حل معادلات با شتابات خطی با بسط فوریه

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

فرض می‌کنیم تابع u یک بسط فوریه خود داشته باشد

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{و} \quad A_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

اگر A_n معلوم شود مساله تمام شده است

$$③\ F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad B_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

مشتق گیری $\Rightarrow ① \ u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$② \ u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{L^2} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$①,②,③ \Rightarrow \star \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n'' \sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-c^2n^2\pi^2}{L^2} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

معادله‌ی بالا یک معادله‌ی مرتبه دوم است که دارای یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی است یعنی:

$$\forall n \geq 1 \Rightarrow A_n''(t) + \frac{c^2n^2\pi^2}{L^2} A_n(t) = B_n(t) \Rightarrow A_n(t) = A_{nc}(t) + A_{np}(t)$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{c^2n^2\pi^2}{L^2} = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{cn\pi}{L} i$$

$$A_{nc}(t) = D_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}\right)t + E_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}\right)t$$

$$A_n(t) = D_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + E_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + A_{np}(t)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n + A_{np}(0)\right)\sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

$*$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \overbrace{e^{t}\sin x\cos x}^{F(x,t)} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = x+1 \end{cases}$$

فرض می کنیم $\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\sin(nx)$

حال داریم $\rightarrow e^{-1}\sin x\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin(nx)$

$B_n(t) = \frac{2}{\pi}\int^{\pi} e^{t}\sin x\cos x\sin nx\,dx \Rightarrow$ حل وقت گیر
از راه دیگر حل می کنیم

$$\frac{1}{2}e^{t}\sin 2x = B_1(t)\sin x + B_2(t)\sin 2x + B_3(t)\sin 3x + \cdots$$

$$B_1(t) = B_2(t) = B_{n\geq 3}(t) = 0$$

$$B_2(t) = \frac{1}{2}e^{t}$$

$$\forall n \geq 1 \Rightarrow A_n'' + n^2 A_n = B_n$$

$$A_{nc}(t) = D_n\sin(nt) + E_n\cos(nt)$$

$$A_{np}(t) = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ t^{s}(C_n)e^{t} & n = 2 \end{cases}$$

$n \neq 2 \rightarrow$ در این صورت B_n صفر است و جواب خصوصی نداریم

$s \rightarrow$ تعداد ریشه‌های برابر در معادله مشخصه

$$n=۲ \Rightarrow C_n e^t + ۴C_n e^t = \frac{۱}{۲} e^t \Rightarrow C_n = \frac{۱}{۱۰}$$

$$A_{np}(t) = \begin{cases} ۰ & n \neq ۲ \\ \frac{۱}{۱۰} e^t & n = ۲ \end{cases}$$

$$A_n(T) = \begin{cases} D_n \sin(nt) + E_n \cos(nt) & n \neq ۲ \\ D_۲ \sin(۲t) + E_۲ \cos(۲t) + \frac{۱}{۱۰} e^t & n = ۲ \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,۰) = \sin x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \left(E_n + A_{np}(۰)\right) \sin(nx) = \sin x$$

$$\left(E_۱ + \cancel{A_{۱p}(۰)}\right) \sin x + \left(E_۲ + \cancel{A_{۲p}(۰)}\right) \sin ۲x + \dots = \sin x$$

$$E_۱ = ۱ \,, \quad E_۲ = -\frac{۱}{۱۰} \,, \quad E_{n \geq ۳} = ۰ \qquad \frac{۱}{۱۰}$$

