فصل اول

۱,۱) اعداد مختلط زیر را به شکل قائم $(x+jy)$ بنویسید

$\frac{1}{2}e^{j\pi}$ ، $\frac{1}{2}e^{-j\pi}$ ، $e^{j\pi/2}$ ، $e^{-j\pi/2}$ ، $e^{j5\pi/2}$ ، $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$ ، $\sqrt{2}e^{j9\pi/4}$ ، $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4}$ ، $\sqrt{2}e^{-j/4}$:

حل:

با تبدیل کردن مختصات قطبی به کارتزین داریم:

$$\tfrac{1}{2}e^{j\pi} = \tfrac{1}{2}\cos\pi = -\tfrac{1}{2}$$
$$e^{\pi/2j} = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = j$$
$$e^{5j\pi/2} = j$$
$$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{j}} = \sqrt{2}e^{3\pi/6} = 1+j$$
$$\sqrt{2}e^{-3\pi/4} = 1-j$$

$$\tfrac{1}{2}e^{-jn} = \tfrac{1}{2}\cos(-n) = -\tfrac{1}{2}$$
$$e^{-j\pi/2} = \cos(\pi/2) - j\sin\pi/2 = -j$$
$$\sqrt{2}e^{j\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos j\,n/4\right) + j\sin(n/4) = 1+j$$
$$\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi j}{4}} = \sqrt{2}e^{-\frac{j\pi}{4}} = 1-j$$

۱,۲) اعداد مختلط زیر را به شکل قطبی بنویسید ($re^{j\theta}$، با $-\pi < \theta \leq \pi$)

۵،۲- ، $-3j$، $\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$، $1+j$، $(1-j)^2$، $j(1-j)$، $(1+j)/(1-j)$،
$(\sqrt{2}+j\sqrt{2})/(1+j\sqrt{3})$.

حل:

با تبدیل کردن مختصات کارتزین به قطبی داریم:

$$5 = 5e^{jo} \quad ،$$

$$-2=2e^{j\pi} \quad ،$$

$$-3=3e^{-j\pi/2}$$

$$1/2=j\sqrt{3/2}=e^{-j\pi/8} \quad ،$$

$$\frac{1+j}{1-j}=e^{j\pi/2} \quad ,$$

$$\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}j}=e^{-j\pi/B}$$

۱،۳) P_∞ و E_∞ را برای هر یک از سیگنالهای زیر پیدا کنید.

الف) $x_1(t)=e^{-2t}u(t)$

ب) $x_2(t)=e^{j}(2t+\pi/4)$

ج) $x_3(t)=\cos t$

د) $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

هـ) $x_2[n]=e^{j}(n\pi/2+\pi/8)$

و) $x_3[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

حل:

الف) چون $E_\infty < \infty$،

$$E_\infty = \int_0^\infty e^{-at} dt = \frac{1}{4} \Rightarrow P_\infty = 0$$

ب) $|x_2(t)| = 1$,$x_2(t) = e^{j(2t + \pi/4)}$. بنابراین

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \infty \text{ ،}$$

$$p_\infty = \underset{N\to\infty}{Limt} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x_2(t)| dt = \underset{N\to\infty}{Limit} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt = 1$$

ج) $x_3(t) = \cos t$ بنابراین:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_3(t)|^{+} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(t) dt = \infty$$

$$p_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2 t \, dt - \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{1 + \cos(t)}{2} dt = \frac{1}{2}$$

د) چون $x_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$ و $|x_1[n]|^2 = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$ پس

چون $E_\infty < \infty$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_1[n]|^2 = \sum_{\circ}^{+\infty} (1/4)^n = 4 \quad \text{،} \quad p_\infty = \circ$$

هـ) $x_2[n] = e^{-j(2\pi/3 + \pi/6)}$ و $|x_2[n]|^2 = 1$ بنابراین

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_2[n]|^2 = \infty \quad , \quad p_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x_2[n]|^2 = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} 1 = 1$$

و) چون $x_3[n] = \cos\left(\tfrac{\pi}{4} n\right)$ از اینرو

$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_3[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos^2\left(\tfrac{\pi}{4} n\right) = \infty$$

$$p_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} \cos\left(\tfrac{\pi}{4} n\right) = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{N+1} \left(\frac{1 + \cos\left(\tfrac{\pi}{2} n\right)}{2} \right) = \tfrac{1}{2}$$

۱,٤) فرض کنید $x[n]$ سیگنالی باشد که در $n<2$ و $n>4$ صفر است. هر یک از سیگنالهای زیر در چه بازه هایی صفر هستند؟

الف) $x[n-3]$

ب) $x[n+4]$

ج) $x[-n]$

د) $x[-n+2]$

هـ) $x[-n-2]$

حل:

الف) سیگنال $x[n]$ ۳ واحد به سمت راست شیفت یافته است، سیگنال شیفت یافته برای $n<1$ و $n>7$ برابر صفر است.

ب) سیگنال $x[n]$ ٤ واحد به سمت چپ شیفت یافته است، سیگنال شیفت یافته برای $n<-6$ و $n>0$ برابر صفر است.

ج) سیگنال $x[n]$ معکوس شده است. پس سیگنال معکوس شده بر $n<-4$ و $n>2$ صفر است.

د) سیگنال $x[n]$ معکوس شده و ۲ واحد به سمت راست شیفت یافته است، سیگنال جدید برای $n<-2$ و $n>4$ صفر است.

هـ) سیگنال $x[n]$ معکوس شده و آن هم ۲ واحد به سمت شیفت یافته است.

۱,٥) فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باشد که در $t<3$ صفر شده است. سیگنالهای زیر به ازای چه مقادیری از t صفر خواهند بود؟

الف) $x(1-t)$

ب) $x(1-t)+x(2-t)$

ج) $x(1-t)x(2-t)$

د) $x(3t)$

هـ) $x(t/3)$

حل:

الف) $x(1-t)$ از معکوس نمودن و شیفت دادن به اندازه ۱ واحد به راست بـه دسـت مـی آیـد پـس $x(1-t)$ برای $t>-2$ صفر می باشد.

ب) طبق (۱.الف) می دانیم $x(1-t)$ برای $t>-2$ صفر خواهد بود. بطور مشابه $x(2-t)$ نیز برای $t>-1$ صفر می شود در این صورت $x(1-t)+x(2-t)$ برای $t>-2$ صفر خواهد بود.

ج) $x(3)$ از انقباض خطی $x(t)$ با ضریب ۳ بدست می آید. $x(3t)$ بر $t<1$ صفر خواهد بود.

د) $x\left(t/3\right)$ از انبساط خطی $x(t)$ با ضـریب ۳ بدسـت مـی آیـد پـس $x\left(t/3\right)$ بـرای $t<9$ صـفر خواهد شد.

۱,٦) در مورد متناوب بودن یا نبودن سیگنال های زیر تحقیق کنید.

الف) $x(t)=2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$

ب) $x_2[n]=u[n]-u[-n]$

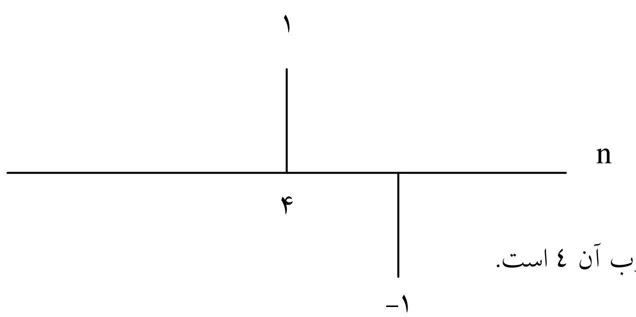
ج) $x_3[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n-4k]-\delta[n-1--4k]\}$

حل:

الف) $x_1(t)$ متناوب نیست زیرا برای $t>0$ صفر شده است.

ب)به ازای همه مقادیر n، $x[n]=1$ است و تابع متناوب با دوره تناوب ۱ می باشد.

ج) $x_3[n]$ در شکل (۱,٦ج)رسم شده است.



بنابراین دوره تناوب آن ٤ است.

۱،۷) برای سیگنالهای زیر مقادیر متغیر مستقل را که به ازای آنها بخش زوج سیگنال صفرست پیدا کنید.

الف) $x_1[n]=u[n]-u[n-4]$

ب) $x_2(t)=\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

ج) $x_3[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$

د) $x_4(t)=e^{-5t}u(x+2)$

حل:

الف)

$$\varepsilon v\ \{x_1[n]\}=\frac{1}{2}\{x_1[n]+x_1[-n]\}=\frac{1}{2}\{u[n]-u[n-4]+u[-n]-u[-n-4]\}$$

بنابراین $\varepsilon v\{x_1[n]\}$ برای $|n|>3$ برابر صفر است.

ب) چون سیگنال $x_2(t)$ سیگنالی فرد است،پس $\varepsilon v\{x_2(t)\}$ به ازای تمام مقادیر t صفر است.

ج)

$$\varepsilon v\{x_3(t)\}^{-}\ {}^1\!/_2\{x_1[n]+x_1[-n]\}={}^1\!/_2\left({}^1\!/_2\right)^n u[n-3]-\left({}^1\!/_2\right)^{-n}u[-n-3]$$

ازینرو $\varepsilon v\{x_1[n]\}$ برای $|n|>3$ برابر صفر خواهد بود.

د)

$$\varepsilon v\{x_4(t)\}={}^1\!/_2(x_4(t))+(x_4(t)+x_4(-t))={}^1\!/_2\{e^{-5t}u(t+2)-e^{+5t}u(-t+2)]$$

بنابراین $\varepsilon v\{x_4(t)\}$ فقط برای $|t|\to\infty$ برابر صفر است.

۱،۸) قسمت حقیقی سیگنالهای زیر را به صورت $Ae^{-at}\cos(\omega t+\phi)$ بنویسید، A، a، ω و ϕ اعداد حقیقی اند و بایستی $A>\circ$ و $-\pi<\phi\leq\pi$ باشد.

الف) $x_1(t)=-2$

ب) $x_2(t)=\sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t+2\pi)$

ج) $x_3(t)=e^{-t}\sin(3t+\pi)$

seyed saleh mousavi
Islamic Azad University izeh

د) $x_4(t) = je^{(-2+j100)t}$

حل:

الف)

$$\operatorname{Re} ad\{x_1(t)\}y = -2 = 2e^{0t}\cos(ot+\pi)$$

ب)

$$\operatorname{Re}\{x_2(t)\} = \sqrt{2}\cos(\pi/4)\cos(3t+2n) = \cos 3t = e^{ut}\cos(3t+o)$$

ج)

$$\operatorname{Re}\{x_3(t)\} = e^{-t}\sin(3t+n) = e^{-t}\cos(3t+\pi/2)$$

د)

$$\operatorname{Re}\{x_4(t)\} = -e^{-2t}\sin(100t) = e^{-2t}\sin(100t+n) + e^{-2t}\cos(100t+\pi/2)$$

۱,۹) در مورد متناوب بودن یا نبودن سیگنال های زیـر تحقیـق کنیـد. بـرای سـیگنالهای متنـاوب دوره تناوب اصلی را بیابید.

الف) $x_1(t) = je^{j10t}$

ب) $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$

ج) $x_3[n] = e^{jv\pi n}$

د) $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$

هـ) $x_5[n] = 3e^{j3(n+1/2)/5}$

حل:

الف) $x_1(t)$ یک نمایی مختط متناوب است.

$$x_1(t) = je^{j10t} = e^{j(10t+\pi/2)}$$

دوره تناوب اصلی آن هم برابر است با $\dfrac{2R}{10} = \dfrac{R}{5}$

ب) $x_2(t)$ یک نمایی مختط ضرب شده به یک تأخیر نمایی است، ازینرو $x_2(t)$ نامتناوب است.

ج) $x_3[n]$ یک سیگنال نمایی مختلط با دوره تناوب اصلی $2 = \dfrac{2\pi}{\pi}$ می باشد.

د) $x_4[n]$ سیگنال متناوب با دوره تناوب زیر است :

$$N = m\left(\frac{2\pi}{3\pi/5}\right) = m\left(\frac{10}{3}\right)$$

که با انتخاب $m=3$ ارائه می شود، دوره تناوب اصلی را ۱۰ بدست می آوریم.

$$N = 3\left(\frac{10}{3}\right) = 10$$

هـ) $x_5[n]$ سیگنالی متناوب نیست. $x_5[n]$ نمایی مختلط با $w_\circ = 35$ اسـت. نمـی تـوانیم عـددی حقیقی بدست آوریم که بطور مثال $m\left(\frac{2\pi}{\omega_\circ}\right)$ نیز عددی حقیقی باشد پس $x_3[n]$ متناوب نیست.

$$x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$$

۱,۱۰) دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$ را بیابید.

حل:

پریود جمله ی اول برابر است با $RHS = \frac{2\pi}{10} = \pi/5$ برحسب رادیان

پریود جمله دوم برابر است با $RHS = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$ برحسب رادیان

بنابراین سیگنال کلی با دوره تناوب ک. م. م بین RHS های سیگنالها خواهد بود. که این مقـدار برابـر است با $\pi = \pi/2, (\pi/5)$ ک. م. م

$$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{n}} - e^{j\frac{2\pi}{5}n}$$

۱,۱۱) دوره تناوب اصلی سیگنال $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$ را بیابید.

حل:

دوره تناوب جمله اول برحسب RHS ۱ است.

هرگاه (m=۲) باشد، دوره تناوب جمله دوم بر حسب RHS $m\left(\frac{2\pi}{4\pi/7}\right) = 7$ است.

هرگاه (m=۲)، دوره تناوب جمله ی سوم برحسب RHS برابر $5 = m\frac{2\pi}{2\pi/5}$ است.

$35 = \{5 , 7 , 1\}$ ک. م. م.

۱,۱۲) سیگنال گسسته در زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$$

اعداد M و $n_\circ$ را طوری تعیین کنید که بتوان $x[n]$ را به صورت زیر بیان کرد

$$x[n] = u[Mn - n_\circ]$$

حل:

سیگنال $x[n]$ در شکل ۱۱۲.ح نشان داده شده است که از معکوس کردن $u[n]$ و انتقال بـه انـدازه ۳ واحد به راست بدست می آید. بنابراین $x[n] = u[-n+3]$ که در آن :

$$M = -1 \; , \; n_\circ = -3$$

۱,۱۳) سیگنال پیوسته در زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$$

E_∞سیگنال زیر را بدست آورید.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

حل:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) dc = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau+2) - \delta(\tau-2) dt$$

$$= \begin{cases} \circ & t < -2 \\ 1 & -2 \le t \le 2 \\ \circ & t > 2 \end{cases}$$

بنابراین $E\infty = \int_{-2}^{2} dt = 4$

۱,۱٤) سیگنال متناوب

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \circ \le t \le 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

دارای تناوب $T=2$ است. مشتق این سیگنال به «قطار ضربه» زیر مربوط می شود:

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)$$

می توان نشان داد که:

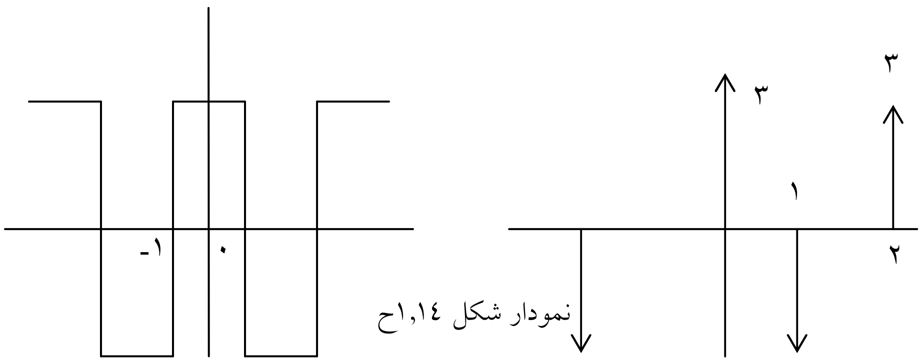
$$\frac{dx(t)}{dt}=A_1 g(t-t_1)+A_2 g(t-t_2)$$

مقادیر A_1، t_1، A_2، و t_2 را محاسبه کنید.

