فصل چهارم:

تبدیل فوریه پیوسته در زمان:

٤,١) با استفاده از معادله تجزیه تبدیل فوریه، معادله (٤-٩)، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید:

(الف) $e^{-2(t-1)u(t-1)}$

(ب) $e^{-2|t-1|}$

اندازه تبدیل فوریه را رسم و مقدار گذاری کنید.

حل:

(الف) فرض کنید $x(t)=e^{-2(t-1)}u(t-1)$ در اینصورت تبدیل فوریه $x(j\omega)$ برای $x(t)$ عبارتــست از:

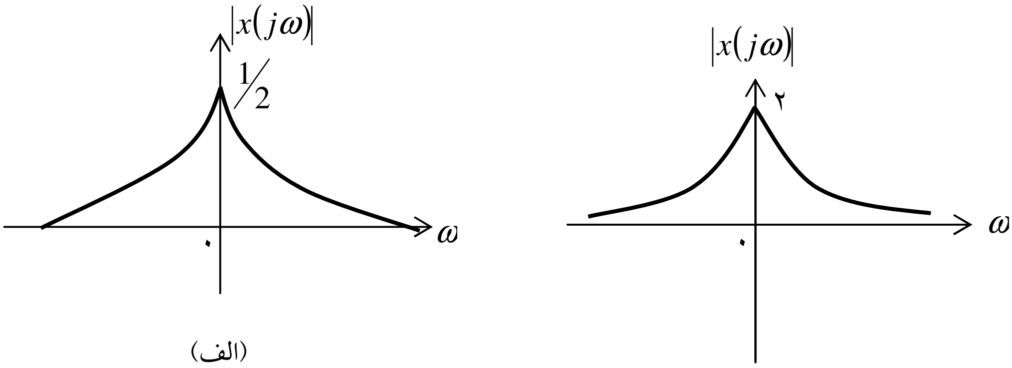
$$x(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(t-1)}u(t-1)e^{-j\omega t}$$
$$=\int_{1}^{\infty}e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t}dt$$
$$=\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$$

$|x(j\omega)|$ در شکل ح٤,١. نمایش داده شده است.

(ب) فرض کنید $x(t)=e^{2}|t-1|$ که تبدیل فوریه $x(j\omega)$ عبارتست از:

$$x(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|(t-1)|}e^{-j\omega t}dt$$
$$=\int_{1}^{\infty}e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{i}e^{2(t-1)}e^{-j\omega t}dt$$
$$=\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}+\frac{e^{-j\omega}}{2-j\omega}=\frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^{2}}$$

(توجه گردد که از تعریف قدر مطلق داریم $|x(t)|=\begin{cases} x(t) & x(t)\ge \circ \\ -x(t) & x(t)\le \circ \end{cases}$ بنابراین $|t-1|$ را به صورت زیر می توان نوشت $|t-1|=\begin{cases} t-1 & t\ge 1 \\ 1-t & t<1 \end{cases}$ یعنی به عبارت دیگر $\left(|t-1|=(t-1)u(t-1)+(1-t)u(1-t)\right)$ $|x(j\omega)|$. در شکل S۴,۱ نمایش داده شده است.



شکل ح ۴,۱

۴,۲) با استفاده از معادله تجزیه فوریه، معادله (۴-۹)، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید:

الف) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$

ب) $e^{-2|t-1|}$

اندازه تبدیل فوریه را رسم و مقدارگذاری کنید.

حل:

(الف) فرض کنید $x_1(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1)$، بنابراین تبدیل فوریه $x(t)$ که برابر است با $x_1(j\omega)$؛ عبارتست از:

$$x_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t+1)+\delta(t-1)]e^{-j\omega t}dt$$
$$=e^{j\omega}+e^{-j\omega}=2\cos\omega$$

$|x_1(j\omega)|$ در شکل ح ۴,۲ ترسیم شده است.

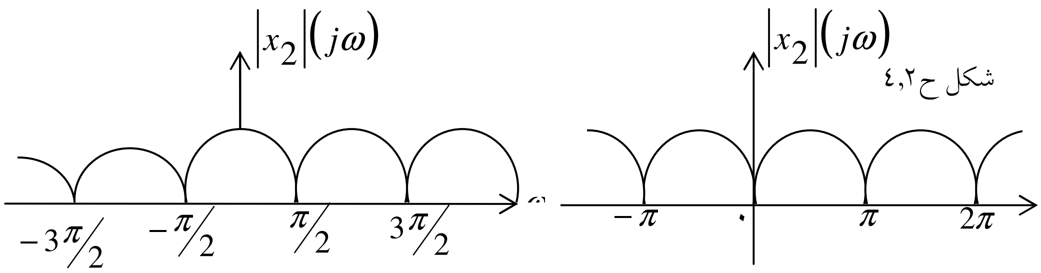
(ب) سیگنال $x_2(t)=u(-2-t)+u(t-2)$ به صورت زیر نشان داده شده است، بدیهیست که:

$$\frac{d}{dt}\{u(-2-t)+u(t-2)\}=\delta(t-2)-\delta(t+2)$$

بنابراین:

$$x_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t-2)-\delta(t+2)]e^{-j\omega t}dt$$
$$=e^{-2j\omega}-e^{2j\omega}=-2j\sin(2\omega)$$

$|x_2|(j\omega)$ در شکل ح ۴,۲ آمده است.



شکل ح ۴,۲

(الف)

۴,۳) تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای متناوب زیر را بیابید:

الف) $\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ ب) $1+\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{8}\right)$

اندازه تبدیل فوریه را رسم و مقدارگذاری کنید.

حل:

الف) سیگنال $x_1(t)=\sin\left(2\pi t+\pi/4\right)$ با پریود پایه $T=1$ متناوب می باشد.

که منجر به فرکانس پایه $\omega_\circ=2\pi$ می شود. ضرایب غیر صفر سری فوری این سیگنال به صورت زیر قابل بیان می باشد:

$$x_1(t)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\left(2\pi t+\pi/4\right)}\right)-e^{-j\left(2\pi t+\pi/4\right)}$$
$$=\frac{1}{2j}e^{j\pi/4}e^{j2\pi t}-\frac{1}{2j}e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi t}$$

بنابراین، ضرایب غیرصفر سری فوریه $x_1(t)$ عبارتند از:

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2j}e^{j\pi/4}e^{j2\pi t} \\ , \\ a_{-1}=\frac{-1}{2j}e^{-j\pi/4}e^{-2j\pi t}\end{cases}$$

از قسمت ٤,٢ می دانیم که برای سیگنالهای متناوب تبدیل فوریه شامل قطارهای ضربه ای است که در نقاط $k\omega_\circ$ رخ می دهند. بعلاوه ناحیه ی هر ضربه 2π برابر (در حوزه زمان) ضرایب سری فوریه a_k می باشد. بنابراین برای $x_1(t)$، تبدیل فوریه متناظر $x_1(j\omega)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$x_1(j\omega) = 2\pi a\delta(\omega-\omega_\circ) + 2\pi\, a_{-1}\delta(\omega-\omega_\circ)$$
$$= \left(\pi/j\right)e^{j\pi/4}\delta(\omega-2\pi) - \left(\pi/j\right)e^{-j\pi/4}\delta(\omega+2\pi)$$