حل ادامه دارد . به عهده خودتان

حل معادلات با استفاده از تبدیل فوریه

$$F(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = F(\omega)$$

* لاپلاس ها $\quad y'' + ۲y' - y = e^t \Rightarrow L(y'' + ۲y' - y) = L(e^t)$

$$s^۲ Y(s) - sY(۰) - y'(۰) + ۲sY(۱) - ۲y(۰) - Y(s) = \frac{۱}{s-۱}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y(s)\left(s^2+2s-1\right)=\frac{1}{s-1}$$

$$y(s)=\frac{1}{(s^2+2s-1)(s-1)}$$

$$y(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2s-1)(s-1)}\right)$$

$$F(u(x,t))=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx=U(\omega,t)$$

$$F(u_t(x,t))=\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)e^{-i\omega x}dx=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

$$=U_t(\omega,t)$$

$$\Rightarrow F(u_{tt}(x,t))=U_{tt}(\omega,t)$$

$$F(u_x(x,t))=i\omega U(\omega,t)\xrightarrow[\text{مرضعل}]{\text{طبق رابطه}}F(f^{n}(x))=(i\omega)^{n}F(\omega)$$

$$F(u_{xx}(x,t))=-\omega^2U(\omega,t)$$

مراحل حل

۱- از طرفین معادله با کمک روابط بالا تبدیل فوریه می‌گیریم

۲- برحسب $U(\omega,t)$ مرتب می‌کنیم (اینجا برای مرتب کردن خیلی از موارد باید یک معادله دیفرانسیل معمولی حل شود)

۳- از طرفین $U(\omega,t)$ تبدیل فوریه معکوس می‌گیریم

$$\star\quad \begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & -\infty<x<\infty,\quad t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}\longrightarrow \underbrace{F(u(x,0))}_{C_2}=F(f(x))=F(\omega)$$

$$U_{tt}(w,t) = -w^2 U(w,t)$$

$$U_{tt} + w^2 U = 0$$

$$r^2 + w^2 = 0 \qquad r = \pm wi$$

$$U(w,t) = C_1 \sin(wt) + C_2 \cos(wt)$$

$$F\big(u(x,0)\big) = U(w,0) \longrightarrow C_2 = F(w)$$

تبدیل فوریه شرایط مرزی

$$F\big(u_t(x,0)\big) = U_t(w,0) \longrightarrow C_1 = \frac{G(w)}{w}$$

$$U(w,t) = F(w)\cos(wt) + \frac{G(w)}{w}\sin wt$$

۴ پس: $u(x,t) = F^{-1}\left(F(w)\cos wt + \frac{G(w)}{w}\sin wt\right)$

(*) $F^{-1}\big(F(w)\cos wt\big) = F^{-1}\left(F(w) \cdot \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}\right) =$

$$F\big(f(x-a)\big) = e^{-iaw}F(w) \qquad e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}F^{-1}\left(F(w)e^{iwt} + F(w)e^{-iwt}\right) = \frac{1}{2}\big(f(x+t) + f(x-t)\big)$$

(**) $F^{-1}\left(\frac{G(w)}{w}\sin wt\right) = F^{-1}\left(\frac{G(w)}{w} \cdot \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}\right)$

فرمول: $iF^{-1}\left(\frac{G(w)}{iw}\right) = i\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$

$$F^{-1}\left(\frac{G(w)}{w}e^{iwt}\right) = i\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = A(x)$$

$$\star\ F^{-1}\left(\frac{1}{\omega}\cdot G(\omega)e^{i\omega t}\right)$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$\star\quad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

$$F\big(u(x,t)\big)=U(\omega,t)$$

$$F\big(U_t(x,t)\big)=U_t(\omega,t) \longrightarrow F\big(u_{xx}(x,t)\big)=?\,\omega^2 U(\omega,t)$$

$$F(u_t)=c^2F(u_{xx}) \longrightarrow U_t(\omega,t)=-c^2\omega^2U(\omega,t)$$

$$U_t+c^2\omega^2U=0 \Rightarrow r+c^2\omega^2=0 \Rightarrow r=-c^2\omega^2 \longrightarrow U(\omega,t)=Ae^{-c^2\omega^2t}$$

$$F\big(U(x,0)\big)=F\big(f(x)\big)=F(\omega) \longrightarrow U(\omega,0)=F(\omega) \Rightarrow A=F(\omega)$$

$$\Rightarrow U(\omega,t)=F(\omega)e^{-c^2\omega^2t} \Longrightarrow u(x,t)=F^{-1}\left(F(\omega)e^{-c^2\omega^2t}\right)$$

