Subject: ۱۶
Year. Month. Date. ( )

اگر تابع تقسیم زوج داده شود

$$g(x) = \begin{cases} e^{-kx} & 0 \le x < \infty \\ e^{kx} & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

$$B(w) = 0$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos wx \, dx$$

$$I = \int \underbrace{e^{-kx}}_{u} \underbrace{\cos wx \, dx}_{dv} = \frac{1}{w} e^{-kx} \sin wx + \frac{k}{w} \int e^{-kx} \sin wx \, dx$$

بدون کروشه بنویسیم

$$\Rightarrow S = \int e^{-kx} \sin wx \, dx = -\frac{1}{w} e^{-kx} \cos wx - \frac{k}{w} \int e^{-kx} \cos wx \, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{w} e^{-kx} \sin wx + \frac{k}{w} \left(-\frac{1}{w} e^{-kx} \cos wx - \frac{k}{w} I \right)$$

$$I = \frac{w^2}{k^2 + w^2} \left(\frac{1}{w} e^{-kx} \sin wx - \frac{k}{w^2} e^{-kx} \cos wx \right)$$

$$\Rightarrow A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{k}{k^2 + w^2} \right) = \frac{2k}{\pi (k^2 + w^2)}$$

از ـ ها ساده سازی کرده و به جواب رسیده

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2k}{\pi (w^2 + k^2)} \cos wx \, dw$$

انتگرال لاپلاس نوع اول

از که ها ساده سازی کرده و به جواب می رسد

$$S=\frac{w^2}{k^2+w^2}\left(-\frac{1}{w}e^{-kx}\cos wx-\frac{k}{w^2}e^{-kx}\sin wx\right)$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{2w}{\pi(w^2+k^2)}\sin wx\,dw$$ انتگرال لاپلاس نوع دوم

* تبدیل فوریه تابع $f(t)=\frac{1}{t^2+a^2}$ را حساب کنید

$$F(f(t))=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt \rightarrow \begin{array}{l} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{array}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iwt}}{t^2+a^2}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos wt-i\sin wt}{t^2+a^2}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos wt}{t^2+a^2}\,dt-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin wt}{t^2+a^2}\,dt$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{\cos wt}{t^2+a^2}\,dt \quad \begin{cases} t=w \\ w=x \\ a=k \end{cases}$$ شبیه انتگرال لاپلاس نوع اول

$$=2\left(\frac{\pi}{2a}e^{-aw}\right)$$

خواص فوریه با مثال زیر بیان می گردد

۱) خطی بودن $$F(\alpha f(x)\pm\beta g(x))=\alpha F(w)\pm\beta G(w)$$

$$F(w)=F(f(t)) \qquad G(w)=F(g(x))$$

۲) خاصیت مشتق فرکانس

$$L\left(t f(t)\right) = -F'(s)$$

$$L\left(\cancel{x}^n f(x)\right) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

هرجا t بود به x تبدیل کنید و اسم را اتی کار خودمان

$$F\left(x f(x)\right) = i F'(w)$$

$$F\left(x^n f(x)\right) = (i)^n F^{(n)}(w)$$

★

$$F\left(\frac{x^2+2x+2}{(x^2+2)(x^2+1)}\right) = ?$$

تجزیه کسر

$$\frac{x^2+2x+2}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(Ax+D)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+2Cx+Dx^2+2D}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

$A+C=0 \Rightarrow A=-C \Rightarrow A=-2$

$B+D=1 \Rightarrow B=1-D \Rightarrow B=0$

$A+2C=2 \Rightarrow C=2$

$B+2D=2 \Rightarrow D=1$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{x^2+2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}w} \quad \Rightarrow F\left(\frac{x}{x^2+2}\right) = -i\pi e^{-\sqrt{2}w}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \pi e^{-w} \quad \Rightarrow F\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -i\pi e^{-w}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\pi w}{2k(k^2+w^2)} \sin wx \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2}$$

$$\Rightarrow -2F\left(\frac{x}{x^2+2}\right) + 2F\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + F\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$= 2i\pi e^{-\sqrt{2}w} - 2i\pi e^{-w} + \pi e^{-w}$$

