فصل سوم

نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب

۳,۱) سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$ حقیقی و دارای تناوب پایه $T = A$ است. ضرائب غیرصفر سری فوریه $x(t)$ عبارت اند از

$$a_1 = a_{-1}2, a_3 = a*_{-3} = 4j$$

$x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید

$$x(t) = \sum_{k=\circ}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

حل:

با استفاده از ترکیب سری فوریه معادله (۳,۳۸):

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{j\left(2\pi/T\right)} + a_{-1} e^{-j\left(2\pi/T\right)t} + a_3 e^{j3\left(2\pi/T\right)t} + a_{-3} e^{-3j\left(2\pi/T\right)t} \\ &= 2e^{j\left(2\pi/8\right)t} + 2e^{-j\left(2\pi/8\right)} + 4je^{3j\left(2\pi/8\right)t} - 4j^{-3j\left(2\pi/8\right)t} \\ &= 4\cos\left(\pi/4\, t\right) - 8\sin\left(6\, n/8\, t\right) = 4\cos\left(3\pi/4\, t + \pi/2\right) \end{aligned}$$

....

۳,۲) سیگنال متناوب گسسته در زمان $x[n]$ حقیقی و دارای تناوب پایه $N = 5$ است. ضرائب غیر صفر سری فوری $x[n]$ عبارت اند از

$$a_\circ = 1, a_2 = a^*_{-2} = e^{j\pi/4}, a_4 = a^*_{-4} = 2e^{j\pi/}$$

$x[n]$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x[n] = A_\circ + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k)$$

حل:

با استفاده ا ز ترکیب سری فوری معادله (۳,۹۵):

$$x[n]=a_{\circ}+a_2e^{j2\left(2\pi/N\right)n}+a_{-2}e^{-j2\left(2\pi/N\right)n}+a_4e^{j4\left(2\pi/N\right)\pi}+a_{-4}e^{-j4\left(2\pi/N\right)n}$$
$$=1+a^{j\left(\pi/4\right)}e^{j2\left(2\pi/5\right)n}+e^{-j\left(\pi/4\right)}e^{-2j\left(2\pi/5\right)n}$$
$$+2e^{j\left(\pi/3\right)}e^{j4\left(2\pi/5\right)n}+2e^{-j\left(\pi/3\right)}\propto -4\ e^{-j4\left(2\pi/N\right)n}$$
$$=1+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}n+\pi/4\right)+4\cos\left(\frac{8\pi}{5}n+\pi/3\right)$$
$$=1+2\sin\left(\frac{4\pi}{5}n+\frac{3\pi}{4}\right)+4\sin\left(\frac{8\pi}{5}n+\frac{5n}{6}\right)$$

۳,۳) برای سیگنال متناوب پیوسته در زمان

$$x(t)=2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

فرکانس $\omega_{\circ}$ و ضرائب سری فوریه a_k را به نحوی بیابید که داشته باشیم

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_{\circ}t}$$

حل:

سیگنال داده شده عبارتست از:

$$x(t)=2+\frac{1}{2}e^{j\left(2\pi/3\right)t}+1/2\,e^{-j\left(2\pi/3\right)}-2\,je^{j\left(5\pi/3\right)t}+2\,je^{-j\left(5\pi/3\right)t}$$
$$=2+1/2\,e^{j2\left(2\pi/6\right)t}+1/2\,e^{-j2\left(2\pi/6\right)t}-2\,je^{5j\left(2\pi/6\right)t}+2\,je^{-5j\left(2\pi/6\right)t}$$

با استفادهاز مطالب فوق؛ می توانیم نتیجه بگیریم که فرکانس پایه $x(t)$ برابر است با $2\pi/6=\pi/3$

ضرایب غیر صفر سری فوریه عبارتست از:

$$\propto_{\circ}=2\ ,\ a_2=-a_2=\frac{1}{2}\ ,\ a_5=a_{-5}^{*}=-2j$$

۳,٤) بااستفاده از فرمول تجزیه سری فوریه (۳-۳۹) ضرایب a_k سیگنال متناوب زیر را بیابید.

$$x(t)=\begin{cases}1/5, & \circ \le t<1 \\ -1/5, & 1\le t<2\end{cases}$$

فرکانس پایه عبارت است از $\omega_\circ=\pi$.

حل:

چون $\omega_\circ=\pi$, $T=\frac{2\pi}{\omega_\circ}=2$، بنابراین:

$$a_k=\tfrac{1}{2}\int_\circ^1 1.5\theta^{-k\pi t}dt-\tfrac{1}{2}\int_1^2 1.5e^{-jk\pi t}dt$$
$$=\frac{3}{2k\pi j}(1-e-jk\pi)=\frac{3}{k\pi}e^{-jk(\pi/2)}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

....

۳,۵) $x_1(t)$ سیگنال در زمانی با فرکانس پایه ω_1 و ضرائب سری فوریه a_k فرض کنید. داریم

$$x_2(t)=x_1(1-t)+x_1(t-1)$$

فرکانس پایه ω_2 سیگنال $x_2(t)$ را برحسب ω_1 بیان کنید. ضرائب سری فوریه $x_2(t)$، b_k، را برحسب ضرائب a_k بیان کنید. می توانید از خواص جدول ۳-۱ استفاده کنید.

حل:

هر دو سیگنال $x_1(1-t)$ و $x_1(t-1)$ تناوب پایه $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ متناوب هستند. و به دلیل $y(t)$ ترکیب خطی $x_1(1-t)$ و $x_1(1-t)$ می باشد، $y(t)$ نیز با تنواب اصلی $T_2=\frac{2\pi}{\omega_1}$ تناوب خواهد داد.

بنابراین: $\omega_2=\omega_1$ چون $x_1(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$ (سری فوریه $\leftarrow F_s$)

بااستفاده از نتیجه جدول ۳,۱ خواهیم داشت:

$$x_1(t+1)\xleftrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}$$
$$x_1(t-1)\xrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}\Rightarrow x_1(-t+1)\xrightarrow{FS}a-k^{e^{-j(2\pi/\pi)}}$$

بنابراین:

$$x_1(t+1)+x_1(1-t)\xleftrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}+a-k\ e^{-jk\left(2\pi/T_1\right)}=e^{-j\omega_1 k}(a_k+a-k)$$

۳،٦) سه سیگنال متناوب پیوسته در زمان با نمایش سری فوریه زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1(t)=\sum_{k=\circ}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

$$x_2(t)=\sum_{k=-100}^{100}\cos(k\pi)e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

$$x_3(t)=\sum_{k=-1002}^{100} j\sin\left(\frac{k\pi}{}\right)e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

با استفاده از خواص سری فوریه به سئوالهای زیر پاسخ دهید:

(الف) کدام سیگنالها حقیقی اند؟

(ب) کدام سیگنالها زوج اند؟

حل:

(الف) با مقایسه ی $x_1(t)$ با ترکیب سری فوریه معادلـه (۳،۳۸)، ضـرایب سـری فوریـه $x_1(t)$ را بـه صورت زیر بدست می آوریم:

$$a_k=\begin{cases}\left(1/2\right)^k & \circ\le k\le 100\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

از جدول ۳،۱، می دانیم که اگر $x_1(t)$ حقیقی باشد، در اینصورت a_k باید برابـر بـا مـردوج مخـتلط باشد معادله:

از جدول ۳،۱، می دانیم که اگر $x_1(t)$ حقیقی باشد، در اینصورت a_k باید برابر با مزدوج مختلط باشد

ضریب سری فوریه $x_2(t)$ برابر است با:

$$a_k=\begin{cases}\cos(k\pi) & \circ\le k\le 100\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

با استفاده از جدول ۳،۱، می دانیم که اگر $x_2(t)$ حقیقی باشد، بایستی $a_k=a_{-k}^*$ بـدلیل اینـک ایـن مطلب در مورد $x_2(t)$ صدق می کند $x_2(t)$ سیگنالی حقیقی است.

به طور مشابه، ضرایب سری فوریه $x_3(t)$ عبارتست از:

$$a_i = \begin{cases} j \ \ \sin\left(k\pi/2\right) & \circ \le k \le 100 \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

دوباره، با استفاده از جدول ۳,۱ می دانیم که $x_3(t)$ حقیقی می باشد. زیـرا اگـر $x_3(t)$ حقیقـی باشـد، بایستی $a_k = a_{-k}^*$ که این مطلب در مورد سیگنال $x_3(t)$ صدق می کند.

(ب) برای یک سیگنال، ضرایب سری فوریه بایستی روج باشد که این تنها در مورد $x_2(t)$ صـدق مـی کند.

....

۳,۷) فرض شده است که:

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

داریم:

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$$

بنابراین:

$$a_k = \frac{b_k}{j\left(2\pi/T\right)k} \ , \ k \ne \circ$$

هر گاه $k = \circ$ باشد:

با استفاده از اطلاعات داده شده:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)dt = \frac{2}{T}$$

بنابراین:

$$a_k = \begin{cases} 2/T & k = \circ \\ \dfrac{b_k}{j\left(2\pi/T\right)k} & k \ne \circ \end{cases}$$

....

۳,۸) اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x(t)$ داده شده است:

۱. $x(t)$ حقیقی و فردست.

۲. $x(t)$ دارای تناوب پایه $T=2$ و ضرائب سری فوریه a_k است.

۳. به ازای $|k|>1$، $a_k=\circ$

٤. $\frac{1}{2}\int_T^2 x(t)dt=2$

دو سیگنال متفاوت برای ارضای این شرایط بیابید.

حل:

بدلیل اینکه $x(t)$ سیگنالی فرد و حقیقی است (راهنمای)، ضرایب سری فوریه اش، a_k، سوهومی خالص و فرد خواهند بود .

....

۳,۱۰) بدلیل اینکه ضرایب سری فوریه برای هر N های تکرار می شوند، داریم:

$$a_1=a_{15}\ \ ,a_2=a_{16}\ ,\ a_3=a_{17}$$

بعلاوه، چون سیگنال حقیقی و فرد است، ضرایب سری فوریه، a_k، فرد و موهومی خالص خواهند بود. بنابراین $a=\circ$ و $a_3=-a_{-3}$ و $a_2=-a_{-2}$ و $a_1=-a_{-1}$

در نهایت: $a_{-3}=-3j$ و $a_{-2}=-2j$ و $a_{-1}=-j$

۳,۱۱) اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x[n]$ داده شده است.

۱. $x[n]$ حقیقی و زوج است.

۲. دوره تناوب $x[n]$، $N=10$ و ضرائب سری فوریه آن a_k است.

۳. $a_{11}=5$

٤. $\frac{1}{10}\sum_{n=\circ}^{9}|x[n]|^2=50$

نشان دهید که $x[n]=A\cos(Bn+C)$ و مقادیر عددی ثابتهای A، B، C را بیابید.

حل:

بدلیل اینکه برای هر $N=10$ ضرایب سری فوریه تکرار می شود، داریم $a_1=a_{11}=5$، بعلاوه از آنجائیکه، $x[n]$ حقیقی و زوج است، a_k نیز حقیقی و زوج خواهد بود. بنابراین $a_1=a_{-1}=5$.

همچنین فرض شده است که:

$$\frac{1}{40}\sum_{n=\circ}^{9}|x[n]|^2=50$$

بااستفاده از رابطه پارسئوال

$$\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2=50$$

$$\sum_{k=-1}^{8}|a_k|^2=50$$

$$|a-1|^2+|a_1|^2+a_\circ^2+\sum_{k=2}^{8}|a_k|^2=50$$

$$a_\circ^2+\sum_{k=2}^{8}.|a_k|^2=\circ$$

بنابراین برای $k=2,\ldots,8$ ، $a_k=\circ$، حال با استفاده از ترکیب معدله (۳,۹٤)، داریم:

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}Kn}=\sum_{k=-1}^{8}a_k e^{j\frac{2\pi}{10}Kn}$$

$$=5e^{j\frac{2\pi}{10}n}+5e^{-j\frac{2\pi}{10}n}$$

$$=10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

....

۳,۱۲) برای هر دو سیگنال متناوب $x_1[n]$ و $x_2[n]$، $N=4$ و ضرائب سری فوریه به صورت زیر مشخص شده اند.

$$x_1[n]\leftrightarrow a_k\ .\ \ x_2[n]\leftrightarrow b_k$$

که

$$a_\circ=a_3=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_2=1 \qquad \text{و} \qquad b_\circ=b_1=b_2=b_3=1$$

با استفادهاز خاصیت ضرب جدول ۳-۱، ضرائب سری فوریه c_k سیگنال $g[n]=x_1[n]x_2[n]$ را بیابید.

حل:

با استفاده از خاصیت ضرب، داریم:

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{FS} \sum_{\ell=\langle N\rangle} a_\ell b_{k-1} = \sum_{k=3}^{3} a_\ell b_{k-1}$$

$$\xleftrightarrow{FS} a_\circ b_k + a_1 b_{k-1} + a_z b_{k-z} + a_3 b_{k-3}$$

$$\xleftrightarrow{FS} b_n, 2b_k + 2b_{k-1} + b_{k-2}$$

چون b_k به ازای تمام مقادیر k، برابر با (۱) است، بدیهی است که $b_k + 2b_{k-1} + 2b_{k-3} + 2b_{k-3}$ که به ازاء جمیع مقادیر k برابر ٦ خواهد بود. بنابراین؛

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{FS} 6$$

....

۳,۱۳) یک سیستم LTI پیوسته در زمان با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

ورودی این سیستم سیگنال متناوب زیر با دوره تناوب $T = A$ است.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \circ \le t < 4 \\ -1 & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

ضرائب سری فوریه خروجی سیستم $y(t)$ را بیابید.

حل:

ابتداً ضرایب سری فوریه $x(t)$ را محاسبه می کنیم. بدیهاً، چون $x(t)$، فرد و حقیقی اســت، a_k فـرد و موهومی خالص خواهد بود. بنابراین $a_\circ = \circ$، حال:

$$a_k = \frac{1}{8}\int_\circ^8 x(t)e^{-j(2\pi/8)}dt$$

$$= 1/8 \int_\circ^4 e^{-j(2\pi/8)tk}dt - \frac{1}{8}\int_4^8 e^{-j(2\pi/8)tk}dt$$

$$= \frac{1}{j\pi k}\left[1 - e^{-j\pi k}\right]$$

واضح است، جمله بالا برای تمام kهای زوج برابر صفر خواهد بود. بنابراین

$$a_k \begin{cases} \circ & k \text{ زوج} \\ \dfrac{2}{j\pi k} & k \text{ فرد} \end{cases}$$

هنگامیکه $x(t)$ از طریق یک کانال با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ عبور می کند، خروجی $y(t)$ به صورت زیر بدست می آید: (بخش ۳،۸ را مطالعه کنید):

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_\circ)e^{jk\omega_\circ t}$$

که $\omega_\circ = \frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$، چون a_k تنها به ازاء مقادیر فرد k صفر نیست، بایستی سری فوق را برای k های فرد محاسبه کنیم: بعلاوه، توجه کنید که:

$$H(j\omega)=\left(jk\left(\pi/4\right)\right)=\frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\pi/4\right)}$$

برای مقادیر فرد k، برابر صفر است، بنابراین $y(t)=\circ$

....

۳،۱٤) قطار ضربه زیر

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$$

ورودی یک سیستم LTI، با پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ است، و خروجی سیستم عبارت است از

$$y[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)$$

مقادیر $H\left(e^{jk\pi/2}\right)$ را به ازای $k=\circ,1,2,3$ بیابید.

حل:

سیگنال $x[n]$ با پریود $N=4$ ، متناوب می باشد. ضرایب سری فوریه ای عبارتند از:

$$a_k=\frac{1}{4}\sum_{n=\circ}^{3}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{4} \qquad for\ \ all\ \ k$$

از نتایج بیان شده در بخش ۳،۸، می دانیم که خروجی $y[n]$ برابر است؛

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}a_k H\left(e^{j\left(2\pi/4\right)k}\right)e^{jk\left(2\pi/4\right)n}$$
$$=\frac{1}{4}H\left(e^{j0}\right)e^{j0}+\frac{1}{4}H\left(e^{j\left(\pi/2\right)}\right)e^{j\left(\pi/2\right)}$$
$$+\frac{1}{4}H\left(e^{j\left(3\pi/2\right)}\right)e^{j\left(3\pi/2\right)}+\frac{1}{4}H\left(e^{j(\pi)}\right)e^{j(\pi)}$$

بااستفاده از اطلاعات داده شده، می دانیم که $y[n]$ برابر است با:

$$y[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{2}n+\pi/4\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\pi/4\right)$$
$$=1/2\,e^{j\left(\pi/2\pi+\pi/4\right)}+1/2\,e^{-j\left(\pi/2n+\pi/4\right)}$$
$$=1/2\,e^{j\left(\pi/2n+\pi/4\right)}+1/2\,e^{j\left(3\pi/2n-\frac{\pi}{4}\right)}$$

با مقایسه با معادله (ح ۳,۱٤,۱) داریم:

$$H\left(e^{j0}\right)=H\left(e^{j\pi}\right)=0$$

$$H\left(e^{j\pi/2}\right)=e^{2j\pi/4}$$

$$H\left(e^{3j\pi/2}\right)=2e^{-j\pi/4}$$

۳,۱۵) یک فیلتر سیگنال متناوب $x(y)$ با $T=\pi/6$ و ضرائب سری فوریه a_kاست. می دانیم که

$$x(t)\xrightarrow{S}y(t)=x(t)$$

به ازای کدام مقادیر k داریم $a_k=0$ ؟

حل:

از نتایج قسمت ۳,۸

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k H\left(jk\omega_0\right)e^{jk\omega_0 t}$$

که $\omega_{\circ}=\frac{2\pi}{T}=12$. چون $H(j\omega)$ برای $|\omega|>100$، برابر صفر است، بزرگترین مقدار $|k|$ آنـان صفر نیست، بایستی به صورت مقابل باشد: $|k|\omega_{\circ}\le 100$

که بیان می دارد $|k|\le 8$، بنابراین برای $|k|>8$ برابر صفر می باشد.

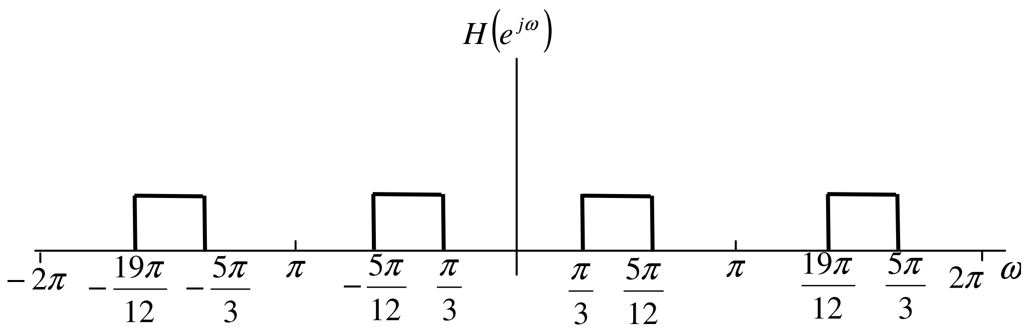
۳,۱٦) خروجی فیلتر شکل م ۳-۱٦ به ورودیهای متناوب زیر با بیابید.

(الف) $x_1[n]=(-1)^n$

(ب) $x_2[n]=1+\sin\left(\frac{3\pi}{5}n+\frac{\pi}{4}\right)$

(ج) $x_3[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k}u[n-4k]$

شکل م ۳-۱٦



حل:

(الف) سیگنال داده شده $x_1[n]$ برابر است با:

$$x_1[n]=e^{j/2(\pi/2)n}$$

بنـابراین $x_1[n]$ بـا پریـود $N=2$ متنـاوب اسـت و ضـرایب سـری فوریـه اش در بـازه $\circ\le k\le 1$ برابراست با:

$$\alpha_{\circ}=\circ \quad \text{و} \quad \alpha_1=1$$

بااستفاده از نتایج بدست آمده در قسمت ۳,۸، خروجی $y_1[n]$ برابر است؛

$$y_1[n]=\sum_{k=\circ}^{1} a_k H\left(e^{j2k\pi/2}\right)e^{k(2\pi/2)}$$
$$=\circ+a_1 H\left(e^{j\pi}\right)e^{j\pi}=\circ$$

(ب) سیگنال $x_2[n]$ با پریود $N=16$، متناوب می باشد، و می توانیم این سیگنال را به صورت زیر بنویسیم:

$$x_2[n]=e^{j(2\pi/16)(\circ)n}-\left(j/2\right)e^{j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{-j(2\pi/16)(3)n}$$
$$=e^{j(2\pi/16)n}-\left(j/2\right)e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(13)n}$$

بنابراین، ضریب غیرصفر سری فوریه $x_2[n]$ در بازه و $\circ\le k\le 15$ برابر است با:

$$a_\circ=1 \quad \text{و} \quad a_3=-\left(j/2\right)e^{j\pi/4} \quad \text{و} \quad a_{13}=\left(j/2\right)e^{-j\pi/4}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت ۳،۸، خروجی $y_2[n]$ برابر است با:

$$y_2[n]=\sum_{k=\circ}^{15} a_k H\left(e^{j\pi k/16}\right)e^{k(2\pi/16)}$$
$$=\circ-\left(j/2\right)\left(e^{j\pi/4}\right)e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(13)n}$$
$$=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)n+\pi/4$$

(ج) سیگنال $x_3[n]$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x_3=\left[\left(1/2\right)^n u[n]\right]*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]=g[m]*r[n]$$

که $g[n]=\left(1/2\right)^n u[n]$ و $r[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$. بنابراین $y_3[n]$ را می توانیم با عبور سیگنال از طریق فیلتری با پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ بدست آوریم. سپس نتیجه را با $g[n]$ کانوال کنیم.

سیگنال $r[n]$ با پریود ٤، متناوب است و ضریب سری فوریه اش عبارتند از:

$$a_k=1/14 \qquad for \quad all \quad k$$

خروجی $q[n]$ که با عبور دادن سیگنال $r[n]$ از طریق فیلتری با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ بدست می آید عبارتست از:

$$q[n]=\sum^{3} k=\circ a_k H\left(e^{j2k\pi/4}\right)e^{k(2\pi/4)}$$

$$=\left(1/4\right)\int H\left(e^{j\circ}\right)e^{j\circ}+H\left(e^{j\pi/2}\right)e^{j(\pi/2)}+H\left(e^{j\pi}\right)e^{j\pi}$$

$$+H\left(e^{j3(\pi/2)}\right)e^{j3\pi/2}\Big)=\circ$$

بنابراین خروجی نهایی $\circ=y_3[n]=q[n]\times q[n]$

بناراین خروجی نهایی $\circ=y_3[n]=q[n]*q[n]$

۳,۱۷) سه سیستم گسسته در زمان S_1، S_2، S_3 در نظر بگیر ید که پاسخشان به ورودی نمایی مختلط e^{j5t} به صورت زیرست.

$$S_1: e^{j5t}\rightarrow te^{j5t}$$
$$S_2: e^{j5t}\rightarrow te^{j5(t-1)}$$
$$S_3: e^{j5t}\rightarrow \cos(5t)$$

در مورد هر سیستم بگویی آیا با اطلاعات داده شده می توان نتیجه گرفت که سیستم مطمئناً LTI نیست.

حل:

(الف) بدلیل اینکه نمایی هایی مختلط توابع اصلی سیستم های LTI هستند. خروجی $x_1(t)=e^{j5t}$ بایستی یک خروجی شامل Ae^{j5t} بوجود آود که A ثابتی مختلط است. امّا، واضح است که در این مورد خروجی شامل جمله ی مذکور نمی باشد. بنابراین سیستم s_1، مشخصاً LTI نیست.

(ب) سیستم می تواند LTI باشد، زیرا خاصیت تابع اصلی سیستمهای LTI را برآورده می سازد.

(پ) (الف) در این مورد، خروجی شامل $y_3(t)=\frac{1}{2}e^{j5t}+\frac{1}{2}e^{j5t}$ می باشد. واضح است که خروجی شامل یک نمایی مختلط با فرکانس ۵- است که در ورودی $x_3(t)$ حضور ندارد. می دانیم که سیستمهای LTI هرگز نمی تواند نمایی مختطی با فرکانس ۵- بدون وجود داشتن نمایی مختلطی با همان فرکانس ورودی، تولید کنند. بدلیل اینکه این مورد در مسئله صحیح نیست، سیستم مشخصاً LTI نمی باشد.

