\frac{y_B}{x_B})^2\right]$$

مثال – بدست بیاورید کمترین

و بیشترین کشش را در طناب .

(اگر پائین ترین نقطه طناب در $9'$ زیر تکیه گاه A)





نقطه A

$$X_B - X_A = 120'$$
$$X_A = X_B - 120'$$

$$y_A = \frac{wx_A^2}{2T_0} = 9 = \frac{w(x_B - 120)^2}{2T_0}$$

نقطه B

$$y_B = \frac{wx^2{}_B}{2T_0} = 27 = \frac{w\ x_B^2}{2T_0}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{(X_B - 120)^2}{X_B{}^2} \quad \Rightarrow \quad 2X_B^2 - 720\ X_B + 43200 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_B = 76.08\ (ft)$$

$$27 = \frac{WX_B{}^2}{2\ T_0} = \frac{75\ (76.08)^2}{2T_0} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 8034\ (lb)$$

$$T_{\min} = T_0$$

$$T_{\max} = \sqrt{T_0^2 + W^2\ X_B{}^2} = \sqrt{(8038)^2 + (75)^2\ (76.08)^2} = 9860\ (lb)$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2\ X_A{}^2} = \sqrt{(8038)^2 + (75)^2\ (120 - 76.08)^2} = \qquad < T_{\max}$$

در B :

$$S_B = X_B \left[1 + \frac{2}{3}\ (\frac{y_B}{X_B})^2\right]$$

در A :

$$S_A = X_A \left[1 + \frac{2}{3}\ (\frac{y_A}{X_A})^2\right]$$

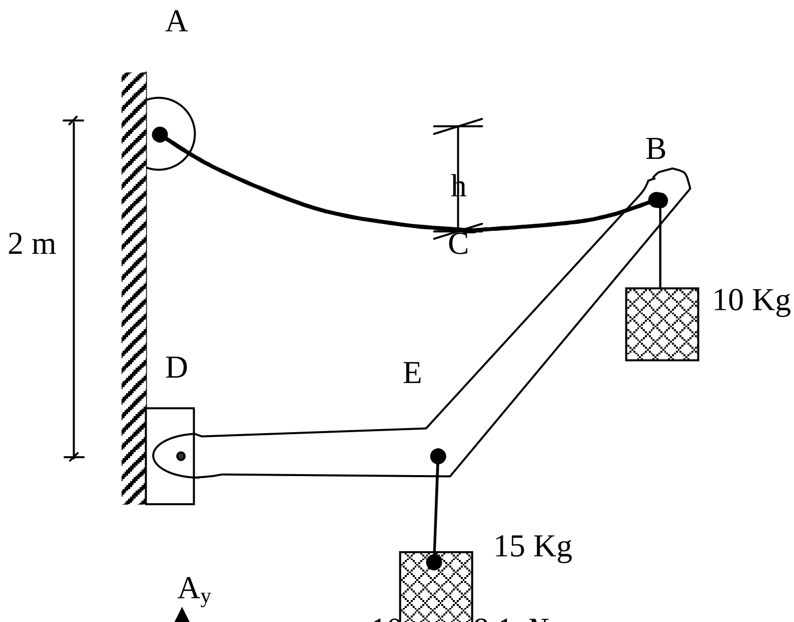
$$S = |S_A| + |S_B|$$

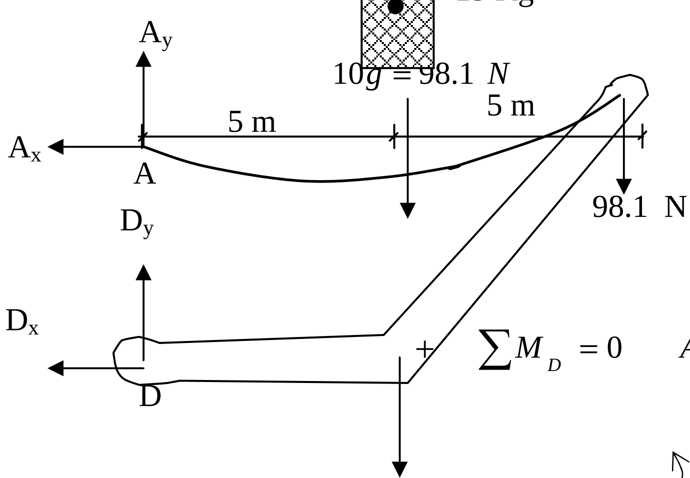
مثال – کل جرم طناب ABC برابر است با 10 Kg اگر فرض کنیم که این جرم روی طناب بصورت یکنواخت قرار می گیرد

بدست بیاورید .

الف) عمق کابل را (h)

ب) ضریب زاویه طناب در نقطه A





$$+\ \sum M_D = 0 \qquad A_X\,(2) - 98.1(5) - 98.1(10) - 147.15\,(5) = 0$$

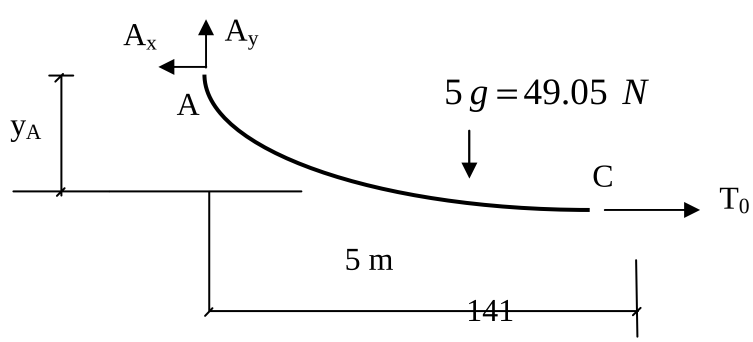
$$A_X = 1103.6\ (N)$$

$$T_0 = A_X = 1103.6\ (N)$$

$$15g = 142.16N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - 49.05 = 0$$

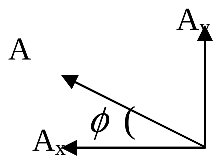
$$A_y = 49.05\ \ (N)$$



$$\circlearrowleft + \quad \sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; A_x y_X \; - A_y^{(5)} - 49.05\,(2.5) = 0$$

$$(1103.6)\; y_A \; - \; A_x y_X \; - A_y(\mathbf{5}) + \mathbf{49.05(2.5)} = \mathbf{0}$$

$$y_A = 0.111\,(m) \qquad \Rightarrow h = 111\;(mm)$$

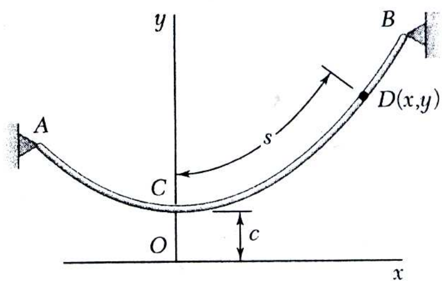


$$\tan\phi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{49.05}{1103.6} = 0.044 \quad \Rightarrow \qquad \phi = 2.54^\circ$$

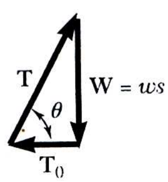
کابل زنجیره ای :

کابلی است که باری یکنواخت در امتداد طول خود دارد .

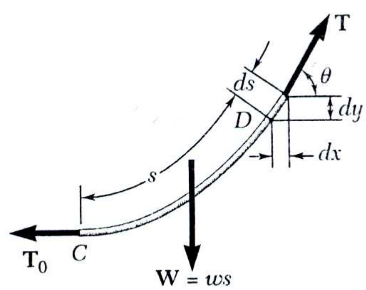
وزن واحد طول در امتداد خود کابل = a



(الف)



(ج)



(ب)

$$T = \sqrt{T_0^{\,2}\;\omega^2\, s^2} \qquad\qquad \Leftarrow \;\; T = \sqrt{T_0^{\,2} + W^2}$$

$$T = \sqrt{C^2\,\omega^2 + S^2\;\omega^2} \; = W \;\; \sqrt{C^2 + s^2} \quad\;\; T_0 \;\, cC\omega \qquad\qquad \Leftarrow C = \frac{T_0}{\omega}$$

در این دیاگرام معادله منحنی شکل کابل مشخص نیست .

ژول

$$d_x = d_s\, Cos\,\theta = d_s\, \frac{T_0}{T} \qquad \Leftarrow \qquad Cos\,\theta = \frac{T_0}{T}$$

$$dx = \frac{\omega\, c\, ds}{\omega\sqrt{C^2 + S^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + S^2/C^2}}$$

$$X = \int dx = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + S^2/C^2}} = C\ \sinh^{-1}\frac{s}{c} \quad \Rightarrow$$

$$dy = d_x^x \tan\theta = \frac{W}{T_0}\,dx = \frac{s}{c}\,dx = \sinh\frac{x}{c}\,dx \qquad \Leftarrow \tan\theta = \frac{W}{T_0}$$

$$\boxed{\int_c^y dy = y - C \quad S = C\sinh\frac{x}{C}}$$

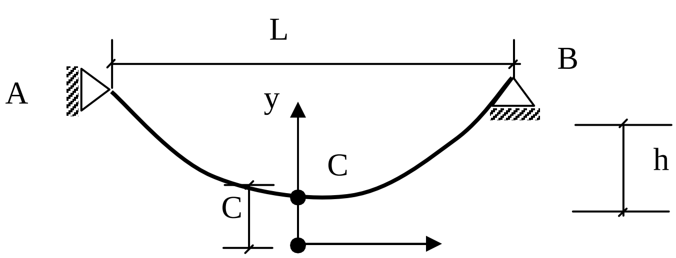
$$y - C = \int_0^x \sinh\frac{x}{c}\,dx = C\left[Cosh\frac{x}{c}\right]_0^x = C\left(Cosh\frac{x}{c} - 1\right) \quad \Rightarrow \qquad \boxed{y = C\ Cosh\,\frac{x}{c}}$$

$$w^2 y^2 = w S^2 + w c^2 = T^2$$

$$T_0 = \omega c \quad , \quad W = \omega s \quad , \quad T = \omega y$$

$$\boxed{y^2 - S^2 = C^2}$$

اگر دو نقطه A و B هم سطح باشند



عمق کابل = $h = y_A - C$

طول دهانه کابل = L

فاصله نقط ممانی هم کابل = C

$$X_B - X_A = L$$

$$y_B - y_A = d$$

اگر دو نقطه هم سطح نباشند مانند کابل سهمی خواهیم داشت

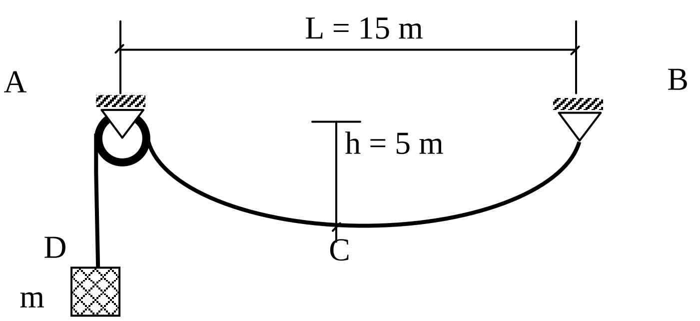
مثال – وزنه D به جرم 40 Kg به

یک کابل که از نقطه A می گذرد متصل

شده است . اگر $h = 5m \quad , \quad L = 15m$

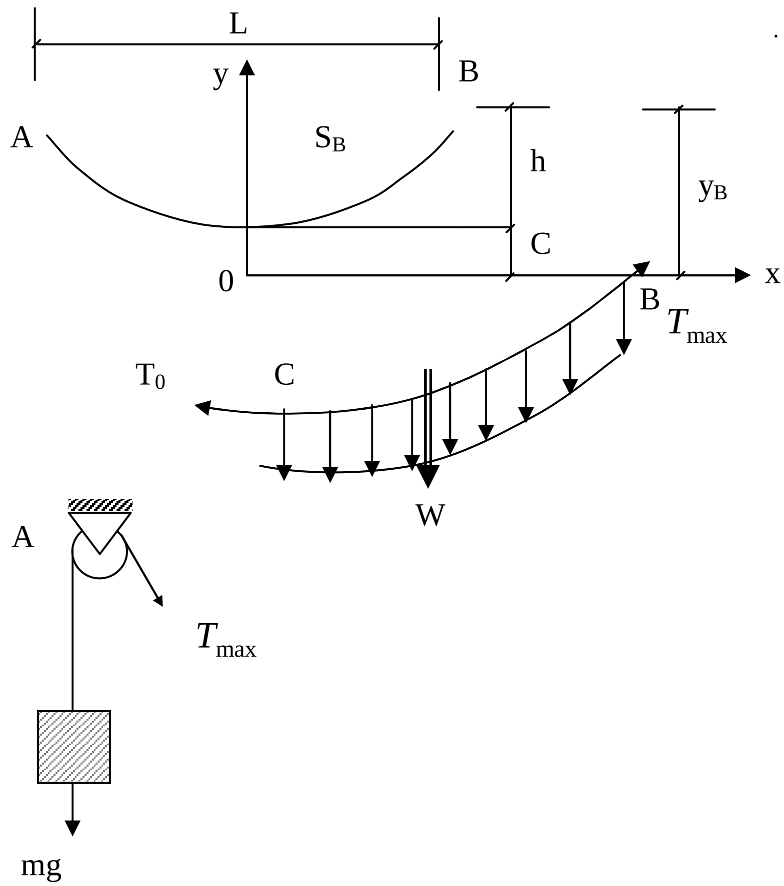
معین کنید .