ادامه‌ی خواص تبدیل های فوریه

در لاپلاس هم چنین رابطه‌ای نیز داشتیم

$$F\left(f^{(n)}(x)\right) = (iw)^n F(\bar{w}) \longrightarrow L\left(f^{(n)}(x)\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(s) - s^{n-2} f'(0) \ldots - f^{n-1}(0)$$

★ $F\left(\frac{x}{(x^2+1)^2}\right) = ?$ جواب تبدیل فوریه مقابل؟

نکته $\Rightarrow$ $\frac{A_n}{(ax+b)^n} + \frac{A_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{ax+B}$

تجزیه کسرها

$$\frac{A_n x + B_n}{(ax^2+bx+c)^n} + \ldots + \frac{A_1 x + B_1}{ax^2+bx+c}$$

می دانیم $\Rightarrow F\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \pi e^{-w}$ ⟵ روابط های تبدیل فوریه

$$\text{if} \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} F\left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2} F(f'(x)) = -\frac{1}{2}\cancel{\ldots}$$

$$F\left(\frac{-\frac{1}{2}(-2x)}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} i w \pi e^{-w}$$

زمانی که بخواهیم انتگرال
می گیریم اگر به یک
تابع معروف رسید
می توان از خاصیت
بالا استفاده کرد

$$\frac{x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \int \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

مشتق مخرج در صورت است

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} u^{-1} = \frac{1}{2}\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

تابع معروف

$$\star\ F\left(\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow F\left(x \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) = F(x \cdot g(x)) = iF'(w)$$

$$F\left(\frac{x}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2} i\pi w e^{-w} = F(w)$$

$$-\frac{1}{2} i^2 \pi (e^{-w} - we^{-w}) = \frac{1}{2}\pi(e^{-w} - we^{-w})$$

خاصیت انتقال فرکانس $F\left(e^{i\alpha x} f(x)\right) = F(w-\alpha)$

در لاپلاس ها مشابه آن را داریم $\Rightarrow L\left(e^{\alpha x} f(x)\right) = F(s-\alpha)$

$$* \quad L(1) = \frac{1}{s} \rightarrow L\left(e^{\alpha x} \times 1\right) = \frac{1}{s-\alpha} \rightarrow L\left(e^{\alpha x} \sin x\right) = \frac{1}{(s-\alpha)^2+1}$$

$$\bigstar \quad F\left(e^{2ix} \frac{1}{x^2+1}\right) = \pi e^{-(w-2)} \Leftarrow F\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \pi e^{-w}$$

تمامی این تبدیل های که ذکر می شود خاصیت دوگان آن نیز برقرار است. مثال بالا:

$$* \quad F^{-1}\left(\pi e^{-(w-2)}\right) = \frac{e^{2ix}}{x^2+1}$$

$$* \quad y'' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

$$L(y'') + L(y) = 0$$

$$s^2 Y(s) - sY(0) - Y'(0) + Y(s) = 0$$

$$Y(s)\left(s^2+1\right) = sY(0) + y'(0)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin x$$

خاصیت انتقال زمان $F\left(f(x-\alpha)\right) = e^{-i\alpha w} F(w)$

خاصیت پله ای مشابه در لاپلاس $\Rightarrow L\left(u_c(x) f(x-c)\right) = e^{-cs} F(s)$

Subject: ۲۲
Year. Month. Date. ( )

★ $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{x^2+2x+5}\right)=?$

$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\dfrac{1}{\underbrace{(x+1)}_{-\alpha}^2+4}\right)=\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)=\underbrace{\dfrac{\pi}{2}e^{-2w}}_{F(w)}$

