Subject: 1
Year. Month. Date. ( )

درس ریاضیات پیشرفته

۵ نمره میان ترم ۱۵ نمره پایان ترم معادلات دیفرانسیل و مشتقات جزئی

مباحث زیر مرور گردد. کتاب کرایسیگ برای مباحث زیر توصیه می شود

- حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت $a_n y^{n} + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0 y = g(x)$

- روش تغییر پارامترها و روش ضرایب نامعین

- معادلات کشی اویلر $(x-a)^n y^{n} + a_{n-1} (x-a)^{n-1} y^{n-1} + \cdots + y = g(x)$

- لاپلاس ها

مباحث زیر تدریس می شوند:

- سری فوریه

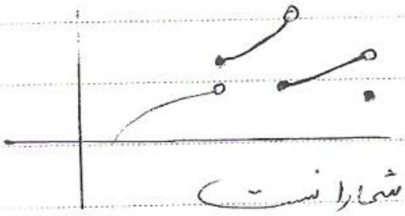
- تبدیل فوریه

- انتگرال فوریه

سری های فوریه :

- تابعی که می خواهیم سری فوریه آن را بنویسیم باید حتماً متناوب باشد

- تابع باید حتماً قطعه قطعه پیوسته باشد یعنی نقاط ناپیوستگی آن شمارا باشد . N و Z شمارا هستند ولی R شمارا نیست



سری فوریه : فرض کنید تابع $f(x)$ تابعی قطعه قطعه پیوسته روی بازه‌ی $[-L \quad L]$ باشد و دارای دوره‌ی تناوب $T=2L$ باشد آن گاه می توان سری فوریه تابع $f(x)$ را به صورت زیر نوشت :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

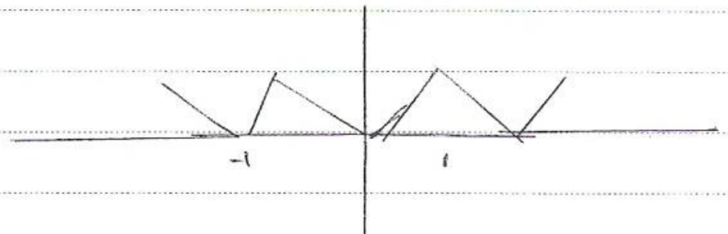
سری تیلور

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\star \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

★ سری فوریه تابع $f(x)=|x|$ با $T=2$ را محاسبه کنید

$$T=2 \xrightarrow{T=2L} L=1$$



$$a_0=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}|x|\,dx \overset{\text{چون زوج}}{\Longrightarrow}$$

$\sin x \to$ فرد
$\cos x \to$ زوج

$$a_0=2\int_{0}^{1}x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

$$a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)=\int_{-1}^{1}|x|\cos(n\pi x)$$

$$\overset{\text{چون زوج}}{\Longrightarrow} 2\int_{0}^{1}x\cos(n\pi x) \longrightarrow \text{جزء به جزء}$$

x		$\cos n\pi x$
1	$+$	$\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$
0	$-$	$-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$

$$=2\left(\frac{1}{n\pi}x\sin(n\pi x)+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1\right)$$

جزء به جزء $\int u\,dv = uv-\int v\,du$

$$=2\left(0+\frac{1}{n^2\pi^2}(-1)^n-\frac{1}{n^2\pi^2}\right) \longrightarrow \sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = (-1)^n$$

$$=2\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\right)\left((-1)^n-1\right)$$

$$b_n \overset{\text{مثل بالای حل می‌شود}}{=} \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)=$$

$$\int_{-1}^{1}|x|\sin n\pi x = 0$$

انتگرال متقارن روی بازه‌ی فرد $\Leftarrow$ فرد = فرد × زوج
صفر است

Subject: ۴
Year. Month. Date. ( )

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\right)\left((-1)^n - 1\right)\cos n\pi x$$

★ به کمک مثال فوق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ را محاسبه کنید

$n \xrightarrow{\text{زوج}} (-1)^n - 1 = 0$ باید $n^2\pi^2$ را

$n \xrightarrow{\text{فرد}} (-1)^n - 1 = -2$ به $2n-1$ تبدیل کنیم

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}\right)(-2)\cdot\cos\left((2n-1)\pi x\right)$$