۳,۱۸) سه سیستم گسسته در زمان S_1، S_2، و S_3 در نظر بگیرید که پاسخشان به ورودی نمایی مختلط $e^{jn\pi/2}$ به صورت زیرست

$$S_1 : e^{\pi nt/2} \rightarrow e^{j\pi n/2}u[n]$$
$$S_2 : e^{j\pi n/2} \rightarrow e^{j3\pi n/2}$$
$$S_3 : e^{j\pi n/2} \rightarrow 2e^{j5\pi n/2}$$

در مورد هر سیستم بگویید آیا با اطلاعات داده شده می ـوان نتیجه گرفت که سیستم مطمئناً LTI نیست.

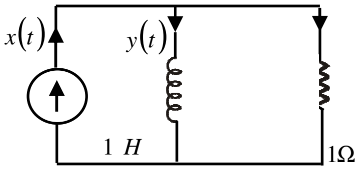
حل:

(الف) با استفاده از بحثی مشابه آن در قسمت (الف) مسأله قبلی مطرح شد نتیجه می گیریم که s_1 با توجه به تعریف LTI نیست.

(ب) خروجی در این مورد برابر است با $y_2[n]=e^{j(3\pi/2)n}=e^{-j(\pi/2)n}$. واضح است که تابع اصلی را نقض می کند. بنابراین s_2 طبق تعریف LTI نیست.

(ج) در این مورد خروجی برابر است با $y_3[n]=2e^{j(5\pi/2)n}=2e^{j(\pi/2)n}$. که این خاصیت LTI بودن تابع اصلی را نقض نمی کند. بنابراین s_3 می توان یک سیستم LTI تلقی شود.

۳,۱۹) سیستم LTI علّی ساخته شده با مدار RL شکل م ۳-۱۹ را در نظر بگیرید. یک منبع جریان سیگنال ورودی $x(t)$ در اعمال می کند و خروجی سیستم جریان $y(t)$ القاگرست.



شکل م ۳-۱۹

(الف) معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

(ب) پاسخ فرکانسی این سیستم را با در نظر گرفتن خروجی به ازای ورودی $x(t)=e^{j\omega t}$ به دست آورید.

(ج) یک سیستم LTI علّی به صورت مدار RLC شکل م ۳-۲۰ ساخته شده است. ورودی مدار منبع ولتاژ $x(t)$ به دست آورید.

(ج) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t)=\sin(t)$ بیابید.

حل:

(الف) ولتاژ در طول هادی = $\ell \dfrac{dy(t)}{dt}$.

جریان ولتاژ در طول هادی = $\dfrac{\ell}{R}\dfrac{dy(t)}{dt}$.

جریان ورودی $x(t)$ = جریان در مقاومت + جریان در هادی. بنابراین:

$$x(t)=\frac{\ell}{R}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با جایگذاری مقادیر L و R داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

(ب) با استفاده از روش ذکر شده در ۳,۱۰,۱، می دانیم که زمانیکه ورودی سیستم $e^{i\omega t}$ باشد. خروجی این سیستم برابر با $H(j\omega)e^{j\omega t}$ خواهد بود با جایگذاری در معادله دیفرانسیل قسمت (الف) خواهیم داشت:

$$j\omega\, H(j\omega)e^{j\omega t}+H(j\omega t)e^{j\omega t}=e^{j\omega t}$$

بنابراین

$$j(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

(ج) سیگنال $x(t)$، سیگنالی متناوب با پریود 2π می باشد. به دلیل اینکه $x(t)$ بـه صـورت زیـر قابـل نوشتن می باشد:

$$x(t)=\tfrac{1}{2}e^{j(2\pi/2\pi)t}+\tfrac{1}{2}e^{-j(2\pi/2\pi)t}$$

ضرب غیر صفر سری فوریه برابر است با:

$$a=a_{-1}=\tfrac{1}{2}\cdot$$

بااستفاده از نتایج بدست آمده در قسمت ۳٫۸ (معادله (۳٫۱۲٤) را ببینید)، داریم:

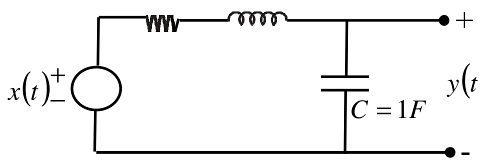
$$\begin{aligned}y(t)&=a_1H(j)e^{jt}+a_{-1}H(-j)e^{-jt}\\&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j}e^{jt}+\frac{1}{1-j}e^{-jt}\right)\\&=\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(e^{-j\pi/4}+e^{j\pi/4}e^{-jt}\right)\\&=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(t-\tfrac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

۳٫۲۰) یک سیستم LTI علّی به صورت مدار RLC شکل م ۳–۲۰ ساخته شـده اسـت. ورودی مـدار منبع ولتاژ $x(t)$ است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیتم در نظر بگیرید.

(الف) معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

(ب) پاسخ فرکانسی این سیستم را با در نظر گرفتن خروجی به ازای ورودی $x(t)=e^{j\omega t}$ بـه دسـت آورید.

(ج) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t)=\sin(t)$ بیابید.



شکل م ۳–۲۰

حل:

(الف) جریان جاری شده در خازن = $e\frac{dy(t)}{dt}$

ولتاژ در خازن = $Rc\frac{dy(t)}{dt}$.

ولتاژ در هادی = $Lc\frac{d^2y(t)}{dt^2}$.

$x(t)$ ولتاژ ورودی = ولتاژ در طول مقاومت + ولتاژ هادی + ولتاژ در خازن.

پس:

$$x(t)=Lc\frac{d^2y(t)}{dt^2}+Rc\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با جایگذاری مقادیر L و R و C داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

(ب) حال از روش مشابهی که برای بار اول در قسمت (ب) مسأله قبلی استفاده می کنیم. اگر فرض کنیم که ورودی به صورت $e^{j\omega t}$ باشد، در اینصورت خروجی به صورت $H(j\omega)e^{j\omega t}$ خواهد بود. با جایگذاری در معادله در معادله دیفرانسیل فوق و ساده سازی عبارت زیر را بدست خواهیم آورد:

$$H(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2+j\omega+1}$$

(ج) سیگنال $x(t)$، سیگنالی متناوب با پریود 2π می باشد. چون $x(t)$ می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$x(t)=\frac{1}{2j}e^{j(2\pi/2\pi)t}-\frac{1}{2j}e^{-j(2\pi/2\pi)t}$$

ضرایب غیرصفر $x(t)$، عبارتند از:

$$a_1=a_{-1}^*=\frac{1}{2j}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده در ۳,۸ (معادله (۳,۱۲٤) را ببینید) داریم:

$$y(t)=a_1H(j)e^{jt}-a_{-1}H(-j)e^{-jt}$$
$$=\left(\frac{1}{j}e^{jt}-\frac{1}{-j}e^{-jt}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)$$
$$=-\cos(t)$$

۳,۲۱) سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$ حقیقی و دارای دوره تناوب پایه $T=8$ است. ضـرائب غیرصفر سری فوریه $x(t)$ عبارت اند از:

$$a_1=a_{-1}^*=j,\ a_5=a_{-5}=2$$

$x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x(t)=\sum_{k=\circ}^{\infty}A_k\cos\left(w_k^t+\phi_k\right)$$

حل:

با استفاده از ترکیب سری فوریه معادله (۳,۳۸):

$$x\ (t\ )=a_1e^{j\left(2\pi/T\right)t}+a_{-1}e^{-j\left(2\pi/T\right)t}+a_5e^{j5\left(2\pi/T\right)t}+a^{-5}\left(2\pi/T\right)t$$

$$=je^{j\left(2\pi/8\right)t}-je^{-j\left(2\pi/8\right)t}+2e^{j5\left(2\pi/8\right)t}+2e^{-j5\left(2\pi/8\right)t}$$

$$=-2\sin\left(\pi/4\,t\right)+4\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right)$$

$$=-2\cos\left(\pi/4\,t=\pi/2\right)+4\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right)$$

۳,۲۲) ضرائب سری فوریه سیگنالهای زیر را بیابید.

(الف) $x(t)$ شکلهای م ۳-۲۲ (الف) تا (و)

(ب) $x(t)$ دوره تناوب ۲ متناوب است و

در $-1 < t < 1$ ، $x(t) = e^{-t}$

(ج) $x(t)$ متناوب با دوره تناوب ٤ است و

$$x(t) = \begin{cases} \sin \pi t & \circ \le t \le -2 \\ \circ, & 2 < t \le 4 \end{cases}$$

حل:

(الف) (i) $T = 1$ و $a_\circ = \circ$ و $a_k = \dfrac{j(-1)^k}{k\pi}$ و $k \neq \circ$

(ii) در اینجا:
$$x(t) = \begin{cases} t+2 & -2 < t < -1 \\ 1 & -1t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$T = 6$ و $a_\circ = 1/2$ و

$$a_k = \begin{cases} \circ & \text{زوج } k \\ \dfrac{8}{\pi^2 k^2} \sin\left(\dfrac{\pi k}{2}\right) \sin\left(\dfrac{\pi k}{6}\right) & \text{فرد } k \end{cases}$$

(iii) $T = 3$ و $a_\circ = 1$ و

$$a_k = \frac{3j}{2\pi^2 k^2}\left[e^{j2k\pi/3} Sin\left(k\pi 2/3\right) + 2e^{jk\pi/3} \sin\left(k\pi/3\right)\right) \quad k \neq \circ$$

(iv) $a_k = 1/2 - (-1)^k, k \neq \circ \;,\; T = 2 \;,\; a_\circ = -1/2$

(V) $t = 6$ و $\omega_\circ = \pi/3$ و

$$a_k = \frac{\cos\left(2k\pi/3\right) - \cos\left(k\pi/3\right)}{jk\pi/3}$$

توجه کنید که $a_\circ = \circ$ و a_k زوج$= \circ$

(vi) $a_\circ = 3/4$ و $\omega_\circ = \pi/2$ و $T = 4$

$$a_k = \frac{e^{-jk\pi/2}\sin\left(k\pi/2\right) + e^{-jk\pi/4}\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi} \forall k$$

ب) $T = 2$ و برای تمامی k ها $a_k = \frac{(-1)^k}{2(1+jk\pi)}\left[e - e^{-1}\right]$

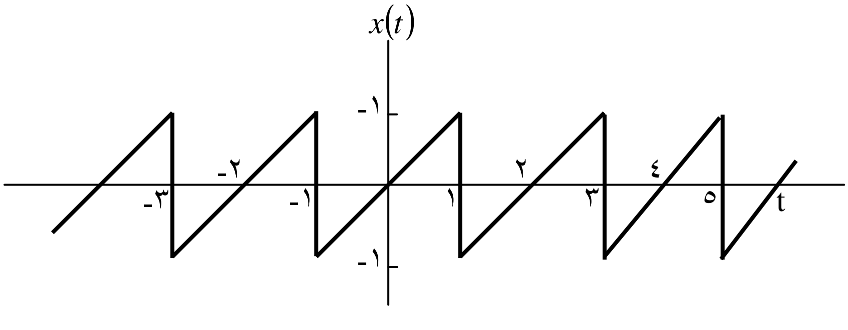
ج) $T = 3$ و $\omega_\circ = 2\pi/3$ و $a_\circ = 1$ و

$$a_k = \frac{2e^{-j\pi k/3}}{\pi k}\sin\left(2k\pi/3\right) + \frac{e^{-j\pi k}}{\pi k}\sin(\pi k)$$

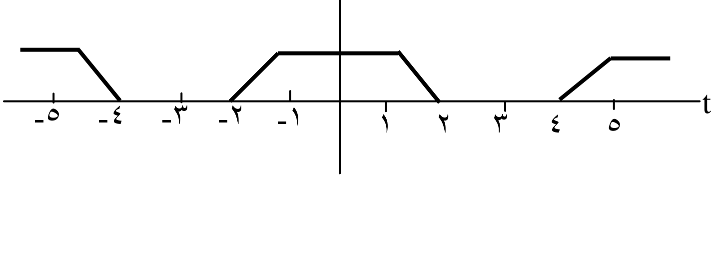
....

۳,۲۳) در هر یک از موارد زیر ضرائب سری فوریه یک سیگنال پیوسته در زمان متناوب دارای دوره تناوب ٤ بیان شده است. سیگنال $x(t)$ را در هر مورد بیابید.

الف) $a_k = \begin{cases} \circ, & k = \circ \\ (j)^k \dfrac{\sin k\pi/4}{k\pi} & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$

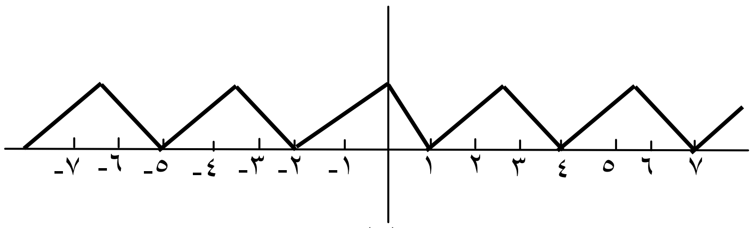


(الف)



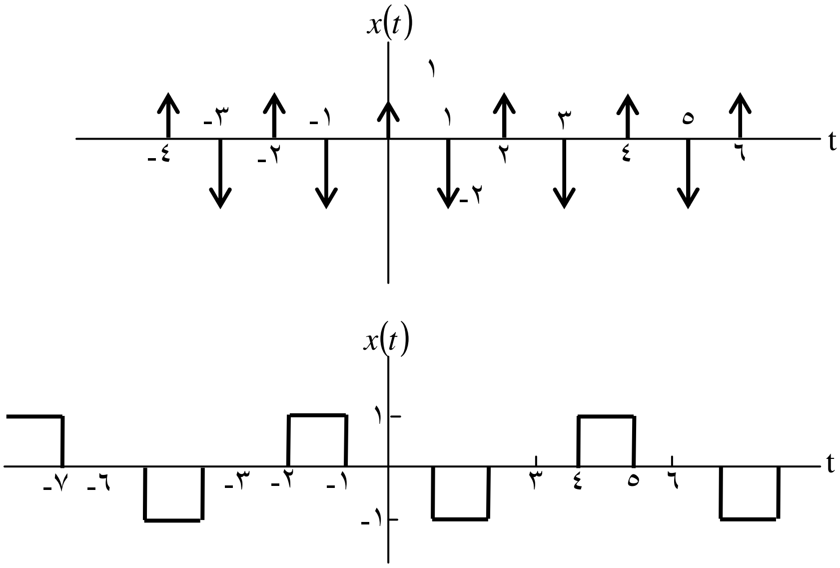
ج

(ب)



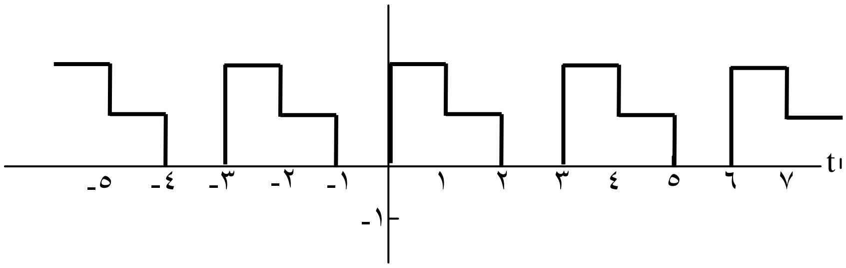
(ج)

شكل م ۳–۲۲ الف، ب و ج



(شكل م ۳–۲۲ د، هـ و)

$x(t)$



(ب) $$a_k = (-1)^k \frac{\sin k\pi/8}{2k\pi}$$

(ج) $$a_k = \begin{cases} jk, & |k| < 3 \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(د) $$a_k = \begin{cases} 1, & \text{زوج } k \\ 2, & \text{فرد } k \end{cases}$$

حل:

(الف) ابتدا فرض کنیم $y(t)$ سیگنالی با ضرایب FS (سری فوریه) به صورت زیر باشد:

$$b_k = \frac{\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi}$$

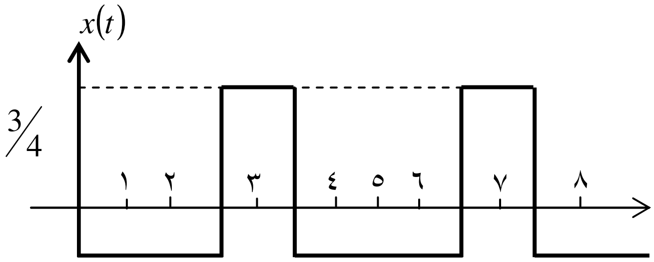
با توجه به مثال ۳۵، نتیجه می گیری که $y(t)$ باید سیگنالی موج مربعی متناوب باشد که در یک دوره تناوب برابر است با:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ \circ & 1/2 < |t| < 2 \end{cases}$$

حال، توجه کنید که $b_\circ = 1/4$. فرض کنید سیگنال دیگری به صورت $x(t) = -1/4$ تعریف کنیم که ضریب سری فوریه غیر صفر آن برابر $c_\circ = -1/4$ باشد. سیگنال $p(t)$ برابر است با $p(t) = y(t) + x(t)$ که ضرایب سری فوریه آن به صورت زیر می باشد:

$$d_k = a_k + c_k = \begin{cases} \circ & k=\circ \\ \dfrac{\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi} & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

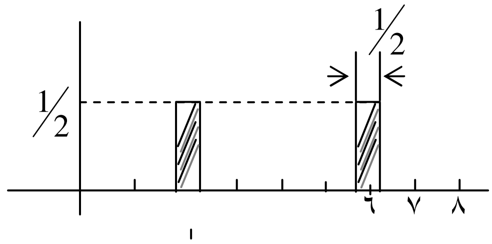
حال توجه کنید کـه $a_k = d_k e^{j(\pi/2)k}$. بنـابراین سـیگنال $x(t) = p(t+1)$ در شـکل (الـف) S.۲۳ نمایش داده شده است.



b) ابتدا فرض نمائید که ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t)$ به صورت زیر می باشد:

$$b_k = \begin{cases} 1/2 & |t| < 1/4 \\ \circ & 1/4 < |t| < 2 \end{cases}$$

با توجه فرمائید که $a_k = b_k e^{j\pi k}$. بنابراین سیگنال $x(t) = y(t+2)$ که در شکل (ب) ۵۳,۲۳ نـشان داه شده است.



(ج) تنها ضریب های غیرصفری سری فوریه عبارتند از: $a = a_{-1}^* = j$ و $a_2 = a_{-2}^* = 2j$ با استفاده از معادله ترکیب

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{j(2\pi/T)t} + a_{-1} e^{-j(2\pi/T)t} + a_{-2} e^{-2j(2\pi/T)t} \\ &= je^{j(2\pi/4)t} - je^{-j(-2\pi/4)t} - 2je^{-j2(2\pi/4)t} \\ &= -2\sin\left(\pi/2\, t\right) - 4\sin(\pi t) \end{aligned}$$

(د) ضرایب FS (سری فوریه) a_k را می توانیم به صـورت مجمـوع دو ضـریب سـری فـوری b_k و c_k، نشان دهیم، در اینصورت:

$$b_k = 1; \quad for \quad all \quad k$$

$$e_k = \begin{cases} 1 & \text{فرد } k \\ \circ & \text{زوج } k \end{cases}$$

ضرایب سری فوری b_k متناظر با سیگنال:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-4k)$$

ضرایب FS، C_k متناظر با سیگنال:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\left(\pi/2\right)t} \delta(t-2k)$$

بنابراین:

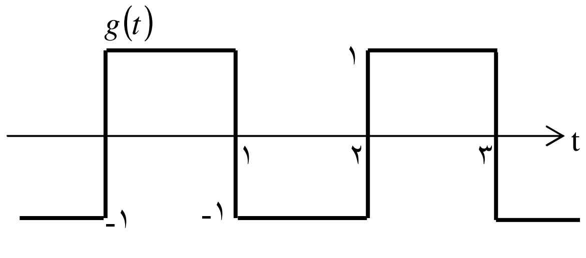
$$x(t) = y(t) + p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\left(\pi/2j\right)t} \delta(t-2k)$$

(۳,۲٤

(الف) داریم:

$$a_\circ = \frac{1}{2}\int_\circ^1 t\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (2-t)\,dt = \frac{1}{2}$$

(ب) سیگنال $g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ در شکل S.۳,۲٤ نمایش داده شده اند:



شکل S۳,۲٤

ضریب FS و b_k ی $g(t)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$b_\circ = \tfrac{1}{2}\int_\circ^1 dt - \tfrac{1}{2}\int_1^2 dt = \circ$$
$$b_k = \tfrac{1}{2}\int_\circ^1 e^{-j\pi kt}\,dt - \tfrac{1}{2}\int_1^2 e^{-j\pi kt}\,dt$$
$$= \frac{1}{j\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right)$$

(ج) توجه بفرمائید که:

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} b_k = jk\pi ak$$

بنابراین:

$$a_k = \frac{1}{jk\pi} b_k = \frac{-1}{\pi^2 k^2}\left(1 - e^{-j\pi k}\right)$$

۳,۲۵) سه سیگنال پیوسته در زمان دارای دوره تناوب پایه $T = \frac{1}{2}$ هستند.

$$x(t) = \cos(4\pi t)$$
$$y(t) = \sin(4\pi t)$$
$$z(t) = x(t)y(t)$$

(الف) ضرائب سری فوریه $x(t)$ را بیابید.

(ب) ضرائب سری فوریه $y(t)$ را بیابید.

(ج) با استفاده از نتایج بندهای (الف) و (ب) و خاصیت ضرب سری فوریه پیوسته در زمان، ضرائب سری فوریه پیوسته در زمان، ضرائب سوری فوریه $z(t) = x(t)y(t)$ را بیابید.

(د) ضرائب سری فوریه $z(t)$ را مستقیماً با بسط $z(t)$ به صورت مثلثاتی به دست آورید و نتایج را با بند (ج) مقایسه کنید.

حل:

(الف) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتست از $a_1 = a_{-1} = \tfrac{1}{2}$.

(ب) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتست از $b_1 = b_{-1}^* = \tfrac{1}{2}j$.

(ج) از خاصیت ضرب؛ می دانیم که:

$$z(t)=x(t)y(t)\xleftrightarrow{FS}c_k=\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}a_\ell b_{k-\ell}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}x_k &= a_k * b_k \circ\\ &= \frac{1}{4j}\delta[k-z]-\frac{1}{4}\delta[k+2]\end{aligned}$$

این موضوع بیان می کند که ضرب غیر صفر سری فوریه $z(t)$ برابر است با $c_2=c_{-2}^*=\left(\frac{1}{4j}\right)$

(د) داریم: $x(t)=\sin(4t)\cos(4t)=\frac{1}{2}\sin(8t)$

بنابراین، ضرای غیر صفر فوریه $z(t)$ عبارتست از: $c_2=c-z=\left(\frac{1}{4j}\right)$.

۳,۲٦) $x(t)$ یک سیگنال متناوب با ضرائب سری فوریه زیرست

$$a_k=\begin{cases}2, & k=\circ\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

با استفادهاز خواص سری فوریه سئوالهای زیر را پاسخ دهید.

(الف) آیا $x(t)$ حقیقی است؟

(ب) آیا $x(t)$ زوج است؟

(ج) آیا $dx(t)/dt$ زوج است؟

حل:

(الف) اگر $x(t)$ حقیقی باشد، آنگاه $x(t)=x^*(t)$ که نشان می دهد برای $x(t)$ حقیقی $a_k=a_{-k}^*$ بدلیل اینکه این مورد در این مسأله درست نیست، $x(t)$ سیگنالی حقیقی نیست.

(ب) اگر $x(t)$ زوج باشد، در اینصورت $x(t)=x(-y)$ و $a_k=a_{-k}$ چون این بیان این مورد صحیح می باشد، فلذا $x(t)$، زوج است.

(ج) داریم:

$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{FS} b_k = jk\frac{2\pi}{k_\circ}a_k$$

بنابراین

$$b_k=\begin{cases}\circ & k=\circ \\ -k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|}\left(\tfrac{2\pi}{T_\circ}\right) & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بدلیل اینکه $x(t)$ زوج نیست در نتیجه $g(t)$ نیز زوج نخواهد بود.