الف) طول کابل از A تا B



ب) جرم کابل را بصورت جرم در طول

از جرم کابل در قسمت AD صرفنظر گردد .



$$T_0 = \omega c$$
$$W = \omega c$$
$$T = \omega y$$

$$T_{\max} = T_A = T_B = 392.4 \quad (N)$$
$$L = 15\ m \quad , \quad x_B = 7.5\ m \quad , \quad h = 5\ m$$

$$y_B = C \operatorname{Cos} h \frac{x_B}{C} = C \operatorname{Cos} h \frac{7.5}{C} \qquad y_B = h + C = 5 + C$$

$$C \operatorname{Cos} h \frac{7.5}{C} = 5 + C \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Cos} h \frac{7.5}{C} = \frac{5}{C} + 1 \quad \Rightarrow \quad C = 6.3175 \quad (m)$$

$$y^2 - S^2 = C^2 \quad , \quad S_B = C \sin h \frac{x_B}{C}$$

$$S_B = 6.3175 \ \sin h\frac{7.5}{6.3175} = 9.39 \quad (m) \qquad \Rightarrow \qquad 2S_B = 18.78 \ (m)$$

$$T_{\max} = \omega \ y_B = \omega\,(h+C) \Rightarrow \qquad 392.4 = \omega \ (5 + 6.3175)$$

$$w = 34.67 \quad N/m$$

$$m' = \frac{w}{g} = \frac{34.67}{9.81} = 3.53 \quad Kg/m$$

فصل هشتم

اصطکاک

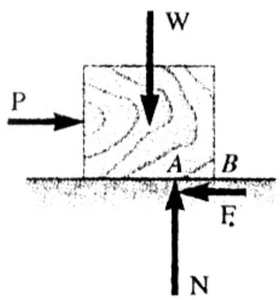
برای سطوحی که سخت و خشن می‌باشند. اگر جسمی با آن سطح در تماس بیافتد. حتماً نیرویی به نام اصطکاک بین آن دو بوجود می‌آید. البته بعضی از اوقات دو جسم در مقابل حرکت روی هم دارای هیچ نوع اصطکاکی نخواهند بود. یعنی اینکه سطح‌های آنها دارای اصطکاک نیستند. البته این مسئله کلاً در هیچ نوع جسمی صدق نمی‌کند چونکه اصطکاک همیشه خواهد بود حت اگر تعداد آن ناچیز باشد.

پس اصطکاک نیرویی است که در مقابل با حرکت ممانعت خواهد کرد و جهت آن نیرو مخالف جهت حرکت خواهد بود.مقدار اصطکاک یک حدی خواهد داشت که متناسب است با مقدار نیروی عمود بر سطح (جهت اصطکاک)

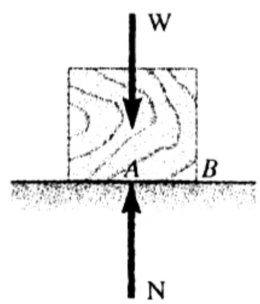
انواع اصطکاک:

- اصطکاک خشک: Columb Friction
- اصطکاک مایعات: Fruid Friction

قوانین اصطکاک خشک: ضریب اصطکاک



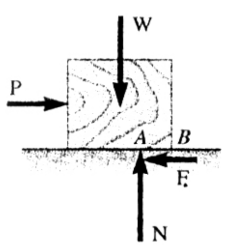
(ب)

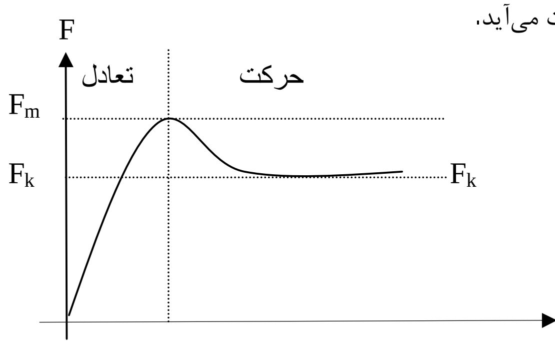


(الف)

اگر P اضافه شود همینطور F هم اضافه شود تا اینکه مقدار P به حد ماکزیمم F_m می‌رسد. اگر P از حد F_m بگذرد دیگر بالانس تعادل استاتیکی برقرار نخواهد بود. بعد از یک لحظه که حرکت آغاز شد، مقدار اصطکاک از حد F_m کمتر خواهد شد. مجازاً وضع مولکولی حجم و سطح و نفوذ آن مولکول‌ها نسبت به هم در موقع حرکت، کمتر خواهد شد. و از آن به بعد سرعت آن بلوک اضافه خواهد گردید در حالیکه بزرگی اصطکاک، ثابت خواهد ماند.

اگر P کوچک باشد این بلوک حرکت نخواهد کرد. یعنی نیرویی می‌بایست باشد که به آن اصطکاک می‌گویند و مقاومت در موقع حرکت خواهد داشت.





بسته به نوع وضعیت سطح تماس دارند و بصورت تقریبی از روی آزمایشات بدست می‌آید.

ضریب اصطکاک ایستایی: μ_s

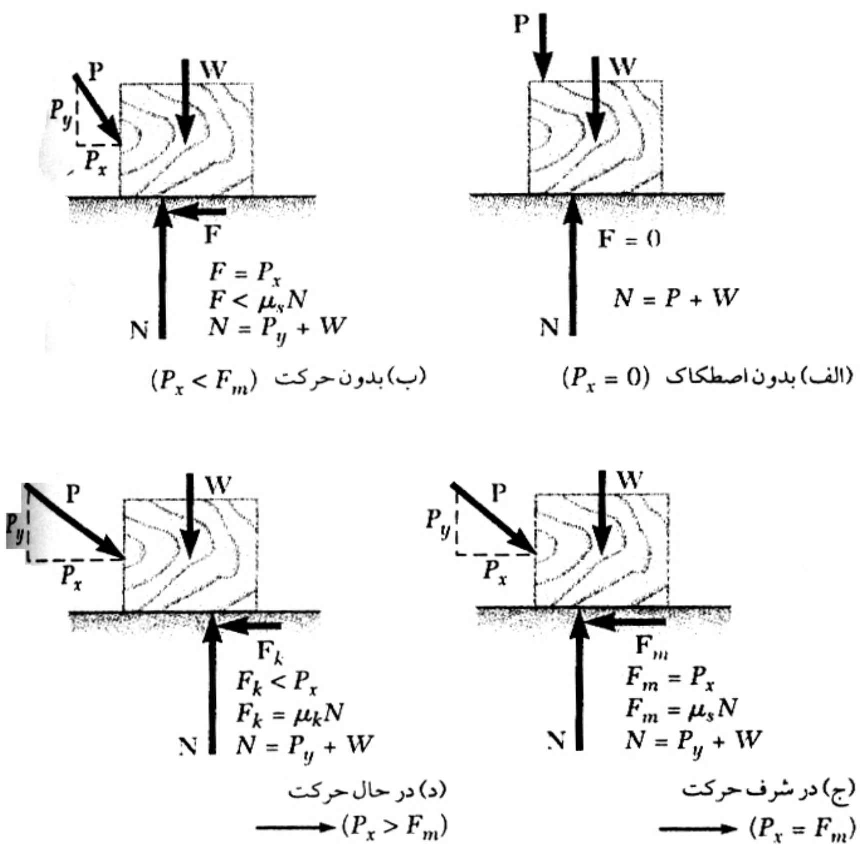
ضریب اصطکاک: μ_x

آزمایشات بدست می‌آید.

$$\begin{cases} F_m = \mu_s N \\ F_x = \mu_x N \end{cases}$$

مقادیر تقریبی ضریب اصطکاک ایستایی برای سطوح خشک

فلز روی فلز	۰ر۱۵ـ۰ر۶۰
فلز روی چوب	۰ر۲۰ـ۰ر۶۰
فلز روی سنگ	۰ر۳۰ـ۰ر۷۰
فلز روی چرم	۰ر۳۰ـ۰ر۶۰
چوب روی چوب	۰ر۲۵ـ۰ر۵۰
چوب روی چرم	۰ر۲۵ـ۰ر۵۰
سنگ روی سنگ	۰ر۴۰ـ۰ر۷۰
خاک روی خاک	۰ر۲۰ـ۱ر۰۰
لاستیک روی سیمان	۰ر۶۰ـ۰ر۹۰



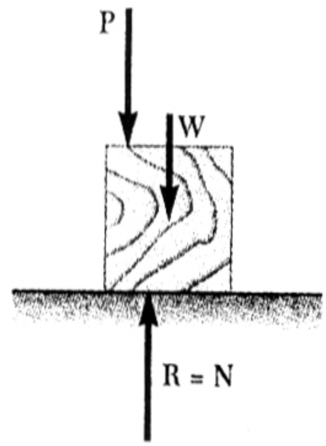
زاویه اصطکاک:

بعضی از اوقات بهتر است که نیروی اصطکاک و نیروی عمودی (نرمال) N

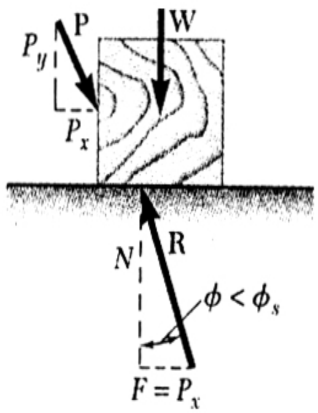
را با یک نیرو جانشین کرد. این نیروی برآیند را R می‌نامیم.

زاویه‌ی اصطکاکی دینامیکی = ϕ_n

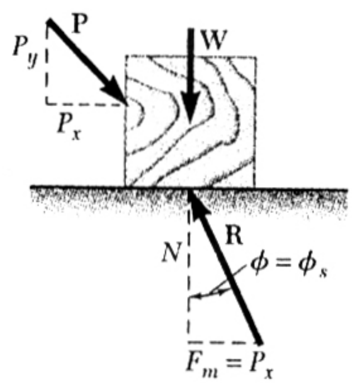
زاویه‌ی اصطکاکی استاتیکی = ϕ_s



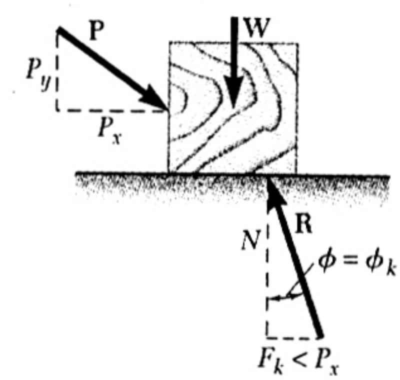
(الف) بدون اصطکاک



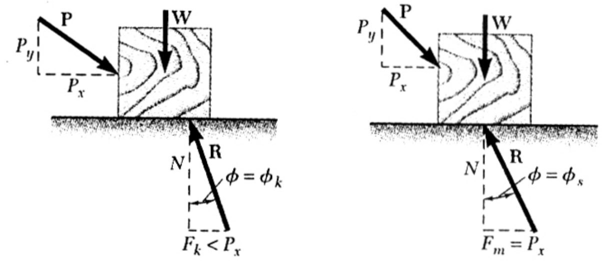
(ب) بدون حرکت



(ج) در شرف حرکت ⟶

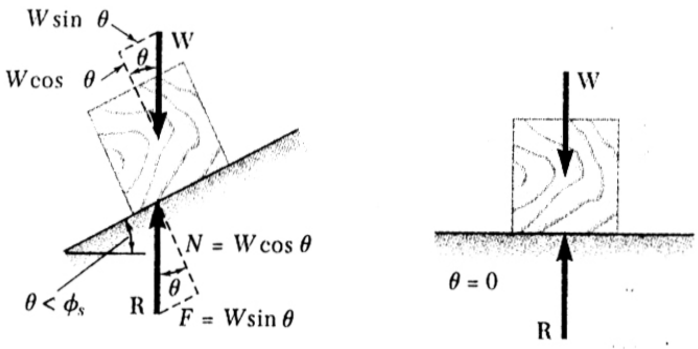


(د) در حال حرکت ⟶

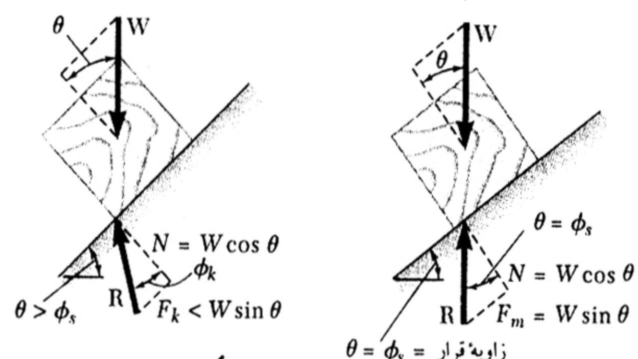


(ج) در شرف حرکت ← (د) در حال حرکت ←

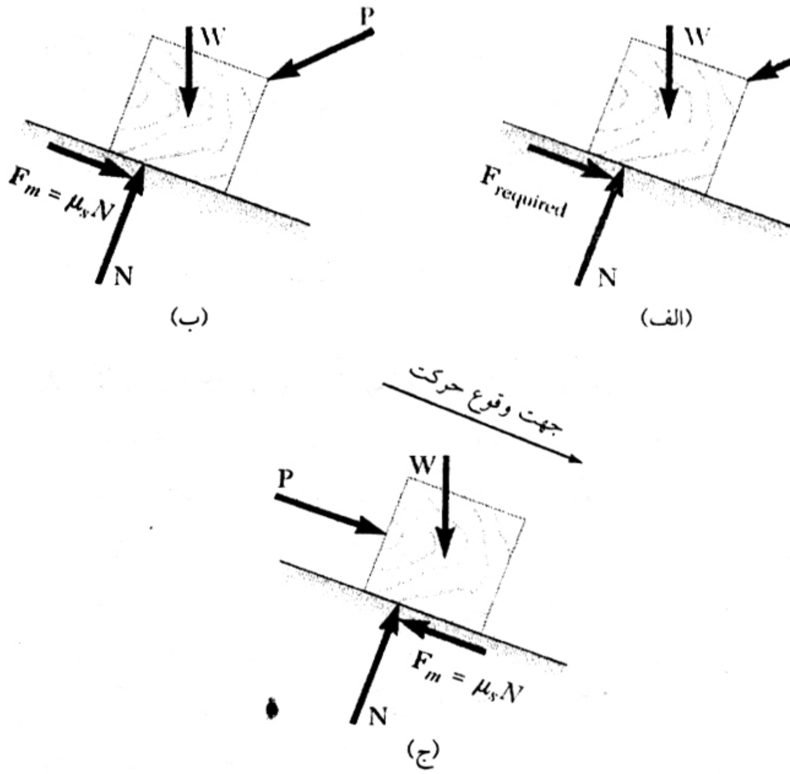
اصطکاک در سطح شیب‌دار:



(الف) بدون اصطکاک (ب) بدون حرکت



(ج) در شرف حرکت (د) در حال حرکت

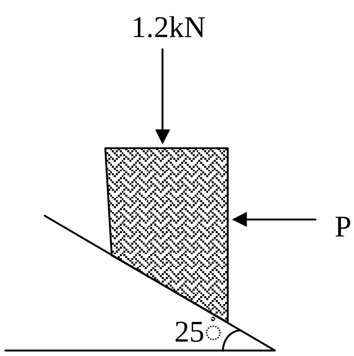


مثال ها:

مثال: گروه اول مسائل اصطکاکی

الف) بدست بیاورید اگر بلوک در حال تعادل است یا خیر $\mu_k = 0.25$

ب) بدست بیاورید مقدار و جهت نیروی اصطکاک $P = 750N$



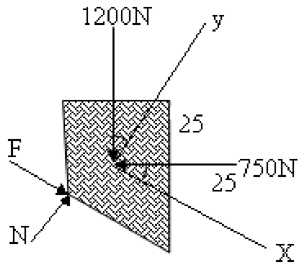
$$\Sigma F_x = 0 \;\rightarrow\; F + 1200\,sin\,25 - 75^o\,cos\,26 = 0$$

$$F = 172.6\ (N)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - (1200)\,cos\,26 - 750\,sin\,26 = 0$$

$$N = 1404.5\ \ (N)$$

$$F_m = \mu_s N = 1404.5(0.36) = 491.6\ (N)$$

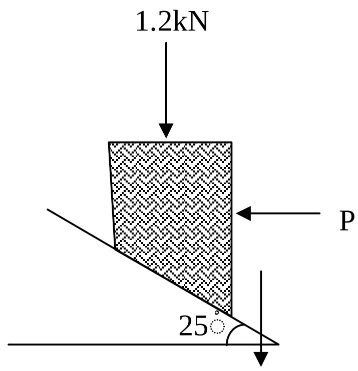


$F < F_m \rightarrow$ تعادل برقرار است $F = 172.6\ (N)$

مثال : گروه دوم مسائل اصطکاکی۲

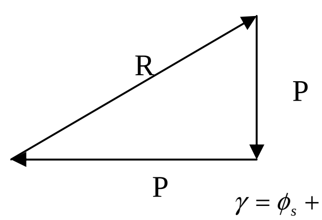
(الف) کمترین مقدار θ را که بلوک را به طرف بالا به حرکت در آورد، بدست بیاورید.

(ب) کمترین مقدار P را که بلوک مقابل را پس از حرکت بطرف بالا در حال حرکت نگهدارد ، بدست بیاورید.

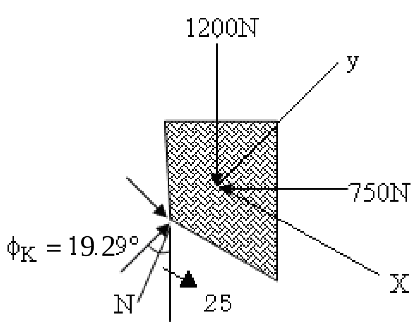


الف)

$\phi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.29^o$

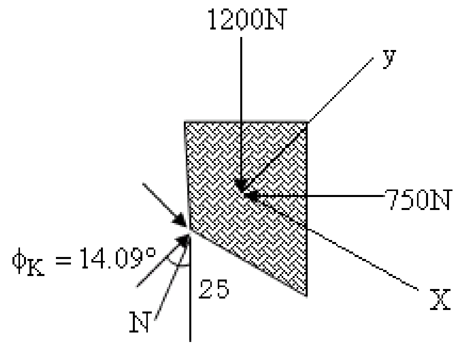


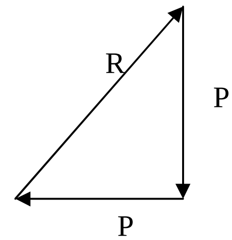
$\gamma = \phi_s + \theta = 44.29^o$



$p = 1200 \tan 44.29 = 1171(N)$

ب)

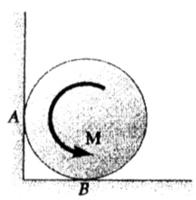




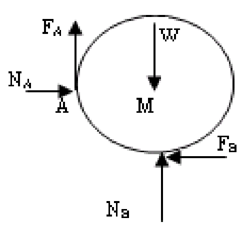
$$\gamma = \phi_k + \theta = 39.09°$$

$$p = 1200 \tan 39.04 = 973(N)$$

مثال : بدست بیاورد مقدار کوپل M به دیسک مقابل وارد می‌شود و هیچ چرخی وارد نمی‌کند. وزن دیسک W می‌باشد با ضریب اصطکاک μ_s



$$F_A = \mu_s M \qquad F_B = \mu_s N_B$$



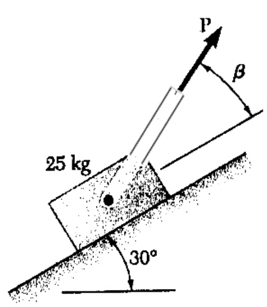
$$\Sigma M_B = 0 \qquad M - r F_A - r = 0 \qquad M = kN_A(1+\mu_s)$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad N_A - F_B = 0 \qquad \rightarrow N_A = \mu_s N_B$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad N_B + F_A - W = 0 \qquad \rightarrow N_B = W - \mu_s N_A$$

$$N_A = \mu_s(W - \mu_s N_A) \rightarrow N_A = \frac{\mu_s W}{1+\mu_s F}$$

$$N = Wr\,\mu_s \left(\frac{1+\mu_s}{1+\mu_s^2}\right)$$



مثال :

معین کنید مقدار و جهت حداقل نیروی P را:

الف) برای شروع حرکت بطرف بالا

ب) نیروی لازم برای جلوگیری حرکت جسم بطرف پائین

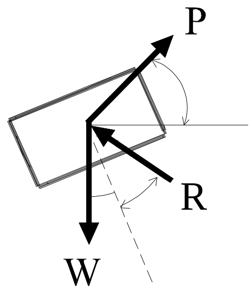
W=40(lb)

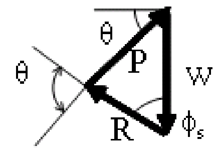
α =25°

μ_s =0.20

$$\Rightarrow \quad \phi_s = 11.3° \qquad \tan\phi_s = \mu_s = 0.20$$

الف)





40(lb)

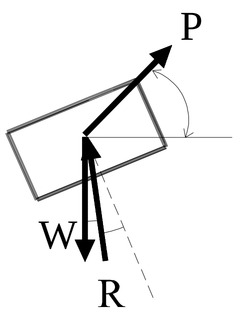
$25° + 11.3° = 36.3°$

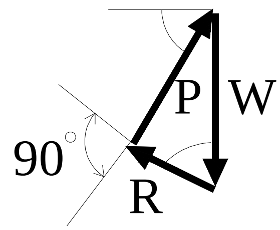
$\theta = 36.3°$

برای حداقل P
این زاویه 90° است

P = 40 sin36.3° = 23.7 (lb)

ب)





40(lb)

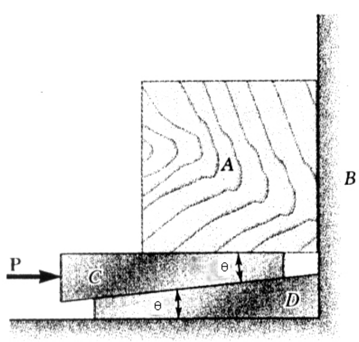
$25° - 11.3° = 13.7°$

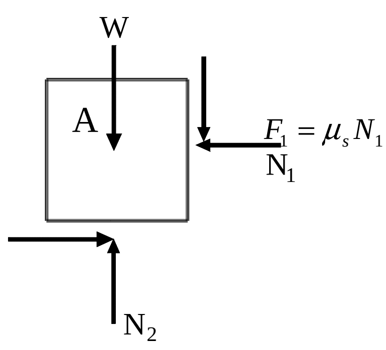
$\theta = 13.7$

P = 40 sin13.7° = 9.47 (lb)

نگاه دارنده (گاوه–WEDGE)

ابزار و یا ماشین هایی هستند که برای بالا بردن بلوک ها وسنگ ها و همینطور اجسام سنگین دیگر بکار میروند. این نیروهای سنگین را می توان بطریق وارد کردن یک نیروی کمتر بلند کرد .همینطور بخاطر شکل این نگاهدارنده ها بعد از بلند کردن این اجسام آنها به حالت خوب بخاطر اصطکاک در همان مکان ها خواهند ماند . مثلاً بخواهیم بلوک A را با کمترین نیروی p به طرف بالا ببریم..



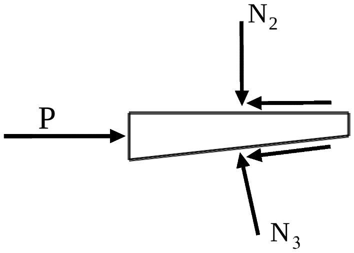


$F_2 = \mu_s N_2$

W = معلوم

P = ?

N_1 , N_2 , N_3 ,P : نامعلوم



$F_2 = \mu_s N_2$

$F_3 = \mu_s N_3$

از شکل ۱

$\sum F_X = 0$

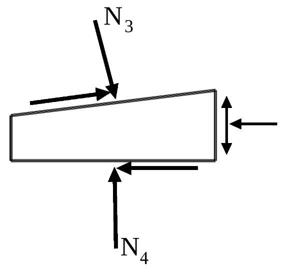
$\sum F_Y = 0$

از شکل ۲

$\sum F_X = 0$

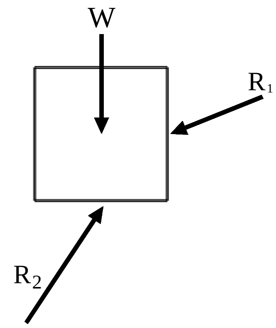
$\sum F_Y = 0$

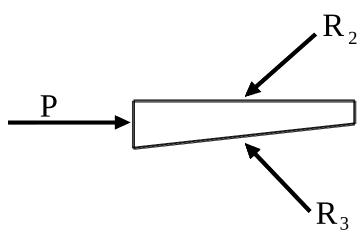
۴معادله و ۴ مجهول

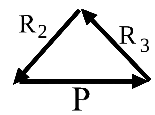


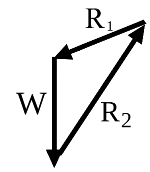
$F_4 = \mu_s N_4$

$F_3 = \mu_s N_3$









مثال : تیر مقابل توسط یک گاوه آهنی F , E تنظیم می شود . ورق CD به تیرAB جوش داده شده است . عکس العمل تیر توسط نیروهای خارجی به روی بتن برابر است با 100kN.

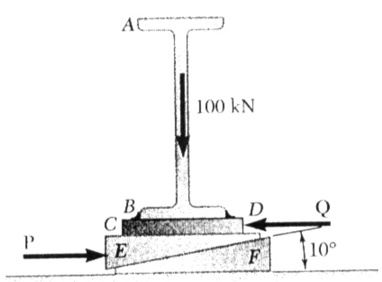
بین آهن ها $\mu_s = 0.30$

بین بتن و آهن $\mu_s = 0.60$

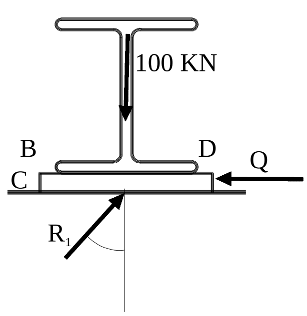
اگر حرکت افقی تیر مقابل توسط Q جلوگیری شود،بدست بیاورید:

الف) مقدار نیروی P را که برای بالا بردن این تیرلازم است.

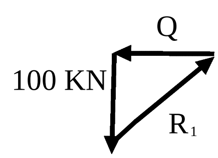
ب) مقدار Q را. (از وزن گوه ها صرف نظر کنید.)

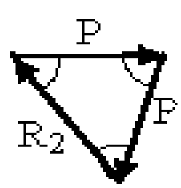


فرض می کنیم که به هنگام حرکت تیرآهن بوسیله ی گاوه وسطی ، گاوه زیرین حرکت نخواهد کرد.