حل:

سیگنال $x(t)$ و مشتق آن در شکل ۱,۱۴ح نشان داده شده است.

بنابراین:



نمودار شکل ۱,۱۴ح

$$g(t)=3\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)-3\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k-1)$$

$A_1=3$ و $t_1=0$ و $A_2=-3$ و $t_2=1$ را ارائه می کند.

۱,۱۵) سیستم S با ورودی $x[n]$ را در نظر بگیرید. این سیستم از اتصال سری سیستم S_1 و S_2 به دست آمده است. روابط ورودی – خروجی S_1 و S_2 به صورت زیرست.

$$S_2 : y_1[n]=2x_1[n]+4x_1[n-1]$$

$$S_2 : y_2[n]=x_2[n-2]+\frac{1}{2}x_2[\pi-3]$$

سیگنالهای $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ورودی ها هستند.

الف) رابطه ورودی ـ خروجی سیستم S را بیابید.

ب) آیا با تعویض ترتیب سیستمهای S_1 و S_2 رابطه ورودی ـ خروجی S تغییر می کند یا نه؟

حل:

سیگنال $x_2[n]$ که ورودی S۲ است بر حسب $y_1[n]$ می باشد بنابراین:

الف)

$$
\begin{aligned}
y_2[n] &= x_2[n-2] + \tfrac{1}{2}x_2[n-3] \\
&= y_1[n-2] + \tfrac{1}{2}y_1[n-3] \\
&= 2x_1[n-2] + 4x_1[n-3] + \tfrac{1}{2}\left(2x_1[n-3] + 4x_1[n-4]\right) \\
&= 2x_1[n-2] + 5x_1[n-3] + 2n_1[n-4]
\end{aligned}
$$

رابطه خروجی – ورودی برای S برابر است با

$$y[n] = 2[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$$

ب) رابطه خروجی – ورودی اگر مرتبه ی S۱ و S۲ با سری هایی به هم مربوط شوند تغییر نمـی کنـد و فقط معکوس می شود. این شکل را به راحتی با فرض اینکه S۱، S۲ را تعقیب مـی کنـد مـی تـوانیم رسم کنیم. در این مورد، سیگنال $x_1[n]$ که ورودی S۱ است مانند $y_2[n]$ می باشد. بنابراین

$$
\begin{aligned}
y_1[n] &= 2x_1[n] + 4x_1[n-1] \\
&= 2y_2[n] + 4y_2[n-1] \\
&= 2\left(x_2[n-2] + \tfrac{1}{2}x_2[n-3]\right) + 4\left(x_2[n-3] + \tfrac{1}{2}x_2[n-4]\right) \\
&= 2x_2[n-2] + 5x_2[n-3] + 2x_2[n-2]
\end{aligned}
$$

رابطه ورودی و خروجی برای S بار دیگر به صورت:

$$y[n] = 2x[n-2] + Sx[n-3] + 2n[n-4]$$

است .

۱,۱۶) سیستم گسسته در زمان را با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیریـد. رابطـه ورودی ـ خروجی این سیستم به صورت زیر است.

$$y[n]=x[n]x[n-2]$$

الف) آیا سیستم بدون حافظه است؟

ب) خروجی را به ازای ورودی $A\delta[n]$ تعیین کنید، A یک عدد حقیقی یا مختلط است.

ج) آیا سیستم وارونپذیر است؟

حل:

الف) سیستم بدون حافظه نیست زیرا $y[n]$ به مقادیر لحظه ی قبلی $x[n]$ بستگی دارد.

ب) خروجی سیستم به صورت $y[n]=\delta[n]\delta[A-2]=0$ خواهد بود.

ج) طبق نتیجه ی قسمت (ب)، می توانیم نتیجه بگیریم که خروجی سیستم همیشه برای ورودیهای $8[n-k]$ و $k\in z$ صفر خواهد بود. بنابراین سیستم معکوس پذیر نیست.

۱,۱۷) یک سیستم پیوسته در زمان با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$، با رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$y(t)=x(\sin(t))$$

الف) آیا سیستم علّی است؟

ب) آیا این سیستم خطی است؟

حل:

الف) سیستم کازال نیست زیرا خروجی $y(t)$ در برخی لحظات ممکن است به مقادیرلحظات آینده ی $x(t)$ بستگی داشته باشد. مثلا $y(-\pi)=x(0)$.

ب) دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را در نظر بگیرید.

$$x_1(t)\to y_1(t)=x_1(\sin(t))$$
$$x_2(t)\to y_2(t)=x_2(\sin(t))$$

فرض کنید $x_3(t)$ ترکیب خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ باشد. $x_3(t)$ برابر است با:

$$x_3(t)=\alpha x_1(t)+b\,x_2(t)$$

که α و b اسکالرهای دلخواه هستند. اگر $x_3(t)$ ورودی سیستم داده شده باشد بنابراین خروجی متناظر $y_3(t)$ برابر است با:

$$\begin{aligned}y_3(t)&=x_3(\sin t)\\&=ax_1(\sin t)+bx_2(\sin(t))\\&=\alpha_1 y_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

۱,۱۸) یک سیستم پیوسته در زمان با ورودی $x(t)$ وخروجی $y(t)$، با رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$y[n]=\sum_{k=n-n_\circ}^{n+n_\circ} x[k]$$

که در آن $n_\circ$ یک عدد صحیح مثبت کراندارست.

الف) آیا این سیستم خطی است؟

ب) آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟

ج) اگر بدانیم $x[n]$ کراندارست (یعنی به ازای هر n، $|x[n]|<B$ که B عددی صحیح است)، می توان نشان داد که $y[n]$ نیز کراندارست و کران آن C است. نتیجه می گیریم که سیستم پایدار است. C را بر حسب B و $n_\circ$ بیابید.

حل:

الف) دو ورودی دلخواه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را در نظر بگیرید:

$$x_1[n]\rightarrow y_1[n]=\sum_{k=n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_1[k]$$

$$x_2[n]\rightarrow y_2[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_2[k]$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $n_1[n]$ و $n_2[n]$ باشد در این صورت

$$x_3[n]=\alpha x_1[n]+b\,x_2[n]$$

که αو b اسکالرهای دلخواهی هستند. اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده شده باشند در این صورت خروجی متناظر $y_3[n]$ برابر است با

$$y_2[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_3[k]$$
$$=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ}\left(\alpha n_1[k]+bx_2[k]\right)=\alpha\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_1[k]+b\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_2[k]$$
$$=\alpha y_1[n]+by=[n]$$

بنابراین سیستم خطی است.

ب) ورودی دلخواه $x_2[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_1[k]$ خروجـی متنـاظر باشـد ورودی دومی برابر صورت $x=[n]$ که از شیفت زمانی $x_1=[n]$ حاصل می گردد را در نظر بگیرید.

$$x_2[n]=x_1[n-n_1]$$

خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_2[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_2[k]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_1[k-n_1]=\sum_{n-n_1-n_\circ}^{n-n_1+n_\circ} n_1[k]$$

بنابراین توجه کنید که

$$y_1[n-n_1]=\sum_{n-n_1-n_\circ}^{n-n_1-n_\circ} x_1[k]$$

بنابراین

$$y_2[n]=y_1[n-n_1]$$

این نشان می دهد که سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

ج) اگر $|x[n]|<\beta$ در این صورت

$$y[n]\leq(2n_\circ+1)\beta$$

بنابراین $C\leq(2n_\circ+1)\beta$

١,١٩) به ازای روابط ورودی ـ خروجی داده شده تعیین کنید سیستم خطی است، تغییرناپذیر با زمـان است، یا هر دو.

الف) $y(t)=t^2x(t-1)$ ب) $y[n]=x^2[n-2]$

ج) $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$ د) $y[n]=\vartheta x\{x[n]\}$

حل:

i) الف) دو ورودی دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ رادر نظر بگیرید:

$$x_1(t) \to y_1(t) = t^2 x_1(t-1)$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = t^2 x_2(t-1)$$

فرض کنید $x_3(t)$ یک ترکیب خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ یعنی:

$$x_3(t) = t_2 x_3(t-1)$$

خروجی متناظر $y_3(t)$:

$$= t^2 \left(\alpha n_1(t-1) + b x_2(t-1)\right) = \alpha y_1(t) t b y_2(t)$$

بنابراین سیستم خطی است.

ii) ورودی دلخواه $x_1(t)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید.

$$y_1(t) = t^2 x_1(t-1)$$

خروجی متناظر باشد، ورودی $x_2(t)$ از شیفت یافتن $x_1(t)$ در زمان بدست خواهد آمد:

$$x_2(t) = x_1(t-t\ )$$

خروجی متناظر این سیگنال برابر است با:

$$y_2(t) = t^2 x_2(t-1) = t^2 x_1(t-1-t_\circ)$$

همچنین بخاطر داشته باشید که

$$y_1(t-t_\circ) = (t-t_\circ)^2 x_1(t-1-t_\circ) \neq y_2(t)$$

بنابراین سیستم تغییرپذیر با زمان است.

ب) i) دو روی دلخواه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را در نظر بگیرید؛

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1^2[n-2]$$

$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2^2[n-2]$$

$x_3[n]$را ترکیب خطی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در نظر بگیرید؛

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1^2[n-2]$$

$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2^2[n-2]$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $x_3[n]$ و $x_2[n]$ باشد: یعنی

$$x_3[n] = \alpha n_1[n] + b\, x_2[n]$$

که b,α اسکالرهای دلخواهی هستد اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده شده باشند در این صورت خروجی متناظر برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3^2[n-2] \\ &= \left(\alpha x_1[n-2]+bx_2[n-2]\right)^2 \\ &= a^2x_1^2[n-2]+b^2.x_2^2[n-2]+2abx_1[n-2]x_2[n-2] \\ &\neq ay_1[n]+by_2[n] \end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی نیست.

ii) ورودی دلخواهی مانند $x_1[n]$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$$y_1[n]=x_1^2[n-2]$$

خروجی متناظر باشد. ورودی دوم $x_2[n]$ در زمان بدست می آید:

$$x_2[n]=x_1[n-n_\circ]$$

خروجی متناظر برابر است با:

$$y_2[n]=x_2^2[n-2]=n_1^2[n-2-n_\circ]$$

توجه داشته باشید که:

$$y_1[n-n_\circ]=n_1^2[n-2-n_\circ]$$

بنابراین:

$$y_2[n]=y_1[n-n_\circ]$$

که نشان می دهد سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

ج) i) دو ورودی دلخواه $n_1[n]$ و $n_2[n]$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} x_1[n] &\rightarrow y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1] \\ x_2[n] &\rightarrow y_2[n]=x_2[n+1]-x_2[n-1] \end{aligned}$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ باشد یعنی

$$x_3[n]=\alpha x_1[n]+b\ x_2[n]$$

که a , b اعداد دلخواهی هستند. اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده باشد. در این صورت خروجی متناظر $y_3[n]$ برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3[n+1]-x_3[n-1] \\ &= a.x_1[n+1]+bx_1[n+1]-ax_1[n-1]-bx_2[n-1] \\ &= a(x_1[n+1]+x_1[n-1])+b(x_2[n+1]-x_2[n-1]) \\ & ay_1[n]+by = y[n] \end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است

ii) ورودی $x_1[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$ خروجی متناظر باشد. ورودی دوم $x_2[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$ در حوزه زمانی بدست می آید.

اگر $x_2[n]=x_1[n-n_\circ]$ خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_2[n]=x_2[n+1]-x_2[n-1]=x_1[n+1=n_\circ]-n_1[n-1-n_\circ]$$

همچنین بیاد داشته باشید که

$$y[n-n_\circ]=x_1[n+1-n_\circ]-n_1[n-1-n_\circ]$$

بنابراین

$$y_2[2]=y_1[n-n_\circ]$$

و بیان می کند که سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

i) دو ورودی $x_1[t]$ و $x_2[t]$ را در نظر بگیرد.

$$\begin{aligned} x_1(t) &\to y_1(t)=od\{x_1(t)\} \\ x_2(t) &\to y_2(t)=od\{x_1(t)\} \end{aligned}$$

فرض کنید که $x_3(t)$ ترکیب خطی $x_1[t]$ و $x_2[t]$ باشد یعنی

$$x_3(t)=\alpha x_1(t)+bx_2(t)$$

که a , b اعداد دلخواهی هستند. اگر $x_3(t)$ به عنوان ورودی سیستم داده شده تلقی شود دراین صورت خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= od\{x_3(t)\}=od\{\alpha x_1(t)+bx_2(t)\} \\ &= a\ od\{x_1(t)\}+b\ od\{x_2(t)\}=ay_1(t)+by_2(t) \end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

ii) سیگنال دلخواه $x_1(t)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید.

$$y_1(t)=od\{x_1(t)\}=\frac{x_1(t)-x_1(-t)}{2}$$

خروجی متناظر باشد. سیگنال $x_2(t)$ را بعنوان سیگنال ورودی تمام که از انتقال $x_1(t)$ از زمان بدست می آید، در نظر بگیرید:

$$x_2(t)=x_1(t-t_\circ)$$

خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_2(t)=od\{x_2(t)\}=\frac{x_2(t)-x_2(-t)}{2}$$
$$=\frac{x_1(t-t_\circ)-x_1(-t-t_\circ)}{2}$$

همچنین توجه کنید که:

$$y_1(t-t_\circ)=\frac{x_1(t-t_\circ)-x_1(-t_\circ+t_\circ)}{2}\neq y_2(t)$$

بنابراین سیستم، تغییرناپذیر با زمان نیست.

۱٫۲۰) یک سیستم خطی پیوسته در زمان S با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ دارای رابطه ورودی ـ خروجی زیر است

$$x(t)=e^{j2t}\xrightarrow{S}y(t)=e^{j3t}$$
$$x(t)=e^{j-2t}\xrightarrow{S}y(t)=e^{-j3t}$$

الف) خروجی متناظر با $x_1(t)=\cos(2t)$ محاسبه کنید.

ب) خروجی متناظر با $x_2(t)=\cos\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)$ را بیابید.

حل:

الف) داده شده

$$\begin{cases}x(t)=e^{2jt}\rightarrow y(t)=e^{j3t}\\ x(t)=e^{-j2t}\rightarrow y(t)=e^{-j3t}\end{cases}$$

از آنجا که سیستم خطی است:

$$x_1(t)=\frac{1}{2}\left(e^{j2t}+e^{-j2t}\right)\rightarrow y_1(t)=\frac{1}{2}\left(e^{j3t}+e^{-j3t}\right)$$

بنابراین

$$x_1(t)=\cos(2t)\rightarrow y_1(t)=\cos(3t)$$

ب) می دانیم:

$$x_2(t)=\cos\left(2\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)=\frac{e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{j2t}}{2}$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن داریم:

$$x_1(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{-2jt}\right)\rightarrow y_1(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{-j}e^{3jt}+e^{j}e^{-j3t}\right)=\cos(3t-1)$$

بنابراین

$$x_1(t)=\cos\left(2\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)\rightarrow y(t)=\cos(3t-1)$$

۱,۲۱) شکل م ۱-۲۱ سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ را نشان می دهد. سیگنالهای زیر را رسم و مقداردهی کنید.

الف) $x(t-1)$

ب) $x(2-t)$

ج) $x(2t+1)$

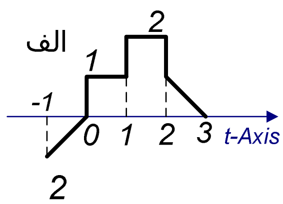
د) $\left(x4-\frac{t}{2}\right)$

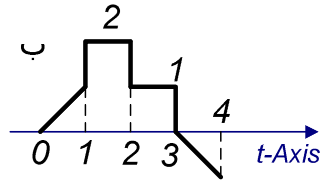
هـ) $[x(t)+x(-t)u(t)]$

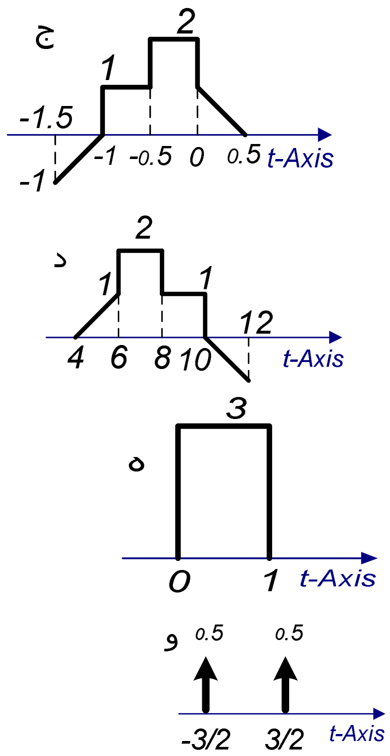
و) $\left(x(t)\,\delta\left(t+\frac{3}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)$

حل:

سیگنالها در شکل ح ۱,۲۱ رسم شده اند.