ب) سیگنال $x_2(t) = 1+\cos\left(6\pi t+\pi/6\right)$ با پریود $T = 1/3$ متناوب است که منجر بـه فرکـانس پایه $\omega_\circ = 6\pi$ می شود. ضرایب غیر صفر سری فوریه این سینال به صورت زیر بدست می آید:

$$x_2(t) = 1 + 1/2\left(e^{j(6\pi t+\pi/8)} + e^{-j(6\pi t+\pi/8)}\right)$$
$$= 1 + 1/2\, e^{j\pi/8} e^{j\pi 6t} + \frac{1}{4} e^{-j6\pi t} e^{j\pi/8}$$

بنابراین ضرایب FS غیر صفر عبارتند از:

$$a_\circ = 1\,,\; a_1 = 1/2\, e^{j\pi/8} e^{j6\pi}$$
$$a_{-1} = 1/2\, e^{-j\pi/8} e^{j6\pi}$$

از قسمت ٤,٢ می دانیم که برای سیگنالهای متناوب، تبدیل فوریه شامل قطارهای ضـربه ای مـی باشـد که در نقاط $k\omega_\circ$ رخ می دهند. بعلاوه ناحیه زیر هر ضربه 2π برابـر ضـرایب تبـدیل فوریـه a_k مـی باشد.

$$x_2(j\omega) = 2\pi a_\circ\delta(\omega) + 2\pi a_1\delta(\omega-\omega_\circ) + 2\pi a_{-1}\delta(\omega+\omega_\circ)$$
$$= 2\pi\delta(\omega) + \pi e^{j\pi/8}\delta(\pi-6\pi) + \pi e^{-j\pi/8}\delta(\omega+6\pi)$$

....

٤,٤) معادله ترکیب تبدیل فوریه، معادله (٤-٨) برای تعیین عکس تبدیل فوریه های زیررا به کار برید:

الف) $X_1(j) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega-4\pi) + \pi\delta(\omega+4\pi)$

(ب) $X_2(j\omega)=\begin{cases}2, & \circ\le\omega\le 2\\ -2, & -2\le\omega<\circ\\ \circ, & |\omega|>2\end{cases}$

حل:

(الف) برای تبدیل فوریه معکوس داریم:

$$\begin{aligned}x_1(t)&=\left(1\big/2\pi\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\pi\delta(\omega+\pi)+\pi\delta(\omega+4\pi)\right]e^{j\omega t}dt\\&=\left(1\big/2\pi\right)\left[2\pi e^{j\circ t}+\pi e^{j4\pi t}+\pi e^{-j4\pi t}\right]\\&=1+\left(1\big/2\right)e^{j4\pi t}+\left(1\big/2\right)e^{-j4\pi t}=1+\cos(4\pi t)\end{aligned}$$

(ب) تبدیل فوریه معکوس عبارتست از:

$$\begin{aligned}x_2(t)&=\left(1\big/2\pi\right)\int_{-\infty}^{\infty}x_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\\&=\left(1\big/2\pi\right)\int_{\circ}^{2}2e^{j\omega t}d\omega+\left(1\big/2\pi\right)\int_{-2}^{\circ}(-2)e^{j\omega t}dt\\&=\left(e^{j2t}-1\right)\big/\pi jt-\left(1-e^{-j2t}\right)\big/\pi jt\\&=-\left(4j\sin^2 t\right)/(\pi t)\end{aligned}$$

٤,٥) معادلـه ترکیـب تبـدیل فوریـه، معادلـه (٤-٨) را بـرای تعیـین عکـس تبـدیل فوریـه $|X(j\omega)|e^{j\sphericalangle X(j\omega)}$ به کار برید که در آن:

$$|X(j\omega)|=2\{u(\omega+3)-u(\omega-3)\}$$

$$\sphericalangle X(j\omega)=-\frac{3}{2}\omega+\pi$$

با استفاده از جواب به دست آمده مقادیری از t را بیابید که به ازای آنها $x(t)=\circ$.

حل:

با استفاده از اطلاعات داده شده:

$$x(t)=\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\omega)e^{j\omega t}dtu$$
$$=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(j\omega)\right|e^{ic}\{x(j\omega)\}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}2e^{-\frac{3}{2}\omega+\pi}e^{j\omega t}dt$$
$$=\frac{-2}{\pi\left(t-\tfrac{3}{2}\right)}\sin\left[3\left(t-\tfrac{3}{2}\right)\right]$$

سیگنال $x(t)$ وقتی که $3\left(t-\tfrac{3}{2}\right)$ حاصلضرب یک عدد غیر صفر صحیح در π باشد، صفر خواهد بود.

که در نتیجه:

$$t=\frac{k\pi}{2}+\tfrac{3}{2}\ ,\ for\ k\in z\ ,\ k\neq \circ$$

....

٤,٦) با فرض این که $x(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)$ است، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بر حسب $X(j\omega)$ بیابید. از خواص تبدیل فوریه مدرج در جدول ٤-١ استفاده کنید.

(الف) $x_1(t)=x(1-t)+x(-1-t)$

(ب) $x_2(t)=x(3t-6)$

(ج) $x_3(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$

حل:

برای حل این مسئله فرض می کنیم که:

$$x(t)\xleftrightarrow{FT}x_1(j\omega)$$

(الف) با استفاده از خاصیت معکوس زمانی (بخش ٤,٣٥) داریم:

$$x(-t)\xleftrightarrow{FT}x(-j\omega)$$

با استفاده از خاصیت شیفت زمانی (٤,٣,٢ را ببینید.) در این مسأله خواهیم داشت:

$$x(-t+1)\xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t}x(-j\omega) \quad \text{و} \quad x(-t-1)\xleftrightarrow{FT} e^{j\omega t}x(-j\omega)$$

($FT \leftarrow$ تبدیل فوریه)

بنابراین

$$x_1(t)=x(-t+1)+x(-t-1)\xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t}x(-j\omega)+e^{j\omega t}x(-j\omega)$$
$$\xleftrightarrow{FT} 2x(-j\omega)\cos\omega$$

(در این قسمت از خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه استفاده شده است.)

(ب) با استفاده از خاصیت اسکیل در زمان (٤,٣,٥ را ببینید) داریم:

$$x(3t)\xleftrightarrow{FT} \tfrac{1}{3}x\left(j\frac{\omega}{3}\right)$$

با استفاده از خاصیت شیفت زمانی در این قسمت داریم:

$$x_2(t)=x(3(t-2))\xleftrightarrow{FT} e^{-2j\omega}\,\tfrac{1}{3}x\left(j\,\omega/3\right)$$

(ج) با استفاده از خاصیت دیفرانسیل در حوزه زمان (٤,٣,٤ را ببینید ...) داریم:

$$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{T} j\omega x(j\omega)$$

با بکارگیری دوباره این خاصیت، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\xleftrightarrow{FT} -\omega^2x(j\omega)$$

حال مجدداً در این قسمت نیز با استفاده از خاصیت شیفت زمانی، داریم:

$$x_3(t)=\frac{d^2x(t-1)}{dt^2}\xleftrightarrow{FT} -\omega^2x(j\omega)e^{-j\omega t}$$

....

