فصل دوم

۲,۱) فرض کنید

$$h[n]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1] \quad , \quad x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$$

کانولوشنهای زیر را پیدا کرده و آنها را رسم کنید.

الف) $y_1[n]=x[n]*h[n]$

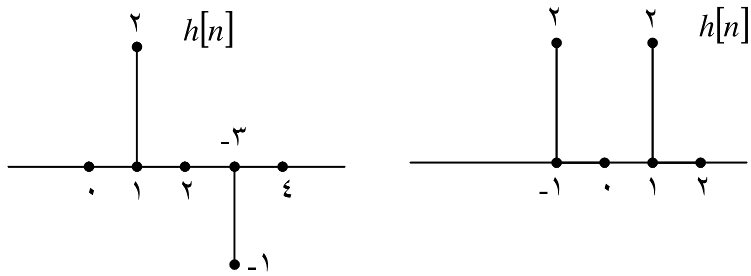
ب) $y_2[n]=x[n+2]*h[n]$

ج) $y_3[n]=x[n]*h[n+2]$

حل:

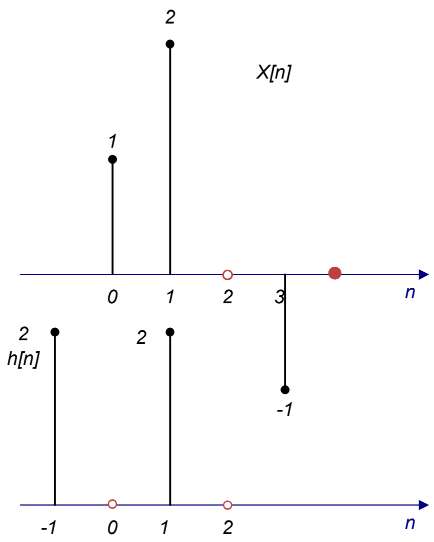
(الف) می دانیم که:

$$y_1[n]=h[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$



شکل (ح ۱-۲,۱)

سیگنالهای $x[n]$ و $h[n]$ در شکل ح ۲,۱ نشان داده شده اند.



شکل ح ۱-۲

از این شکل ها به راحتی می توانیم کاتولوشن فوق را به صورت زیر خلاصه کنیم:

$$y_1[n]=h[-1]x[n+1]+h[n]x[n-1]$$
$$=2x[n+1]+2x[n-1]$$

که نتیجه می دهد.

$$y_1[n]=2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]-+2\delta[n-2]-2\delta[2-4]$$

(ب) می دانیم که:

$$y_2[n]=x[n+2]*h[n]=\sum_{K=-N}^{+\infty}h[k]x[n+2-k]$$

با مقایسه با معادله (ح۱,۱,۲.) داریم:

$$y_2[n]=y_1[n+2]$$

ج) می توانیم معادله (ح۱,۱,۲) به صورت زیر بنویسیم:

$$y_1[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n]h[n-k]$$

به طور مشابه می توان داشت:

$$y_3[n]=x[n]*h[n+2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n+2-k]$$

با مقایسه با رابطه(ح ۲,۱,۱) می توان نوشت:

$$y_3[n]=y_1[n+2]$$

۲,۲) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)n-\{u[n+3]-u[n-10]\}$$

A و B را برحسب n به نحوی بیابید که معادله زیر برقرار باشد.

$$h[n-k]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & A\le k\le B\\ \circ\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

حل:

با استفاده از تعریف داده شده برای سیگنال $h[n]$ می توان نوشت:

$$h[k]=\left(1/2\right)^{k-1}\{u[k+3]-u[k-10]\}$$

سگینال $h[k]$ تنها دربازه ی $-3\le k\le 9$ صفر نیست. از این می دانیم که سیگنال $h[-k]$ تنها در بازه ی $-9\le k\le 3$ صفر نیست. حال اگر $h[-k]$ رابـه انـدازه n بـه سـمت راسـت شـیفت دهـیم، در اینصورت سیگنال $h[n-k]$ حاصل می وشد که در بازه $n-9\le k\le n+3$ صفر نیست بنابراین:

$$A=n-9$$

$$B=n+3$$

۲,۳) ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ زیر را در نظر بگیرید

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$$

$$h[n]=u[n+2]$$

خروجی $y[n]=x[n]*h[n]$ را بیابید .

حل:

فرض کنید سیگنال های x_1 و $h[n]$ به صورت زیر تعریف شوند.

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

,

$$h[n] = u[n]$$

توجه داشته باشید که $x[n] = x_1[n-2]$ و $h[n] = h_1[n+2]$

حال:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$= x_1[n-z] * h[n+2]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k-z] h_1[n-k+2]$$

با جایگذاری $m+2$ بجای k در سیگمای فوق بدست می آوریم.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] h_1[n-m] = x_1[n] * x_1[n] * h_1[n]$$

با استفاده از نتیجه مثال ۲,۱ در متن کتاب درسی، می توان نوشت:

$$y[n] = 2\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] u[n]$$

۲,٤) $y[n] = x[n] * h[n]$ را به ازای $x[n]$ و $h[n]$ زیر بیابید و آن را رسم کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 \ , & 3 \le n \le 8 \\ 0 \ , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 \ , & 4 \le n \le 15 \\ 0 \ , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حل:

می دانیم که:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [k] h[n-k]$$

سیگنال $x[n]$ و $y[n]$ در شکل ح ۲,٤ نشان داده شده اند.

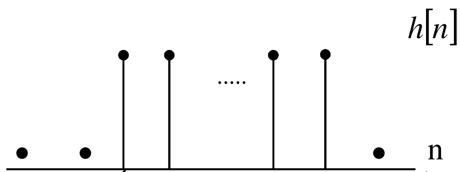
ازاین شکل ملاحظه می شود که مجموع فوق به شکل زیر خلاصه می شود:

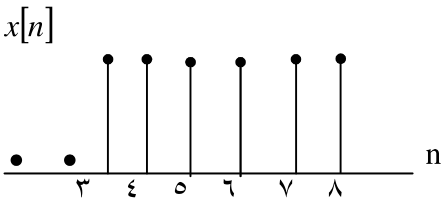
$$y[n]=x[3]h[n-3]+x[4]h[n-4]+x[5]h[n-5]$$
$$+x[6]h[n-6]+x[7]h[n-7]+x[8]h[n-8]$$

که نتیجه می دهد:

$$y[n]=\begin{cases} n-6 & 7\le n\le 11 \\ 6 & 12\le n\le 18 \\ 24-n & 19\le n\le 23 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

نمودار شکل





۲,۵) فرض کنید.

$$h[n]=\begin{cases} 1 \;, & \circ\le n\le N \\ \circ \;, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$ و $$h[n]=\begin{cases} 1 \;, & \circ\le n\le 9 \\ \circ \;, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $N\le 9$ یک عدد صحیح است. N را به نحوی تعیین کنید کـه بـرای $y[n]=x[n]*h[n]$ داشته باشیم.

$$x[4]=5 \qquad , \qquad x[14]=\circ$$

حل:

سیگنال $y[n]$ برابر است با:

$$y[n]=\sum_{k=\circ}^{9}x[k]h[n-k]=\sum_{k=\circ}^{9}h[n-k]$$

از این رابطه مشخص است که $y[n]$ برابر مجموع شیفت یافته $h[n]$ می باشد. از آنجایی که جملـه ی آخر در $n=9$ اتفاق می افتد و $h[n]$ بـرای $n>N$ برابر صـفر اسـت $y[n]$ بـرای $n>N+9$ صفر است. بااستفاده از این حقیقت که $y[14]=\circ$، می توان نتیجه گرفت که N حداکثر مـی توانـد ٤ باشد. بعلاوه از $y[4]=5$ می توان نتیجه گرفت که $h[n]$ حداقل ٥ نقطه فاقد صفر دارد. تنهـا مقـدار N که هر دو شرط را برآورده می کند ٤ است.

۲٫٦) کانولوشن $y[n]=x[n]*h[n]$ را به ازای $x[n]$ و $h[n]$ زیر بیابید و آن را رسم کنید.

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}u[-n-1] \quad , \quad h[n]=u[n-1]$$

حل:

از اطلاعات داده شده داریم:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(1/3\right)^{-k}x[-k-1]u[n-k-1]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(1/3\right)^{-k}u[n-k-1]$$
$$=\sum_{k-1}^{\infty}\left(1/3\right)^{k}u[n+k-1]$$

جایگذاری k توسط ۱–p داریم:

$$y[n]=\sum_{p=\circ}^{\infty}\left(1/3\right)^{p+1}u[n+p]$$

برای $n\geq\circ$ معادله ی بالایی به صورت زیر در می آید:

$$y[n]=\sum_{p=\circ}^{\infty}\left(1/3\right)^{p+1}=1/3\,\frac{1}{1-1/3}=1/2$$

برای $n>\circ$ معادله (S۲٫٦٫۱) به صورت خلاصه می شود:

$$y[n]=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(1/3\right)^{p+1}=\left(1/3\right)^{-n+1}\sum_{p=\circ}^{+\infty}\left(1/3\right)^{p}$$
$$=\left(1/3\right)^{-n+1}\frac{1}{1-1/3}=\left(1/3\right)^{-n}1/2=\frac{3^n}{2}$$

بنابراین

$$y[n]=\begin{cases}3^n/2 & n>\circ\\ 1/2 & n\geq\circ\end{cases}$$

۷-۲) برای سیستم خطی S رابطه زیر بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ وجود دارد

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]g[n-2k]$$

و در آن $g[n]=u[n]-u[n-4]$.

الف) $y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-1]$ بیابید.

ب) $y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-2]$ بیابید.

ج) آیا S و LTI است؟

د) $y[n]$ را به ازای $x[n]=u[n]$ بیابید.

حل:

(الف) داده شده است: $x[n]=\delta[n-2]$

ملاحظه می کنیم که:

$$y[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty}x[k]g[n-2k]=g[n-4]$$
$$=u[n-4]-u[n-8]$$

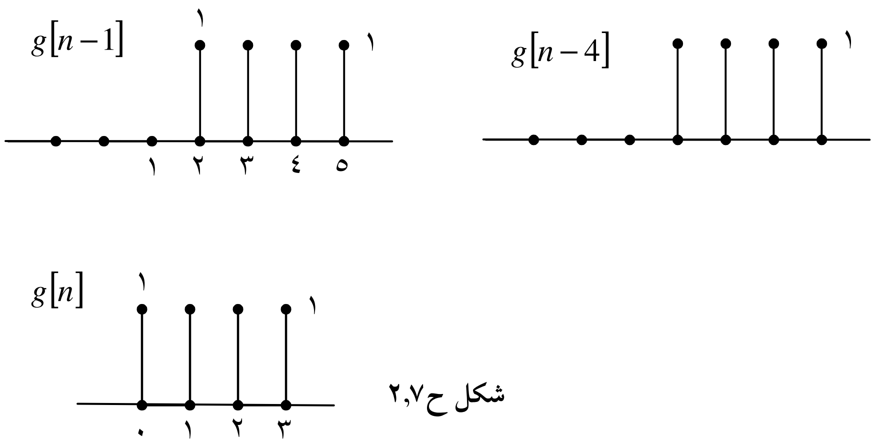
(ب) ورودی سیستم در قسمت (ب) مشابه قسمت (الف) به اندازه ی (۱) واحد به سمت راست شیفت یافته است. اگر S تغییرپذیر با زمان باشد، در این صورت خروجی سیستم بدست آمده در قسمت (ب) باید با خروجی بدست آمده سیستم در قسمت (الف) با یک شیفت به اندازه (۱) واحد به راست، باشد. واضح است که این، آن مورد ذکر شده نیست بنابراین سیستم LTI نیست.

(ج) اگر $x[n]=u[n]$ در این صورت

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]g$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}g[n-2k]$$

سیگنال $g[n-2k]$ برای $k=0\ ,1\ ,2$ در شکل S.۲,۷ رسم شده اند. با توجه به این شکل واضح است که:

$$y[n]=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 2 & n>= 2u[n]-\delta[n]-\delta[n-1]\\ 0\end{cases}$$



شکل ح۲٫۷

۲٫۸) کانولوشن دو سیگنال زیر را بیابید و نتیجه را رسم کنید.

$$x(t)=\begin{cases}t+1, & 0\le t\le 1\\ 2-1, & 1\le t\le 2\\ 0\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$$

حل:

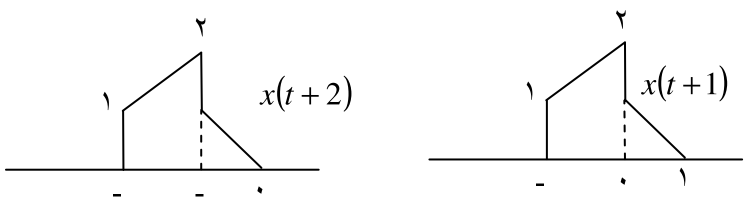
با استفاده از انتگرال کانولوشن داریم:

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$ داده شده است. که باعث می شود انتگرال فوق به شکل زیر خلاصه شود: $x(t)*y(t)=x(t+2)+2x(t+1)$

سیگنال $x(t+2)$ و $2x(t+1)$ در شکل ح۲٫۸ نمایش داده شده است.

شکل ح۸-۲



با استفاده از شکل های فوق می توان به راحتی نشان داد که:

$$y(t)=\begin{cases} t+3 & -2<t\le -1 \\ t+4 & -1t\le \circ \\ 2-2t & \circ<t\le 1 \\ \circ & \text{b} \end{cases}$$

۲,۹) فرض کنید

$$h(t)=e^{2t}u(-t+4)+e^{-2t}u(t-5)$$

A و B را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau<A \\ \circ \quad , & A<\tau<B \\ e^{2(t-\tau)}, & B<\tau \end{cases}$$

حل:

با استفاده از تعریف داده شده برای سیگنال $h(t)$، می توان نوشت:

$$h(\tau)=e^{2\tau}u(-\tau+4)+e^{-2\tau}u(\tau-5)=\begin{cases} e^{-2\tau} & \tau>5 \\ e^{2\tau} & \tau>4 \\ \circ & 4<\tau<5 \end{cases}$$

بنابراین:

$$h(-\tau)=\begin{cases} e^{2\tau} & \tau>-5 \\ e^{-2\tau} & \tau>-4 \\ \circ & -5<\tau-4 \end{cases}$$

پس:

$$A=t-5$$

,

$$B=t-4$$

۲,۱۰) فرض کنید که

$$x(\tau)=\begin{cases} 1\,, & \circ\le\tau\le 1 \\ \circ\,, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

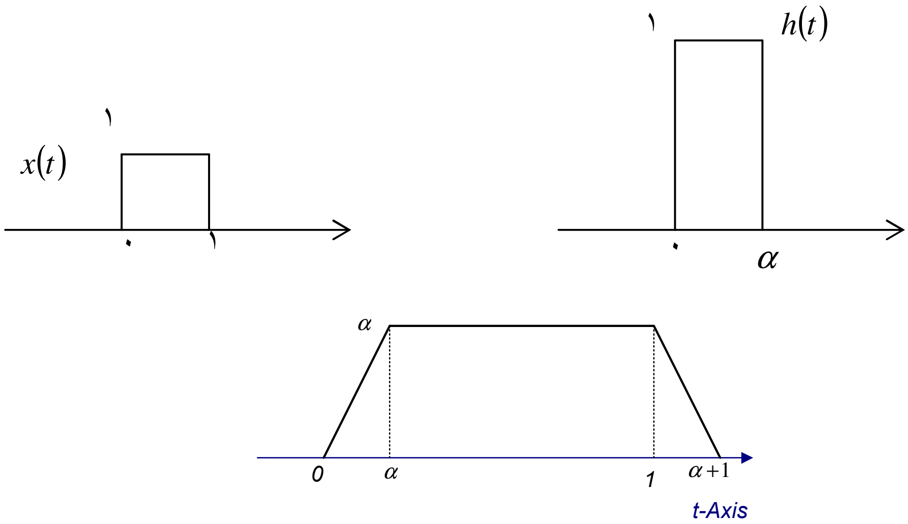
و $h(t)=x(t/a)$ که در آن $\circ < a \le 1$

الف) $y(t)=x(t)*h(t)$ را بیابید و آن را رسم کنید.

ب) اگر $dy(t)/dt$ تنها سه ناپیوستگی داشته باشد، مقدار a چقدرست؟

حل:

با استفاده از اطلاعات داده شده که می توانیم $x(t)$ و $h(t)$ را به شکل، شکل هـای S۲,۱۰ را رسـم کنید. (a) به کمک طرحهای شکل ح۲,۱۰. می توان نـشان داده $y(t)=x(t)*h(t)$ همنطـور کـه در اشکال ح۲,۱۰ نشان داده شده اند.



شکل ح۲,۱۰

بنابراین:

$$y(t)=\begin{cases} t & \circ \le t \le \alpha \\ \alpha & \alpha \le t \le 1 \\ 1+\alpha-t & 1 \le t \le 1+\alpha \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ب) از شکل بالا برای $y(t)$، واضح است که $\frac{dy(t)}{dt}$ در $1+\alpha,1,\alpha,\circ$ ناپیوسته است. اگر بخواهیم $\frac{dy(t)}{dt}$ تنها ۳ نقطه ی ناپیوستگی داشته باشد؛ در این صورت بایستی $\propto=1$ انتخاب گردد.

۲,۱۱) فرض کنید

$$h(t)=e^{-3t}u(t) \quad , \quad x(t)=u(t-3)-u(t-5)$$

الف) $y(t)=x(t)*h(t)$

ب) $g(t)=(dx(t))/dt*h(t)$

ج) $g(t)$ چه رابطه ای با $y(t)$ دارد.

(الف) از اطلاعات داده شده ملاحظه می کنید که $h(t)$ تنها در بازه $\circ\le t\le\infty$ صفر نیست، بنـابراین:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{\circ}^{\infty}e-3\tau(u(t-\tau-3))-u(t-\tau-5)d\tau$$

براحتی می توان نشان داد که $u(t-\tau-3)-u(t-\tau-5)$ تنهـا در بـازه $t-5<\tau<t-3$ صـفر نیست. بنابراین به ازای $t\le 3$ انتگرال فوق برابر صفر است. برای $3<t\le 5$ انتگرال فوق بـه صـورت زیر است:

$$y(t)=\int_{\circ}^{t-3}e^{-3\tau}d\tau=\frac{1-e^{-3(t-3)}}{3}$$

برای $t>5$ انتگرال برابر است با:

$$y(t)=\int_{t-5}^{t-3}e^{-3\tau}d\tau=\frac{(1-e^{-5})e^{-3(t-5)}}{3}$$

بنابراین؛ نتیجه کانولوشن به صورت زیر قابل بیان است:

$$y(t)=\begin{cases}\circ & -\infty<t\le 3\\ \frac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3>t\le 5\\ \frac{(1-e^{-5})e^{-3(t-5)}}{3} & 5<t\le\infty\end{cases}$$

ب) با مشتقگیری از $x(t)$ در حوزه زمان داریم:

$$\frac{dx(t)dt}{dt}=\delta(t-3)-\delta(t-5)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}g(t)&=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)\\&=e^{-3(t-3)}u(t-3)-^{-(t-5)}u(t-5)\end{aligned}$$

ج) از نتیجه (الف) می توانیم مشتق $y(t)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\frac{dy(t)}{dt}=\begin{cases}\circ & -\infty<t\le 3\\ e^{-3(t-3)} & 3<t\le 5\\ \left(e^{-6}-1\right)e^{-3(t-5)} & 5<t\le\infty\end{cases}$$

که این دقیقاً برابر با $g(t)$ است بنابراین $g(t)=\frac{dy(t)}{dt}$.

۲,۱۲) فرض کنید

$$y(t)=e^{-t}u(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)$$

نشان دهید که در $\circ\le t<3$، $y(t)=Ae^{-t}$ و A را بیابید.

حل:

سیگنال $y(t)$ را می توان به صورت

$$y(t)=\ldots+e^{-(t-6)}u(t+6)+e^{-(t+3)}u(t+3)+e^{-t}u(t)+e^{-(t-3)}u(t-3)$$
$$+e^{-(t-6)}u(t-6)+\ldots$$

در بازه ی $\circ\le t<3$ نوشت؛ می توان $y(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}y(t)&=\ldots+e^{-(t+\circ)}u(t+6)+e^{-(t+3)}u(t+3)+e^{-t}u(t)\\&=e^{-t}+e^{-(t+3)}+e^{-(t+6)}+\ldots\\&=e^{-t}\left(1+e^{-3}+e-6+\ldots\right)=e^{-t}\frac{1}{1-e^{-3}}\end{aligned}$$

بنابراین: $A=\frac{1}{1-e^{-3}}$ می باشد.

۲,۱۳) سیستم گسسته در زمان S_1 با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید

$$h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

الف) A را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم $h[n]-A\,h[n-1]=\delta[n]$.

ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) پاسخ ضربه $g[n]$ سیستم S_2 LTI را به نحوی تعیین کنید که S_2 وارون S_1 باشد.

حل:

(الف) نیاز داریم که بدانیم:

$$\left(1/5\right)^n u[n]-A\left(1/5\right)^{n-1}u[n-1]=\delta[n]$$

با قراردادن n=۱ و محاسبه A داریم: $A=1/3$

(ب) از قسمت (الف) می دانیم که:

$$h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]=\delta[n]$$

$$h[n]*\left(\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]\right)=\delta[n]$$

با استفاده از تعریف معکوس سیستم داریم:

$$g[n]=\delta[n]-\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

۲,۱٤) کدام یک از پاسخ ضربه های زیر پاسخ ضربه یک سیستم LTI پایدارست؟

الف) $h_1(t)=e^{-(1-2j)t}u(t)$

ب) $h_2(t)=e^{-t}\cos(2t)u(t)$

حل:

(الف) ابتدا تعیین می کنیم که $h_1(t)$ انتگرال معینی به شکل زیر باشد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h_1(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}e^{-\tau}d\tau=1\right|$$

بنابراین $h_1(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم پایدار است.

(ب) اگر $h_2(t)$ انتگرال معینی به شکل زیر باشد، تعیین می کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h_2(\tau)\right|d\tau=\int_{0}^{\infty}e^{-t}\left|\cos 2t\right|d\tau$$

این انتگرال به طور واضح مقدار محدودی دارد زیـرا $e^{-t}\left|\cos Lt\right|$ یـک تـابع ترومـی نمـایی در بـازه $\circ \le t \le \infty$ است. بنابراین $h_2(t)$ پاسخ ضربه ی یک سیستم LTI می باشد.

۲,۱۵) کدام یک از پاسخ ضربه های زیر پاسخ ضربه یک سیستم LTI پایدارست؟

الف) $h_1[n] = n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$

ب) $h_2[n] = 3^n u[-n+10]$

حل:

(الف) اگر $h_1[n]$ مجموع (سیگمای) معینی به شکل زیر باشد، تعیین می :نیم:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h_1|k|\right| = \sum_{k=\circ}^{\infty} k\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|$$

این سری مقدار محدودی ندارد زیرا بـا تـابع $k\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|$ بـا افـزایش مقـدار k، صـعودی اسـت.

بنابراین $h_1[n]$ نمی توان پاسخ ضربه یک سیتم LTI پایدار باشد.

(ب) اگر $h_2[n]$ سری معینی به شکل زیر باشد، تعیین می کنیم:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|h_2|k|\right| = \sum_{k=-\infty}^{10} 3^k \cong 3^{11}\!/_2$$

بنابراین $h_2[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم پایدار LTI می باشد.

۲,۱۶) درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را تعیین کنید:

الف) اگر در $n < N_1$، $x[n] = \circ$ و در $n < N_2$، $h[n] = \circ$؛ آنگاه در $n < N_1 + N_2$، $y[n] = x[n] * h[n] = \circ$.

ب) اگر $y[n] = x[n] * h[n]$، آنگاه $y[n-1] = x[n-1] * h[n-1]$.

ج) اگر $y(t) = x(t) * h(t)$، آنگاه $y(-t) = x(-t) * h(-t)$.

د) اگر در $t > T_1$، $x(t) = \circ$، و در $t > T_2$، $h(t) = \circ$، آنگاه در $t > T_1 + T_2$، $x(t) * h(t) = \circ$.

حل:

(الف) صحیح: این به راحتی با توجه به اینکه کانولوش می تواند بعنوان فرآینـدی اصـل بـر هـم نهـی $h[n]$ را انجام دهد، بحث شود. این می تواند بعنوان انعکاسی در محل اولین نمونه صفر $x[n]$ اتفـاق بیافتد. در این مورد اولین انعکاس در N_1 اتفاق می افتد. انعکاسـی $h[n]$ کـه در $n = N_1$ اتفـاق مـی

افتد، اولین نمونه ی صفر خود را در محل زمانی N_1+N_2 خواهد داشت، بنابراین برای تمامی مقادیر n که N_1+N_2 بخود اختصاص می دهد، خروجی $h[n]$ صفر است.

(ب) نادرست.

فرض کنید:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

از این:

$$y[n-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-1-k]$$
$$=x[n]*h[n-1]$$

این نشان می دهد که حالت داده شده نادرست است.

(ج) صحیح: فرض کنید:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

بنابراین:

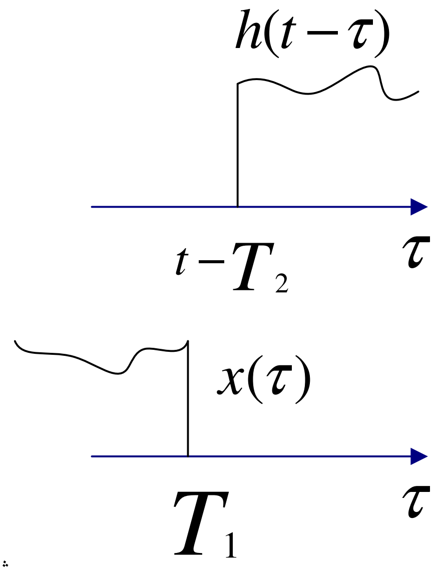
$$y(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(-\tau-t)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-\tau)h(-t+\tau)d\tau$$
$$=x(-t)*h(-t)$$

که نشان می دهد وضعیت داده شده صحیح است.

(د) صحیح: این مسئله با فرض زیر می تواند بحث شود:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

در شکل **ح۲٫۱۶**، $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ را رسم کرده ایم (با فرض اینکه (۱) برای $t>T_1$ $x(t)=0$ و (۲) برای $t>T_2$ ، $(h(t))=0$: واضح است، حاصلضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ اگر $t-T_2>T_1$ برابر صفر خواهد بود، بنابراین برای $t>T_1+T_2$ ، $y(t)=0$.



شکل حل ۱۶-۲

۲,۱۷) یک سیستم LTI با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ و رابطه خروجی ـ ورودی زیر در نظر بگیرید

$$\frac{d}{dt}y+4y(t)=x(t) \qquad \text{(م ۲-۱۷-۱)}$$

سیستم ابتدائاً ساکن است.

الف) $y(t)$ به ازای $x(t)=e^{(-1+3j)t}$ چیست؟

ب) توجه کنید که $\mathrm{Re}\{x(t)\}$ و $\mathrm{Re}\{y(t)\}$ معادله (م ۲-۱۷-۱) را ارضا می کنند. خروجی $y(t)$ سیستم LTI را به ازای ورودی زیر بیابید:

$$x(t)=e^{-t}\cos(3t)u(t)$$

حل:

(الف) می دانیم که $y(t)$ مجموع جواب همگن و خصوصی معادله دیفرانسیل داده شده است.

ابتداً پاسخ خصوصی $y_p(t)$ را با استفاده از روش جایگذاری (روشی که در مثال ۲,۱۴ آمده است.) بدست می آوریم. از آنجایی که ورودی $x(t)=e^{(-1+3j)t}u(t)$ برای $t>0$، اعمال می کنیم؛ بدست می آوریم.

$$y_p(t)=ke^{(-1+3j)t} \quad \text{برای} \quad t>0$$

با جایگذاری $x(t)$ و $y(t)$ در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$(-1+3j)ke^{(-1+3j)t}+4ke^{(-1+3j)t}=e^{(-1+3j)t}$$

که می دهد:

$$(-1+3j)k+4k=1$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{3(1+j)}$$

بنابراین:

$$y_p=\frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t} \qquad t>0$$

برای بدست آوردن جواب همگن: قرار می دهیم:

$$y_y(t)=Ae^{st}$$

از آنجایی که حل همگن، باید معادله ی دیفرانسیل زیر را ارضاء کند:

$$\frac{dy_h(t)}{dt}+4yh(t)=0$$

بدست می آوریم:

$$ASe^{st}+4Ae^{st}=Ae^{st}(S+4)=0$$

که بیان می کند برای هر مقدار A، S=-٤ می باشد. جواب کلی معادله به صورت زیر می باشد؛

$$y(t)=Ae^{-4t}+\frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t} \quad t>0$$

حال برای تعیین ثابت k ازاین حقیقت استفاده می کنیم که سیستم شرایط اولیه را ارضاء می کند. داده شده است $y(0)=0$ بنابراین می توان نتیجه گرفت که:

$$A+\frac{1}{3(1+j)}=0$$

$$\Rightarrow A=\frac{-1}{3(1+j)}$$

بنابراین $t>0$ داریم:

$$y(t)=\frac{1}{3(1+j)}\left[-e^{-4t}+e(-1+3j)t\right];\ t>0$$

از آنجایی که سیستم باید شرایط اولیه را ارضاء کند، برای $t>0$، $y(t)=0$ بنابراین:

$$y(t)=\frac{1-j}{6}\left(-e^{-4t}+e^{(-1+3j)t}\right)u(t)$$

(ب) خروجی، قسمت حقیقی پاسخ بدست آمده در قسمت (الف) خواهد بود.

$$y(t)={}^{1}\!/_{6}\left(e^{-t}\cos 3t+e^{-t}\sin 3t-e^{-4t}\right)u(t)$$

۲,۱۸) ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم علّی LTI با معادله تفاضلی زیر به هم مربوط می شوند

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

$y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-1]$ بیابید.