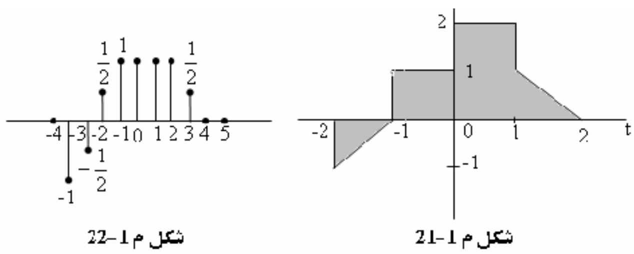






شکل ح ۱,۲۱

۱,۲۲) شکل م ۱–۲۲ سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ را نشان می دهد. سیگنالهای زیر را به دقت رسم و مقدارگذاری کنید.



شکل م 1-22 شکل م 1-21

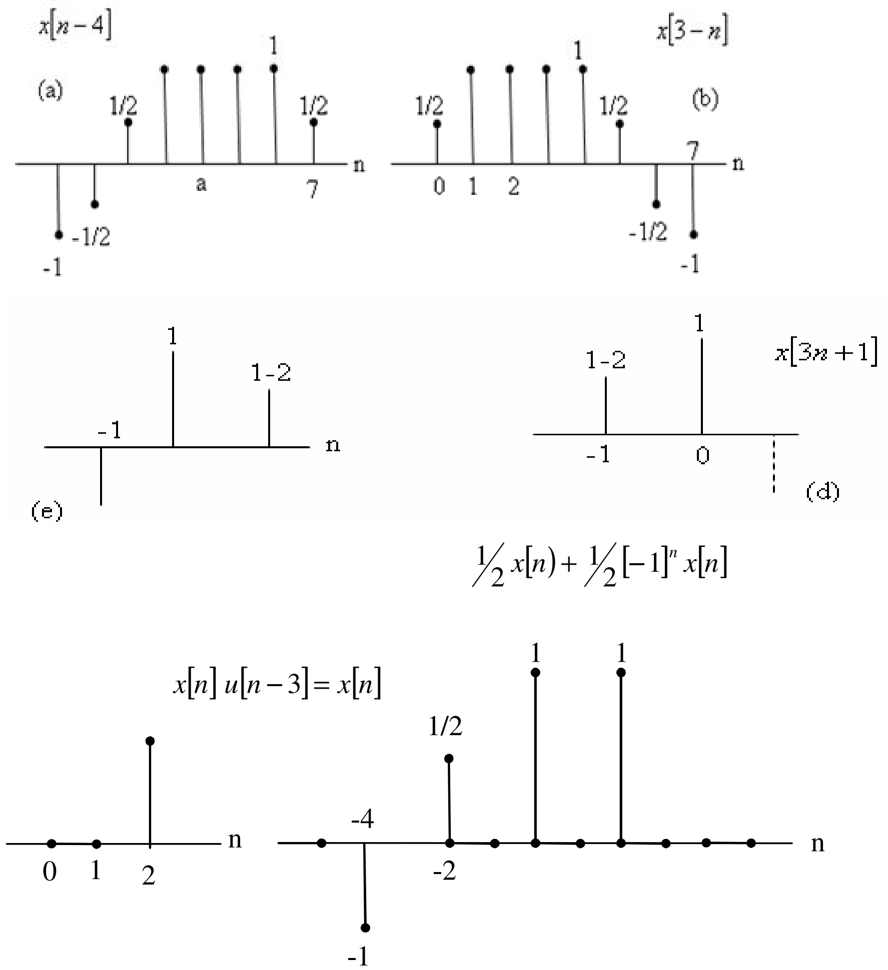
الف) $x[n-4]$

د) $x[3n+1]$

ز) $\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}(-1)^n x[n]$

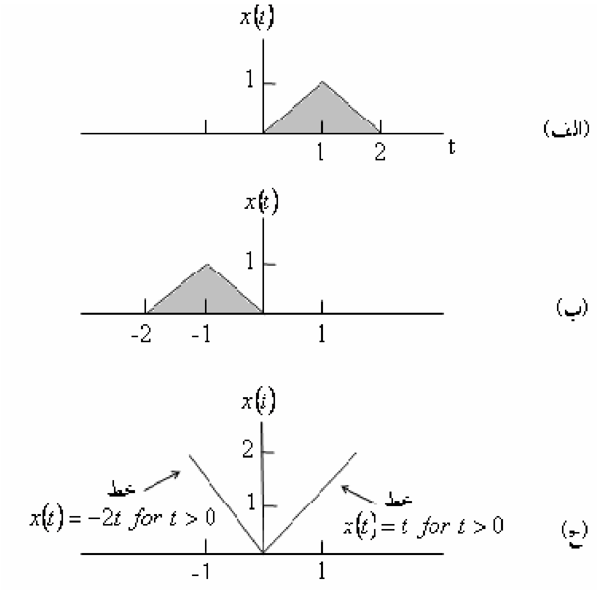
ح) $x\left[(n-1)^2\right]$

سیگنالها در شکل ح ۱,۲۲ نشان داده شده است.



شکل ح ۱,۲۲

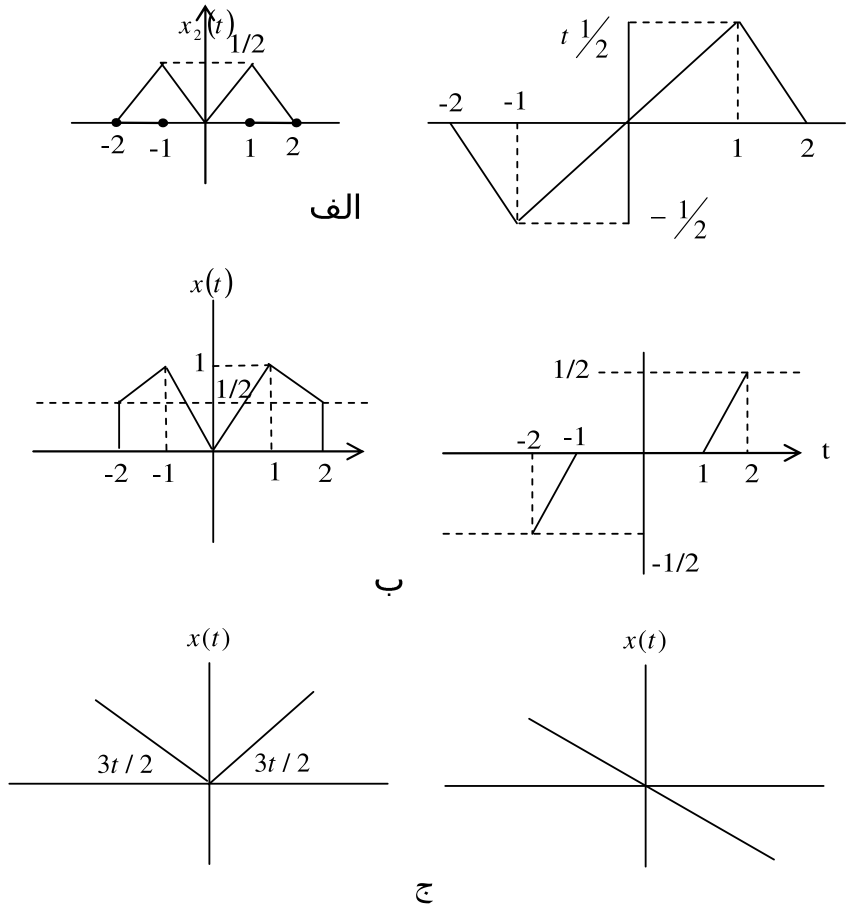
۱,۲۳) بخشهای زوج و فرد سیگنالهای شکل م ۱–۲۳ را تعیین، و آنها را رسم و به دقت مقدارگـذاری کنید.



شکل م ۱-۲۳

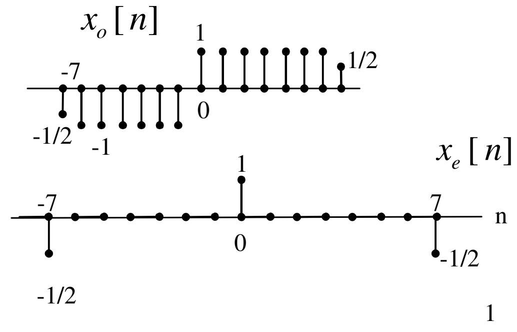
حل:

قسمتهای زوج و فرد سیگنال در شکل ح۱٫۲۳ رسم شده است.

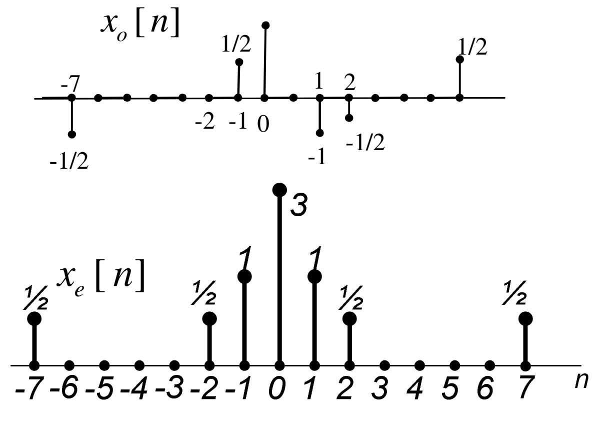


شکل مسئله ح۱،۲۳

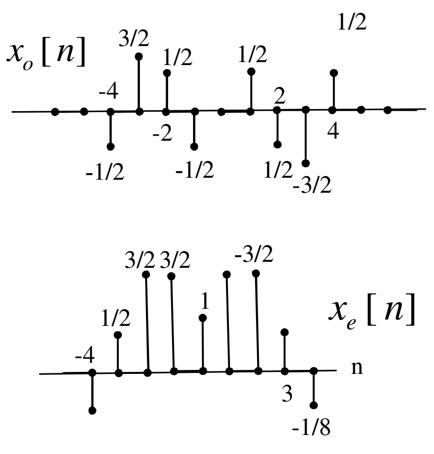
۱،۲٤) بخشهای زوج و فرد سیگنالهای شکل م ۱–۲٤ را تعیین، و آنها را رسم و به دقت مقدارگذاری کنید.



الف



ب



ج

شکل مسئله ح۱,۲٤

۱,۲۵) تعیین کنید کدام یک از سیگنالهای پیوسته در زمان زیر متناوب است، دوره تناوب پایه سیگنالهای متناوب را بیابید.

الف) $x(t)=3\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)$

ب) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$ ج) $x(t)=\left[\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2$

د) $x(t)=\xi\{\cos(4\pi t)u(t)\}$

هـ) $x(t)=\xi\{\sin(4\pi t)u(t)\}$

و) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-(2t-n)}$

حل:

الف) پریودیک ، $2\pi/4=\pi/2$ = تناوب

ب) پریودیک، $N=2\pi/\pi=2$

ج) $x(t)=[t]=[1+\cos(4t-2\pi)]/2$ متناوب؛ تناوب $\frac{2\pi}{4}=\pi/2$

د) $x(t)=\cos(4nt)/2$ متناوب؛ $\frac{2\pi}{4\pi}=1/2$ = تناوب

هـ) $x(t)=[\sin(4nt)u(t)-\sin(4\pi t)u(-t)]/2$ پریودیک نیست.

و) پریودیک نیست.

۱,۲٦) تعیین کنید آیا سیگنالهای گسسته در زمان زیر متناوب اند یانه. در صورت متناوب بودن دوره تناوب اصلی آنها را تعیین کنید.

الف) $x[n]=\sin\left[\frac{6\pi}{7}\pi+1\right]$

ب) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{8}-\pi\right)$

ج) $x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{8}\pi^2\right]$

د) $x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]\cos\left[\frac{\pi}{4}\pi\right]$

هـ) $x[n]=2\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]+\sin\left[\frac{\pi}{8}n\right]-2\cos\left[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right]$

حل:

الف) پریودیک با پریود ۷–

ب) غیر پریودیک.

ج) پریودیک با پریود ۸–

د) $x[n]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(3\pi \frac{n}{4}\right)+\cos\left(\pi \frac{n}{4}\right)\right]$ متناوب با دوره تناوب ۸

هـ) متناوب با دوره تناوب ۱٦

۱٫۲۷) در این فصل چند خاصیت عمومی سیستمها را معرفی کردیم. سیستم می تواند صفات زیر راداشته یا نداشته باشد.

(۱) بدون حافظه

(۲) تغییرناپذیر با زمان

(۳) خطی

(٤) علّی

(٥) پایدار

تحقیق کنید که سیستمهای پیوسته در زمان زیر کدام یک از این خواص را دارند و کدام یک را نـدارد. دلیل بیاورید. در هر مورد $y(t)$ خروجی سیستم و $x(t)$ ورودی سیستم می باشد.

الف) $y(t)=x(t-2)+x(2-t)$ ب) $y(t)=[(\cos 3t)]x(t)$

ج) $y(t)=\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

د) $y(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ x(t)+x(t-2), & t\ge 0\end{cases}$ هـ) $(yt)=\begin{cases}0 & , x(t)<0\\ x(t)+x(t-2), & x(t)\ge\end{cases}$

و) $y(t)=x(t/3)$ ز) $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

حل:

الف) خطی پایدار

ب) بی حافظه، خطی، کازال؛ پایدار

ج) خطی

د) تغیر ناپذیر با زمان، خطی، کازال پایدار

هـ) خطی، پایدار

و) تغییرناپذیر با زمان، خطی، کازال

۱,۲۸) تحقیق کنید که کدام یک از خواص بیان شده در مسئله ۱–۲۷ برای سیستمهای گسسته در زمان زیر وجود دارند. دلیل بیاورید. در هر مورد $y[n]$ خروجی و $x[n]$ ورودی سیستم است.

الف) $y[n]=x[-n]$ ب) $y[n]=x[n-2]-2x[n-8]$

ج) $y[n]=nx[n]$ د) $\xi\{x[n-1]\}$

هـ) $y[n]=\begin{cases} x[n] & , n\geq 1 \\ \circ & , n=\circ \\ x[n+1] & , n\leq -1 \end{cases}$ و) $y[n]=\begin{cases} x[n] , & n\geq 1 \\ \circ , & n=\circ \\ x[n] , & n\leq -1 \end{cases}$

ز) $y[n]=x[4n+1]$

حل:

الف) خطی، پایدار

ب) تغییرناپذیر با زمان، خطی، کازال، پایدار

ج) بی حافظه، خطی، کازال

د) خطی، پایدار

هـ) خطی، پایدار

و) بی حافظه، خطی، کازال، پایدار

۱,۲۹)

(الف) نشان دهید سیستم گسسته در زمان دارای ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$ و رابطه ورودی ـ خروجی $y\,[n]=\{Re\,x\,[n]\}$ جمع پذیرست. آیا این سیستم به ازای رابطه $[yn]=\mathrm{Re}\{e^{j\pi/4}x[n]\}$ جمع پذیرست؟ (در این مسئله $x[n]$ را حقیقی نیست.)

ب) خطی بودن یک سیستم مستلزم این است که سیستم دو خاصیت جمع پـذیر و همگنـی را داشـته باشد. تحقیق کنید هر یک از سیستمهای زیر خاصیت جمع پذیری و یا همگنی را دارنـد یـا نـه. دلیـل بیاورید، یعنی برای اثبات وجود هر خاصیت برهان بیاورید و برای رد آن مثال نقض بیان کنید.