۳,۲۷) سیگنال متناوب گسسته در زمان $x[n]$ حقیقی و دارای تناوب پایه $N=5$ است. ضرائب غیر صفر سری فوریه $x[n]$ عبارت اند از:

$$a_\circ=2,\ a_{-2}^*=2e^{j\pi/6},\ a_4=a_{-4}^*=e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$x[n]$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x[n]=A_\circ+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(\omega_k n+\phi_k)$$

حل:

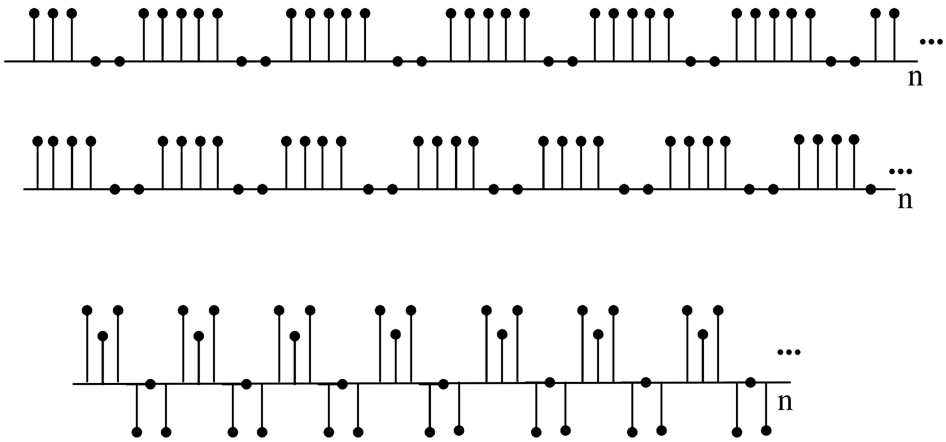
با استفاده از ترکیب تبدل فوریه معادله (۳,۳۸) داریم:

$$\begin{aligned}x[n]&=a_\circ+a_2\ e^{j2\left(2\pi/N\right)n}+a_{-2}e^{-j2\left(2\pi/N\right)n}+a_4e^{j4\left(2\pi/N\right)n}+a_{-4}e^{-j4\left(2\pi/N\right)n}\\&=2+2e^{j\pi/6}e^{j\left(\frac{4\pi}{5}\right)n}+2e^{-j\pi/6}e^{-j\left(4\pi/5\right)n}+e^{j\pi/3}e^{j\left(8\pi/5\right)n}+e^{-j\pi/3}e^{-j\left(\frac{8\pi}{5}\right)n}\\&=2+4\cos\left[\left(4\pi n/5+\pi/6\right)\right]+2\cos\left[\left(8\pi n/5\right)+\pi/3\right]\\&=2+4\sin\left[\left(\frac{4\pi n}{5}\right)+2\pi/3\right]+2\sin\left[\left(8\pi n/5\right)+5\pi/6\right]\end{aligned}$$

(پانوشت مترجم: توجه شود که تساوی در آخر کلیه عبارتهای شامل cos به عبارتهای شامل sin با توجه به فرمول $\sin\omega t=\cos-90^\circ$ و یا $\left(\cos(\omega t)=\sin(\omega t+90^\circ)\right)$، تبدیل شده اند.)

۳,۲۸) ضرائب سری فوریه هر یک از سیگنالهای گسسته متناوب در زمان زیر را حساب کنید. اندازه و فاز ضرائب a_k هر سری را رسم کنید.

(الف) هر یک $x[n]$ های شکل م ۳–۲۸ الف تا ج



شکل م ۲۸–۳

(ب) $x[n]=\sin(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$

(ج) $x[n]$ با دوره تناوب ٤ و

در $\circ \le n \le 3$

(د) $x[n]$ متناوب با دوره تناوب ۱۲ و

$$x[n]=1-\sin\frac{\pi n}{4} \text{ ، } \circ \le n \le 3 \text{ در}$$

(د) $x[n]$ متناوب با دوره تناوب ۱۲ و

$$x[n]=1-\sin\frac{\pi n}{4} \text{ ، } \circ \le n \le 11 \text{ در}$$

حل:

(الف) $N=7$

$$a_k=\frac{1}{7}\frac{e^{-4\pi kj/7}\sin\left(5\pi k/7\right)}{\sin\left(\pi k/7\right)}$$

(ب) $N=6$ a_k در یک دوره تناوب $(\circ \le k \le 5)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$a_k = \frac{1}{6} e^{-j\pi k/2} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)}{\sin\left(\pi k/6\right)} 1 \le k \le 5 \quad \text{و} \quad a_\circ = 4/6$$

(ج) $;N=6$ $\quad a_k = 1 + 4\cos\left(\pi k/3\right) - 2\cos 2\pi k/3$

(د) $N=12$، a_k د ریک دوره تناوب $(\circ \le k \le 11)$ به صورت زیر بدست می آید:

برای سایر نقاط $\quad a_1 = \frac{1}{4j} = a_{11}^* \;;\; a_5 = -\frac{1}{4j} = a_7^* \;;\; a_k = \circ$

یعنی:

$$\begin{cases} a_1 = a_{11}^* = \dfrac{1}{4j} \\ a_5 = a_7^* = -\dfrac{1}{4j} \\ a_k = \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(هـ) $N=4$ $\quad a_k = 1 + 2(-1)^k\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(k\pi/2\right)$

(و) $N=12$:

$$a_k = 1 + \left(1 - 1/\sqrt{2}\right)2\cos\left(\pi k/6\right) + 2\left(1 - 1/\sqrt{2}\right)\cos\left(\pi k/2\right)$$
$$+2\left(1 + 1/\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi k}{6}\right) + 2(-1)^k + 2\cos\left(2\pi k/3\right)$$

....

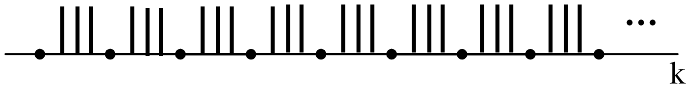
۳,۲۹) در هر مورد ضرائب سری فوریه یک سیگال دارای دوره تناوب پایه ۸ را مشخص کرده ایم . سیگنال $x[n]$ را بیابید.

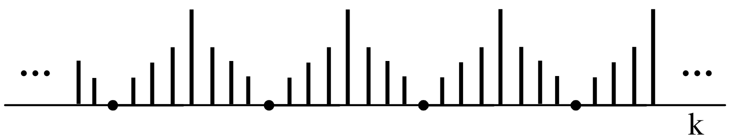
(الف) $\quad a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$

(ب) $a_k = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{k\pi}{3}\right) & \circ \le k \le 6 \\ \circ, & k = 7 \end{cases}$

a_k شکل م ۳–۲۹ (الف) (ج)

a_k شکل م ۳–۲۹ (ب) (د)





حل:

(الف) $N = 8$ در یک دوره ی تناوب $(\circ \le n \le 7)$ داریم:

$$x[n] = 4\delta[n-1] + 4\delta[n-7] + 4j\delta[n-3] - 4j\delta[n-5]$$

(ب) $N = 8$ در یک دوره تناوب $(\circ \le n \le 7)$:

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left[\frac{-e^{\frac{5\pi n}{4}}\sin\left\{\frac{n\pi}{4} + \pi/3\right\}}{\sin\left[1/2\left(\frac{n\pi}{4} + \pi/3\right)\right]} + \frac{e^{j\frac{\pi n}{4}}\sin\left\{\frac{n\pi}{4} - \pi/3\right\}}{\sin\left\{1/2\left(\frac{n\pi}{4} - \pi/3\right)\right\}}\right]$$

(ج) $N = 8$ در یک دوره تناوب $(\circ \le n \le 7)$:

$$x[n] = 1 + (-1)^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

(هـ) $N = 8$، در یک دوره تناوب $(\circ \le n \le 7)$:

$$x[n] = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 1/2\cos(3n\pi)$$

۳,۳۰) سه یگسنال گسسته در زمان زیر دارای دوره تناوب پایه ٦ هستند.

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) \qquad x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right) \qquad z[n] = x[n]y[n]$$

(الف) ضرائب سریه فوریه $x[n]$ را بیابید.

(ب) ضرائب سری فوریه $y[n]$ را بیابید.

(ج) با استفادهاز نتایج بندهای (الف) و (ب) و خاصیت ضرب سری فوریه گسسته در زمان، ضرائب سری فوریه $z[n]=x[n]y[n]$ را بیابید.

(د) مستقیماً ضرائب سری فوریه $z[n]$ را حساب کرده، نتیجه را با بند (ج) مقایسه کنید.

حل:

(الف) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتند از: $a_\circ = 1\ ,\ \propto_1 = \propto_{-1} = 1/2$

(ب) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتند از: $b_1 = b_{-1}^* = \dfrac{e^{-j\pi/4}}{2}$

(پ) با استفاده از خاصیت ضرب: داریم:

$$z[n] = x[y]y[n] \xleftrightarrow{FS} c_k = \sum_{\ell=-2}^{2} a_\ell b_{k-\ell}$$

که نشان می دهد که ضرایب غیر صفر سری فوری $z[n]$ برابر است با:

$$\begin{cases} c_\circ = 1/2 \cos\left(\pi/4\right) \\ c_1 = c_{-1}^* = 1/2\, e^{-j\pi/4} \\ c_2 = c_{-2}^* = 1/4\, e^{-j\pi/4} \end{cases}$$

(ج) داریم:

$$z[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \pi/4\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \pi/4\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right)$$
$$= in\left(\frac{2\pi}{6}n + \pi/4\right) + 1/2\left[\sin\left(\frac{4\pi}{6}n + \pi/4\right) + \sin\left(\pi/4\right)\right]$$

که بیان می کند، ضرایب غیر صفر سری فوریه $z[n]$ برابراست با:

$$c_\circ = 1/2 \cos\left(\pi/4\right) \quad \text{و} \quad c_1 = c_{-1}^* = 1/2\, e^{-j\pi/4} \quad \text{و} \quad c_2 = \underline{c}_2^* = 1/2\, e^{-j\pi/4}$$

۳,۳۱) فرض کنید

$$x[n]=\begin{cases}1, & \circ \le n \le 7\\ \circ, & 8 \le n \le 9\end{cases}$$

یک سیگنال متناوب با $N=10$ و ضرائب سری فوریه a_k است. همچنین فرض کنید که

$$g[n]=x[n]-x[n-1]$$

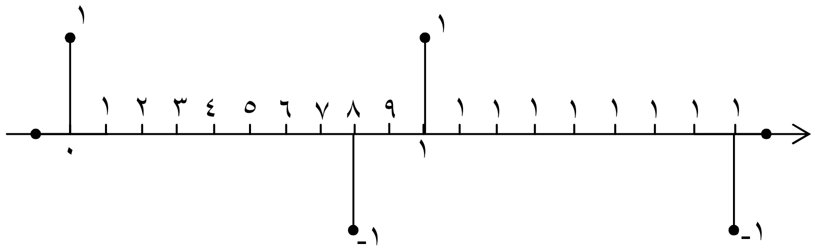
(الف) نشان دهید که زمان تناوب پایه $g[n]$ برابر ۱۰ است.

(ب) ضرائب سری فوریه $g[n]$ را بیابید.

(ج) با استفاده از ضرائب سری فوریه $g[n]$ خاصیت تفاضل اول جدول ۳-۲، a_k را برای $k \ne \circ$ تعیین کنید.

حل:

(الف) $g[n]$ در شکل S۳,۳۱ نشان داده شده است. بدیهی است که دوره تناوب پایه $g[n]$ برابر ۱۰ است.



شکل (۵۳,۳۱)

(ب) ضرایب سری فوریه $g[n]$ برابر است با $b_k=\left(\frac{1}{10}\left[1-e^{-j\left(2\pi/10\right)8k}\right]\right)$

(ج) بدلیل اینکه $g[n]=x[n]-x[n-1]$. ضایب سری فوریه a_k و b_k بایستی توسط فرمولی بهم مرتبط شوند که در زیر آمده است:

$$b_k=a_k-e^{-j\left(2\pi/10\right)k}a_k$$

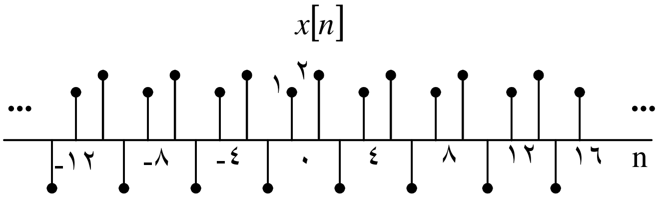
بنابراین:

$$a_k = \frac{b_k}{1-e^{-j\left(z\pi/10\right)k}} = \frac{\left(1/10\right)\left(1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)8k}\right)}{1-e^{-j\left(2\pi/10\right)k}}$$

....

۳,۳۲) سیگنال $x[n]$ شکل م ۳-۳۲ را در نظر بگیرید. برای این سیگنال متناوب $N=4$ و مـی تـوان آن را به صورت سری فوریه گسسته در زمان زیر بیان کنید.

$$x[n] = \sum_{k=\circ}^{3} a_k e^{jk(2\pi/4)} n \qquad \text{(م ۳-۳۲-۱)}$$



شکل م ۳-۳۲

همانطور که در درس گفته شد یک روش تعیین ضرائب سری فوریه این است که معادله (م ۳-۳۲-۱) را هار معادله چهار مجهولی (به ازای $n=1,2,3$ با مجهولهای $a_3, a_2, a_\circ$) فرض کنیم.

(الف) این چهار معادله را به صورت صریح بنویسید و آنها را به روش حل دستگاههای معادلات حـل کنید. (ابتدا نماییهای مختلط را ساده کنید.)

(ب) جواب خود را با محاسبه مستقیم a_k، با استفادها ز معادله تجزیه سری فوریه امتحان کنید.

$$a_{kl} = \frac{1}{4} \sum_{n=\circ}^{3} x[n] e^{-jk(2\pi/4)} n$$

حل:

(الف) چهارمعادله عبارتند از:

$$a_\circ + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad , \quad a_\circ + ja_1 - a_2 - ja_3 = \circ$$
$$a_\circ - a_1 + a_2 - a_3 = 2 \quad , \quad a_\circ - ja_1 - a_2 + ja_3 = -1$$

پس از حل معادلات توسط روش های ماتریسی مثل کرامر بدست می آوریم:

$$a_\circ = 1/2 \ , \ a_1 = -\frac{1+j}{4} \ , \ a_2 = -1 \ , \ a_3 = -\frac{1-j}{4}$$

(ب) با محاسبه مستقیم

$$a_k = 1/4\left[1 + 2e^{-jk\pi} - e^{-jk\pi 3/2}\right]$$

این مشابه پاسخ ما در قسمت (الف) برای $\circ \le k \le 3$ می باشد.

۳,۳۳) یک سیستم LTI پیوسته در زمان با ورودی $x(t)$ با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است.

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

نمایش سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x(t) = \cos 2\pi t$

(ب) $x(t) = \sin 4\pi t + \cos(6\pi t + \pi/4)$

حل:

ابتدا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست خواهیم آورد. فرض کنید ورودی $x(t)$ به صورت $e^{j\omega t}$ باشد. با توجه به بحث بخش ۳,۹,۲ می توان گفت پاسخ به این ورودی بایستی به صورت $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ باشد. بنابراین، با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده؛ داریم:

$$H(j\omega)j\omega e^{j\omega t} + 4e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

بنابراین:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

از معادله (۳,۱۲٤) می دانیم که زمانیکه ورودی $x(t)$ باشد:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_\circ)e^{jk\omega_\circ t}$$

$x(t)$ ضرایب سـری فوریـه ای a_k و فرکـانس پایـه ی $\omega_\circ$ و ضـرایب غیـر صـفر فوریـه عبارتنـد از: $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ بنابراین؛ ضرایب غیر صفر سری فوریه $y(t)$ برابر است با $a_k H(jk\omega_\circ)$.

(الف) در این مـسأله، $\omega_\circ = 2\pi$ و ضـرایب غیـر صـفر سـری فوریـه عبارتنـد از: $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$

بنابراین؛ ضرایب غیر صفر سری فوریه $y(t)$ برابر است با:

$$b_1 = a_1 H(j2\pi) = \frac{1}{2(4+2\pi j)}$$

,

$$b_{-1} = a_{-1} H(-j2\pi) = \frac{1}{???}$$

(ب) در اینجا نیز $\omega_\circ = 2\pi$ و ضرایب سری فوریه غیر صفر عبارتند از:

$$a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2} j$$

$$a_3 = a_{-3}^* = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$$

بدین ترتیب، ضریب غیر صفر FS برای $y(t)$ برابر است با:

$$\begin{cases} b_2 = a_2 H(4j\pi) = \dfrac{1}{2j(4+4\pi j)} \\ b_{-2} = a_{-2} H(-4j\pi) = \dfrac{-1}{2j(4-4\pi j)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_3 = a_3 H(j6\pi) = \dfrac{e^{-j\pi/4}}{2(4+6\pi j)} \\ b-3 = a_{-3} H(-j6\pi) = \dfrac{-e^{-j\pi/4}}{2(4-6\pi j)} \end{cases}$$

۳,۳٤) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید:

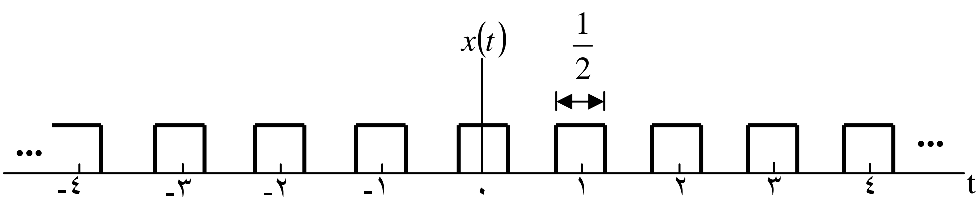
$$h(t) = e^{-4|t|}$$

نمایش سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودیهای زیر در نظر بگیرید.

(الف) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n)$

(ب) $x[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n}\delta(t-n)$

(ج) $x(t)$ شکل م ۳-۳٤



حل:

پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر بدست می آید:

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4(t)}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{4+j^{\omega}}+\frac{1}{4-j^{\omega}}$$

(الف) در اینجا $T=1$ و $\omega_{\circ}=2\pi$ و a_k بـه ازای تمـامی k هـا $a_k=1$. ضـرایب سـری فوریـه خروجی برابراست با:

$$b_k=a_kH(jk\omega_{\circ})=\frac{1}{4+j2k\pi}+\frac{1}{4-2jk_n}$$

(ب) در اینجا $\omega_{\circ}=\pi$ و $T=1$ و
$$a_k=\begin{cases}\circ & k \text{ زوج}\\ 1 & k \text{ فرد}\end{cases}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه خروجی برابراست با:

$$b_k=a_kH(jk\omega_{\circ})=\begin{cases}\circ & k \text{ زوج}\\ \frac{1}{4+j\pi k}+\frac{1}{4-j\pi k} & k \text{ فرد}\end{cases}$$

ج) $T=1$ و $\omega_{\circ}=2\pi$ و

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{2} & k=\circ\\ \circ & k,k\neq\circ \text{ زوج}\\ \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} & k \text{ فرد}\end{cases}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه خروجی عبارتند از:

$$b_k=a_kH(jk\omega_{\circ})=\begin{cases}\frac{1}{4} & k=\circ\\ \circ & k\neq\circ\ ,\ k \text{ زوج}\\ \frac{\sin\left(k\pi/2\right)}{\pi k}\left[\frac{1}{4+j2\pi k}-\frac{1}{4-2k\pi j}\right] & k \text{ فرد}\end{cases}$$

۳,۳۵) یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید:

$$H[j\omega]=\begin{cases}1, & |\omega|\geq 250\\ \circ, & \text{درغیر ین صورت}\end{cases}$$

ورودی این سیستم سیگنال $x(t)$ دارای تناوب پایه $T=\pi/7$ و ضرائب سری فوریه a_kاست، و به ازای این ورودی $y(t)=x(t)$ ، به ازای چه مقادیری از k مطمئناً $a_k=\circ$؟

حل:

می دانیم، ضرایب سری فوریه $y(t)$ برابراست با $b_k=H(jk\omega_{\circ})a_k$ که $\omega_{\circ}$فرکانس پایه ی $x(t)$ و a_k ضرایب سری فوریه $x(t)$ می باشد.

حال اگر $y(t)$ با $x(t)$ برابر باشد، برای تمامی kها، $a_k=b_k$. توجه کنید به ازاء $H(j\omega)=\circ|\omega|\geq 250$ و می دانیم که برای $|k|\geq 18$ $H(jk\omega_{\circ})=\circ$(زیرا $\omega_{\circ}=14$. بنابراین به ازاء $|k|\geq 18$، a_k بایستی صفر گردد.

۳,۳٦) یک سیستم LTI علّی گسسته در زمان، با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$$

ضرائب نمایش سری فوریه خروجی $y[n]$ به ازای ورودیهای زیر را بیابید.

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

نمایش سری فوریه خروجی $y[n]$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x[n]=\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

(ب) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

حل:

ابتدا بایستی پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آوریم. یک ورودی $x[n]$ به صورت $e^{j\omega n}$ فرض کنید. از بحث انجام شده در قسمت ۳٫۹، می دانیم که پاسخ به ورودی مذکور برابر است با $y[n]=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. بدین ترتیب با جایگاری در معادله ی دیفرانسیل داده شده، خواهیم داشت:

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n}-\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}e^{j\omega n}H(e^{j\omega})=e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

از معادله (۳٫۱۳۱) می توان نوشت:

$$y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k H\left(e^{j2k\pi/N}\right)e^{jk(2\pi/N)n}$$

که ورودی برابر $x[n]$ می باشد. فرکانس پایه ی $x[n]$ برابر $\omega_0=\frac{2\pi}{N}$ و ضرایب سری فوریه $x[n]$، a_k می باشد. بنابراین ضرایب سری فوریه $y[n]$ برابر است با: $a_k H\left(e^{(2k\pi j/N)}\right)$.

(الف) ازاینجا $N=4$ ضرایب غیر صفر سری فوریه $x[n]$، $a_3=a_{-3}^*=\frac{1}{2j}$ می باشد. بنابراین ضرایب غیر صفر سری فوریه $y[n]$ برابر است با:

$$b_3 = a_1 H\left(e^{3j\pi/4}\right) = \frac{1}{2j\left(1-\frac{1}{4}e^{-3\pi j/4}\right)^*} \quad , \quad b_{-3} = a_{-1} H\left(e^{-3j\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2j\left(1-\frac{1}{4}e^{j3\pi/4}\right)^*}$$

(ب) اینجا $N=8$ و ضرای غیر صفر سری فوریه $x[n]$ برابر است با $a_1 = a_{-1} = 1/2$ و $a_2 = a_{-2} = 1$، بدین ترتیب، ضرایب غیرصفر سری فوریه $y(t)$ عبارتست از:

$$b_1 = a_1 H\left(e^{j\pi/4}\right) = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/4}\right)^*}$$

$$b_{-1} = a_{-1} H\left(e^{-j\pi/4}\right) = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{j\pi/4}\right)^*}$$

$$b_2 = a_2 H\left(e^{j\pi/2}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}\right)^*}$$

$$b_{-2} = a_{-2} H\left(e^{-j\pi/2}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{j\pi/2}\right)^*}$$

۱,۳۷) یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

نمایش سری فوریه خروجی $x[n]$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4k)$

(ب) $x[n]$ متناوب با $N=6$ و

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = \circ, \pm 1 \\ \circ, & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$$

حل:

پاسخ فرکانسی سیستم به راحتی به صورت زیر بدست می آید:

$$h\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{1}{1-2e^{-j\omega}}$$

(الف) ضرایب سری فوریه $x[n]$ برابراست با:

$$a_k=\frac{1}{4}\ ,\ \ for\ \ all\ \ k$$

همچنین $N=4$ و ضرایب سری فوریه $y[n]$:

$$b_k=a_k H\left(e^{j2k\pi/N}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/2}}-\frac{1}{1-2e^{-jk\pi/2}}\right]$$

(ب) در این مورد، ضراب سری فوریه $x[n]$:

$$a_k=\frac{1}{6}\left(1+2\cos\left(k\pi/3\right)\right)\quad for\quad all\quad k$$

و نیز $N=6$ بنابراین ضراب سری فوریه $y[n]$ برابر است با:

$$b_k=a_k H\left(e^{j2k\pi/N}\right)=\frac{1}{6}\left(1+2\cos\left(k\,x\pi/3\right)\right)\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/3}}-\frac{1}{1-2e^{-k\pi j/3}}\right]$$

۳,۳۸) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر

$$h[n]=\begin{cases}1, & \circ\le n\le 2\\ -1 & -2\le n\le -1\\ \circ, & \text{درغیر این صورت}\end{cases}$$

دارای ورودی زیرست

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$$

ضرائب سری فوریه خروجی $y[n]$ را بیابید.