حل:

از آنجایی که سیستم کازال است: برای $n<1$، $y[n]=0$ حال:

$$y[1]={}^{1}\!/_{4}\,y[0]+x[1]=0+1=1$$
$$y[2]={}^{1}\!/_{4}\,y[1]+x[2]={}^{1}\!/_{4}+0={}^{1}\!/_{4}$$
$$y[3]={}^{1}\!/_{4}\,y[2]+x[3]={}^{1}\!/_{16}+0={}^{1}\!/_{16}$$
$$\vdots$$
$$y[m]=\left({}^{1}\!/_{4}\right)^{m-1}$$

بنابراین:

$$y[n]=(n)=\left({}^{1}\!/_{4}\right)^{n-1}u[n-1]$$

۲,۱۹) اتصال سری دو سیستم S_1 و S_2 به صورت شکل م ۲-۱۹ را در نظر بگیرید:

$$x[n]\longrightarrow\boxed{S_1}\xrightarrow{w[n]}\boxed{S_2}\longrightarrow y[n]$$

شکل م ۲-۱۹

$LTI:S_1$ علّی $w[n]=\frac{1}{2}w[n-1]+x[n]$

$LTI:S_2$ علی $y[n]=ay[n-1]+\beta w[n]$

معادله تفاضلی بین $x[n]$ و $y[n]$ عبارت است از

$$y[n]=-\frac{1}{8}y[n-2]+\frac{3}{4}y[n-1]+x[n]$$

الف) a و β را بیابید.

ب) پاسخ ضربه اتصال سری سیستمهای S_1 و S_2 را بیابید.

حل:

(الف) معادله ی دیفرانسی مربوط با $y[n]$ و $\omega[n]$ را برای S_2 در نظر بگیرید:

$$y[n]=\alpha y[n-1]+\beta\omega[n]$$

از این می توان نوشت:

$$\omega[n]=\frac{1}{\beta}y[n]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-1]$$

و

$$\omega[n-1]=\frac{1}{\beta}y[n-1]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-2]$$

با ضرب معادله ی به $1/2$ و جایگذاری در مرحله قبلی داریم:

$$\omega[n]-1/2\,\omega[n-1]=\frac{1}{\beta}y[n]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-1]-\frac{1}{2\beta}y[n-1]+\frac{\alpha}{2\beta}y[n-2]$$

با جایگذاری این در معادله ی دیفرانسیل مربوط به $\omega[n]$و $x[n]$ برای S_1 داریم:

$$\frac{1}{\beta}y[n]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-1]-\frac{1}{2\beta}y[n-1]+\frac{\alpha}{2\beta}y[n-2]=x[n]$$

یعنی:

$$y[n]=\left(\alpha+1/2\right)y[n-1]-\frac{\alpha}{2}y[n-2]+\beta x[n]$$

با مقایسه با معادله ی داده شده مربوط به $y[n]$ و $x[n]$ داریم:

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad و \quad \beta = 1$$

(ب) معادله دیفرانسیل ورودی و خروجی سیستم های S_1 و S_2 عبارتند از:

$$\omega[n] = \tfrac{1}{2}\omega[n-1] + x[n]$$

,

$$y[n] = \tfrac{1}{4}y[n-1] + \omega[n]$$

از مثال ۲,۱۵ می توانیم استفاده کنیم تا نشان دهیم که پاسخ ضربه سیستمهای S_1 و S_2 عبارتند از:

$$h_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

,

$$h_2[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

پاسخ ضربه کلی سیستم از اتصال کاسل کد (آشباری) سیستمهای S_1 و S_L بدست می آید:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] h_2[n-k]$$

$$= \sum_{\circ=k}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right) * \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k]$$

$$= \sum_{k=\circ}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} = \sum_{k=\circ}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2(n-k)}$$

$$= \left(2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right] u[n]$$

۲,۲۰) انتگرالهای زیر را حساب کنید:

الف) $\int_{-\infty}^{\infty} u_\circ(t)\cos(t)dt$

ب) $\int_\circ^5 \sin(2\pi t)\delta(t+3)dt$

ج) $\int_{-5}^{5} u_1(1-t)\cos(2\pi\tau)d\tau$

حل:

(الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_\circ(t)\cos(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

(ب)

$$\int_{\circ}^{5} \sin(2\pi t)\delta(t+3)dt = \sin 6\pi = \circ$$

(ج) برای تعیین انتگرال

$$\int_{-5}^{5} u_1(1-\tau)\cos(2\pi\tau)d\tau$$

فرض کنید سیگنال

$$x(t) = \cos(2\pi t)[u(t+5) - u(t-5)]$$

می دانیم که:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u_1(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

$$\int_{-5}^{5} u_1(t-\tau)\cos(2\pi\tau)d\tau$$

حال:

$$\frac{dx}{dt}(t)\Big|_{t=1} = \int_{-5}^{5} u_1(1-t)\cos(2\pi\tau)d\tau$$

که انتگرال مطولبست: مقدار انتگال را به صورت زیر تعیین می کنیم:

$$\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=1} = \sin(2\pi t)_t = 1 = \circ$$

۲,۲۱) کانولوشن $y[n] = x[n] * h[n]$ را به ازای زوج سیگنالهای زیر حساب کنید

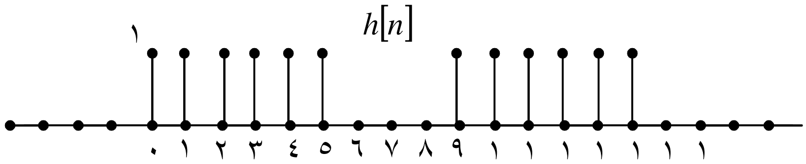
الف) $\left.\begin{aligned} x[n] &= a^n u[n] \\ h[n] &= \beta^n u[n] \end{aligned}\right\} a \neq \beta$

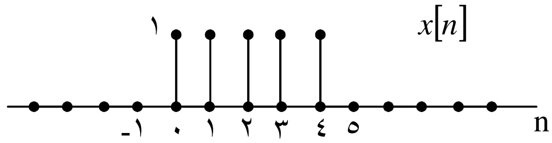
ب) $x[n] = h[n] = a^n u[n]$

ج) $x[n] = h[n] = a^n u[n]$

ج) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$ $\qquad h[n] = 4^n u[2-n]$

د) $x[n]$ و $h[n]$ شکل م ۲-۲۱.





حل:

(الف) کانولوشن داده شده به صورت زیر است:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\beta^{n}\sum_{k=\circ}^{+\infty}\left(\alpha/\beta\right)^{k}$$ برای $n\geq \circ$

$$=\left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right]u\,[n]$$ برای $\alpha\neq\beta$

(ب) از (الف)

$$y[n]=a^{n}\left[a^{n}\right]\left[\sum_{k=\circ}^{n}1\right]u[n]=(n+1)a^{n}u[n]$$

(ج) برای $n\leq 6$

$$y[n]=4^{n}\left[\sum_{k=\circ}^{\infty}\left(-1/8\right)^{k}-\sum_{k=\circ}^{3}\left(-1/8\right)^{k-}\right]$$

برای $n>6$

$$y[n]=4^{n}\left\{\sum_{k=\circ}^{\infty}\left(-1/8\right)^{k}-\sum_{k=6}^{n-1}\left(-1/8\right)^{k}\right\}$$

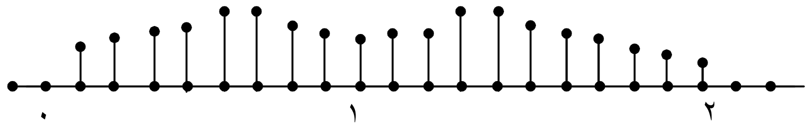
بنابراین:

$$y[n]=\begin{cases}\left(8/9\right)\left(-1/8\right)^{4}4^{n} & n\leq 6\\ \left(8/9\right)\left(-1/2\right)^{n} & n>6\end{cases}$$

(د) کانولوشن مطلوب عبارتست از:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$
$$=x[\circ]h[n]+x[1]h[n-1]+x[2]h[n-2]$$
$$+x[3]h[n-3]+x[4]h[n-4]$$
$$=h[n]+h[n-1]+h[n-2]+h[n-3]+h[n-4]$$

که در شکل ح ۱,۲۱ نشان داده شده است.

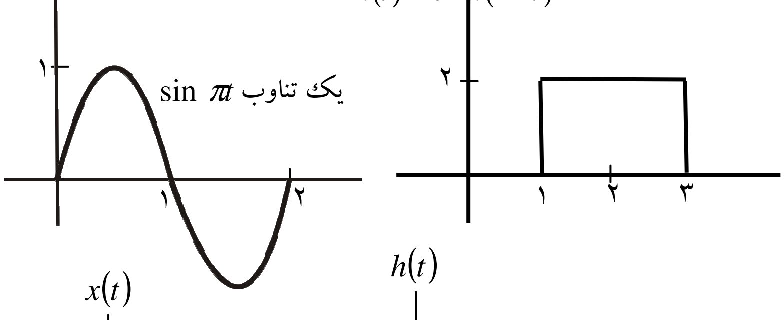


۲,۲۲) به ازای زوج سیگنالهای داده شده، با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ $y(t)$ سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)$ به ورودی $x(t)$ را بیابید. نتایج را رسم کنید.

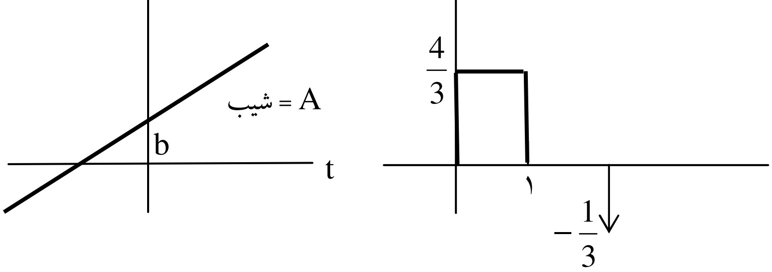
الف) $\begin{cases} x(t)=e^{-\alpha t}u(t) \\ h(t)=e^{-\beta t}u(t) \end{cases}$ (هم به ازای $\alpha \neq \beta$ و هم به ازای $\alpha = \beta$)

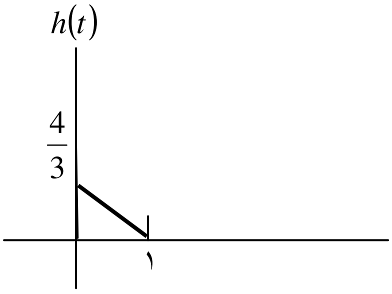
ب) $x(t)=u(t)-2u(t-2)+u(t-5)$
$h(t)=e^{2t}u(1-t)$

(الف)

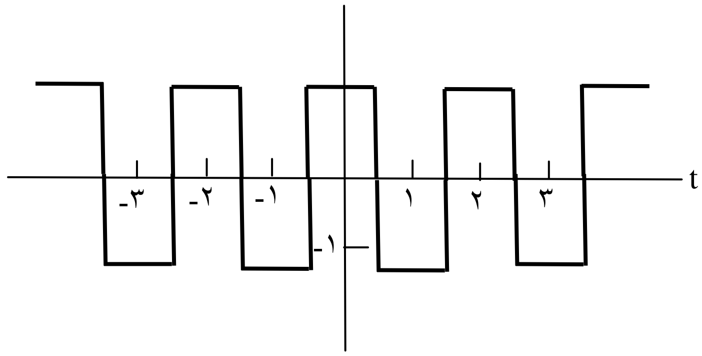


(ب)





(ج)



شکل م ۲-۲۲

ج) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (الف)

د) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (ج)

هـ) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (ج)

حل:

کانولوشن مطلوب عبارت است از:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$
$$= \int_{0}^{t} e^{-\alpha t} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \qquad t \geq 0$$

در این صورت:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-5t}\left(e^{-(\alpha-\beta)t} - 1\right)}{\beta - \alpha} u(t) & \alpha \neq \beta \\ t e^{-\beta t} u(t) & \alpha = \beta \end{cases}$$

(ب) کانولوشن مطلوب عبارت از:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{2} h(t-\tau) d\tau - \int_{2}^{5} h(t-\tau) d\tau$$

که می توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$y(t)=\begin{cases}\int_{\circ}^{2} e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_{2}^{5} e^{2(t-\tau)}d\tau & t\le 1\\ \int_{t-1}^{2} e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_{2}^{5} e^{2(t-\tau)}d\tau & 1\le t\le 3\\ -\int_{t-1}^{5} e^{2(t-\tau)}d\tau 3\le t\le 6 & 3\le t\le 6\\ \circ & 6<t\end{cases}$$

بنابراین:

$$y(t)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)\left[e^{2t}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}\right] & t\le 1\\ \left(\frac{1}{2}\right)\left[e^{2}+e^{2(t-5)}-2e^{2(t-2)}\right]1\le t\le 3 & 1\le t\le 3\\ \left(\frac{1}{2}\right)\left[e^{2(t-5)}-e^{2}\right] & 3\le t\le 6\\ \circ & 6<3\end{cases}$$

(ج) سیگنال مطلوب عبارتست از:

$$\begin{aligned} y(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\\ &=\int_{\circ}^{2}\sin(\pi t)h(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

که می دهد:

$$y(t)=\begin{cases}\circ t<1 & t<1\\ \left(\frac{2}{\pi}\right)[1-\cos[\pi(t-1)]] & 1<t<3\\ \left(\frac{2}{\pi}\right)[\cos[\pi(t-3)]-1] & 3<t<5\\ \circ & 5<t\end{cases}$$

فرض کنید:

$$h(t)=h_1(t)-\frac{1}{3}\delta(t-2)$$

که:

$$h_1(t)=\begin{cases}\frac{4}{3} & \circ\le t\le 1\\ \circ \text{سایر نقاط} & \end{cases}$$

حال:

$$y(t)=h(t)*x(t)=[h_1(t)*x(t)]-\tfrac{1}{3}x(t-2)$$

داریم:

$$h_1(t)*x(t)=\int_{t-3}^{t}\tfrac{4}{3}(\alpha\tau+b)\,d\tau\left(\tfrac{1}{2}at^2-\tfrac{1}{2}a(t-1)^2+bt-b(t-1)\right)$$

بنابراین:

$$y(t)=\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}at^2-\tfrac{1}{2}\alpha(t-1)^2+bt-b(t-1)\right]-\tfrac{1}{3}\left(a(t-2)+b\right)=at+b=x(t)$$

(د) $x(t)$ پریودیک، $y(t)$ پریودیک را ارائه می کند: تنها یک پریودیک را تعیین می کنیم.

داریم:

$$y(t)=\begin{cases}\int_{t-1}^{-1/2}(t-\tau-1)d\tau+\int_{-1/2}^{t}(1-t+\tau)d\tau=\tfrac{1}{4}+t-t^2-\tfrac{1}{4}<t<\tfrac{1}{2}\\ \int_{t-1}^{1/2}(1-t+\tau)d\tau+\int_{1/2}^{t}(t-1-\tau)d\tau=t^2-3t+\tfrac{7}{4}\quad \tfrac{1}{2}<t<\tfrac{3}{2}\end{cases}$$

پریود $y(t)$ برابر ۲ می باشد.

۲,۲۳) $h(t)$ را پالس مستطیلی شکل م ۲-۲۳ (الف) و $x(t)$ را قطار ضـربه شـکل م ۲-۲۳ (ب) فرض کنید؛ یعنی

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$$

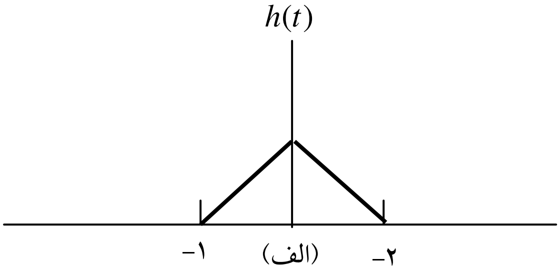
$y(t)=x(t)*h(t)$ را به ازای T های زیر بیابید آن را رسم کنید.

الف) $T=4$

ب) $T=2$

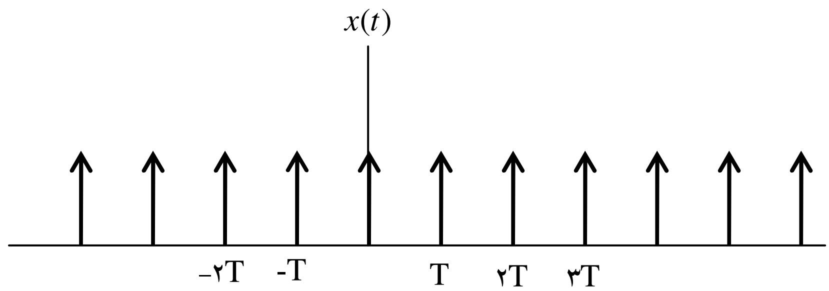
ج) $T=\frac{3}{2}$

د) $T=1$



(الف)

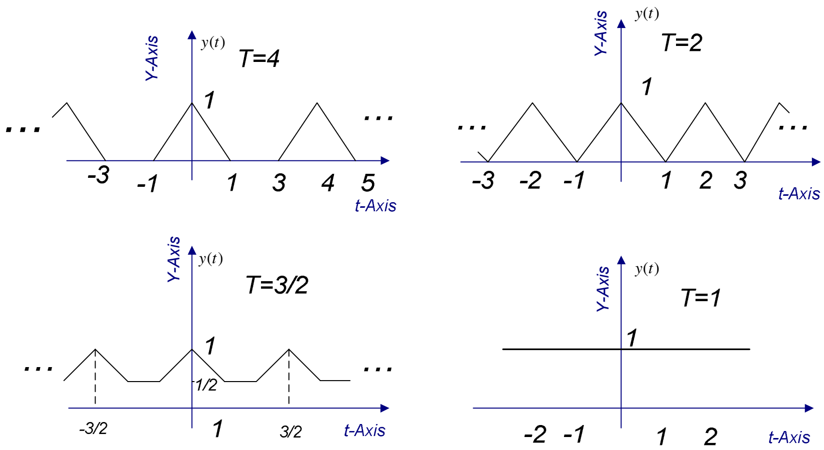
حل:



(ب)

شکل م ۲-۲

$y(t)$ برای مقادیر مختلف T در شکل S.۲,۲۳ رسم شده است.



شکل ح۲,۲۳.

۲,۲٤) ترکیب سری سیستم عَی LTI به صورت نشان داده شـده در شـکل م ۲-۲٤ (الـف) را در نظر بگیرید.

پاسخ ضربه $h_2[n]$ عبارت است از

$$h_2[n]=u[n]-u[n-2]$$

و پاسخ ضربه سیستم کل مطابق شکل م ۲-۲٤ (ب) است.

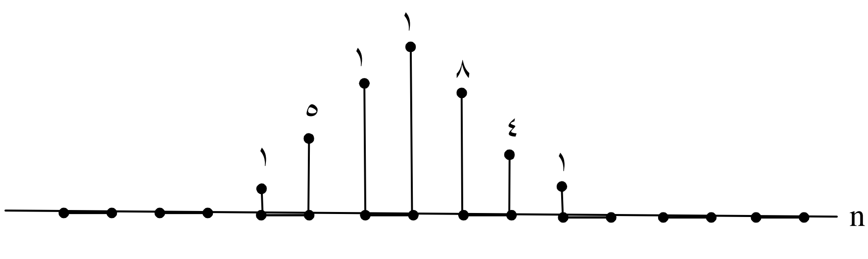
الف) پاسخ ضربه $h_2[n]$ را بیابید.

ب) پاسخ سیستم کل به ورودی زیر را بیابید.

$$x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

(الف)



(ب)

شکل ۲٤-۲

حل:

(الف) داده شده است که $h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-2]$، بنابراین:

$$h_2[n]*h_2[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

از آنجایی که $h[n]=h_1[n]*[h_2[n]*h_2[n]]$

داریم:

$$h[n]=h_1[n]+2h_1[n-1]+h_1[n-2]$$

بنابراین:

$$h[\circ]=h_1[\circ]\Rightarrow h_1[\circ]=1$$
$$h[1]=h_1[1]+2h_1[\circ]\Rightarrow h_1[1]=3$$
$$h[2]=h_1[2]+2h_1[1]+h_1[\circ]\Rightarrow h_1[2]=3$$
$$h[3]=h_1[3]+2h_1[2]+h_1[1]\Rightarrow h_1[3]=2$$
$$h[4]=h[4]+2h_1[3]+h_1[2]\Rightarrow h_1[4]=1$$
$$h[5]=h_1[5]+2h_1[4]+h_1[3]\Rightarrow h_1[5]=\circ$$
$$h_1[n]=\circ \qquad for \qquad n<\circ \quad , \quad n>5$$

(ب) در این مورد

$$y[n]=x[n]*h[n]=h[n]-h[n-1]$$

(۲,۲۵) سیگنال زیر

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

را به ازای

$$x[n]=3^n u[-n-1]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

و

$$h[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$

در نظر بگیرید.

(الف) $y[n]$ را بدون استفاده از خاصیت پخشی کانولوشن بیابید.

(ب) $y[n]$ را با استفاده از خاصیت پخشی کانولوشن بیابید.

حل:

(الف) $x[n]$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$x[n]=\left(1/3\right)^{|n|}$$

حال کانولوشن مطلوب عبارتست از:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= h[n] * x[x] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3] \\
&+ \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3] \\
&= \left(\tfrac{1}{12}\right) \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+k} u(n+k+4) \\
&+ \sum_{k=\circ}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3]
\end{aligned}
$$

با در نظر گرفتن هر کدا م از سری های در معادله فوق به صورت جداگانه، می توان نشان داد که:

$$
y[n] = \begin{cases} \left((12)\tfrac{4}{11}\right)3^{n} & n < -4 \\ \left(\tfrac{1}{11}\right)4^{4} & n = -4 \\ \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n}\left(\tfrac{1}{11}\right) + (-3)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} + 3(256)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} & n \geq -3 \end{cases}
$$

(ب) حال کانولوشن را در نظر بگیرید:

$$
y_1[n] = \left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} u[n]\right] * \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} u[n+3]\right]
$$

می توان نشان داد که:

$$
y_1[n] = \begin{cases} \circ & n < -3 \\ -3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} + 3(256)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} & n \geq -3 \end{cases}
$$

نیز کانولوشن را در نظر بگیرید:

$$
y_2[n] = \left[(3)^{n} u[-n-1] * \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} u[n+3]\right]\right]
$$

می توان نشان داد که:

$$
y_2[n] = \begin{cases} \left((12)^{4/11}\right)3^{n} & n < -4 \\ \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} \tfrac{1}{11} & n \geq -3 \end{cases}
$$

بطور واضح؛ $y_1[n]+y_2[n]=y[n]$ از قسمت قبلی بدست می آید.

(۲,۲,٦) محاسبه زیر

$$y[n]=x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]$$

را بـــه ازای $x_1[n]=0/5^n[n]$ ، $x_2[n]=u[n+3]$ ، و $x_2[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ در نظـــر بگیرید.

الف) $x_1[n]*x_2[n]$ را حساب کنید.

ب) کانولوشن نتیجه بند (الف) با $x_3[n]$ را برای محاسبه $y[n]$ حساب کنید.

ج) $x_2[n]*x_3[n]$ را حساب کنید.

د) کانولوشن نتیجه بند (الف) با $x_1[n]$ را برای $y[n]$ حساب کنید.

حل:

(الف) داریم:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n]*x_2[n] \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x_1[x]x_2[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (0.5)^x u[n+3-k] \end{aligned}$$

که برابر است با

$$y_1[n]=x_1[n]*x_2[n]=\begin{cases} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}\right) & n\geq -3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(ب) حال:

$$y[n]=x_3[n]*y_1[n]=y_1[n]-y_1[n-1]$$

بنابراین:

$$y[n]=\begin{cases}2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right)+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} & n\geq -2\\ 1 & n=-3\\ 0 \qquad \text{سایر نقاط} & \end{cases}$$

بنابراین:

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}u[n+3]$$

(ج) داریم:

$$\begin{aligned}y_2[n]&=x_2[n]*x_3[n]\\&=u[n+3]-u[n+2]=\delta[n+3]\end{aligned}$$

(د) با استفاده از نتیجه قسمت (ج) داریم:

$$y[n]=y_2[n]*k_1[n]=x_1[n+3]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}u[n+3]$$

۲٫۲۷) مساحت زیر سیگنال پیوسته در زمان $v(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_v=\begin{cases}\infty\\ -\infty^{v(t)dt}\end{cases}$$

نشان دهید که اگر $y(t)=x(t)=x(t)*h(t)$ ، آنگاه

$$A_y=A_xA_h$$

حل:

اثبات در زیر آورده است:

$$\begin{aligned}Ay&=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t\tau)d\tau dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)dtd\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)Ay\,d\tau\\&=AxAy\end{aligned}$$

۲,۲۸) سیگنالهای زیر پاسخ ضربه های سیستمهای LTI گسسته در زمان هستند. آیا این سیستمها پایدار و/ یا علّی هستند؟ دلیل بیاورید.

الف) $h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n]$

هـ) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+(1/۰)^{n}[n-1]$

ب) $h[n]=(۰/8)^{n}u[n+2]$

و) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+(1/۰1)^{n}u[1-n]$

ج) $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n]$

ز) $h[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}[n-1]$

د) $h[n]=(5)^{n}u[3-n]$

حل:

(الف) کازال است زیرا $h[n]$ برای $n>۰$ برابر صفر است.

پایدار است زیرا $\sum_{n=۰}^{\infty}\left(1/5\right)^{n}=5/4<\infty$

(ب) کازال نیست زیرا برای $n<۰$، $h[n]\neq ۰$ پایدار زیرا $\sum(۰.8)^{n}=5<\infty$.

(پ) کانتی – کازال زیرا برای $n>۰$، $h[n]=۰$، پایدار نیست زیرا $\sum_{n=-\infty}^{۰}\left(1/2\right)^{n}=\infty$

(ت) کازال نیست زیرا $h[n]\neq ۰$ برای $n<۰$، پایدار زیرا $\sum_{n=-\infty}^{3}5^{n}=\frac{625}{4}<\infty$

(ت) کازال زیرا برای $n<۰$، $h[n]=۰$، پایدار نیست زیرا جمله دوم زمانیکه $n\rightarrow\infty$ نامحدود است.

(ح) کازال نیست زیرا برای $n<۰$، $h[n]\neq ۰$. پایدار است زیرا $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\frac{305}{3}<\infty$

(خ) کازال است زیرا برای $n<0$، $h[n]=0$. پایدار است زیرا $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=1<\infty$

۲,۲۹) سیگنالهای زیر پاسخ ضربه های سیستمهای LTI پیوسته در زمان هستند. آیا این سیستمها پایدار و / یا علّی هستند؟ دلیل بیاورید.

الف) $h(t)=e^{-4t}u(t-2)$

ب) $h(t)=e^{-6t}u(3-t)$

ج) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$

د) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$

هـ) $h(t)=e^{-6|t|}$

و) $h(t)=te^{-t}u(t)$

ز) $h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-(t-100)/100}\right)u(t)$

حل)

(الف) کازال زیرا برای $t<0$ $h(t)=0$، پایدار زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{-8/4}<\infty$

(ب) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|=\infty$

(پ) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{50}<\infty$

ت) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{-2/2}<\infty$

(ث) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=1/3<\infty$

(ح) کازال است زیرا برای $t<0$، $h(t)=0$. پایدار است زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=1<\infty$

(خ) کازال است زیرا برای $t<0$، $h(t)=0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=\infty$

۲,۳۰) معادله تفاضلی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]$$

با فرض سکون ابتدائی (یعنی اگر در $n<n_0$، $x[n]=0$؛ آنگاه در $n<n_0$، $y[n]=0$) پاسخ ضربه سیستمی را که رابطه ورودی ـ خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است بیابید. شاید بهتر

باشد معادله تفاضلی را به صورتی بازنویسی کنید که $y[n]$ را بر حسب $x[n-1]$ و $x[n]$ بیان کند، و مقادیر $y[\circ], y[1], y[2]$ و ... را به ترتیب بیابید.