نمی‌تونیم از این جلوتر برویم مگر از طریق انتگرال con جداگانه حساب کنیم

حل معادلات با مشتقات جزئی به کمک معادلات دیفرانسیل :

معادله درجه دو در حالت کلی مشتق $\Rightarrow a u_{xx} + b u_{xt} + c u_{tt} + d u_x + e u_t + f u = 0$

اگر در معادله‌ی فوق مشتق از زمان ظاهر نشود

u_t یا u_{tt} یا u_{xt}

می توانیم معادله را با یک معادله دیفرانسیل برحسب متغیر x حل کنیم.

★ $u_{xx} + 2u_x - u = x\sin(t)$

$$y'' + 2y' - y = Ax \quad (A = \sin t)$$

$r^2 + 2r - 1 = 0$ جواب عمومی $y_c = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

ریشه‌ها $\Rightarrow 4 - 4(1)(-1) = 8$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \qquad r_1 = -1 + \sqrt{2} \qquad r_2 = -1 - \sqrt{2}$$

r_1, r_2

تعداد ریشه صفر

جواب خصوصی: $y_p = (A_1 x + B_1)\cancel{x}$

$y_p' = A_1$

$y_p'' = 0$

$\Rightarrow$ جایگذاری در معادله‌ی اول $\Rightarrow 0 + 2A_1 - A_1 x - B_1 = Ax$

$A_1 = -A$

$2A_1 - B_1 = 0 \rightarrow B_1 = 2A_1 = -2A$

$$y = y_c + y_p \Rightarrow y = u(x,t) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} - \sin(t)\,x - 2\sin(t)$$

* $u_{tt} + u = x\sin(t)$

$y'' + y = \overset{x}{A}\sin(t)$

$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

عمومی $y_c = C_1\sin t + C_2\cos t$ ریشه های برابر با $\alpha + \beta i$ یعنی $0 + i$

خصوصی $y_p = t^s\left[A_0\sin t + B_0\cos t\right]$

$y_p' = A_0\sin t + A_0 t\cos t + B_0\cos t - B_0 t\sin t$

$y_p'' = 2A_0\cos t - A_0 t\sin t - 2B_0\sin t - B_0 t\cos t$

$$\underbrace{2A_0\cos t - A_0 t\sin t - 2B_0\sin t - B_0 t\cos t}_{y''} + \underbrace{A_0 t\sin t + B_0 t\cos t}_{y} = A\sin t$$

$y = y_c + y_p$

$u(x,t) = C_1\sin t + C_2\cos t + \frac{-x}{2} t\cos t$

$2A_0 = 0 \longrightarrow A_0 = 0$

$-2B_0 = A \longrightarrow B_0 = \frac{-x}{2}$

* $t^2 u_{tt} + 2xt u_t - u = \sin(\ln t)x$

$t^2 y'' + At y' - y = B\sin(\ln t)$

$z = \ln t$

Subject: ۲۹
Year. Month. Date. ( )

$$r(r-1) + Ar - 1 = 0 \longrightarrow y''_z + (A-1)y'_z - y = B\sin z$$

$$r^2 + r(A-1) - 1 = 0 \longrightarrow (A-1)^2 + 4 = A^2 - 2A + 5$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(A-1) + \sqrt{A^2 - 2A + 5}}{2}$$