(i) $y(t)=\frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]$ (ii) $y[n]=\begin{cases}\frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1]\neq 0\\ 0, & x[n-1]=0\end{cases}$

حل:

الف) دو ورودی سیستم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$n_1[n]\xrightarrow{S_1 0} y_1[n]=\mathrm{Re}\{x_1[n]\,,\ n_2[n]\xrightarrow{S} y_2[n]=\mathrm{Re}\{x_2[n]\}$$

حال ورودی سوم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_3[n]=x_1[n]+x_2[n]$$

خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} y_3[x]&=\mathrm{Re}\{x_3[n]\}\\ &=\mathrm{Re}\{x_1[n]+x_2[n]\}\\ &=\mathrm{Re}\{x_1[n]\}+\mathrm{Re}\{x_2[n]\}\\ &=y_1[n]+y_2[n]\end{aligned}$$

نتیجه می گیریم سیستم جمع پذیر است.

فرض کنیم رابطه خروجی – ورودی به $y[n]=\mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4}x[n]\right\}$ تغییـر یابـد و نیـز دو ورودی تغییـر یابد و نیز دو ورودی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_1[n]\xrightarrow{S} y_1[n]=\mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4}x_1[n]\right\}$$

,

$$x_2[n]\xrightarrow{S} y_2[n]=\mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4}x_2[n]\right\}$$

حال سیگنال سومی به صورت $x_3[n]=x_1[n]+x_2[n]$ را بعنـوان ورودی بـه سیـستم فـرض کنیـد. خروجی برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3[n]&=\mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4}x_3[n]\right\}\\ &=\cos\left(\pi \tfrac{n}{4}\right)\mathrm{Re}\{x_3[n]\}-\sin\left(n\tfrac{\pi}{4}\right)I_m\{x_3[n]\}\end{aligned}$$

$$+\cos\left(n\pi/4\right)\mathrm{Re}\{x_1[n]\}-\sin\left(n\pi/4\right)I_m\{x_1[n]\}$$
$$+\cos\left(n\pi/4\right)\mathrm{Re}\{x_2[n]\}-\sin\left(n\pi/4\right)I_m[x_2[n]]$$
$$=\mathrm{Re}\left\{e^{jn/4}x_1[n]\right\}+\mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4}x_2[n]\right\}$$
$$=y_1[+n]+y_2[n]$$

بنابراین نتیجه می گیریم که سیستم جمع پذیر نیست.

ب) i) دو سیگنال ورودی را به صورت زیر در نظر بگرید:

$$x_1(t)\xrightarrow{s}y_1(t)=\frac{1}{x(t)}\left[\frac{d_1x_1(t)}{dt}\right]^2\ ,\ x_2(t)\xrightarrow{s}y_2(t)=\frac{1}{x_1(t)}\left[\frac{d_2x(t)}{dt}\right]^2$$

حال سیگنال سوم را به صورت $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ خروجی متناظر سیستم عبارتست از:

$$y_3(t)=\frac{1}{x_3(t)}\left[\frac{dx_3(t)}{dt}\right]^2$$
$$=\frac{1}{x_1(t)+x_2(t)}\left[\frac{dx_1(t)+dx_2(t)}{dt}\right]=$$
$$\neq y_1(t)+y_2(t)$$

بنابراین نتیجه می گیریم که مستقیم جمع پذیر نیست.

حال ورودی چهارم را به صورت $x_4(t)=ax_1(t)$ در نظر بگیرید. خروجی متناظر به صورت

$$y_4(t)=\frac{1}{x_4(t)}\left[\frac{dx_4(t)}{dt}\right]^2=\frac{1}{\alpha x_1(t)}\left[\frac{d\alpha x_1(t)}{dt}\right]^2=\frac{a}{x_i(t)}\left[\frac{n_1d(t)}{dt}\right]^2=\alpha y_1(t)$$

بنابراین سیستم همگن است.

ii) سیستم جمع پذیر نیست. مثال زیر را در نظر می گیریم.

فرض کنیم

$$x_1[n]=2\delta[n+2]+2\delta[n+1]+2\delta[n]$$
$$x=[2]=\delta[n+2]+2\delta[n+1]+3\delta[n]$$

خروجی متناظر در $n=\text{۰}$ برابر است با:

$$y_1[0]=2\qquad,\qquad y_2[0]=3/2$$

حال سیگنال را به صورت

$$x_3^-[n] = x_1[n] + x_2[n]$$
$$= 3\delta[n+2] + 4\delta[n+1] + 5\delta[n]$$

در نظر بگیرید.

خروجی متناظر در $n = \circ$ برابر است بـا $y[\circ] = 15/4$. بطـور واضـح $y_3[\circ] \neq y_1[\circ] + y_2[\circ]$. ایـن نشان می دهد که سیستم جمع پذیر نیست.

هیچ حدودی $x_4[n]$ که به خروجی $y_4[n]$ منجر می شود را در نظر بگیرید. می دانیم که

$$y_4[n] = \begin{cases} \dfrac{x_4[n]x_4[n-2]}{x_4[n-1]} & x_4[n-1] \neq \circ \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases} = ay_4[n]$$

سیستم همگن است.

۱,۳۰) تحقیق کنید هر یک از سیستمهای زیر وارونپذیرند یا نه. در صورت وارو نپـذیر بـودن سیـستم وارون راپیدا کنید. در غیر این صورت دو سیگنال مختلف بیابید که پاسخ سیستم به آنها یکی باشد.

الف) $y(t) = x(t-4)$ ب) $y(t) = \cos[x(t)]$

ج) $y[n] = nx[n]$ د) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

هـ) $x[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ \circ, & n = \circ \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$

و) $y[n] = x[n]x[n-1]$ ز) $y[n] = x[1-n]$

خ) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$

ط) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

ی) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

ک) $y[n] = \begin{cases} x[n+1], & n \geq \circ \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$ ل) $y(t) = x(2t)$

م) $y[n] = x[2n]$

ن) $y[n]=\begin{cases} x[n/2] & n \text{ زوج} \\ \circ & n \text{ فرد} \end{cases}$

حل:

الف) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y(t)=x(t+4)$.

ب) تغییر پذیر، سیگنالهای $x(t)$ و $x_1(t)=x(t)+2\pi$ خروجی های یکسانی را می دهند.

ج) تغییر پذیر، $\delta[n], s\delta[n]$ خروجی های یکسانی را می دهند. $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$.

د) تغییرناپذیر، معکوس پذیر.

هـ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر؛ برای $n\geq\circ$ $y[x]=x[n+1]$ و برای $n<\circ$، $y[n]=x[n]$.

و) تغییرپذیر، $x[n]$ و $-y[n]$ نتایج یکسانی را ارائه می کنند.

ذ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y[n]=x[1-n]$.

خ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y(t)=x(t)+dx(t)\big/dt$.

ط) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y[n]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$.

ی) تغییرپذیر، اگر $x(t)$ هر ثابت دلخواهی فرض شود، در این صورت $y(t)=\circ$.

ک) تغییرپذیر، $\delta[n]$ و 2δ نتایج یکسانی $y[n]=\circ$ را ارائه می دهند.

ل) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y(t)=x\left(t/2\right)$.

م) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y(t)=x\left(t/2\right)$.

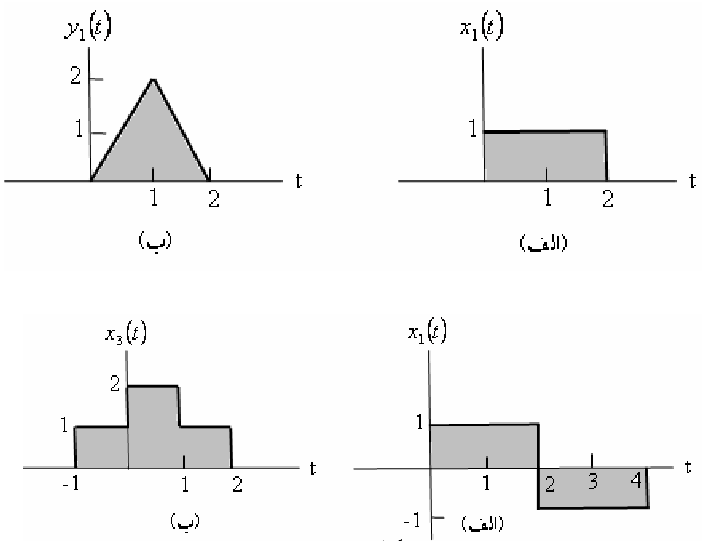
تغییرپذیر $\begin{cases} x_i[n]=\delta[n]+\delta[n-1] \\ , \\ x_2[n]=\delta[n] \end{cases}$ نتیجه می گیریم $y[n]=\delta[n]$

ن) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y[n]=x[2n]$

۱,۳۱) در این مثال یکی از مهمترین نتایج خواص خطی بودن و تغییرناپـذیری بـا زمـان را نـشان مـی دهیم، یعنی این که اگر پاسخ سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) به یک ورودی یـا چنـد ورودی را بدانیم، می توانی پاسخ سیستم به ورودیهای متعدد دیگری را نیز حساب کنیم. قسمت اعظم بقیه این کتاب به کاربرد این حقیقت در پی ریزی روشهایی برای تحلیـل و سـنتز سیـستمهای LTI اختـصاص دارد.

الف) یک سیستم LTI در نظر بگیرید که پاسخ آن به سیگنال $x_1(t)$ شکل م ۱-۳۱ (الف) سیگنال $y_1(t)$ شکل م ۱-۳۱ (ب) است. پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$ شکل م ۱-۳۱ (ج) را تعیین و به دقت رسم کنید.

ب) پاسخ سیستم مفروض در قسمت الف را به ورودی $x_3(t)$ شکل م ۱-۳۱ (د) تعیین و رسم کنید.

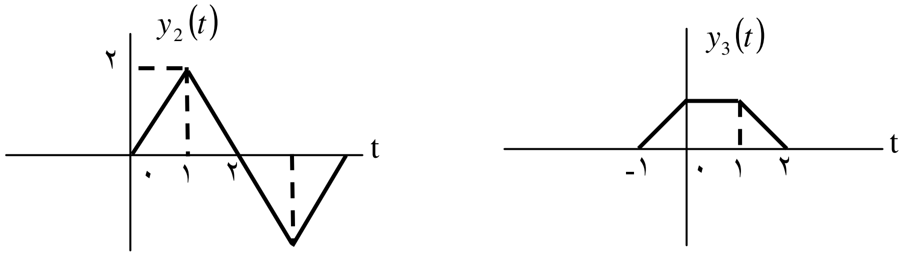


شکل م ۱-۳۱

حل:

الف) توجه داشته باشید که $x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-2)$. بنابراین طبق خطی بودن به $y_2(t)=y_1(t)-y(t-2)$ دست می یابیم. که در شکل ح ۱٫۳۱ نشان داده شده است.

ب) توجه کنید که $x_3(t)=x_1(t)+x(t+1)$. بنابراین، با استفاده از خاصیت خطی بودن $y_3(t)=y_1(t)+y_1(t+1)$. که در شکل ح ۱٫۳۱ نشان داده شده است.



شکل ح ۱٫۳۱

۱,۳۲) فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال پیوسته در زمان است و فرض کنید که

$$y_1(t)=x(2t) \quad \text{و} \quad y_2(t)=x(t/2)$$

سیگنال $y_1(t)$ نوع سریع شده $x(t)$ است، از این لحاظ که زمان لازم برای ایجاد هر قسمت آن نصف شده است. به طور مشابه، $y_2(t)$ گونه ی کند شدهٔ $x(t)$ است، زیرا مدت آن دو برابر شده است.

گزاره های زیر را در نظر بگیرید:

(۱) اگر $x(t)$ متناوب باشد، آنگاه $y_1(t)$ نیز متناوب است.

(۲) اگر $y_1(t)$ متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ نیز متناوب است.

(۳) اگر $x(t)$ متناوب باشد، آنگاه $y_2(t)$ نیز متناوب است.

(٤) اگر $y_2(t)$ متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ نیز متناوب است.

درستی یا نادرستی هر یک از این گزاره ها را تحقیق کنید. در صورت درست بودن یک گزاره، رابطه بین زمان تناوب اصلی دو سیگنال ذکر شده در گزاره را بیان کنید. در صورت نادرست بودن گزاره، مثال نقض بیاورید.

حل:

تمامی گزاره ها صحیح است.

۱) $x(t)$ با تناوب T، متناوب است. $y_1(t)$، با تناوب $T/2$ پریودیک است.

۲) $y_1(t)$ با تناوب T متناوب است، $x(t)$ با تناوب ۲T پریودیک است.

۳) $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T و $y_L(t)$ با دوره تناوب ۲T پریودیک است.

٤) $y_2(t)$ متناوب با دوره تناوب T و $x(t)$ با دوره تناوب $T/2$ پریودیک است.

۱,۳۳) فرض کنید $x[n]$ یک سیگنال گسسته در زمان باشد و

$$y_1[n]=x[2n] \quad \text{و} \quad y_2[n]=\begin{cases} x[n/2] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

سیگنالهای $y_1[n]$ و $y_2[n]$ به ترتیب گونه های سریع شده و کند شده $x[n]$ هستند. البته باید توجه داشته باشید که در حالت گسسته در زمان، نوع های سریع شده و کند شده با همتاهای پیوسته در زمان خود تفاوتهای عمده ای دارند. گزاره های زیر را در نظر بگیرد.

(۱) اگر $x[n]$ متناوب باشد، آنگاه $y_1[n]$ نیز متناوب است.

(۲) اگر $y_1[n]$ متناوب باشد، آنگاه $x[n]$ نیز متناوب است.

(۳) اگر $x[n]$ متناوب باشد، آنگاه $y_2[n]$ نیز متناوب است.

(٤) اگر $y_2[n]$ متناوب باشد، آنگاه $x[n]$ نیز متناوب است.

درستی یا نادرستی هر یک از این گزاره ها راتعیین کنید. در صورت درست بودن یک گزاره، رابطه بین زمان تناوب پایه دو سیگنال را بیان کنید. در صورت نادرست بودن گزاره مثال نقض بزنید.

حل:

۱) صحیح. $x[n]=x[n+N]; y_1[n]=y_1[n+N_\circ]$ یعنی پریودیک است با $N_\circ = N/2$ اگر N زوج باشد و $N_\circ = N$ اگر N فرد باشد.

۲) نادرست. $y_1[n]$. پریودیک $x[n]$ پریودیک را ارائه می کند یعنی با فرض اینکه $x[n]=g[n]+h[n]$، که $h[n]=\begin{cases}\circ & n \text{ زوج} \\ \left(1/2\right)^n & n \text{ فرد}\end{cases}$ و $g[n]\begin{cases}1 & n \text{ زوج} \\ \circ & n \text{ فرد}\end{cases}$ در این صورت، $y_1[n]=x[2n]$ پریودیک است امّا، $x[n]$ به طور واضح پریودیک نیست.

۳) صحیح. $x[n+N]=x[n]; y_2[n+N_\circ]=y_2[n]$ که $N_\circ = 2N$

٤) صحیح. $y_2[n+N]=y_2[n]; x[n+N_\circ]=x[n]$ که $N_\circ = N/2$

۱,۳٤) در این مسئله چند خاصیت سیگنالهای زوج و فرد را بررسی می کنیم.

الف) نشان دهید که اگر $x[n]$ فرد باشد، آنگاه:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \circ$$

ب) نشان دهید که اگر $x_1[n]$ فرد و $x_2[n]$ زوج باشد، آنگاه $x_1[n]\, x_2[n]$ فردخواهند بود.

ج) فرض کنید $x[n]$ سیگنال دلخواهی با قسمتهای فرد و زوج باشد

$$x_\circ[n]=\vartheta_d\{x[n]\} \qquad \text{و} \qquad x_e[n]=\xi\{x[n]\}$$

نشان دهید که

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$

د) با اینکه قسمت های الف تا ج بر حسب سیگنالهای گسسته در زمان بیان شد، خواص مشابهی هم برای حالت پیوسته در زمان صادق است. ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt$$

که در آن $x_e(t)$ و $x_o(t)$ به ترتیب بخشهای زوج و فرد $x(t)$ هستند.