حل:

بایستی خروجی سیگنال را وقتی ورودی برابر $x[n]=\delta[n]=\delta[n]$ بیابیم. از آنجایی که از ما خواسته شده است تا فرض کنیم جواب نهایی را مختصر کنیم. می توانیم نتیجه بگیریم که برای $n<\circ$ $y[n]=\circ$. حال:

$$y[n]=x[n]-2y[n-1]$$

بنابراین:

$$y[\circ]=x[\circ]-2y[-1]=1$$

,

$$y[1]=x[1]-2y[\circ]=-2$$

,

$$y[2]=x[2]+2y[2]=-4$$

به همین ترتیب: جواب به صورت زیر بدست می آید:

$$y[n]=(-2)^n u[n]$$

این پاسخ ضربه سیستم است.

۲,۳۱) سیستم LTI ابتدائاض ساکن توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]+2x[n-2]$$

پاسخ این سیستم به ورودی نشان داده شده در شکل م ۲-۳۱ را با حل بازگشتی معادله تفاضلی بیابید.

حل:

جواب نهایی مختصر بیان می دارد که برای $n<-2$، $y[n]=\circ$ حال:

$$y[n]=x[n]+2x[n-2]-2y[n-1]$$

بنابراین:

$$y[-2]=1\ ,\ y[-1]=\circ\ \ ,\ y[\circ]=5\ ,\ldots$$

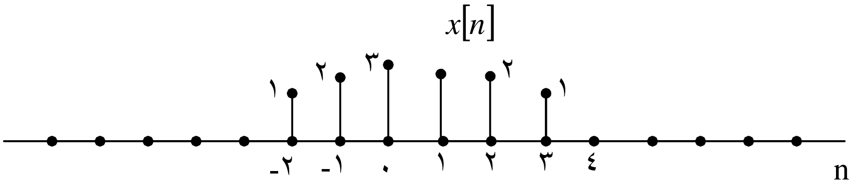
برای $n\geq 5$ $\qquad y[5]=--110\ ,\ldots y[n]=-110(-2)^{n-5}$

۲,۳۲) معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \qquad \text{(م ۲-۳۲-۱)}$$

فرض کنید که

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \qquad \text{(م ۲-۳۲-۲)}$$



شکل م ۲-۳۱

جواب $y[n]$ را مجموع یک جواب خصوصی $y_p[n]$ معادله (م ۲-۳۲-۱) و یک جواب همگن $yh[n]$ به معادله زیر فرض کنید.

$$yh[n]-\frac{1}{2}yh[n-1]=0$$

الف) نشان دهید که جواب همگن عبارت است از

$$yh[n]=A(1)2^n$$

ب) جواب خصوصی $y_p[n]$ را به نحوی می یابیم که معادله زیر ارضا شود

$$y_p[n]-\frac{1}{2}y_p[n-1]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

فرض کنید $y_p[n]$ در $n\geq 0$ به شکل $B\left(\frac{1}{3}\right)^n$ است و با جایگزینی آن در معادله تفاضلی بالا مقدار B را بیابید.

ج) فرض کنید ورودی یک سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ۲-۳۲-۱) و ابتدائاً ساکن، سیگنال معادله (م ۲-۳۲-۲) است. چون در $n<0$، $x[n]=0$؛ پس در $n<0$، $y[n]=0$. همچنین با توجه به بندهای (الف) و (ب) $y[n]$ در $n\geq 0$ به شکل زیرست

$$y[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

برای یافتن ثابت مجهول B باید یک مقدار $y[n]$ در $n \geq \circ$ را بدانیم. با استفاده از شرط سکون ابتدایی و معادلات (م ۲-۳۲-۱) و (م ۲-۳۲-۱) $y[\circ]$ را تعیین کنید. ثابت A را به کمک این مقدار بیابید. نتیجه این محاسبه جواب معادله تفاضلی (م ۲-۳۲-۱) به ازای ورودی معادله (م ۲-۳۲-۳) و شرط سکون ابتدایی است.

حل:

(الف) اگر $y_h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$ دراین صورت لازم است ثابت کنیم

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \circ$$

واضح است که صحیح می باشد.

(ب) حال برای $n \geq \circ$ می خواهیم:

$$B\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

بنابراین $B = -2$

(پ) از معادله (م۲٬۳۲٬۱) می دانیم که $y[\circ] = x[\circ] + \frac{1}{2}y[-1]y[-1] = x[\circ] = 1$

$$y[\circ] = A + B \quad \Rightarrow \quad A = 1 - B = 3$$

۲٬۳۳) سیستمی را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را ارضا می کند.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \qquad \text{(م ۲-۳۳-۱)}$$

این سیستم شرط سکون ابتدایی را نیز برآورده می کند.

الف) (i) خروجی $y_1(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_1(t) = e^{3t}u(t)$ را بیابید.

(ii) خروجی $y_2(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_2(t) = e^{2t}u(t)$ را بیابید.

(iii) خروجی $y_3(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_3(t) = ae^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$ را بیابید.

a و β دو عدد حقیقی اند. نشان دهید که $y_3(t) = ay_1 + \beta y_2(t)$.

(iv) حال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را دو سیگنال دلخواه بگیرید، به نحوی که

در $x_1(t) = \circ \ , \ t < t_1$

در $x_2(t) = \circ \ , \ t < t_2$

$y_1(t)$ را پاسخ سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_2(t)$، و $y_3(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_3(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_3(t)=ax_1(t)+\beta x_2(t)$ فرض کنید، نشان دهید که

$$y_3(t)=ay_1(t)+\beta y_2(t)$$

بنابراین سیستم تحت بررسی خطی است.

ب) (i) خروجی $y_1(t)$ را به ازای ورودی $x_2(t)=Ke^{2t}u(t)$ بیابید.

(ii) خروجی $y_2(t)$ را به ازای ورودی $x_1(t)\backslash=Ke^{2(t-T)}u(t-T)$ بیابید. نشان دهید که $y_2(t)=y_1(t-T)$.

(iii) حال $x_1(t)$ را سیگنال دلخواهی بگیرید که در $t<t_{\circ}$، $x_1(t)$. $y_1(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ را خروجی سیستم به ازای $x_2(t)=x_1(t-T)$ فرض کنید. نشان دهید که

$$y_2(t)=y_1(t-T)$$

پس نتیجه می گیریم سیستم تحت بررسی تغییرناپذیر با زمان است. با توجه به نتیجه بند (الف) سیستم داده شده LTI است. چون این سیستم شرط سکون ابتدایی را نیز دارد، علّی هم هست.

حل:

(الف) i) از مثال ۲,۱۴) می دانیم که:

$$y_1(t)=\left[\frac{1}{5}e^{3t}-\frac{1}{5}e^{-2t}\right]u(t)$$

(ii) این را بر اساس مثال ۲,۱۴ حل می کنیم. ابتدا فرض کنید که $y_p(t)$ شامل ke^{2t} است.

دراین صورت با استفاده از معادله (م۲,۳۳,۱)، برای $t>\circ$ داریم:

$$2ke^{2t}+2ke^{2t}=e^{2t}\Rightarrow\left(k=\tfrac{1}{4}\right)$$

حال می دانیم که $y_p(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}$ برای $t>\circ$. حال جواب عمومی معادله را بدست می آوریم

$$y_h(t)=Ae^{-2t}$$

بنابراین:

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+\tfrac{1}{4}e^{2t}\qquad for\ t>\circ$$

با فرض جواب نهایی، می توانیم نتیجه بگیریم که برای $t\le\circ$ $y_2(t)=\circ$، بنابراین.

$$y_2(\circ]=\circ=A+1/4 \Rightarrow A=-1/4$$

دراینصورت

$$y_2(t)=\left[-\frac{1}{4}e^{2t}\right]+1/4\, e^{-2}u(t)$$

iii) فرض کنیم ورودی به صورت $x_3(t)=\propto e^{3t}u(t)+\beta e^{2t}u(t)$ باشد. فرض کنیم که $y_p(t)$ جواب خصوصی بصورت زیر باشد:

$$y_p(t)=x_1\alpha_1 e^{3t}+k_2\beta e^{2t}$$

برای $t>\circ$، با استفاده از معادله (م۲,۳۳) داریم:

$$3k_1\alpha e^{3t}+2k_2\beta e^{2t}+2k_1\alpha e^{3t}+2k_2\beta e^{2t}=\alpha e^{3t}+\beta e^{2t}$$

با متحد قرار دادن ضرایب e^{3t} و e^{2t} در دو طرف معادله داریم:

$$k_1=1/5\ ,\ k_2=1/4$$

حال، با قرار دادن $y_h(t)=A_e^{-2t}$ داریم:

$$y_3(t)=1/5\,\alpha e^{3t}+1/4\,\beta e^{2t}+Ae^{-2t}$$

برای $t>\circ$ = شرایط اولیه را به صورت زیر فیض می کنیم:

$$y_3=(\circ)=\circ=A+\alpha/5+\beta/4$$
$$\Rightarrow A=-\left(\frac{\propto}{5}+\beta/4\right)$$

بنابراین:

$$y_3(t)=\left\{1/5\propto e^{3t}+\frac{1}{4}\beta e^{2t}-\left(\frac{\propto}{5}+\frac{\beta}{4}\right)e^{-2t}\right\}u(t)$$

iv) برای ورودی ـ خروجی جفت $x_1(t)$ و $y_1(t)$، می توانیم از معادله (م۲,۳۳,۱) استفاده کنیم و شرایط اولیه برای نوشتن:

(ح۲,۳۳,۱)

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t)\\ y_1(t)=\circ \qquad \rightarrow t<t_1\end{cases}$$

برای ورودی ـ خروجی جفت $x_2(t)$ و $y_2(t)$، می توانیم از معادله ی (م۲,۳۳,۱) استفاده کنیم و شرایط اولیه برای نوشتن:

(ح۲,۳۳,۲)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \\ y_2(t) = \circ \end{cases}$$

بااسکیل کردن معادله (ح۲,۳۳,۱) به اندازه α ومعادله (ح۲,۳۳,۲) به اندازه β و خلاصه سازی داریم:

$$\frac{d}{dt}\{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\} + 2\{\alpha y_1 t + \beta y_2(t)\} = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

$$y_1(t) + y_2(t) = \circ \qquad for \quad t < mm(t_1, t_2)$$

با جایگذاری، واضح است که خروجی $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ زمانیکه $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$. بعلاوه $y_3(t) = \circ$ برای $t < t_3$. که t_3 نشان دهنده زمان است تا زمانیکه $x_3(t) = \circ$.

(ب) (i) بااستفاده از نتیجه (a-ii) می توان نوشت:

$$y_1(t) = \frac{k}{4}\left[e^{2t} - e^{-2t}\right]u(t)$$

(ii) این مسئله را در راستای مثال ۲,۱٤ حل می کنیم. ابتدا فرض کنید که $y_p(t)$ به صورت $KYe^{2(t-T)}$ برای $t > 2$ است. سپس با استفاده از معادله (م۲,۳۳,۱) برای $t > T$ است. سپس بااستفاده از معادله (م۲,۳۳,۱) برای $t > T$ داریم:

$$2ke^{2(t-T)} + 22ke^{2(t-T)} = e^{2t}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

می دانیم که $y_p(t) = \frac{k}{4}e^{2(t-T)}$ برای $t > T$. حال جواب عمومی را بدست می آوریم:

$$y_h(t) = Ae^{-2t}$$

بنابراین

$$y_2(t) = Ae^{-2t} + \frac{k}{4}e^{2(t-T)} \qquad for \quad t > T$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه، می توان نتیجه گرفت که برای $t \le T$ $y_2(t)=\circ$. بنابراین:

$$y_2(T)=\circ = Ae^{-2T}+k/4 \Rightarrow A=-\frac{k}{4}e^{2T};$$

در این صورت:

$$y_2(t)=\left[-\frac{k}{4}e^{-2(t-T)}+\frac{k}{4}e^{2(t-T)}\right]u(t-T)$$

آشکار است که $x_1(t)=y_1(t-T)$ که برای $t<t_\circ$، $x_1(t)=\circ$ توجه کنید که:

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t) \qquad y_1(t)=\circ \qquad for \quad t<t_\circ$$

از آنجایی که مشتق یک عملگر تغییرپذیر با زمان است، می توان نوشت:

$$\frac{dy_1(t-T)}{dt}+2y_1(t-T)=x_1(t-T) \qquad y_1(t)=\circ \qquad for \ \ t<t_\circ$$

این پیشنهاد می کند که اگر ورودی به صورت سیگنالی از $x_2(t)=x_1(t-T)$ باشد، در اینصورت خروجی نیز سیگنالی به صورت $y_2(t)=y_1(t-T)$ خواهد بود. همچنین، توجه کنید که ورودی جدید $y_2(t)$ برای $t<t_\circ+T$ صفر خواهد بود. این تغییرپذیری با زمان را حمایت می کند از آنجا می کند $x_2(t)$ برای $t<t_\circ+T$ صفر است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که سیستم تغییرپذیر با زمان است.

۲,۳٤) فرض کنید سکون ابتدایی معادل یک شرط کمکی صفرست که در زمانی قابل تنظیم با سیگنال ورودی تعیین می شود. در این مسئله نشان می دهیم که اگر شرط کمکی غیر صفر باشد یا در زمان مشخصی (مستقل از سیگنال ورودی) اعمال شود، سیستم متناظر نمی تواند LTI باشد. سیستمی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ فرض کنید که معادله دیفرانسیل مرتبه اول (م ۲-۳۳-۱) را ارضاکند.

(الف) با فرض شرط کمکی $y(1)=1$، با مثالی نقض نشان دهید که سیستم خطی نیست.

(ب) با فرض شرط کمکی $y(1)=1$، با مثالی نقض نشان دهید که سیستم تغییرناپذیر یا زمان نیست.

ج) نشان دهید که سیستم با شرط کمکی $y(1)=1$ نمواً خطی است.

د) نشان دهید که به ازای شرط کمکی $y(1)=1$ سیستم خطی است ولی تغییرناپذیر با زمان نیست.

هـ) نشان دهید که به ازای شرط کمکی $y(\circ)+y(4)=\circ$ سیستم خطی است ولی تغییرناپذیر با زمان نیست.

حل:

(الف) فرض کنید $x_1(t)\xrightarrow{S} y_1(t),\quad x_2(t)\xrightarrow{S} y_2(t)$. می دانیم کـه $y_1(1)=y_2(1)=1$
حال ورودی سومی را به صـورت $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ در نظـر بگیریـد. فـرض کنیـد خروجـی متناظر نیز $y_3(t)$، باشد.
حال توجه کنید که $y_3(1)=1\neq y_1(1)+y_2(1)$. بنابراین سیستم خطی نیست. یک مثـال خـالص در زیر آورده شده است:
خروجی متناظر برای $t<0$ برابر است با:

$$y_1(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}+Ae^{-2t}$$

با استفاده از این حقیقت که $y_1(1)=1$ برای $t>0$ داریم:

$$y_1(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}+\left(1-\tfrac{e}{4}\right)e^{-2(t-1)}$$

حال سیگنال $x_2(t)=0$ را فرض کنید دراین صورت خروجی متناظر برابر است با:

$$y_2(t)=Be^{-2t}$$

برای $t>0$ با استفاده از این حقیقت که $y_2(1)=1$ برای $t>0$ داریم:

$$y_2(t)=e^{-2(t-1)}$$

حال سیگنال سوم $x_3=x_1(t)+x_2(t)=x_1(t)$ را در نظر بگیرید. توجه کنیـد کـه خروجـی هنـوز برابراست با $y_3(t)=y_1(t)$ بـرای $t>0$. بـدیهی اسـت کـه $y_3(t)\neq y_1(t)+y_2(t)$ بـرای $t>0$.
بنابراین سیستم خطی نیست.
(ب) دوباره سیگنال ورودی $x_1(t)=e^{2t}u(t)$ را فرض کنید. از قسمت (الف) می دانیم که سـیگنال خروجی متناظر برای $t>0$ با $y(1)=1$ برابر است با:

$$y_1(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}+\left(1-\tfrac{e}{4}\right)e^{-2(t-1)}$$

حـال فـرض کنیـد سـیگنال ورودی $e^{2(t-T)}u(t-T)=x_2(t)=x_1(t-T)$، در اینـصورت بـرای $t>T$

$$y_2(t)=\tfrac{1}{4}e^{2(t-T)}+Ae^{-2t}$$

با استفاده ازاین حقیقت که $y_2(1)=1$ و همچنین فرض کنید $T<1$ برای $t>T$ داریم:

$$y_2(t)=\tfrac{1}{4}e^{2(t-T)}+\left(1-\tfrac{1}{4}e^{2(1-T)}\right)e^{-2(t-1)}$$

حال توجه کنید که برای $t>T$، $y_2(t)\neq y_1(t-T)$. بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان نیست.

(ج) به منظور اینکه نشان دهیم سیستم خطی صعودی با شرایط معین مثلاً $y(1)=1$ می باشد ابتدا بایستی نشان دهیم که سیستم با شرایط معین خطی است بطو خاص $y(1)=\circ$.

برای ورودی ـ خروجی جفت $x_1(t)$ و $y_1(t)$، می توان از (م۱,۲,۳۳) استفاده کنیم. و بااستفاده از شرایط اولیه:

(ح۱-۲,۳٤)

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t)\ ;\quad y_2(1)=\circ$$

برای ورودی ـ خروجی جفت، $x_2(t)$ و $y_2(2)$ نیز:

$$\frac{dy_2(t)}{dt}+2y_2(t)=x_2(t)\qquad ;\qquad y_2(1)=\circ \qquad (ح۲,۳٤,۲)$$

با اسکیل کردن (ح۱,۲,۳٤) به اندازه α و (ح۲,۳٤,۲) به اندازه ی β و خلاصه سازی داریم:

$$\frac{d}{dt}\{ay_1(t)+\beta y_2(t)\}+2\{ay_1(t)+\beta y_2(t)\}$$
$$=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$$
$$,$$
$$y_3(1)=y(1)+y_2(1)=\circ$$

ملاحظه می شود که خروجی به صورت $y_3(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ زمانیکه ورودی به صورت $x_3(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ بود، درآمد. بعلاوه $y(1)=\circ=y_1(1)+y_2(1)$ بنابراین سیستم خطی است.

بنابراین اگر سیستم کلی به صورت (کاسکید (آبشاری) به سیستم خطی با جمع کننده بهم وصل شود پاسخ تنها به شرایط معین اولیه را جمع می زند.

(د) در قسمت قبلی نشان دادیم که سیستم زمانی خطی است که $y(1)=\circ$ برای اینکه نشان دهیم سیستم تغییرناپذیر نیست، فرض کنیم یک ورودی از $x_1(t)=e^{2t}u(t)$ از قسمت (الف). می دانیم که خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}+Ae^{-2t}$$

با استفاده از این حقیقت که $y_1(1)=\circ$ برای $t>\circ$ داریم:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2(t-2)}$$

فـرض کنـیم یـک ورودی $x_2(t)=x_1\left(t-\frac{1}{2}\right)$ باشـد. توجـه کنیـد کـه $y_2(1)=0$ واضـح اسـت $y_2(1)\neq y_1\left(1-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(e-e^3\right)\right)$. بنابراین $y(t)\neq y_1\left(t-\frac{1}{2}\right)$ برای تمامی nها. این بـه ایـن معنا است که سیستم تغییر پذیر با زمان است.

(هـ) برهانی که بسیار شبیه به اثبات خطی استفاده شده در قسمت (پ) اینجـا نیـز مـی توانـد اسـتفاده گردد. با روش نشان داده شده در قسمت (ت) می توانیم نشان دهـیم کـه سیـستم تغییرپـذیر بـا زمـان سات.

۲,۳۵) در مسئله قبل دیدیم که استفاده از شرط کمکی ثابت در زمـان (مـستقل از سـیگنال ورودی) بـه سیستمی تغییرپذیر با زمان می انجامد. در این مسئله اثر شرط کمکی ثابت در زمـان بـر علّـی بـودن را بررسی می کنیم. سیستمی در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجـی $y(t)$ آن معادلـه دیفرانـسیل (م ۲-۳۳-۱) را ارضا کند. فرض کنید شرط کمکـی ایـن معادلـه دیفرانـسیل $y(0)=0$ اسـت. خروجـی سیستم به ازای دو ورودی زیر را بیابید:

(الف) $x_1(t)=0$

(ب) $x_2(t)=\begin{cases}1\,, & \tau<-1\\ 0\,, & \tau>-1\end{cases}$

توجه کنید که $y_1(t)$ خروجی به ازای $x_1(t)$ و $y_2(t)$ خروجی به ازای $x_2(t)$ است، و گرچـه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در $t<-1$ یکسان اند، ولی $y_2(t)$ در $t<-1$ یکسان نیستند. بر اساس این نتیجه می توان استدلالی برای علّی نبودن سیستم ارائه کرد.

حل:

(الف) از آنجایی که سیستم خطی است، $y_1(t)=0$ برای همه ی t.

(ب) حال فرض کنید خروجی زمانیکه ورودی $x_2(t)$ است، $y_2(t)$ باشد.

جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p(t)=Y \qquad t>-1$$

با جایگذاری در (م۱-۲,۳۳) داریم:

$$2\ Y=1$$

حال، جواب عمومی را به صورت $y_h(t)=Ae^{-2t}$ در نظر بگیریم. جـواب کلـی را بـه صـورت زیـر بدست می آوریم:

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad t>-1$$

از آنجایی که $y(0)=0$ داریم:

(ح۱-۲٫۳۵)

$$y_2(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}$$

برای $t<-1$، نشان می دهیم که $x_2(t)=0$. بنابراین جواب خصوصی در این بازه صفر خواهد شد و

(ح۲-۲٫۳۵)

$$y_2(t)=Be^{-2t} \qquad t<-1$$

از آنجایی که دو قسمت جواب $y_2(t)$ معادلات (ح۱-۲٫۳۵) و (ح۲-۳۵-۲) باید در $t=-1$ بدست آیند، می توانیم B را از معادله بدست آوریم:

در نتیجه:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^2=Be^2$$
$$y_2(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^2\right)e^{-2t+1} \qquad t<-1$$

حال نشان می دهیم که چون $x_1(t)=x_2(t)$ برای $t<-1$ بایستی درست که برای سیستم کازال در $t<-1$، $y_1(t)=y_2(t)$ بهرحال نتیجه قسمت (الف) و (ب) نشان می دهد که این صحیح نیست بنابراین سیستم کازال نیست.

(۲٫۳۶) سیستم گسسته در زمانی را که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن به صورت زیر مرتبط اند، در نظر بگیرید

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$$

الف) نشان دهید که در صورت ابتدائاً ساکن بودن (یعنی اگر در $n<n_0$، $x[n]=0$؛ آنگاه در $n<n_0$، $y[n]=0$) سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

ب) نشان دهید که اگر سیستم ابتدائاً ساکن نباشد، و به جای آن شرط کمکی $y[0]=0$ را ارضا کند، سیستم علّی نیست. [راهنمایی: رهیافتی مشابه مسئله ۲-۳۵ به کار برید.]

حل:

یک ورودی $x_1[n]$ راه مانند $x_1[n]=0$ برای $n<n_1$ فرض کنید، خروجی متناظر برابر خواهد بـود با:

$$\begin{cases} y_1[n]=\frac{1}{2}y_1[n-1]+x_1(n) \\ y_1[n]=0 \end{cases} \qquad \text{(ح ۲,۳٦,۱)}$$

و نیز ورودی دیگری بنام $x_2[n]$ را مانند $x_2[n]=0$ برای $n<n_2$ در این صورت خروجی متنـاظر برابر خواهد بود با:

$$y_2[n]=\frac{1}{2}y_2[n-1]+x_2[n] \qquad y_2[n]=0 \quad for \quad n<n_2$$

(ح ۲,۳٦,۲)

ـ با اسکیل کردن معادله (S.۲,۳٦,۱) به اندازه $\propto$ و معادله (S.۲,۳٦,۲) به انـدازه β و سـاده سـازی داریم:

$$\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]=\frac{\beta}{2}y_1[n-1]+\frac{\beta}{2}y_2[n-1]+\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$$

بـــا جایگـــذاری، بـــدیهی اســـت کـــه خروجـــی $y_3(t)=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$ زمانیکـــه $x_3[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_{20[n]}$ بعـلاوه $y_1(1)+y_2(1)=y_3(1)=0$. بنـابراین، سیـستم خطـی است.

(ب) فرض کنیم دو ورودی $x_1[n]=0$ برای تمام n ها

و

$$x_2[n]=\begin{cases} 0 & n<-1 \\ 1 & n\geq -1 \end{cases}$$

موجود هستند. از آنجایی که سیستم خطی است، پاسخ $x_1[n]$ که همان $y_1[n]$ اسـت بـرای تمـام n هابرابر صفر است، یعنی $y_1[n]=0$

حال خروجی $y_2[n]$ را زمانی که ورودی $x_2[n]$ می باشد را بدست می آوریم:

چون $y_2[0]=0$

$$\begin{cases} y_2[1]=\left(\frac{1}{2}\right)0+0=0 \\ y_2[2]=\left(\frac{1}{2}\right)0+0=0 \end{cases}$$

بنابراین $\begin{cases} y_2[n]=0 \\ for \quad n\geq 0 \end{cases}$ حال برای $n>0$ توجه کنید که:

$$y_2[0]=\tfrac{1}{2}y_2[-1]+x[0]$$

بنابراین: $y_2[-1]=-2$. با فرآیندی مشابه داریم $y_2[-2]=-4$ و $y_2[-2]=-4$ و $y_2[-3]=-8$ و به همین ترتیب $y_2=-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$.

حال توجه کنید که چون نبرای $n<0$ $x_1[n]=y_2[n]$. بهر طریف، نتایج بدست آمده از بالا نشان می دهد که این درست نیست.

بنابراین، سیستم کازال نیست.

۲,۳۷) سیستمی با رابطه ورودی ـ خروجی مطابق معادله تفاضلی (م ۲-۳۳-۱) در نظر بگیرید، فرض کنید سیستم نهایتاً ساکن است [یعنی اگر در $t>t_0$، $x(t)=0$؛ آنگاه در $t>t_0$، $y(t)=0$]. نشان دهید که این سیستم علّی نیست. [راهنمایی: دو سیگنال ورودی در نظر بگیرید، $x_1(t)=0$ با خروجی $y_1(t)$ و $x_2(t)=e^t[u(t)-u(t-1)]$ با خروجی $y_2(t)$. نشان دهید که در $t<0$، $y_1(t)\neq y_2(t)$.]

حل:

فرض کنیم دو ورودی

$$x_1(t)=0$$

و

$$x_2(t)=e^t\left(u(t)-u(t-1)\right)$$

موجود باشند.

چون سیستم خطی است، پاسخ $y_1(t)=0 \quad -\infty<n<\infty$ خواهد بود.

حال $y_2(t)$ را زمانی که $x_1(t)$ ورودی سیستم باشد را، بدست می آوریم. جواب خصوصی به صورت زیر می باشد:

$$y_p(t)=Ye^t \quad 0<t<1$$

با جایگذاری در معادله (م۲,۸۳,۱) داریم:

$$3Y=1$$

حال جواب عمومی معادله را نیز داریم $y_h(t)=Ae^{-2t}$، جواب کلی معادله به صورت زیر می باشد.

$$y_2(t)=e^{-2t}+\tfrac{1}{3}e^{t}\qquad 0<t<1$$

با فرض شرایط نهایی داریم: $y(1)=0$، بااستفاده از این بدست می آوریم: $A=-e^{3}/3$. بنابراین:

$$y_2(t)=-\tfrac{1}{30}e^{-2t+3}+\tfrac{1}{3}e^{t}\qquad 0<t<1\qquad (\text{ح}\,2{,}37{,}1)$$

برای $t<0$ بایستی توجه کنید که $x_2(t)=0$. بنابراین، جـواب خـصوصی در ایـن بـازه برابـر صـفر خواهد بود.

$$y_2(t)=Be^{-2t}\qquad t>0\qquad (\text{ح}\,2{,}37{,}2)$$

چون دو قسمت از جواب برای $y_2(t)$ در معـادلات (ح۱-۲,۳۷) و (ح۲-۳۷-۲) در $t=0$ برقرارنـد. می توانیم B برقرارند. می توانیم B را از معادله بدست آوریم.

$$\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}e^{3}=B$$

که در نتیجه

$$y_2(t)=\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}e^{3}\right)e^{-2t}\qquad t<0$$

حال توجه کنید که چون برای $t<0$ $x_1(t)=x_2(t)$، باید این درست باشد که برای یـک سـیتم کازال $y_1(t)=y_2(t)$ $(for\ \ t<0)$، اما نتایج بدست آمده از معـادلات فـوق صـحت ایـن موضـوع راتعیین نمی کند یعنی سیستم کازال نیست.