حل:

پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر محاسبه می شود:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=-e^{2j\omega}-e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}$$

برای $x[n]$، $N=4$ و $\omega_{\circ}=\pi/2$. ضرایب FS برای ورودی $x[n]$ برابر است با:

$$a_k = 1/4 \quad for \quad all \quad n$$

و ضرایب FS برای خروجی عبارتست از:

$$b_k a_k H\left(e^{jk\omega_{\circ}}\right)=1/4\left(1-e^{jk\pi/2}+e^{-jk\pi/2}\right)$$

۳,۳۹) پاسخ فرکانسی سیستم LTI گسسته در زمان s عبارت است از

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\pi \\ \circ, & \frac{\pi}{8}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

نشان دهید که اگر ورودی $x[n]$ این سیستم دارای تناوب $N=3$ باشد، خروجی $y[n]$ تنها یک ضریب سری فوریه غیرصفر دارد.

حل:

فرض کنیم ضرایب FS ورودی a_k باشد، ضرایب سری فوریه خروجی b_k برابر است با:

$$b_k = a_k H\left(e^{jk\omega_{\circ}}\right)$$

که $\omega_{\circ}=2\pi/3$ توجه داشته باشید که در بازه $\circ\le k\le 2$، برای $k=1,2$، $H\left(e^{jk\omega_{\circ}}\right)=$ بنابراین تنها $b_{\circ}$ ضریب غیر صفر سری فوریه $y[n]$ در بازه ی $\circ\le k\le 2$ می باشد.

۳,٤۰) $x(t)$ را یک سیگنال متناوب با تناوب پایه T و ضرائب سری فوریه a_k فرض کنید. ضرائب سری فوریه سیگنالهای زیر را بر حسب a_k بیان کنید.

(الف) $x(t-t_{\circ})+x(t+t_{\circ})$

(ب) $\mathcal{E}\{x(t)\}$

(ج) $\Re e[x(t)]$

(د) $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$

(هـ) $(3t-1)$ [برای این حالت ابتدا دوره تناوب $(3t-1)$ را بیابید.]

حل:

فرض کنیم a_k ضرایب سری فوریه $a(t)$ باشد،

(الف) $x(t-t_\circ)$ نیز با پریود T، متناوب است. ضرای سری فوریه ی b_k برای $x(t-t_\circ)$ برابر است با:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t-t_\circ)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$
$$= \frac{e^{-jk(2\pi/T)t_\circ}}{T}\int_{\langle T\rangle} x(\tau)e^{-jk(2\pi/T)\tau}d\tau$$
$$= e^{-jk(2\tau/T)t_\circ}a_k$$

به طور مشابه، ضرای سری فوریه $x(t+t_\circ)$ عبارتست از:

$$c_k = e^{jk(2\pi/T)t}a_k$$

و در نهایت ضراب سری فوریه $x(t-t_\circ)+x(t+t_\circ)$ برابر است با:

$$d_k = b_k + c_k = e^{-jk(2\pi/T)}ak + e^{jk(2\pi/T)t_\circ}ak$$
$$= 2\cos\left(k\pi 2^{t_\circ}/T\right)a_k$$

(ب) توجه کنید $\varepsilon r\{x(t)\} = 1/2\{x(t)+x(-t)\}$. ضرایب FS برای $x(-t)$ عبارتست از:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(-t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(\tau)e^{jk(2\pi/T)\tau}d\tau$$
$$= a_{-k}$$

بنابراین ضرایب برای $\varepsilon r\{x(t)\}$ برابر است با:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{a_k + a - k}{2}$$

(ج) توجه داشته باشید که $\mathrm{Re}\{x(t)\} = x(t)+x^*(t)/2$، ضرایب FS برای $x^*(t)$ برابراست با:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x^*(t)e^{-jk(z\pi/T)t}dt$$

اگر از دو طرف معادله مزدوج بگیریم، داریم:

$$b_k^* = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t) e^{jk\left(2\pi/T\right)} dt = \propto_{-k}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه $\mathrm{Re}\{x(t)\}$ برابر است با:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{a_k + a_{-k}^*}{2}$$

(د) از ترکیب سری فوریه معادله داریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\left(2\pi/T\right)} kt$$

اگر از دو طرف معادله برحسب t دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -k^2 \frac{4\pi^2}{T^2} a_k e^{j\left(2\pi/T\right)kt}$$

با بازرسی و دقت در معادله فوق خواهیم دید که ضرایب سری فوریه $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ عبارتند از $k\frac{4\pi^2}{T^2}$.

(هـ) پریود $x(3t)$، یک سوم برابر $x(t)$ می باشد. بنابراین سیگنال $x(3t-1)$ با پریـود $T/3$ متنـاوب است.

ضرایب سری فوریه $x(3t)$. نیز همچنان a_k می باشد. با استفاده از تحلیل قسمت (الف)، می دانیم کـه ضرایب سری فریه $x(3t-1)$ ، $a_k e^{-jk\left(6\pi/T\right)}$ می باشد.

۳,٤۱) اطلاعات زیر در مورد یک سیگنال پیوسته در زمان، با دوره تنـاوب ۳ و ضـرائب سـری فوریـه a_k است.

۱. $a_k = a_{k+2}$

۲. $a_k = a_{-k}$

۳. $\int_{-0/5}^{0/5} x(t)dt = 1$

٤. $\int_{0/5}^{1/5} x(t)dt = 2$

$x(t)$ را بیابید.

حل:

چون $a_k = a_{-k}$، باید $x(t) = x(-t)$ همچنین توجه کنید که $a_k = a_{k+2}$، پس باید:

$$x(t) = x(t)e^{-j\left(4\pi/3\right)t}\ .$$

همچنین توجه کنید که $a_k = a_{k+2}$، پس باید:

$$x(t) = x(t)e^{-j\left(4\pi/3\right)t}$$

که بیان می کند، $x(t)$ برای $t = \circ\ , \pm 1.5, 3, \pm 4.5, \ldots$ مقدار غیر صفر دارد.

چون $\int_{-0.5}^{0.5} x(t)dt = 1$، می توان نتیجه گرفت که برای $0.5 \le t \le 0.5$، $x(t) = \delta(t)$

همچنین چون؛ $\int_{0.5}^{1.5} x(t)dt = 2$، می توان نتیجه گرفت که در بازه ی $0.5 \le t \le 3/2$، $x(t) = 2\delta\left(t - 3/2\right)$ بنابراین $x(t)$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - k3) + 2\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - 3k - 3/2\right)$$

۳,٤۲) $x(t)$ یک سیگنال حقیقی با ددوره تناوب پایه T و ضرائب سری فوریه a_k است.

(الف) نشان دهید که $a_k = a_{-k}^*$ و $a_\circ$ حقیقی است.

(ب) نشان دهید که در صورت زوج بودن $x(t)$، ضرائب سری فوریه آن نیز باید حقیقی و زوج باشند.

(ج) نشان دهید که در صورت فرد بودن $x(t)$، ضرئب سری فوریه آن بایـد موهـومی خـالص و فـرد باشند، و $a_\circ = \circ$.

(د) نشان دهید که ضرائب سری فوریه بخش زوج $x(t)$ عبارت اند از $\Re e[a_k]$

(هـ) نشان دهید که ضرائب سری فوریه بخش فرد $x(t)$ عبارت اند از $jg[a_k]$

حل:

(الف) از مسأله ۳٫٤۰ (و جدول ۳٫۱) می دانیم FS برای $x^*(t)$ برابر a_k^* می باشد. حال می دانیم کـه $x(t)$ حقیقی است. در این صورت $x(t) = x^*(t)$. بنابراین $a_k = a_k^*$ توجه کنید کـه ایـن بیـان مـی کند که $a_\circ = a_\circ^*$، بنابراین $a_\circ$ حقیقی باشد.

(ب) از مسأله ۳٫٤۰ (جدول ۳٫۱) می دانیم که ضرایب FS. $x(-t)$ برابر a_{-k} مـی باشـد. اگـر $x(t)$ زوج باشد در این صورت، $x(t) = x(-t)$ که بیان می دارد؛

$$a_k = a_{-k} \quad (\text{S.۳,٤۲,۱})$$

رابطه فوق بیان می کند که ضرایب FS زوج هستند. از قسمت قبلی، می دانیم کـه اگـر $x(t)$ حقیقـی باشد:

$$a_k = a_{-k}^* \quad (\text{S۳-٤۲-۲})$$

با استفاده معادله (S۳-٤۲-۱) و (S۳-٤۲-۲) می دانیم که $a_k = a_k^*$، بنابراین a_k برای تمام k حقیقـی است بهرحال، می توان نتیجه گرفت که a_k زوج و حقیقی است.

(ج) از مسأله ۳,٤۰ (و جدول ۳,۱) می دانیم که ضریب FS برای $x(-t)$ برابر a_{-k} می باشد. اگر $x(t)$ فرد باشد، در این صورت $x(t)=-x(-t)$ که این بیان می دارد که $a_k=-a_{-k}$. (۵۳-٤۲-۳)

که بیان می کند، ضرایب FS فرد هستند. از قسمت قبلی، می دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد در اینصورت:

$$a_k = a_{-k}^{*} \qquad (\text{S۳-٤۲-٤})$$

با استفاده از معادله (S۳,٤۲-۳) و (S۳,٤۲-٤)، می دانیم که $a_k = a_k^{*}$. بنابراین $\propto_k$ در تمام $-\infty < k < \infty$ موهومی می باشد. به هر حال، می توانیم نتیجه بگیریم که a_k زوج و حقیقی است. با توجه معادله (S۳,٤۲-۳) بایستی $a_{\circ}=-a_{\circ}$ و این یعنی $a_{\circ}=\circ$.

(د) توجه کندی که $\varepsilon r\{x(t)+x(-t)\}/2$ با استفاده از معادله (S۳,٤۳-۲) می توان نوشت ضریب FS برای $\{a_k+a_k^{*}\}/2=\text{Re}\{a_k\}$ می باشد.

(هـ) توجه کنید که $od\{x(t)\}=\{x(t)-x(-t)\}\big/2$. از قسمت قبلی می دانیم که ضریب FS برای $od\{x(t)\}$برابر با $\frac{1}{2}\{a_k-a_{-k}\}$ خواهد بود. با استفاده از معادله (S۳,٤۳-۲) می توان نوشت ضریب FS برای $od\{x(t)\}$ برابر با $\frac{1}{2}\left(a_k-a_k^{*}\right)=j\,I_m\{a_k\}$ خواهد بود.

$$x(t)=\sum_{Oddk} a_k e^{jk2/t}$$

۳,٤۳) (الف) سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$، با دوره تناوب T را فرد ـ هماهنگ می نامیم، اگر در نمایش سری فوریه آن

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \qquad (\text{م ۳-٤۳-۱})$$

به ازای مقادیر صحیح زوج k داشته باشیم $a_k = \circ$.

(i) نشاندهید که اگر $x(t)$ معادله (م ۳–٤۳–۲) را برآورده کند، فرد ـ هماهنگ است.

(ب) $x(t)$ را یک سیگنال متناوب فرد ـ هماهنگ، با دوره تناوب ۲ در نظر بگیرید به نحوی که

$$x(t)=t \quad \text{،} \circ<t<1 \quad \text{در}$$

$x(t)$ را رسم کنید و ضرایب سری فوریه آن را بیابید.

(ج) به همین قیاس تابع زوج ـ هماهگ را می توان تابعی تعریف کرد که در نمایش معادله (م ۳–٤۳–۱) آن، بهازای مقادیر فرد k داشته باشیم $a_k = \circ$. آیا دوره تناوب پایه چنین تابعی می تواند T باشد؟ در مورد جواب خود توضیح دهید.

(د) نشان دهید، به شرطی T می تواند دوره تناوب پایه $x(t)$ معادله (م ۳–٤۳–۱) باشد که داشته باشیم.

۱. a_1 یا a_{-1} غیر صفر باشد.

یا

۲. دو عدد صحیح k و l بدون عامل مشترک داشته باشیم که به ازای آنها a_k و a_1 هر دو غیر صفر باشند.

حل:

(الف) (i) داریم:

$$x\left(t+T/2\right)=\sum_{Oddk} a_k e^{jk2/t} e^{jk\pi}$$

چون $e^{jk\pi}=-1$ برای k های فرد.

$$x\left(t+T/2\right)=-x(t)$$

(ii) ضرایب سری فوریه $x(t)$ برابر است با:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{\circ}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt+\frac{1}{T/2}x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_{\circ}^{T/2}\left[x(t)+x\left(t+t/2\right)e^{-jk\pi}\right]e^{-jk\omega_\circ t}dt$$

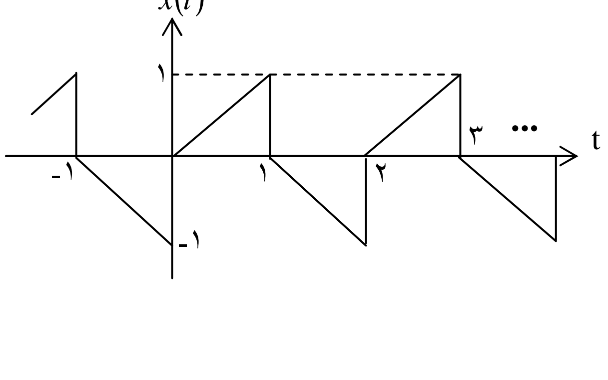
توجه کنید که طرف راست معادله بالا برای مقادیری از K صفر است اگر $x(t)=-x\left(+T/2\right)$

(ب) تابع در شکل S۳,٤۳ نشان داده شده اند.

توجه کنید که $T=2$ و $\omega_\circ=\pi$، بنابراین:

$$a_k=\begin{cases}\circ & k \text{ زوج} \\ \dfrac{1}{jk\pi}+\dfrac{2}{k^2\pi^2} & k \text{ فرد}\end{cases}$$

(ج) خیر. برای سیگنالها هارمونیک، می توانیم دلیل قسمت $(a-j)$ برای نشان دادن اینکه $x(t)=x\left(t+T/2\right)$ را دنبال کنیم. در این مورد، پریود اصلی $T/2$ می باشد.



شکل S۳,٤۳

(د) اگر a_1 یا a_{-1} صفر نباشد.

$$x(t) = a_{\pm 1} e^{\pm 2 j\pi /T} + \ldots$$
$$\pm j \frac{2\pi}{T}(t + t_{\circ}) + \ldots$$
$$x(t + t_{\circ}) = a_{\pm 1} e^{\pm j\frac{2\pi}{T}(t+t_{\circ})+\ldots}$$

کمترین مقدار $|t_{\circ}|$ (بجز $|t| = \circ$) برای $e^{\pm j\frac{2\pi}{T}t_{\circ}}$ برابر است که پریودیک اساسی می باشد.

تنها دراین صورت است که $x(t + t_{\circ}) = a_{\pm 1} e^{\pm 2\pi jt/T} + \ldots = x(t)$

بنابراین بایستی $t_{\circ}$ تناوب اصلی باشد.

(۲) دوره تناوب $x(t)$ ک. م. م تناوب $e^{jk(2\pi/T)t}$ و $e^{jt\left(\frac{2\pi}{T}\right)\ell}$ می باشد. پریود $e^{jk(2\pi/T)}$ برابر است با T/k و پریود $e^{j\ell\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$ برابر است با T/ℓ بدلیل اینکه k , ℓ ضرایب مشترکی ندارنـد، ک. م. م. T/k و T/ℓ عبارتست از از T.

(۳) تنها ضرایب FS مجهول عبارتند از a_{-2}, a_2, a_{-1}, a_1 به دلیل اینکه $x(t)$ حقیقی است. $a_1 = a_{-1}^*$ و $a_2 = a_{-2}^*$. چون a_1 حقیقی است، $a_1 = a_{-1}$. حال $x(t)$ به صورت زیر می باشد.

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_{\circ} t) + A_2 \cos(2\omega_{\circ} t + \theta)$$

که، که از آن خواهیم داشت:

$$x(t-3)=A_1\cos(\omega_\circ t-3\omega_\circ)+A_2\cos(2\omega_\circ t)+\theta-6\omega_\circ$$

حال اگر، $x(t)=-x(t-3)$، در اینصورت، $3\omega_\circ$و $6\omega_\circ$ هر دو باید ضرایب فردی از πباشند.

بدیهی است که این غیرممکن است، بنابراین $a_2=a_{-2}=\circ$ و

$$x(t)=A_1\cos(\omega_\circ t)$$

حال با استفاده از رابطه بارسئوال در راهنمای٥، داریم:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2=|a_1|^2+|a-1|^2=1/2$$

بنابراین $|a_1|=1/2$. چون a_1 مثبت است، داریم: $a_1=a_{-1}=1/2$، بنابراین $x(t)=\cos(\pi t/3)$

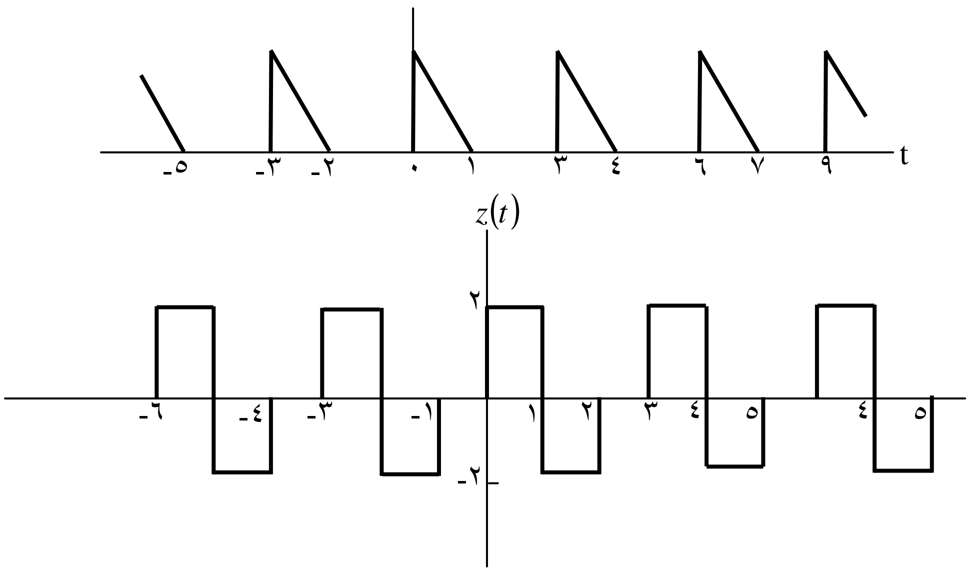
۳,٤٥) $x(t)$ را یک سیگنال حقیقی و متناوب با نمایش سری فوریه سینوسی ـ کسینوسی معادلـه (۳–۳۲) فرض کنید، یعنی

$$x(t)=a_\circ+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\cos k\omega_\circ t-C_k\sin k\omega_\circ t\right] \qquad \text{(م ۳–٤٥–۱)}$$

(الف) نمایش سری فوریه نمایی بخشهای زوج و فرد $x(t)$ را تعیین کنید. یعنی ضـرایب a_k، β_k را بر حسب ضرائب معادله (م ۳–٤٥–۱) بیابید به نحوی که داشته باشیم

$$Ev\{x(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_\circ t}$$
$$Od\{x(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\beta_k e^{jk\omega_\circ t}$$

(ب) رابطه a_k و a_{-k} بند (الف) را بیابید. رابطه β_k و β_{-k} را نیز بیابید.



شکل ۳-۴۵

(ج) فرض کنید سیگنالهای $x(t)$ و $z(t)$ شکل م ۳-۴۵ دارای نمـایش سـری سینوسـی ـ کسینوسی زیرند.

$$x(t) = a_\circ + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left[B_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{2}\right) - C_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right]$$
$$z(t) = d_\circ + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) - F_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right]$$

سیگنال زیر را رسم کنید.

$$y(t) = 4(a_\circ + d_\circ) + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[B_k + \frac{1}{2}E_k\right]\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right) + F_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right\}$$

حل:

با دقت بیشتر، نتیجه می گیریم که ضرایب FS برای $x(t)$ برابر است با:

$$\wp_k = \begin{cases} a_\circ & , k = \circ \\ B_{k+jck} & , k > \circ \\ B_{k-jck} & , k < \circ \end{cases}$$

(الف) از مسأله ۳,٤۲ می دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد. ضرای FS برای $\{\varepsilon v\{x(t)\}$ برابر است با:

$\mathrm{Re}\{\wp_k\}$، بنابراین: $\quad a_k = B_{|k|} \quad$ و $\quad a_\circ = a_\circ$

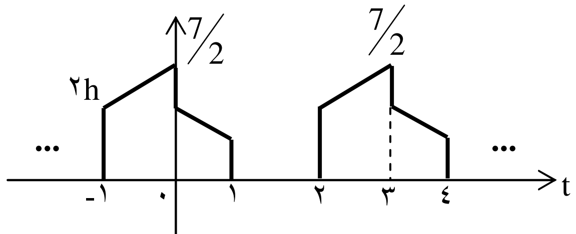
از مسأله ۳,٤۲ می دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد، ضرایب FS برای $\{od\{x(t)\}$ برابر است با:

$j\,\mathrm{Im}\{\wp_k\}$ بنابراین: $\quad \beta_k = \begin{cases} jck & k > \circ \\ -jck & k < \circ \end{cases} \quad , \quad \beta_\circ = \circ$

(ب) $\propto_k = \propto_{-k} \ , \ \beta_k = -\beta_{-k}$

(ج) سسیگنال برابر است با: $\{y(t) = 1 + \varepsilon v\{x(t)\} + \frac{1}{2}\varepsilon v\{x(t)\} - od\{x(t)\}$.

این در شکل ٤٥-S۳ نمایش داده شده است.



شکل S۳,٤٥

۳,٤٦) در این مسئله دو خاصیت مهم سری فوریه پیوسته در زمان، یعنی خاصیت مدولاسیون و قضیه پارسوال، را به دست می آوریم. فرض کنید سیگنالهای $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال متناوب پیوسته در زمان، با دوره تناوب مشترک $T_\circ$ هستند، نمایش سری فوریه این دو سیگنال عبارت است از

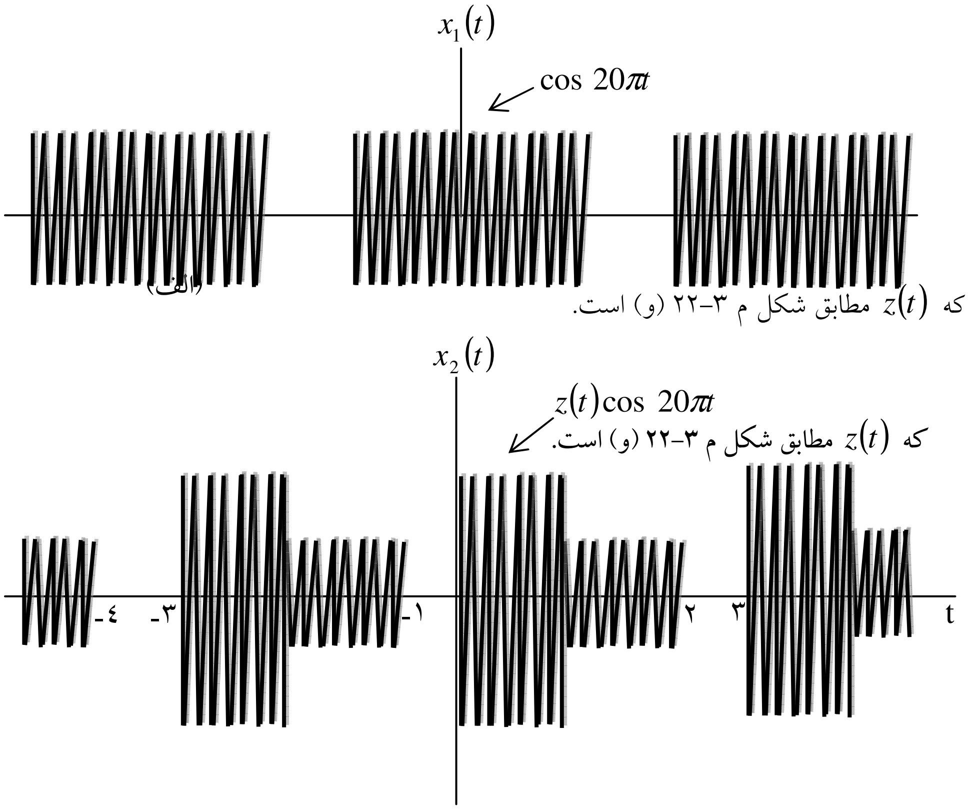
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_o t}, \qquad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \qquad \text{(م ۳-٤٦-۱)}$$

از کانولوشن گسسته زیر به دست می آید.