$\Rightarrow e^{iw}\dfrac{\pi}{2}e^{-2w}$

(خاصیت تقارن (دوگان) $\mathcal{F}(F(x))=2\pi f(-w)$

★ $\mathcal{F}(e^{-2x})$

$\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)=\dfrac{\pi}{2}e^{-2w}$

$\mathcal{F}\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot\underbrace{\dfrac{\pi}{2}e^{-2x}}_{F(x)}\right)=\dfrac{2}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\underbrace{\dfrac{1}{w^2+4}}_{f(w)}=\dfrac{4}{w^2+4}$

خاصیت ضرب پیچشی $\mathcal{F}(f(x)*g(x))=F(w)\cdot G(w)$

$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(t-x)\,dx$ باید معکوس آن استفاده شود

★ $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2w}\cdot e^{-w}\right)=\dfrac{2}{\pi^2}\mathcal{F}^{-1}\left(\underbrace{\dfrac{\pi}{2}e^{-2w}}_{\frac{1}{x^2+4}}\cdot\underbrace{\pi e^{-w}}_{\frac{1}{x^2+1}}\right)$

Subject: ۲۳
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{۲}{\pi^۲}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^۲+۴} \cdot \frac{1}{(t-x)^۲+1}\, dx\right.$$

$$y'' + y = x\sin x \longrightarrow \begin{cases} P_n(x) e^{\alpha x} \sin\beta x \\ P_n(x) e^{\alpha x} \cos\beta x \end{cases}$$

$$r^۲ + 1 = ۰ \quad r = \pm i$$

$$y_c = C_1 \sin x + C_۲ \cos x$$

$$y_p = x\left[(A_۰ x + A_1)\sin x + (B_۰ x + B_1)\cos x\right]$$

حل معادلات با مشتقات جزئی

روش جداسازی پارامترها

$$\begin{cases} u_{tt} = c^۲ u_{xx} \\ u(۰, t) = ۰ \\ u(\ell, t) = ۰ \\ u(x, ۰) = f(x) \\ u_t(x, ۰) = g(x) \end{cases}$$

هدف پیدا کردن تابع موج با فرضیات بالا اند $\longrightarrow U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$
و این روش فرض می شود تابع از x و t مجزا است

با عرض جدید فرضیات قدیم را بررسی می کنیم

$$u(x,t) = X_{(x)} \cdot T_{(t)}$$

$$\Rightarrow u(0,t) = X(0) \cdot T(0) \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \ \checkmark \\ T(t) = 0 \rightarrow u(x,t) = 0 \ \times \end{cases}$$

نمی تواند صفر باشد چون به تناقض می رسیم

$$\Rightarrow u(L,t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(L) = 0 \ \checkmark \\ T(t) = 0 \ \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = XT \quad , \quad u_{tt} = XT'' \quad , \quad u_{xx} = X''T$$

$$\Rightarrow u_{tt} = C^2 u_{xx} \rightarrow XT'' = C^2 X'' T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{C^2 T} = \delta$$

وقتی برقرار است که هردو برابر با یک عدد ثابت باشند

$$\begin{cases} X'' - \delta X = 0 \\ T'' - C^2 \delta T = 0 \end{cases}$$

$X'' - \delta X = 0 \rightarrow$ این را حل می کنیم چون از قبل دو شرط برحسب x داریم

$$\Rightarrow X'' - \delta X = 0$$

مسئلت پیش می آید

$$X(0) = X(L) = 0$$

(1) $\quad \text{if } \delta = 0 \Rightarrow X'' = 0 \rightarrow X = C_1 x + C_2$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ X(L) = 0 \rightarrow C_1 L + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 \ \times$$

(2) $\quad \delta > 0 \Rightarrow \delta = \lambda^2 , \ \lambda \neq 0 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0$

$$r^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \lambda$$

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0 \longrightarrow C_1 = -C_2$$

$$\rightarrow x(L) = 0 \Rightarrow C_1 e^{\lambda L} + C_2 e^{-\lambda L} = 0 \Rightarrow C_2\left(-e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}\right) = 0$$