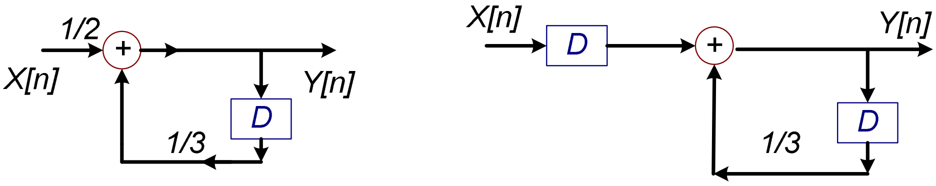
۲,۳۸) نمایش جعبه ای سیستمهای LTI علّی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را رسم کنید:

الف) $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+\frac{1}{2}x[n]$

ب) $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+x[n-1]$

حل:

بلوک دیاگرام در شکل ح۲,۳۸ نشان داده شده است.



شکل ح۲٫۳۸

۲٫۳۹) نمایش جعبه ای سیستمهای LTI علّی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را رسم کنید:

الف) $y(t)=-\frac{1}{2}dy(t)/dt+4x(t)$

ب) $dy(dt)+3y(t)=x(t)$

حل:

بلوک دیاگرام در شکل ح۲٫۳۹ نشان داده شده است.

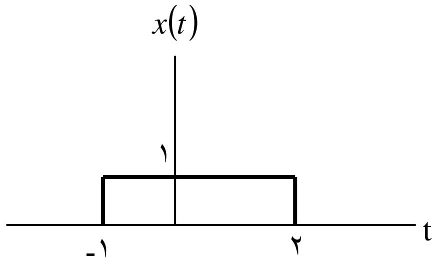
شکل ح۲٫۳۹

۲٫۴۰) ورودی و خروجی یک سیستم LTI با رابطه زیر هم مرتبط شده اند

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

پاسخ ضربه $h(t)$ این سیستم چیست؟

(ب) پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ نشان داده شده در شکل م ۲-۴۰ را بیابید.



شکل م ۲٫۴۰

حل:

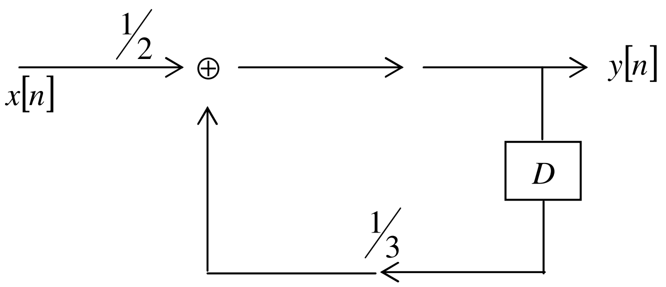
(الف) توجه کنید که:

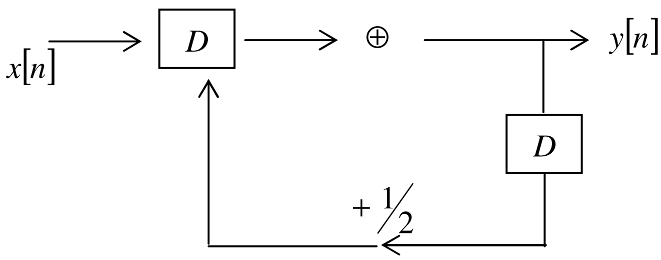
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau=\int_{-\infty}^{t-\tau}e^{-(t-z-\tau')}x(\tau')d\tau'$$

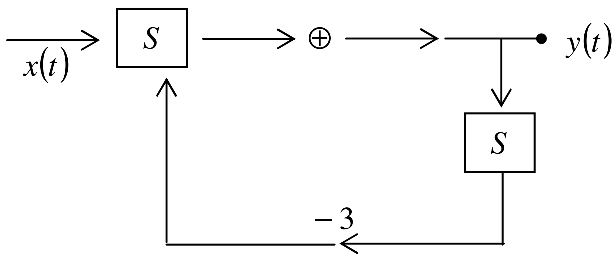
بنابراین:

$$h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

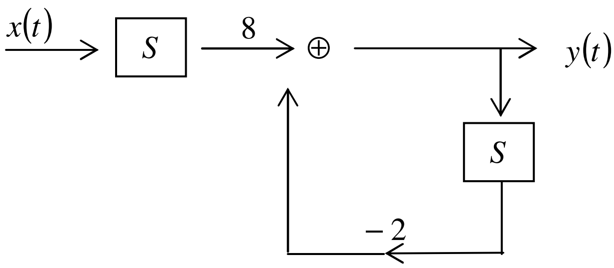
شکل ح۲,۳۸







شکل ح۲ ,۳۰



شکل ح ۲,۳۰

(ب) داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\tau-2)}[u(t-\tau+1)-u(t-\tau-2)]d\tau$$

$h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ در شکل زیر نشان داده شده است.

با استفاده از شکل می تون نوشت:

$$y(t)=\begin{cases} \circ \int_{2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=1-e^{-(t-1)} & t>1 \\ & 1<t<4 \\ \int_{t-2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=e^{-(t-4)}\left[1-e^{-3}\right] & t>4 \end{cases}$$

۲,۴۱ سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x[n]=a^{n}u[n]$$

الف) سیگنال $g[n]=x[n]-a\,x[n-1]$ را رسم کنید.

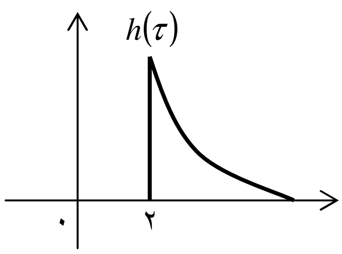
ب) با توجه به نتیجه بند (الف) و خواص کانولوشن $h[n]$ را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

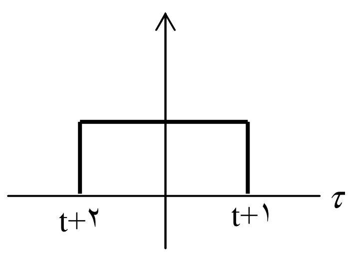
$$x[n]*h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\{u[n+2]\}-u[n-2]$$

حل:

(الف) می توان نوشت:

$$g[n]=x[mn]-\alpha x[n-1]$$
$$=a^{n}u[n]-a^{n}u[n=1]=\delta[n]$$





شکل ح ۲,٤۰

(ب) توجه کنید که $g[n]=x[n]*\{x[n]-\alpha\delta[n-1]\}$. بنابرای از قسمت (α) می دانـیم که $x[n]*\{\delta[n]-\alpha\delta[n-1]\}=\delta[n]$ با استفاده از ان می توان نوشت:

$$x[n]*\{\delta[n-1]-\alpha\delta[n-2]\}=\delta[n-1]$$
$$x[n]*\{\delta[n+1]-\alpha\delta[n]\}=\delta[n+1]$$
$$x[n]*\{\delta[n+2]-\alpha\delta[n+1]\}=\delta[n+2]$$

حال توجه کنید که:

$$x[n]*h[n]=4\delta[n+2]+2\delta[n+1]+\delta[n]+\tfrac{1}{2}\delta[n-1]$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}x[n]*h[n]&=4x[n]*\{\delta[n+2]-\alpha\delta[n+1]\}\\&+2x[n]*\{\delta[n+1]-\alpha\delta[n]\}\\&+x[n]*\{\delta[n]-\alpha\delta[n-1]\}\\&+\left(\tfrac{1}{2}\right)x[n]*\delta\{n-1\}-\alpha\delta[n-2]\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}h[n]&=4\delta[n+2]+(2+4\alpha)\delta[n+1]+(1+2\alpha)\delta[n]\\&+\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)\delta[n-1]-\tfrac{1}{2}\quad\delta[n-2]\end{aligned}$$

۲,٤۲) دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t)=u(t+0/5)-u(t-0/5)$$
$$h(t)=e^{j\omega_\circ t}$$

الف) $\omega_\circ$ را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$y(t)=\circ$$
$$y(t)=x(t)*h(t)$$

ب) آیا جواب یکتاست؟

حل:

داریم:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{0.5}^{+0.5} e^{j\omega_\circ}(t-\tau)d\tau$$

$$y(\circ)=\int_{-0.5}^{0.5} e^{-j\omega_\circ\tau}dz=\frac{2}{\omega_\circ}\sin(\omega_\circ/2)$$

(الف) اگر $\omega_\circ=2\pi$ در اینصورت $y(\circ)=\circ$.

(ب) واضح است، جواب ما به قسمت (الف) منحصر بـه فـرد نیـست. هـر $\omega_\circ=2k\pi$ $K\in T$ و $K\neq\circ$ کافی خواهد بود.

۲,٤۳) یکی از خواص مهم کانولوشن در هر دو حالت پیوسته و گسـسته در زمـان، خاصـیت شـرکت پذیری است. در این مسئله این خاصیت را مورد بررسی قرار می دهیم.

الف) تساوی زیر را ثابت کنید.

$$[x(t)]*h(t)*g(t)=x(t)*[h(t)*g(t)] \qquad \text{(م ۲-٤۳-۱)}$$

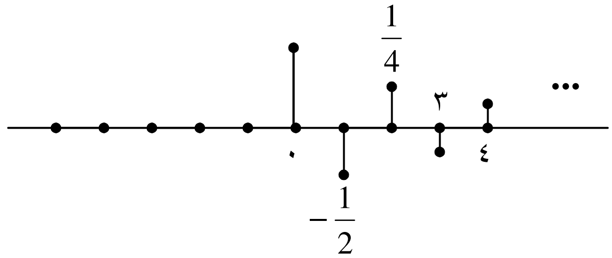
به ین منظور نشان دهید ه هر دو طرف معادله (م ۲-٤۳-۱) به صورت زیر در می آیند.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma$$

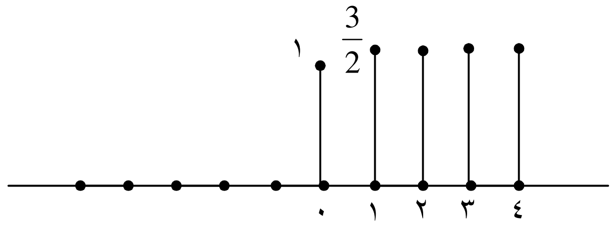
ب) در شکل م ۲-٤۳ (الف) دو سیستم LTI با پاسخ ضربه های h_1 و h_2 نشان داده شده اند. ایـن دو سیسیتم را مطابق شکل م ۲-٤۳ (ب) سری می کنیم. فرض کنید $x[n]=u[n]$.

(i) ابتدا با محاسبه $w[n]=x[n]*h_1[n]$ و سـپس محاسـبه $y[n]=w[n]*h_2[n]$، $y[n]$ را یعنـی حاصل $y[n]=\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]$ را محاسبه کنید.

(ii) ابتدا کانولوشن $g[n]=h_2[n]*h_1[n]$ را حساب کنید.



$$h_2[n]=u[n]+\frac{1}{2}u[n-1]$$



(الف)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \xrightarrow{w[n]} \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

شکل م ۲-۳٤

جوابهای دو بند (i) و (ii) باید برابر باشند، که خاصیت شرکت پذیری کانولوشن را در حالت گسسته در زمان نشان می دهد

ج) ترکیب متوالی دو سیستم LTI شکل م ۲-٤۳ (ب) را در نظر بگیرید، که در این حالت

$$h_1[n]=\sin 8n$$

,

$$h_2[n]=a^n u[n] \quad , \quad |a|<1$$

ورودی عبارت است

$$x[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$$

خروجی $y[n]$ را پیدا کنید. (راهنمایی: جابجایی و شرکت پذیری کانولوشن حل این مسئله را بسیار ساده می کند).

حل:

الف) ابتدا داریم:

$$[x(t)*h(t)]*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(\sigma^2-\tau)g(t-\sigma')d\tau\, d\sigma'$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(\sigma)g(t-\sigma-\tau)d\tau d\sigma$$

و نیز:

$$x(t)*[h(t)*g(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\sigma^2)h(\tau)g(\sigma'-\tau)d\sigma' d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\sigma)h(\tau)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\underline{\tau})h(\sigma)g(t-\sigma-\tau)d\tau d\sigma$$

این تساوی اثبات شد.

(ب) (i) ابتدا داریم:

$$\omega[n]=u[n]*h_1[n]=\sum_{n=\circ}^{n}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{2}{3}\left[1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

حال

$$y[n]=\omega[n]*h_2[n]=(n+1)u[n]$$

ii) ابتدا داریم:

$$g[n]=h_1[n]*h_2[n]$$
$$=\sum_{k=\circ}^{n}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k+\tfrac{1}{2}\sum_{k=\circ}^{n-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k=u[n]$$

حال:

$$y[n]=u[n]*g[n]=u[n]*u[n]=(n+1)u[n]$$

نتیجه یکسانی برای هر دو قسمت (i) و (ii) بدست آمده.

(ج) توجه کنید که:

$$x[n]*\{h_2[n]*h_1[n]\}=\{x[n]*h_2[n]\}*h_1[n]$$

همچنین توجه کنید که:

$$x[n]*h_2[n]=a^n u[n]-a^n u[n-1]=\delta[n]$$

بنابراین:

$$x[n]*h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]*\sin 8n=\sin 8n$$

۲,٤٤) الف) اگر

$$x(t)=\circ\ ,\quad |t|>T_1$$
$$,$$
$$h(t)=\circ\ ,\quad |t|>T_2$$

آنگاه می توان عدد مثبت T_3 را به نحوی یافت که به ازای آن

$$x(t)*h(t)=0, \qquad |t|>T_3$$

T_3 را برحسب T_1 و T_2 به دست آورید.

ب) ورودی یک سیستم گسسته در زمان LTI $x[n]$، پاسخ ضربه آن $h[n]$، و خروجی آن $y[n]$ است. اگر بدانیم $h[n]$ در خارج فاصله $N_0 \le n \le N_1$, $x[n]$ در خارج فاصله $N_2 \le n \le N_3$ صفرند، خروجی $y[n]$ در خارج فاصله $N_4 \le n \le N_5$ صفرند.

(ii) اگر طول فواصل $N_0 \le n \le N_1$، $N_2 \le n \le N_3$، و $N_4 \le n \le N_5$ را به ترتیب M_h، M_x، و M_y بنامیم، M_y و M_x بیابید.

ج) یک سیستم LTI گسسته در زمان با این مشخصه در نظر بگیرید: اگر به ازای $n \ge 10$، $x[n]=0$، آنگاه خروجی به ازای $n \ge 15$ صفرست. برای درستی این گزاره پاسخ ضربه سیستم باید چه شرطی داشته باشد؟

د) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه شکل م ۲-٤٤ در نظر بگیرید. برای تعیین $y(0)$ دانستن $y[n]$ در فاصله ای لازم است؟

حل:

داریم:

$$x(t)T_2*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{T_1}^{T_2}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

توجه کنید که برای $h(-\tau)=0$، بنابراین برای $\tau>t+T_2$ و $\tau<-T_2+t$ $h(t-\tau)=0$

بنابراین: انتگرال فوق برابر صفر خواهد بود همچنین اگر $T_1<-T_2+\tau$ یا $T_2+t<-T_1$ که بیان می دارد اگر $t>|T_1+T_2|$ انتگرال کانولوشن صفر است.

(ب) (i) داریم: $y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{K=N_0}^{N_1}h[k]x[n-k]$

توجه کنید که برای $N_3 \le x \le -N_2$ $x[-k]\neq 0$. بنابراین برای $-N_3+n \le k \le -N_2+n$ $x[-k+n]\neq 0$. واضح است. سری کانولوشن اگر $-N_3+n \le N_1$ و $-N_2+n \ge N_0$ صفر

نیست. بنابراین $y[n]$ برای $n \le N_1 + N_3$ صـفر نیـست. بنـابراین $y[n]$ بـرای $n \le N_1 + N_3$ و $n \ge N_\circ + N_2$ صفر نیست.

ii) به راحتی می توان نشان داد که $My = M_h + M_x - 1$

(ج) برای $n > 5$، $h[n] = \circ$

(د) از شکل مشخص است که:

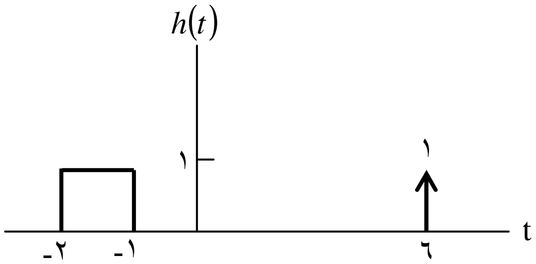
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-2}^{-1} x(t-\tau)d\tau + x(t-6)$$

بنابراین:

$$y(\circ) = \int_{-2}^{-1} x(\tau)d\tau + x(-6)$$

که بیان می کند که $x(t)$ باید در بازه $1 \le t \le 2$ و برای $t = -6$ معین باشد.

۲٫٤٥) نشان دهید که اگر $y(t)$ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ باشد، آنگاه پاسخ سیستم به



شکل ۲٫٤٤

ورودی

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

برابر $y'(t)$ است. درستی این مطلب را به سه شکل نشان دهید:

(i) با استفاده مستقیم از خواص خطی بودن، تغییرناپذیری با زمان و این که

$$x'(t) = \lim_{n\to\circ} \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{u_1(t)} \longrightarrow y(t)$$

شکل م ۲،٤٥

(ii) با مشتق گیری از انتگرال کانولوشن.

(iii) با بررسی سیستم شکل م ۲–٤٥.

(ب) صحت روابط زیر را نشان دهید.

i) $\left(y'(t) = x(t) * h'(t)\right)$

ii) $\left(y'(t) = \left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\right) * h'(t) = \int_{-\infty}^{t} [x'(\tau) * h(\tau) d\tau] = x'(t) * \left(\int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau\right)\right.$

[راهنمایی: به کمک نمودار جعبه ای بند (iii) بخش (الف) و توجه به این که $u_1(t) * u_{-1}(t) = \delta(t)$، می توان به آسانی مسئله را حل کرد.]

د) $s(t)$ پاسخ پله واحد یک سیستم LTI پیوسته در زمان است. با استفاده از بند (ب) نشاندهید که پاسخ $y(t)$ به ورودی $x(t)$ عبارت است از

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) u(t-\tau) d\tau \qquad \text{(م ۲–٤٥–۱)}$$

هـ) با استفاده از معادله (م ۲–٤٥–۲) پاسخ سیستم LTI دارای پاسخ ضربه زیر

$$s(t) = \left(e^{-3t} - 2e^{-2t} + 1\right) u(t)$$

به ورودی $x(t) = e^t u(t)$ را بیابید.

و) $s[n]$ پاسخ پله یک سیستم گسسته در زمان LTI است. همتای گسسته در زمان معادله های (م ۲–٤٥–۲) را بیابید.

حل:

داریم:

$$\frac{x(t) - x(t-h)}{h} \xrightarrow{\ell TI} \frac{y(t) - y(t-h)}{h}$$

با سوق دادن $h \to 0$ در هر طرف معادله فوق داریم:

$$x'(t) \xrightarrow{\ell TI} y'(t)$$

ii) با گرفتن دیفرانسیل از انتگرال کانولوشن داریم:

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}[x(t-\tau)]h(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x'(t-\tau)h(\tau)d\tau=x^{1}(t)*h(t)$$

$$\xrightarrow{x(t)}\boxed{h(t)}\xrightarrow[y(t)]{}\boxed{u_1(t)}\xrightarrow{p(t)=y'(t)}$$

شکل ح۲,٤٥

iii) فرض کنیم نام خروجی سیستم با پاسخ ضربه $u_1(t)$، $\omega(t)$ باشد. در این صورت

$$z(t)=x'(t)*h(t),\ \omega(t)=x(t)*u_1(t)=x'(t)$$

چون هر دو سیستم در زنجیر (cascade) ℓTI هستند. می توانیم جای آنها را مانند آنچه در شکل S۲,٤٥ نشان داده شده است عوض کرد.

در این صورت $y(t)=x(t)*h(t)$, $p(t)=y'(t)$ چون $z(t)$ و $p(t)$ با ید برابر باشند می توانیم نتیجه بگیریم که

$$x'(t)*h(t)=y'(t)$$

ii) فرض کنید:

$$y(t)=[x(t)*u(t)]*h'(t)$$
$$=x(t)[u(t)*u_1(t)]*h(t)$$
$$=x(t)*h(t)$$

این نشان می دهد که $[x(t)*u(t)]h'(t)$ که معادل است با $x(t)*h(t)$. حال مطلب مشابهی را به صورت زیر می توان نوشت:

$$y(t)=[x(t)*u(t)]*h'(t)$$
$$=[[x(t)*u_1(t)]*h(t)]*u(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{t}x^{1}(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=x^{1}(t)*[h(t)*u(t)]$$
$$=x^{1}(t)*\int_{\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

ج) توجه کنید $\delta(t)-5e^{-5t}u(t)=x^1(t)$. بنابراین، خروجی سیستم ℓTI $x^1(t)$ برابر خواهد بود با $h(t)-5\sin(\omega_\circ t)$ چون این بایستی با $y'(t)=\omega_\circ t$ معادل باشد مجبوریم:

$$h(t)=\omega_\circ\cos(\omega_\circ t)+5\sin\omega_\circ t$$

د) داریم:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)*[u_1(t)*u(t)]*h(t) \\ &= [x(t)*u_1(t)]*[u(t)*h(t)] \\ &= x^1(t)*S(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau)\dot{s}(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

(ii

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t)*S(t) \\ &= [x[t]*u_1(t)]*u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^1(\tau)u(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

هـ) در این مورد:

$$x^1(t)=e^t u(t)+\delta(t)$$

بنابراین:

$$y(t)=S(t)+e^t u(t)*S(t)$$

که می تواند به صورت

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[e^{-3t}-2e^{-2t}+1\right]u(t) \\ &+ \tfrac{1}{4}\left[e^t-e^{-3t}\right] \\ &- \left(\frac{2}{3}\left(e^t-e^{-2t}\right)-e^t-1\right)u(t) \end{aligned}$$

ح) با استفاده از این حقیقت که $\delta[n]=u[n]*[\delta[n]-\delta[n-1]]$ داریم:

$$y[n]=[x[n]-x[n-1]]*s[n]=\sum[x[k]-x[k-1]]s[n-k]$$

و

$$\dot{x}[n]=[x[n]-x[n-1]]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[x[k]-x[k-1]u[k-k]]$$

۲,٤٦) S یک سیتم LTI است، سیگنال $x(t)=e^{-3t}u(t-1)$ را در نظر بگیرید. اگر

$$x(t)\rightarrow y(t)$$

,

$$\frac{dx(t)}{dt}\rightarrow -3y(t)+e^{-2t}u(t)$$

پاسخ ضربه $h(t)$ سیستم S را بیابید.

حل:

توجه کنید که

$$\frac{dx(t)}{dt}=-6e^{-3t}u(t-1)+2\delta(t-1)=-3x(t)+2\delta(t-1)$$

که می دهد:

$$x(t)=2e^{-3t}u(t-1)\rightarrow y(t)$$

می دانیم که: $\frac{dx(t)}{dt}=-3x(t)+2\delta(t-1)$ بایـد در خروجـی $-3y(t)+2h(t-1)$ را بدهـد.

ازاطلاعات داده شده می توانیم نتیجه بگیریم که

$.2h(t-1)=e^{-2t}u(t)$

بنابراین:

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-2(t+1)}u(t+1)$$

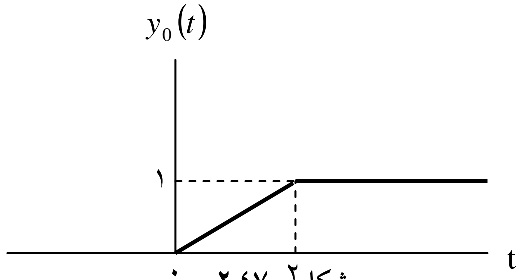
۲,٤٧) یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، با پاسخ ضربه $h_{\circ}(t)$ داده شده است. مـی دانـیم کـه اگـر ورودی $x_{\circ}(t)$ باشـد، خروجـی بـه صـورت $y_{\circ}(t)$ شـکل م ۲-٤٧ اسـت. سـیگنالهای زیـر ورودی سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربه داده شده هستند:

الف) ورودی $x(t)$	پاسخ ضربه $h(t)$
ب) $x(t)=x_{\circ}(t)-x_{\circ}(t-2)$	$h(t)=h_{\circ}(t)$
ج) $x(t)=x_{\circ}(t-2)$	$h(t)=h_{\circ}(t+1)$
د) $x(t)=x_{\circ}(-t)$	$h(t)=h_{\circ}(t)$

هـ) $x(t)=x_{\circ}'(t)$ $\qquad$ $h(t)=h_{\circ}(-t)$

و) $x(t)=x_{\circ}'(t)$ $\qquad$ $h(t)=h_{\circ}'(t)$

[در اینجا $x_{\circ}'(t)$ و $h_{\circ}'(t)$ به ترتیب مشتقهای $x_{\circ}$ و $h_{\circ}(t)$ هستند].



شکل۲م ۲,۴۷

در هر مورد تعیین کنید آیا بـرای یـافتن خروجـی سیـستم دارای پاسـخ ضـربه $h(t)$ بـه ورودی $x(t)$ اطلاعات کافی است یا نه. در صورت وجود اطلاعات کافی، $y(t)$ را رسم و آن را دقیقـاً عددگـذاری کنید.

حل:

(الف) $y(t)=2y_{\circ}(t)$

(ب) $y(t)=y_{\circ}(t)-y_{\circ}(t-2)$

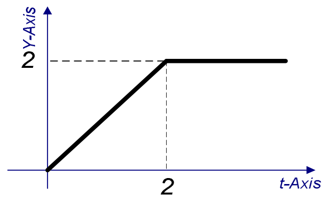
(ج) $y(t)=y_{\circ}(t-1)$

(د) اطلاعات کافی نیست.

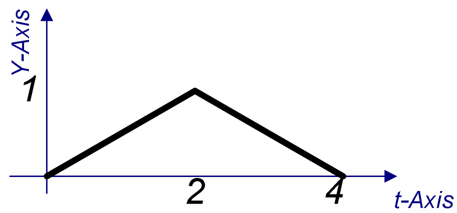
(هـ) $y(t)=y_{\circ}(-t)$

(و) $y(t)=y_{\circ}''(t)$

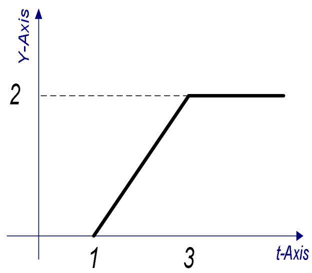
سیگنالها برای قسمت های مختلف مسئله در شکل ح۲,۱۷ ترسیم شده اند.



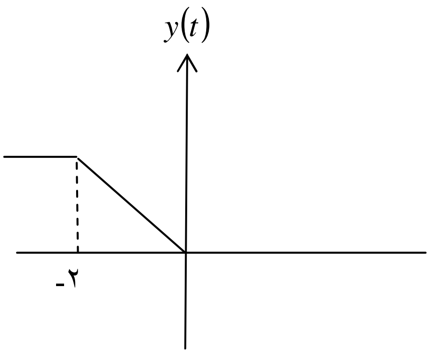
(الف)



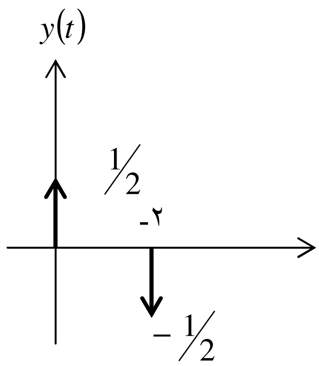
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

۲٫۴۸) گزاره های زیر در مورد سیستهای LTI درست است یا نادرست؟ دلیل بیاورید.

الف) سیستم وارون یک سیستم LTI، متناوب و غیر صفر باشد، سیستم ناپایدار است.

ب) سیستم وارون یک سیستم LTI علّی همیشه علّی است.

(ج) ار به ازای هر مقدار n داشته باشیم $|h[n]| \le k$، که K یک عدد معین اســت، سیــستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n]$ پایدار است.

د) اگر طول پاسخ ضربه سیستم LTI گسسته در زمان محدود باشد، سیستم پایدارست.

هـ) اگر یک سیستم LTI علّی باشد، آنگاه پایدارست.

و) ترکیب متوالی یک سیستم LTI غیر علّی و یک سیستم علّی لزوماً غیر علّی است.

ز) یک سیستم LTI پیوسته در زمان پایدارست، اگر و تنها اگر پاسخ پلـه آن $s(t)$ مطلقـاً انتگرالپـذیر باشد، یعنی داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

ح) یک سیستم LTI گسسته در زمان علّی است، اگر و تنهـا اگـر پاسـخ پلـه آن $s[n]$ بـه ازای $n < 0$ صفر باشد.

حل:

(الف) درست: اگر $h(t)$ پریودیک وغیرصفر باشد، در این صورت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \infty$$

بنابراین $h(t)$ ناپایدار است.

(ب) نادرست، برای مثال معکوس $h[n] = \delta[n-k]$ برابر است با $g[n] = \delta[n+k]$ که غیر کازال است.

(ج) نادرست؛ برای مثال $h[n] = u[n]$ که بیان می دارد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| = \infty$$

که سیستم ناپایدار است.

(د) درست؛ با فرض اینکه $h[n]$ در بازه $n_1 \le n \le n_2$ محدود و غیر صفر باشد. در این صورت

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} |h[k]| < \infty$$

که بیان می کند، سیستم پایدار است.