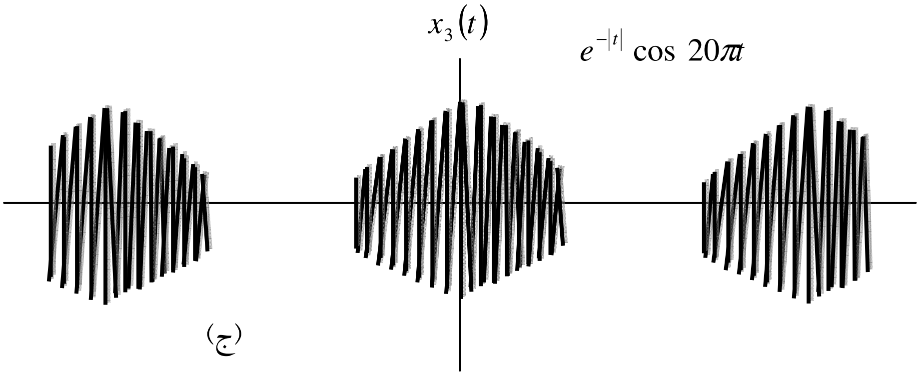
$$c_k=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}$$

(ب) به کمک نتیجه بند (الـف) ضـرایب سـری فوریـه سـیگنالهای $x_1(t)$، $x_3(t)$ شـکل م ۳-٤٦ را بیابید.

(ج) فرض کنید $y(t)$ معادله (م ۳-٤٦) برابر $x^*(t)$ است. b_k معادله (م ۳-٤٦-۱) را بر حسب a_k بیان کنید.



(ب)



(ج)

شکل م ٤٦-٣

و با استفاده از نتیجه بند (الف) قضیه پارسئوال برای سیگنالهای متناوب، یعنی رابطه زیر، را ثابت کنید.

$$\frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ}|x(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

حل:

ضرایب سری فوریه $z(t)$ برابر است با:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\sum_n\sum_\ell \propto_n b_\ell e^{j(n+1)\omega_\circ t}e^{-jk\omega_\circ t}dt$$
$$= \frac{1}{T}\sum\sum a_n b_\ell\, \delta(k-(n+\ell))$$
$$= \sum_n a_n b_{k-n}$$

(ب) (i) در اینجا $T_\circ = 3$, $\omega_\circ = \frac{2\pi}{3}$. بنابراین:

$$c_k = \left[1\!\!\diagup\!_2\, \delta(k-30) + \frac{1}{2}\delta(k+30)\right] * \frac{2\sin\left(kj\pi/30\right)}{2k\pi 3/3}$$

با ساده سازی خواهیم داشت:

$$c_k = \frac{\sin\left[(k-30)\frac{2\pi}{3}\right]}{3(k-20)2\pi/3}$$

و

$$c_{\pm 30} = 1/3$$

(ii) $x_2(t)$ را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$x_2(t) =$ مجموعوع دو موج مربعی شیفت یافته $\times \cos(20\pi t)$

در اینجا $T_\circ = 3$ و $\omega_\circ = \frac{2\pi}{3}$ بنابراین

$$c_k = \frac{1}{3} e^{-j(k-30)(2\pi/3)} \frac{\sin\left\{(k-30)\frac{2\pi}{3}\right\}}{(k-30)2\pi/3} + \frac{1}{3} e^{-j(k+30)\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin\{(k+30)2\pi/3\}}{(k+30)2\pi/3}$$

$$+\frac{1}{3} e^{-j(k-30)\pi/3} \frac{\sin\{(k-30)\pi/3\}}{(k-80)\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3} e^{-j(k+30)(\pi/3)} \frac{\sin\{(k+30)\pi/3\}}{(k+30)2\pi/3}$$

(iii) اینجا $T_\circ = 4$ و $\omega_\circ = \pi/2$ بنابراین:

$$c_k = \left[\frac{1}{2}\delta(k-40) + \frac{1}{2}\delta(k+40)\right] + \frac{j[k\omega_\circ + e^{-1}\{\sin k\omega_\circ - \cos k\omega_\circ\}}{2\left[1+(k\omega_\circ)^2\right]}$$

پس از پیاده سازی

$$c_k = \frac{j\,[k-40]\,\omega_\circ + e^{-1}\{\sin(k-40)\,\omega_\circ - \cos(k-40)\,\omega_\circ\}}{-4\left[1+\{(k-40)\,\omega_\circ\}^2\right]}$$

$$+\frac{j\,[k+40]\,\omega_\circ + e^{-1}\{\sin(k+40)\,\omega_\circ - \cos(k+40)\,\omega_\circ\}]}{4\left[1+\{(k+40)\,\omega_\circ\}^2\right]}$$

(پ) از مسأله ۳,٤۲ بخاطر داریم که $b_k = a_{-k}^*$ از قسمت (الف) می دانیم که ضرایب سری فوریـه ی $z(t) = x(t)y(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$ به صورت زیر خواهد بود:

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{n-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_{n+k}$$

از معادله آنالیز سری فوریه، درایم:

$$c_k = \frac{1}{T_\circ}\int_\sigma^{T_\circ} |x(t)|^2 e^{-j\left(-2\pi/T_\circ\right)kt} dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_{n+k}^*$$

با قرار دادن $k = \circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ} |x(t)|^2 dt_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

....

۳,٤۷) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \cos 2\pi t$$

چون $x(t)$ متناوب، و دوره تناوب پایه آن ۱ است، با دوره تناوب N نیز متناوب است که N می تواند هر عدد صحیح دلخواهی باشد. ضرائب سری فوریه $x(t)$ را با فرض این که $x(t)$ با دوره تناوب ۳ متناوب است، بیابید.

حل:

فرض کنید $x(t)$ سیگنالی متناوب با پریود (۱) باشد. ضرایب غیرصفر FS برای $x(t)$ شامل $a_1 = a_{-1} = 1/2$ خواهند بود. حال اگر فرض کنیم $x(t)$، با پریود (۳) متناوب باشد. در اینصورت ضرایب غیر صفر $x(t)$ عبارتند از:

$$b_3 - b_{-3} = 1/2$$

....

۳,٤۸) فرض کنید $x[n]$ یک رشته متناوب ، با دوره تناوب N و نمایش سری فوریه زیرست

$$x[b] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$ (م ۳–٤۸–۱)

ضرایب سری فوریه هر یک از سیگنالهای زیر را می توان بر حسب a_k معادله م (۳–٤۸–۱) بیان کرد. این ضرائب را بیابید.

الف) $x[n-n_\circ]$

ب) $x[n]-x[n-1]$

ج) $x[n]-x\left[n-\frac{N}{2}\right]$ (N را زوج بگیرید)

د) $x[n]+x\left[n+\frac{N}{2}\right]$ (N را زوج بگیرید، توجه کنید که دوره تناوب سیگنال N/۲ است.)

هـ) $x_*[-n]$

و) $(-1)^n x[n]$ (N را فرد بگیرید، دقت کنید که دوره تناوب این سیگنال ۲۸ است.)

ح)
$$y[n] = \begin{cases} x[n], & \text{زوج } n \\ \circ, & \text{فرد } n \end{cases}$$

حل:

الف) ضرایب سری فوریه $x[n-n_\circ]$ برابر است با:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[\eta-\eta_\circ] e^{-j2nk/N} \\ &= \frac{1}{N} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \sum_{n=\circ}^{N-1} x[n] e^{-2nk/N} \\ &= a_k e^{-2\pi jkn_\circ/N} \end{aligned}$$

(ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف)، ضرایب سری فوریه $x[n]-x[n-1]$ به صورت زیر می باشد:

$$\delta_k = a_k - e^{-j2\pi k/n} a_k = \left[1-e^{-2\pi jk/n}\right] a_k$$

(ج) با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت (الف)، ضرایب سری فوریه $x[n]-x\left[n-N/2\right]$ عبارت است از:

$$\delta_k = a_k\left[1-e^{-jk\pi}\right] = \begin{cases} \circ & k \text{ زوج} \\ 2a_k & k \text{ فرد} \end{cases}$$

(د) توجه کنید که پریود $x[n]+x\left[n+N/2\right]$ برابر است با $\frac{N}{2}$. ضرایب سری فوریه $x[n]+x\left[n-N/2\right]$ عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{2}{N}\sum_{n=\circ}^{\frac{N}{2}-1}\left[x[n]+x\left[n+N/2\right]\right]e^{-j4\pi nk/N} = 2a_{2k} \qquad 0 \le k \le N/2 - 1$$

(هـ) ضرایب سری فوریه $x^*[-n]$ عبارتست از:

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x^*[-n]e^{-j2\pi nk/N} = a_k^*$$

(و) ضرایب سری فوریه $(-1)^n x[n]$ برای Nهای زوج عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi n/N)(k-N/2)} = a_{(k-N/2)}$$

(ذ) ضرایب صری فوریه $(-1)^n x[n]$ عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi n/N)(k-N/2)}$$

خ) با N فرد، پریود عبارت $(-1)^n x[n]$ برابر ۲N خواهد بود. بنابراین ضرایب سری فوریه برابر است با:

$$\delta_k = \frac{1}{2N}\left[\sum_{n=\circ}^{N=1} x[n]e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(\frac{K-N}{2}\right)} + \sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(\frac{K-N}{2}\right)}e^{-j\pi(K-N)}\right.$$

توجه کنید که برای k های فرد، عبارت $\frac{K-N}{2}$عددی صحیح و K-N نیز عدد صحیح فرد خواهد بود.

همچنین برای k زوج:
$$\delta_k = \begin{cases} \frac{a_{K-N}}{2} & k \text{ فرد} \\ \circ & k \text{ فرد} \end{cases}$$

(ط) در اینجا: $y[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + (-1)^n x[n]\}$

برای N زوج:

$$\delta_k = \frac{1}{2} - \left[a_k + a_k - \frac{N}{3}\right]$$

برای N فرد:
$$\delta_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[a_k + a\frac{K-N}{2}\right] & k \text{ زوج} \\ \frac{1}{2}a_k & k \text{ فرد} \end{cases}$$

....

۳,٤۹) فرض کنید $x[n]$ یک شته متناوب با دوره تناوب N و نمایش سری فوریه زیرست

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ۳-٤۹-۱)}$$

(الف) فرض کنید N زوج و $x[n]$ معادله زیر را ارضا می کند.

$$x[n]=-x\left[n+\frac{N}{2}\right]$$ برای تمام مقادیر n

نشان دهید که برای تمام مقادیر صحیح زوج k های مضرب ٤ داریم $a_k=0$.

(ج) به طور کلی فرض کنید N مضربی از M باشد و داشته باشیم.

$$\sum_{r=0}^{(N/M)-1} x\left[n+r\frac{N}{M}\right]=0$$ برای تمام مقادیر n

نشان دهید که برای تمام مضارب M داریم $a_k=0$.

حل:

(الف) ضرایب FS به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}
a_k &=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\\
&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}+\frac{1}{N}\sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}\\
&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2-1)} x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}+\frac{e^{-j\pi k}}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n+N/2\right]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=0\\
&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}-\frac{e^{-j\pi k}}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\\
&=0 \qquad for \quad k \qquad even
\end{aligned}$$

(ب) با بکارگیری روشی مشابه قسمت (الف) می توانیم نشان دهیم که:

$$a_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=\circ}^{\frac{N}{4}-1}\left\{1-e^{-jk\pi/2}+e^{-j\pi k}-e^{-j\frac{3\pi k}{2}}\right\}x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\right]$$

$$= \circ \qquad foe \quad k=4r \ \ , \ r\in z.$$

(ج) اگر N/M یک عدد صحیح باشد. می توانیم از روش کلی قسمت (الف) برای اینکه نشان دهیم:

$$a_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=\circ}^{B-1}\left\{1-e^{-j2\pi r}+e^{-j4\pi r}-\ldots+e^{-j2\pi(M-1)r}\right\}x[n]e^{-j\frac{2\pi nr}{N}}\right]$$

استفاده کنیم که $B=N/M$ و $r=K/M$. از معادله بالا بدیهی است که:

$$a_k = \circ \qquad if \quad k=rM \ \ , \ r\in z$$

۳,۵۰) اطلاعات زیر در مورد سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره تاوب ۸ و ضـرائب سـری فوریـه a_k داده شده است.

۱. $a_k = -a_{k-4}$

۲. $x[2n+1] = (-1)^n$

یک تناوب $x[n]$ را رسم کنید.

حل:

از جدول ۳,۲ می دانیم که اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_{k1}$$

آنگاه

$$(-1)^n x[n] = e^{j\left(2\pi/N\right)\left(N/2\right)n} x[n] \xleftrightarrow{FS} a\left(k - k/2\right)$$

در این مورد N=۸ بنابراین:

$$(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{FS} a_{k-4}$$

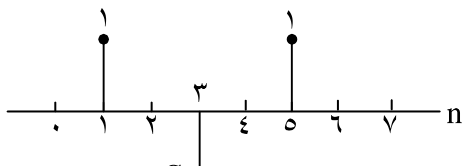
بدلیل اینکه داده شده است که $a_k = -\propto_{k-4}$، داریم:

$$x[n] = -(-1)^n x[n] = (-1)^{n+1} x[n]$$

که نشان می دهد $x[\circ] = x[\pm 2] = x[\pm 4] = \ldots = \circ$

همچنین داده شده که $x[1] = x[5] = \ldots = 1$ و $x[3] = x[7] = -1$

بنابراین یک دوره تناوب $x[n]$ در شکل S۳,۵۰ نشان داده شده است.



شکل S.۳,۵۰

۳,۵۱) $x[n]$ یک سیگنال متناوب با تناوب $N = 8$ و ضرائب سری فوریه $a_k = -a_{k-4}$ است. سیگنال

$$x[n] = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) x[n-1]$$

با دوره تناوب $N=8$ ایجاد شده است. ضرائب سری فوریه $y[n]$ را b_k بنامیـد. تـابع $f[k]$ را بـه نحوی تعیین کنید که داشته باشیم.

$$b_k = f[k] a_k$$

حل:

داریم:

$$e^{j4\left(2\pi/8\right)n} x[n] = e^{j\pi n} x[n] = (-1)^n x[n] \xleftrightarrow{FS} a_{k-4}$$

و بنابراین

$$(-1)^{n+1} x[n] \xleftrightarrow{FS} -a_{k-4}$$

اگـر $a_k = -a_{k-4}$ در ایـن صـورت $x[\circ]=x[\pm 2]=x[\pm 4]=\ldots=\circ$ حـال. توجـه بفرمائیـد کـه سـیگنال $p[n]=x[n-1]$ و $p[\pm 1]=p[\pm 3]=\ldots=\circ$. حـال طـرح سیگنال $x[n]=\left(1+-(-1)^n\right)\times 1/2$ در شکل S۳,۵۱ نشانداده شده است.

بدیهی است که سیگنال $y[n]=x[n]\rho[n]=p[n]$ زیرا $p[n]$ هنگامیکه $x[n]$ صـفر باشـد، برابـر صفر می باشد. بنابراین $y[n]=x[n-1]$. ضرایب FS برای $y[n]$ برابر است با.

۳,۵۲) $x[n]$ یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرایب سری فوریه مختلط a_k اسـت. شکل قائم a_k عبارت است از

$$a_k = b_k + jc_k$$

که در آن b_k و c_k حقیقی اند.

(الف) نشان دهید $a_{-k}=a_k^*$. رابطه b_k و b_{-k} را بیابید. رابطه بین c_k و c_{-k} را بیابید.

(ب) N را زوج بگیرید. نشان دهید که $a_{N/2}$ حقیقی است.

(ج) نشان دهید $x[n]$ را می توان به صورت سری فوریه مثلثاتی زیر نوشت: اگر N فرد باشد.

$$x[n]=a_{\circ}+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

و اگر N زوج باشد

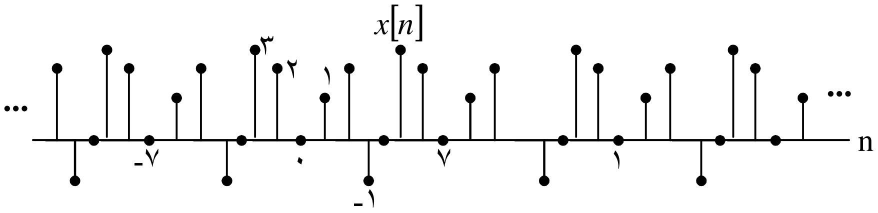
$$x[n]=\left(a_{\circ}+a_{N/2}(-1)^n\right)+2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

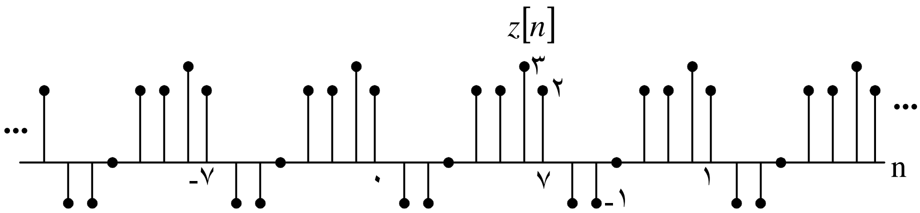
(د) اگر شکل قطبی a_k به صورت $A_k e^{j\theta k}$ باشد، نشان دهید که می توان نمایش سری فوریـه $x[n]$ را به شکل زیر نوشت.

به ازای N فرد $$x[n]=a_{\circ}+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k\right)$$

به ازای N زوج $$x[n]=\left(a_{\circ}+a_{N/2}(-1)^n\right)+2\sum_{k=1}^{(N/2)} A_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k\right)$$

(هـ) فرض کنید سیگنالهای $x[n]$ و $z[n]$ شکل م ۳-۵۲ دارای نمایش مثلثاتی زیرند.





شکل م ۳-۵۲

$$x[n]=a_\circ+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

$$z[n]=d_\circ+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-f_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

سیگنال زیر را رسم کنید.

$$y[n]=a_\circ-d_\circ+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-\left(f_k-c_k\right)\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

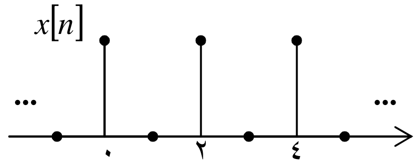
حل:

(الف) اگر سیگنال $x[n]$ حقیقی باشد، داریم $x[n]=x^*[n]$ در این صورت:

$$a_{-k}=\sum_n x[n]e^{+j\frac{2\pi nk}{N}}=a_k^*$$

از این نتیجه، داریم:

$$\underline{c}_k=-c_k \ , \ \underline{b}_k=b_k$$



شکل S.۳,۵۱

(ب) اگر N زوج باشد. در این صورت

$$a_{N/2} = \frac{1}{N}\sum_{n} x[n]e^{-j\pi n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n}(-1)^n x[n] = \text{حقیقی}$$

(ج) اگر N فرد باشد در اینصورت:

$$k[n] = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} a_k e^{j(2\pi/N)kn}$$
$$= \sum_{k=\circ}^{(N-1)/2} a_k e^{j(2\pi/N)k_n} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} a_k^* e^{-j(2\pi/N)k_n}$$

$$= a_\circ + \sum_{k=1}^{(N-1)/2}(b_k + j_{ck})r^{j(2\pi/N)kn} \sum_{k=1}^{(N-1)/2}(b_k - jc_k)e^{-j(2\pi/N)kn}$$
$$= a_\circ + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k \cos\left(2\pi kn/N\right) - c_k \sin\left(2\pi kn/N\right)$$

اگر N زوج باشد در اینصورت:

$$x[n] = \sum_{K=\circ}^{N-1} a_k e^{j(2\pi/N)kn}$$
$$= a_\circ + (-1)^n a_{N/2} + 2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} a_k \quad e^{j(2\pi/N)k_n} - a_k^* e^{-j(2\pi/N)k_n}$$

$$= a_\circ + (-1)^n a_{N/2} + 2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k \cos\left(2\pi kn/N\right) - c_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

(د) اگر $a_k = A_k e^{j\in k}$ در اینصورت $b_k = A\cos(\theta_k)$ و $c_k = A\sin\theta_k$ خواهد بود.

با جایگذاری در نتایج قسمت قبلی برای Nهای فرد خواهیم داشت:

$$x[n] = a_\circ + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A\cos(\theta_k)\cos\left(2k\pi n/N\right)$$
$$- c_k \sin(\theta_k)\sin\left(2\pi kn/N\right)$$
$$= a_\circ + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \theta_k\right)$$

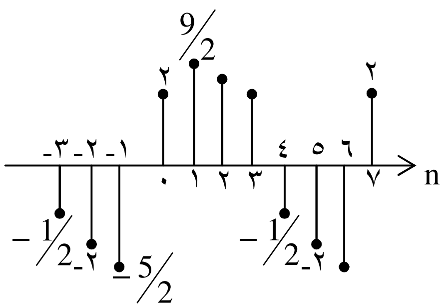
به طور مشابه برای N های زوج:

$$x[n] = a_\circ + (-1)^n a\left(N/2\right) + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A\cos(\theta_k)\cos\left(2k\pi n/N\right)$$
$$- c_k \sin(\theta_k)\sin\left(\frac{2k\pi n}{N}\right)$$
$$= a_\circ = (-1)^n a\left(N/2\right) + 2\sum_{k=1}^{(N-2)} A_k \cos\theta_k\left(\frac{2\pi kn}{N} + \right)$$

(هـ) سیگنال برابر است با:

$$y[n] = d_x c_\circ\{x[n]\} - d.c\{z[n]\} + \varepsilon v\{z\} + od\{x\} - 2od\{z\}$$

که در شکل S۳,۵۲ نمایش داده شده است:



شکل S۳,۵۲

....

۳,۵۳) $x[n]$ را یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید.

(الف) نشاندهید که در صورت زوج بودن N حداقل دو ضریب فوریه a_k (در هر تناوب) حقیقی اند.

(ب) نشاندهید که در صورت فرد بودن N حداقل یک ضریب فوریه a_k (در هر تناوب) حقیقی است.

حل:

داریم:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} x[n] e^{-j\left(2\pi/N\right)k_n}$$

توجه کنید که

$$a_\circ = 1/N \sum_{\langle N\rangle} x[n]$$

که اگر $x[n]$ حقیقی باشد، حقیقی خواهد بود.

(الف) اگر N زوج باشد؛ در این صورت:

$$a_{N/2} = 1/N \sum_{\langle N \rangle} x[n] e^{-j\pi n} = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n](-1)^n$$

بدیهی است که $a_{N/2}$ نیز در صورتی که $x[n]$ حقیقی باشد، حقیقی خواهد بود.

(ب) اگر N فرد باشد، تنها $a_\circ$ ضمانت فرد بودن را دارد.

۳,۵٤) تابع زیر در نظر بگیرید.

$$a[k] = \sum_{n=\circ}^{N-1} e^{j} (2\pi / N) kn$$

(الف) نشان دهید که به ازای $k = \circ, \pm N, \pm 3N$ داریم $a[k] = N$

(ب) نشاندهید کهاگر k مضرب صحیحی از N نباشد، آنگاه $a[k] = \circ$. (راهنمایی: فرمول جمع متناهی را به کار برید).

(ج) بندهای (الف) و (ب) را برای تابع زیر تکرار کنید.

$$a[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(2\pi / N)kn}$$

حل:

فرض کنید $K = PN$ و $p \in z$ در اینصورت:

$$a[PN] = \sum_{n=\circ}^{N-1} e^{j\left(2\pi/N\right)PN^n} = \sum_{n=\circ}^{N-1} e^{j2\pi np} = \sum_{n=\circ}^{N-1} 1 = N$$

(ب) با استفاده از فرمول مجموع محدود؛ خواهیم داشت:

$$a[k] = \frac{1 - e^{j2\pi k}}{1 - e^{j\left(2\pi/N\right)k}} = \circ$$

اگر $k \neq pn$ و $p \in z$

(ج) فرض کنید:

$$a[k]=\sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j\left(2\pi/N\right)n}$$

که q عدد صحیح دلخواهی می باشد. با جایگذاری $K = PN$، دوباره به سادگی می توانیم نشان دهیم که:

$$a[PN]=\sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j\left(2\pi/N\right)PN_n}=\sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j2\pi pn}=\sum_{n=q}^{q+N-1}1-N$$

حال

$$a[k]=e^{j\left(2\pi/N\right)kq}\sum_{n=\circ}^{N-1}e^{j\left(2\pi/N\right)kn}$$

با استفاده از قسمت (ب)، می توان این بحث را انجام داد که

$$\begin{cases} a[k]=\circ \\ for\ \ k \neq PN, P \in z \end{cases}$$

۳,۵۵) $x[n]$ را یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید. در این مسئله خاصیت تغییر مقیاس زمانی جدول ۳-۲ را به دست می آوریم.

$$x_{(m)}[n]=\begin{cases} x\left[\dfrac{n}{m}\right] & n=\circ\ ,\pm m, \pm 2m \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که دوره تناوب $x_{(m)}[n]$ برابر mN است.