٤,٧) با استفاده از خواص تبدیل فوریه مندرج در جدول ٤-١ تعیین کنید که سیگنال حوزه زمان متناظر با تبدیلهای داده شده (i) حقیقی است، موهومی است، با هیچکدام، و (ii) زوج است، فردست، یا هیچکدام. برای جواب دادن، عکس تبدیل فوریه را حساب نکنید.

(الف) $X_1(j\omega)=u(\omega)-u(\omega-2)$

(ب) $X_2(j\omega)=\cos(\omega)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

(ج) $x_3(J\omega)=a(\omega)e^{iB(\omega)}$ که در آن $A(\omega)=(\sin 2\omega)/\omega$ و $B(\omega)=2\omega+\frac{\pi}{2}$

(د) $X(j\omega)=\sum k^{\infty}=-\infty\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)$

حل:

(الف) بدلیل اینکه $x_1(j\omega)$ متقارن مزدوج نیست، سیگنال متناظر $x_1(t)$ حقیقی نمی باشد. بـدلیل اینکه $x_1(j\omega)$ زوج بوده و فرد نیست، سیگنال متناظر $x_1(t)$ نیز زوج می باشد و فرد نیست.

(ب) تبدیل فوریه سیگنالهای حقیقی و فرد بطور خالص موهومی و مردمی می باشند. بنابراین مـی توانیم نتیجه بگیریم کـه تبـدیل فوریـه یـک سـیگنال فـرد و موهـومی خـالص حقیقـی و فـرد اسـت. چون $x_2(j\omega)$ موهومی خالص و فرد است.

(ج) فرض کنید سیگنال $y_3(t)$ که اندازه تبدیل فوریه آن $|Y_3(j\omega)|=A(\omega)$ مفروض است و فاز تبـــدیل فوریـــه آن عبارتـــست از $\Delta\{Y_3(j\omega)\}=2\omega$. بـــدلیل اینکـــه $|Y_3(-j\omega)|=|Y_3(j\omega)|$ و $\Delta\{Y_3(j\omega)\}=-\Delta\{Y_3(-j\omega)\}$ می توانیم نتیجه بگیریم که $y_3(t)$ حقیقی است. (جـدول ٤,٣,٣ را ببینید).

حال فرض کنید تبدیل فوریه سیگنال $x_3(t)$ به صـورت $x_3(j\omega)=Y_3(j\omega)e^{j\pi/2}=jY_3(j\omega)$ باشد.

با استفاده از نتیجه پاراگراف قبلی و خاصیت خطی تبدیل فوریه می توان نتیجه گرفت کـه $x_3(t)$ حتماً بایستی موهومی باشد. چون تبدیل فوریه $x_3(j\omega)$ به صورت خـالص موهـومی بـوده و حقیقـی خالص نیست. بنابراین سیگنال $x_3(t)$ نه فرد است و نه زوج.

(د) بدلیل اینکه $x_4(j\omega)$ هم زوج و هم حقیقی است، سیگنال متناظر $x_4(t)$ زوج و حقیقی است.

....

٤,٨) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

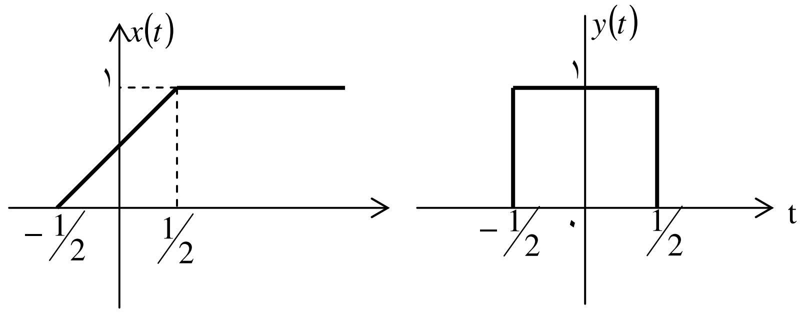
$$x(t)=\begin{cases} \circ\ , & t<-\frac{1}{2} \\ t+\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2} \\ 1\ , & t>\frac{1}{2} \end{cases}$$

(الف) بااستفاده از خواص مشتقگیری و انتگرالگیری جدول ٤-١ و تبدیل فوریه پالس مستطیلی جدول ٤-٢ عبارت ریاضی $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) تبدیل فوریه $g(t)=x(t)-\frac{1}{2}$ را بیابید.

حل:

(الف) سیگنال سیگنال $x(t)$ در شکل S.٤,٨ به نمایش درآمده است.



شکل ح٤,٨.

می توان سیگنال $x(t)$ را به صورت زیر بیان نمود:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} y(t)dt$$

که $y(t)$ پالس مستطیلی نشان داده شده در شکل ح٤,٨ می باشد. با استفاده از خاصیت انتگرال گیری تبدیل فوریه، داریم:

$$x(t)\xleftrightarrow{FT} x(j\omega)=\frac{1}{j\omega}Y(j\omega)+\pi Y(j_{\circ})\delta(\omega)$$

از جدول ٤,٢ می دانیم که:

$$Y(j\omega)=\frac{2\sin\left(\omega/2\right)}{\omega}$$

بنابراین:

$$x(j\omega)=\frac{2\sin \omega/2}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)$$

ب) اگـر $g(t)=x(t)=1/2$ در اینـصورت تبـدیل فوریــه $g(t)$ کـه برابـر اســت بـا $G(j\omega)$ عبارتست از:

$$G(j\omega)=x(j\omega)-(1/2)(2\pi)\delta(\omega)=\frac{2\sin(\omega/2)}{j\omega^2}$$

٤,٩) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t)=\begin{cases}0 & , \quad |t|>1\\ (t-1)/2 & , \quad -1\le t\le 1\end{cases}$$

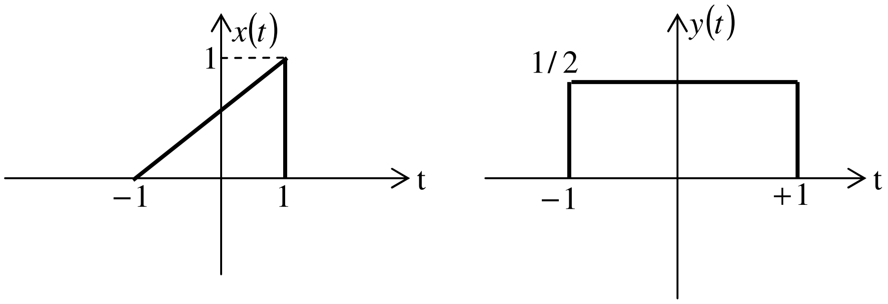
(الف) با استفاده از جدولهای ٤-١ و ٤-٢ عبارت $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) بخش حقیقی جواب بند (الف) را بیابید و نشان دهیـد کـه تبـدیل فوریـه بخـش زوج $x(t)$ است.

(ج) تبدیل فوریه بخش فرد $x(t)$ را بیابید.

حل:

(الف) سیگنال $x(t)$ در شکل ح٤,٩. به نمایش در آمده است.



شکل ح٤,٩.