(هـ) نادرست. برای مثال $h(t) = e^t u(t)$ پایدار نیست اما کازال است.

(و) نادرست، برای مثال اتصال زنجیری سیستم های کازال با پاسخ ضربه $h_1[n] = \delta[n-1]$ و سیستم غیر کازال با پاسخ ضربه $h_2[n] = \delta[n+1]$ منجر به یک سیستم کلی با پاسخ ضربه

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \delta[n].$$

(ذ) نادرست، برای مثال اگر $h(t) = e^{-t}u(t)$ باشد در این صورت $S(t) = (1-e^{-t})u(t)$. $\int_{\circ}^{\infty}|1-e^{-t}|dt = t_t e^{-t}\Big|_{\circ}^{\infty} = \infty$. اگر چه سیستم پایدار است اما پاسخ پله انتگرال پذیر نیست

(خ) درست. می توان نوشت: $u[n] = \sum_{k=\circ}^{\infty}\delta[n-k]$. بنابراین $S[n] = \sum_{k=\circ}^{\infty}h[n-k]$.

اگر در بازه $n<\circ$، $s[n]=\circ$ در اینصورت در $n<\circ$، $h[n]=\circ$ و سیستم کازال است.

۲,٤۹) در درس نشان دادیم که اگر $h[n]$ مطلقاً جمع پذیر باشد، یعنی

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[n]| < \infty$$

آنگاه سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n]$ پایدارست. پس مطلقاً جمع پذیر بودن شرط کافی پایداری است. در این مسئله نشان می دهیم که این شرط لازم نیز هست. یک سیستم LTI در نظر بگیرید که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع پذیر نباشد، یعنی

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[n]| = \infty$$

الف) فرض کنید سیگنال ورودی این سیستم به صورت زیرست

$$x[n] = \begin{cases} \circ & ,\ h[-n] = \circ \quad \text{به ازای} \\ \dfrac{h[-n]}{|h[-n]|} & ,\ h[-n] \neq \circ \quad \text{به ازای} \end{cases}$$

آیا این سیگنال ورودی کراندارست؟ اگر آری، کوچکترین مقدار B را که شرایط زیر را ارضا می کنـد، بیابید

به ازای تمام مقادیر n، $|x[n]| \le B$

ب) به ازای این ورودی، خروجی را در $n = \circ$ حساب کنید. آیا این نتیجـه، لازم بـودن شـرط مطلقـاً جمع پذیری برای پایداری سیستم را اثبات می کند؟

ج) به روشی مشابه نشان دهید که شرط لازم و کافی برای پایداری سیستمهای LTI پیوسـته در زمـان در زمان این است که پاسخ ضربه آنها مطلقا ً انتگرالپذیر باشد.

حل:

(الف) ورودی محدود است $|x[n]| \le 1 = B_x$ در $-\infty < n < \infty$.

(ب) فرض کنید:

$$y[\circ] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k]h[k]$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{h^2[k]}{|h[k]|} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]| \to \infty$$

بنابراین خروجی محدود نیست و سیستم ناپایدار است.

(پ) فرض کنید

$$x(t) = \begin{cases} \circ & h(-t) = \circ \quad \text{اگر} \\ \dfrac{h(-t)}{|h(-t)|} & h(-t) \ne \circ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

حال برای ترم t $|x(t) \le 1|$. بنابراین $x(t)$ ورودی محدود است به جای

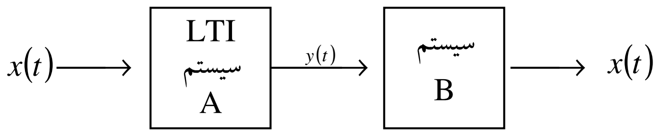
$$y(\circ) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(x(-\tau)h(\tau)d\tau)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h^2(\tau)}{|h(\tau)|} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$$

بنابراین اگر پاسخ ضربه به طور معین انتگرال پذیر نباشد سیستم ناپایدار خواهد بود.

۲٫۵۰) ترکیب سری شکل م ۲–۵۰ را در نظر بگیرید. سیستم A یک سیستم LTI، و سیستم B وارون سیستم A است. $y_1(t)$ پاسخ به سیستم A به $x_1(t)$ و $y_2(t)$ پاسخ سیستم A به $x_2(t)$ است:

الف) پاسخ سیستم B به ورودی $ay_1(t)+by_2(t)$ چیست؟ a و b اعداد ثابت اند.

ب) پاسخ سیستم B به ورودی $y_1(t-\tau)$ چیست؟



شکل م ۲–۵۰

حل:

(الف) خروجی برابر خواهد بود؛ $ax_1(t)+bx_2(t)$.

(ب) خروجی برابر است با: $x_1(t-\tau)$.

(۲٫۵۱) در دس دیدیم که رابطه ورودی ـ خروجی دو سیستم LTI سری به ترتیب اتصال آنها بستگی ندارد. این مطلب، که خاصیت جابجایی نام دارد، به خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان هر دو سیستم وابسته است. در این مسئله این نکته را نشان می دهیم.

الف) دو سیستم گسسته در زمان A و B در نظر بگیرید. سیستم LTIB خطی است، ولی تغییرناپذیر با زمان نیست، ولی سیستم A سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ است. در واقع پاسخ سیستم B به ورودی $w[n]$ به صورت زیرست

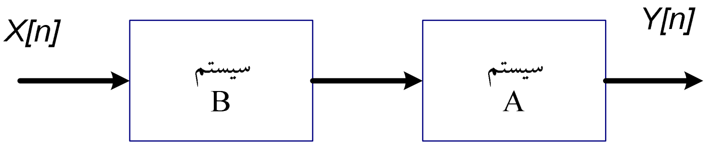
$$z[n]=nw[n]$$

با محاسبه پاسخ هر یک از اتصالهای سری شکلهای م ۲– ۵۱ (الف) و (ب) به ورودی $x[n]=\delta[n]$ نشان دهید که این دو سیستم خاصیت جابجایی ندارند.

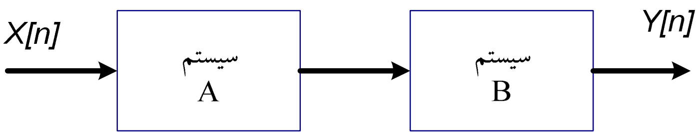
ب) فرض کنید به جای سیستم b دو اتصال شکل م ۲–۵۱ ، سیستمی قرار گرفته که رابطه بین ورودی $w[n]$ و خروجی $z[n]$ آن به صورت زیرست.

$$z[n]=w[n]+2$$

محاسبات قسمت (الف) را برای این حالت تکرار کنید



(الف)



(ب)

حل:

(الف) برای سیستم شکل (الف) ح۲٫۵۱، پاسخ به ضربه واحد برابر است با:

$$y_1[n]=n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

برای سیستم شکل (ب) ح۲٫۵۱ پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y=[n]=\circ$$

واضح است که $y_1[n]\neq y_2[n]$

(ب) برای سیستم شکل (الف) ح۲٫۵۱ پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]+2$$

برای سیستم شکل (ب) ح۲٫۵۱ پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]+4$$

واضح است که

$$y_1[n]\neq y_2[n]$$

۲٫۵۲) یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید،

$$h[n]=(n+1)a^n u[n]$$

که در آن $|a|<1$. نشاندهید پاسخ پله سیستم به صورت زیرست.

$$s[n]=\left[\frac{1}{(a-1)^2}-\frac{a}{(a-1)^2}a^n+\frac{a}{(a-1)}(n+1)a^n\right]u[n]$$

راهنمایی: توجه کنید که

$$\sum_{K=\circ}^{N}(K+1)a^k=\frac{d}{da}\sum_{K=\circ}^{N+1}a^k$$

حل:

داریم:

$$s[n]=h[n]*u[n]$$
$$=\begin{cases}\sum_{k=\circ}^{n}(1+k)a^k & n\ge\circ\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

توجه داشته باشید که:

$$\sum(k+1)a^k=\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=\circ}^{n+1}a^k=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1-\alpha^{n+2}}{1-\alpha}\right]$$

داریم:

$$s[n]=\left[\frac{1-(n+2)\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\alpha+\frac{1-\alpha^{n+2}}{(1-\alpha^2)}\right]u[n]$$
$$=\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\alpha^n+\frac{\alpha}{1-\alpha}(n+1)\alpha^n\right]u[n]$$

۲,۵۳) الف) معادله دیفرانسیل همگن زیر رادر نظر بگیرید

$$\sum_{K=\circ}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{d\,t^k}=\circ \qquad \text{(م ۲-۵۳-۱)}$$

نشان دهید اگر $s_\circ$ ریشه معادله زیر باشد

$$p(s)=\sum_{k=\circ}^{N}a_k s^k=\circ \qquad \text{(م ۲-۵۳-۱)}$$

آنگاه $A\,e^{s_\circ t}$ یک جواب معادله (۲-۵۳-۱) است، که در آن A یک ثابت دلخواه مختلط است.

ب) چند جمله ای $p(s)$ معادله (۲-۵۳-۲) را می توان برحسب ریشه است. توجه کنید که

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_r=N$$

در حالت کلی به ازای $\sigma_i>1$، علاوه بر Ae^{s_it}، $A_{ij}t_je^{s_it}$ هم جواب معادله (م ۲-۵۳-۱) است، که j تمام اعداد صحیح بزرگتر از صفر و کوچکتر یا مساوی σ_i-1 را می تواند داشته باشد. برای اثبات این مطلب نشان دهید اگر $\sigma_i=2$، Ate^{s_it} هم یک جواب معادله (م ۲-۵۳-۱) است. [راهنمایی: نشان دهید اگر s یک عدد مختلط دلخواه باشد آنگاه

$$\sum_{k=\circ}^{N}a_k\frac{d^k\left(At\,e^{st}\right)}{dt^k}=A\,p(s)t\,e^{st}+A\frac{d\,p(s)}{ds}e^{st}$$

پس کلی ترین جواب معادله (م ۲-۵۳-۱) به صورت زیرست

$$\sum_{i=1}^{r}\ \sum_{j=\circ}^{\sigma_i-1}A_{ij}t^je^{s_it}$$

که در آن A_{ij} یک ثابت دلخواه مختلط است.

ج) معادلات دیفرانسیل همگن زیر را با شرایط کمکی داده شده حل کنید:

(i) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{d\,y(t)}{dt}+2y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=\circ\ ,\ y'(\circ)=2$

(ii) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{d\,y(t)}{dt}+2\,y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=1\ ,\ y'(\circ)=-1$

(iii) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{d\,y(t)}{dt}+2\,y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=\circ\ ,\ y'(\circ)=\circ$

(iv) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{d\,y(t)}{dt}+y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=1\ ,\ y'(\circ)=1$

(v) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3}+\dfrac{d^2\,y(t)}{dt^2}-\dfrac{dy(t)}{dy}-y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=1\ ,\ y'(\circ)=1\ ,\ y''(\circ)=-2$

(vi) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{d\,y(t)}{dt}+5\,y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=1\ ,\ y'(\circ)=1$

حل:

فرض کنیم

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k s_\circ^k = \circ$$

در اینصورت :

$$\sum_{k=\circ}^{N} \alpha_k \frac{d^k}{dt^k}\left(A e^{s_\circ t}\right)$$
$$= \sum_{k=\circ}^{N} A \alpha_k e^{s_\circ t} s_\circ^k = \circ$$

بنابراین $Ae^{s.t}$ جواب معادله (ح ۲٫۵۳٫۱)

(ب) فرض کنید:

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k}\left(A t e^{st}\right) = \sum_{k=\circ}^{N} A a_k t\, s^k e^{st} + \sum_{k=\circ}^{N} A \alpha_k e^{st} s^{k-1}$$
$$= A t e^{st} \sum_{k=\circ}^{N} a_k s^k + A e^{st} \sum_{k=\circ}^{N} \frac{d}{ds}\left(s^k\right)$$
$$= A t e^{st} \sum_{k=\circ}^{N} a_k s^k + A e^{st} \frac{d}{ds} \sum_{k=\circ}^{N} a_k s^k$$

اگر s، یک جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k s_k^1 = \circ$$

این بیان می دارد که $te^{s_\circ t}$ یک جواب است.

(ج) (i) در اینجا

$$s^2 + 3s + 2 + \circ \Rightarrow s = -2 \,,\, s = -1$$

چون $y_y(\circ) = \circ$ و $y'_y(\circ) = 2$، $A + B = \circ$ و $2A + B = 2$ بنابراین از حل دستگاه

$$\begin{cases} A + B = \circ \\ 2A + B = 2 \end{cases}$$

بنابراین $A = -2$ و $B = 2$

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

(ii) در اینجا

$$s^2 33 + 2 = \circ \Rightarrow y(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

چون $y(\circ)=1$ و $y'(\circ)=-1$ داریم $y(t)=e^{-t}$

(iii) به خاطر شرایط اولیه $y(t)=\circ$

(iv) در اینجا نیز

$$s^L+2s+1=\circ=(s+1)^L$$
$$\Rightarrow \sigma=2\ ,\quad s=-1$$
$$y(t)=Ae^{-t}+Bte^{-t}$$

از آنجا که $y(\circ)=1$ و $y'(\circ)=1$ و $A=1$ و $B=2$

داریم:

$$y(t)=e^{-t}+2te^{-t}$$

(v) اینجا نیز

$$s^3+s^2-s-1=\circ=(s-1)(s+1)^2$$
$$\Rightarrow y(t)=Ae^{t}+B_e^{-t}+cte^{-t}$$

چون $y(\circ)=1$ و $y'(\circ)=1$ و $y^n=-2$ داریم $c=3/2$ و $B=3/4$ و $A=1/2$، بنابراین

$$y(t)=Ae^{-t}e^{2jt}+Be^{-t}e^{-2jt}$$

چون $y(\circ)=1$ و $y'(\circ)=1$ آنگاه

$$A=1/2(1-j)=B^*$$

بنابراین:

$$y\ (t\ )=e^{-t}\left[\cos 2t\ \sin 2t\ \right]$$

(۲,۵٤) الف) معادله معادله تفاضلی همگن زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=\circ}^{N}a_k\,y[n-k]=\circ \qquad \text{(م ۲-۵٤-۱)}$$

نشان دهید اگر $z_\circ$ ریشه معادله زیر باشد.

$$\sum_{k=\circ}^{N}a_k\,z^{-k}=\circ$$

$A\,z_\circ^z$ یک جواب معادله (م ۲-۵٤-۱) است، که در آن A یک ثابت دلخواه است.

ب) کار با چند جمله ایهایی که تنها توانهای غیرمنفی z دارنـد سـاده ترسـت، پـس معادلـه حاصـل از ضرب دو طرف معادله (م ۲-٥٤-۲) در z^N را در نظر می گیریم.

$$p(z)=\sum_{k=\circ}^{N} a_k z^{N-k}=\circ \qquad \text{(م ۲-٥٤-۳)}$$

چند جمله ای $p(z)$ را می توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$p(z)=a_{\circ}(z-z_1)^{\sigma_1}(z-z_2)^{\sigma_2}$$

که در آن $z_1,\dots,s_i$ ریشه های متمایز $p(z)$ هستند.

نشان دهید به ازای $y[n]=n\,z^{n-1}$ داریم

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k y[n-k]=\frac{dp(z)}{dz}z^{n-N}+(n-N)p(z)z^{n-N-1}$$

با استفاده از این مطلب نشان دهید که به ازای $\sigma_i=2$، هم $A\,z_i^n$ و هم $B\,n\,z_i^{n-1}$ جواب معادلـه (م ۲-٥٤-۱) هستند، که در آنها، A و B ثابتهای مختلط دلخواهی اند. در حالت کلی می تـوان بـه همـین ترتیب نشان داد که به ازای $\sigma_i>1$

$$A\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$r=\circ,1,\dots,\sigma_{j-1}$ جواب معادله (م ۲-٥٤-۱) هستند.

ج) معادلات تفاضلی زیر را با شرایط کمکی داده شده حل کنید:

(i) $y[n]+\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=\circ \qquad ; \; y[\circ]=1,\, y[-1]=-6$

(ii) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=\circ \qquad ; \; y[\circ]=1,\, y[-1]=\circ$

(iii) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=\circ \qquad ; \; y[\circ]=1,\, y[10]=21$

(iv) $y[n]-\frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=\circ \qquad ; \; y[\circ]=\circ,\, y[-1]=1$

حل:

(الف) فرض کنیم که:

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k z_{\circ}^{k}=\circ$$

در اینصورت اگر

$$y[n]=Az_{\circ}^{n}$$

$$\sum_{k=\circ}^{N}a_k k[n-k]=\sum_{K=\circ}^{N}a_k\left(Az_{\circ}^{n-1}\right)=Ax_{\circ}^{k}\sum_{K=\circ}^{N}a_k z_{\circ}^{-k}=\circ$$

بنابراین $Az_{\circ}^{n}$، جواب معادله (م۱-۲,۵٤) می باشد.

(ب) اگر $y[n]=n\ z^{n-1}$ در اینصورت:

(ح۱,۵٤,۲)

$$\sum_{K=\circ}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{K=\circ}^{N}a_k(n-k)z^{n-k-1}$$

با گرفتن طرف راست معادله می خواهیم ثابت کینم که

$$P.H.S=z^{n-N}\sum_{k=\circ}^{N}a_k(N-K)z^{n-k-1}+(n-N)\sum_{K=\circ}^{N}a_k$$

(ح۲-۲,۵٤)

$$=\sum_{K=\circ}^{N}a_k(n-k)z^{n-k-1}$$

با مقایسه (ح۱-۲,۵٤) و (ح۲-۲,۵٤) نتیجه می گیریم که معادله های فوق معادلند و اثبات کامل می شود.

(پ) (i) اینجا نیز داریم:

$$1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}=\circ$$

$$\Rightarrow z=-\frac{1}{2},\ z=-\frac{1}{4}$$

بنابراین

$$y[n]=A\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+B\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}$$

چون $y(\circ)=1$ و $y[-1]=-6$ داریم $A=-1$ و $B=-2$ و $y[n]=2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

(ii) اینجا $z^2-2z+1=\circ$

بنابراین:

$$y[n] = A(1)^n + Bn(1)^n = A + Bn$$

چون $y(\circ) = 1$ و $y[1] = \circ$ داریم $A = 1$ و $B = -1$ و $y[n] = 1 - n$

(iii) تنها تفاوت با قسمت قبلی شرایط اصلی است؛ $y(\circ) = 1$ و $y[10] = 21$، داریم:

$$A = 1 \text{ و } B = 2$$

$$y[n] = 1 + 2n$$

(iv) اینجا

(v) $$z = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 \pm j)$$

بنابراین

$$y[n] = A\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + j)\right]^n + B\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - j)\right]^n$$

چون $y(\circ) = \circ$ و $y[-1] = 1$ داریم

$$B = \frac{-j}{2\sqrt{2}} \text{ و } A\frac{j}{2\sqrt{2}}$$

و

$$y[n] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(n\pi/4\right)$$

۲,۵۵) در درس روشی برای حل معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت ارائه کردیم و در مسئله ۲-۳۰ روش دیگری برایاین کار بیان شد. با فرض سکون ابتدائی، سیستم بیان شده با معادلات تفاضلی LTI و علّی است و می توان با یکی از این دو روش پاسخ ضربه $h[n]$ را یافت. در فصل ۵ روش جالبتری برای تعیین $h[n]$ ارائه خواهیم کرد. دراین مسئله نیز رهیافت دیگری معرفی می کنیم که نشان می دهد، می توان $h[n]$ را با حل معادله همگن، تحت شرایط اولیه مناسب، به دست آورد.

الف) سیستم ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \qquad \text{(م ۲-۵۵-۱)}$$

با فرض $x[n] = \delta[n]$، $y[\circ]$ را بیابید؟ $h[n]$ در $n \geq 1$ چه معادله ای و چه شرایط اولیه ای را ارضا می کند؟ با حل این معادله جواب بسته ای برای $h[n]$ به دست آورید.

ب) حال سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرد.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+2x[n-1] \qquad \text{(م ۲–۵۵–۲)}$$

این سیستم در شکل م ۲–۵۵ (الف) به صورت ترکیب سری و سیستم ابتدائاً ساکن نشان داده شده است. با توجه به خواص سیستمهای LTI می توان دو سیستم را جابجا کرد و نمایش متفاوت شکل م ۲–۵۵ (ب) را یافت. حال با توجه به نتیجه بند (الف) را، با پاسخ ضربه $h[n]$، در نظر بگیرید. با نشان دادن این که معادله (م ۲–۵۳–۳) معادله تفاضلی (م ۲–۵۵–۱) را ارضا می کند، ثابت کنید که پاسخ $y[n]$ به ورودی دلخواه $x[n]$ در واقع از جمع کانولوشن زیر به دست می آید.

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[n-m]x[m] \qquad \text{(م ۲–۵۵–۳)}$$

با فرض $a_{\circ}\neq \circ$ و $x[n]=\delta[n]$، $y[\circ]$ را بیابید. با استفاده از این نتیجه، معادله تفاضلی همگن و شرایط اولیه ای را که باید توسط پاسخ ضربه این سیستم ارضا شود بیابید.

حال سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله تفاضلی زیرا را در نظر بگیرید.

$$\sum_{K=\circ}^{n}a_k y[n-k]=\sum_{k=\circ}^{M}b_k x[n-k] \qquad \text{(م ۲–۵۵–۵)}$$

پاسخ ضربه این سیستم را بر حسب پاسخ ضربه سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ۲–۵–٤) بیابید.

$$x[n]\longrightarrow \boxed{z[n]=x[n]+2x[n-1]} \xrightarrow{z[n]} \boxed{y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=z[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n]\longrightarrow \boxed{w[n]-\frac{1}{2}w[n-1]=x[n]} \xrightarrow{w[n]} \boxed{y[n]=w[n]+2w[n-1]} \longrightarrow y[n]$$

هـ) روش دیگری نیز باری تعیین پاسخ سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ۲–۵۵–۵) وجود دارد. معادله (م ۲–۵۵–۵) را با فرض سکون ابتدائی، یعنی $y[-N]=y[-N+1]=\ldots=y[-1]=\circ$، و به ازای ورودی $x[n]=\delta[n]$ به صورت بازگشتی حل کنید و $y[\circ],\ldots,y[M]$ را بیابید. در $n\geq M$، $h[n]$ چه معادله ای را ارضا می کند؟ شرایط کمکی مناسب برای این معادله چیست؟

و) با استفاده از یکی از روشهای بندهای (د) یا (هـ) پاسخ ضربه سیستمهای LTI علّی توصیف شده معادلات تفاضلی زیر را بیابید.

$$\text{(i)}\quad y[n]-y[n-2]=x[n]$$

$$\text{(ii)}\quad y[n]-y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$$

$$\text{(iii)}\quad y[n]-y[n-2]=2x[n]-3x[n-4]$$

$$\text{(iv)}\quad y[n]-\frac{\sqrt{3}}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$$

$$y[n]=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(n\pi/4\right)$$

حل:

(الف) $y[\circ]=x[\circ]=1$ ، $h[n]$ معادله را برآورده می سازد.

$$h[n]=1/2\,h[n-1] \qquad n\geq 1$$

شرایط معین عبارتست از $h[\circ]=1$ با استفاده روش معرفی شده در مسئله قبلی، داریم $z=1/2$، بنابراین $h[n]=A\left(1/2\right)^n$ با استفاده از شرایط معین

$$h[n]=\left(1/2\right)^n u[n]$$

(ب) از شکل (ب) م۲,۵۵، می دانیم که اگر $x[n]=\delta[n]$ آنگاه

$$\omega[n]=h_\circ[n]=\left(1/2\right)^n u[n]$$

که بیان می کند:

$$y[n]=h[n]=\left(1/2\right)^n u[n]+2\left(1/2\right)^{n-1}u[n-1]$$

(ج) جایگذاری معادله (م۲,۵۵,۳) در معادله (م۲,۵۵,۱) داریم.

$$\sum_m h[n-m]x[m]-1/2\sum_m h[n-m-1]x[m]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{n}\left(1/2\right)^{n-m}x[m]-\sum_{m=-\infty}^{n-1}\left(1/2\right)^{n-m}x[m]$$

$$=\left(1/2\right)^{n-m}x[n]=x[n]=x[n]$$

که نشانگر اینست که معادله (م۲٫۵۵٫۳)، معادله (م۲٫۵۵٫۱) را برآورده می سازد.

(د) (i) داده شده که $a_\circ \neq \circ$ و سیستم از شرایط تبعیت می کند. داریم:

$$a_\circ y[\circ] = 1 \Rightarrow y[\circ] = \frac{1}{a_\circ}$$

معادله ی همگن بصورت زیر است

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k h[n-k] = \circ$$

با شرایط اولیه:

$$h[\circ] = \frac{1}{a_\circ} \ , \ h[-1] = \ldots = h[-N+1] = \circ$$

ii) داریم:

$$h[N] = \sum_{K=\circ}^{N} b_k h_1[n-k] = \circ$$

که $h_1[n]$ به صورت فوق است.

(هـ) برای $n > M$

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k h[n-k] = \circ$$

با

$$h[\circ] = y[\circ], \ldots, h[M] = y[M]$$

(و) (i) داریم:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{زوج}\ , n \geq \circ \\ \circ & \text{فرد}\ \ n < \circ \end{cases}$$

(ii) داریم:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n \geq \circ, \text{زوج}\ n \\ 2 & n > \circ, \text{فرد}\ \ n \\ \circ & n < \circ \end{cases}$$

(iii)

$$h[n]=\begin{cases}2 & n=\circ,2\\ -1 & n\geq 4,\ \text{زوج}\ n\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

(iv) داریم

$$h[n]=\tfrac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{6}+\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{6}\right]$$

۲٫٥٦) دراین مسئله همتای پیوسته در زمان تکنیک پی ریزی شده در مسئله ۲-٥٥ در نظر می گیریم. باز هم می بینیم که مسئله یافتن پاسخ ضربه $h(t)$ یک سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \qquad \text{(م ۲-٥٦-۱)}$$

فرض کنید $x(t)=\delta(t)$. برای تعیین مقدار $y(t)$ درست بعد از اعمال ضربه واحد، از معادله (م ۲-٥٦-۱) از $t=\circ^-$ تا $t=\circ^+$ (یعنی «درست قبل از اعمال ضربه» تا «درست بعد از» آن) انتگرال می گیریم. با این کار به دست می آوریم.

$$y(\circ^+)-y(\circ^-)+2\int_{\circ^-}^{\circ^+}y(\tau)d\tau=\int_{\circ^-}^{\circ^+}\delta(\tau)d\tau=1 \qquad \text{(م ۲-٥٦-۲)}$$

چون سیستم ابتدائاً ساکن، و در $t<\circ$، $x(t)=\circ$ پس $y(\circ^-)=\circ$. برای ارضای معادله (م ۲-٥٦-۲) باید داشته باشیم $y(\circ^+)=1$. چون در $t>\circ$ داریم $x(t)=\circ$ پاسخ ضربه سیستم برابر پاسخ معادله دیفرانسیل همگن زیر

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\circ$$

و شرط اولیه زیرست

$$y(\circ^+)=1$$

با حل این معادله دیفرانسیل $h(t)$، پاسخ ضربه سیستم را به دست آورید. برای امتحان جواب خود نشان دهید که

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

به ازای هر ورودی $x(t)$ دلخواهی معادله (م ۲-٥٦-۱) را ارضا می کند.

ب) برای تعمیم این بحث، سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = x(t) \qquad \text{(م ٢-٥٦-٣)}$$

و فرض کنید $x(t)=\delta(t)$. چون در $t<0$، $x(t)=0$، شرط سکون ابتدایی اقتضا می کند که داشته باشیم

$$y(0^-) = \frac{dy}{dt}(0^-) = \ldots = \frac{d^{N-1}y}{d t^{N-1}}(0^-) = 0 \qquad \text{(م ٢-٥٦-٤)}$$

از دو طرف معادله (م ٢٥٦-٣) یک بار، از $t=0^-$ تا $t=0^+$ انتگرال بگیرید، سپس به کمک معادله (م ٢-٥٦-٥) و استدلالی شبیه استدلال بند (الف٩ نشان دهید معادله حاصل با شرایط زیر ارضا می وشد

$$y(0^+) = \frac{dy}{dt}(0^+) = \ldots = \frac{d^{N-2}y}{d t^{N-2}}(0^+) = 0 \qquad \text{(م ٢-٥٦-٥ الف)}$$

و

$$\frac{d^{N-1}y}{d t^{N-1}}(0^+) = \frac{1}{a_N} \qquad \text{(م ٢-٥٦-٥ ب)}$$

در نتیجه پاسخ ضربه سیستم در $t>0$ را می توان با حل معادله دیفرانسیل همگن زیر، و شرایط اولیه بیان شده در معادله های (م ٢-٥٦-٥) به دست آورد.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = 0$$

شکل م ٢-٥٦

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\sum_{dt^k}^{d^k w(t)} a_k \frac{d^k w(t)}{dt^k} = x(t)} \xrightarrow{w(t)} \boxed{y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k w(t)}{dt^k} = y(t)}$$

ج) حال سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d\, t^k} = \sum_{k=0}^{M} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d\, t^k} \qquad \text{(م ٢-٥٦-٦)}$$

پاسخ ضربه این سیستم را بر حسب پاسخ ضربه سیستم بند (ب) بیان کنید (راهنمایی: شکل م ٢-٥٦ را ببینید).