(ب) نشان دهید که اگر

$$x[n]=v[n]+w[n]$$

آنگاه

$$x_{(m)}[n]=v_{(m)}[n]+w_{(m)}[n]$$

(ج) فرض کنید به ازای یک عدد صحیح $k_\circ$، $x[n]=e^{j2\pi k_\circ n/N}$ و نشان دهید که

$$x_{(m)}[n]=\frac{1}{m}\sum_{1=\circ}^{m-1}e^{j2\pi(k_\circ+lN)n(mN)}$$

(ج) یعنی هر نمایی مختلط $x[n]$ در $x_{(m)}[n]$ به ترکیب خطی m نمایی مختلط تبدیل می شود.

(د) به کمک نتایج بندهای (الف)، (ب)، و (ج) نشان دهید که اگر ضرائب فوریه $x[n]$ برابر a_k باشد، $x_{(m)}[n]$ دارای ضرائب فوریه $\frac{1}{m}a_k$ باشد.

حل:

(الف) توجه داشته باشید که:

$$x_m[n+mN]=\begin{cases}x\left[\dfrac{n}{m}+N\right] & n=\circ\,,\pm m\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}=\begin{cases}x\left[\dfrac{n}{m}\right] & n=\circ\,,\pm m,...\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$x=\lambda_m[n]$$

در نتیجه $x[n]$ با دوره تناوب mN، پریودیک است.

(ب) عملگر اسکیل در حوزه زمان که در این مسئله بحث شده است، عملگری خطی می باشد. بنابراین اگر $x[n]=v[n]+\omega[n]$ در این صورت $x_m[n]=v_m[n]+\omega_m[n]$

(ج) فرض کنید:

$$y[n]=\frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1}e^{j\left(2\pi/mN\right)\left(k_0+\ell N\right)n}$$
$$=\frac{1}{m}e^{j\left(2\pi/mN\right)k_0 n}\sum_{\ell=0}^{m-1}e^{j\left(2\pi/m\right)\ell n}$$

که به صورت زیر قابل بازنویسی می باشد:

(S۳,۵۵-۱)

$$y[n]=\begin{cases}e^{j\left(2\pi/mN\right)^{k_0 n}} & n=0,\pm N\ ,\ 2N,\ldots\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

حال، توجه کنید که با بکارگیری اسکیل – زمانی روی $x[n]$ خواهیم داشت:

$$x_m[n]=\begin{cases}e^{j\left(2\pi/mN\right)k_0 n} & n=0,\pm N,\pm 2N,\ldots\\ \text{سایر نقاط} & \end{cases}$$

(S۳,۵۵-۲)

با مقایسه (S۳-۵۵-۱) و (S۳-۵۵-۲) ملاحظه می شود که $y[n]=x_{(m)}[n]$

(د) داریم:

$$b_k=\frac{1}{mN}\sum_{n=0}^{mN-1}x_{(m)}[n]e^{-j\left(2\pi/mN\right)kn}$$

می دانیم که تنها m– امین مقدار ۰ در سری بالاغیر صفر است؛ پس

$$b_k = \frac{1}{mN}\sum_{n=\circ}^{N-1} x_{(m)}[nm]e^{-j\left(2\beta\pi/_{mN}\right)K_{mn}}$$
$$= \frac{1}{mN}\sum_{n=\circ}^{N-1} x_m[nm]e^{-j(2\pi/_N)k_n}$$

توجه کنید که $x_m[nM] = x[n]$. بنابراین:

$$b_k = \left(\frac{1}{MN}\right)\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/_N)k_n} = \frac{a_k}{m}$$

۳,۵۶) $x[n]$ را یک سیگنال متناوب بادوره تاوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید.

(الف) ضرائب سری فوریه $|x[n]|^2$، یعنی b_k، را برحسب a_k نیز حتماً حقیقی اند؟

حل:

(الف) داریم:

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k \ , \ x^*[n] \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$$

با استفاده از خاصیت ضرب

$$x[n]x^*[n] = |x[n]|^2 \xleftrightarrow{FS} \sum_{\ell=\langle N\rangle} a_{\ell+k}$$

(ب) با توجه به آنچه در قسمت (الف) ذکر شد. بدیهی است که پاسخ مثبت خواهد بود.

۳,۵۷) فرض کنید

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ۳-۵۷-۱)}$$

و

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

سیگنالهای متناوب اند. نشان دهید که

$$x[n]y[n]=\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

که در آن

$$c_k \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k-l} b_l$$

(ب) نتیجه بند (الف) را تعمیم دهید، یعنی نشان دهید که

$$c_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{l=\langle N\rangle} a_{k-l} b_l$$

(ج) با استفاده از نتیجه بند (ب) نمایش سری فوریه سیگنالهای زیر را پیدا کنید، $x[n]$ مطابق و معادله (م ۳-۵۷-۱) است.

i) ($x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$

ii) ($x[n]\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta[n-rN]$

$$\text{iii)}\ x[n]\left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta\left[n-\frac{rN}{3}\right]\right)$$

(N را مضرب ۳ بگیرید)

(د) نمایش سری فوریه سیگنال $x[n]y[n]$ را پیدا کنید، که در آن

$$x[n]=\cos(\pi n/3)$$

,

$$y[n]=\begin{cases}1, & |n|\le 3\\ \circ, & 4\le |n|\le 6\end{cases}$$

$y[n]$ دارای دوره تناوب ۱۲ است.

(و) با استفاده از نتیجه بند (ب) نشان دهید که

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]y[n]=N\sum_{l=\langle N\rangle} a_1 b_{-l}$$

و با استفاده از آن رابطه پارسئوال را برای سیگنالهای متناوب گسسته در زمان به دست آورید.

حل:

(الف) داریم:

$$x[n]y[n]=\sum_{k=\circ}^{N-1}\sum_{\ell=\circ}^{N-1} a_k b_\ell e^{j\left(2\pi/_N\right)(k+L)n}$$

با جایگذاری $\ell'=k+\ell$ خواهیم داشت:

$$x[n]y[n]=\sum_{K=\circ}^{N-1}\sum_{\ell'=k}^{(K+N-1)}a_k b_{(\ell'-k)}$$

اما از آنجایی که $b_{\ell'-k}$ و $e^{j\left(2\pi/N\right)\ell'}$ بـا پریـود N، پریودیـک هـستند. ایـن را دوبـاره بـه صـورت زیـر بازنویسی می کنیم:

$$x[n]y[n]=\sum_{K=\circ}^{N-1}\sum_{\ell'=\circ}^{N-1}a_k b_{(\ell'-k)}e^{j\left(2\pi/N\right)\ell' n}$$

$$=\sum_{\ell=\circ}^{N-1}\left[\sum_{k=\circ}^{N-1}a_k b_{\ell-k}\right]$$

بنابراین

$$c_k=\sum_{K=\circ}^{N-1}a_k b_{\ell-k}$$

با تعویض a_k و b_k خواهیم داشت:

$$c_k=\sum_{k=\circ}^{N-1}b_k a_{\ell-k}$$

(ب) توجه کنید، بدلیل اینکه a_k و b_k با پریود N، پریودیک هـستند. مـی تـوانیم سـری فـوق را بـه صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$c_k=\sum_{\langle N\rangle}\propto_k b_{\ell-k}=\sum_{\langle N\rangle}b_k\propto_{\ell-k}$$

(ج) (i) اینجا

$$c_k = \sum_{\ell=\circ}^{N-1} [\delta[n-3] + \delta[L-N-3]] a_{k-\ell}$$

بنابراین

$$c_k = \frac{1}{2} a_{k-3} + \frac{1}{2} a_{k+3-N}$$

(ii) N= دوره تناوب و نیز

$$b_k = \frac{1}{N} \text{ , } for\ all\ \ k$$

بنابراین

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{\ell=\circ}^{N-1} a_\ell$$

(iii) در اینجا

$$b_k = \frac{1}{N}\left(1 + e^{-j2\pi k/3} + e^{-j4\pi k/3}\right)$$

بنابراین

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{\ell=\circ}^{N-1} \left[1 + e^{-2\pi j\ell/3} + e^{-j\pi\ell}\right] a_{k-\ell}$$

(ت) ۱۲= دوره تناوب و نیز

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_2 = a_{10} = \frac{1}{2}$$

سایر نقاط در بازه $\circ \leq k \leq 11$، $a_k = \circ$

$$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{\sin 7\pi k/12}{\sin \pi k/12} \circ \le k \le 11$$ و

بنابراین در یک دوره تناوب c_k عبارتست از:

$$c_k = \frac{1}{24}\left[\frac{\sin(7\pi(k-2)/12)}{\sin(\pi(k-2)/12)} + \frac{\sin(7\pi(k-10)/12)}{\sin(\pi(k-10)/12)}, \circ \le k \le 11\right.$$

(د) با استفاده از معادله آنالیز خواهیم داشت:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_\ell b_{k-\ell} = \sum_{\langle N\rangle} x[n]y[n]e^{-j\left(2\pi/N\right)k_n}$$

با جایگذاری $k=\circ$ در معادله فوق داریم:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_k b_{-\ell} = \sum_{\langle N\rangle} x[n]y[n]$$

حال با فرض اینکه $y[n]=x^*[n]$ خواهیم داشت $b_\ell = a^*_{-\ell}$، بنابراین:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_\ell a^*_\ell = \sum_{\langle N\rangle} x[n]x^*[n]$$

بنابراین

$$N\sum_{\ell=\langle N\rangle} |a_\ell|^2 = \sum_{N} |x[n]|^2$$

۳,۵۸) $x[n]$ و $y[n]$ را سیگنالهای متناوبی با دوره تناوب N بگیرید و فرض کنید.

$$z[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$$

کانولوشن متناوب آنها باشد.

(الف) نشاندهید که $z[n]$ با دوره تناوب N متناوب است.

(ب) نشاندهید که اگر a_k، b_k، و c_k به ترتیب ضرائب سری فوریه $x[n]$، $y[n]$، و $z[n]$ باشند، آنگاه

$$c_k = Na_k b_k$$

(ج) فرض کنید

$$x[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

و

$$y[n] = \begin{cases} 1, & \circ \le n \le 3 \\ \circ, & 4 \le n \le 7 \end{cases}$$

دو سیگنال با دوره تناوب ۸ هستند. نمایش سری فوریه کانولوشن متناوب این دو سیگنال را بیابید.

(د) بند (ج) را برای دو سیگنال متناوب زیر، که دوره تناوب آنها نیز ۸ است، تکرار کنید.

$$y[n] = \begin{cases} \sin,\left(\frac{3\pi n}{4}\right), & \circ \le n \le 3 \\ \circ, & 4 \le n \le 6 \end{cases}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \circ \le n \le 7$$

حل:

(الف) داریم:

$$x[n-N]=\sum_{\langle L\rangle}x[r]y[n+N-r]$$

چون $y[n]$ با دوره تناوب N، متناوب می باشد،

بنابراین $y[n+N-r]=y[n-r]$

$$z[n+N]=\sum_{\langle \ell\rangle}x[r]y[n-r]=z[n]$$

بنابراین $z[n]$ هم با پریود N، متناوب است.

(ب) ضرایب FS برای $z[n]$ عبارتست از:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{n=\langle N\rangle}a_k b_{n-k}e^{-j2\pi nt/N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{-2\pi jk\ell/N}\sum_{n=\langle N\rangle}b_{n-k}e^{-j2\pi(n-k)\ell/N} \\
&= 1/N\, Na_l Nb_l \\
&= Na_{lbl}
\end{aligned}$$

(ج) در اینجا n=۸ و ضرایب غیر صفر FS در بازه ی $0 \le k \le 6$ برای $x[n]$ برابرند با:

$$a_3 = a_5^* = 1/2j$$

توجه کنید که برای $y[n]$، مقادیر b_3 و b_5 را نیاز داریم:

$$b_3 = b_5^* = \frac{1}{4\left(1-e^{-j3\pi/4}\right)}$$

بنابراین تنها ضرایب غیرصفر FS در بازه $0 \le k \le 7$ برای کانولشن متناوب این سیگنالها عبارتند از

$$c_3 = 8a_5b_5 \ , \ c_3 = 8a_3b_3$$

(د) در اینجا

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{16j}\left[\frac{1-e^{j\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi k}{4}\right)4}}{1-e^{-j\left(\frac{3\pi}{6}-\pi k/4\right)}} - \frac{1-e^{j\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi k}{4}\right)4}}{1-e^{-j\left(3\pi/7\right)+\pi k/4}}\right]$$

,

$$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k = \frac{1}{8}\left[\frac{1-\left(1/2\right)^8}{1-\left(1/2\right)e^{-jk\pi/4}}\right]$$

بنابراین:

$$z[n] = x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} 8a_kb_k$$

....

۳,۵۹) (الف) $x[n]$ با دوره تناوب N متناوب است. نشاندهیدکه ضرائب سری فوریه سیگنال متنـاوب زیر

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT)$$

با دوره تناوب N متناوب است.

(ب) فرض کنید $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب است و ضرائب صری فوریه a_k آن بـا دوره تنـاوب N متناوب است. نشان دهیدکه باید یک رشت متناوب $g[n]$ وجود داشته باشد، به نحوی که

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\delta(t-kT/N)$$

(ج) آیا یک سیگنال پیوسته می تواند ضرائب سری فوریه متناوب داشته باشد؟

حل:

(الف) توجه کنید که سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب NT متناوب است. ضرایب FS

$$a_k = \frac{1}{NT}\int_{\circ}^{NT}\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]\delta(t-PT)\right]e^{-j\left(2\pi/NT\right)kt}dt$$

توجه کنید که حد سری فوق می تواند بر حسب حدود انتگرال عوض شود بنابراین داریم:

$$\propto_k = \frac{1}{NT}\int_{\circ}^{NT}\left[\sum_{p=\circ}^{n-1} x[p]\delta(t-\rho T)e^{-j\left(2\pi/NT\right)kt}dt\right]$$

با تعویض جای انتگرال و سیگما و ساده سازی $\propto_k$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} a_k &= \left(1/NT\right)\sum_{p=\circ}^{N-1} x[p]\int_{\circ}^{NT}\delta(t-pT)e^{-j\left(2\pi/NT\right)kt}dt \\ &= \left(1/NT\right)\sum_{p=\circ}^{n-1} x[p]e^{-j\left(2\pi/N\right)pk} \\ &= \left(\frac{1}{T}\right)\left[\left(1/N\right)\sum_{p=\circ}^{N-1} x[p]e^{-j\left(2\pi/N\right)pk}\right] \end{aligned}$$

توجه شود که جمله داخل براکت در طرف راست معادله فوق ضرایب FS پیوسته سیگنال $x[n]$ است.

چون، این با تناوب N متناوب است، a_k نیز بایستی با دوره ی تناوب N متناوب باشد.

(ب) اگر ضرایب سری فوریه $x(t)$ با پریود N متناوب باشد، در اینصورت

$$a_k = a_{(K-N)}$$

که بیان می کند

$$x(t)=x(t)e^{j\left(2\pi/T\right)Nt}$$

که این اگر $x(t)$ برای همه t ها صفر شود و نیز وقتی $2\pi k = NT\left(2\pi/T\right)$ ممکن است. که $k \in z$.

بنابراین $x(t)$ به صورت زیر است:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\delta\left(t-kT/N\right)$$

(ج) یک مثال ساده به صورت زیر:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

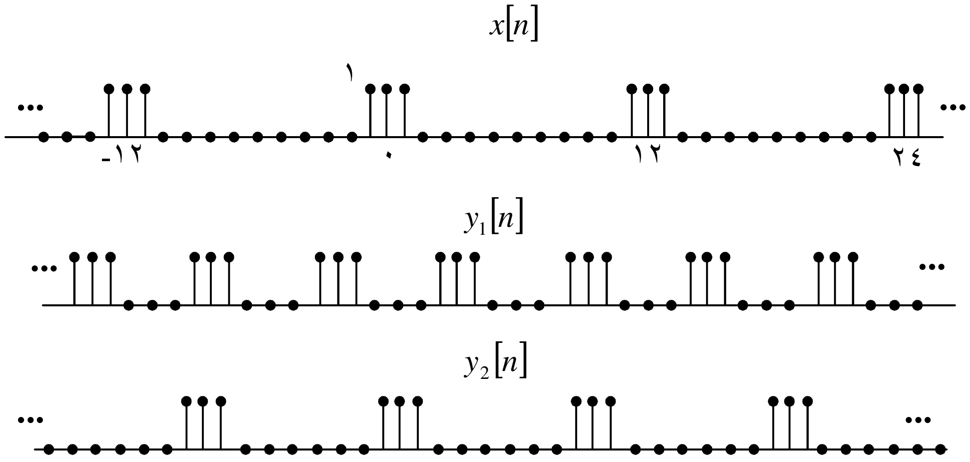
۳,٦۰) زوج سیگنالهای $x[n]$ و $y[n]$ زیر را در نظر بگیرید. به ازای هر زوج تعیین کنید که آیا سیستم LTI گسسته در زمانی وجود دارد که $y[n]$ خروجی متناظر با ورودی $x[n]$ آن باشد. در صورت وجود چنین سیستمی، آیا این سیستم یکتاست (یعنی آیا سیستم دیگری با مشخصه فوق وجود ندراد)؟ برای هر مورد پاسخ فرکانسی سیستم LTI دارای رفتار مطلوب را پیدا کنید. اگر برای یک زوج $x[n]$ و $y[n]$ سیستم LTI وجود ندارد، علت آن را توضیح دهید.

(الف) $$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \quad y[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(ب) $$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad y[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

(ج) $$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \ , \quad y[n]=4^n u[-n]$$

(د) $x[n]=e^{jn/8}\ ,\ y[n]=2e^{jn/8}$



شکل م ۳-۶۰

(هـ) $x[n]=e^{in/8}u[n], y[n]=2e^{jn/8}u[n]$

(و) $x[n]=j^n\ , y[n]=2j^n(1-j)$

(ز) $x[n]=\cos(\pi n/3)\ ,\ y[n]=\cos(\pi n/3)+\sqrt{3}\sin(\pi n/3)$

(ح) $y_1[n]\ ,\ x[n]$ و شکل م ۳-۶۰

(ط) $y_2[n]\ ,\ x[n]$ و شکل م ۳-۶۰

حل:

(الف) سیستم LTI نمی باشد. $\left(1/2\right)^n$ تابع ویژه سیستم های LTI است بنابراین خروجی نیز بایستی به صورت $k\left(1/2\right)^n$ باشد که k ثابتی مختلط است.

(ب) می توانیم سیستم LTI ای رایانه رابط ورودی، خروجی بدست آوریم. پاسخ فرکانس این سیستم به صورت $H(e^{j\omega}) = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)e^{j\omega}\right)/\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)$، سیستم منحصر به فرد نمی باشد.

(ج) می توانیم سیستم LTI ای را با رابطه رابطه ورودی و خروجی بدست آوریم. پاسخ فرکانسی سیستم به صورت $H(i\omega) = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)e^{-j\omega}\right)/\left(1-\frac{1}{4}e^{j\omega}\right)$، سیستم منحصر به فرد نیست.

(د) می توان سیستم LTI ای را با رابطه ورودی و خروجی بدست آوریم. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا بایستی $H\left(e^{j/8}\right) = 2$.

(هـ) همانند قسمتهای قبلی می توان سیستم LTI ای را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد پاسخ فرکانسی سیستم برابر است با $H(e^{j\omega}) = 2$ سیستم منحصر به فرد نیست.

(و) می توان سیستم LTI ای را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد، پاسخ فرکانسی این سیستم برابر است با: $H\left(e^{j\pi/2}\right) = 2\left(1-e^{j\pi/2}\right)$.

(ذ) می توان سیستم LTI ای را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا ما تنها به $H\left(e^{j\lambda/3}\right) = 1-j\sqrt{3}$ نیاز داریم.

(خ) توجه کنید که $x[n]$ و $y_1[n]$ با فرکانس پایه ی مشابه پریودیک است. بنابراین می توان سیستم LTI ای با رابطه ورودی – خروجی بدون نقض خاصیت تابع اصلی بدست آورد. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا $H(e^{j\omega})$ بایستی مقادیر خاصی تنها برای $H\left(e^{j(2\pi/12)}\right)k$ داشته باشیم. مقدار $H(e^{j\omega})$ به دلخواه قابل انتخاب می باشد.

(i) توجه کنید که $x[n]$ و $y_1[n]$ با فرکانس پایه ای مشابهی پریودیک است. علاوه بر آن توجه کنید که $\frac{2}{3}y_2[n]$ پریود $x[n]$ را دارد. بنابراین $y[n]$ بایستی از نهایی های مختلطی تشکیل شده باشد که در

$x[n]$ حضور ندارند. این مطلب خاصیت تابع اصلی سیستم LTI را نقض می کند. بنابراین سیستم نمی تواند LTI باشد.

....

(۳,۶۱) دیدیم که روشهای تحلیل فوریه به این خاطر در بررسی سیستمهای LTI پیوسته در زمان مهم اند که نماییهای مختلط متناوب توابع ویژه سیستمهای LTI هستند. در این مسئله می خواهیم این گزاره را اثبات کنیم: هر چند بعضی از سیستمهای LTI توابع ویژه دیگری هم دارند، ولی توابع نمایی مختلط تنها توابعی اند که تابع ویژه تمام سیستمهای LTI هستند.

(الف) توابع ویژه سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t)$ را بیابید. مقادیر ویژه متناظر با هر تابع ویژه را بیابید.

(ب) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t-T)$ در نظر بگیرید سیگنالی پیدا کنید که به شکل e^{st} نباشد، ولی تابع ویژه این سیستم با مقدار ویژه ۱ باشد. همچنین دو تابع ویژه دیگر با مقدار ویژه $\frac{1}{2}$ و و ۲ پیدا کنید که نمایی مختلط نباشد. (راهنمایی: می توانید قطارهای ضربه ای پیدا کنید که شرایط لازم را ارضا کنند.)

(ج) یک سیستم LTI پایدار با پاسخ ضربه $h(t)$ حقیقی و زوج در نظر بگیرید. نشان دهید که $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ توابع ویژه این سیستم اند.

(د) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=u(t)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\phi(t)$ تابع ویژه این سیستم با مقدار ویژه متناظر λ باشد. معادله دیفرانسیلی را که $\phi(t)$ باید ارضا کند، تعیین و حل کند. این نتیجه و نتیجه بندهای (الف) تا (ج) مسئله باید بتواند اعتبار گزاره بیان شدهدر ابتدای مسئله را ثابت کند.

حل:

(الف) برای این سیستم

$$x(t) \rightarrow \boxed{s(t)} \rightarrow x(t)$$

بنابراین تمام توابع مقدار قبلی خود را حفظ می کند.

(ب) در زیر تابع اصلی با مقدار ۱ آمده است:

$$x(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$

و تابع اصلی با مقدار ضریب $1/2$

$$x(t) = \sum \left(1/2\right)^k \delta(t - kT)$$

و تابع اصلی با ضریب ۲ عبارتست از:

$$x(t) = \sum_k (2)^k \delta(t - kT)$$

(ج) اگر $h(t)$ حقیقی و زوج باشد در این صورت $H(\omega)$ حقیقی و زوج خواهد بود:

$$e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

و

$$e^{-j\omega t} \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow H(-j\omega)e^{-j\omega t} = H(j\omega)e^{-j\omega t}$$

از این دو حالت می توانیم این چنین بحث کنیم که:

$$\cos\omega t = 1/2\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow H(j\omega)\cos\omega t$$

بنابراین $\cos\omega t$ یک تابع ویژه می باشد. بنابراین به طریق مشابه نشان می دهیم که $\sin(\omega t)$ نیز یک تابع ویژه است.

(د) داریم:

$$\phi(t) \rightarrow \boxed{u(t)} \rightarrow \lambda\phi(t)$$

بنابراین:

$$\lambda\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(\tau)d\tau$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی داریم:

$$\lambda\phi'(t) = \phi(t)$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی داریم:

$$\lambda\phi'(t) = \phi(t)$$

فرض کنیم $\phi(\circ) = \phi_\circ$ در اینصورت

$$\phi(t) = \phi_\circ e^{t/\lambda}$$

۳,٦۲) یک روش ساختن منبع تغذیه dc این است که یک سیگنال ac را یکسوی تمـام مـوج کنـیم، یعنی سیگنال ac $x(t)$ را از سیستم یعبور دهیم که خروجی آن $y(t) = |x(t)|$ باشد.