دو حالت اتفاق می افتد

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ -e^{\lambda L} + e^{-\lambda L} = 0 \Rightarrow e^{2\lambda L} + 1 = 0 \Rightarrow e^{2\lambda L} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\lambda L = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \;\; \times \; \rightarrow \text{فرض کردیم } \lambda \text{ صفر نیست} \\ L = 0 \;\; \times \; \rightarrow \text{طول نمی تواند صفر باشد} \end{cases}$$

(۳) $S = -\lambda^2,\ \lambda \neq 0 \rightarrow X'' + \lambda^2 x = 0$

$$r^2 + \lambda^2 = 0 \rightarrow r = \pm \lambda i$$

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0 \\ X(L) = 0 \rightarrow C_1 \sin(\lambda L) + C_2 \cos(\lambda L) = 0 \longrightarrow C_1 \sin(\lambda L) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \rightarrow x = 0 \;\; \times \\ \sin(\lambda L) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\lambda L) = 0 \rightarrow \lambda L = n\pi \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$$X(x) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$T'' - c^2 S T = 0 \quad S < 0,\ S = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Subject: ۲۹
Year. Month. Date. ( )

$$T'' + \frac{c^{۲} n^{۲} \pi^{۲}}{L^{۲}} T = ۰$$

$$r^{۲} + \frac{c^{۲} n^{۲} \pi^{۲}}{L^{۲}} = ۰ \ , \quad r = \pm \frac{cn\pi}{L} i$$

$$T(t) = C_1 \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + C_۲ \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)$$

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[C_1 \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + C_۲ \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right]$$

$$= C_1 \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + C_۲ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) \quad n = 1, \infty$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[C_1 \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + C_۲ \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right]$$

[illegible] $u(x,۰) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[C_1 \times ۰ + C_۲ \times 1\right] = f(x)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_۲ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \longrightarrow C_۲ = B_n = \frac{۲}{L}\int_۰^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[C_1 \frac{cn\pi}{L} \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) - C_۲ \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right]$$

$$C_1 \frac{cn\pi}{L} = B_n \Rightarrow C_۲ = \frac{۲}{cn\pi}\int_۰^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$u_{tt} = u_{xx}$

$u(0, t) = 0$

$u(\pi, t) = 0$

$u(x, 0) = \sin x \cos 2x$

$u_t(x, 0) = \sin 2x$

دولب $\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)\left[C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\pi} t\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi}{\pi} t\right)\right]$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left[C_n \sin nt + D_n \cos nt\right]$

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left[D_n\right] = \sin x \cos 2x$

$D_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos 2x \sin dx$ $\rightarrow$ پیدا کردن جواب سمت

$\Rightarrow \sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)x + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)x$

$D_1 \sin x + D_2 \sin 2x + D_3 \sin 3x + D_4 \sin 4x + \cdots = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x$

$D_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad D_3 = \frac{1}{2}$

$D_2 = 0$ $\quad D_4 = 0$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\left[nC_n\cos nt-nD_n\sin nt\right]$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\left[nC_n\right]=\sin 2x$$

$$C_1\sin x+2C_2\sin 2x+3C_3\sin 3x+\cdots=\sin 2x$$

$$C_1=0\qquad C_{n\geq 3}=0$$
$$C_2=\frac{1}{2}$$

$$u(x,t)=-\frac{1}{2}\cos t\sin x+\frac{1}{2}\sin 2t\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 3t\sin 3x$$

جلسه گذشته خواندیم ⇐
$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[A_n\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)+B_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right]$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\quad,\quad A_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

در حالت در این حالت چه می‌شود؟

غیرهمگن
$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}+F(x)\\ u(0,t)=a\\ u(L,t)=b\\ u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$$

این معادله را به راحتی می توان به فرم استاندارد یا همگن تبدیل کرد. اگر از تغییر متغیر $u(x,t)=V(x,t)+H(x)$ استفاده کنیم داریم:

$$u_{tt}=V_{tt}$$
$$u_{xx}=V_{xx}+H''(x)$$

جایگذاری در معادله ⇐ $V_{tt}=c^2\left(V_{xx}+H''(x)\right)+F(x)$

$$V_{tt}=c^2V_{xx}+c^2H''(x)+F(x)$$ → $=0$ شرط

$$\Rightarrow\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}\qquad\begin{cases}V_{tt}=c^2V_{xx}\\ V(0,t)=0=V(L,t)\\ V(x,0)=f(x)-H(x)\\ V_t(x,0)=g(x)\end{cases}$$