د) با روش بیان شده در بندهای (ب) و (ج)، پاسخ سیستمهای LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\text{(i)}\ \frac{d^2y(t)}{d\,t^2}+3\frac{dy(t)}{d\,t}+2y(t)=x(t)$$

$$\text{(ii)}\ \frac{d^2y(t)}{d\,t^2}+2\frac{dy(t)}{d\,t}+2y=x(t)$$

هـ) به کمک نتایج بندهای (ب) و (ج) نشان دهید که اگر در معادله (م ٢-٥٦-٦) داشته باشیم $M \geq N$، پاسخ ضربه $h(t)$ در $t=\circ$ جملات تکین دارد؛ یعنی $h(t)$ جملاتی به شکل زیر دارد

$$\sum_{r=\circ}^{M-N} a_r u_r(t)$$

که در آنها a_rها ثابت و $u_r(t)$ ها توابع تکین تعریف شده در بخش ٢-٥ هستند.

و) پاسخ ضربه سیستمهای علّی LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$\text{(i)}\ \frac{d\,y(t)}{d\,t}+2y(t)=3\frac{dx(t)}{d\,t}+x(t)$$

$$\text{(ii)}\ \frac{d^2y(t)}{d\,t^2}+5\frac{dy(t)}{d\,t}+6y(t)=\frac{d^3x(t)}{d\,t^3}+2\frac{d^2x(t)}{d\,t^2}+4\frac{d\,x(t)}{d\,t}+x(t)$$

حل:

(الف) در این مورد $2+2=\circ$ که بیان می دارد که:

$$y(t)=h(t)=Ae^{-2t}$$

چون $y(\circ^+)=1$ و $A=1$ و $h(t)=e^{-2t}u(t)$.

حال معادله (م١-٥٦،٢) را در نظر بگیرید:

$$\ell.H.S=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau+2\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(t-\tau)}\delta(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

$$=x(t)=R.H.S$$

که بیان می دارد که $y(t)$ معادله را حل می کند.

(ب) داریم:

$$y(t)=\sum_i a_i u_i(t)$$

در اینصورت:

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \sum_i a_i u_{k+1}(t)=\delta(t)$$

انتگرال گیری بین $t=0$ و $t=0^t$ و ضرایب مربوطه، داریم $a_t=0$ بجز $a_{-N}=\frac{1}{a_N}$. این بیان می دارد که برای $0' \leq t \leq 0^t$

$$y(t)=\frac{1}{aN}u_{-N}(t)$$

,

$$y(0^t)=y'(0^t)=\ldots=y^{(N-2)}(0^t)=0$$

$$\left.\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}\right|_{0^t}=\frac{1}{a^N}$$

(ج) (i) با گرفتن

$$y(t)=\sum_r a u_r(t)$$

داریم:

$$\sum_r \left(a_r u_{r+2}(t)+3a_r u_{r+1}(t)+2a_r u_r(t)\right)=\delta(t)$$

که بیان می کند $r_{Max=2}$ و $a_{-2}=1$. بنابراین $h(0^t)$ و $h'(0^t)=1$ شرایط اولیه را تشکیل می دهند.

حال:

$$\delta^3+35+2=0 \Rightarrow s=-z, s=-1$$

بنابراین:

$$h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-t} \qquad t\geq 0$$

با اعمال شرایط اول $A=b-1$ و $B=1$ را بدست می آوریم، بنابراین:

$$h(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u_{-1}(t)$$

(ii) شرایط اولیه $h(0^+)=0$ و $h'(0^+)=1$ می باشد. بنابراین:

$$h(t)=e^t \sin t\; u_{-1}(t)$$

(د) از (ج)، اگـر $M \geq N$ در اینـصورت $\sum_{K=\circ}^{M} b_k \frac{d^k h^{(t)}}{dt^k}$ کـه شـامل یـک جملـه تکینـی در $t=\circ$ خواهد بود، در اینصورت

$$h(t) = \sum_r a_r u_r (t + ...)$$

(هـ) (i) حال

$$\sum_r a_r u_{r+1}(t) + 2 + L\sum a_r u_r = 3u_1(t) + u_\circ(t)$$

بنابراین $r_{Max=\circ}$ همچنین

$$\alpha_\circ u_1(t) + a_{-1}u_\circ(t) + 2a_\circ u_\circ(t) = 3u_1(t) + u_\circ(t)$$

که منجر می شود تا $a_\circ = 3$ و $-5 = -1 \propto$ باشد.

شرایط اولیه $h(\circ^+)$

$$h(t) = 3u_\circ(t) - 5e^{-2t}u - 1(t) = 3\delta(t) - 5e^{-3t}u_\circ(t)$$

که منجر می شود تا $a_\circ = 3$ و $-5 = -1 \propto$ باشد.

شرایط اولیه $H(\circ^+) = -5$

$$h(t) = 3u_\circ(t) - 5e^{-2t}u - 1(t) = 3\delta(t) - 5e^{-2t}u(t)$$

(ii) اینجا $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_\circ = -3$ و $\alpha_{-1} = 13$ و $\alpha_{-2} = -44$ بنابراین

$$h(\circ^+) = 13 \quad و \quad h^1(\circ^+) = -44$$

و

$$h(t) = u_1(t) - 3u_\circ(t) - 3u_\circ(t)18e^{-3t}u_{-1}(t) - 5e^{-2t}u - 1(t)$$

۲,۵۷) یک سیستم LTI علّی S، با رابطه ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ زیر در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که S را مـی ـوان اتـصال سـری و سیـستم LTI علّـی S_1 و S_2 بـا روابـط ورودی خروجی زیر دانست.

$$S_1: \quad y_1[n] = b_\circ x[n] + b_1 x_1[n-1]$$
$$S_2: \quad y_2[n] = -ay_2[n-1] + x_2[n]$$

(ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(ج) نمایش جعبه ای S را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_1 رسم کنید.

(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم ۱ به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

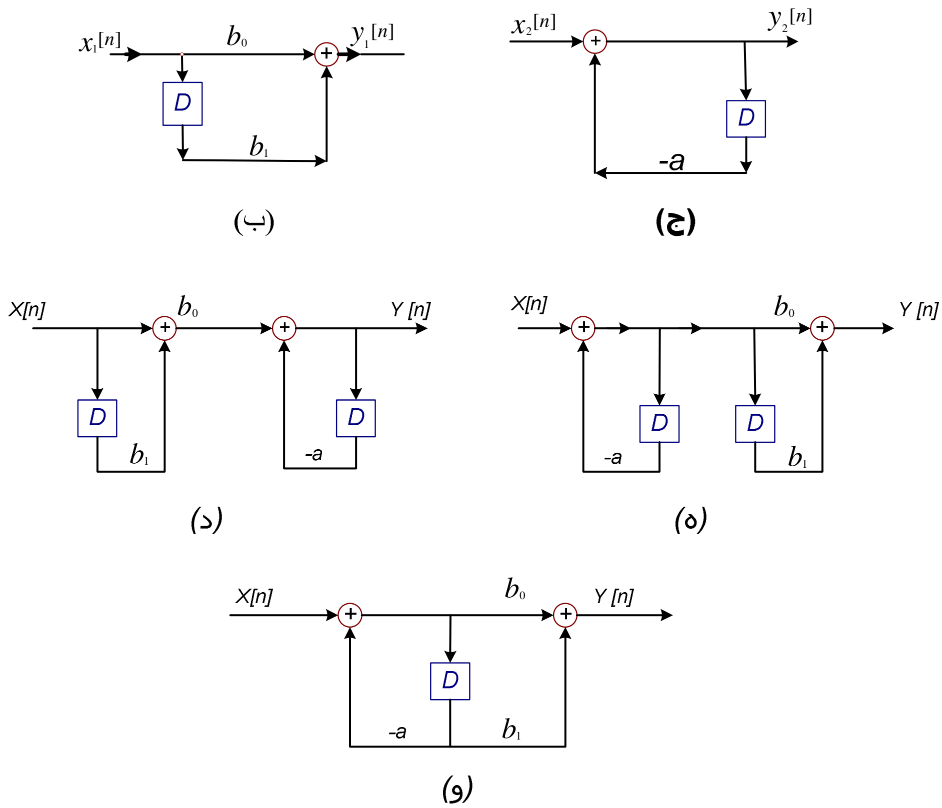
(و) نشان دهید که دو عنصر تأخیر دهنده نمایش جعبه ای بند (هـ) را می ـوان در هم ادغام کرد. نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می نامند، حال آن که نمایش جعبه ای بندهای (د) و (هـ) را تحقق مستقیم نوع I می نامند.

حل:

(الف) متوجه می شویم که $x_2[n]=y_1[n]$ که می توانیم آن را از دو معادله تفاضلی بدست آوریم. در نتیجه داریم:

$$y_2[n]=-ay_2[n-1]+b_0x_1[n]+b_1x_1[n-1]$$

که مشابه معادله دیفرانسیل کلی است.



شکل (ح۲,۵۷)

(ب) شکلهای متناظر با قسمتهای باقی مانده این مساله در شکل ح۲,۵۷ نشان داده شده اند.

۲,۵۸) یک سیستم LTI علّی S، با روابط ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ زیر در نظر بگیرید:

$$2y[n]-y[n-1]+y[n-3]=x[n]-5x[n-4]$$

(الف) نشان دهید که S، را می توان اتصال سری دو سیستم LTI علّی S_1 و S_2 با روابط ورودی - خروجی زیر دانست.

$$S:2y_1[n]=x_1[n]-5x_1[n-4]$$

$$S:y_2=\frac{1}{2}y_2[n-1]-\frac{1}{2}y_2[n-3]+x_2[n]$$

ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(ج) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبـال نمـایش جعبـه ای S_1 رسم کنید.

(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمای جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(و) نشان دهید که چهار عنصر تأخیردهنده نمایش جعبه ای بند (هـ) را می ـوان در سه عنـصر ادغـام کرد نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می نامند، حال آن که نمایش جعبـه ای بندهای (د) و (هـ) تحقق مستقیم نوع I نامیده می شود.

حل:

(الف) با توجه به اینکه $y_1[n]=x_2^{-}[n]$. می توانیم آنرا از دو معادله ی تفاضـلی بدسـت آوریـم. در نتیجه:

$$2y_2[n]-y_2[n-1]+y_2[n-3]=x_1[n]-5x_1[n-4]$$

این مشابه معادله دیفرانسل کلی است.

(ب) شکل متناظر با قسمتهای باقی مانده ی این مساله در شکل (ح۵۸-۲) آمده است.

۲,۵۹) یک سیستم LTI علّی S با رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ زیر در نظر بگیرید.

$$a_1\frac{d\,y(t)}{d\,t}+a_\circ y(t)=b_\circ x(t)+b_1\frac{d\;x(t)}{d\,t}$$

(الف) نشان دهید که

$$y(t)=A\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+Bx(t)+C\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\,\tau$$

و ثابتهای A، B، و C را برحسب ثابتهای $a_\circ$، a_1، $b_\circ$ و b_1 بیان کنید.

(ب) نشاندهید که S را می ـوان اتصال سری دو سیستم LTI زیر دانست

$$S_1:\ y_1(t)=Bx_1(t)+C\int_{-\infty}^{t}x(\tau)$$

$$S_2:\ y_2(t)=A\int_{-\infty}^{t}y_2(\tau)d\tau+x_2(t)$$

(ج) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبـه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه آی سیستم S_1 رسم کنید.

(و) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(ز) نشان دهید که دو انتگرالگیری بند (و) را می ـوان در هم ادغام کرد. نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می نامند، حال آن که نمایش جعبه ای بندهای (هـ) و (و) تحقق مستقیم نوع I نامیده می شود.

حل:

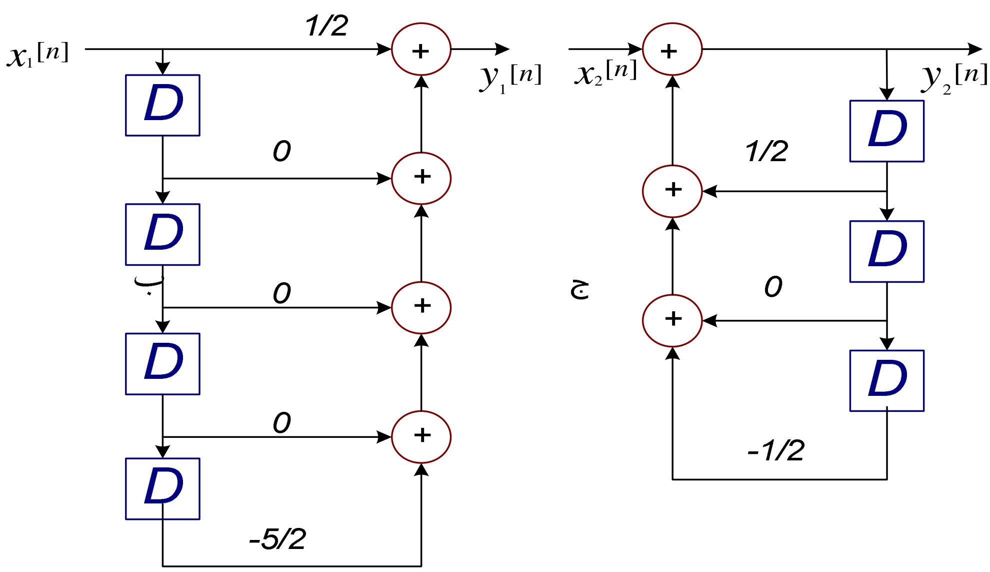
(الف) با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل داده شده اول و خلاصه سازی خواهیم داشت:

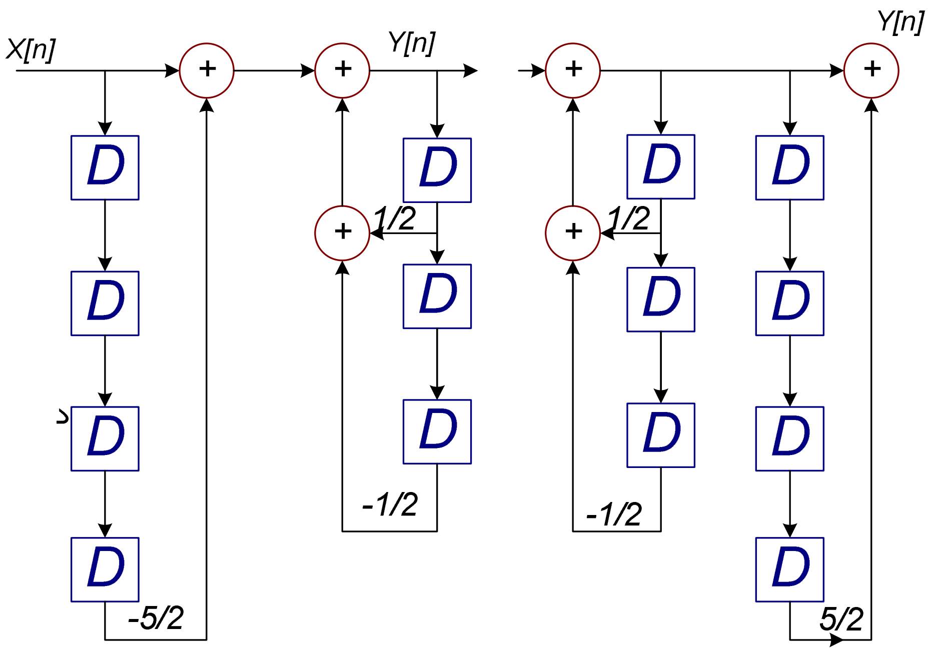
$$y(t)=-\frac{a_\circ}{a_1}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau+\frac{b_\circ}{a_1}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau+\frac{b_1}{a_1}x(t)$$

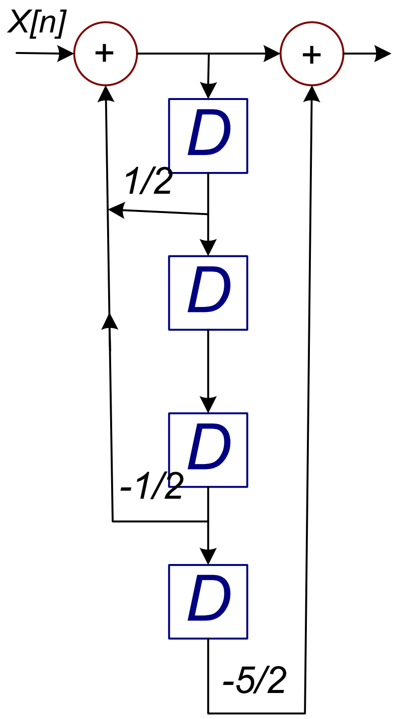
بنابراین: $A=-\frac{a_\circ}{a_1}$ و $B=\frac{b_1}{a_1}$ و $c=\frac{b_\circ}{a_1}$

(ب) می دانیم که $z_2(t)=y_1(t)$ می توانیم این دو معادله ی انتگرال را حذف کنیم. داریم:

$$y_2(t)=A\int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)d\tau+B\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau+cx_1(t)$$

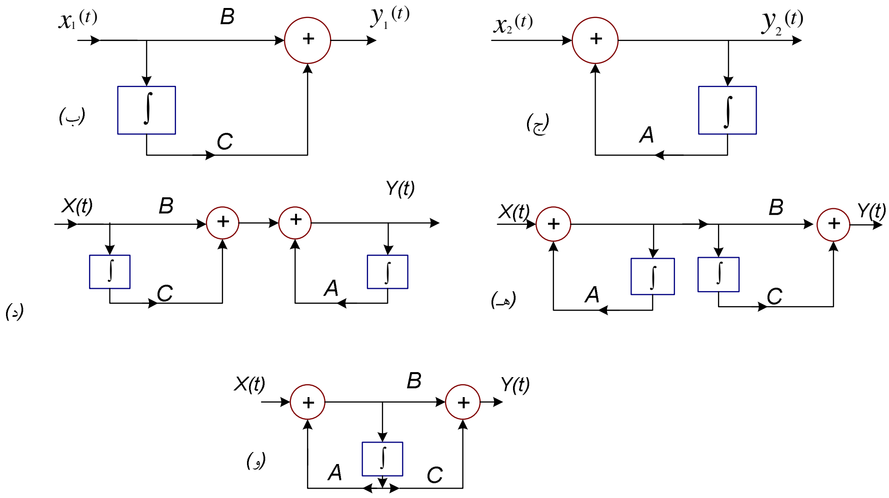



X[n]
Y[n]
Y[n]
D
1/2
-1/2
-1/2
-5/2
5/2
د



شکل (ح۲,۵۸)

(ج) شکل های متناظر برای قسمت های باقی مانده این مساله در شکل ح۲,۵۹. نشان داده شده اند.



د شکل ح۲,۵۹.

۲,۶۰) یک سیستم LTI علّی S با رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ زیر در نظر بگیرید.

$$a_2\frac{d\,y^2(t)}{d\,t^2}+a\frac{d\,\,y(t)}{d\,t}+a_0y(t)=b_0x(t)+b_1\frac{d\,\,x(t)}{d\,t}+b_2\frac{d\,\,x^2(t)}{d\,t^2}$$

(الف) نشان دهید که

$$y(t)=A\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+B\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\tau}(y(\sigma)d\sigma)d\tau+Cx(t)$$

$$+D\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau+E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau}x(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

و ثابتهای A، B، C، D و E را برحسب ثابتهای a_0، a_1، a_2، b_0، b_1، و b_2 بیان کنید.

$$S_1:y(t)=Cx_1(t)=Cx_1(t)+D\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)d\tau+E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau}x(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

$$S_2:y_2(t)=A\int_{-\infty}^{t}y_2(\tau)d\tau+B\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau}y_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau+x_2(t)$$

(ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(ج) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.

(د) نماش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_1 رسم کنید.

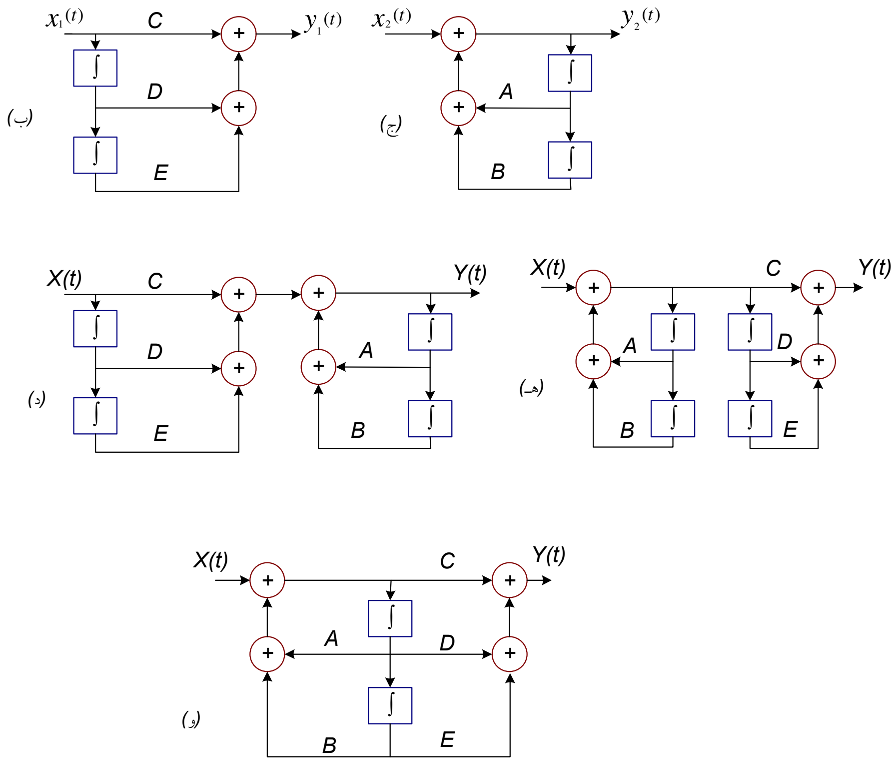
(ه) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.
(و) نشان دهید که چهار انتگرالگیر جواب بند (و) را می تـوان در دو انتگرالگیـر ادغـام کـرد. نمـایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می نامند، حال آن که نمایش جعبه ای بندهای (هـ) و (و) تحقق مستقیم نوع I نامیده می شود.
حل:
(الف) با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل داده شده و خلاصه سازی داریم:

$$y(H)=-\frac{-a_1}{a_2}\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau-\frac{a_\circ}{a_2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau}y(\sigma)d\sigma d\tau$$
$$+\frac{b_\circ}{a_2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}x(\sigma)d\sigma d\tau+\frac{b_1}{a_2}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau+\frac{b_2}{a_1}x(t)$$

بنابراین

$$A=\frac{-a_1}{a_2}\ ،B=\frac{-\infty}{a_2}\ ،C=\frac{b_2}{a_1}\ ،D=\frac{b_1}{a_2}\ ،E=\frac{b_\circ}{a_2}$$

(ب) می دانیم که $x_2(t)=y_1(t)$ و می توانیم این را از دو معادله ی انتگرالی حذف کنیم.
(پ) شکلهای متناظر برای قسمتهای باقی مانده این مسأله در شکل ح ۲,٦۰، نشان داده شده است.



شکل ح ۲٫۶۰

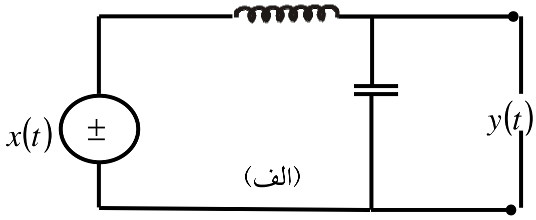
۲٫۶۱) (الف) در مدار شکل م ۲–۶۱ (الف) $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم در نظر بگیرید.

(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کنند بیابید.

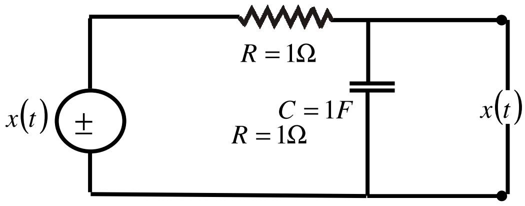
(ii) نشان دهید که جواب همگن معادله دیفرانسیل بند (i) به صورت $K_1e^{j\omega_1 t} + K_2e^{j\omega_2 t}$ است. مقادیر ω_1 و ω_2 را بیابید.

(iii) نشان دهید که چون ولتاژ و جریان حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم سینوسی است.

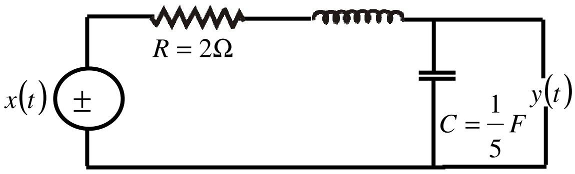
(ب) در مدار شکل م ۲–۶۱ (ب) $x(t)$ ولتاژ ورود است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم در نظر بگیرید.



شکل م ۲-۶۱ الف



(ب)



(ج)

شکل م ۲-۶۱ ب و ج

(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم به صورت Ke^{at} است و مقدار a را مشخص کنید.

(ج) در مدار شکل م ۲-۶۱ (ج) $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم فرض کنید.

(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که چون ولتاژ و جریان باید حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم یک سینوسی میر است.

حل:

(الف) (i) از قانون ولتاژ کریشهف، می دانیم که ولتاژ ورودی، باید با مجموع ولتاژهای شاخه های خازنی و سلفی برابر باشد، فلذا

$$x(t) = \ell c \frac{d^2 y(t)}{dt} + y(t)$$

بااستفاده از مقادیر c , ℓ داریم:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t)$$

ii) با استفاده از نتایج مسئله ۲,۵۳، می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = bx(t)$$

برحسب $k_1 e^{s_\circ t} + k_2 e^{s_1 t}$ خواهد بود که $s_\circ$ و s_1 ریشه های معادله مشخصه $s^2 + a_1 s + a_2 = \circ$ می باشد.

(در اینجا فرض شده است که $s_\circ \neq s_1$) در این مسئله $a_1 = \circ$ و $a_2 = 1$ بنابراین ریشه های معادله مشخصه برابر است با $s_\circ = j$ و $s_1 = -j$. جواب عمومی عبارتست از:

$$h_h(t) = k_1 e^{it} + k_2 e^{-jt}$$

و

$$\omega_2 = w_1 = 1$$

(iii) اگر ولتاژ و جریان به اعداد حقیقی منحصر شوند. $k_1 = k_2 = k$ بنابراین

$$y_h(t) = 2k \cos t = 2k \sin\left(t + \pi/2\right)$$

(ب) (i) از قانون ولتاپ کریشهف، می دانیم که ولتاپ ورودی باید با مجموع ولتاپ شاخه مقاومتها و خازنها برابر باشد. بنابراین:

$$x(t) = Rc \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

با استفاده از مقادیر R و L و C داریم.

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

(ii) پاسخ طبیعی سیستم، جواب همگن معادله دیفرانسیل فوق می باشد. با استفاده از نتیجه مساله (۲,۵۳) ، می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy(t)}{dt}+a_1 y(t)=bx(t)$$

برحسب $Ae^{s_\circ t}$ ریشه ی معادله مشخصه است

$$s+a_1=\circ$$

می باشد. جواب همگن برابر است $s_\circ=-1$، بنابراین ریشه معادله $a_1=1$ در این مساله

با $y_h(t)=ke^{-t}$

و

$$a=1$$

(ج) از قانون ولتاپ کریشهف، می دانیم که ولتاژ ورودی باید با مجموع ولتاژهای شاخه های مقاومتی و سلفی و خازنی برابر باشد بنابراین:

$$x(t)=fc\frac{d^2y(t)}{dt}+Rc\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با استفاده از مقادیر R و C و L، داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+sy(t)=5x(t)$$

(ii) با استفاده از نتیجه مسئله ۲,۵۳، می دانیم که جواب همگن معادله ی دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=bx(t)$$

جملاتی برحسب $k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_Lt}$ خواهد بود که در آن $s_\circ$, s_1 ریشه هی معادلـه ی مشخـصه مـی باشد.

$$s^2+a_1s+a_2=\circ$$

(فرض شـده اسـت کـه $s_\circ\neq s_1$) در ایـن مـسئله $a_1=2$ و $a_2=5$ بنـابراین ریـشه هـای معادلـه $s_\circ=-1+2j$ و $s_1=-1-2j$. جواب همگن معادله برابر با:

$$y_h(t)=k_1e^{-t}e^{2jt}+k_2e^{-t}e^{-2jt}$$

و

$$a=-1$$

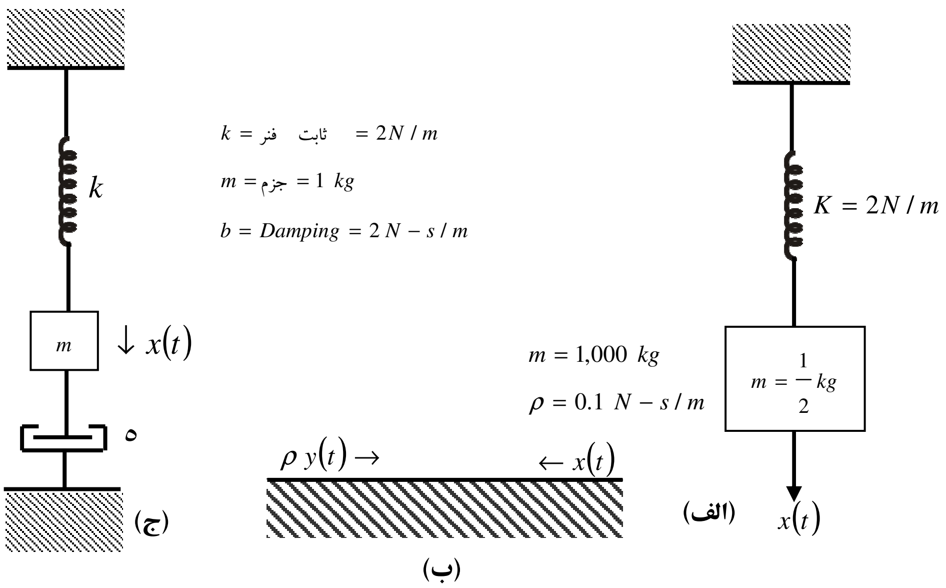
(iii) اگر ولتاژ و جریان حقیقی در نظر گرفته شوند، در اینصورت $k_1=k_2=k$.