مشاهده می کنیم که این سیگنال بسیار مشابه سیگنالی است که در مسأله قبلی فرض کردیم. در حقیقت دوباره می توان گفت که $x(t)$ برحسب پالس مستطیل $y(t)$ که در بالا نشان داده شده به صورت زیر است:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} y(t)dt-\upsilon\left(t-\tfrac{1}{2}\right)$$

با استفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (الف) مسئله قبلی، تبدیل فوریه $x(t)$ که همان $x(j\omega)$ می باشد به صورت زیر است:

$$x(j\omega)=\frac{2\sin\left(\omega/2\right)}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)-FT\left\{u\left\{t-\tfrac{1}{2}\right\}\right\}$$

$$=\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j^{\omega}}$$

(ب) قسمت زوج $x(t)$ به صورت زیر است:

$$\varepsilon v\{x(t)\}=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

که این در شکل ح٤,۹ نشان داده شده است، بنابراین

$$FT\{\varepsilon v\{x(t)\}\}=\frac{\sin\omega}{\omega}$$

حال قسمت حقیقی جواب قسمت (الف) برابر است با:

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}\right\}=\left(1/\omega\right)\mathrm{Re}\{j(\cos\omega-j\sin\omega)\}=\frac{\sin\omega}{\omega}$$

(ج) تبدیل فوریه قسمت فرد $x(t)$ j برابر است موهومی جواب قسمت (الف) می باشد، داریم:

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}\right\}=-\frac{\sin\omega}{\omega^2}+\frac{\cos\omega}{\omega}$$

بنابراین، نتیجه مطلوب عبارتست از:

$$FT\{dd\{x(t)\}\}=\frac{\sin\omega}{j^{\omega 2}}-\frac{\cos\omega}{j^{\omega}}$$

....

۴,۱۰) (الف) با استفاده‌از جدولهای ۴-۱ و ۴-۲ تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید:

$$x(t)=t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$$

(ب) با استفاده از رابطه پارسئوال و جواب بند (الف) مقدار عددی انتگرال زیر را بیابید:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt$$

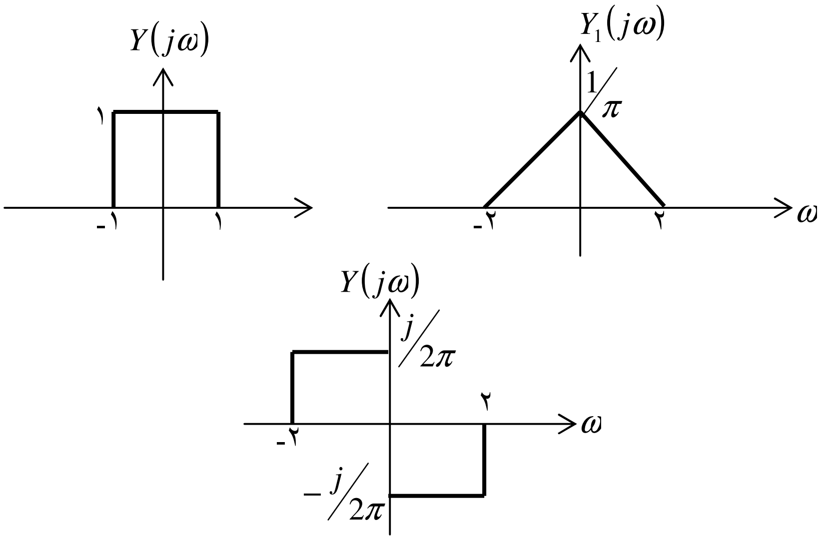
حل:

از جدول ۴,۲ می دانیم که:

$\frac{\sin t}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}\{Y(j\omega)\}$ تابع مستطیلی [شکل ح۴,۱۰ را ببینید]

$\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2\xleftrightarrow{FT}\left(1/2\pi\right)\{Y(j\omega) * \}$ {تابع مستطیلی

که این تابع مثلثی $Y_1(j\omega)$ چنانچه در شکل S۴,۱۰ آمده است را بوجود می آورد:



شکل ح۴,۱۰

با استفاده از جدول ۴,۱ می توانیم بنویسیم:

$$t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{FT} x(j\omega)=j\frac{d}{d\omega}Y_1(j\omega)$$

که این در شکل فوق نشان داده شده است. $x(j\omega)$ به صورت ریاضی عبارتست از:

$$x(j\omega)=\begin{cases} j/2\pi & -2\le\omega\le\circ \\ -j/2\pi & \circ\le\omega/2 \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(ب) با استفاده از رابطه پارسئوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi^3}$$

٤,١١) روابط زیر را داریم

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

و

$$g(t)=x(3t)*h(3t)$$

تبدیل فوریه $x(t)$ و $h(t)$به ترتیب $X(j\omega)$ و $H(j\omega)$ است به کمک خواص تبـدیل فوریـه نشان دهید که تبدیل فوریه $g(t)$ به شکل زیرا ست :

$$g(t)=Ay(Bt)$$

مقادیر A و B را تعیین کنید.

حل:

می دانیم که:

$$x(3t)\xleftrightarrow{FT}\tfrac{1}{3}x\left(\tfrac{j\omega}{3}\right) \quad , \quad h(3t)\xleftrightarrow{FT}\tfrac{1}{3}H\left(\tfrac{j\omega}{3}\right)$$

بنابراین

$$G(j\omega)=FT\{x(3t)*h(3t)\}$$
$$=\frac{1}{9}x\left(\tfrac{j\omega}{3}\right)H\left(\tfrac{j\omega}{3}\right)$$

حال توجه کنید که:

$$Y(j\omega) = FT\{x(t) * h(t)\}$$
$$= x(j\omega).H(j\omega)$$

با استفاده از این می توان نوشت:

$$Y\left(j\omega/3\right) = x\left(j\omega/3\right)H\left(j\omega/3\right)$$

با استفاده از رابطه (**) داریم:

$$G(j\omega) = \frac{1}{g}Y\left(j\omega/3\right)$$

,

$$g(t) = 1/3\, y(3t)$$

بنابراین $A = \frac{1}{3}$ و $B = 3$.

۴,۱۲) زوج تبدیل فوریه زیر را در نظر بگیرید

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathfrak{I}} \frac{1}{1+\omega^2}$$

(الف) با استفاده از خواص مناسب تبدیل فوریه، تبدیل فوریه $t\, e^{-|t|}$ را بیابید.

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) و خاصیت همزادی تبدل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

راهنمایی: مثال ۴–۱۳ را ببینید.

حل:

(الف) از مثال ۴,۲ می دانیم که:

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} \frac{2}{1+\omega^2}$$

با استفاده از خاصیت مشتقگیری در فرکانس داریم:

$$te^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{2}{1+\omega^2}\right\} = -\frac{4j\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$$

(ب) از خاصیت دوگان

$$g(t) \xleftrightarrow{FT} G(j\omega)$$
$$G(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi\ g(j\omega)$$

حال :

$$t\ e^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} -\frac{4j\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$$

می توان از خاصیت دوگان برای نوشتن

$$-\frac{4jt}{\left(1+t^2\right)^2} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\omega\ \bar{e}^{|\omega|}$$

استفاده کرد.