Subject: ۲۹
Year. Month. Date. ( )

$$C^2 H''(x) + F(x) = 0$$

$$H''(x) = -\frac{F(x)}{C^2}$$

$$H'(x) = \int \frac{-F(x)}{C^2} + A$$

$$H(x) = \iint \frac{-F(x)}{C^2} + Ax + B$$

$$u(0,t) = a = \cancel{V(0,t)} + H(0)$$

$$u(L,t) = b = \cancel{V(L,t)} + H(L)$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{Cn\pi}{L}t\right) + B_n\left(\frac{Cn\pi}{L}t\right)$$

$H(0) = a$

$H(L) = b$

$$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} \\ U(0,t) = 1 \\ U(\pi,t) = 1 \\ U(x,0) = \sin 2x \\ U_t(x,0) = \sin\cos^3 x \end{cases}$$

$\Rightarrow U(x,t) = V(x,t) + H(x) \longrightarrow$ فرض برای معادلات موج ناهمگن

$$U_{tt} = V_{tt}$$

$$U_{xx} = V_{xx} + H''(x)$$

$$V_{tt} = V_{xx} + \underbrace{(H''(x)+1)}_{\text{صفر}}$$

$$H''(x) = -1$$

$$H'(x) = -x + A$$

$$H(x) = -\frac{x^2}{2} + Ax + B \rightarrow H(0) = 1, \quad H(\pi) = 1$$

$$U(0,t) = V(0,t) + H(0) = 1$$

$$U(\pi,t) = V(\pi,t) + H(\pi) = 1$$

$B = 1$

$$H(\pi) = -\frac{\pi^2}{2} + A\pi + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$A = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow H(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x + 1$$

$$\begin{cases} V_{tt} = V_{xx} \\ V(0,t) = 0 \\ V(\pi,t) = 0 \\ V(x,0) = U(x,0) - H(x) = \sin 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x - 1 \\ V_t(x,0) = U_t(x,0) = \sin x \cos^3 x \end{cases}$$

Subject: ۱۰
Year. Month. Date. ( )

$$V(x,0) = \sin 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$$

سری فوریه را می‌نویسیم $\Rightarrow B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x - 1\right)\sin nx$

این عبارت که انتگرال را دشوار می‌کند را ، نقلد می‌گیریم

$\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}x-1$ (+)	$\sin nx$
$x-\frac{\pi}{2}$ (−)	$-\frac{1}{n}\cos nx$
1 (+)	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(-\left(\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}x-1}{n}\right)\cos nx + \frac{1}{n^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin nx + \frac{1}{n^3}\cos nx\right)_0^{\pi}$$

اسم را C_n
فرمول
انتخاب می‌کنیم

$$\Rightarrow = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^3}\cos n\pi - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)$$

$$\Rightarrow \sin 2x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

$$\Rightarrow \sin 2x + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + \dots =$$

$$\Rightarrow \sin 2x + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + \dots = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots$$

$$B_1 = C_1, \quad B_2 = C_2 + 1, \quad B_{n\geq 3} = C_n$$

$$V_t = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left[nA_n \cos nt - nB_n \sin nt\right]$$

$$V_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx\,(nA_n) = \sin x \cos 3x = \frac{1}{2}\left(\sin 4x - \sin 2x\right)$$

$$1A_1 \sin x + 2A_2 \sin 2x + 3A_3 \sin 3x + 4A_4 \sin 4x + 5A_5 \sin 5x + \dots = \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$A_1 = 0 \quad A_3 = 0 \quad A_{n\geq 5} = 0$

$A_2 = -\frac{1}{4} \quad A_4 = \frac{1}{8}$