حل:

الف) فرض کنید:

$$\sum_{n=s-\infty}^{\infty} x[n] = x[\circ] + \sum_{n=1}^{\infty}\{x[n]+x[-n]\}$$

اگر $x[n]$ فرد باشد، $x[n]+x[-n]=\circ$ بنابراین مجموع برابر صفر خواهد شد.

ب) فرض کنید $y[n]=x_1[n]x_2[n]$ در این صورت:

$$y[-n]=x_1[-n]x_2[-n]=-x_1[n]x_2[n]=-y[n]$$

این نشان می دهد که $y[n]$ فرد است.

ج) فرض کنید:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{x_e[n]+x_\circ[n]\}^2$$

$$= \sum x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{t\infty} x_\circ^2[n] + 2\sum_{n=-\infty}^{t\infty} x_e[n]x_\circ[n]$$

بااستفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) می دانیم که $x_e[n]x_o[n]$ همواره سیگنالی فرد است و با استفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (الف) نتیجه می گیریم که:

$$2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e[n]x_o[n]=\circ$$

بنابراین:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$

د) فرض کنید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)x_e(t)dt$$

همچنین $x_\circ(t)x_e(t)$ نیز سیگنالی فرد است، پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_\circ(t)\, x_e(t)dt = \circ$$

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^{e2}(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\circ}^2(t)\,dt.$$

۱,۳۵) فرض کنید رابطه زیر سیگنال نمایی گسسته در زمان متناوب باشد

$$x[n] = e^{jm(2\pi/N)n}$$

نشان دهید که دوره تناوب اصلی این سیگنال برابر است با

$$N_{\circ} = N \text{ ب. م. م} / (m, N)$$

که (m,N) ب م م بزرگترین مقسوم علیه مشترک N, m است.

حل:

قصد داریم کوچکترین $N_{\circ}$ را طوری بیابیم کـه $m\left(\frac{2\pi}{N}\right)N_{\circ} = 2\pi k$ یـا $N_{\circ} = k\, N/m$ کـه k یـک عدد صحیح است. اگر $N_{\circ}$ یک عدد صحیح باشد آنگاه N باید یـک ضـریبی از m/k باشـد و m/k نیز بایستی یک عدد صحیح باشدپس m/k یک ضریب مشترک بین k , m می باشـد. همچنـین، اگـر کوچکترین $N_{\circ}$ را پیدا کنیم، در اینصورت m/k باید ب. م. م N , m باشد.

$$N_{\circ} = \frac{N}{\text{ب.م.م}(m,N)}$$

۱,۳٦) فرض کنید $x(t)$ سیگنال نمایی مختلط پیوسته در زمان زیر باشد

$$x(t) = e^{jm} o^t$$

که فرکانس پایه آن $\omega_{\circ}$ و دوره تناوب پایه آن $T_{\circ}[n] = 2\pi/\omega_{\circ}$ است. سیگنال گسسته در زمـان را در نظر بگیرید که با گرفتن نمونه های هم فاصله $x(t)$ به دست می آید، یعنی

$$x[n] = x(nt) = e^{\omega j o} nT$$

الف) نشان دهید که $x[n]$ فقط و فقط به شرطی متناوبخواهد بود که $T/T_{\circ}$ عدد گویا باشد، به عبـارت دیگر اگر و تنها اگر مضربی از فاصله نمونه گیری دقیقاً برابر مضربی از دوره تناوب $x(t)$ باشد.

ب) فرض کنید که $x[n]$ متناوب است، پس

$$\frac{T}{T_{\circ}} = \frac{p}{q} \qquad \text{(م ۱-۳٦-۱)}$$

که در آن p و q اعداد صحیح می باشند. دوره تناوب اصلی و فرکانس پایه $x[n]$ را بیابید؟ فرکـانس پایه را به صورت کسری از $\omega_{\circ} T$ بیان کنید.

ج) حال فرض کنید که $T/T_{\circ}$ معادلـه (م ۱–۳٦–۱) را ارضـا مـی کنـد، دقیقـاً تعیـین کنیـد کـه چنـد تناوب $x(t)$ لازم است تا نمونه های یک دوره تناوب $x[n]$ به دست آیند.

حل:

الف) اگر $x[n]$ متناوب باشد، $e^{j\omega_{\circ}nT} = e^{j\omega(n+N)T}$ که $\omega_{\circ} = 2\pi/T_{\circ}$ بیان می کند که:

$$\frac{2\pi 2NT}{T_{\circ}} 2K\pi \Rightarrow \frac{T}{T_{\circ}} = \frac{K}{N} = \text{یک عدد گویا}$$

ب) اگر $T/T_{\circ} = p/q$ در این صورت $x[n] = e^{j2\pi n(P/q)}$. تناوب پایه برابر است با $\frac{q}{\text{ب.م.م}(P.q)}$

و فرکانس پایه برابر است با:

$$\frac{2\pi}{q}(\text{م.م.ب})(p,q) = \frac{2\pi}{p}\frac{p}{q}\gcd(p,q) = \frac{\omega_{\circ}}{P}\gcd(p,q) = \frac{\omega_{\circ}T}{p}\gcd(p,q)$$

ج) $\frac{p}{\gcd(p,q)}$ تناوب های $x(t)$ هستند.

۱,۳۷) همبستگی بین دو سیگنال مفهوم مهمی در کاربردهای مخابراتی است. در مسائل انتهای فـصل ۲ در این مورد بیشتر بحث خواهیم کرد و طرز کـاربرد همبـستگی را بیـا مـی کنـیم.حـال بـه مقدمـه ای کوتاهدر مورد توابع همبستگی و خواص آنها می پردازیم.

فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال باشند، تابع همبستگی به این صورت تعریف می شود

$$\Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(t)d\tau$$

تابع $\Phi_{xx}(t)$ را تابع خود همبستگی سـیگنال $x(t)$ و $\Phi_{xy}(t)$ را همبـستگی متقابـل سـیگنالهای $x(t)$ و $y(t)$ می نامند.

الف) $\Phi_{xy}(t)$ و $\Phi_{yx}(t)$ چه رابطه ای دارند؟

ب) قسمت فرد $\Phi_{xx}(t)$ را محاسبه کنید.

ج) فرض کنید $y(t) = x(t+T)$. $\Phi_{xy}(t)$ و $\Phi_{yy}(t)$ را برحسب $\Phi_{xx}(t)$ بیان کنید.

حل:

(الف) طبق تعریف $\phi_{xy}(t)$ داریم.

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(-t+\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$
$$= \phi_{yx}(-t)$$

ب) با توجه به قسمت (الف) $\phi_{xx} = \phi_{xx}(-t)$ که بیان می کند ϕ_{xx} زوج است.
بنابراین قسمت فرد $\phi_{xx}(t)$ برابر صفر خواهد شد..
ج) حال

$$\phi_{yy}(t) = \phi_{xx}(t) \text{ و } \phi_{xy}(t) = \phi_{xx}(t-T)$$

۱,۳۸) در این مسئله به بررسی برخی خواص تابع ضربه واحد می پردازیم.
الف) نشان دهید که

$$\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$$

توجه: $\delta_\Delta(t)$ را بررسی کنید (شکل ۱–۳٤ را ببینید).
ب) در بخش ۱–٤ ضربه واحد پیوسته در زمان را به صورت حد سیگنال $\delta_\Delta(t)$ تعریف کردیم. در حقیقت، چند خاصیت $\delta(t)$ را با بررسی خواص متناظر δ_Δ بیان کردیم. مثلاً چون سیگنال به پله واحد میل می کند.

$$u_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_\Delta(\tau)\, d\tau$$
$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t) \qquad \text{(م ۱–۳۸–۱)}$$

یعنی فرض می کنیم $u(t)$ مشتق $\delta(t)$ باشد.
در واقع به جای مشخص کردن مقدار $\delta(t)$ به ازای مقادیر مختلف t، که کاری ناممکن است، این تابع را با خواص آن تعریف کنیم. در فصل ۲ یکی از مشخصه های بسیار ساده رفتار تابع ضربه واحد را مطرح می کنیم. حال می خواهیم این مطلب را بیان کنیم که مفهوم اصلی در استفاده از ضربه واحد، فهم چگونگی رفتار آن است. برای این کار شش سیگنال شکل م ۱–۳۸ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تمام اینها به ازای $\Delta \to 0$ (به صورت ضربه به رفتار می کنند)، پس اگر فرض کنیم

$$u^i(t) \int_{-\infty}^{t} r^i \Delta(\tau)\, d\tau$$

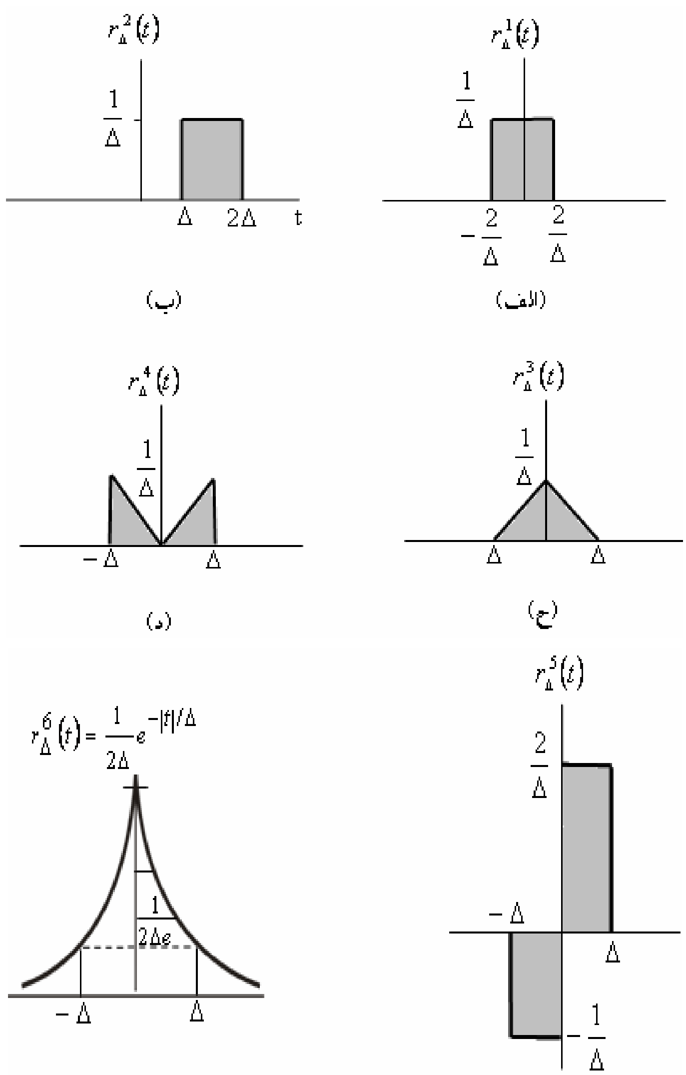
داریم:

$$u(t)=\underset{\Delta\to 0}{\text{حد}}\; u(t)$$

در هر مورد سیگنال $u^i\Delta(t)$ را به دقت رسم و مقداردهی کنید. به خاطر داشته باشید که:

به ازای تمام مقادیر Δ $\qquad r^2\Delta(0)=r^4(0)=0$

بنابراین فرد فرض کردن $\delta(t)$ که به ازای $t\neq 0$ صفر و بــه ازای $t=0$ بینهایـت اسـت کـافی نیـست. برعکس، خواصی نظیر معادله (م ۱–۳۸–۱) است که ضربه را تعریف مـی کنـد. در بخـش ۲–۵ دسـته کاملی از سیگنالها به نام توابع ویژه را تعریف خواهیم کرد که با تابع ضربه مرتبط اند و به جای مقـادیر بر حسب خواص تعریف می شوند.



حل:

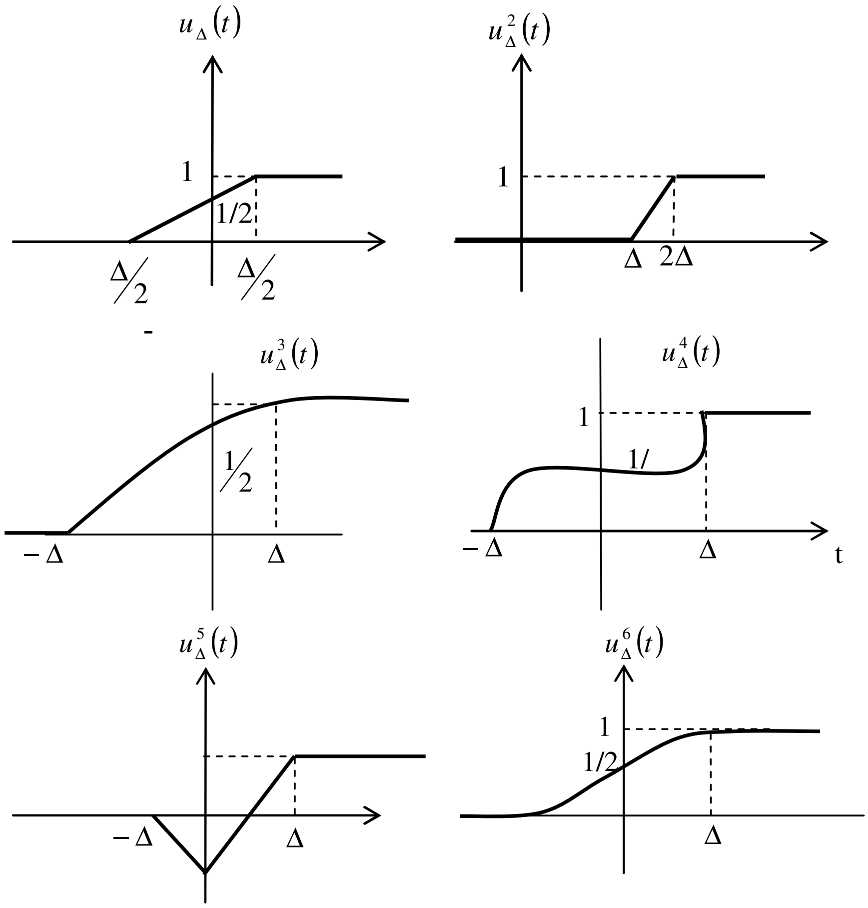
(الف) می دانیم که $2\delta_\Delta(2t)=\delta_{\Delta/2}(t)$ پس:

$$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(2t)=\frac{1}{2}\ \lim_{t\to 0}\delta_{\Delta/2}(t)$$

که بیان می کند

$$\delta(2t)=\tfrac{1}{2}\delta(t)$$

(ب) در شکل ح۱,۳۸ نشان داده شده اند.