اگر دو طرف معادله را در j ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2} \xleftrightarrow{FT} j2\pi\omega\ \bar{e}^{|\omega|}$$

٤,۱۳) فرض کنید $x(t)$ دارای تبدیل فوریه زیرست

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega-\pi) + \delta(\omega-5)$$

و

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

(الف) آیا $x(t)$ متناوب است؟

(ب) آیا $x(t) * h(t)$ متناوب است؟

(ج) آیا کانولوشن دو سیگنال نامتناوب می تواند متناوب باشد؟

حل:

(الف) با گرفتن عکس تبدیل فوریه $x(j\omega)$؛ داریم:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}e^{j\pi t} + \frac{1}{2\pi}e^{j5t}$$

بنـابراین سـیگنال $x(t)$ مجمـوعی ثابـت بـا دو نمـایی مخـتلط اسـت کـه فرکاسـن پایـه آنهـا برابر $\frac{2\pi}{5}\left({rad}/{\sec}\right)$ و $2\left({rad}/{\sec}\right)$ این دو سیگنال مختلط به صورت هارمونیکی بـا هـم رابطـه ای ندارنـد. یعنی فرکانس پایه این نماهای مختلط نمی تواند هیچگاه حاصلضرب انتگرال فرکانـسهای پایـه باشـد. بنابراین، سیگنال پریودیک نیست.

(ب) فرض کنید سیگنال $y(t)=x(t)*h(t)$. با استفاده از خاصیت انتگرال کانولوشن، مـی دانـیم که $Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)$.

نیز از $h(t)$، می دانیم که

$$H(j\omega)=e^{-j\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

تابع $H(j\omega)$ هنگامیکه $\omega=k\pi$، برابر صفر است. که k صحیح غیر صفر است. بنابراین:

$$Y(j\omega)H(j\omega)=\delta(\omega)+\delta(\omega-5)$$

که می دهد:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}e^{j5t}$$

بنابراین $y(t)$ حاصل جمع نمایی مختلطی است که ثابت است. می دانیم کـه یـک نمـایی مخـتلط متناوب می باشد. با افزودن یک ثابت به نمایی مختلط تأثیری روی متناوب بودن آن ایجاد نمـی شـود. بنابراین $y(t)$، سیگنالی با فرکانس پایه ی ${2\pi}/{5}$ خواهد بود.

(ج) از نتایج قسمت (الف) و (ب) ملاحظه شود که جواب مثبت است، (بلی)

٤,١٤) سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. اطلاعات زیر داده شدهاست:

۱. $x(t)$ حقیقی و غیر منفی است.

۲. $\mathfrak{I}^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\}=Ae^{-2t}u(t)$

۳. $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 d\omega=2\pi$

$x(t)$ را بیابید.

حل:

با گرفتن عکس تبدیل فوریه از طرفین تساوی، داریم

$$F^{-1}\{(1+j\omega)x(j\omega)\}=A2^{-2t}u(t)$$

دوباره داریم:

$$x(j\omega)=\frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=A\left\{\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}\right\}$$

با گرفتن تبدیل فوریه معکوس از معادله فوق داریم:

$$x(t)=Ae^{-t}u(t)-Ae^{-2t}u(t)$$

با استفاده ازرا بطه پارسئوال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|^2\,d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$$

با استفاده از این حقیقت که $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|^2\,d\omega=2\pi$ ، داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2.dt=1$$

با جایگذاری $x(t)$ در رابطه فوق داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^2e^{-2t}+A^2e^{-4}-2A^2e^{-3t}\right)u(t)dt=1$$

$$\Rightarrow\int_{\circ}^{\infty}\left(A_2e^{-2t}+Ae^{-4t}-2A^2e^{-3t}\right)dt=1$$

$$\Rightarrow\frac{A^2}{12}=1\Rightarrow\pm\sqrt{12}=A$$

جواب نهایی قابل قبول $+\sqrt{12}$ می باشد زیرا $x(t)$ منفی نمی باشد.

٤,١٥) سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. اطلاعات زیر داده شده است:

۱. $x(t)$ حقیقی است.

۲. در $t\le\circ$ ، $x(t)=\circ$

۳. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Re e\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}\,d\omega=|t|e^{-|t|}$

عبارت ریاضی $x(t)$ را بیابید.

حل:

می دانیم $x(t)$ حقیقی است در اینصورت

$$\mathcal{E}v\{x(t)\}=\frac{x(t)+x(-t)}{2}\xleftrightarrow{FT}\operatorname{Re}\{x(j\omega)\}$$

دوباره داریم:

$$\ell FT\{\operatorname{Re}\{x(j\omega)\}\}=|t|e^{-|t|}$$

بنابراین:

$$\mathcal{E}v\{x(t)\}=\frac{x(t)+x(-t)}{2}=|t|e^{-|t|}$$

همچنین می دانیم که برای $t \le \circ$ $x(t)=\circ$. که بیان می کند برای $t>\circ$، $x(-t)$. می توان نتیجه گرفت

$$x(t)=2|t|e^{-|t|} \quad for \quad t\ge\circ$$

بنابراین

$$x(t)=2te^{-t}u(t)$$

٤,١٦) سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)}\delta\left(t-k\frac{\pi}{4}\right)$$

(الف) $g(t)$ را به نحوی تعیین کنیدکه داشته باشیم

$$x(t)=\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)g(t)$$

(ب) با استفاده از خاصیت ضرب تبدیل فوریه نشان دهید که $X(j\omega)$ را در یک دوره تناوب تعیین کنید.

حل:

(الف) می توان نوشت:

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi/4}\pi\delta\left(t-k\pi/4\right)$$

بنابراین

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta\left(t-k\pi/4\right)$$

(ب) چون $g(t)$ یک قطار ضربه است؛ تبدیل فوریه $G(j\omega)$ قطار ضربه خواهد بود.

از جدول ٤,٢

$$G(j\omega)=\pi\frac{2\pi}{\pi/4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\pi/4}\right)$$

$$=8\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-8k)$$

ملاحظه می شود که $G(j\omega)$، پریود ۸، پریودیک است. با استفاده از خاصیت ضرب می دانیم که

$$x(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{FT\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}*G(j\omega)\right\}$$

اگر $FT\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}$ را با نماد $A(j\omega)$ نشان دهیم؛ در اینصورت

$$x(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[A(j\omega)*8\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A(j\omega-8k)\right]$$

$x(j\omega)$ همان $aA(j\omega)$ که هر $8\,{rad}/{\sec}$ تکرار می شود، می باشد. که مشخصاً پریودیک است. با استفاده از جدول ٤,٢، داریم:

$$A(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le 1\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین، $x(j\omega)$ را در یک پریود به صورت زیر می توانیم نشان دهیم:

$$x(j\omega)=\begin{cases}4 & |\omega|\le 1\\ \circ & 1\le |\omega|\le 4\end{cases}$$

....

٤,١٧) درستی و نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. برای جواب خود دلیل بیاورید.

(الف) تبدیل فوریه یک سیگنال فرد و موهومی همیشه فرد و موهومی است.

(ب) کانولوشن یک تبدیل فوریه فرد و یک تبدیل فوریه زوج همیشه فردست.

حل:

از جدول ٤,١ می دانیم که، سیگنال حقیقی و فرد $x(t)$، تبدیل فوریه ای فرد و موهومی خالص $x(j\omega)$ را خواهد داشت. سیگنال فرد و موهوی خالص $jx(t)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از خطی بودن، تبدیل فوریه این سیگنال به صورت $jx(j\omega)$ خواهد بود. بدیهی است تابع $jx(i\omega)$ فرد و حقیقی می باشد. بنابراین حالت داده شده، نادرست است.