$\phi_s = 16.7°$

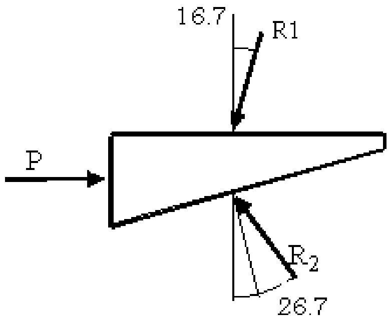




$\mu_s = 0.30 \qquad \phi_s = 16.7° \qquad \Rightarrow$

Q = (100) tan 16.7° = 30 kN $\leftarrow$

$$R_1 = \frac{100}{\cos 16.7°} = 104.4kN$$

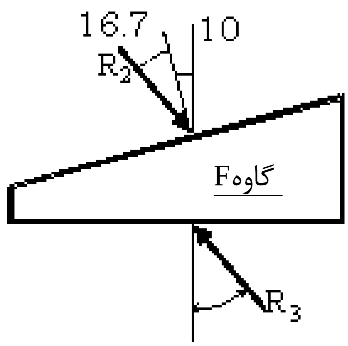


$90°-16.7° = 73.3°$, $90° – 26.7°=63.3°$

<u>گاوه E</u>

$26.7° + 16.7° = 43.4°$

می بایستی چک کنیم و ببینیم که آیا گاوه F لیز خواهد خورد یا خیر؟



$\theta = 16.7°+10° = 26.7°$

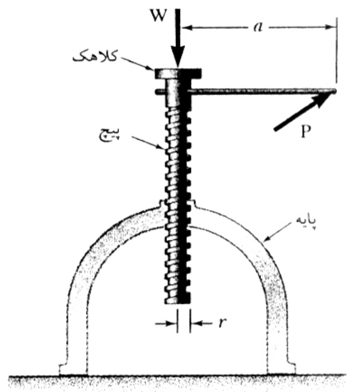
$\phi_{Conc} = \tan^{-1} 0.60 = 31.0°$

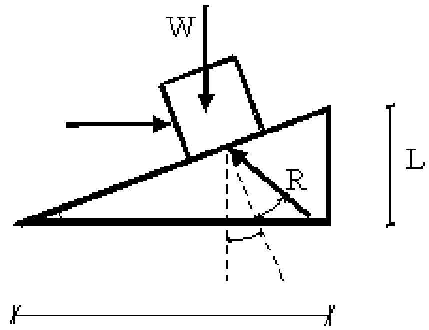
گاوه F حرکت نخواهد کرد $\Rightarrow$ $\theta < \phi$

پیچ ها – با برجستگی های مربعی (SQUARE-THREADED SCREWS)

این نوع پیچ ها برای جک ها وماشین های مختلف بکار می رود .

$P = ?$　　$Q = ?$



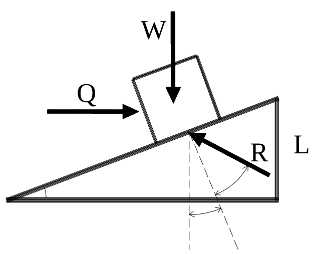


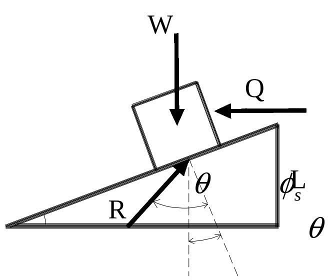
فاصله ای که پیچ بعد از یک دور با لاتر خواهد رفت . $= \frac{Pa}{r} = Q$

می بایستی از این شکل مقدار P را که لازم است وزن W را به بالا برد بدست بیاوریم.

سفت کردن پیچ $\leftarrow$ حرکت در حال شروع بطرف بالا

(برای بالا بردن W)





باز کردن پیچ $\leftarrow$ حرکت در حال شروع بطرف پائین

$\phi_s > \theta$

(حالت قفل کننده self locking

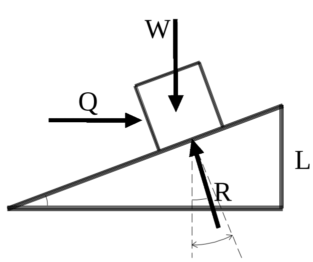
(برای پائین بردن W)

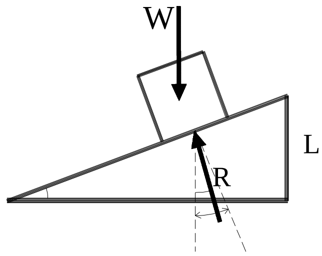
حرکت در حال شروع بطرف پائین

اگر $\phi_s < \theta$

برای نگه داشتن این جسم می بایستی

Q به طرفی که نشان داده شده است وارد شود .

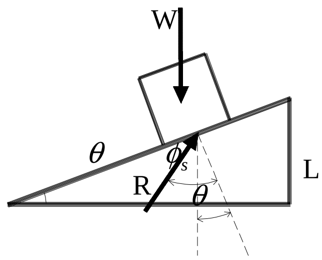




if $\phi_s < \theta$

حالت خود بخود باز شونده

(unwind)



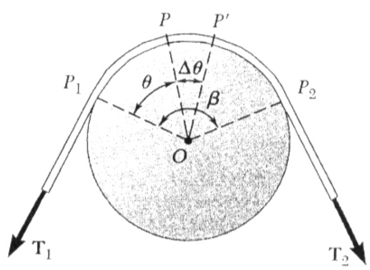
if $\phi_s > \theta$

حالت قفل کننده

(self locking)

اصطکاک تسمه

اگر تسمه مقابل را در نظر بگیریم و بدانیم که بعد از وارد کردن نیروی T_2 به طناب نیروی طناب در سر دیگر T_1 بستگی پیدا می کند به مقدار اصطکاک در روی قرقره .
اگر پس از وارد شدن نیروی T_2 این طناب در شرف حرکت شود سپس از رابطه زیر معادله T_2,T_1 بدست می آید .



(الف)

طناب نسبت به قرقره در شرف لیز خوردن می باشد یعنی هم قرقره و هم طناب با هم می چرخند .

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \qquad T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}$$

$$Ln\frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

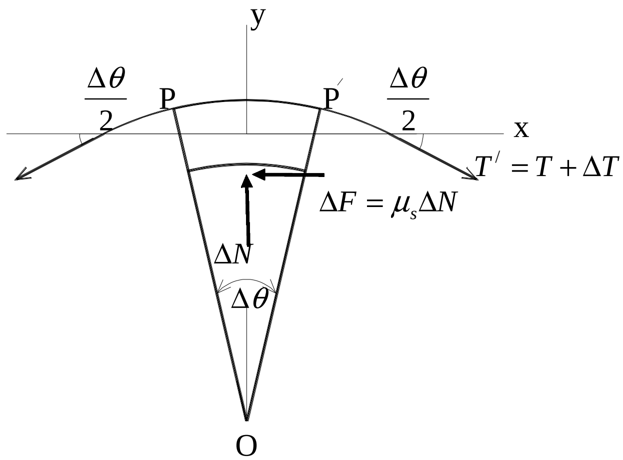
$\beta =$ مقدار زاویه ای که طناب به دور قرقره پیچیده شده است . (رادیان)

$$T_2 > T_1$$

اگر طناب پس از وارد شدن نیروی T_2 به آن به حرکت بیافتد ولیز بخورد سپس طناب نسبت به قرقره در حال حرکت است.

$$T_2 = T_1 e^{\mu_k \beta}$$

اگر طناب در روی قرقره به هیچ عنوانی در شرف حرکت نباشد و هیچ حرکت نداشته باشد دیگر روابط بالا برقرار نخواهد بود . در آن صورت $T_1 = T_2$



$\sum F_X = 0$ $\qquad$ $(T+\Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0$

$\sum F_Y = 0$ $\qquad$ $\Delta N - (T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} - T\sin\frac{\Delta\theta}{2} = 0$

$$\Delta N = (T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} + T\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\Delta T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(2T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta}\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s\left(T+\frac{\Delta T}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 0$$

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta\theta}{2} \to 0 \;\; \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

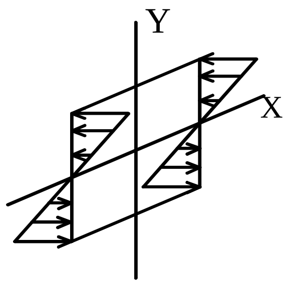
$$Ln\frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \qquad \Rightarrow \qquad \int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \int_0^{\beta}\mu_s d\theta$$

فصل نهم

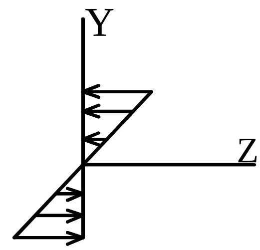
نیروهای گسترده و گشتاور لختی

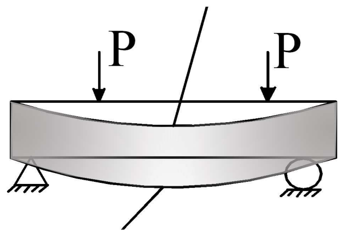
گشتا ورماند (ممان اینرسی)Moment of inertia

در طراحی تیرها باید به سرتاسر تیر نگاه کرد و حداکثر تنش موجود را بدست آورد.



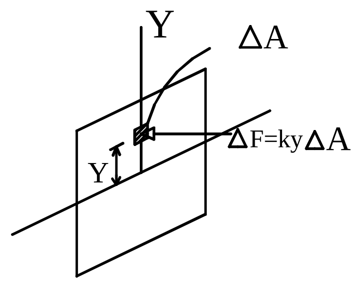
تار در فشار





تا ر در کشش

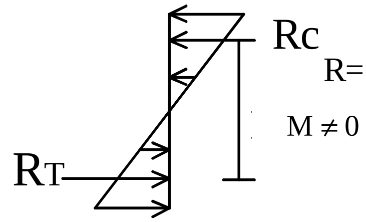
(□□□ □□□)



گشتاور اولیه مقطع حول محور x

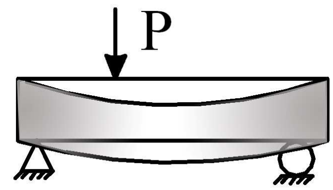
R= **∫ḱydA = ḱ∫ydA**

$$\int ydA = \overline{y}A = 0$$



R_T و R_Cایجاد یک کوپل میکنند.

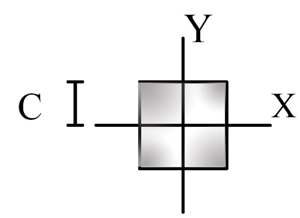
گشتاور دوم مقطع حول محور x یاممان اینرسی



$$\Delta M = y\Delta f = yky\Delta A$$
$$M = \int ky^2 dA = k\int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$
$$I_x = \int y^2 dA$$

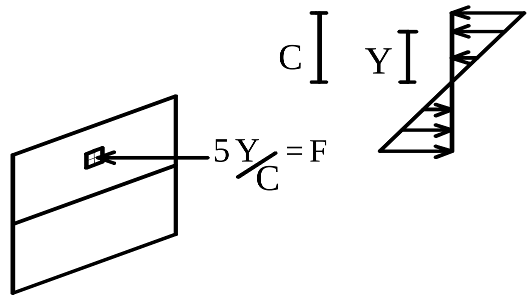
(□□□ □□□)



$$\sigma_x = \frac{m_c}{I_x}$$

(□□□ □□□)

ممان اینرسی تعریف خاصی ندارد اما می توان گفت که ممان اینرسی نمایانگرمقاومت جسم در مقابله با خمش است.هر چقدر ممان اینرسی زیادتر شود تنش بخاطر خمش کمتر خواهد شد و بالعکس.



$$\Delta P = fdA$$

$$\Delta M = y\Delta F = fydA = \frac{\sigma y}{c} ydA = \frac{\sigma y^2 dA}{c}$$

$$m = \int \frac{\sigma y^2 dA}{c} = \frac{\sigma}{c}\int y^2 dA \Rightarrow \sigma = \frac{mc}{\int y^2 dA} = \frac{MC}{I}$$

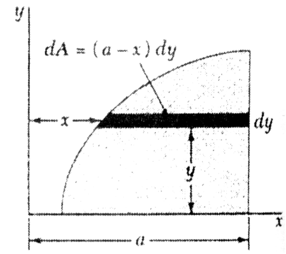
- بدست آوردن ممان اینرسی یک مساحت توسط روش انتگرالگیری

(□□□ □□□)

$$dI_y = x^2 dA$$
$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2{}_{el}\ dA$$

$$dI_x = y^2 dA$$
$$I_x = \int y^2 dA$$

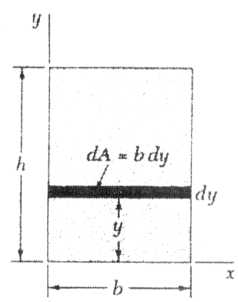
$$\bar{x} = \int x dA$$
$$\bar{x}^2 A \neq \int x^2 dA = I_y$$



([illegible])

- ممان اینرسی مقطع مستطیل:

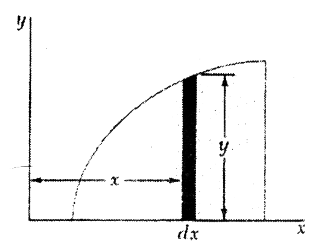
$$dA = b\,dy$$
$$dI_x = y^2 b dy$$
$$I_x = \int_0^h b y^2 dy = \frac{1}{3} b h^3$$



(۶-۹ [illegible])

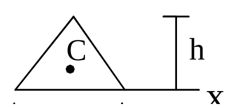
- ممان اینرسی از یک المان کوچک:

$$dI_y = x^2 dA = x^2 y dx$$
$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 dx$$



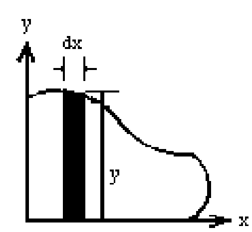
([illegible])

$$I_x = bh^3/36 + (\frac{h}{3})^2 (bh/2) = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}$$
$$\bar{I} = bh^3/36$$