بنابراین

$$-y_h(t)=2ke^{-t}\cos(2t)=2ke^{-t}\sin\left(t+\pi/2\right)$$

۲,۶۲) (الف) در سیستم مکانیکی شکل م ۲–۶۲ (الف) نیروی $x(t)$ اعمال شده به جرم ورودی، و جابجایی $y(t)$ جرم خروجی است. معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید. نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم متناوب است.

(ب) شکل م ۲–۶۲ (ب) را در نظر بگیرید که در آن نیروی $x(t)$ ورودی و سرعت $v(t)$ خروجی است. جرم خودرو و m و ضریب اصطکاک جنبشی ρ و ضریب اصطکاک جنبشی ρ است. نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم میر است.



شکل م ۲–۶۲ الف و ب و ج

K

= ثابت فنر ۲ N/M   m = جرم = ۱ kg   b = ثابت میرایی = ۲ N-s/m

(ج) در سیستم مکانیکی شکل م ۲-۶۲ (ج) نیروی $x(t)$ اعمال شده به جرم ورودی و جابجایی $y(t)$ جرم خروجی است.

(i) معادله دیفرانسیل را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که جواب همگن معادله دیفرانسیل بند (i) به صورت $e^{at}\left\{K_1 e^{j-t}+K_2 e^{i-t}\right\}$ است و a را تعیین کنید.

حل:

(الف) نیروی $x(t)$ باید با مجموع نیروهای لازم برای خنثی وزن و نیروی لازم برای کش متر برابر باشد. بنابراین:

$$x(t)=m\frac{d^2y(t)}{dt}+ky(t)=x(t)$$

با جایگذاری مقادیر m و k، داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4y(t)=2x(t)$$

بااستفاده از نتایج مسئله ۲,۵۳، می دانیم که جواب همگن معادله ی دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y_2(t)=bx(t)$$

برحسب جملاتی از $k_1e^{s_\circ t}+k_2e^{s/t}$ که $s_\circ$ و s_1 ریشه های معادله مشخصه $s^2+a_1s+a_2=\circ$ خواهد بود.

(فرض شده است که $s_\circ \neq s_1$) در این مسئله $a_2=\circ$ و $a_2=4$. بنابراین، ریشه های معادله برابر $s_\circ=\pm 2j$ و $s_1=2j$ می باشد. جواب همگن عبارتست از:

$$y_h(t)=k_1e^{2jt}+k_2e^{2jt}$$

با فرض اینکه $y(t)$ حقیقی است، داریم $k_1=k_2=k$، بنابراین:

$$y_h(t)=2k\cos t$$

واضح است که $y_h(t)$ پریودیک است.

(ب) نیروی $x(t)$ بایستی با مجموع نیروی موردنیاز برای خنثی کردن وزن و نیروی لازم برای کشش متر برابر باشد. بنابراین $x(t)=m\dfrac{dy(t)}{dt}+by(t)$ با جایگذاری مقادیر m و b داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{y(t)}{10000}=\frac{x(t)}{1000}$$

و استفاده از نتایج مسئله ۲,۵۳ می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy(t)}{dt}+a_1 y(t)=bx(t)$$

برحسب جملاتی از $Ae^{s_\circ t}$ خواهد بود. که $s_\circ$ ریشه ی معادله مشخصه

$$s+a_1=\circ$$

در این مسئله $a_1=\frac{1}{10000}$ بنابراین، ریشه ی معادله $s_\circ=-10^{-4}$ می باشد.

جواب همگن عبارتست از $y_h(t)=ke^{-10^{-4}}t$

واضح است $y_h(t)$ با تغییر کاهش می یابد.

(ج) می دانیم که نیروی لازم برای خنثی کردن نیروی متر ناشی از $y(t)$.

نیروی جابجایی برای خنثی کردن وزن + نیروی لازم برای خنی کردن بر خود توسط $y(t)$ = $x(t)$

بنابراین:

$$x(t)=\dot{m}\frac{d^2y(t)}{dt}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)$$

با استفاده از مقادیر m و b و k داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

(ii) با توجه به نتایج مسئله ۲,۵۳ می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+\alpha_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=b_1x(t)$$

جملاتی برحسب $k_1e^{s_\circ t}+k_2e^{s_1 t}$ خواهد بود که $s_1, s_\circ$ ریشه های معادله مشخصه $s^2+a_1s+a_2=\circ$ خواهد بود.

(فرض شده که $s_\circ\neq s_1$) در این ریشه $a_1=2$ و $a_2=2$ بنابراین ریشه های معادله برابرند با $s_\circ=-1+j$ و $s_1=-1-j$. جواب همگن برابر است با

$$y_h(t)=k_1e^{-t}e^{jt}+k_2e^{-t}e^{-jt}$$

و

$$a=1$$

(iii) اگر نیرو تعیین شده، حقیقی باشد.در این صورت $k_1=k_2=k$ بنابراین:

$$y_h(t)=2ke^{-t}\cos(t)=2ke^{-t}\sin\left(t+\pi/2\right)$$

و

$$y[\circ]=100000$$

۲٫۶۳) می خواهیم یک وام ۱۰۰۰۰۰ دلاری را با اقساط مساوی ماهیانه D دلار باز پرداخت کنیم. ربح به صورت مرکب و ماهیانه، با نرخ سالیانه ۱۲٪ روی باقیمانده بدهی محاسبه می شود.

$$\$100000+\frac{0/12}{12}\$100000=\$101000$$

باید D را به نحوی تعیین کنیم که پس از یک مدت معین کل وام پرداخت و بدهی صفر شود.

(الف) برای توصیف ریاضی مسئله فرض کنید $y[n]$ بدهی باقیمانده پس از n ماه اول است. وام در ماه ۰ گرفته شده است و پرداخت از ماه ۱ آغاز می شود. نشان دهید که $y[n]$ معادله تفاضلی زیر

$$y[n]=\gamma y[n-1]=-D \qquad \text{(م ۲-۶۳-۱)}$$

را با شرط اولیه

$$y[\circ]=\$100000$$

ارضا می کند که در آن γ ثابت است. γ را بیابید.

(ب) معادله تفاضلی بند (الف) را حل کرده $y[n]$ را در $n\geq\circ$ تعیین کنید.

راهنمائی: جواب مخصوص معادله (م ۲-۶۳-۱) عدد ثابت Y است. مقدار Y را یافته، $y[n]$ را در $n\geq\circ$ به صورت مجموع جواب خصوصی و جواب همگن بنویسید. ثابت نامعلوم جواب همگن را با محاسبه مستقیم $y[1]$ از معادله (م ۲-۶۳-۱) و مقایسه آن با جواب به دست آمد، تعیین کنید.)

(ج) اگر وام ۳۰ ساله باشد، یعنی پرداخت در ۳۶۰ قطسط ماهیانه صورت گیرد، مقدار D باید چقدر باشد؟

(د) کل بازپرداخت ۳۰ ساله چقدرست؟

(هـ) چرا بانکها وام می دهند؟

حل:

ترکیب Amt از برج قبلی + پرداخت شده $Amt-$ قرضی $y(t)=Amt$

$$=100000\delta[n]+1.01\, y[n-1]-Du[n-1]$$

بنابراین

$$y[n]=1.01y[n-1]-D_1 \qquad n>\circ$$

$$y[\circ]=100000 \text{ و} \qquad \wp = 1.01 \text{ و}$$

(ب) داریم:

$$y_b[n]=1.01y_p[n-1]D$$

که بیان می کند $y_p[n]=1000$. همچنین جواب همگن برابر است با:

$$y_h[n]=A(1.01)^n$$

بنابراین:

$$y[n]=y_y[n]+y_p[n]=A(1.01)^n+100D$$

با استفاده از شرایط اولیه $y[\circ]=100000$ ، داریم:

$$A=100000-100D$$

بنابراین:

$$y[n]=(100000-100D)(1.01)^n+100D$$

(ج) داریم:

$$y[360]=\circ(p-100D)(1.01)^{360}+100D$$

بنابراین

$$D=\$1028.60$$

(د) مجموع پرداختی = $370.269

(هـ) سئوال دشوار در این کتاب !!!

٢,٦٤) یکی از فواید مهم سیستمهای وارون در وضعیتهایی است که می خواهیم نوعی اعواجاج را حذف کنیم. مسئله حذف پژواک محسوسی داشته باشد، به دنبال یک ضربه صوتی اولیه، در فواصل زمانی مساوی نمونه های تضعیف شده این صدا به گوش می رسد. به این دلیل، مدلی که غالباً برای این پدیده به کار می رود، یک سیستم LTI با پاسخ ضربه ای مشتمل بر یک قطار ضربه است..

$$h(t)=\sum_{k=\circ}^{\infty}h_k\delta(t-kT)$$

پژواک ها با فاصله T ثانیه تکرار می شوند، و h_k ضریب بهره k ضریب بهره پژواک حاصل از ضربه صوتی اولیه است.

(الف) $x(t)$ را سیگنال صوتی اولیه (مثلاً موسیقی ارکستر)، و $y(t)=x(t)*h(t)$ را سیگنالی که بدون هیچ پردازشی به گوش می رسد فرض کنید. برای حذف اعوجاج حاصل از پژواکها میکروفونی نصب شده که $y(t)$ را می گیرد و آن را به یکسیگنال الکتریکی تبدیل می کند. این سیگال را هم $x(t)$ می «امیم زیرا معادل الکتریکی سیگنال صوتی است، و می توان این دو را با سیستمهای مبدل صوتی الکتریکی به هم تبدیل کرد.

نکته قابل توجه این است که سیستم دارای پاسخ ضربه معادله (م ٢-٦٤-١) وارونپذیرست. پس می توان یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $g(t)$ یافت، به نحوی که

$$y(t)*g(t)=x(t)$$

معالات جبری را که مقادیر متوالی $g(t)$ در آن صدق می کنند بیابید و با حل آنها $g_{\circ}$، g_1، g_2 را برحسب gk بیابید.

(ب) $g(t)$ را با فرض $h_{\circ}$، $g_{\circ}=\frac{1}{2}$ و برای تمام مقادیر $h_i\geq 2$، $h_i=\circ$ بیابید.

(ج) شکل م ٢-٦٤ مدل خوبی برای تولید پژواک است. پژواکهای متوال، صورتهای فیدبک شده $y(t)$ هستند، که به اندازه T ثانیه تأخیر یافته و در a ضرب شده اند. معمولاً $\circ<a<1$، زیرا پژواکهای متوالی تضعیف می شوند.

(i) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید. (فرض کنید سیستم ابتدائاً ساکن است، یعنی اگر در $1<\circ$، $x(t)=\circ$؛ آنگاه در $t<\circ$، $y(t)=\circ$.

(ii) ثابت کنید که سیستم به ازای $\circ<a<1$ پایداری و به ازای $a>1$ ناپایدار است.

(iii) $g(t)$ را برای این حالت بیابید. این سیستم وارون را با جمع کننده، ضرب کننده و عدد و تأخیر دهنده T ثانیه بسازید.

(د) هر چند بحث بالا به علت کاربرد خاص در نظر گرفته شدهف در مورد سیستمهای پیوسته در زمان بیان شد ولی در حالت گسسته در زمان نیز می توان این مفاهیم را به کار برد. یعنی سیستم LTI با پاسخ ضربه

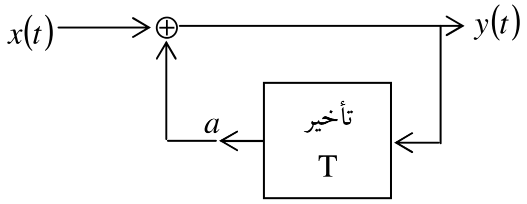
$$h[n]=\sum_{k=\circ}^{\infty}\delta[n-k]$$

وارونپذیرست و سیستم وارون آن سیستمی LTI با پاسخ ضربه زیرست

$$g[n]=\sum_{k=\circ}^{\infty} gk\delta[n-kN]$$

به راحتی می توان نشان داد gi ها همان معادلات جبری بند (الف) را ارضـا مـی کننـد. یـک سیـستم گسسته در زمان LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرد.

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$$



شکل م ٢-٦٤

این سیستم وارونپذیر نیست. دو ورودی بیابید که خروجی یکسانی ایجاد کنند.

حل:

(الف) داریم: $y(t)*h(t)$ و $x(t)=y(t)*g(t)$. بنابراین $g(t)*h(t)=\delta(t)$

حال

$$h(t)*g(t)\big|_{t=nT}=\sum_{k=\circ}^{n} h_k q_{n-k}\delta(t-nk)$$

بنابراین، می خواهیم:

$$\sum_{k=\circ}^{n} h_k\, g_{n-k}=\begin{cases}1 & n=\circ\\ \circ & n=1,2,3,...\end{cases}$$

بنابراین

$$g_\circ=\frac{1}{h_\circ}\ ,\quad g_1=\frac{-h_1}{h_\circ^2}$$

$$g_2=\frac{-1}{h_\circ}\left[\frac{-h_1^2}{h_\circ^2}+\frac{h_2}{h_\circ}\right],...$$

(ب) در این مورد $g_\circ = 1$ و $g_2 = -\frac{1}{2}$ و $g_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ و ... به این ترتیب که نشان می دهد که:

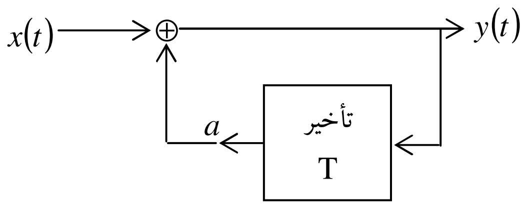
$$g(t) = \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \delta(t - KT)$$

(ج) (i) در اینجا:

$$h(t) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a^k \delta(t - T)$$

(ii) اگر $1>\propto>\circ$ در این صورت $\propto^k<1$، بنابراین $h(t)$ محدود شده و بطور معین انتگرال پذیر متناظر با یک سیستم پایدار است. اگر $1<\propto$، در این صورت $h(t)$ به طور معین انتگرال پذیر نیست و سیستم را ناپیدار می باشد.

(iii) در اینجا نیز؛ $g(t) = 1 - \delta(t - T)$. سیستم معکوس در شکل زیر نشان داده شده است:



(د) اگر $x_1[n] = \delta[n]$ و $y[n] = h[n]$؛ اگر $x_2[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - N]$ و $y[n] = h[n]$.

۲,٦٥) در مسئله ۱–٤٥ تابع همبستگی را برای سیگنالهای پیوسته در زمان معرفی و بعضی خصوصیات اساسی آن را بررسی کردیم. همتای گسسته در زمان تابع همبستگی نیز همان خواص را دارد و هر دو کاربردهای بسیار مهم و متعددی دارند (و در مسائل ۲–٦٦ و ۲–٦٧ معرفی شان خواهیم کرد). در این مسئلهتابع همبستگی گسسته در زمان رامعرفی و چند خاصیت دیگر آن را بررسی می کنیم.

$x[n]$ و $y[n]$ را دو سیگنال گسسته در زمان حقیقی بگرید. توابع خود همبستگی $x[n]$ و $y[n]$، به ترتیب $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ هستند و به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\phi_{xx}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m+n]x[m]$$

,

$$\phi_{yy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}y[m+n]y[m]$$

توابع همبستگی متقال $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yx}[n]$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$\phi_{xy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m+n]y[m]$$

,

$$\phi_{yy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}y[m+n]x[m]$$

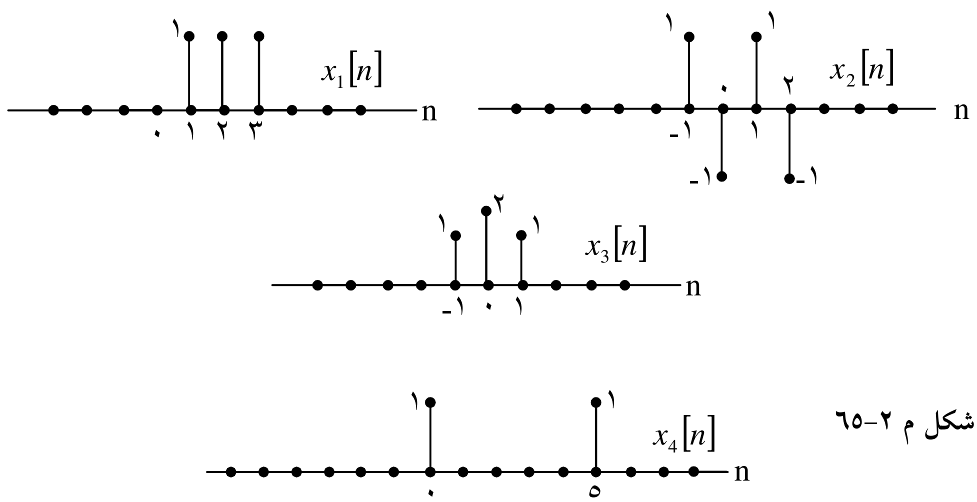
این توابع مانند حالت پیوسته در زمان تفاوتهای خاصی دارند. $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ توابعی زوج هستند، و حال آن که $\phi_{xy}[n]=\phi_{yx}[-n]$.

(الف) دنباله هی خود همبستگی سیگنالهای $x_1[n]$، $x_2[n]$، $x_3[n]$، و $x_4[n]$ شکل م ۲–٦۵ را بیابید.

(ب) دنباله های همبستگی متقابل زیر را بیابید.

$$\phi_{x_l y_i}[n] \quad i\neq j \qquad i,j=1\,,2\,,3\,,4$$

$x_i[n]$ ها همان سیگنالهای شکل م ۲–٦۵ هستند.



شکل م ۲–٦۵

(ج) $x[n]$ را ورودی یک سیستم LTI، با پاسخ نمونه واحد $h[n]$، و $y[n]$ را خروجی متناظر با آن بگیرید. $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را برحسب $\phi_{xx}[n]$ و $h[n]$ بیابید. نشان دهید که می توان $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را خروجی دو سیستم LTI به ورودی $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ دانست؟ (پاسخ ضربه این دو سیستم را بیابید).

(د) $h[n]$ را $x_1[n]$ شکل م ۲-٦۵ بگیرید و فرض کنید $y[n]$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ به ورودی $x_1[n]$ است. به کمک نتایج بند (ج) $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را بیابید.

حل:

الف) دنباله خود همبستگی در شکل ح۲,٦۵ نشان داده شده است.

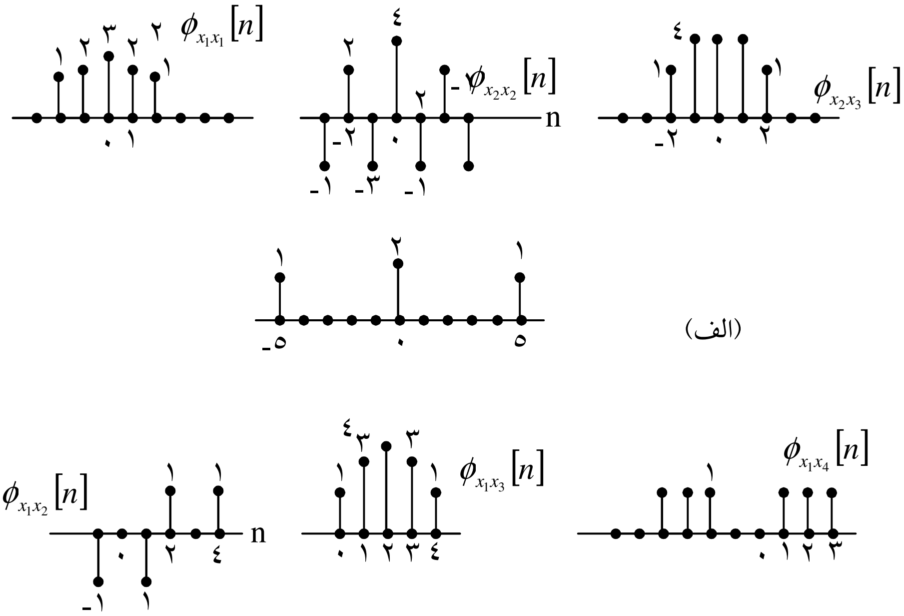
(ب) دنباله ها خود همبستگی در شکل ح۲,٦۵ نشان داده شده است.

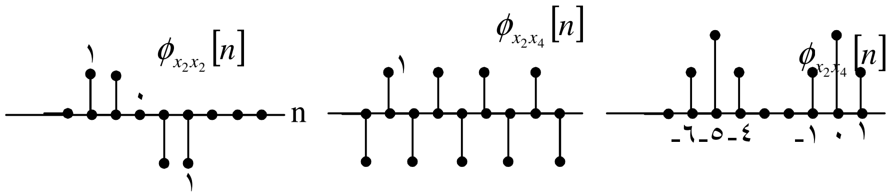
(ج) داریم:

$$\phi_{xy}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[-k]\phi_{xx}[n-k]$$

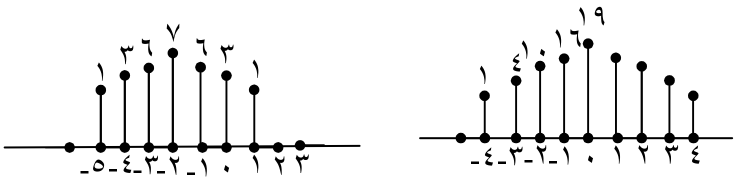
بنابراین $\phi_{xy}[n]$ به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\phi_{xx}[n]\rightarrow\boxed{h[-n]}\rightarrow\phi_{xy}[n]$$





(ب)



(ه)شکل ح۲,٦٥

نیز: $\phi_{yy}[n]=\sum_{k}\phi_{xx}[n-k]\phi_{hh}[k]$

بنابراین $\phi_{yy}[n]$ به صورت طیر نمایش داده می شود.

$$\xrightarrow[\phi_{xx}[n]]{} \boxed{h[n]*h[-n]} \rightarrow \phi_{yy}[n]$$

(د) $\phi_{xy}[n]$ و ϕ_{yy} در شکل ح۲,٦٥ نشان داه شده است.

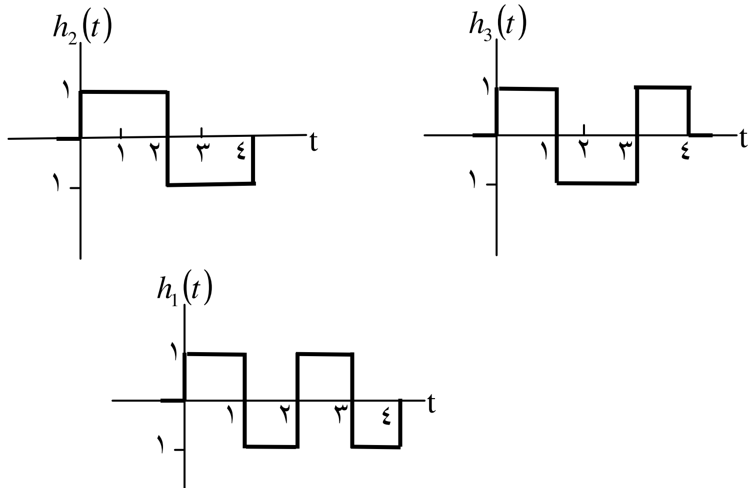
۲,٦٦) $h_1(t)$، $h_2(t)$ و $h_3(t)$ شکل م ۲-٦٦ را پاسخ ضربه سه سیستم LTI فرض کنید. اینها راتوابع والش می نامند و به علت سادگی ساختشان با مدارهای منطقی و نیز چون عمل ضرب در هر یک از آنها تنها با یک تغییر علامت متناظرست و می توان با کلیدهای تغییر وضعیت آن را انجام داد، اهمیت زیادی دارند.

(الف) یک سیگنال پیوسته در زمان $x_1(t)$ با مشخصات زیر انتخاب و رسم کنید

(i) $x_1(t)$ حقیقی باشد.

(ii) به ازای تمام مقادیر $t \geq ۰$، $x_1(t)=۰$.

(iii) به ازای تمام مقادیر $t \geq ۰$، $|x_1(t)| \leq 1$



شکل م ۲-٦٦

(iv) $y_1(t)=x_1(t)*h_1(t)$ در $t=4$ حداکثر مقدار ممکن راداشته باشد.

(ب) قسمت (الف) را برای $x_2(t)$ و $x_3(t)$ تکرار کنید، به نحـوی کـه $y_2(t)=x_2(t)*h_2(t)$ در $t=4$ و $y_3(t)=x_3(t)*h_3(t)$ در $t=4$ ماکزیمم شوند.

(ج) مقدار

$$y_{ij(t)} = x_i(t)*h_j(t) \qquad i \neq j$$

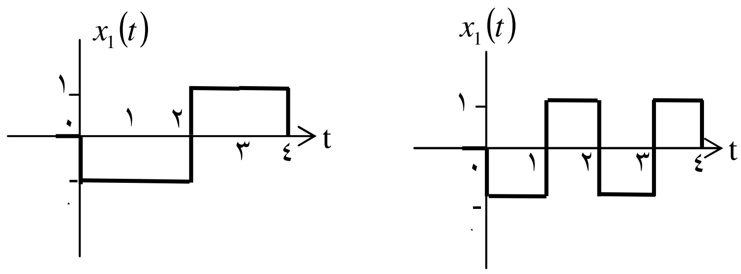
در $t=4$ را به ازای $i,j=1,2,3$ بیابید.

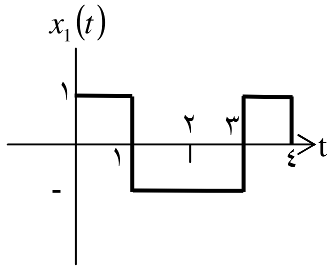
سیستم دارای پاسخ ضربه $h_i(t)$ را فیلتر منطبق سیگنال $x_i(t)$ می نامند، زیرا پاسـخ ضـربه آن بـرای ماکزیمم شدن خروجی سیگنال به ازای

حل:

(الف) طرحواره $x_1(t)$ در شکل ح۲،٦٦ نشان داده شده است.

(ب) طرحواره $x_2(t)$ و $x_2(t)$ در شکل ح۲،٦٦ نشان داده شده است.





شکل ح۲,٦٦

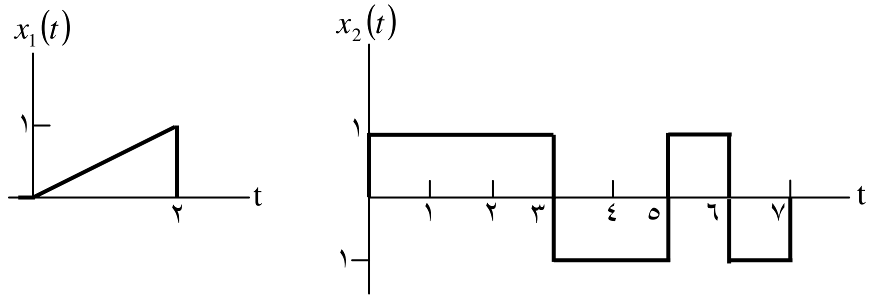
ج)

$$x_1(t)*h_2(t)=x_2(t)*h_3(t)$$
$$=x_1(t)*h_3(t)=\circ \qquad t=4 \quad \text{برای}$$

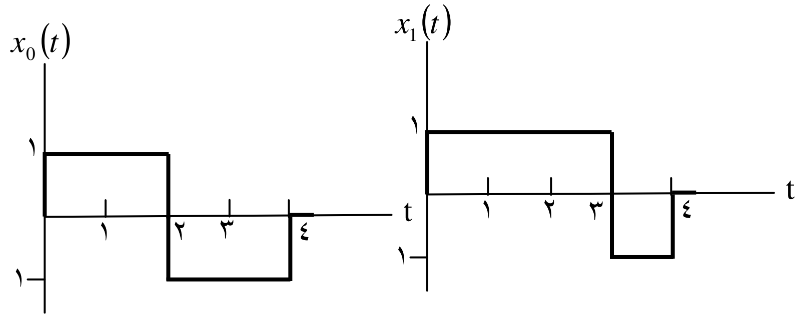
۲,٦۷) تابع همبستگی متقابل دو سیگنال حقیقی پیوسته در زمان $x(t)$ و $y(t)$ عبارت است از

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau \qquad \text{(م ۲-٦۷)}$$

با گذاشتن $x(t)$ به جای $y(t)$ معادله (م ۲-٦۷-۱)، تابع همبستگی سیگنال $x(t)$ به دست می آید.