(ب) تبدیل فوریه ی متناظر با یک سیگنال فرد، فرد و تبدیل فوریه متناظر با سیگنال زوج، زوج خواهد بود. کانولوشن تبدیل فوریه یک سیگنال فرد با یک سیگنال زوج در حوزه زمان حاصلضرب یک سیگنال فرد در یک سیگنال زوج است. همینطور حاصلضرب حاصل همواره فرد خواهد بود، تبدیل فوریه این سیگنال فرد نیز فرد خواهد بود. بنابراین حالت موردنظر، صحیح است.

٤,١٨) پاسخ ضربه سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر را بیابید.

$$H(j\omega)=\frac{\left(\sin^2(3\omega)\right)\cos\omega}{\omega^2}$$

حل:

با استفاده از جدول ٤,٢، ملاحظه می کنیم که پالس مستطیلی $x_1(t)$ نشان داده شده در شکل ح٤,١٨ تبدیل فوریه ای به صورت $x_1(j\omega)=\frac{\sin(3\omega)}{\omega}$ را خواهد داشت. با استفاده از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه می توان نوشت:

$$x_2(t)=x_1(t)*x_1(t)\xleftrightarrow{FT}x_2(j\omega)=x_1(j\omega)$$
$$=\left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2$$

سیگنال $x_2(t)$ در شکل ح٤,١٨ نشان داده شده است. با استفاده از خاصیت شیفت، متوجه می شویم که

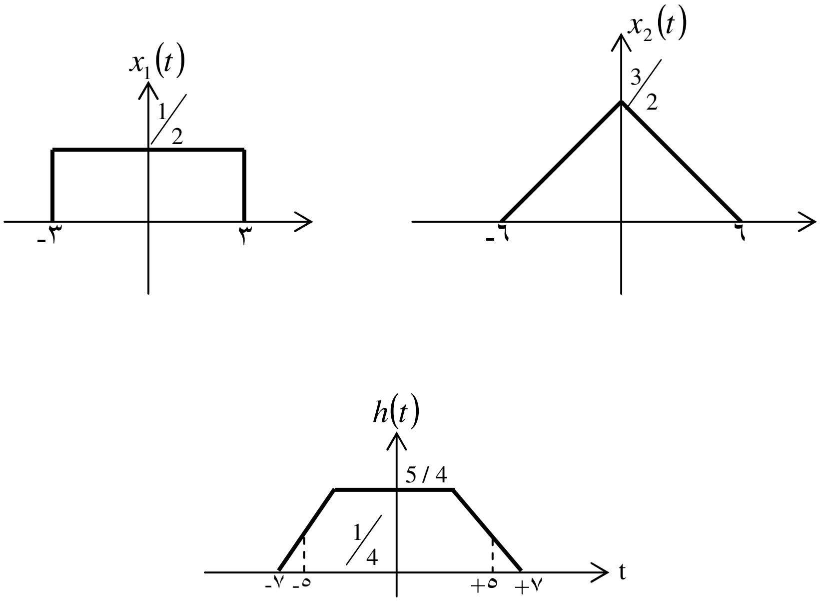
$$\frac{1}{2}x_2(t+1) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}e^{j\omega}\left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2$$

,

$$\frac{1}{2}x_2(t-1) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}e^{-j\omega}\left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2$$

با جمع کردن دو معادله داریم:

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(x_2(t+1) + x_2(t-1)\right) \xleftrightarrow{FT} \cos\omega\left(\frac{\sin 3\omega}{\omega}\right)^2$$



شکل ح٤,۱۸

$h(t)$ به صورت ریاضی به صورت زیر می باشد:

$$h(t)=\begin{cases} 5/4 \ , \ |t|<1 \\ -\dfrac{|t|}{4}+\dfrac{3}{2} & 1\le |t| \le 5 \\ -\dfrac{|t|}{8}+7/8 & 5<|t|\le 7 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۴،۱۹) یک سیستم LTI علّی با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید.

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+3}$$

این سیستم به ازای ورودی $x(t)$ خروجی زیر را ایجاد کرده است.

$$y(t)=e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

$x(t)$ را بیابید.

حل:

می دانیم که

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}$$

چون $y(t)=e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$ داده شدهاست در نتیجه می توانیم $Y(j\omega)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$Y(j\omega)=\frac{1}{3+j\omega}-\frac{1}{4+j\omega}=\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$$

چون $H(j\omega)=1/3+j\omega$ داریم:

$$x(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}=\frac{1}{(4+j\omega)}$$

با گرفتن عکس تبدیل، فوریه داریم:

$$x(t)=e^{-4t}u(t)$$

٤,٢٠) پاسخ ضربه سیستم LTI علّی نشان داده شده با مدار RLC مسئله ٣-٢٠ رادر نظر بگیرید. برای این منظور عکس تبدیل فوریه پاسخ فرکانسی مدار را بیابید. برای این محاسبه می توانید از جدولهای ٤-١ و ٤-٢ استفاده کنید.

حل:

از جواب مسئله ٣,٢٠، می دانیم که پاسخ فرکانسی مدار عبارتست از:

$$H(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2+j^{\omega+1}}$$

با شکستن آن به دسته های کوچکتر می توان نوشت:

$$H(j\omega)=\frac{-1}{j\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j+j\omega}+\frac{-1}{1/2+\frac{\sqrt{2}}{2}j+j\omega}\right)$$

با استفاده از جفت تبدیلات ارائه شده در جدول ٤,٢، از تبدیل فوریه $H(j\omega)$، $h(t)$ را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$h(t)=\frac{-1}{j\sqrt{3}}\left[-e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}+e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)t}\right]u(t)$$

با ساده سازی داریم:

$$h(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-1/2t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

٤,٢١) تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای زیر را حساب کنید.

الف) $\left[e^{-at}\cos\omega_\circ t\right], a>\circ$

ب) $e^{-3|t|}\sin 2t$

ج) $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t & , \quad |t|\le 1\\ \circ & , \quad |t|>1\end{cases}$

د) $\sum_{k=\circ}^{\infty}a^k\delta(t-kT),(a)<1$

هـ) $\left[te^{-2t}\sin 4t\right]u(t)$

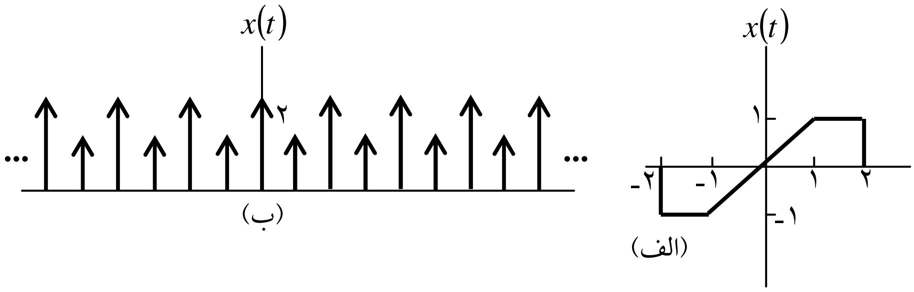
(و) $\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$