$$y_c = C_1 e^{r_1 z} + C_2 e^{r_2 z} = C_1 t^{r_1} + C_2 t^{r_2}$$

$$y_p = A_0 \sin z + B_0 \cos z$$

$$y'_p = A_0 \cos z - B_0 \sin z$$

$$y''_p = -A_0 \sin z - B_0 \cos z$$

$$\Rightarrow y'' + (A-1)y' - y = B\sin z$$

$$-A_0\sin z - B_0\cos z + (A-1)(A_0\cos z - B_0\sin z) - A_0\sin z - B_0\cos z = B\sin z$$

$$-2A_0 - (A-1)B_0 = B \longrightarrow -2B_0 + (A-1)A_0 = 0$$

$$B_0 = \frac{-(A-1)A_0}{2}$$

$$-2A_0 + \frac{(A-1)^2 A_0}{2} = B$$

$$A_0\left(-2 + \frac{(A-1)^2}{2}\right) = B \Rightarrow A_0 = \frac{B}{-2 + \frac{(A-1)^2}{2}} = \frac{x}{-2 + 2x^2 + \frac{1}{2} - 2x}$$

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی توسط لاپلاس :

$$L(f_{(t)}) = \int_0^\infty e^{-st} f_{(t)}\, dt = F(s)$$

$$① L(u(x,t)) = \int_0^\infty e^{-sx} u(x,t)\, dx = U(s,t)$$

$$② L(u(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\, dt = U(x,s)$$

$$L(y') = sy(s) - y(0)$$

$$L(y'') = s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$① L(u_t(x,t)) = L\left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t} L(u(x,t)) = U_t(s,t)$$

متغیر آزاد را می توان بیرون آورد

$$② L(u_t(x,t)) = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$① L(u_x(x,t)) = sU(s,t) - u(0,t)$$

متغیر آزاد نیست

$$② L(u_x(x,t)) = U_x(x,s)$$

$$① L(u_{tt}) = U_{tt}(s,t)$$

$$② L(u_{tt}) = L(u_{tt}) = s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$$

$$① L(u_{xx}) = s^2 U(s,t) - su(0,t) - u_x(0,t)$$

$$② L(u_{xx}) = U_{xx}(x,s)$$

انتخاب ① یا ② به شرایط اولیه سوال بازی گردد

$$\star L(\sin(x+t)) = L(\sin x \cos t + \cos x \sin t)$$

$$= \cos t\, L(\sin x) + \sin t\, L(\cos x) = \frac{\cos t}{s^2+1} + \sin t \frac{s}{s^2+1}$$

$$\star L(\sin(xt)) = \frac{t}{s^2+t^2}$$

$$\star L(e^{x+t}) = L(e^x e^t) = e^x L(e^t) = e^x \cdot \frac{1}{s-1}$$

متغیر درلاپلاس $\to a$

درمورد t می باشد

$$\star L(e^{xt}) = \frac{1}{s-x}$$

Subject: ۳۱

Year. Month. Date. ( )

$$\bigstar \begin{cases} U_t = U_{xx} + 1 \\ U(x,0) = 0 \\ U_t(x,0) = \sin x \\ U(0,t) = t^2 \end{cases}$$

برای این که بفهمیم متغیر را x بگیریم یا t ، شروط و معادلات را برای هر شرط می نویسیم تا ببینیم

با کدام به مشکل برمی خوریم

$$U_t \begin{cases} ① \; U_t(s,t) \\ ② \; sU(x,s) - U(x,0) \end{cases}$$

از هر دو راه می توان به راحتی حل کرد. حال کدام راه بهتر است؟ باید راهی برویم که معادله دیفرانسیل با مشتق کمتری داشته باشیم. پس راه ① بهتر است:

$$U_{xx} \begin{cases} ① \; s^2 U(s,t) - sU(0,t) - U_x(0,t) \\ ② \; U_{xx}(x,s) \end{cases}$$

حل از روش گام اول ①:

از طرفین معادله لاپلاس می گیریم:

$$U_t(s,t) = s^2 U(s,t) - s\cancel{U(0,t)}^{\,t^2} - \cancel{U_x(0,t)}^{\,\sin t} + \frac{1}{s}$$