(الف) شکل موجههای ورودی و خروجی را بـه ا زای $x(t) = \cos t$ رسـم کنیـد. دوره تنـاوب پایـه ورودی و خروجی را بیابید.

(ب) ضرایب سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t) = \cos t$ بیابید.

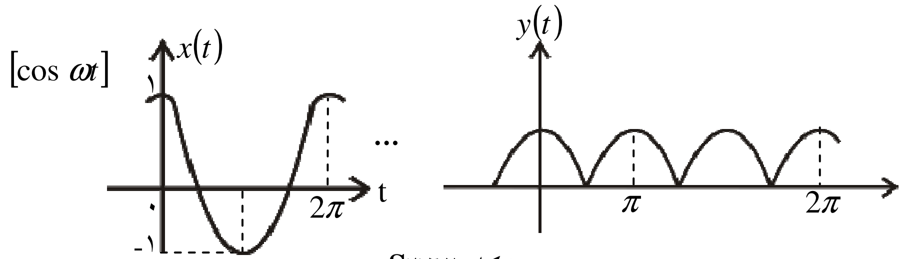
(ج) دامنه مؤلفه dc سیگنال ورودی چقدرست؟ دامنه مؤلفه dc سیگنال خروجی چقدرست؟

حل:

(الف) پریود اصلی ورود برابر است با $T = 2\pi$. پریود اصلی خروجی نیز عبارت اســت از $T = \pi$. سیگنالها در شکل S۳,٦۲ نمایش داده شده اند.

(ب) ضرایب FS خروجی برابر است با:

$$b_k = \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k2)}$$



شکل S۳,٦۲

(ج) جزء DC ورودی برابر – ۰ –است. و جزء DC خروجی $\frac{2}{\pi}$ می باشد.

۳,٦۳) فرض کنید که یک سیگنال متناوب پیوسته در زمـان بـه ورودی یـک سـیتم LTI اعمـال شـده است. نمایش سری فوریه سیگنال به صورت زیرست.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|} e^{jk(\pi/4)t}$$

که در آن a یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱ است، و پاسخ فرکانسی سیستم عبارت است از

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le w \\ 0, & |\omega| > w \end{cases}$$

W باید حداقل چقدر باشد تا انرژی متوسط در هر دوره تناوب خروجی سیستم حداقل ۹۰٪ انرژی متوسط در هر دوره تناوب $x(t)$ باشد.

حل:

توان متوسط هر دوره تناوب برابر است با:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_k |a_k|^2 = \sum_k a^{2|k|} = \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

N را طوری می خواهیم که:

$$\sum_{-N+1}^{N-1} |a_k|^2 = \circ.9\frac{1+\propto^2}{1-\propto^2}$$

که بیان می کند

$$\frac{1-2a^{2N}+2a^2}{1-\propto^2} = \frac{1+\propto^2}{1-\propto^2}$$

حل:

$$N = \frac{\log\left[1.45a^2+\circ.95\right]}{2\log a}$$

و

$$\frac{\pi N}{4} < \omega N \frac{(N-1)\pi}{4}$$

....

۳,٦٤) در این فصل دیدیم که مفهوم تابع ویژه، ابزار بسیار مهمی در مطالعه سیستمهای LTI اسـت. در مورد سیستمهای خطی، ولی تغییرپذیر با زمان نیز این حرف درست است. چنـین سیـستمی بـا ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. سیگنال $\phi(t)$ را تابع ویژه سیستم می نامیم اگر

$$\phi(t) \rightarrow \lambda\phi(t)$$

یعنی اگر به ازای $x(t)=\phi(t)$ داشته باشیم $y(t)=\lambda\phi(t)$، که در آن λ یک ثابت مختلط اسـت و مقدار ویژه متناظر با $\phi(t)$ نامیده می شود.

(الف) فرض کنید می توانیم ورودی $x(t)$ سیستم فوق را به صورت ترکیب خطی توابع ویژه $\phi_k(t)$، با مقدار ویژه متناظر λ_k نمایش دهیم؛ یعنی

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t)$$

خروجی $y(t)$ سیستم را بر حسب $\{c_k\}$، $\{\phi_k(t)\}$، و $\{\lambda_k\}$ بیان کنید.

(ب) فرض کنید سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است

$$y(t)=t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+t\frac{dx(t)}{dt}$$

آیا این سیستم خطی است؟ آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟

(ج) نشان دهید که مجموعه توابع زیر

$$\phi_k(t)=t^k$$

توابع ویژه سیستم بند (ب) هستند. مقدار ویژه λ_k متناظر با هر $\phi_k(t)$ را پیدا کنید.

(د) خروجی سیستم فوق را به ازای ورودی زیر بیابید.

$$x(t)=10t^{-10}+3t+\frac{1}{2}t^{4}+\pi$$

حل:

(الف) بسته به خاصیت خطی پذیری، داریم:

$$y(t)=\sum_{k}c_k\lambda_k\phi_k(t)$$

(ب) فرض کنید:

$$x_2(t)\rightarrow y_2(t) \quad \text{و} \quad x_1(t)\rightarrow y_1(t)$$

و نیز فرض کنید:

$$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\rightarrow y_3(t)$$

در این صورت:

$$\begin{aligned} y_3(t)&=t^2\left[ax_1''(t)+bx_2''(t)\right]+t\left[ax_1'(t)+bx_2'(t)\right]\\ &=\propto y_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

حال فرض کنید:

$$x_4(t)=x(t-t_\circ)\rightarrow y_4(t)$$

خواهیم داشت:

$$y_4(t)=t^2\frac{d^2x(t-t_\circ)}{dt^2}+t\frac{dx(t-t_\circ)}{dt}\neq y(t-t_\circ)$$

بنابراین، سیستم تغییرپذیر با زمان است.

(ج) برای ورودی برحسب $\phi_k(t)=t^k$، خروجی برابر است با:

$$y(t)=k^2t^k=k^2\phi_k(t)$$

بنابراین $\phi_k(t)$ تابع ویژه با مقدار ویژه $\lambda_k=k^2$ می باشد.

(د) خروجی برابر است با:

$$y(t)=10^3t^{-10}+3t+8t^4$$

۳,٦٥) دو تابع $u(t)$ و $\upsilon(t)$ را در فاصله $(a\ ,\ b)$ متعامد می نامند، اگرل

$$\int_a^b u(t)\upsilon^*(t)dt=0 \qquad \text{(م ۳–٦٥–۱)}$$

همچنین اگر شرط زیر هم برقرار باشد.

$$\int_a^b |u(t)|^2dt=1=\int_a^b|\upsilon(t)|^2dt$$

$u(t)$ و $\upsilon(t)$ را بهنجار و آنها را متعامد بهنجاری می نامند. اگر تمام توابع مجموعه $\{\phi_k(t)\}$، دو به دو متعامد (متعامد بهنجار) باشند، این مجموعه را مجموعه متعامد (متعامد بهنجاری) می نامند.

(الف) زوج سیگنالهای $u(t)$ و $\upsilon(t)$ شکل م ۳–٦٥ را در نظر بگیرید. کدام یک در فاصله (۰ و ٤) متعامدند.

(ب) آیا توابع $\sin m\omega_0 t$ و $\sin n\omega_0 t$ در فاصله $(0\ ,\ T)$ (با $T=2\pi/\omega_0$) متعامدند؟ آیا متعامد بهنجارند؟

(ج) بند (ب) را برای توابع $\phi_n(t)$ و $\phi_m(t)$ زیر تکرار نید.

$$\phi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\left[\cos k\omega_{\circ}t+\sin k\omega_{\circ}t\right]$$

(د) نشان دهید که مجموعه توابع $\phi_k(t)=e^{jk\omega_{\circ}t}$ در هر فاصله ای به طول $T=2\pi/\omega_{\circ}$ متعامدست. آیا این مجموعه متعامد بهنجار هم است؟

(هـ) $x(t)$را یک سیگنال دلخواه و $x_{\circ}(t)$و $x_e(t)$ را به ترتیب قسمتهای فرد و زوج آن فرض کنید. نشان دهید که به ازای هر T دلخواهی، $x_{\circ}(t)$ و $x_e(t)$ در فاصله $(-T\ ,\ T)$متعامدند.

(و) نشان دهید اگر $\{\phi_k(t)\}$ در فاصله (a,b) یک مجموعه متعامد باشد، مجموعه $\{1/\sqrt{A_k}\,\phi_k(t)\}$، که در آن

$$A_k=\int_a^b \left|\phi_k(t)\right|^2 dt$$

متعامد بهنجارست.

(ز) فرض کنید $\{\phi_i(t)\}$ در فاصله (a,b) یک مجموعه سیگنال متعامد بهنجار باشد. سیگنالی به شکل زیر در نظر بگیرید.

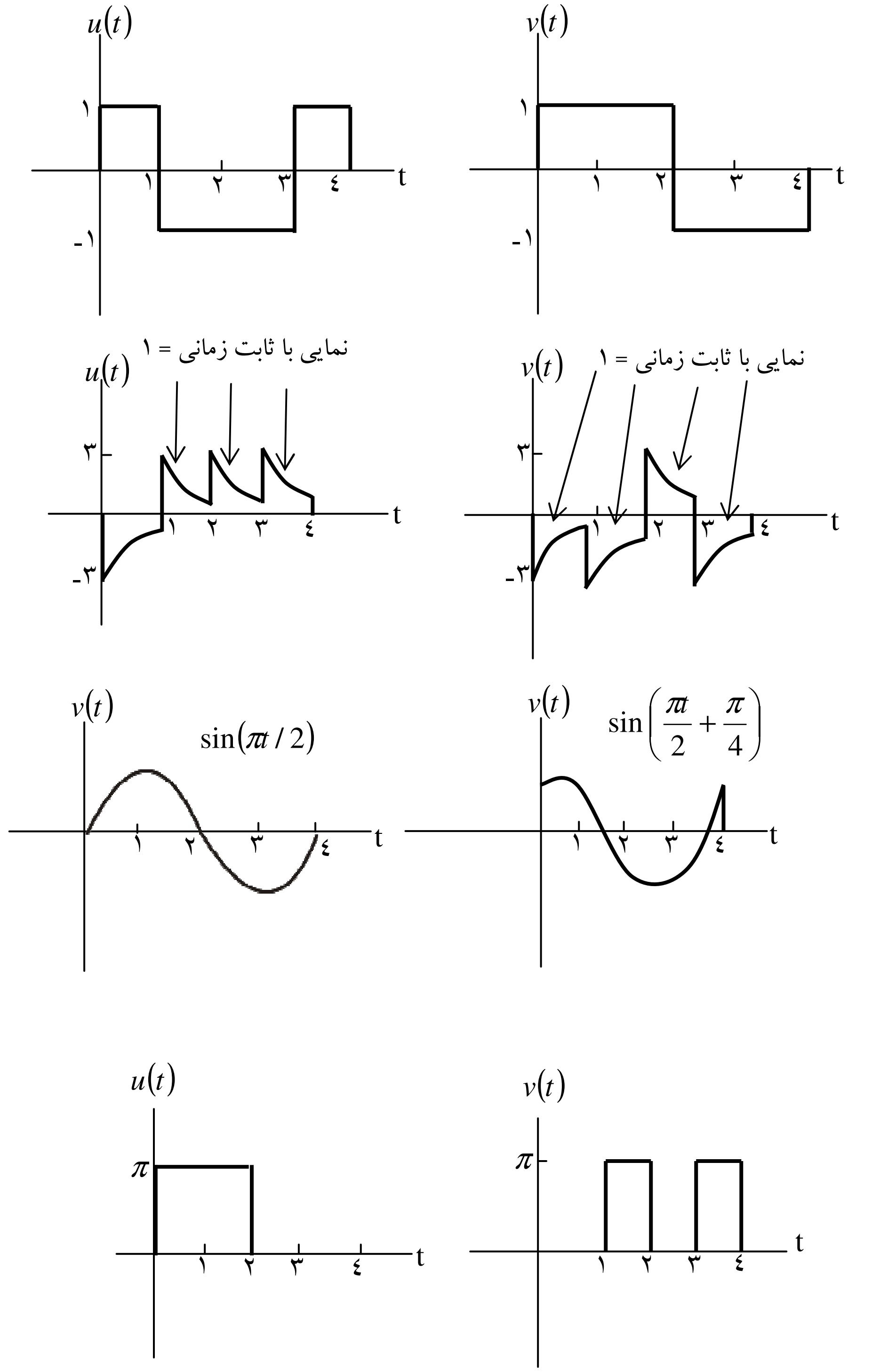
$$x(t)=\sum_i a_i\phi_i(t)$$

a_i ثابتهای مختلط اند، نشان دهید که

$$\int_a^b \left|x(t)\right|^2 dt=\sum_i\left|a_i\right|^2$$

(ح) فرض کنید $\phi_1(t),\ldots,\phi_N(t)$ تنها در فاصله $\circ\le t\le T$ مقداری مخالف صر دارند و در این فاصله متعامد بهنجارند. L_i را یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر فرض کنید.

نشاندهید اگر $\phi_j(t)$ به این سیستم اعمال شود، خروجی در زمان T به ازای $i = j$ برابر ١، و به ازای $i \neq j$ برابر ٠ است. در مسائل ٢–٦٦ و ٢–٦٧، سیستمی با پاسخ ضربه معادله (م ٣–٦٥–٢) را فیلتر منطبق سیگنال $\phi_i(t)$ نامیدیم.



حل:

(الف) جفتهای (الف) و (ب) ارتوگنال هستند. جفتهای (ج) و (د) اورتوگنال نیستند.

اورتوگتال: منظور (توابع متعامد)

(ب) اورتگنال هستند اما اورتونرمال (توابع متعامدیکه) نیستند. $Am = {}^{1}\!/_{\omega_\circ}$

(ج) اورتونرمال.

(د) داریم:

$$\int_{t_\circ}^{t_\circ+T} e^{jm\omega_\circ\tau} e^{-jn\omega_\circ\tau} d\tau$$
$$= e^{j(m-n)\omega_\circ t_\circ} \frac{\left[e^{j(m-n)2\pi} - 1\right]}{[m-n]\omega_\circ}$$

هر گاه $m \neq n$ مقدار عبارت فوق برابر صفر است و وقتـی $m = n$ مقـدار آن برابـر jT مـی باشـد. بنابراین توابع اورتوگنال هستند اما اورتونرمال نیستند.

(هـ) داریم:

$$\int_{-T}^{T} x_e(t) e_\circ(t)$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-T}^{T} [x(t)+x(-t)][x(t)-x(-t)]dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt - \frac{1}{4}\int_{-T}^{T} x^2(-t)dt$$
$$= \circ$$

(و) فرض کنید:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{A_k}} \phi_k(t) \frac{1}{\sqrt{A_t}} \phi_\ell^*(t)dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a_\ell A_k}} \int_a^b \int_a^b \phi_k(t)\phi_\ell^*(t)dt$$

که حاصل عبارت فوق برای $k \neq \ell$ صفر و بـرای $k = \ell$ برابـر اسـت بـا $A_{k/A\ell} = 1$. بنـابراین توابـع اورتونرمالند.

(ذ) داریم:

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt = \int_a^b x(t)x^*(t)dt$$
$$= \int_a^b \sum_i a_i \phi_i(t) \sum_j aj \phi_j^*(t)dt$$
$$= \sum_i \sum_j \propto_1 a_2^* \int_a^b \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt$$
$$= \sum_i |a_i|^2$$

(h) داریم:

$$y(T)=\int_{-\infty}^{+\infty} hi(T-\tau)\phi_j(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i(\tau)\phi_j(\tau)d\tau$$

۳,٦٦) هدف این مسئله این است که نشان دهیم نمایش سیگنالهای متناوب دلخواه به صورت سری فوریه، یا در حالتی کلی تر به صورت ترکیب خطی یک مجموعه تابع متعامد، از لحاظ محاسباتی کار است و تقریب خوبی از سیگنال به دست می دهد.

فرض کنید $\{\phi_i(t)\}$، $i=\circ , \pm 1 , \pm 2 , ...$ در فاصله $a \le t \le b$ یک مجموعه متعامد بهنجاری، و $x(t)$ یک سیگنال دلخواه است. تقریب زیر از سیگنال $x(t)$، در فاصله $a \le t \le b$، را در نظر بگیرید.

$$\hat{x}_n(t)=\sum_{i=-N}^{+N} a_i\phi_i(t) \qquad \text{(م ۳-٦٦-۱)}$$

a_iها ضریب ثابت (و در حالت کلی مختلط) هستند. برای اندازه گیری انحراف بین $x(t)$ و تقریب سری $\hat{x}_N(t)$، سیگنال خطای $e_N(t)$ زیر را تعریف می کنیم.

$$e_N(t)=x(t)-\hat{x}_N(t) \qquad \text{(م ۳-٦٦-۲)}$$

یک معیار معقول و پرکاربرد برای سنجش کیفیت تقریب، انرژی سیگنال خطا در فاصله موردنظر، یعنی انتگرال مجذور دامنه خطا در فاصله $a \le t \le b$ است:

$$E=\int_a^b \left|e_N(t)\right|^2 dt \qquad \text{(م ۳-٦٦-۳)}$$

(الف) نشان دهید که برای مینیمم کردن E باید برگزینیم.

$$a_i=\int_a^b x(t)\phi_i*(t)dt \qquad \text{(م ۳-٦٦-٤)}$$

[راهنمایی: به کمک معادلات (م ۳–٦٦–۱) تا (م ۳–٦٦–۳)، E را برحسب a_i، $\phi_i(t)$ و $x(t)$ بیان کنید. سپس a_i را به صورت قائم $a_i = b_i + jc_i$ بیان کرده، ثابت کنید که با انتخاب a_i به صورت معادله (م ۳–٦٦–٤)، روابط زیر ارضا می شوند]

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = \circ \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial E}{\partial x_i} = \circ \ , \ i = \circ \ , \ \pm 2, \ldots, N$$

(ب) اگر $\{\phi_i(t)\}$ متعامد باشد ولی بهنجار نباشد و

$$A_i = \int_a^b \left|\phi_i(t)\right|^2 dt$$

(ج) فرض کنید $\phi_n(t) = e^{jn\omega_\circ t}$ و یک فاصله دلخواه به طول $T_\circ = 2\pi / \omega_\circ$ برگزینید. نشان دهید که اگر a_i به صورت معادله (۳–۵۰) انتخاب شود، F مینیمم می شود.

(د) مجموعه توابع والش مجموعه متعامد بهنجاری است که کاربرد زیادی دارد. (مسئله ۲–٦٦) را ببینید).

شکل م ۳–٦٦ مجموعه ای از پنج تابع والش $\phi_\circ(t)$،$\phi_1(t)$، ...، $\phi_4(t)$ را نشان می دهد، مقیاس زمان را طوری برگزیده ایم که $\phi_i(t)$ در فاصله $\circ \le t \le 1$ غیرصفر و متعامد بهنجار باشد. فرض کنید $x(t) = \sin \pi t$. تقریبی به صورت زیر برای $x(t)$ بیابید.

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=\circ}^{4} a_i \phi_{(t)}$$

به نحوی که مقدار زیر مینیمم شود

$$\int_\circ^1 \left|x(t) - \hat{x}(t)\right|^2 dt$$

(هـ) نشان دهید که اگر a_iها مطابق معادله (م ۳–٦٦–٤) انتخاب شوند. $\hat{x}_N(t)$ معادله (م ۳–٦٦–۱) و $e_N(t)$ معادله (م ۳–٦٦–۲) متعامدند.

نتایج بندهای (الف) و (ب) بسیار مهم اند، زیرا نشان می دهند هر ضریب a_i مستقل از تمام a_iهای دیگرست، $i \neq j$. بنابراین با افزودن جملات بعدی به تقریب [مثلاً محاسبه تقریب $\hat{x}_{N+1}(t)$]، ضرایب $\phi_i(t)$ قبلی، N، ... ، $i=1$، تغییر نمی کنند. حال یک نوع بسط دیگر یعنی بسط چند جمله ای تیلور را در نظر می گیریم. بسط نامحدود سری تیلور e^t به شکل ... $e^t = 1 + t^2/2! +$ است، ولی چنانچه نشان متفاوتی به دست می آوریم.

فرض کنید $\phi_\circ(t) = 1$، $\phi_2(t) = t^2$، $\phi_2(t) = t^2$ به همین ترتیب.

(و) آیا $\phi_i(t)$ ها در فاصله $\circ \le t \le 1$ متعامدند.

(ز) برای $x(t) = e^t$ در فاصله $\circ \le t \le 1$، تقریب زیر را در نظر بگیرید.

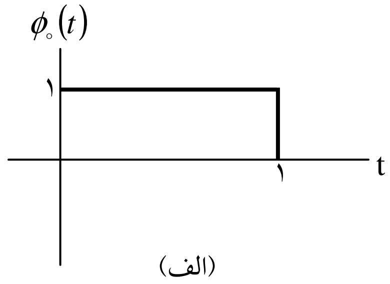
$$\hat{x}_\circ(t) = a_\circ \phi_\circ(t)$$

$a_\circ$ را به نحوی پیدا کنید که انرژی سیگنال خطا در فاصله $\circ \le t \le 1$ مینیمم شود.

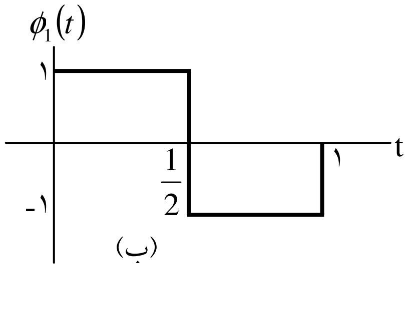
(ح) حال می خواهیم e^t را با دو جمله، به صورت $\hat{x}_1 = a_\circ + a_1 t$ تقریب بزنیم. مقادیر بهینه $a_\circ$ و a_1 را بیابید. [راهنمایی: E را برحسب $a_\circ$ و a_1 یافته، معادلات همزمان زیر را حل کنید]

$$\frac{\partial E}{\partial a_\circ} = \circ \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial E}{\partial a_1} = \circ$$

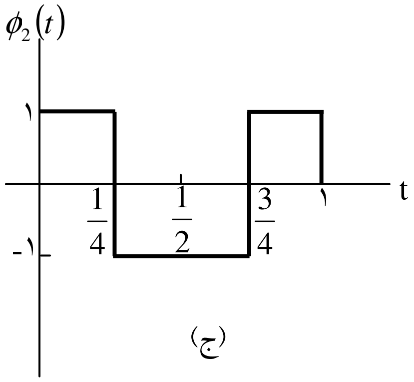
توجه کنید که $a_\circ$ به دست آمده با $a_\circ$ بند (ز) تفاوت دارد. اگر باز هم تعداد جملات تقریب را زیاد کنیم، تمام ضرائب سری تغییر می کنند. به این ترتیب مزیت بسط برحسب توابع متعامد روشن می شود.]