باید این عبارت

اضافه را از بین ببریم به x صفر دهیم $\cos 0 = 1$ حتی می توان $x = 1$ را هم قرار داد

$$|0| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi^2}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\right)\cos(0)$$

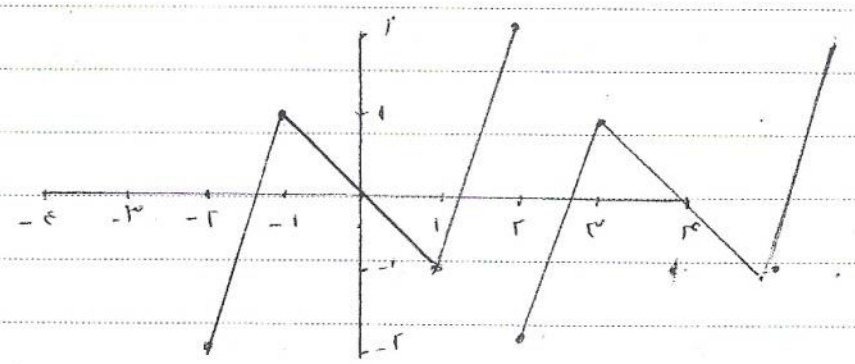
گاهی اوقات سری فوریه را باید از شکل تشخیص داد. در این مورد باید توجه کرد که تابع زوج است یا فرد یا نه زوج و نه فرد! تنها تابعی که هم زوج و هم فرد است، تابع صفر می باشد. دومین کار پیدا کردن دوره ی تناوب آن تابع می باشد بهترین حالت دوره ی تناوب در حالت L $2L$ L می باشد. $T = 2L$

سومین کار نوشتن تابع $f(x)$ روی یک دوره تناوب [بهترین دوره $[-L, L]$ چون برابر تابع های زوج و فرد کافی است فقط یک قسمت آن نوشته شود]

Subject: ۵
Year. Month. Date. ( )

چهارمین قدم نوشتن a_0 ، a_n ، b_n با توجه به تابع $f(x)$

★



۱ـ تابع فرد ← به مبدا مختصات قرینه است $f(-x) = -f(x)$

۲ـ $L = 2 \Rightarrow T = 4$ هر چهار خانه یک بار تکرار شود

۳ـ نوشتن ضابطه تابع

$$f(x) = \begin{cases} -x & 0 < x < 1 \\ 3x - 4 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$(1,-1)(2,2)$ $\qquad y - y_0 = m(x - x_0)$

$$m = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3 \Rightarrow y - 2 = 3(x-2)$$

$$y = 3x - 4$$

$$a_0 = 0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\,dx$$

$$a_n = 0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

فرد زوج

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$= \int_{0}^{1} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \int_{1}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$= \int_{0}^{1} -x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \int_{1}^{2} (3x-4)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

=

$3x-4$	$-x$	$\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
3	-1	$\frac{-2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
0	0	
		$-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{2}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{-2}{n\pi}(3x-4)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$+ \frac{12}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left[\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

منفی ۴ تبدیل به توان n+1 شد

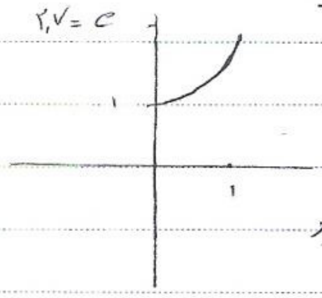
$$+ \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} - \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{12}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{-16}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

Subject: ✓
Year. Month. Date. ( )

سری فوریه روی بازه‌ی دلخواه $[0 , L]$

سری فوریه تابع $f(x) = e^x$ را روی بازه‌ی $[0 , 1]$ بیابید.