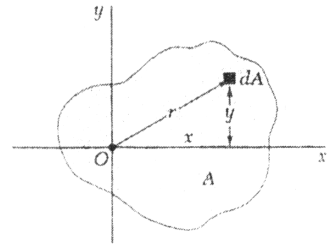
(۹[illegible])

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \Rightarrow \bar{x}A = \int x dA \Rightarrow \int \bar{x}_{el} dA = \int x dA$$
$$\bar{x}^2 \neq \sum x_i^{\,2} \Rightarrow \bar{x}^2 A \neq \int x^2 dA \Rightarrow \int \bar{x}_i^{\,2} dA \neq \int x^2 dA$$



([illegible])

ممان اینرسی قطبی(polar moment of inertia):



$J_o = \int r^2 dA$ گشتاورماند قطبی

(نسبت به یک نقطه)

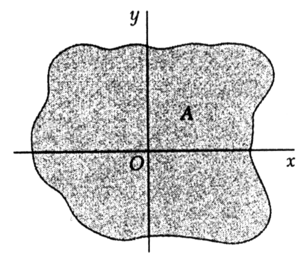
(□□□□□□□)

$$J_o = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA$$

$$J = I_x + I_y$$

- شعاع ژیراسیون یک مقطع(شعاع ماندradius of gyration) :

شعاع چرخشی سطحی



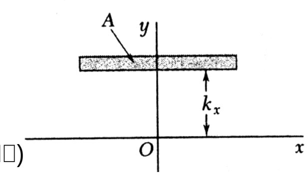
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow I_x = k_x{}^2 (A)$$

$k_x =$ شعاع ماند حول محور x

(□□□□□□□)

گشتاور سطح Aنسبت به محور x

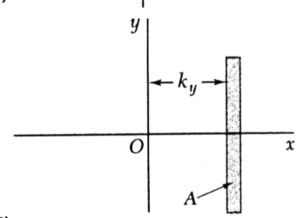
**هر چقدر k_x بزرگتر شود یعنی اینکه قسمتی از مساحت از تار خنثی بیشتر فاصله خواهد گرفت



(□□□□□□□□)

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow I_y = k_y{}^2 (A)$$

$k_y =$ شعاع ماند حول محور y

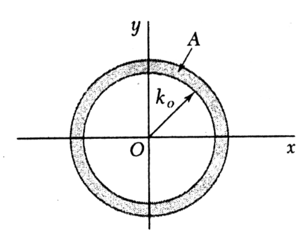


(□□□□□□□□)

(ج)

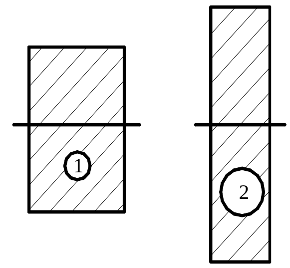
$$k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}} \Rightarrow J_o = k_o{}^2 (A)$$

$k_o =$ شعاع ماند حول یک نقطه

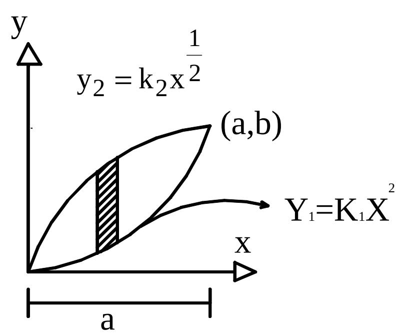


(□□□□ □□□)

$$r_0 \approx 0 < r_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} < r_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$



مثال:گشتاور لختی سطح مشخص شده را نسبت به محورyها مشخص کنید؟



$$y_1 = k_1 x^2 \Rightarrow b = k_1 a^2 \Rightarrow k_1 = \frac{b}{a^2} \Rightarrow y_1 = \frac{b}{a^2} x^2$$

$$y_2 = k_2 x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = k_2 a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y_2 = \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$dI_y = x^2 dA = x^2 (y_2 - y_1) dx$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 (y_2 - y_1) dx = \int_0^a x^2 \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{1}}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{a^2} x^2\right) dx$$

$$= \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \int_0^a x^{\frac{5}{2}} dx - \frac{b}{a^2} \int_0^a x^4 dx = \frac{3}{35} a^3 b$$

$$dI_x = \left(\frac{1}{3} {y_2}^3 - \frac{1}{3} {y_1}^3\right) dx = \frac{1}{3}\left(\frac{b^3}{a^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{b^3}{a^6} x^6\right) dx$$

$$I_x = \int dI_x = \frac{3}{35} a b^3$$

$$dI_x = {y_1}^2 x dy - {y_2}^2 x dy$$

$$dI_x = \left(\frac{b}{a^2} x^2\right)^2 x dy - \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}}\right)^2 x dy$$

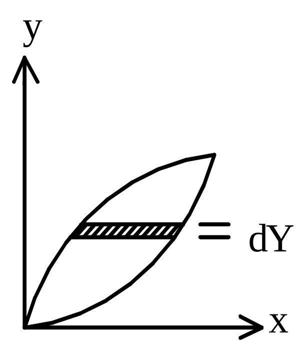
$$= \frac{b^2}{a^4} x^5 dy - \frac{b^2}{a} x^2 dy$$

$$I_x = \int di_x = \dots$$

$$A = \dots$$

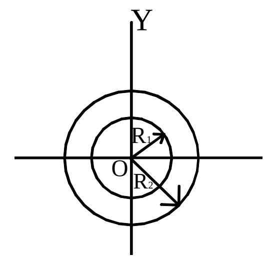
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$



مثال: گشتاور لختی قطبی وگشتاور لختی حول محور yها رابدست آورید؟

$$dA = 2\pi r dr$$



(□□□□ □□□)

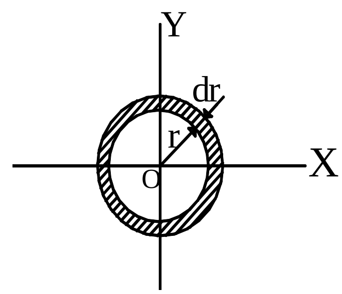
$$dJ = r^2 dA = r^2 (2\pi r dr) = 2\pi r^3 dr$$

$$J = \int dJ = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 = 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_{R_1}^{R_2}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$$

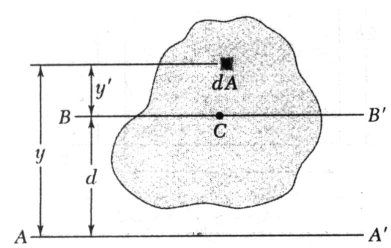
$$J = I_x + I_y - 2I_x$$ (□□□□ □□□)

$$I_x = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$



تئوری محورهای موازی:

(□□□□ □□□)



نسبت به محور AA'

$$I = I_{AA'} = ?$$

$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + \int d^2 dA + \int 2dy' dA$$

$$I = \int y'^2 dA + d^2 \int dA + 0$$

$$\boxed{I = \bar{I} + d^2 A}$$

$I =$ گشتاورماندنسبت به هر محور

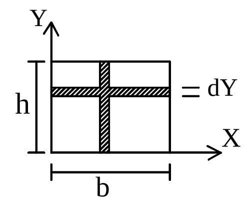
$\bar{I} =$ گشتاور ماند نسبت به محور مرکز سطح

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

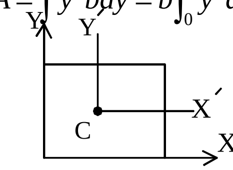
$$J_0 = \overline{J_0} + d^2 A$$

$$k_0^2 = \overline{k_0}^2 + d^2$$

مثال:



$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 b dy = b\int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3}$$

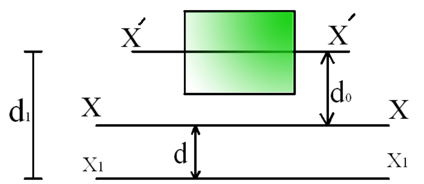


$$I = \overline{I} + Ad^2$$

$$\overline{I} = I - Ad^2 = \frac{bh^3}{3} - bd(\frac{h}{2})^2 = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x =$$

$$I_{x_1} = ?$$



$$I_x = \overline{I} + Ad_0^{\,2}$$

$$\overline{I} = I_x - Ad_0^{\,2}$$

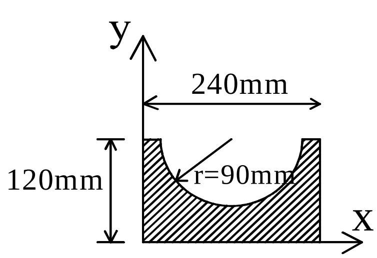
$$I_{x_1} = \overline{I} + Ad_1^{\,2} = I_x - Ad_0^{\,2} + Ad_1^{\,2}$$

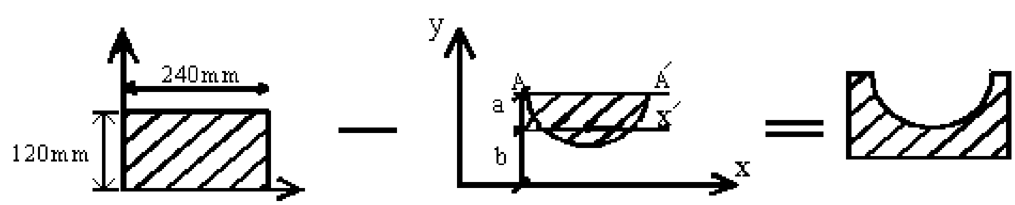
$$I_{x_1} \neq I_x + Ad^2$$

$$d = d_1 - d_0$$

مثال:ممان اینرسی شکل مقابل را نسبت به محور x

بدست آورید.





$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240)(120)^3 = 138.2\times10^6 mm^4$$

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\times90}{3\pi} = 38.2mm$$

$$b = 120 - a = 81.8mm$$

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76*10^6 mm^4$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi (90)^2 = 12.72 * 10^3 mm^2$$

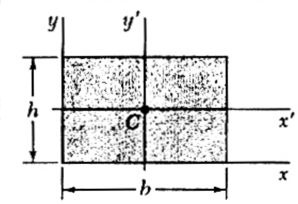
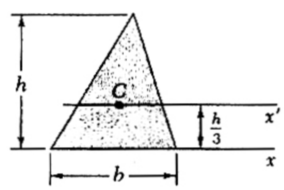
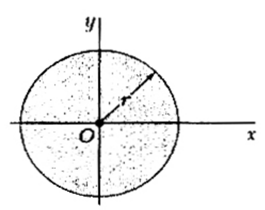
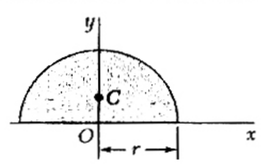
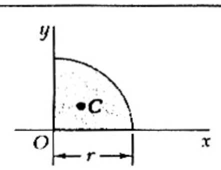
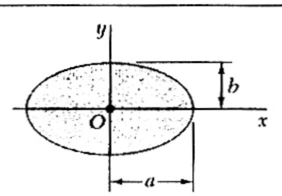
$$I_{AA'} = \overline{I_{x'}} + Ad^2$$

$$25.76 * 10^6 = \overline{I_{x'}} + (12.72 * 10^3)(38.2)^2$$

$$\overline{I_{x''}} = 7.20 \times 10^6 mm^4$$

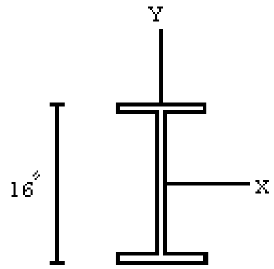
$$I_x = \overline{I_{x'}} + Ab^2 = 7.20 \times 10^6 + (12.72 \times 10^3)(81.8)^2 = 92.3 \times 10^6$$

$$I_x = 138.2 \times 10^6 - 92.3 \times 10^6 = 45.9 \times 10^6 mm4$$

مستطیل		$\overline{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\overline{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
مثلث		$\overline{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
دایره		$\overline{I}_x = \overline{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
نیم‌دایره		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
ربع دایره		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
بیضی		$\overline{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\overline{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

([illegible])

ممان اینرسی سطوح مختلط:

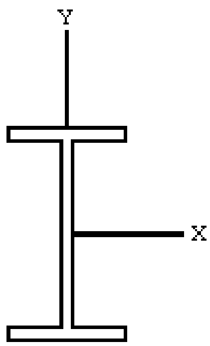


W16*64 A=18.80 in^2

ارتفاع=16″ $I_x = 836 in^4$ $h_x = 6.66''$

وزن=64 $\frac{lb}{ft}$ $I_y = 73.3 in^4$ $h_y = 1.97''$

(□□□□ □□□)

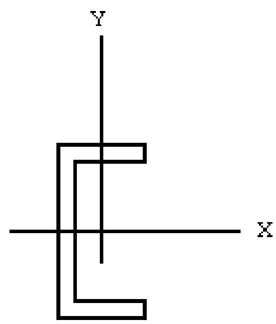


$s'18*70$

shorthange

بال کوتاه

(□□□□ □□□)



$10*25$ *hamnel*

ناودانی

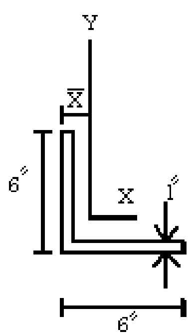
$A = 7.35 in^2$

$\bar{x} = .62'''$

$I_x = 91.2 in^4$

$I_y = 24 in^4$

(□□□□ □□□)