(ز) $x(t)$ شکل م ۴-۲۱ (الف)

(ح) $x(t)$ شکل م ۴-۲۱ (ب)

(ط) $x(t)=\begin{cases}1-t^2, & \circ<t<1\\ \circ\quad, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$

(ی) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$



شکل م ۴-۲۱

حل:

(الف) سیگنال داده شده عبارتست از:

$$e^{-\propto t}\cos(\omega_\circ t)u(t)=\frac{1}{2}e^{-at}e^{j\omega_\circ t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-at}e^{-j\omega_\circ t}u(t)$$

بنابراین:

$$x(j\omega)=\frac{1}{2[a-j\omega_\circ+j\omega]}-\frac{1}{2[a+j\omega_\circ+j\omega]}$$

(ب) سیگنال داده شده به صورت زیر است:

$$x(t)=e^{-3t}\sin(2t)u(t)+e^{3t}\sin(2t)u(t)$$

داریم:

$$x_1(t)=e^{-3t}\sin 2t\,u(t)\xleftrightarrow{FT}x_1(j\omega)=\frac{1/2j}{3-2j+j\omega}-\frac{1/2j}{3+2j+j^{\omega}}$$

همچنین:

$$\begin{aligned}x_2(t)&=e^{3t}\sin(2t)u(-t)\\&=-x_1(-t)\xleftrightarrow{FT}x_2(j\omega)=-x_1(-j\omega)\\&=\frac{1/2j}{3-2j-j\omega}-\frac{1/2j}{3+2j-j\omega}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}x(j\omega)&=x_1(j\omega)+x_2(j\omega)\\&=\frac{3j}{9+(\omega+2)^2}-\frac{3j}{9+(\omega-2)^2}\end{aligned}$$

(ج) بااستفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (٤,٩) داریم:

$$x(j\omega)=\frac{1}{1-a\,e^{-j\omega T}}$$

(هـ) داریم:

$$\begin{aligned}x(t)&=\left(1/2j\,te^{-2t}e^{4jt}u(t)\right)\\&-\left(1/2j\right)te^{-2t}e^{-4jt}u(t)\end{aligned}$$

بنابراین

$$x(j\omega)=\frac{1/2j}{(2-4j+j\omega)^2}-\frac{1/2j}{(2+4j+j\omega)^2}$$

(و) داریم:

$$x_1(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}x_1(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\pi\\ \circ & ather\end{cases}$$

و نیز

$$x_2(t)=\frac{\sin^2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\xleftrightarrow{FT}x_2(j\omega)=\begin{cases}e^{-2\omega} & |\omega|<2\pi\\ \circ & other\end{cases}$$

$$x(t)=x_1(t)x_2(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}x_1(j\omega)*x_2(j\omega)$$

بنابراین

$$x(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega|<\pi \\ \left(1/2\pi\right)(3\pi+\omega)e^{-j\omega}, & -3\pi<\omega<-\pi \\ \left(1/2\pi\right)(3\pi-\omega)e^{-j\omega} & \pi<\omega<3\pi \\ \circ & other \end{cases}$$

(ذ) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (٤,٩)، بدست می آوریم:

$$x(j\omega)=\frac{2j}{\omega}\left[\cos 2\omega-\frac{\sin\omega}{\omega}\right]$$

(خ) اگر

$$x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)$$

در اینصورت

$$x(t)=2x_1(t)+x_1(t-1)$$

بنابراین

$$x(j\omega)=x_1(j\omega)\left[2+e^{-\omega}\right]$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)\left[2+(-1)^k\right]$$

(ط) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (٤,٩) داریم:

$$x(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\frac{2e^{-j\omega}}{-\omega^2}-\frac{2e^{-j\omega}-2}{j\omega^2}$$

(ی) $x(t)$ با دوره متناوب (۲) پریودیک است، بنابراین:

$$x(j\omega)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(jk\pi)\delta(\omega-k\pi)$$

که $\tilde{x}(j\omega)$ تبدیل فوریه یک دوره متناوب $x(t)$ می باشد. یعنی

$$x(j\omega)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(jk\pi)\delta(\omega-k\pi)$$

که $\tilde{x}(j\omega)$ تبدیل فوریه یک دوره تناوب $x(t)$ می باشد. یعنی

$$x(j\omega)=\frac{1}{1-e^{-2}}\left[\frac{1-e^{-2(j\omega+1)}}{1+j\omega}-\frac{e^{-2}\left[1-e^{-2(1+j\omega)}\right]}{1-j^{\omega}}\right]$$

۴٫۲۲) سیگنال پیوسته در زمان مربوط به هر یک از تبدیلهای زیر را بیابید:

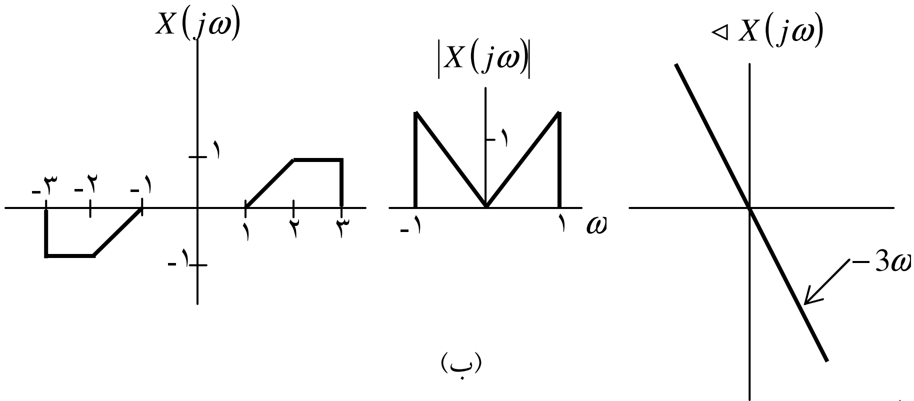
(الف) $X(j\omega)=\dfrac{2\sin[3(\omega-2\pi)]}{(\omega-2\pi)}$

(ب) $X(j\omega)=\cos(4\omega+\pi/3)$

(ج) دامنه و فاز $X(j\omega)$ در شکل م ۴–۲۲ (الف) رسم شده است.

(د) $X(j\omega)=2[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]+3[\delta(\omega-2\pi)+\delta(\omega+2\pi)]$

(هـ) $X(j\omega)$ مطابق شکل م ۴–۲۲ (ب) است.