در چنین مواردی باید تابع را بسط یا گسترش دهیم

بهترین نوع بسط دادن $\sin$ و $\cos$ یا زوج و فرد است

بسط فردی

سری فوریه سینوسی: اگر تابع $f(x)$ را به یک تابع مثل $g(x)$ تعمیم دهیم که $g(x)$ شروط زیر را دارا باشد آنگاه با روش سری فوریه تابع $g(x)$ می‌توانیم سری فوریه تابع f را نیز به دست آوریم. تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x \leq L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

که $g(x+2L) = g(x)$

در این صورت داریم

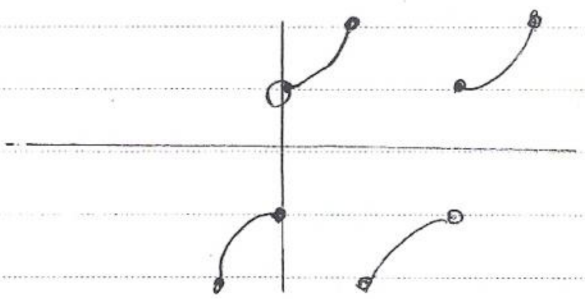
1) $g(x)$ یک تابع فردی باشد

2) $g(x)$ روی بازه‌ی $[0 , L]$ با $f(x)$ برابر است

3) $g(x)$ متناوب با دوره تناوب $2L$ است

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) , \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\forall x \in [0, L] \rightarrow f_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$



$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 e^x \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx$$

$\Rightarrow$ فرض کنیم می‌خواهیم این انتگرال را حل کنیم $\Rightarrow I = \int e^x \sin n\pi x$

$$\rightarrow \begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin(n\pi x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = e^x \\ v = \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{n\pi} e^x \cos(n\pi x) - \frac{1}{n\pi} \int e^x \cos(n\pi x)\, dx$$

$$S = \int e^x \cos(n\pi x) \rightarrow \begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos(n\pi x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = e^x \\ v = \frac{-1}{n\pi} \sin(n\pi x) \end{cases}$$

$$S = -\frac{1}{n\pi} e^x \sin(n\pi x) + \frac{1}{n\pi} \underbrace{\int e^x \sin(n\pi x)}_{I}$$

$$\begin{cases} I = \frac{1}{n\pi} e^x \cos(n\pi x) - \frac{1}{n\pi} S \\ S = \frac{-1}{n\pi} e^x \sin(n\pi x) + \frac{1}{n\pi} I \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{n\pi} e^{x} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} e^{x} \sin(n\pi x) - \frac{1}{n^2\pi^2} I$$

$$b_n = \frac{2n^2\pi^2}{n^2\pi^2+1}\left(\frac{1}{n\pi} e^{x} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} e^{x} \sin(n\pi x)\right)\Bigg|_0^1$$

سری فوریه کسینوسی: اگر تابع $f(x)$ را به یک تابع مثل $g(x)$ بسط می دهیم که تابع $g(x)$ دارای شرایط زیر باشد. با نوشتن سری فوریه تابع $g(x)$ می توانیم سری فوریه تابع f را نیز بدست آوریم

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x \le L \\ -f(x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

اگر سری فوریه تابع روی بازه‌ی $[a, b]$ مد نظر بود با انتقال بازه روی $[0, b-a]$ می توانیم با کمک سری فوریه $f(x)$ را بدست آوریم، سپس عکس انتقال را استفاده کرده و دوباره بازه را به $[a, b]$ منتقل می کنیم

مشتق گیری و انتگرال گیری از سری:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n}$$

$\arctan x = ?$ از سری قبل استفاده $\Rightarrow$ می کنیم

از طرفین انتگرال گرفتیم

$$\Rightarrow \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n}$$

جای x ها x^2 قرار دادیم

$$\Rightarrow \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \arctan x$$

اگر تابع $f(x)$ تابعی پیوسته روی بازه‌ی $[-L, L]$ باشد و مشتق آن قطعه قطعه پیوسته باشد و آنگاه می توان از طرفین سری فوریه تابع $f(x)$ را بدست آورد. $f(-L) = f(L)$ توابع های خیلی زیادی هستند که این شرط را داشته باشند پس در این جا فقط توابع زوج مطرح است.

★ از روی سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ سری فوریه تابع $f(x)$ را بیابید.