(الف)



(ب)

شکل ۲-٦۷

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau \qquad \text{(م ۲-٦۷)}$$

(الف) برای هر یک از دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ شکل م ۲-٦۷-۱ تابع خود همبستگی را بیابید.

(ب) $x_1(t)$ را یک سیگنال معین دارای عمر محدود فرض کنید، یعنی برای $t<\circ$ و $t>T$، $x(t)=\circ$.

می خواهیم $\phi_{xx}(t-T)$ پاسخ یک یسستم LTI به ورودی $x(t)$ است. به صورت زیر می توانیم نشان دهیم که این تعریف فیلتر منطبق با تعریف بیان شده در مسئله ۲-٦٦ یکسان است.

$y(t)$ را پاسخ یک سیستم LTI، با پاسخ ضربه حقیقی $h(t)$، به سیگنال $x(t)$ بند (ب) فرض کنید.

فرض کنید در $t<\circ$ و $t>T$، $x(t)=\circ$. نشان دهید $h(t)$ماکزیمم کننده $y(t)$، با قید زیر

$$\int_{\circ}^{T} h^2(t)dt = M \quad \text{یک عدد مثبت ثابت} \qquad \text{(م ۲-٦۷-۲)}$$

مضرب اسکالری از پاسخ ضربه مشخص شده در بند (ب) است.

[راهنمایی: نامساوی شوارتز برای دو سیگنال $\upsilon(t)$ و $u(t)$ عبارت است از

$$\int_b^a u(t)\upsilon(t)dt \le \left[\int_b^a u^2(t)dt\right]^{1/2}\left[\int_b^a \upsilon^2(t)dt\right]^{1/2}$$

با استفاده از این نامساوی کران $y(T)$ را بیابید.]

(د) قید معادله (م ۲–٦۷–۲) تنها برای پاسخ ضربه یک ضریب تعیین می کند، زیرا افزایش M تنها ضریب اسکالر بند (ج) را تغییر می دهد. پس انتخاب $h(t)$ به صورت بندهای (ب) و (ج) با $x(t)$ منطبق است، به نحوی که پاسخ سیستم به آن ماکزیمم شود. چنان که خواهیم گفت در بعضی کاربردها این مسئله بسیار مهم است.

در کاربردهای مخابراتی گاهی می خواهیم یکی از چند خبر (نشان) ممکن را ارسال کنیم. مثلاً وقتی یک پیام پیچیده را به صورت یک دنباله دودویی کد می کنیم، سیستمی داریم که اطلاعات را بیت به بیت ارسال می کند. هر بیت را می توان به صورت یک سیگنال مخابره کرد، مثلاً به ازای بیت صفر سیگنال $x_\circ(t)$ و به ازای بیت یک سیگنال $x_1(t)$ را. در این حالت سیستم گیرنده این سیگنالها باید تشخیص دهد که $x_\circ(t)$ رسیده است یا $x_1(t)$. عاقلانه است که در گیرنده دو سیستم داشته باشیم که یکی برای $x_\circ(t)$ و دیگری برای $x_1(t)$ «تنظیم» شده باشد. منظور از «تنظیم» این استکه سیستم با رسیدن سیگنالی که برای آن تنظیم شده، خروجی بزرگ تولید کند. خاصیت تولید خروجی بزرگ به هنگام رسیدن یک سیگنال خاص دقیقاً همان خصوصیتی است که فیلتر منطبق دارد.

در عمل ارسال و دریافت همیشه با اعوجاج و تداخل همراه است. در نتیجه می خواهیم اختلاف بین پاسخ فیلتر منطبق به ورودیی که با آن تطبیق یافته و پاسخ فیلتر به یکی از سیگنالهای دیگری که می تواند ارسال شود، ماکزیمم باشد. برای روشن کردن این مطلب دو سیگنال $x_\circ(t)$ و $x_1(t)$ شکل م ۲–٦۷ (ب) را در نظر بگیرید.

(i) پاسخ $L_\circ$ به $x_\circ(t)$ و $x_1(t)$ را رسم کنید. برای L_1 نیز این کار انجام دهید.

(ii) مقدار این پاسخها را در $t = 4$ مقایسه کنید. چه تغییری در $x_\circ(t)$ صورت دهیم تا کار گیرنده در تشخیص بین $x_\circ(t)$ و $x_1(t)$ ساده تر باشد؟ برای این کار باید $t = 4$، پاسخ $L_\circ$به $x_1(t)$ و پاسخ L_1 به $x_\circ(t)$ صفر باشد.

حل:

(الف) توابع خود همبستگی عبارتند از:

$$\phi_{x_1x_1} = \begin{cases} \frac{1}{24} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3} & \circ \le t \le 2 \\ \circ & t > 2 \end{cases} \;,\; \phi_{x_1x_1}(t)\phi_{x_1x_1}(-t)$$

$$\phi_{x_2x_2}(t)=\begin{cases}6(1-t) & a\le t\le 1\\ 1-t & 1\le t\le 2\\ t-3 & 2\le t\le 3\\ 3-t & 3\le t\le 4\\ t-5 & 4\le t\le 5\\ 5-t & 5\le t\le 6\\ t-7 & 6\le t\le 7\\ \circ & t>7\end{cases} \quad , \quad \phi_{x_2x_2(t)}=\phi_{x_2x_2}(-t)$$

(ب) اگر پاسخ ضربه $h(t)=x(T-t)$ باشد، در اینصورت $y(t)=\phi_{xx}(t-T)$

(ج) دا ریم:

$$y(T)=\int_\circ^T x(\tau)h(T-\tau)d\tau$$
$$\le m^{1/2}\left[\int_\circ^T x^2(t)dt\right]^{1/2}$$

بنابراین

$$y(t) \text{ با } M^{1/2}\left[\int_\circ^T x^2(t)dt\right]^{1/2}$$

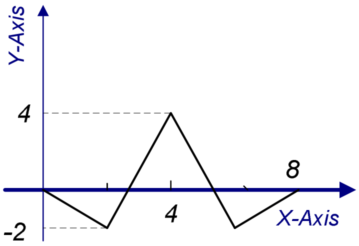
حال اگرداشته باشیم :

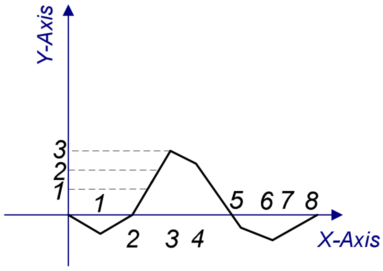
$$h(t)=\sqrt{\frac{m}{\int_\circ^T x^2(t)dt}}\,x(T-t)$$

در این صورت

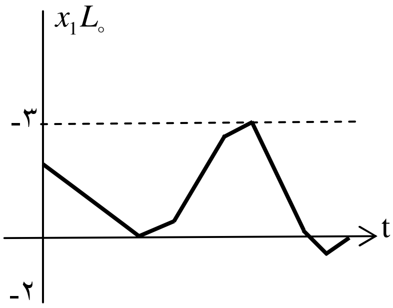
$$y(T)=M^{1/2}\left(\int_\circ^T x^2(t)dt\right)^{1/2}$$

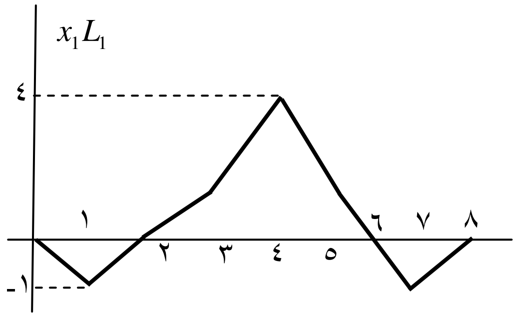
واضح است که $y(T)$ در انتخاب بالا برای $h(T)$ ماکزیمم است.



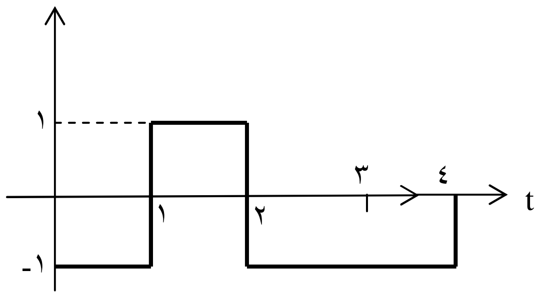


د





(د)



شکل ح۲,٦۷

(ii) فرض کنید پاسخ ضربه $L_\circ$ و L_1، $L_{t_\circ}$ و $h_{L1}(t)$؛ در اینصورت:

$$x_\circ(t) * h_{L_\circ}(t)\Big|_{t=4} = 4$$

$$x_\circ(t) * h_{L1}(t)\Big|_{t=4} = 2$$

$$x_1(t) * h_{L_\circ}(t)\Big|_{t=4} = 4$$

$$x_1(t) * h_{L1}(t)\big|_{t=4} = 4$$

برای انیکه کار گیرنده ساده تر گردد، $x_\circ(t)$ همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است تغییر دهید.

۲,٦٨) سیستمهای رادار کاربرد دیگری است که در آنها فیلترهای منطبق و توابع همبستگی نقش مهمی دارند. اساس رادار ارسال یک پالس الکترومغناطیسی به سوی هدف، بازتاب آن از هدف و در نتیجه بازگشت آن به فرستنده با تأخیری متناسب با فاصله هدف تا رادارست. در حالت ایده آل سیگنال دریافتی نمونه تأخیر یافته و تضعیف شده سیگنال ارسالی است.

پالس اصلی ارسالی را $p(t)$ فرض کنید. نشان دهید که

$$\phi_{pp} = (\circ) = \max_t \ \phi_{pp}(t)$$

یعنی $\phi_{pp}(\circ)$ ماکزیمم مقدار $\phi_{pp}(t)$ است. با استفادهاز این معادله نتیجه بگیرید که اگر شکل موج دریافت شده درگیرنده به صورت زیر باشد

$$x(t) = a \ p(t - t_\circ)$$

که در آن a مقداری ثابت است، آنگاه

$$\phi_{xp}(t_\circ) = \max_t \ \phi_{xp}(t)$$

(راهنمایی: نامساوی شوارتز را به کار برید.)

پس سیستم ساده فاصله یابی راداری بر اساس استفاده از فیلتر منطبق با شکل موجی ارسالی $p(t)$، و یافتن زمان ماکزیمم شدن خروجی این سیستم استوارست.

حل:

$$\begin{aligned} \phi_{pp}(\tau) &= \int p(\tau) p(t+\tau) dt \\ &\le \left[\int p^2(\tau) d\tau\right]^{1/2} \left[\int p^2(t+\tau) d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le \int p^2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\phi_{pp}(\tau) \le \phi_{pp}(\circ) \Rightarrow \phi_{pp}(\circ) = \max \ \phi_{pp}(t)$$

نیز

$$\phi_{xp} = \phi_{pp}(t - t_\circ) \Rightarrow \phi_{xp}(t_\circ) = \phi_{pp}(\circ) = \max \phi_{xp}(t)$$

۲٫٦۹) (الف) فرض کنید

$$g(t)=x(t-\tau)$$

در اینصورت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)u_1(t)dt=-r'(\circ)=-g'(\circ)-f(\circ)-g(\circ)f'(\circ)$$

نیز

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(\circ)u_1(t)dt-\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f'(\circ)u_\circ(t)dt$$
$$=-g'(\circ)f(\circ)-g(\circ)f'(\circ)$$

که مشابه بالایی است.

(ج)

$$g^{n}(\circ)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u_2(\tau)d\tau$$

(د) می توان نوشت:

$$\int g(\tau)f(\tau)u_2(\tau)d\tau=$$
$$=\frac{d^2}{dt^2}\left[g(-t)f(-t)\right]\Big|_{t=\circ}$$
$$=\frac{-d}{dt}\left[g'(-t)f(-t)+g(-t)f'(t)\right]_{t=\circ}$$
$$=g^{n}(\circ)f(\circ)-2g'(\circ)f'(\circ)+g(\circ)f''(\circ)$$

بنابراین

$$f(t)u_2(t)=f(\circ)u_2(t)-2f'(\circ)u_1(t)+f''(\circ)u_\circ(t)$$

۲٫۷۰) می‌توانیم به قیاس توابع ویژه پیوسته در زمان، یک مجموعه سیگنال ویژه گسسته در زمان تعریف کنیم.

فرض کنید

$$u_{-1}[n]=u[n]$$
$$u_\circ=\delta[n]$$

و

$$u_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

توابع زیر را تعریف کنید

$$u_k[n]=\underbrace{u_1[n][n]*\ldots*u_1[n]}_{\text{بار } k}\quad ,k>0$$

و

$$u_k[n]=\underbrace{u_{-1}[n]*\ldots*u_{-1}[n]}_{\text{بار } k}\quad ,k<0$$

توجه کنید که

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$

$$x[n]*u[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]$$

و

$$x[n]*u_{-1}[n]=x[n]-x[n-1]$$

(الف) مقدار زیر را بیابید

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]u_1[m]$$

(ب) نشان دهید که

$$\begin{aligned}x[n]u_1[n]&=x[0]u_1[n]-(x[1]-x[0])\delta[n-1]\\&=x[1]u_1[n]-(x[1]-x[0])\delta[n]\end{aligned}$$

(ج) سیگنالهای $u_2[n]$ و $u_3[n]$ را رسم کنید.

(د) $u_{-2}[n]$ و $u_{-3}[n]$ را رسم کنید.

(هـ) نشان دهی د که در حالت کلی برای $k>0$ داریم

$$u_k[n]=\frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!}(u[n])-u[n-k-1] \qquad (۱-۷۰-۲)$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید. از بند (ج) می دانیم که $u_k[n]$، بهازای $k=2,3$ معادله (م ۲-۷۰-۱) را ارضا می کند. سپس با فرض این که $u_k[n]$ نیز چنین است، با نوشتن $u_{k+1}[n]$ برحسب $u_k[n]$ نشان دهید که $u_{k+1}[n]$ نیز این معادله را ارضا می کند.)

(و) نشان دهید که در حالت کلی برای $k>0$ داریم.

$$u-k[n]=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n] \qquad \text{(م ۲–۷۰–۲)}$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید. توجه کنید که

$$u_{-(k+1)}[n]-u_{-(k+1)}[n-1]=u_{-k}[u] \qquad \text{(۳–۷۰–۲)}$$

سپس با فرض صحت معادله (م ۲–۷۰–۲) برای $u_{-k}[n]$، نشان دهید که این معادله بـرای $u_{-(k+1)}[n]$ هم معتبرست.)

حل:

داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]u_1[m]&=\sum_m x[m\{\delta[m]-\delta[m-1]\}]\\&=x[\circ]-x[1]\end{aligned}$$

(ب) داریم:

$$\begin{aligned}x[n]u_1[n]&=x[\circ]\delta[n]-x[1]\delta[n-1]+[x[\circ\ \delta[n-1]]-x[\circ]\delta[n-1]]\\&=x[\circ]u_1[n]-\{x[1]-x[\circ]\}\delta[n-1]\\&=x[\circ]\delta[n]-x[1]\delta[n-1]+x[1]\delta[n]-x[1]\delta[n]\\&=x[1]u_1[n]-\{x[1]-x[\circ]\}\delta[n]\end{aligned}$$

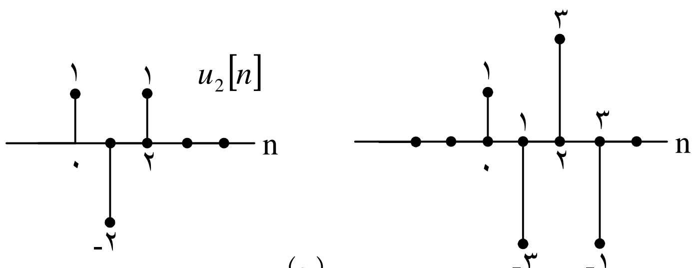
(ج) داریم:

$$u_2[n]=u_1[n]*u_1[n]=\delta[n]-2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

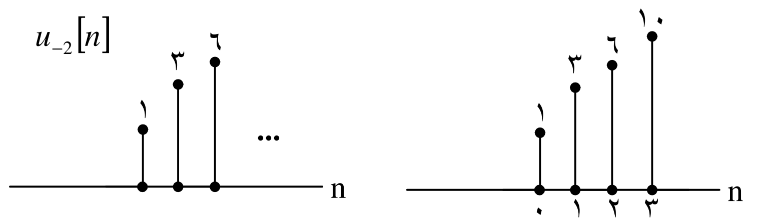
,

$$u_3[n]=\delta[n]=-3\delta[n-1]+3\delta[n-2]-\delta[n-3]$$

طرحهای سیگنالها در شکل ح ۲٫۷۰ نشان داده شده اند. **شکل ح ۲٫۷۰**



(ج)



شکل (ح ۲,۷۰,۱)

(د) داریم:

$$u_{-2}[n]=n+1 \qquad n\geq \circ$$

,

$$u-3[n]=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad n\geq \circ$$

شکل ها در شکل ح ۲,۷۰ نمایش داده شده است.

(هـ) وضعیت برای $K=1,2,3$ صحیح هستند. فرض کنیم برای k درست باشد، در این صورت برای $k>\circ$ ، $u_{k+1}[n]=u_1[n]*u_k[n]=-u_k[n]-u_k[n-1]$

با استدلال، می توانیم دلیل بیاوریم که حالت موردنظر برای تمام $k>\circ$ صحیح است.

(و) برای $k=1$ ، $u_{-1}[n]=u[n]$ که نشان می دهد که وضعیت صحیح است. برای $k=2$

$$u_{-2}[n]=\frac{(n+1)}{n!}=u[n]=(n+1)u[n]$$

که دوباره نشان می دهد ک وضعیت درست است. فرض کنید که برای $k-1>\circ$ صحیح باشد، در این صورت:

$$u_{-(k-1)}[n]=u_{-1}[n]-u_{-k}[n-1]$$

نیز:

$$\begin{aligned}u_{-(k-1)}[n]&=\frac{(n+k-2)!}{n!(k-2)!}\\&=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n]-\frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-2)!}u[n-2]\end{aligned}$$

با استفاده از مقایسه معادله بالا با معادله (ح ۲,۷۰,۱) داریم:

$$u_{-k}[n]=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n]$$

با استدلال، می توان دلیل آورد که وضعیت برای تمامی $k>0$ صحیح است.

۲,۷۱) دراین فصل از چند ویژگی و مفهوم ساده کننده تحلیل سیستمهای LTI استفاده کردیم. در این مسئله می خواهیم دو تا از این ویژگیها را دقیقتر بررسی کنیم. خواهیم دید که در بعضی حالات بسیار خاص باید این ویژگیها را با دقت و احتیاط به کاربرد، حال آنکه در حالتهای دیگر بدون وسواس از آنها استفاده می کنیم.

(الف) یکی از ویژگیهای اساسی و مهم کانولوشن (در هر دو حالت پیوسته و گسسته در زمان) ویژگی شرکت پذیری است. یعنی اگر $x(t)$، $h(t)$، و $g(t)$ سه سیگنال باشند داریم

$$x(t)*[g(t)*h(t)]=[x(t)*g(t)]*h(t)=[x(t)*h(t)]*g(t) \qquad \text{(م ۲-۷۱-۱)}$$

رابطه فوق به شرطی درست است که هر سه عبارت خوش تعریف و غیر بی نهایت باشند. چون معمولاً این شرط برقرارست، در عمل معمولاً بدون هیچ فرض و تفسیری رابطه فوق را به کار می بریم. ولی در بعضی حالات چنین نیست. برای مثال سیستم شکل م ۲-۷۱ را با $h(t)=u_1(t)$ و $g(t)=u(t)$ در نظر بگیرید.

پاسخ این سیستم را به ورودی زیر پیدا کنید.

برای تمام مقادیر $\qquad x(t)=1$

این کار را به سه طریق بیان شده در معادله (م ۲-۷۱-۱) انجام دهید:

$$x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow\boxed{g(t)}\longrightarrow y(t)$$

$$x(t)\longrightarrow\boxed{g(t)}\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t)$$

شکل م ۲-۷۱

(i) ابتدا کانولوشن دو پاسخ را بیابید و نتیجه حاصل را با $x(t)$ کانولوشن کنید.

(ii) اول $x(t)$ را با $u_1(t)$، و سپس نتیجه را با $u(t)$ کانولوشن کنید.

(iii) اول $x(t)$ را با $u(t)$ و سپس نتیجه را با $u_1(t)$ کانولوشن کنید.

(ب) بند (الف) را به ازای سیگنالهای زیر تکرار کنید.

$$x(t) = e^{-t}$$
$$h(t) = e^{-t}u(t)$$
$$g(t) = u_1(t) + \delta(t)$$

(ج) همین کار را با سیگنالهای زیر انجام دهید

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$g[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

پس در حالت کلی خاصیت شرکت پذیری کانولوشن تنها و تنها به شرطی برقرارست که سه عبارت معادله (م ۲–۷۱–۱) معنی داشته باشند (یعنی تعبیر آنها بر حسب سیستمهای LTI معنی دار باشد). مثلاً در بند (الف) مشتق گیری از یک ثابت و سپس انتگرال گیری از آن معنی دارد ولی فرآیند انتگرال گیری یک ثابت از $t = -\infty$ و سپس مشتقگیری از آن معنی ندارد، و تنها در چنین مواردی است که نمی توان خاصیت شرکت پذیری را به کار برد.

سیستمهای وارون هم به مبحث فوق بسیار مرتبط است. سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h(t) = u(t)$ در نظر بگیرید. چنان که در بند (الف) دیدیم ورودیهایی وجود دارد، مثلاً $x(t)$ =ثابت غیر صفر، که پاسخ سیستم به آنها بی نهایت می شود، بنابراین بررسی مسئله وارون کردن این سیستم برای بازیابی ورودی بی معنی است. البته اگر تنها ورودیهایی را در نظر بگیریم که خروجی محدودی دارند، یعنی ورودیهایی که در رابطه زیر صدق کنند.

$$\left|\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right| < \infty \qquad (۲–۷۱–۲)$$

سیستم فوق وارون پذیرست و وارون آن سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $u_1(t)$ وارون آن است.

(د) نشان دهید سیستم LTI با پاسخ ضربه $u_1(t)$ وارونپذیر نیست. (راهنمایی: دو ورودی مختلف پیدا کنید که خروجی سیستم به آنها، در تمام زمانها صفر باشد.) نشان دهید اگر ورودیها در معادله (م ۲–۷۲–۲) صدق کنند، این سیستم وارونپذیرست. [راهنمایی: در مسئله ۱–٤٤ نشان دادیم اگر سیستم LTI تنها به ازای ورودی $x(t) = ۰$ در تمام زمانها صفر شود، سیستم وارونپذیرست؛ آیا می توان دو

ورودی $x(t)$ پیدا کرد که در معادله (م ۲-۷۱-۲) صدق کنند و در کانولوشن با $u_1(t)$ متحد بـا صـفر باشند؟]

در این مسئله مطالب زیر را نشان دادیم:

۱. اگـر $h(t)$، $x(t)$، و $g(t)$ سـه سـیگنال باشـند کـه بـرای آنهـا $x(t)*g(t)$، $h(t)*g(t)$، و $x(t)*h(t)$ همگی خوش تعریف و محدود باشـند، خاصـیت شـرکت پـذیری (م ۲-۷۱-۱) برقـرار است.

۲. فرض کنید $h(t)$ پاسخ ضربه یـک سیـستم LTI اسـت و پاسخ ضـربه یـک سیـستم دیگـر $g(t)$ خاصیت زیر را دارد.

$$h(t)*g(t)=\delta(t) \qquad \text{(م ۲-۷۱-۳)}$$

با توجه به (۱) می توانیم برای تمـام ورودیهـای $x(t)$ کـه بـه ازای آنهـا $x(t)*h(t)$، و $x(t)*g(t)$ خوش تعریف و محدودند، دو ترکیب سری نشان داده شده در شکل م ۲-۷۱ هـر دو سیـستم همـانی انـد، پـس در سیـستم LTI را مـی تـوان وارون یکـدیگر دانـست. مـثلاً اگـر $g(t)=u_1(t)$ و $h(t)=u(t)$، تا وقتی خود را به ورودیهای صدق کننده در معادله (م ۲-۷۱-۲) محدود کنیم، این دو سیستم وارون یکدیگرند.

پس می بینیم که خاصیت شرکت پذیری معادله (م ۲-۷۱-۱) و تعریـف سیـستم وارون معادلـه (م ۲-۷۱-۳) به شرطی معتبرند که تمام کانولوشنهای موجود در آنها محـدود باشـند. چـون در تمـام مـسائل واقعی این شرط برقرارست، این خواص و تعرایف را بدون هیچ فرض و تفسیری بـه کـار مـی بـریم. توجه سیستمهای گسسته در زمان هم صادق اند [بند (ج) مسئله این را نشان می دهد].

حل:

(الف) داریم:

$$x(t)*[u_1(t)*u(t)]=x=1;\ \ for\ \ all\ t.$$
$$[x(t)*u_1(t)]*u(t)=0u(t)=0;\quad for\ \ all\ \ t$$

و

$$[x(t)*u(t)]*u_1(t)=\infty*u_1(t)=\text{تعریف نشده}$$

(ب) داریم: $h(t)=e^{-t}u(t)$ و $x(t)=e^{-t}$ و $g(t)=u_1(t)+\delta(t)$ بنابراین:

$$x(t)*[h(t)*g(t)]=x(t)=e^{-t}$$
$$[x(t)*g(t)]*h(t)=\circ$$
$$g(t)*[x(t)*h(t)]=g(t)*e^{-t}\int_{\circ}^{\infty}1d\tau \quad = \text{تعریف نشده}$$

(ج) داریم:

$$x[n]*[[n]*g[n]]=\left(1/2\right)^n*\delta[n]=\left(1/2\right)^n$$
$$(x[n]*g[n])*h[n]=\circ*h[n]=\circ$$
,
$$(x[n]*h[n])*g[n]=\left\{\left(1/2\right)^n\sum_{k=\circ}^{\infty}1\right\}*g[n]=\infty$$

(د) فرض کنید $h(t)=u_1(t)$، دراینصورت اگر ورودی برابر $x_1(t)=\circ$ باشد، خروجی برابر است با $y_1(t)=\circ$. حال، اگر ثابت $x_2(t)$ در اینصورت $y_2(t)=\circ$. بنابراین سیستم تغییرناپذیر نیست.

حال توجه کنید که:
$$\left|\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau\right|=\begin{cases}\circ & \forall t\ \ x_2(t)=\circ \quad \text{اگر}\\ \infty & x_2(t)\neq\circ \quad \text{اگر}\end{cases}$$

بنابراین اگر $\left|\int_{-\infty}^{t}cdt\right|\neq\infty$ دراین صورت فقط $x_2(t)=\circ$ نتیجه خواهد داد:

$y_2(t)=\circ$ بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

۲,۷۲) $\delta_\Delta(t)$ را یک پالس به ارتفاع $\frac{1}{\Delta}$ در $\circ<t\leq\Delta$ فرض کنید. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}\delta(t)=\frac{1}{\Delta}[\delta(t)-\delta_\Delta(t-\Delta)]$$

حل:

داریم:

$$\delta_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}u(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$

با مشتقگیری از طرفین داریم:

$$\frac{d}{dt}\delta_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}u'(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$
$$=\frac{1}{\Delta}\delta(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$
$$\frac{1}{\Delta}[\delta(t)-\delta(t-T)]$$

۲,۷۳) بااستقراء نشان دهید که

$$u_{-k}=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)$$

حل: برای $k=1$، $u_{-1}(t)=u(t)$. بنارراین وضعیت داده شده برای $k=1$ صحیح است.

حال فرض کنید که مطلب فوق برای $k>1$ صحیح باشد.

در اینصورت:

$$u_{-1}(k+1)(t)=u(t)*u_{-k}(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{t}u_{-k}(t)=\int_{\circ}^{t}u_{-k}(\tau)$$
$$=\int_{\circ}^{t}\frac{\tau_{k-1}}{(k-1)!} \qquad t\geq\circ$$
$$=\frac{\tau^{k}}{k(k-1)!}\Bigg|\tau=t>\circ=\frac{t^{k}}{k!}u(t)$$