L6*6*1

$A = 11.0 in^2$ $\bar{x} = \bar{y} = 1.80''$

$I_x = 35.6 in^4$ $I_y = 35.5 in^4$

$k_x = 1.80 in$ $k_y = 1.83 in$

Angle

نبشی

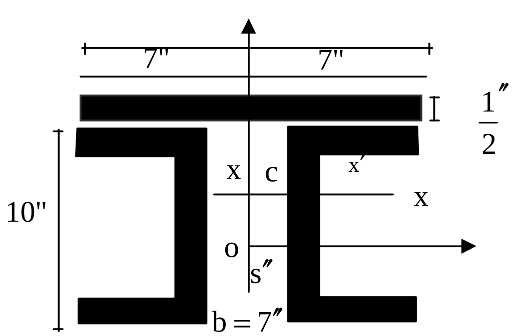
(□□□□ □□□)

مثال:

نسبت به مرکزسطح

$I'_x = ?$

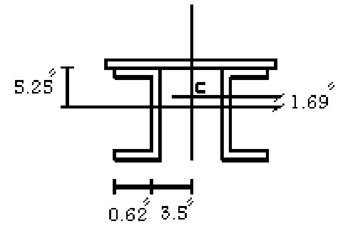
$I'_y = ?$



(□□□□ □□□)

	A	ȳ	ȳA
P14*1/2	7	5.25	36.75
C10*25	7.35	0	0
C10*25	7.35	0	0
Σ کل	21.7	2.25	36.75

$$\overline{Y}\sum A_i = \sum \overline{Y}_i A_I \Rightarrow \overline{Y}(21.7) = 36.75$$
$$\Rightarrow \overline{Y} = 1.69''$$



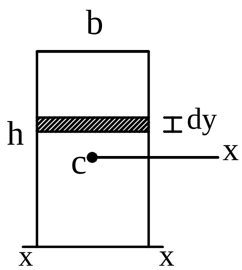
(□□□□ □□□)

ورق1: $I_x = \overline{I_x} + Ad^2 = \frac{1}{12}(0.5)^3(0.4) + (0.5)(14)(5.35 - 1.694)^2 = 88.7in^4$

نبشی2: $I_x = \overline{I_x} + Ad^2 = 91.2 + 7.35(1.69)^2 = 112.3in^4$

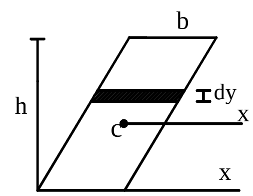
$$I_x = I_x 1 + 2I_x 2 = 88.7 + 2 * 112.3 = 313in^4$$

کل $I_y = \frac{1}{12}(05)(14)^3 + 2(8.4 + 7.35(3.5 + .62)^2) = 114.3 + 2 * 128.2 = 371in^4$



$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$
$$\overline{I_x} = \frac{bh^3}{12}$$

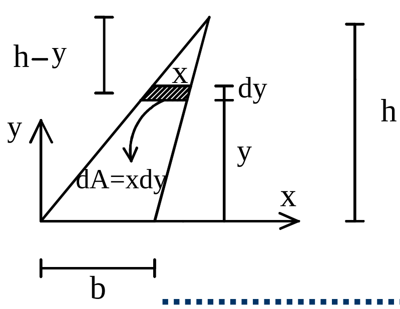
(□□□□ □□□)



$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$
$$\overline{I_x} = \frac{bh^3}{12}$$

(□□□□ □□□)

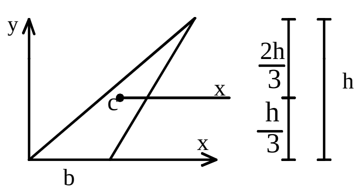
(□□□□ □□□)



ازمثلث های مشابه:

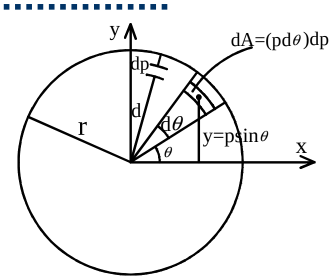
$$x = \frac{b}{h}(h - y)$$
$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h - y)dy$$
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

(□□□□ □□□)



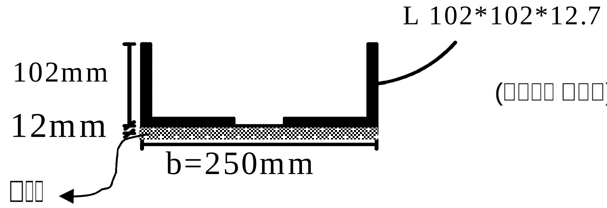
$$I_x = \overline{I_x} + Ad^2 \Rightarrow \frac{bh^3}{12} = \overline{I_x} + (\frac{bh}{2})(\frac{h}{3})^2$$
$$\overline{I_x} = \frac{bh^3}{36}$$

(□□□□ □□□)

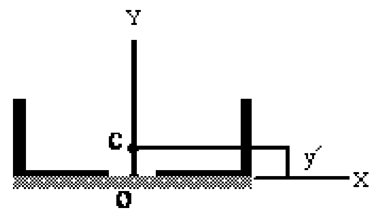


$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^r \int_0^{2\pi} (\rho \sin\theta)^2 \rho d\theta dp = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta d\vartheta d\rho$$
$$I_x = \int_0^{2\pi} (\int_0^r \rho^3 d\rho) \sin^2 \theta d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

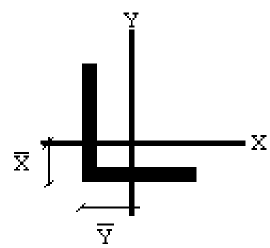
مثال:



$$I_x = ?$$
$$I_y = ?$$



$$A = 2420mm^2$$
$$\overline{I_x} = \overline{I_y} = 2.31\times10^6\, mm^4$$
$$\overline{x} = \overline{y} = 30mm$$



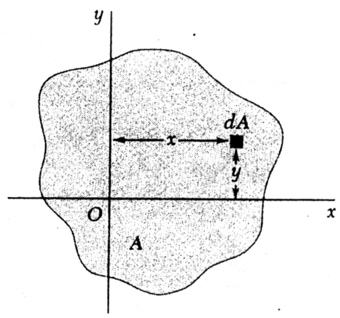
$$\overline{y} = \frac{2\times2420\times30 - 12\times250\times6}{2420\times2 + 12\times250} = 16.22mm$$

برای ورق :
$$\overline{I_x} = \overline{I_{x'}} + Ad^2 = \frac{1}{12}\times250\times12^3 + 12\times250\times(16.22+6)^2 = 1.52\times10^6\, mm^4$$
$$\overline{I_y} = \frac{1}{12}\times12\times250^3 = 15.63\times10^6\, mm^4$$

برای نبشی ها :
$$\overline{I_x} = 2(\overline{I_{x'}} + Ad^2) = 2(2.31\times10^6 + 2420\times(30-16.22)^2) = 5.54\times10^6\, mm^4$$
$$\overline{I_y} = 2(\overline{I_{y'}} + Ad^2) = 2(2.31\times10^6 + 2420(125-30)^2) = 48.3\times10^6\, mm^4$$

برای کل مقطع :
$$\overline{I_x} = 1.52\times10^6 + 5.54\times10^6 = 7.06\times10^6\, mm^4$$
$$\overline{I_y} = 15.6\times10^6 + 48.3\times10^6 = 63.93\times10^6\, mm^4$$

حاصل ضرب اینرسی: product of inertia(I_{xy})



(□□□□ □□□)

$I_{xx}=\int y^2dA>0$

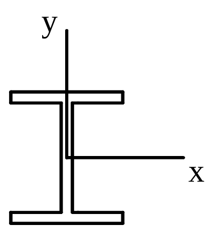
$I_{yy}=\int x^2dA>0$

برخلاف I_{xx} , I_{yy}

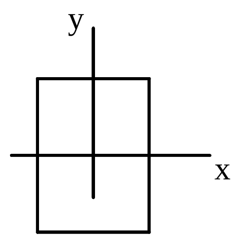
$I_{xy}=\int xydA$

$I_{xy}>0$ یا $I_{xy}<0$

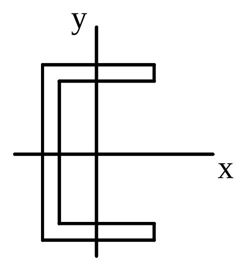
**برای اشکال قرینه نسبت به یک یا دو محور $I_{xy}=0$ است.



$I_{xy}=0$

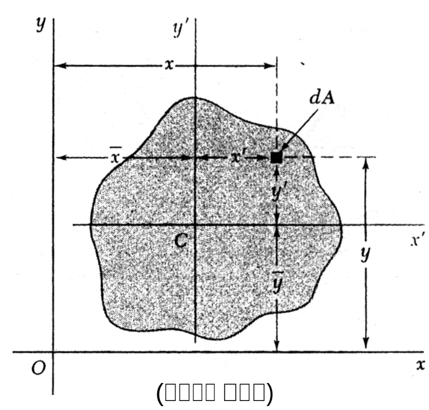


$I_{xy}=0$



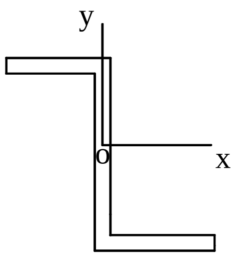
$I_{xy}=0$

برای اشکال قرینه نسبت به یک نقطه (به غیر از دایره) $I_{xy}\neq 0$



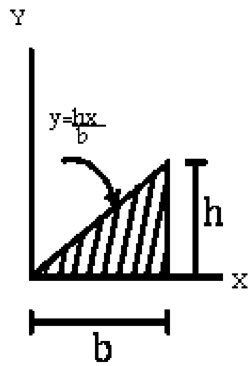
(□□□□ □□□)

$$I_{xy}=\bar{I}_{x'y'}+\bar{x}\bar{y}A$$



$I_{xy}\neq 0$

مثال: $I_{xy}=?$

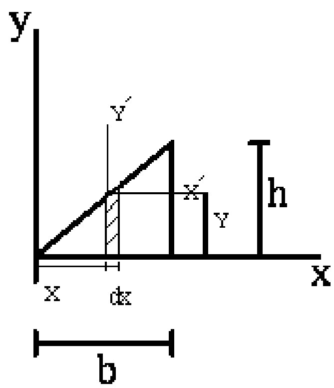


(□□□□ □□□)

$$I_{xy}=\int dI_{xy}$$
$$dI_{xy}=d\overline{I}_{x'y'}+\overline{x}_{el}\overline{y}_{el}dA$$
$$d\overline{I}_{x'y'}=0$$
$$\overline{x}_{el}=x$$
$$\overline{y}_{el}=\frac{y}{2}$$

برای یک المان جز

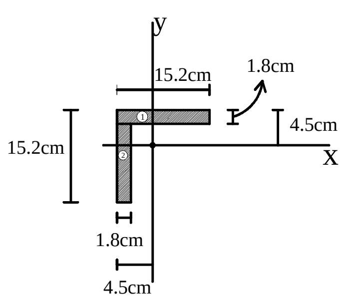
$$dA=ydx,\ y=\frac{hx}{b}$$
$$I_{xy}=\int dI_{xy}=0+\int_0^b x(\frac{1}{2}y)ydx=\frac{1}{2}\int_0^b x(\frac{hx}{b})^2dx$$
$$I_{xy}=\frac{1}{8}h^2b^2$$

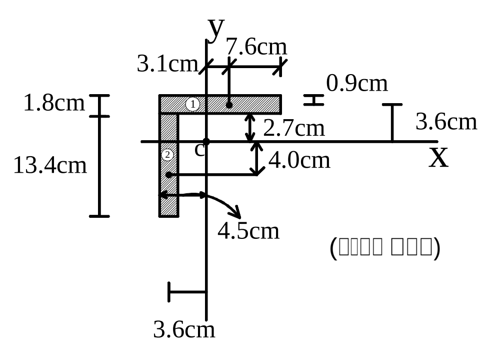


$$I_{xy}=\int_A xydA=\int_0^b x(\int_0^{\frac{hx}{b}}ydy)dx=\int_0^b x\frac{h^2x^2}{2b^2}dx=\frac{h^2x^4}{8b^2}\Big|_0^b=\frac{h^2b^2}{8}$$

(□□□□ □□□)

مثال: $I_{xy}=?$





(□□□□ □□□)

به خاطر قرینه بودن هر قسمت $\overline{I_{x'y'}}=0$

	$A(cm^2)$	$\overline{X}(cm)$	$\overline{Y}(cm)$	$\overline{X}\overline{Y}A$
1	27.4	3.1	3.6	306
2	24.1	-3.6	-4.0	347
$\sum$	55.5	-5.0	-0.4	653

$$I_{xy}=\sum\overline{I_{x'y'}}+\sum\overline{x}\overline{y}A=\sum\overline{x}\overline{y}A$$

$$I_{xy}=\sum\overline{X}\overline{Y}A=653cm=6.53\times10^6mm^4$$

$$I_{x'}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos2\theta-I_{xy}\sin2\theta\Rightarrow$$

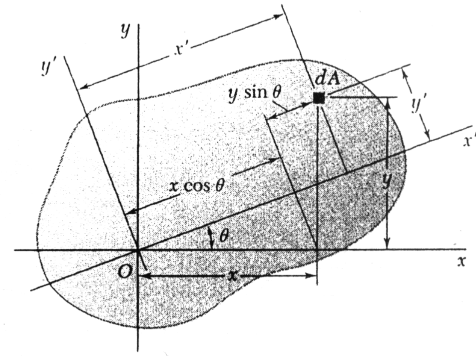
$$I_{y'}=\frac{I_x+I_y}{2}-\frac{I_x-I_y}{2}\cos2\theta+I_{xy}\sin2\theta\Rightarrow$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

$$I_{\max,\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I^2_{xy}}$$ محورهای اصلی اینرسی