شکل ح۱,۳۸

۱,۳۹) نقش $u(t)$، $\delta(t)$ و دیگر توابع ویژه در بررسی سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان ایده آل سازی پدیده های فیزیکی است، و این امر این امکان را می دهد که نمایش بسیار ساده و مهمی از این سیستمها به دست آوریم. اما در استفاد ه از توابع ویژه باید دقت کنیم. مخصوصاً باید به خاطر داشته باشیم که این توابع، توابعی ایده آل اند، ازینرو هر گاه با استفاده از آنها محاسبه ای انجام می دهیم، فرض می کنیم که این محاسبه توصیف دقیقی است از رفتار سیگنالهایی است که قصد ایده آل سازی آنها را داریم. برای بیان این مطلب معادله زیررا در نظر بگیرید.

$$x(t)\delta(\circ) = x(\circ)\delta(t) \qquad \text{(م ۱۳۹-۱)}$$

این معادله مبتنی بر این است که

$$x(t)\delta_\Delta(\circ) \approx x(\circ)\delta_\Delta(t) \qquad \text{(م ۱-۳۹-۲)}$$

با گرفتن حد ازاین معادله، معادله ایده آل (م ۱-۳۹-۱) به دست می آید. اما با بررسی دقیق تر طریقه به دست آوردن معادله (م ۱-۳۹-۲) نشان داده می شود که تساوی (م ۱-۳۹-۲) در واقع فقط زمانی معنی دارد که $x(t)$ در $t=\circ$ پیوسته باشد؛ در غیر این صورت نمی توان برای t کوچک نوشت

$$x(t) \approx x(\circ)$$

برای واضح شدن مطلب، سیگنال پله واحد $u(t)$ را در نظر بگیرید. با توجه به معادله (۱-۷۰) می دانیم که به ازای $t<\circ$، $u(t)=\circ$ و به ازای $t>\circ$ ، $u(t)=1$ خواهد بود؛ اما مقدار آن در $t=\circ$ تعریف نشده است [برای مثال توجه کنید که به ازای همه مقادیر Δ، $u_\Delta(\circ)=\circ$، در حالی که $u_\Delta^1(\circ)=\frac{1}{2}$، به مسئله ۱-۳۸ (ب) مراجعه کنید]. اگر محاسبات انجام شده با استفاده از $u(t)$ به انتخاب مقدار مشخصی برای $u(\circ)$ بستگی نداشته باشد، تعریف نشدن $u(\circ)$ مشکلی ایجاد نمی کند. مثلاً اگر $f(t)$ در $t=\circ$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

به $u(\circ)$ بستگی ندارد. از طرف دیگر تعریف نشدن $u(\circ)$ می تواند مهم باشد، زیرا به این معنی است که برخی محاسبات شامل توابع ویژه تعریف نشده هستند. فرض کنید می خواهیم مقداری برای

حاصل ضرب $u(t)\delta(t)$ تعریف کنیم. برای این که بدانید چنین تعریفی را نمی توان ارائه کـرد، نـشان دهید که

$$\lim_{\Delta\to 0}\left[u_\Delta(t)\delta(t)\right]=0$$

ولی

$$\lim_{\Delta\to 0}\left[u_\Delta(t)\delta_\Delta(t)\right]=\frac{1}{2}\delta(t)$$

به طور کلی می توان حال ضرب دو سیگنال را بدون هیچ مشکلی تعریف کرد،البته با توجـه بـه اینکـه محل نقاط تکین سیگنالها (ناپیوستگی، ضربه یا سایر نقاط تکین گفته شده در بخش ۲-۵) یکی نباشـد. اگر مکان نقاط تکین یکسان باشد، حاصل ضرب تعریف نشده است. به عنـوان مثـال نـشان دهیـد کـه سیگنال

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

مشابه $u(t)$ است؛ یعنی در $t<0$ برابر ۰ ، در $t>0$ برابر ۱، و در $t=0$ تعریف نشده است.

حل:

داریم:

$$\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t)\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(0)\delta(t)=0$$

همچنین:

$$\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t).\delta_\Delta(t)=(1/2)\delta(t)$$

داریم:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\delta(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t>0 \quad \delta(t-\tau)=0\\ 1 & t<0 \quad \delta(t-\tau)=u(t)\delta(t)\end{cases}$$

١,٤٠ الف) نشان دهید اگر یک سیستم یا جمع پذیر باشد یا همگن ، به ازای ورودی متحد با صفر، خروجی متحد با صفر بدست می دهد.
ب) سیستمی (پیوسته یا گسسته در زمان) تعیین کنید که نه جمع پذیر باشد و نه همگن، ولی به ازای ورودی متحد با صفر خروی متحد با صفر ایجاد کند.
ج) با توجه به بند (الف) آیا می توان نتیجه گرفت که اگر ورودی یک سیستم خطی بین زمانهای t_1 و t_2 در حال پیوسته در زمان یا بین n_1 .و n_2 در حالت گسسته در زمان صفر باشد، خروجی نیز باید در آن فاصله صفر باشد؟ توضیح دهید.

حل:

الف) اگر یک سیستم جمع پذیر باشد در اینصورت:

$$\circ = x(t) - x(t) \to y - y(t) = \circ$$

ب) بعنوان یک سیستم می باشد.

$$y(t) = x^2(t)$$

ج) خیر. برای مثال $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ با $x(t) = u(t) = -u(t-1)$ را در نظر بگیرید.
در این صورت $x(t)$ برای $t > 1$ برابر صفر است اما $y(t)$ برای $t > 1$ مقدار (١) را دارد.

١,٤١) سیستم S را با ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$ و رابطه ورودی ـ خروجی زیر در نظر بگیرید.

$$y[n] = x[n]\{g[n] + g(n-1)\}$$

الف) نشان دهید اگر به ازای همه مقادیر n، $g[n] = 1$ آنگاه سیستم S تغییرناپذیر با زمان است.
ب) نشان دهید که اگر $g[n] = n$، آنگاه سیستم S تغییرناپذیر با زمان نیست.
ج) نشان دهید که اگر $g[n] = 1 + (-1)^n$، آنگاه سیستم S تغییرپذیر با زمان است.

حل:

الف) $y[n] = 2x[n]$ بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.
ب) $y[n] = (2n-1)x[n]$ سیستم تغییرپذیر با زمان است زیرا $y[n + N_\circ] \neq (2n-1)x[n - N_\circ]$.
پ) $y[n] = x[n]\ \left(1 + (-1)^n + 1 + (-1)^{n-1}\right) = 2x[n]$ بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

١,٤٢)

الف) گزاره زیر درست است یا نادرست؟

اتصال سری دو سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، سیستمی خطی و تغییرناپذیر با زمان است. پاسخ خود را با دلیل بیان کنید.

ب) گزاره زیر درست است یا نادرست؟

اتصال سری دو سیستم غیرخطی یک سیستم غیرخطی است. پاسخ خود را با دلیل بیان کنید.

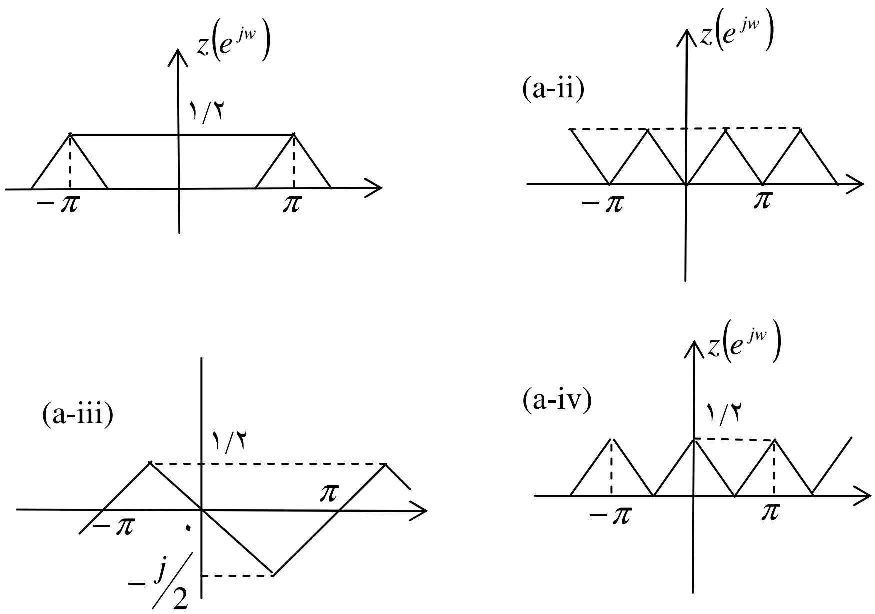
ج) سه سیستم با روابط ورودی ـ خروجی زیر در نظر بگیرید

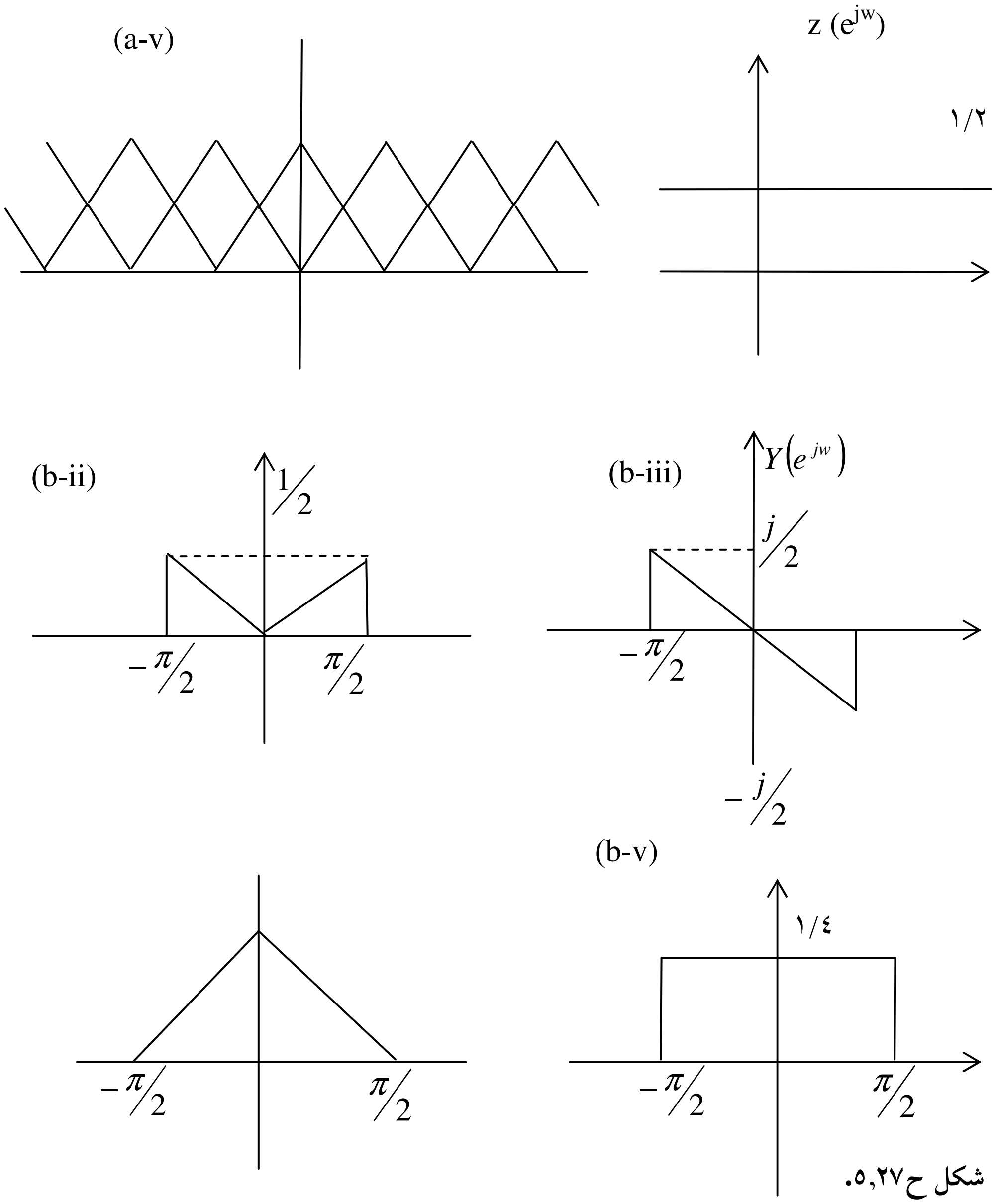
سیستم ۱ : $y[n]=\begin{cases} x[n/2] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$

سیستم ۲ : $y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]$

سیستم ۳ : $y[n]=x[2n]$

فرض کنید که این سیستمها مطابق شکل م ۲-۴۲ به صورت سری بسته شده اند. رابطه ورودی ـ خروجی سیستم کل را بیابید. آیا این سیستم خطی است؟ آیا تغییرناپذیر با زمان است؟





شکل ح۵,۲۷.

حل:

الف) دو سیستم S۱ و S۲ را که به صورت سری بهم وصل شده اند در نظر بگیرید. فـرض کنیـد اگـر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ورودی های S_1 باشند آنگـاه $y_1(t)$ و $y_2(t)$ خروجـی هـای آن خواهنـد بـود.

همچنین فرض کنید که اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ ورودی های سیستم ۲ باشند در این صورت $z_1(t)$ و $z_2(t)$ خروجی های سیستم S۲ خواهند بود. چون S۱ خطی است.پس می توانیم بنویسیم:

$$ax_1+bx_2(t)\xrightarrow{si}\alpha y_1(t)+by_2(t)$$

که b , a، ثابت هستند. از آنجایی که S۲ نیز خطی است پس می توان نوشت:

$$ay_1(t)+by_2(t)\xrightarrow{S_L}az_1(t)+bz_2(t)$$

نتیجه می گیریم که

$$.ax_1(t)+bx_2(t)\xrightarrow{S_1S_2}a_1z_1(t)+bz_2(t)$$

بنابراین ترکیب سری S۱ و S۲ خطی است.

از آنجایی که S۱ خطی است، می توانیم بنویسیم.

$$x_1(t-T_\circ)\xrightarrow{S_1}y_1(t-T_\circ)y,$$

,

$$y_1(t-T_\circ)\xrightarrow{S_2}x_1(t-T_\circ)$$

بنابراین:

$$x_1(t-T_\circ)\xrightarrow{s_1.s_2}Z_1(t-T_\circ)$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که اتصال سری دو سیستم S۱ و S۲ تغییرناپذیر با زمان است.

ب) نادرست,

فرض کنید $y(t)=x(t)+1$ و $z(t)=y(t)-1$ که نشان می دهد سیستم ۲ غیرخطی اند. اگر سیستم ها به صورت سری وصل شوند $z(t)=x(t)$ سیستم خطی خواهد بود.

پ) فرض کنید خروجی سیستم ۱/۱ $\omega[n]$وخروجی سیستم ۱/۲ $z[n]$ بنامیم در اینصورت:

$$\begin{aligned} y[n]&=x[2n]=\omega[2n]+\tfrac{1}{2}\omega[2n-]+\tfrac{1}{4}\omega[2n-2] \\ &=x[n]+\tfrac{1}{2}x[n-1]+\tfrac{1}{4}x[n-2] \end{aligned}$$

سیستم کلی خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود

۱,٤٣)

الف) سیستم LTI با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر $x(t)$ دوره متناوب با دوره تناوب T باشد، $y(t)$ نیز چنین است. نشان دهید که برای حالت گسسته در زمان نیز نتیجه مشابهی بدست می آید.

ب) مثالی از یک سیستم تغییرناپذیر با زمان با سیگنال ورودی نامتناوب $x(t)$ بیان کنید که خروجی $y(t)$ و به صورت متناوب به دست دهد.

حل:

الف) داریم:

$$x(t) \xrightarrow{s} y(t)$$
$$x(t-T) \xrightarrow{s} y(t-T)$$

حال اگر، $x(t)$ با تناوب T، متناوب باشد، $x(t)=x(t-T)$ در این صورت نتیجه می گیریم که $y(t)=y(t-T)$ با دوره تناوب T، متناوب است. دلیلی مشابه برای سیستم های گسسته نیز صدق می کند.

۱,٤٤) الف) نشان دهید که علی بودن برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان با بیان زیر هم ارزست:

به ازای هر زمان $t_۰$ و هر سیگنال $x(t)$ با $x(t)=۰$ در $t<t_۰$، خروجی $y(t)$ نیز باید در $t<t_۰$ صفر باشد.

برای حالت گسسته در زمان نیز می توان گزاره مشابهی بیان کرد.

ب) یک سیستم غیرخطی بیابید که شرطفوق را داشته باشد، ولی علّی نباشد.

ج) یک سیستم غیرخطی بیابید که علّی باشد، ولی این شرط را ارضا نکند.

د) نشان دهید که وارونپذیری یک سیستم گسسته در زمان خطی معادل بیان زیر است:

تنها ورودی ایجادکننده $y[n]=۰$، برای تمام مقادیر n، $x[n]=۰$، برای تمام مقادیر n، است. برای سیستمهای خطی پیوسته در زمان نیز گزاره مشابهی صدق می کند.

هـ) یک سیستم غیرخطی بیابید که شرط بند (د) را ارضا کند ولی وارونپذیر نباشد.