در بازه‌ی $[-1, 1]$ و $T = 2 \Rightarrow L = 1$

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx$$

x^2	$\cos n\pi x$
$2x$	$\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x$
2	$\frac{-1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$
0	$\frac{-1}{n^3\pi^3} \sin n\pi x$

$$2\left(\frac{1}{n\pi}x^2\sin(n\pi x)+\frac{2}{n^2\pi^2}x\cos(n\pi x)-\frac{2}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)\right)\Bigg|_0^1$$

$$2\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$b_n=0$

$$\frac{d}{dx}\cos u \Rightarrow -u'\sin u$$

$$x^2=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$$

مشتق $\Rightarrow \cancel{2}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{4}(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)$

امتحان کردن $\Rightarrow f(x)=x$

$a_0=0 \quad a_n=0 \quad b_n=2\int_0^1 x\sin(n\pi x)$

x	$\sin n\pi x$
1	$\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$
0	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{-1}{n\pi}x\cos(n\pi x)+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\right)\Bigg|_0^1$$

$$=2\left(\frac{-1}{n\pi}(-1)^n\right)=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin(n\pi x)$$ ✓ با مشتق بالای یکی شد

اگر تابع $f(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد آنگاه می توان از طرفین سری فوریه می توان انتگرال گرفت

برای مثال از همان تابع قبل انتگرال می‌گیریم

$$\frac{x^2}{2} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \frac{-1}{n\pi} \cos n\pi x$$

$$x^2 = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \cos(n\pi x)$$

$$C = \frac{a_0}{2} \qquad a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 = \frac{2}{3}$$

$$C = \frac{1}{3}$$

$l = \pi$

انتگرال فوریه ؛

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)$$

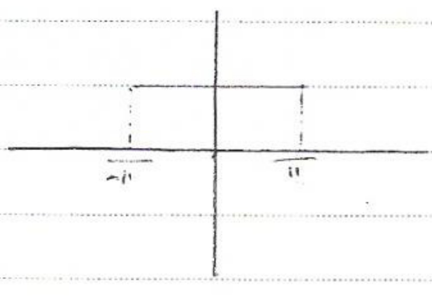
انتگرال فوریه همان سری فوریه است درحالتی که تابع $f(x)$ پیوسته روی $(-\infty , \infty)$ باشد و دوره‌ی تناوب نیز نداشته باشد

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} A(W) \cos(Wx) + B(W) \sin(Wx)\, dW$$

$$A(W) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(Wx)\, dx$$

$$B(W) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(Wx)\, dx$$

★ انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \pi \\ 0 & O.W \end{cases}$ را محاسبه کنید



$B(w) = 0 \Leftarrow$ تابع زوج

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx \Rightarrow$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{1}\cos wx + \int_{\pi}^{\infty} \underbrace{f(x)}_{0}\cos wx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos wx\,dx = \frac{2}{\pi w}\sin wx\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\sin w\pi}{w\pi}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{2\sin w\pi}{w\pi}\cos wx\,dw$$

★ مقدار $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ را بدست آورید

سعی می‌کنیم شبیه بالا آن را در آوریم

$$x = 0 \Rightarrow \underbrace{f(0)}_{1} = \int_0^{\infty}\frac{2\sin w\pi}{w\pi}\underbrace{\cos(0)}_{1}\,dx$$

$$1 = \int_0^{\infty}\frac{2\sin w\pi}{w\pi}\,dw$$

$w\pi = x \qquad x \to \infty \qquad x \to 0$

$\pi\,dw = dx \qquad w \to \infty \qquad w \to 0$

$dw = \frac{dx}{\pi}$

$$I = \int_0^\infty \frac{2\sin x}{x} \cdot \frac{dx}{\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

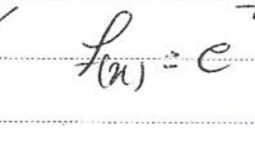
f

تبدیل فوریه :

$$L(f_{(t)}) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(S)$$ ← تعریف لاپلاس

$$\star\ L(1) = \int_0^\infty 1e^{-st}\,dt = \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{s}$$

$$F(f_{(t)}) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iwt}\,dt = F(W)$$ و $i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$



$a + bi$
Real حقیقی → Image موهومی

★ انتگرال فوریه $f_{(x)} = e^{-kx}$ که $k > 0$ را روی $[0, \infty)$ ببرید

ادامه