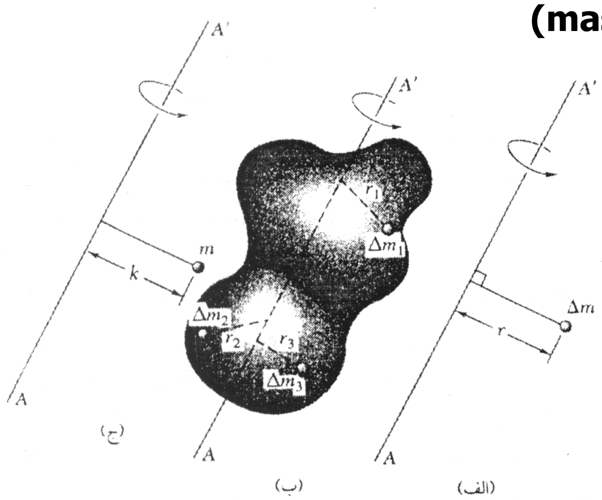
$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$



(□□□□ □□□)

ممان اینرسی جرم(mass moments of inertia)



(□□□□ □□□)

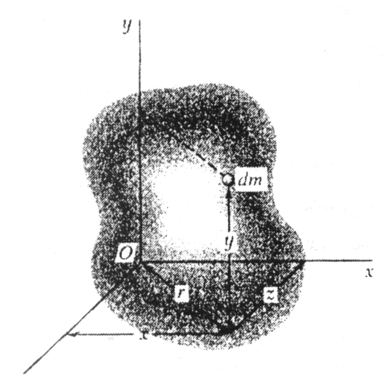
مانند سطح یک جرم Δm را در فاصله r^2 ضرب کنیم بصورت $r^2\Delta m$ می‌توانیم آنرا ممان اینرسی جرم طول محور AA' بنامیم.

$$r_1^2\Delta m_1 + r_1^2\Delta m_2 + ... = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

ممان اینرسی جرم $I_n^m = \int r^2 dm$

(واحد $kg.m^2$)

ممان اینرسی جرم نمایانگر مقاومت از سیستم در مقابل هر نوع حرکت از جرم می‌باشند.



(□□□□ □□□)

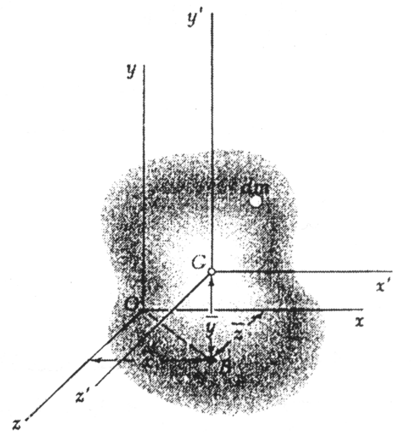
$$I_y^m = \int r^2 dm = \int (2^2 + x^2) dm$$

$$I_x^m = \int r^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_t^m = \int (x^2 + y^2) dm$$

دستگاه در مرکز ثقل جسم $ox'y'z'$

(مرکز ثقل جسم) G



(□□□□ □□□)

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$x = \bar{x} + x'$$

$$y = \bar{y} + y'$$

$$z = \bar{g} + z'$$

$$I_n^m = \int (y^2 + z^2)dm = \int \left[(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2\right]dm$$

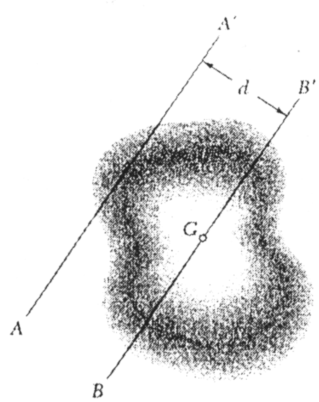
قانون تئوری محورهای موازی

$$I_x^m = \bar{I}_{x'}^m + m(\bar{y}^{\,2} + \bar{x}^{\,2})$$

$$I_y^m = \bar{I}_{y'}^m + m(\bar{x}^{\,2} + \bar{z}^{\,2})$$

$$I_t^m = \bar{I}_{t'}^m + m(\bar{x}^{\,2} + \bar{z}^{\,2})$$

$$\boxed{I^m = \bar{I}^{\,m} + md^2}$$



(□□□□ □□□)

$$\boxed{I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + md^2}$$

$$\boxed{k^2 = \bar{k}^{\,2} + d^2}$$

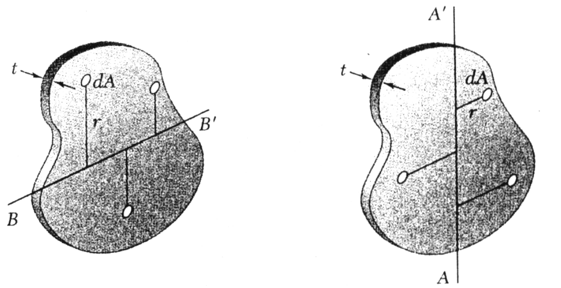
ممان اینرسی صفحات نازک:

برای جرم‌های همگن وممان و با یک ضخامت

$$I^m_{AA'} = \int r^2 dm \qquad dm = \rho t dA$$

$\rho =$ جرم مخصوص

$\frac{m}{V} =$ جرم / داده حجم



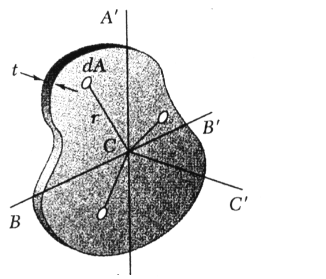
(ب) (الف)

$$I^m_{AA'} = \rho t \int r^2 dA$$

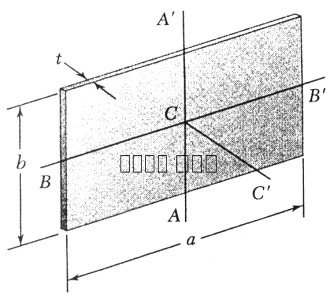
$$I^m_{AA'} = \rho t I_{AA'}$$

$$I^m_{BB'} = \rho t I_{BB'}$$

$$I^m_{CC'} = \rho t J_c = \rho t (I_{AA'} + I_{BB'})$$



ورق مستطیلی



$$I^m_{AA'} = \rho t I_{AA'} = \rho t (\frac{1}{12} a^3 b)$$

$$I^m_{BB'} = \rho t I_{BB'} = \rho t (\frac{1}{12} a b^3)$$

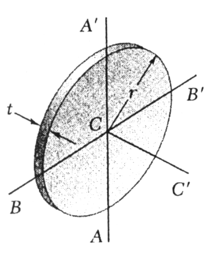
اما $\rho tab = m =$ جرم

$$I^m_{AA'} = \frac{1}{12} m a^2$$

$$I^m_{BB'} = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I^m_{CC'} = I^m_{AA'} + I^m_{BB'} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

ورق دایره‌ائی

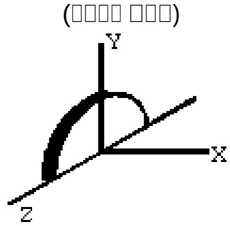


$$I^m_{AA'} = \rho t \ I^m_{AA'} = \rho t (\frac{1}{4} \pi r^4)$$

$\rho t (\frac{1}{4} \pi r^2 = m =$ جرم

$$I^m_{AA'} = I^m_{BB'} = \frac{1}{4} m r^2$$

$$I^m_{CC'} = I^m_{AA'} + I^m_{BB'} = \frac{1}{2} m r^2$$

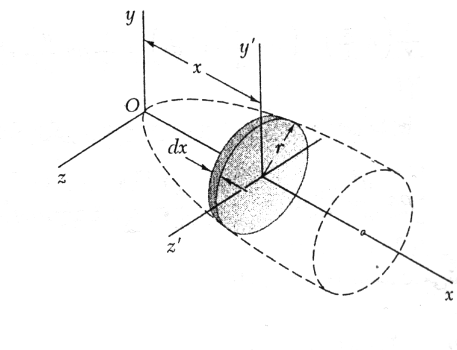


$$I_x^m = \rho t I_x = \rho t (\frac{1}{4} \pi r^2)$$

$$= \rho t \pi \frac{r^2}{2} (\frac{r^2}{4}) = \frac{1}{2} m r^2$$

– ممان اینرسی جرمی اجسام سه بعدی توسط روش انتگرالگیری:

اگر جسم همگن باشد انتگرالگیری دوبله یا سوبله داریم.



(□□□□ □□□)

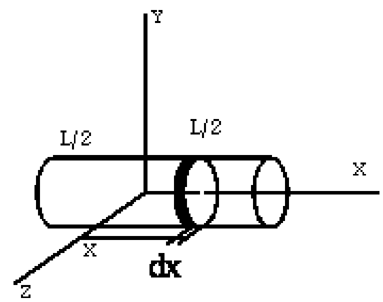
$$dm = \rho\pi r^2 dx$$

$$dI_x^{\ m} = \frac{1}{2} r^2 dm$$

$$dI_y^{\ m} = dI_{y'}^{\ m} + x^2 dm = (\frac{1}{4} r^2 + x^2) dm$$

$$dI_z^{\ m} = dI_{z'}^{\ m} + z^2 dm = (\frac{1}{4} r^2 + x^2) dm$$

مثال: $I_y^{\ m} = ?$



(□□□□ □□□)

$$dm = \rho dV = \rho\pi a^2 dx$$

$$dI_y^{\ m} = (\frac{1}{4} a^2 + x^2) dm = (\frac{1}{4} a^2 + x^2)(\rho\pi a^2 dx)$$

$$I_y^{\ m} = \int dI_y^{\ m} = \int (\frac{1}{4} a^2 + x^2) \rho\pi a^2 dx$$

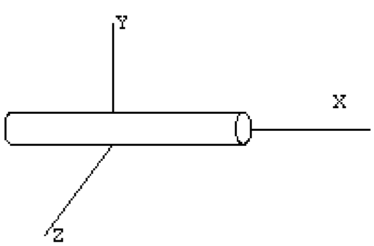
$$= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4} \rho\pi a^2 dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho\pi a^2 x^2 dx = \frac{1}{4} \rho\pi a^4 l + \frac{1}{12} \rho\pi a^2 l^3$$

$$= \frac{1}{12} \rho\pi a^2 l (3a^2 + l^2)$$

$$m = \rho V = \rho\pi a^2 l \Rightarrow I_y^{\ m} = \frac{1}{12} m (3a^2 + l^2)$$

$$I_x^{\ m} = \frac{1}{2} m a^2$$

میله ی نازک



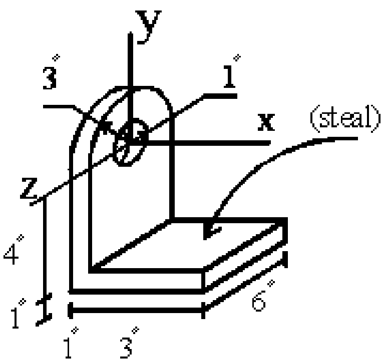
(□□□□ □□□)

$$I_y^{\ m} = \frac{m}{12}(0 + l^2) = \frac{ml^2}{12} = I_z^{\ m}$$

$$I_x^{\ m} \approx 0$$

- ممان اینرسی اجسام مرکب

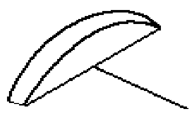
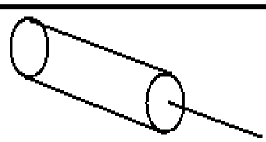
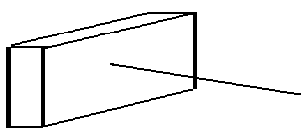
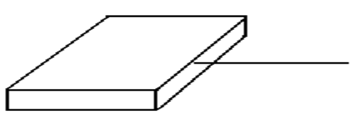
مثال: $I_x^m = ?$



$$\rho = 0.000734 \frac{lb.s^2}{in^4}$$

$$\partial = 490 \frac{lb}{ft^3}$$

$$\rho = \frac{490}{32.2} \left(\frac{\cancel{lb}/ft^3}{ft/s^2} \right) . \left(\frac{1ft}{12in} \right)^4 = 0.000734 \frac{lb.s^2}{in^4}$$

	m	I_x^m
	$\rho \frac{\pi}{2}(3)^2(1)$ $= 14.14\rho$	$I_x^m = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2}(14.14\rho)(3)^2$ $= 63.62\rho$
	$-\rho\pi(1)^2(1)$ $= -3.14\rho$	$I_x^m = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2}(-3.14\rho)(1)^2$ $= -1.57\rho$
	$\rho(4)(6)(1)$ $= 24\rho$	$I_x^m = \frac{1}{12}(24\rho)(4^2+6^2)+(24\rho)(2)^2$ $= 200\rho$
	$\rho(4)(6)(1)$ $= 24\rho$	$I_x^m = \frac{1}{12}(24\rho)(1^2+6^2)+24\rho(4.5)^2$ $= 560\rho$
$\sum$	59ρ	822ρ

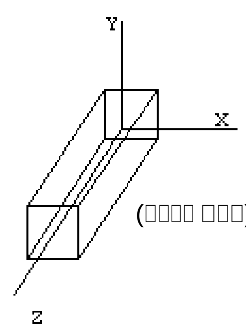
$$I_x^m = 822\rho = 822(0.000734) = 0.6033 lb.in.s^2$$

$$h_x^m = \sqrt{\frac{I_x^m}{m}} = 3.73''$$

$$I_x = \frac{1}{12} m(a^2+b^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12} m(a^2+c^2)$$