حل:

الف) فرض کنید: اگر $x(t)=۰$ برای $t<t_۰$، در این صورت برای $t<t_۰$، $y(t)=۰$ برای اثبات اینکه سیستم کازال است:

فرض کنید $x_1(t)$ سیگنال دلخواهی است. فرض کنیم $x_2(t)$ سیگنال دیگری است که در $t < t_\circ$ مشابه $x_1(t)$ می باشد. اما برای $t < t_\circ$؛ $x_2(t) \neq (t)$ است. از آنجایی که سیستم خطی است:

$$x_1(t) - x_2(t) \to y_1(t) - y_2(t)$$

چون برای $t < t_\circ$ $x_1(t) - x_2(t) = \circ$ فرض ما برای $t < t_\circ$ $y_1(t) - y_2(t) = \circ$. این نشان می دهد که برای $t < t_\circ$ $y_1(t) - y_2(t)$. به عبارت دیگر برای $t < t_\circ$ خروجی از ورودی نمی پذیرد. ازینرو سیستم سیستم کازال است.

فرض: سیستم کازال است. نشان می دهیم که اگر برای $t < t_\circ$، $x(t) = \circ$ در اینصورت برای $t < t_\circ$، $x(t) = \circ$.

فرض کنید برای $t < t_\circ$ سیگنال $x(t)$ برابر صفر است: $x(t) = \circ$.

در این صورت می توان بیان کرد $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ که $x_1(t) = x_2(t)$ برای $t < t_\circ$.

از آنجایی که خروجی سیستم خطی برابر است با $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$.

حال، از آنجایی که سیستم کازال است $y_1(t) = y_2(t)$ برای $t < t_\circ$. بنابراین $t < t_\circ$، $y(t) = \circ$.

ب) فرض کنید $y(t) = x(t)x(t+1)$ حال، برای $t < t_\circ$، $x(t) = \circ$ بیان می دارد که برای $t < t_\circ$، $y(t) = \circ$. به خاطر داشته باشید که سیستم غیرخطی و غیرکازال است.

ج) فرض کنید $y(t) = x(t) + 1$، این سیستم خطی اما کازال است. که شرط قسمت (۱) را ارضاء نمی کند.

د) فرض: سیستم تغییرناپذیر با زمان است. نشان می دهیم که $y[n] = \circ$ برای تمام مقادیر n اگر $x[n] = \circ$ فرض کنید.

$$x[n] = \circ \to y[n]$$

چون ورودی در دو معادله ی بالا تغییر نیافت. بایستی $y[n] = 2y[n]$. این امر بیان می کند که $y[n] = \circ$. از آنجایی که فرض کردیم سیستم تغییرناپذیر با زمان است، تنها یک ورودی می تواند به یک خروجی خاص منجر شود. و این ورودی باید به صورت $x[n] = \circ$ باشد.

فرض: به ازای همه مقادیر n $y[n] = \circ$ اگر $x[n] = \circ$ برای کل n. نشان می دهیم که سیستم تغییرناپذیر است:

فرض کنید:

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$
$$,$$
$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

از آنجایی که سیستم خطی است:

$$x_1[n] - x_2[n] \rightarrow y_1[n] - y_1[n] = 0$$

با توجه به فرض اصلی، بایستی نتیجه بگیریم که $x_1[n] = x_2[x]$، یعنی هر $y_1[n]$ خاصی می تواند توسط یک ورودی $x_1[n]$ تولید شود. بنابراین سیستم تغییرناپذیر است.

ت)

$$y[n] = x^2[n]$$

۱,٤٥) در مسئله ۱-۳۷ مفهوم تابع همبستگی را معرفی کردیم. محاسبه تابع همبستگی $\Phi_{hx}(t)$ در حالتی که $h(t)$ سیگنال معینی است، ولی $x(t)$ می تواند هر سیگنالی باشد، از لحاظ عملی مهم است. برای این منظور سیستم S طراحی می کنند که ورودی آن $x(t)$ و خروجی آن $\Phi_{hx}(t)$ باشد.

الف) آیا S خطی است؟ آیا S تغییرناپذیر با زمان است؟ آیا S علّی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

ب) اگر خروجی به جای $\Phi_{hx}(t)$، $\Phi_{xh}(t)$ باشد آیا پاسخهای بند (الف) تغییر می کند یا نه؟

حل:

فرض کنید:

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \phi_{hx_1}(t)$$
$$x_2(t) \xrightarrow{s} y_2(t) = \phi_{hx_2}(t)$$

حال فرض کنید: $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ خروجی سیستم متناظر برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_3(\tau) h(t+\tau) d\tau \\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) h(t+\tau) d\tau + b\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau) h(t+\tau) d\tau \\ &= a\phi_{hx_1}(t) + b\phi_{hx_2}(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

بنابراین $ خطی است.

حال، فرض کنیم: $x_4(t) = x_1(t-T)$، خروجی سیستم متناظر برابر خواهد بود با:

$$y_4(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_4(\tau) h(t+\tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - T) h(t+\tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{-\infty} x_1(\tau) h(t+\tau+T) d\tau$$
$$= \phi_{hx_1}(t+T)$$

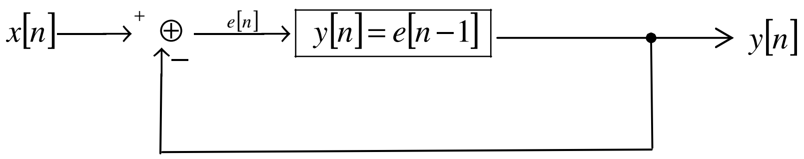
پر واضح است که $y_4(t) \neq y_1(t-T)$ بنابراین، سیستم تغییرپذیر با زمان است.

سیستم بطور توصیفی کازال نیست زیرا خروجی درهر زمان به زمان آینده سیگنال ورودی $x(t)$ وابسته است.

۱,٤٦) سیستم فیدبک دار شکل ۱–٤٦ را در نظر بگیرید و فرض کنید که به ازای $n < ۰$ داریم $y[n] = ۰$.

الف) خروجی را به ازای $x[n] = \delta[n]$ رسم کنید

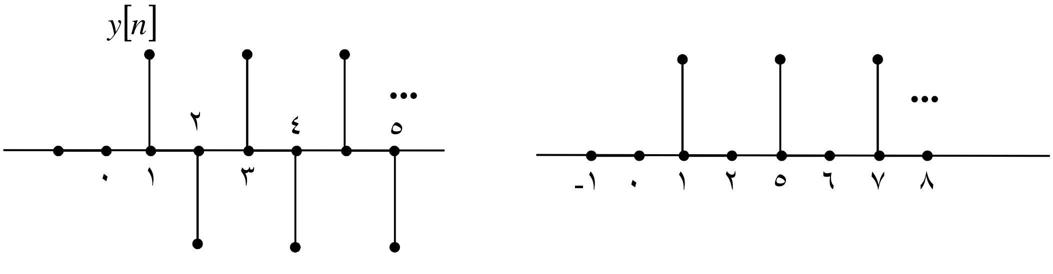
ب) اگر $x[n] = u[n]$ باشد، خروجی را رسم کنید.



شکل م ۱–٤٦

حل:

طرح در شکل ح **۱,٤٦** رسم شده است.



شکل ح **۱,٤٦**

۱,٤۷) الف) فرض کنید که S یک سیستم نمواً خطی، $x_1[n]$ یـک سـیگنال ورودی دلخـواه، و $y_1[n]$ خروجی متناظر با آن است. سیستم شکل م ۱–٤۷ (الف) را در نظر بگیرید. نشان دهید که این سیـستم خطی می باشد و در واقع رابطه کلی ورودی ـ خروجی بین $x[n]$ و $y[n]$ به انتخـاب $x_1[n]$ بـستگی ندارد.

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که S را می توان به صورت شکل ۱–٤۸ نمایش داد.

ج) کدام یک از سیستمهای زیر نمواً خطی است؟ پاسخ خود را با دلیل بیان کنید و اگر سیـستمی نمـواً خطی است، سیستم خطی L و پاسخ ورودی صـفر $y_\circ[n]$ یـا $y_\circ(t)$ آن را بـرای نمـایش سیـستم بـه صورت شکل ۱–٤۸ بیابید.

$$y[n]=n+x[n]+2x[n+4] \qquad \text{(i)}$$

$$y[n]=\begin{cases} n/2 & , \quad n \text{ زوج} \\ (n-1)\Big/\left(1+\sum_{k=-\infty}^{(n-1)/2} x[k]\right) & , \quad n \text{ فرد} \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

$$y[n]=\begin{cases} x[n]-x[n-1]+3 & , x[\circ]\geq \circ \\ x[n]-x[n-1]-3 & , x[\circ]< \circ \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

(iv) سیستم شکل م ۱–٤۷ (ب)

(v) سیستم شکل م ۱–٤۷ (ج)

(د) فرض کنید یک سیستم نمواً خطی خاص نمایشی مطابق شکل ۱–٤۸ دارد کـه L سیـستم خطـی و تغییرناپذیر با زمان و $y_\circ[n]$ پاسخ به ورودی صفر آن است. نشان دهید که S تغییرناپذیر با زمان است اگر و تنها S تغییرناپذیر با زمان و $y_\circ[n]$ ثابت باشد.

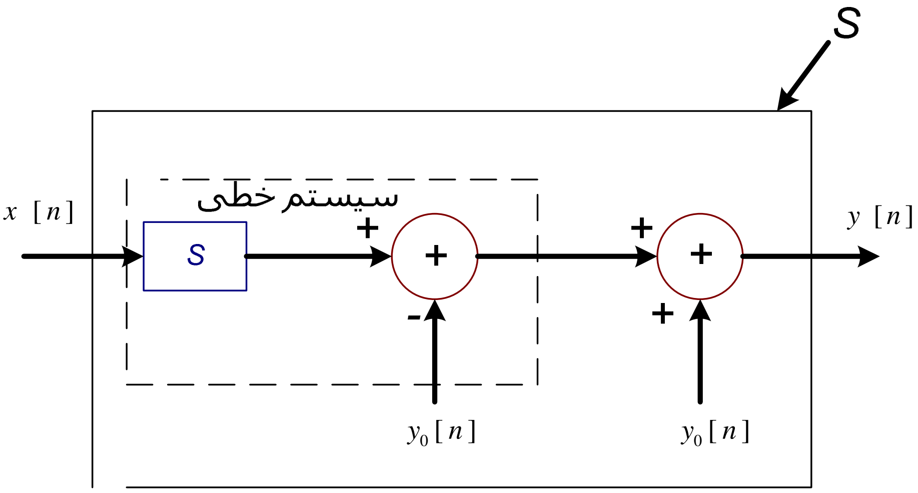
حل:

الف) پاسخ کلی سیستم شکل م–٤۷ (الف) = { پاسخ سیستم به $(x[n])+x_1[n]$ } – { پاسخ سیستم به $x_1[n]$ }

= {(پاسخ ورودی صفر سیستم + پاسخ یک سیستم خطی L به $(x[n])+x_1[n]$)} =

–{(پاسخ یک سیستم خطی L به ورودی (پاسخ صفر سیستم + $x_1[n]$))}–

= { پاسخ یک سیستم خطی L به $x[n]$ } =



شکل ح ۱٫۴۷

ب) اگر $x_1[n]=0$ برای تمامی n، در این صورت $y_1[n]$ نمایش ورودی صفر $y_0[n]$ خواهد بود.
S ممکن است در این صورت دوباره همانند شکل ۱٫۴۷ S رسم شود. این مشابه شکل ۱٫۴۸ است.

ج) i) تعمیم خطی

$$x[n]\to x[n]+2x[n+1] \quad \text{و} \quad y_0[n]=n$$

ii) تعمیم خطی

$$x[n]\to\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\frac{0(n-1)}{2}} x[k] & n \text{ زوج} \\ & n \text{ فرد} \end{cases}$$

و

$$y_0[n]=\begin{cases} n/2 & n \text{ زوج} \\ (n-2)/2 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

iii) تعمیم خطی نیست: با انتخاب $y_0[n]=3$ داریم:

$$y[n]-y_{\circ}[n]=\begin{cases}x[n]=x[n-1] & x[\circ]\geq \circ\\ x[n]-x[n-1]-6 & x[\circ]<\circ\end{cases}$$

اگـــر $x_1[n]=-\delta[n]$ و $x_2[n]=-2\delta[n]$ در اینـــصورت $y_1[n]=-\delta[n]+\delta[n-1]-6$ و

$2y_1[n]\neq y_2[n]=-2\delta[n]+2\delta[n-1]-6$

iv) تعمیم خطی

$$x(t)\rightarrow x(t)+t\frac{dx(t)}{dt}-1 \text{ و } y_{\circ}(t)=1$$

V تعمیم خطی:

$$x[n]\rightarrow 2\cos(\pi n)x[n] \text{ و } y_{\circ}[n]=\cos^2(\pi n)$$

$$\text{و } x[n]\xrightarrow{s} y[n]$$

د) فرض کنید: $x[n]\xrightarrow{s} y[n]$ و $x[n]\rightarrow z[n]$ در ایـن صـورت $y[n]=z[n]+c$، بـرای تغییرناپذیری نیاز داریم که وقتی ورودی $x[n-n_{\circ}]$ باشد، خروجی با:

$$y[n-n_{\circ}]=z[n-n_{\circ}]+c$$

برابر شود» این نشان می دهد که:

$$x[n-n_{\circ}]\xrightarrow{\ell} z[n-n_{\circ}]$$

در بازگـشت نـشان مـی دهـد کـه ℓ بایـد تغییرناپـذیر بـا زمـان باشـد. همینطـور مـی خـواهیم کـه $y[n]=c \leftarrow c$ ثابت مستقل از n باشد.

۱،۴۸) $z_{\circ}$ را عدد مختلطی با مختـصات قطبـی $(r_{\circ},\theta_{\circ})$ و مختـصات دکـارتی $(x_{\circ},y_{\circ})$ فـرض کنیـد. عبارتهایی برای مختصات دکارتی اعداد مختلط زیر برحسب $x_{\circ}$ و $y_{\circ}$ پیـدا کنیـد. نقطـه هـای $z_{\circ}$، z_1، z_2، z_3، z_4، و z_5 رادر صـــفحه مخـــتلط بـــه ازای $r_{\circ}=2$ و $\theta_{\circ}=\pi/4$ و بـــه ازای $r_{\circ}=2$ و $\theta_{\circ}=\pi/2$ رسم کنید. بخشهای حقیقی و موهومی هر نقطه را مشخص کنید.

الف) $z_1=r_{\circ}e^{-j\theta_{\circ}}$

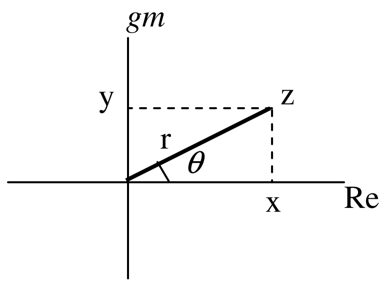
ب) $z_2=r_{\circ}$

ج) $z_3=r_{\circ}e^{j(\theta_{\circ}+\pi)}$

د) $z_4=r_{\circ}e^{j(-\theta_{\circ}+\pi)}$

هـ) $z_5=r_{\circ}e^{j(\theta_{\circ}+2\pi)}$

شکل م ۱-٤۸



حل:

داریم:

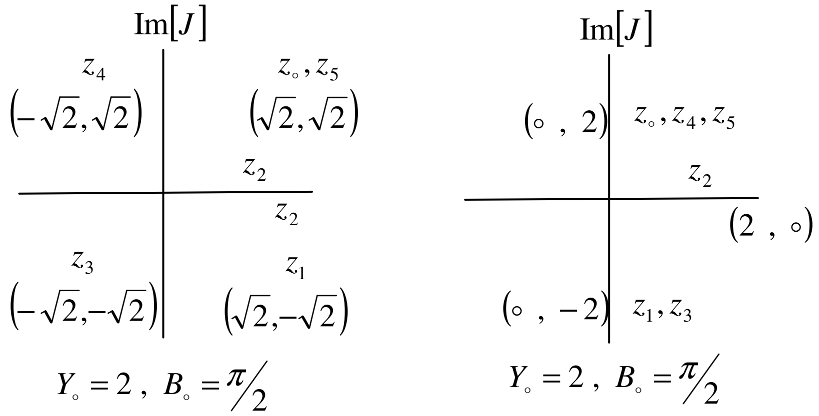
$$z_\circ = r_\circ e^{j\theta_\circ} \cos\theta_\circ tjr \circ \sin\theta = x_\circ + jy_\circ$$

الف) $z_1 = x_\circ - jy_\circ$ ب) $z_2 = \sqrt{x_\circ^2 + y_\circ^2}$

ج) $z_3 = -x_\circ - jy_\circ = -z_\circ$ د) $z_4 = -x_\circ + jy_\circ$

هـ) $z_5 = x_\circ + jy_\circ$

در شکل ح ۱,٤۸ نمایشی از نقاط داده شده آمده است .