حل از معادلات

$$U_t(s,t) - s^2 U(s,t) = -st^2 - \sin t + \frac{1}{s}$$

$$y' + P(x)y = q(x) \longrightarrow ① \; A = \int P(x)$$

$$② \; \mu = e^{A}$$

$$③ \; y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu \cdot q \, dx + C\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx + C\right]$$

Subject: ۳۲
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow U(s,t) = e^{s^2 t}\left(\int e^{-s^2 t}\left(-st^2 - \sin t + \frac{1}{s}\right)dt + C\right)$$

① $\Rightarrow \int e^{-s^2 t}(-st^2)\,dt = \frac{1}{s}t^2 e^{-s^2 t} + \frac{2}{s^3}t\,e^{-s^2 t} + \frac{2}{s^5}e^{-s^2 t}$ → جدول تغییر متغیر ها $uv - \int v\,du$

② $\Rightarrow \int -e^{-s^2 t}\sin t\,dt = \frac{e^{-s^2 t}\cos t}{s^4+1} + \frac{s^2 e^{-s^2 t}\sin t}{s^4+1}$

③ $\Rightarrow \int \frac{1}{s}e^{-s^2 t} = -\frac{1}{s^3}e^{-s^2 t}$

حل ② $\int e^{at}\sin t\,dt = -e^{at}\cos t + a\int e^{at}\cos t\,dt$

$$\begin{cases} u = e^{at} \\ dv = \sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} du = ae^{at} \\ v = -\cos t \end{cases}$$

$$S = \int e^{at}\cos t\,dt = e^{at}\sin t - aI$$

$$\begin{cases} u = e^{at} \\ dv = \cos t = dv \end{cases} \qquad \begin{cases} du = ae^{at} \\ v = \sin t \end{cases}$$

$$I = -e^{at}\cos t + ae^{at}\sin t - a^2 I$$

$$I = \frac{-e^{at}\cos t}{1+a^2} + \frac{ae^{at}\sin t}{1+a^2} =$$

$$\Rightarrow U(s,t) = \left(\frac{1}{s}t^2 + \frac{2}{s^3}t + \frac{2}{s^5} + \frac{\cos t}{s^4+1} + \frac{s^2\sin t}{s^4+1} - \frac{1}{s^3} + Ce^{s^2 t}\right)$$

حال باید L^{-1} معادله بالا را بگیریم

$$u(x,t) = t^2 \overbrace{L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)}^{1} + t \overbrace{L^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right)}^{x^2} + \cos t \overset{*}{L^{-1}}\left(\frac{1}{s^4+1}\right) + \sin t\, L^{-1}\left(\frac{s^2}{s^4+1}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \overbrace{L^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right)}^{x^2} + C L^{-1}\left(e^{s^4}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{s^5}\right)$$

$$* \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^4+1+2s^2-2s^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2-2s^2}\right)$$

$$= L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1-\sqrt{2}s)(s^2+1+\sqrt{2}s)}\right)$$

$$= L^{-1}\left(\frac{As+B}{s^2-\sqrt{2}s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+\sqrt{2}s+1}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{As^3+\sqrt{2}As^2+As+Bs^2+B\sqrt{2}s+B+Cs^3-C\sqrt{2}s^2+Cs+Ds^2-D\sqrt{2}s+D}{s^4+1}\right)$$

$A + C = 0$
$\sqrt{2}A + B - C\sqrt{2} + D = 0$
$A - D\sqrt{2} + C + B\sqrt{2} = 0$
$B + D = 1$

$$\Rightarrow A L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-\sqrt{2}s+1}\right) + B L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-\sqrt{2}s+1}\right) + C L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\sqrt{2}s+1}\right) +$$

$$D L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-\sqrt{2}s+1}\right) = L^{-1}\left(\frac{s-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= L^{-1}\left(\frac{s-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right) + L^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right) =$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$$