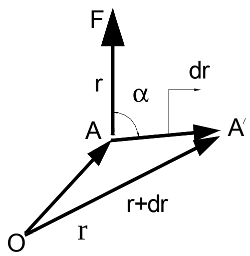
$$I_z = \frac{1}{12} m(b^2+c^2)$$



فصل دهم
روش کار مجازی

روش کار مجازی METHOD OF VIRTUAL WORK

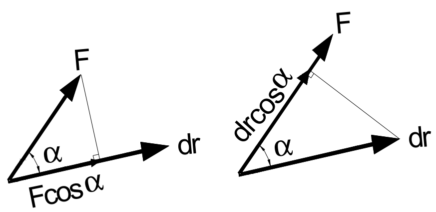
کار نیرو:



$$du = \vec{F}.d\vec{r}$$

کار ناشی از اثر یک نیرو در یک نقطه $du = Fdr\cos\alpha$

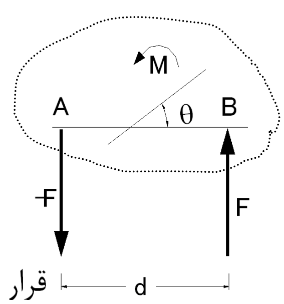
$du>0$ if $0<\alpha<90^\circ$
$du<0$ if $90<\alpha<180^\circ$
$du=0$ if $\alpha=90$



واحد کار: (jowle=N.m)

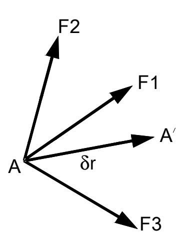
$$du=(F\cos\alpha)dr = F\,(dr\cos\alpha)$$

بعضی از نیرو ها کار انجام نمی دهند و du=0 مانند عکس العمل های داخل pin بدون اصطکاک که بدنه اصلی توسط آن نگه داشته شده است به دور pin دوران کند، مانند عکس العمل روی سطح بدون اصطکاک که جسم متصل به آن سطح روی سطح حرکت کند،مانند نیروی واقع در تکیه گاه ثابت، مانند نیروی وزن که خود جسم به سمت افقی حرکت می کند،مانند عکس العمل روی یک غلتک و غیره.



کار ناشی از دوران جسم توسط یک کوپل یا گشتاور : $M=Fd$
$du=Md\theta$

اصل کار مجازی : فرض کنیم که نقطه A تحت تاثیر نیروهای F_1 و F_2 و F_3 قرار گرفته و فرض کنیم که نقطه A به نقطهÁ تغییر مکان بدهد این تغییر مکان ممکن است که اتفاق بیافتد وممکن است که اتفاق نیافتد. پس این تغییر مکان بصورت مجازی فرض شده است.



جابجایی مجازی=δ
مشتق درجه اولr است و آنرا برای تشخیص جابجایی مجازی dr بکار می برند.
برای جابجایی حقیقی=d برای جابجایی مجازی=δ operators→

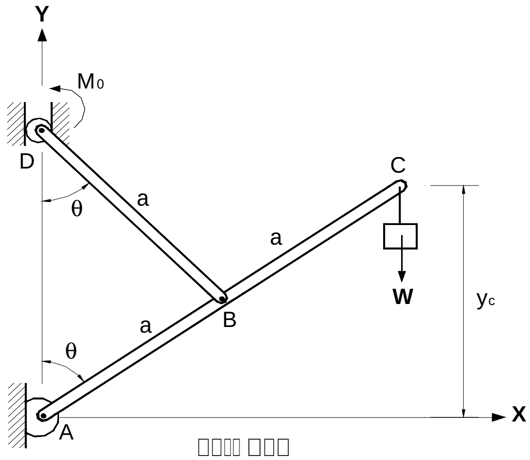
$$\delta u = \vec{F}_1.\delta r + \vec{F}_2.\delta r + \vec{F}_3.\delta r + ... = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...).\delta\vec{r}$$

$$\delta u = \vec{R}.\delta\vec{r} \qquad \vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

تئوری کار مجازی می گوید که اگر نقطه ای در تعادل باشد جمع کل کارهای مجازی نیروهای وارد بر ان, نقطه برای تمام تغییر مکانهای مجازی ان نقطه صفر خواهد بود.

لازم و کافی $\Leftarrow$ $\begin{cases} \delta u=0 \Rightarrow R=0 \Rightarrow \text{اگر تعادل} \Rightarrow \text{لازم} \\ \Rightarrow \delta u=0 \Rightarrow R.\delta r=0 \Rightarrow R=0\ \text{کافی} \end{cases}$

همچنین تئوری کار مجازی برای یک جسم صلب می گوید که اگرجسمی درتعادل باشد, جمع کل کارهای مجازی نیروهای خارجی وارد برآن جسم برای هرتغییرمکان مجازی صفر خواهد بود.



مثال: بااستفاده ازروش کارمجازی نیروی کوپل M_0 را طوری بدست آورید که سیستم روبرو درتعادل باشد.

حل: عکس العمل ها درنقطه A کارانجام نمی دهند. زیرا تکیه گاه است.عکس العمل درنقطه D افقی است درحالیکه حرکت می تواند درجهت عمودی باشد پس کاردرآنجا نیز صفرخواهدبود. همینطوردرنقطه B نیروهای داخلی کارشان صفر است چون دو عضو همدیگر را خنثی خواهند کرد.

$$\delta u = 0 \Rightarrow M_0 \delta\theta - W y_C = 0$$

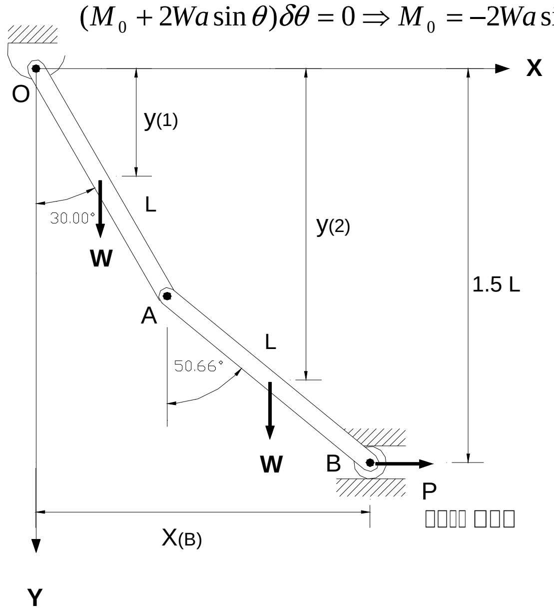
$\delta\theta =$ دوران مجازی عضوBD

$\delta y_c =$ تغییر مکان مجازی نقطهC

$$y_c = 2a\cos\theta \Rightarrow \delta y_c = \frac{dy_c}{d\theta}\delta\theta = -2a\sin\theta(\delta\theta)$$

$$\delta u = 0 \Rightarrow M_0\delta\theta - W(-2a)\sin\theta(\delta\theta) = 0$$

$$(M_0 + 2Wa\sin\theta)\delta\theta = 0 \Rightarrow M_0 = -2Wa\sin\theta$$



مثال:دو میله OAو AB هر کدام به وزن Wو طول L به یکدیگر در نقطه A لولا شده اند. مقدارلازمP را برای تعادل این سیستم در حالتیکه $\theta = 30^\circ$ بدست بیاورید.

$$y_1 = \frac{l}{2}\cos\theta_1 \qquad y_2 = l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2$$

$$\delta y = W\delta y_1 + W\delta y_2 + P\delta x_b = 0$$

$$l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 = 1.5l \Rightarrow \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 1.5 \qquad \theta_1 = 30^\circ \Rightarrow \theta_2 = 50.66^\circ$$

$$\delta y_1 = \frac{dy_1}{d\theta_1}\delta\theta_1 = -\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1 = -0.25l\delta\theta_1$$

$$\delta y_2 = \frac{dy_2}{d\theta_1}\delta\theta_1$$

$$y_2 = l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2 = l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}(1.5 - \cos\theta_1)$$

$$y_2 = \frac{l}{2}\cos\theta_1 + 0.25l$$

$$\delta y_2 = -\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1 = -0.25l\delta\theta_1$$

$$x_B = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2$$

$$\delta x_B = \frac{\delta x_B}{\delta\theta_1}\delta\theta_1 + \frac{\delta x_B}{\delta\theta_2}\delta\theta_2 = l\cos\theta_1\delta\theta_1 + l\cos\theta_2\delta\theta_2$$

$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 1.5$ ⇐ از روابط قبل $\delta\theta_2$ را بر حسب $\delta\theta_1$ به دست می اوریم.

$$\frac{\delta}{\delta\theta_1}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\delta\theta_1 + \frac{\delta}{\delta\theta_2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\delta\theta_2 = 0$$

$$-\sin\theta_1\delta\theta_1 - \sin\theta_2\delta\theta_2 = 0 \Rightarrow \delta\theta_2 = -\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\delta\theta_1$$

$$\delta x_B = l\cos\theta_1\delta\theta_1 + l\cos\theta_2(\frac{-\sin\theta_1}{\sin\theta_2})\delta\theta_1$$

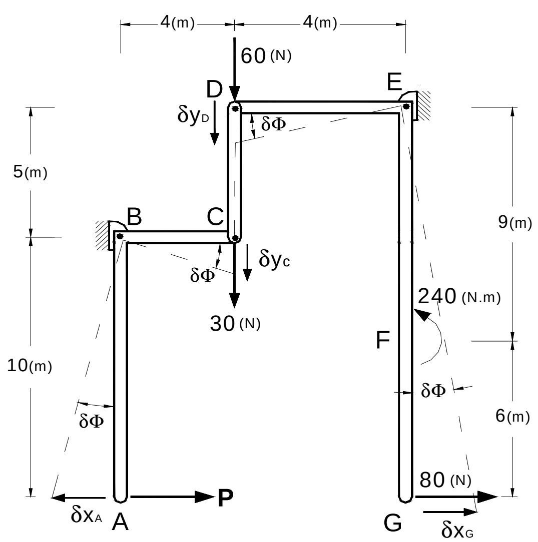
برای $\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 50.66 \Rightarrow \delta x_B = 0.456l\delta\theta_1$

$$\delta u = 0 \Rightarrow W(-0.25l\delta\theta_1) + W(-.025l\delta\theta_1) + P(.456l\delta\theta_1) = 0$$

$$(-0.5W + 0.456P)\delta\theta_1 = 0$$

$$\delta\theta_1 \neq 0 \Rightarrow P = 1.096\,W$$

مثال:بدست بیا ورید مقدار نیروی افقی P لازم در نقطه A تا سیستم مقابل را به تعادل برساند.(اندازه ها بر حسب اینچ)



حل:فرض کنیم که در نقطهB عضو به اندازه $\delta\theta$ می چرخد.

$$\delta x_A = 10\delta\theta \leftarrow$$

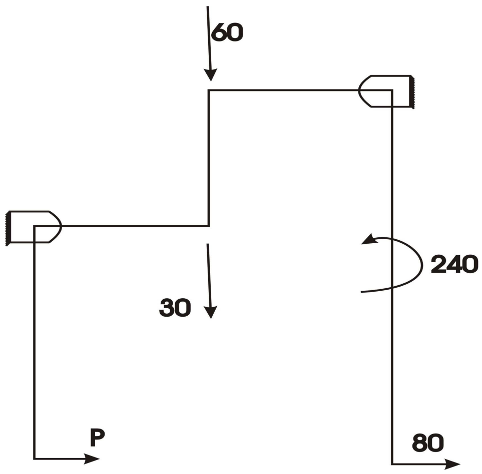
$$\delta y_c = 4\delta\theta \downarrow$$

$$\delta y_D = \delta y_c = \delta\theta \downarrow$$

$$\delta\phi = \frac{\delta y_D}{6} = \frac{2}{3}\delta\theta$$

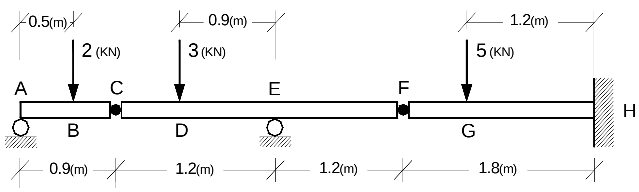
$$\delta x_G = 15\delta\phi = 15(\frac{2}{3})\delta\theta = 10\delta\theta$$

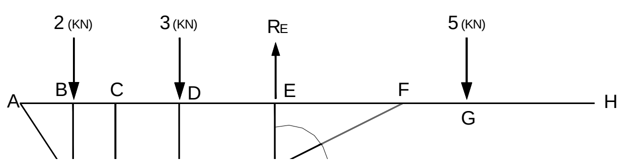
$$\delta u = 0 \Rightarrow -P\delta x_A + 30\delta y_c + 60\delta y_D + 240\delta\phi + \delta x_G = 0$$



$$-P(10\delta\theta)+30(4\delta\theta)+60(4\delta\theta)+240(\frac{2}{3}\delta\theta)+80(10\delta\theta)=0$$
$$P=132.0(lb)$$

مثال:در تیر مقابل از روش کار مجازی مقدار عکس العمل در نقطه E را بدست آورید.





$$\delta y_C=\frac{2.7}{1.2}\delta y_E=2.25\delta y_E$$
$$\delta y_C=\frac{2.7}{1.2}\delta y_E=2.25\delta y_E$$
$$\delta y_B=\frac{0.5}{0.4}\delta y_E=1.25\delta y_E$$

$$\delta u=0\Rightarrow 2\delta y_B+3\delta y_D-R_E\delta y_E=0$$
$$[2(1.25)+3(1.75)-R_E]\delta y_E=0$$
$$\delta y_E\neq 0\Rightarrow R_E=7.25KN\uparrow$$