شکل ح۱,٤۸

۱,٤۹) هر یک از اعداد مختلط زیر رابه شکل قطبی بیان کنید، آنها را در صفحه مختلط نـشان دهیـد و اندازه و زاویه هر عدد را مشخص کنید.

الف) $1 + j\sqrt{3}$

ب) ۵-

ج) $-5-5j$

د) $3+4j$

هـ) $\left(1-j\sqrt{3}\right)^3$

و) $(1+j)^5$

ذ) $\left(+\sqrt{3}j^3(\ )1-j\right)$

خ) $\dfrac{2-j\left(6/\sqrt{3}\right)}{2+j\left(6/\sqrt{3}\right)}$

ط) $\dfrac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$

ی) $j(1+je)^{j\pi/6}$

ک) $\left(\sqrt{3}+j\right)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$

ل) $\dfrac{e^{j\pi/3}-1}{1+j\sqrt{3}}$

حل:

الف) در اینجا $r=\sqrt{1+3}=2$ و نیـز $\cos\theta = 1/2$ و $\sin\theta=\sqrt{3/2}$ ایـن بیـان مـی دارد کـه $\theta = \pi/3$. بنابراین.

الف) $1+j\sqrt{3}=2e^{j\pi 13}$ ب) $5e^{j\pi}$ ج) $5\sqrt{2}e^{j3\pi/4}$

د) $5e^{j\text{تا}\ y^{-1}(4/3)}=5e^{j(53.13^\circ)}$ هـ) $8e^{-j\pi}$ و) $4\sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}$

ذ) $2\sqrt{2e^{-j\frac{5\pi}{12}}}$ خ) $e^{-j2\pi/3}$ ط) $e^{j\pi/6}$

ک) $\sqrt{2}e^{j^{11\pi/12}}$ ل) $4\sqrt{2}e^{-j\pi/12}$ م) $\frac{1}{2}e^{j\pi/3}$

۱,۵۰)

الف) با استفاده از رابطه اویلر یا شکل م ۱–۴۸ عبارتی برای x و y برحسب r و θ بیابید.

ب) عبارتی برای r و θ برحسب x و y تعیین کنید.

ج) اگر r و θ معلوم باشد آیا می توانیم x و y را به طور یکتا تعیین کنیم؟ درباره جواب خود توضیح بدهید.

حل:

(الف) $$x = r\cos\theta \quad , \qquad y = r\sin\theta$$

(ب) داریم: $$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\cos^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = y^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

اگر $r = ۰$ باشد θ تعریف نشده است. از آنجا که θ و $\theta + 2m\pi$ (که در آن $m\theta\pi$) نتیجه مشابهی دارند θ یکتا نمی باشد.

(ج) θ و $\theta + \pi$ مقادیر یکسانی از لحظات مثلثاتی دارند تنها می دانیم که عدد مختلط برابر است با $z_1 re^{j\theta}$ یا $-z_1 = z_2 = re^{j(\theta+\pi)}$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \text{(ح۱-۱,۵۱)}$$

و

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \qquad \text{(ح۱,۵۱,۲)}$$

با ادغام (ح۱-۱,۵۱) و (ح۲-۱,۵۱) داریم:

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{j\theta}\right)$$

(د) با جایگذاری معادله (ح۱,۵۱,۲) در (S۱,۵۱,۱) داریم:

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

(هـ) می‌دانیم که $e^{j(\theta+\phi)} = e^{j}e^{j\phi}$ بنابراین:

$$\cos(\theta+\phi) + j\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta sos\phi - \sin\theta\sin\phi) + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)$$

(ح۱,۵۱,۳)

با قرار دادن $\theta = \phi$ در معادله ی (S۱,۵۱,۳) داریم:

$$\cos_2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

و با قرار دادن $\theta = -\phi$ در معادله (ح۳,۵۱-۱) داریم:

$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

با جمع زدن دو رابطه فوق و خلاصه سازی خواهیم داشت:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

و)با معادلسازی قسمت حقیقی (S۱,۵۱۳) با آرگمان $(\theta+\phi)$و $(\theta-\phi)$ داریم:

$$\cos(\phi+\theta) = \cos\theta\cos\phi - \sin\phi\sin\theta$$

,

$$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$$

با ادغام در رابطه فوق داریم:

$$\sin\theta\sin\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)]$$

ذ) معادلسازی قسمت موهومی در معادله (S۱,۵۱,۳) داریم:

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

۱,۵۲) z را یک متغیر مختلط فرض کنید، یعنی

$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

مزدوج مختلط z فرض کنید، یعنی

$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

روابط زیر را به دست آورید، z، z_1 و z_2 اعداد مختلط دلخواهی هستند.

الف) $zz^* = r^2$

ب) $\frac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$

ج) $z + z^* = 2\operatorname{Re}\{z\}$

د) $z - z^* = 2jgm\{z\}$

هـ) $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

و) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$، a حقیقی است

ز) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

خ) $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}\frac{z_1 z_* + z_1^* z_2^*}{z_2 z_2^*}$

حل:

الف)

$$zz^* = re = re^{je} re^{-j\theta} = r^2$$

ب)

$$z \big/ z^* = re^{j\theta} r^{-1} e^{j\theta} = e^{j2\theta}$$

ج)

$$z + z^* = x + jy + x - jy = 2x = 2\,\mathrm{Re}\{x\}$$

د)

$$z - z^* = x + jyx + jy = 2jy = 2\ \mathrm{Im}\{x\}$$

و)

$$(z_1 + z_2)^* = ((x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2))^* = x_1 - jy_1 + x_2 - jy_2 = z_1^* + z_2^*$$

ذ)

فرض کنید برای $(\alpha_1 z_1 z_2)^*$، $\alpha > ۰$

$$(az_1 z_2)^* = \left(|a| r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \pi)}\right)^* = |a| e^{j\pi} r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{-j\theta_2} = az_1^* z_2^*$$

برای $a < ۰$، $a = |a| e^{j\pi}$ بنابراین

$$(az_1 z_2)^* = \left(|a| r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \pi)}\right)^* = |a| e^{-j\pi} r_1 e^{-j\theta_1} r_2 e^{-j\theta_2} = az_1^* z_2^*$$

برای $|x_2| \neq ۰$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{r_1}{r_2} e - j\theta_1 e j\theta_2 = \frac{r_1 e^{-j\theta_1}}{r_2 e^{-j\theta_2}}$$

خ) از (ج) می توان نوشت:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = 1/2\left\{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*\right\}$$

با استفاده از (ذ) در این مسئله داریم:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{Z_1}{Z_2}\right\} = 1/2\left\{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)+\left(\frac{Z_1^*}{Z_2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{Z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}\right]$$

۱,۵۳) روابط زیر را برای اعداد مختلط دلخواه z_1، z_2، و z_3 ثابت کنید.

الف) $\left(e^z\right)^* = e^{z*}$

ب) $z_1 z_2^* + z_1^* = 2\mathrm{Re}\{z_1, z_2^*\} = 2\mathrm{Re}\{z_1^* z_2\}$

ج) $\left|z^*\right| = |z|$

د) $\left|z_1 z_2^* + z_1^* z_2\right| \le 2|z_1 z_2|$

هـ) $g_m\{z\} \le |z|\ ,\ \mathrm{Re}\{z\} \le |z|$

و) $\left|z_1 z_2^* + z_1^*\right| \le 2|z_1 z_2|$

ز) $\left(|z_1|-|z_2|\right)^2 \le |z_1|^2 \le \left(|z_1|+|z_2|\right)^2$

حل:

الف)

$$\left(e^z\right)^* = \left(e^x e^{jy}\right)^* = e^x e^{-jyx-jy} = e^{z^*}$$

ب) فرض کنید $z_3 = z_1 z_2^*$ و $z_4 = z_1^* z_2$ در این صورت

$$z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = z_3 + z_3^* = 2\mathrm{Re}\{z_3\} = 2\mathrm{Re}\{z_1 z_2^*\}$$
$$= z_4^* + z_4 = 2\mathrm{Re}\{z_4\} = 2\mathrm{Re}\{z_1^* z_2\}$$

ج)

$$|x| = \left|re^{j\theta}\right| = r = \left|re^{-j\theta}\right| = \left|z^*\right|$$

ه) از آنجایی که $z = x + jy$ و $|z| = \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + y^2}$. با نامساوی مثلثی :

$$\mathrm{Re}\{z\} = x \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

,

$$\mathrm{Im}\{z\} = y \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

(د)

$$\left|z_1 z_2^* + z_1^* z_2\right| = \left|2\,\mathrm{Re}\{z_1 z_2^*\}\right| = \left|2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right| \le 2r / r_2 = 2|z_1 z_2|$$

و) از آنجایی که $r_1 > ٠$ و $r_2 > ٠$ و $-1 \le \cos(\theta_1 - \theta_2) \le 1$

$$(|z_1| - |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= |z_1 + z_2|^2$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 + z\, r/r_2 \ge |z_1 + z_2|^2$$

۱,٥٤) روابط بیان شده در این مسئله در این کتاب زیاد کاربرد دارند.

الف) درستی رابطه زیر را ثابت کنید

$$\sum_{n=٠}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \dfrac{1 - a^N}{1 - a} & a \ne 1 \ \text{هر عدد مختلط} \end{cases}$$

این را فرمول جمع محدود می نامند.

ب) نشان دهید اگر $|a| < 1$، آنگاه

$$\sum_{n=٠}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

این را فرمول جمع نامحدود می نامند.

ج) نشاندهید که به ازای $|a| < 1$

$$\sum_{n=٠}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1 - a)^2}$$

(د) جمع زیر را به ازای $|a| < 1$ حساب کنید.

$$\sum_{n=-2}^{7} e^n$$

حل:

الف) $\alpha = 1$ کاملاً مشخص است که:

$$\sum_{n=\circ}^{N-1} a^n = N$$

برای $\alpha \neq 1$ می توان نوشت:

$$(1-\alpha)\sum_{n=\circ}^{N-1} a^n = \sum_{n=\circ}^{N-1} a^n - \sum_{n=\circ}^{N-1} a^{n+1} = 1-\alpha$$

بنابراین:

$$\sum_{n=\circ}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-\alpha}$$

(ب) برای $|\alpha| < 1 \Leftarrow$

$$\lim_{N\to\infty} a^N = \circ$$

بنابراین از نتیجه قسمت قبلی داریم:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=\circ}^{N-1} a^n = \sum_{n=\circ}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

ج) مشتق گیری دو طرف نتیجه قسمت (الف) و (ب) داریم:

$$\frac{d}{d.\alpha}\left(\sum_{n=\circ}^{\infty} \alpha^N\right) = \frac{d}{d\,\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$= \sum n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

د) می توان نوشت:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n = a^k \sum_{n=\circ} a^n = \frac{a^k}{1-\alpha} \qquad for\,|\alpha| < 1$$

١,٥٥) با استفاده از نتایج مسئله ١-٥٤ جمعهای زیر را محاسبه کنید و جواب را به شکل قائم بیان کنید.

الف) $\sum_{n=\circ}^{9} e^{j\pi n/2}$

ب) $\sum_{n=-2}^{7} e^{j\pi n/2}$

ج) $\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} e^{j\pi n/2}$

د) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} e^{j\pi n/2}$

هـ) $\sum_{n=\circ}^{9}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

و) $\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

حل:

الف) مجموع مطلوب عبارتست از :

$$\sum_{n=\circ}^{9} e\pi {n}/{2} = \frac{1-e^{i\pi 10/2}}{1-e^{i\pi/2}} = 1+j$$

ب) مجموع خواسته شده برابر است با:

$$\sum_{n=-2}^{7} e^{j\pi n/2} = e^{j\pi n/2} = e^{-j\frac{2\pi}{2}}\sum_{n=\circ}^{9} e^{jn\pi/2} = -(1+j)$$

ج) حاصل مطلوب عبارتست از:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\left({1}/{2}\right)^{x} e^{j\pi\eta/2} = \frac{1}{1-\left({1}/{2}\right)e^{j\pi/2}} = \frac{4}{5}+j\frac{2}{5}$$

د) سری عبارتست از:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left({1}/{2}\right)^{n} e^{j\pi n/2} = \left({1}/{2}\right)^{2} e^{j\pi 2/2} = \sum_{n=\circ}^{\infty}\left({1}/{2}\right)^{\eta} e^{j\pi n/2} = {1}/{4}\left(\frac{4}{5}+j\frac{2}{5}\right)$$

هـ)

$$\sum_{n=\circ}^{9}\cos\left(n{\pi}/{2}\right) = {1}/{2}\sum_{n=\circ}^{9} e^{\pi n/2} + {1}/{2}\sum_{n=\circ}^{9} ej\pi {n}/{2}$$
$$= {1}/{2}(1+j) + {1}/{2}(1-j) = 1$$

و) سری مورد نظر برابر است با:

$$\sum \left(1/2\right)^{\eta} \cos\left(n\pi/2\right) = 1/2 \sum_{n=\circ}^{\infty} \left(1/2\right)^{\eta} . e^{j\pi n/2} + 1/2 \sum_{n=\circ}^{\infty} \left(1/2\right)^{\eta} e^{-j\pi n/2}$$

$$= 4/10 + j\,2/10 + 4/10 - j\,2/10 = 4/5$$

۱,۵٦) انتگرالهای زیر را محاسبه کرده، جواب به شکل قائم بیان کنید.

الف) $\int_{\circ}^{4} e^{j\pi t/2} dt$

ب) $\int_{\circ}^{6} e^{j\pi t/2} dt$

ج) $\int_{2}^{8} e^{j\pi t/2} dt$

د) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-(1+j)} dt$

هـ) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-t} \cos t \, dt$

و) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-2t} \sin(3t) dt$

حل:

انتگرال های مورد نظر:

الف)

$$\int_{\circ}^{4} e^{j\pi t/2} dt = \frac{e^{\pi t/2}}{j\,\pi/2} \int_{\circ}^{4} = \circ$$

ب)

$$\int_{\circ}^{4} e^{\text{int}/2} dt = \frac{e^{\pi/2}}{j\pi/2} \int_{\circ}^{6} = \left(\frac{2}{\pi_j}\right)\left[e^{j3\pi} - 1\right] = \frac{4j}{\pi}$$

ج)

$$\int_{2}^{8} e^{j\pi t/2} dt = \frac{e^{\pi t/2}}{j^{\pi/2}} \int_{2}^{8} = \left(2/j\pi\right)\left[e^{j4\pi} - e^{j\pi}\right] = -4\, j/\pi$$

د)

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-(1+j)t}\,dt = \frac{e^{(1+j)t}}{-(1+j)}\int_{\circ}^{\infty} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-j}{2}$$

انتگرال مورد نظر عبارتست از:

هـ)

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-t}\cos t\,dt = \int_{\circ}^{\infty}\left[\frac{e^{-(1+j)t} + e^{-(1-j)t}}{2}\right]dt$$

$$= \frac{1/2}{1+j} + \frac{1/2}{1-j} = 1/2$$

و) انتگرال مطلوبست برابر است با:

ذ) $$\int_{\circ}^{\infty} e^{-2}\sin 3t dt = \int_{\circ}^{\infty}\left[\frac{e^{-(2-3)j} e^{-(2+3)t}}{}\right] = \frac{1/2\,j}{2-3j} + \frac{1/2\,j}{2+3j} = \frac{3}{13}$$