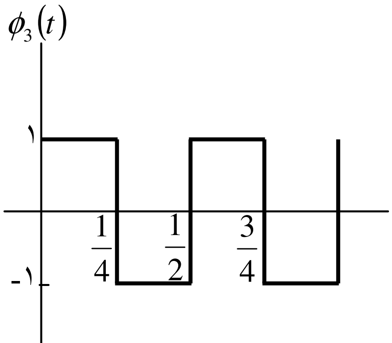
(الف)



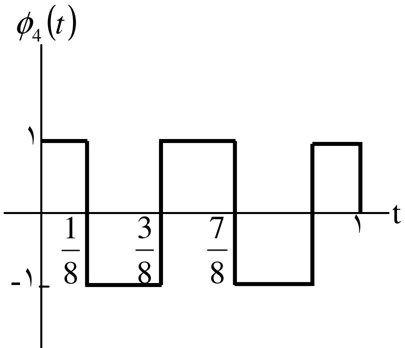
(ب)



(ج)



(د)



(هـ)

شکل م ۳-۶۶

حل:

(الف) داریم:

$$E=\int_a^b\left[x(t)-\sum_{k=-N}^{N}a_k\phi_k(t)\right]\left[x^*(t)-\sum_{k=-N}^{N}a_k^*(t)\right]dt$$

حال، فرض کنیم $a=b_{i+ja}$، داریم:

$$\frac{\partial E}{\partial b_i}=\circ=-\int_a^b\phi_i^*(t)x(t)dt+2b_i-\int_a^b\phi_i(t)x^*(t)dt$$
$$\frac{\partial E}{\partial -c_i}=\circ=j\int_a^b\phi_i(t)x^*(t)dt+2c_i-j\int_a^b\phi_i^*(t)x(t)dt$$

با ضرب معادله آخر در j و جمع با جمله قبلی داریم:

$$2b_i+2j_{ci}=2\int_a^b x(t)\phi^*(t)dt$$

که بیان می کند:

$$a_i=\int_a^b x(t)\phi^*(t)dt$$

(ب) در این مورد، a_i برابر است با:

$$a_i=\frac{1}{A_i}\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt$$

(ج) با انتخاب $a_k=\frac{1}{T_\circ}\int_b^{b+T_\circ}x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$

داریم: $E=\int_{T_\circ}\left|x(t)-\sum_{k=-N}^{N}a_k e^{j\omega_\circ kt}\right|^2dt$

با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial a_k}=\circ$ داریم:

$$a_k = \frac{1}{T_\circ}\int_{T_\circ} x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$$

(د) $a_\circ = \dfrac{2}{\pi_1}$ و $a_1 = a_3 = \circ$ و $a_2 = 2\left(1-2\sqrt{2}\right)/\pi$ و

$$a_4 = \left(1/\pi\right)\left[2 - 4\cos\frac{\pi}{8} + 4\cos\pi 3/8\right]$$

(هـ) داریم:

$$\begin{aligned}
&\int_\circ^1 \sum_i a_i\phi_i(t)^*\left[x(t) - \sum_i a_i\phi_i(t)\right]dt \\
&= \sum_i a_i \int_\circ^1 x(t)\phi_i^*(t) \\
&- \sum_i\sum_j a_i^* a_j \int_\circ^1 \phi_i^*(t)\phi_j(t)dt \\
&= \sum_i a_i^* a_i - \sum_i a_i^* a_i = \circ
\end{aligned}$$

(و) ارتوگنال نیست زیرا بعنوان مثال $\int_\circ^1 \phi_\circ(t)\phi_1(t)dt = \int_\circ^1 tdt = 1 \neq \circ$

(ذ) در اینجا $\quad a_\circ = \int_\circ^1 e^t\phi_\circ^*(t)dt = e - 1$

(خ) در اینجا $\hat{x}(t) = a_\circ + a_1 t$، بنابراین

$$E = \int_\circ^1 \left(e^t - a_\circ - a_1 t\right)\left(e^t - a_\circ - a_1 t\right)dt$$

با جایگذاری $\dfrac{\partial E}{\partial a_1} = \circ = \dfrac{\partial E}{\partial a_\circ}$ داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} j2\pi n b_n(x) e^{j2\pi nt}$$
$$= \frac{1}{2} k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 bn(x)}{\partial x^2} e^{j2\pi nt}$$

با معادل کردن ضرایب $e^{j2\pi nt}$ دو طرف معادله داریم:

$$\frac{\partial^2 h_n(x)}{\partial x^2} = \frac{j4\pi n}{k_2} b_n(x)$$

(ن) با انتخاب

$$a_k = \frac{1}{T_\circ} \int_b^{b+T_\circ} x(t) e^{-jk\omega_\circ t} dt$$

خواهیم داشت:

$$E = \int_{T_\circ} \left| xt - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\omega_\circ kt} \right|^2 dt$$

با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial a_k} = \circ$ خواهیم داشت:

$$a_k = \frac{1}{T_\circ} \int_{\langle T_\circ \rangle} x(t) e^{-jk\omega_\circ t} dt$$

۳٫٦٧) در درس گفتیم که ریشه های تحلیل فوریه را می توان در مسائل فیزیک و ریاضیاتی جست. در واقع انگیزه کار فوریه بررسی مسئله نفوذ گرما بود. در این مسئله نشان مـی دهـیم کـه چگونـه سـری فوریه در تحقیق راجع به این مسئله مورد استفاده قرار می گیرد.

فرض کنید می خواهیم دای عمق معینی از زمین را برحسب زمان پیدا کنیم، فـرض مـی کنـیم دمـا در سطح زمین تابع معلومی از زمان، $T(t)$ است. این تابع با دوره تناوب ۱ متناوب اسـت. (واحـد زمـان یک سال است). $T(x , t)$ دمای عمق x زیر سطح را در زمان t نشان می دهد.

این تابع از معادله نفوذ گرما تبعیت می کند.

$$\frac{\partial T(x , t)}{\partial t} = \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$ (م ۳–٦٧–۱)

و شرط کمکی آن عبارت است از

$$T(\circ , t) = T(t)$$ (م ۳–٦٧–۲)

K ثابت نفوذ گرمای زمین است $k > \circ$ فرض کنید $T(t)$ را به صورت سری فـوری زیـر بـسط داده ایم.

$$T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in2\pi t}$$ (م ۳–٦٧–۲)

همچنین $T(x,t)$ در عمق معین x را نیز برحسب t بسط می دهیم.

$$T(x , t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(x) e^{in2\pi t}$$ (م ۳–٦٧–٤)

ضراب سری فوریه $b_n(x)$ تابعی از عمق x هستند.

(الف) به کمک معادلات (م ۳–٦٧–۱) تا (۳–٦٧–۱٤) نشان دهید که $b_n(x)$ معادله دیفرانـسیل زیـر را ارضا می کند.

$$\frac{d^2 d_n(x)}{dx} = \frac{4\pi jn}{k^2} b_n(x)$$ (م ۳–٦٧–٥ الف)

و شرط کمکی آن عبارت است از

$$b_n(\circ) = a_n \qquad \text{(م ۳-۶۷-۵ ب)}$$

چون معادله (م ۳-۶۷-۵ الف) یک معادله درجه دوم است، شرط مـرزی دیگـری نیـز لازم داریـم. بـر اساس استدلالهای فیزیکی می توان گفت که تغییرات دمای سطح زمین بـر دمـای اعمـاق زمـین اثـری ندارد. یعنی

$$\lim_{x\to\infty} T(x,t) = \text{ثابت} \qquad \text{(م ۳-۶۷-۵ ج)}$$

(ب) نشاندهید که جواب معادله (م ۳-۶۷-۵) به صورت زیرست.

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n \exp\left[-\sqrt{2\pi|\pi|}(1+j)x/k\right], & n \geq \circ \\ a_n \exp\left[-\sqrt{2\pi|n|}(1-j)x/k\right], & n \leq \circ \end{cases}$$

(ج) بنابراین نوسانات دما در عمق x، صورتهای میرا شده و تغییر فاز یافته نوسانات دمای سطح است.

برای این که موضوع روشنتر شود فرض کنید.

$$T(t) = a_\circ + a_1 \sin 2\pi$$

($a_\circ$ میانگین دمای سالانه است). $T(t)$ و $T(x\ ,\ t)$ را در یک دوره تناوب یکساله، به ازای

$$x = k\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

رسم کنید. فرض کنید که $a_\circ = 2$ و $a_1 = 1$. دقت کنید که در این عمق تغییرات دما هم به شدت میرا شده و هم تغییر فاز پیدا کرده است، به نحوی که در زمستان گرمترین و در تابستان سردترین مقدار خود را دارد. دلیل ساختن انبارهای غله زیرزمینی، همین است.

حل:

(الف) از معادله (p۳,٦٧-۱) و (p۳,٦۱-٤) داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nb_n(x)} e^{j2\pi nt} = \frac{1}{2}k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 b_n(x)}{\partial x^2} e^{j2\pi nt}$$

با معادلسازی ضرایب $e^{j2\pi nt}$ در دو طرف معادله، داریم:

$$\frac{\partial^2 b_n(x)}{\partial x_2} = \frac{j4\pi n}{k^2} b_n(x)$$

(ب) چون $S^2 = {4\pi jn}/{k^2}$؛ بنابراین

$$S = \pm \frac{2\sqrt{\pi n} e^{j\pi/4}}{k}$$

برای $n > ۰$

$$S = \frac{\sqrt{2\pi n}(1+j)}{k}$$

که یک جواب پایدار است.

و برای $n < ۰$ $\qquad S = -\frac{\sqrt{2\pi(n)}(1-j)}{k}$

که این نیز جوابی پایدار می باشد. همچنین $b_n(۰) =_n$ و

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n e^{-\sqrt{2\pi n}(1+j)x/k} & n > ۰ \\ a_n e^{-\sqrt{2\pi(n)}(1-j)x/k} & n < ۰ \end{cases}$$

ج) $b_{\circ} = 2$ و $b_1 = \left(\frac{1}{2}j\right)e^{-(1+j)\pi}$ و $b_{-1} = -\left(\frac{1}{2j}\right)e^{-(1-j)\pi}$

$$T\left(k\sqrt{\pi/2}, t\right) = 2 + e^{-\pi}\sin(2\pi t - \pi)$$

فاز معکوس شده است.

۳,٦۸) مسیر بسته شکل م ۳-٦۸ را در نظر بگیرید. مطابق شکل، این منحنی را می توان اثر نـوک یـک بردار چرخان دارای طول متغیر در نظر رفت. $r(\theta)$ طول بردار بر حسب زاویه θ نشان می دهد. پـس $r(\theta)$ با دوره 2π متناوب است و بنابراین سری فوریــه دارد. ضـرایب سـری فوریـه تـابع $r(\theta)$ را $\{a_k\}$ فرض کنید.

(الف) تصویر بردار $r(\theta)$ بر محور x را مطابق شکل $x(\theta)$ بنامید. ضرایب سری فوریــه $x(\theta)$ را بـر حسب مقادیر a_k پیدا کنید.

(ب) رشته ضرایب زیر را در نظر بگیرید.

$$b_k = a_k e^{jk\pi/4}$$

مسیر متناظر با این ضرایب را در صفحه رسم کنید.

(ج) بند (ب) را به ازای ضرایب زیر تکرار کنید.

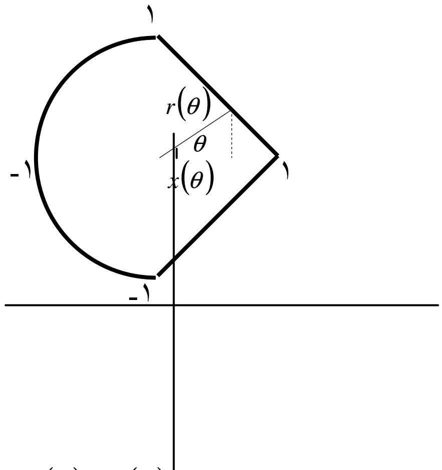
$$b_k = a_k \delta[k]$$

(د) مسیرهایی در صفحه رسم کنید که برای آنها $r(\theta)$ غیر ثابت بوده، خواص زیر را داشته باشد.

(i) $r(\theta)$ زوج باشد.

(ii) دوره تناوب پایه آن π باشد.

(iii) دوره تناوب پایه آن $\frac{\pi}{2}$ باشد.



شکل م ۳-۶۸

حل:

(الف)

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$$
$$= \frac{1}{2}r(\theta)e^{j\theta} + \frac{1}{2}r(\theta)e^{-j\theta}$$

اگر $x(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k e^{j\theta}$ باشد در اینصورت $b_k = \left(\frac{1}{2}\right)\propto_{(k+1)} + \frac{1}{2}a_{(k-1)}$

(ب) $x(\theta) \xleftrightarrow{FS} bk$ در این حالت $x(\theta) = r\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$. طرح کلی در شکل S۳,۶۸ به نمایش درآمده است.

(ج) $b_\circ = a_\circ$ پایه ی b_k صفر است. بنابراین شکل آن یک داریره به شعاع $a_\circ$ خواهد بود. چنانکه در شکل S۳,۶۸ نشان داده شده است:

(د) (i) $r(\theta) = r(-\theta)$ زوج، شکل در S۳,۶۸ آمده است.

(ii) $r(\theta + k\pi) = r(\theta)$ شکل در S۳,۶۸ آمده است.

(iii) $r\left(\theta+k\pi/2\right)=r(\theta-)$. شکل در S۳,٦۸ آمده است.

۳,٦۹) در این مسئله همتای گسست در زمان مفاهیم بیان شده در مسائل ۳-٦۵ و ۳-٦٦ را در نظر مـی گیریم. مشابه حالـت پیوسـته در زمـان دو سـیگنال گسـسته در زمـان $\phi_m[n]$ و $\phi_k[n]$ را در فاصـله (N_2 ،N_1) متعامد می نامیم.

اگر

$$\sum_{n=N_1}^{N_2}\phi_k[n]\phi_m^*[n]=\begin{cases}A_k, & k=m\\ \circ, & k\neq m\end{cases} \qquad \text{(م ۳-٦۹-۱)}$$

اگر مقدار A_k و A_m هر دو ۱ باشد، سیگنالها را متعامد بهنجار می نامیم.

(الف) سیگنالهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi_k[n]=\delta[n-k], \qquad k=\circ\ ,\ \pm1\ ,\pm2\ ,\ldots,\pm N$$

نشان دهید که این سیگنالهای در فاصله $(-N\ ,\ N)$ متعامد بهنجارند.

(ب) نشاندهید که سیگنالهای

$$\phi_k[n]=e^{jk(2\pi/N)n} \qquad ,\ k=\circ\ ,\ 1,\ldots,N-1$$

در هر فاصله ای به طول N متعامدند.

(ج) نشان دهید اگر

$$x[n]=\sum_{i=1}^{M}a_i\phi_i[n]$$

و $\phi_i[n]$ روی فاصله (N_1, N_2) متعامد باشد، آنگاه

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 A_i$$

(د) سیگنالهای $\phi_i[n]$، با $i = \circ, 1, ..., M$ را که در فاصله (N_1, N_2) متعامدند، در نظر بگیرید. $x[n]$ سیگنال دلخواهی است که می خواهیم آن را به صورت ترکیب خطی $\phi_i[n]$ تقریب بزنیم؛ یعنی

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=\circ}^{M} a_i \phi_i[n]$$

که در آن a_i ضرائب ثابت اند، فرض کنید.

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$

نشاندهید برای مینیمم کردن

$$E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |e[n]|^2$$

باید a_i را به صورت زیر برگزینیم

$$a_i = \frac{1}{A_i} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \phi_i^*[n] \qquad \text{(م ۳-۶۹-۲)}$$

[راهنمایی: مانند مسئله ۳-۶۶ E را برحسب a_i، $\phi_i[n]$، A_i و $x[n]$ بیان کرده، a_i را به صورت $b_i + jc_i$ بنویسید. نشاندهید اگر a_i مطابق معادله (م ۳-۶۹-۲) برگزیده شود. روابط زیر را ارضا می کند.

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = \circ \qquad \frac{\partial_E}{\partial c_i} = \circ$$

توجه کنید که اگر $\phi_i[n]$ به صورت بند (ب) باشد، به کار بردن این نتیجه a_k معادله (۳–۹۵) را نتیجه می دهد.]

(هـ) نتیجه بند (د) را به زاویه $\phi_i[n]$ بند (الف) به کار برید و ضرائب a_i را برحسب $x[n]$ بیابید.

حل:

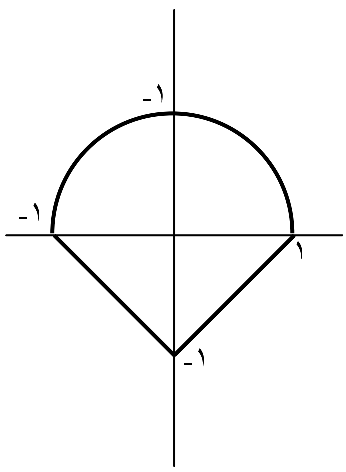
(الف)
$$\sum_{n=-N}^{N} \phi_k[n]\phi_k^*[n] = \sum_{n=-N}^{N} \delta[n-k]\delta[n-m]$$

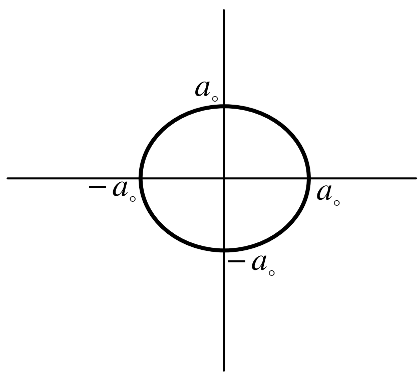
که برای $k=m$ برابر یک (۱) و برای $k \neq m$، صفر است. بنابراین اورتوگنال است.

(ب) داریم:

$$\sum_{n=r}^{r+N-1} \phi_k[n]\phi_m^*[n] = e^{j\left(2\pi/N\right)r(k-m)}\left[\frac{1-e^{j2\pi(k-m)}}{1-e^{j\left(2\pi/N\right)(k-m)}}\right] = \begin{cases} \circ & k \neq m \\ N & k = m \end{cases}$$

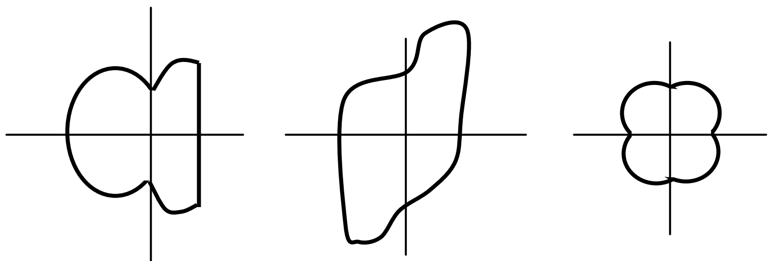
بنابراین اورتوگنال خواهد بود.





(الف)

(ب)



d-i d-ii d-iii

شکل S۳,٦٨

(ج) داریم:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \left| x[n] \right|^2 = \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{i=_i 1}^{M} a_i \phi_i [n] \sum_{K=1}^{M} \propto_k^* \ \phi_k^* [n]$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} a_i a_k^* \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k^* \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k^* [n] \phi_i [n]$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} a_i a_k^* A_i \delta[i-k] = \sum^{M} \left| a_i \right|^2 A_i$$

(د) فرض بفرمائید: $a_i = b_i + j_{ci}$ در اینصورت:

$$E=\sum_{n=N_1}^{N_2}\left|x[n]\right|^2+\sum_{i=1}^{M}\left(b_i^2+c_i^2\right)A_i-\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\sum_{i=1}^{M}\left(b_i+j_{ci}\right)\phi_i^*[n]$$
$$-\sum_{n=-N_1}^{N_2}x^*[n]\sum_{i=1}^{M}\left(b_i+j_{ci}\right)\phi_i[n]$$

حال با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial b}=0$ داریم:

$$b_i=[2A_i]^{-1}\left[\sum_{n=N_1}^{N_2}\left\{x[n]\phi_i^*[n]+x^*[n]\phi_i[n]\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{A_i}\mathrm{Re}\,al\left\{\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\phi_i^*[n]\right\}$$

به طور مشابه:

$$c_i=\frac{1}{A_i}\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\phi_i^*[n]\right\}$$

بنابراین:

$$a_i=b_i+j_{ci}=\frac{1}{A_i}\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\phi_i^*[n]$$

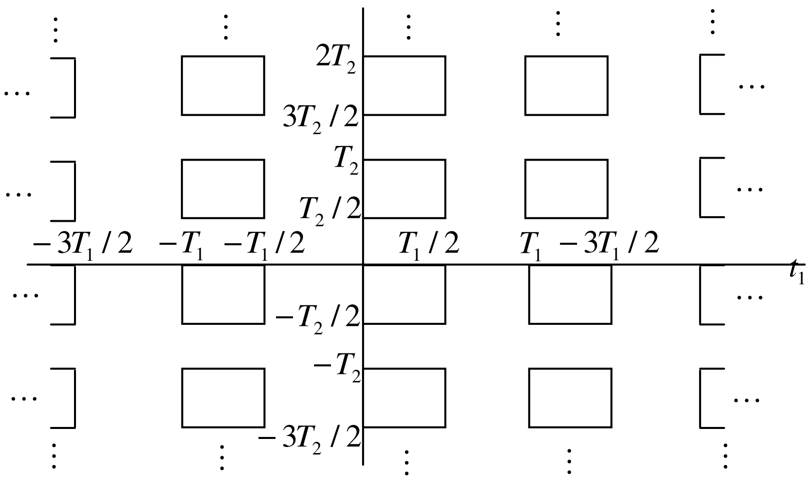
(هـ) $\phi_i[n]=\delta[n-1]$ در اینصورت:

$$a_i=\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\delta[n-i]=x[i]$$

۳,۷۰) (الف) در این مسئله تعریف سری فوریه دو بعدی برای سیگنالهای دارای دو متغیر متسقل را در نظر می گیریم. سیگنال $x(t_1,t_2)$ را در نظر بگیرید که معادله زیر را برآورده می کند.

برای هر t_1 , t_2 $\qquad$ $x(t_1,t_2)=x(t_1+T_1,\, t_2+T_2)$

این سیگنال در جهت t_1 دارای دوره تناوب T_1 و در جهت t_2 دارای دوره تناوب T_2 است. این سیگنال نمایش سری فوریه ای به صورت زیر دارد.



شکل م ۳-۷۰

$$x(t_1,t_2)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_{mn}e(m\omega_1 t_1+nm\omega_2 t_2)$$

$$\omega_1=2\pi/T_1 \qquad , \qquad \omega_2=2\pi/T_2$$

a_{mn} را برحسب (t_1,t_2) بیان کنید.

(ب) ضرایب a_{mn} را برای سیگنالهای زیر بیابید.

(i) $\cos(2\pi t_1 + 2t_2)$

(ii) سیگنال شکل م ۳-۷۰

حل:

(الف) داریم:

$$a_{mn} = \frac{1}{T_1 T_2}\int_{\circ}^{T_1}\int_{\circ}^{T_2} x(t_1, t_2)e^{-jm\omega_1 t_1}e^{-jn\omega_2 t_2}dt_1 dt_2$$

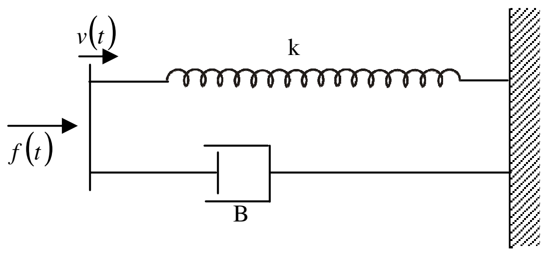
(ب) (i) $T=1$ و $T_2=\pi$ $a_{11}=1/2$ و $a_{-1,-12}=1$ مقدار تمام ضرایب صفر خواهد بود.

(ii) در اینجا

$$a_{mn} = \begin{cases} 1/n^2(mn) & m,n \text{ فرد} \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۳,۷۱) (الف) سیستم مکانیکی شکل م ۳-۷۱ را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیلی که سرعت $v(t)$ را به نیروی ورودی $f(t)$ ربط می دهد عبارت است از

$$Bv(t) + k\int v(t)dt = f(t)$$



شکل م ۳-۷۱

(الف) خروجی را $f_s(t)$، یعنی نیروی فشرده کننده فنر فرض کنید، معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $f_x(t)$ و $f(t)$ را بنویسید. پاسخ فرکانسی سیستم را بیابید و توضیح دهید که چرا پاسخ فرکانسی مثل فیلتر پایین گذرست.

(ب) خروجی $f_d(t)$، یعنی نیروی وارد بر ضربه گیر فرض کنید. معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $f_d(t)$ و $f(t)$ را بنویسید. پاسه فرکانسی سیستم را بیابید، و نشان دهید که تقریبی از فیلتر بالا گذرست.

حل:

(الف) معادله دیفرانسیل $f(t)$ و $f_s(t)$ عبارتست از:

$$\frac{B}{K}\frac{df_s(t)}{dt}+f_s(t)=f(t)$$

توجه کنید که برای $\omega=0$، $H(j\omega)=1$ و برای $\omega\to\infty$، $H(j\omega)=0$، بنابراین سیستم تقریبی از یک فیلتر پائین گذراست.

(ب) معادله دیفرانسیل $f_d(t)$ و $f(t)$ عبارتست از:

$$\frac{df_d(t)}{dt}+\frac{k}{B}f_d(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

پاسخ فرکانسی سیستم به سادگی از رابطه زیر بدست می آید:

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+(k/B)}$$

توجه کنید که برای $\omega=0$، $H(j\omega)=0$ و برای $\omega\to\infty$، $H(j\omega)=1$. بنابراین سیستم تقریبی از یک فیلتر بالا گذراست.