(ب)

(الف)

شکل م ۴–۲۲

حل:

(الف) $x(t)=\begin{cases} e^{j2\pi t} & |t|<3 \\ \circ & other \end{cases}$

(ب) $x(t)=\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\delta(t-4)+\frac{1}{2}e^{j\pi/3}\delta(t+4)$

(ج) تبدیل فوریه ی معادله (٤,٨) به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|e^{j\alpha x(j\omega)}e^{j\omega t}dt$$

از شکل داده شده دادیم:

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(t-3)}{t-3}+\frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2}\right]$$

(د) $x(t)=\frac{2j}{\pi}\sin t+\frac{3}{\pi}\cos(2\pi t)$

(هـ) با استفاده از تبدیل فوریه معادله (٤,٨)؛ داریم:

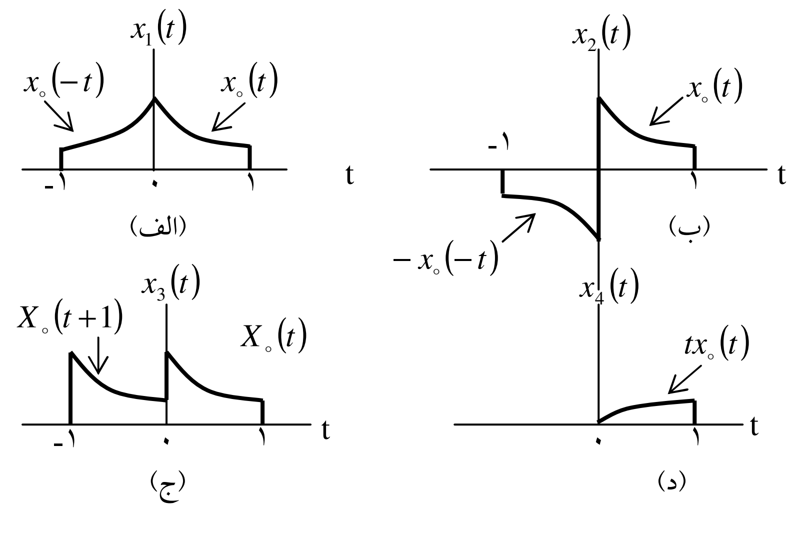
$$x(t)=\frac{\cos 3t}{j\pi t}+\frac{\sin t-\sin 2t}{j\pi t^2}$$

۱,۲۳) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x_{\circ}(t)=\begin{cases} e^{-t}, & \circ\le t\le 1 \\ \circ\ , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای فوریه هر یک از سیگنالهای شکل م ٤-۲۳ را به دست آورید. باید بتوانید این کار را تنها بامحاسبه تبدیل فوریه $x_{\circ}(t)$ و سپس استفاده از خواص تبدیل فوریه انجام دهید.

شکل م ٤-۲۳



حل:

برای سیگنال داده شده $x_\circ(t)$ از تبدیل فوریه معادله (٤,٨) استفاده می کنیم. بـرای محاسـبه تبـدیل فوریه متناظر داریم:

$$x_\circ(j\omega)=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$$

(i) می دانیم که:

$$x_1(t)=x_\circ(t)+x_\circ(-t)$$

با استفاده از خواص خطی بودن و معکوس پذیری در زمان، تبدیل فوریه دادیم:

$$x_1(j\omega)=x_\circ(j\omega)+x_\circ(-j\omega)=\frac{2-2e^{-1}\cos\omega-2\omega e^{-1}\sin\omega}{1+\omega^2}$$

(ii) می دانیم که

$$x_2(t)=x_\circ(t)-x_\circ(-t)$$

با استفاده از خواص خطی بودن و معکوس پذیری در زمان تبدیل فوریه، داریم:

$$x_2(j\omega)=x_\circ(j\omega)-x_\circ(-j\omega)=j\left[\frac{-2\omega+2e^{-1}\sin\omega+2\omega e^{-1}\cos\omega}{1+\omega^2}\right]$$

(iii) می دانیم که

$$x_3(t)=x_\circ(t)+x_\circ(t+1)$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن و خاصیت شیفت زمانی، تبدیل فوریه، داریم:

$$x_3(j\omega)=x_\circ(j\omega)+e^{j\omega}x_\circ(-j\omega)=\frac{1+e^{j\omega}-e^{-1}\left(1+e^{-j\omega}\right)}{1+j\omega}$$

(iv) می دانیم که

$$X_4(t)=tx_\circ(t)$$

با استفاده از خاصیت مشتق در حوزه فرکانسی داریم:

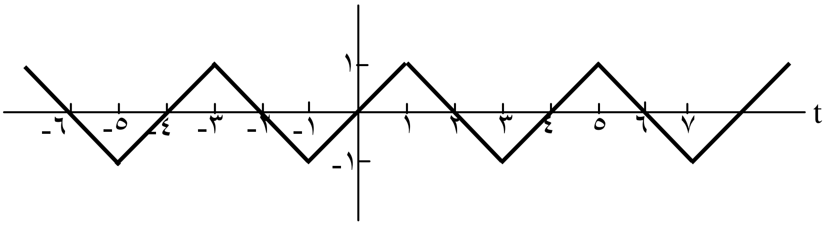
$$x_4(j\omega)=j\frac{d}{d\omega}x_\circ(j\omega)$$

بنابراین

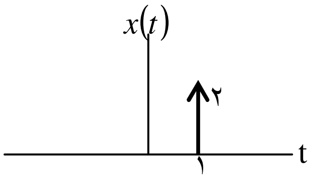
$$x_4(j\omega)=\frac{1-2e^{-1}e^{-j\omega}-j\omega e^{-1}e^{-j\omega}}{(1+j\omega)^2}$$

٢,٢٤) (الف) تعیین کنید تبدیل فوریه کدام یک از سیگنالهای حقیقی شکل م ٤-٢٤، هر یک از شرایط زیر را برآورده می کنند:

(١) $\Re e\{X(j\omega)\}=0$

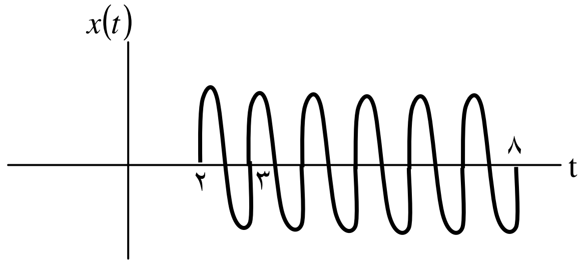


(الف)

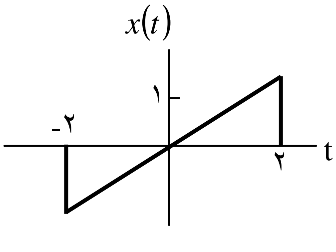


(ب)

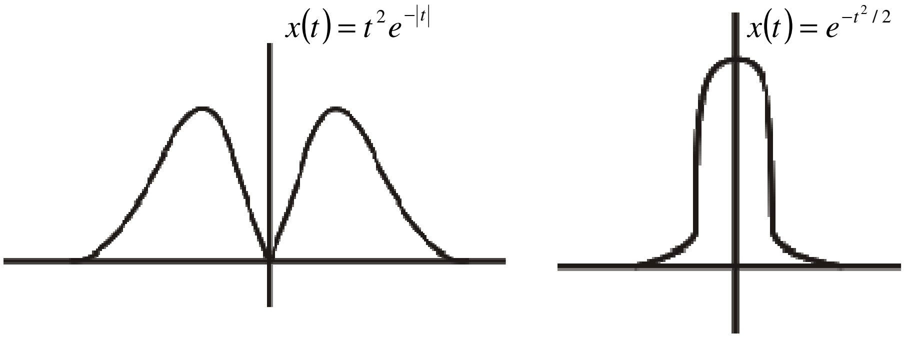
شکل م ٤-٢٤ (الف، ب)



(ج)



(د)



شکل م ٤-۲٤ (ادامه) (ج، د، هــ و)

(۲) $g_m\{X(j\omega)=\circ\}$

(۳) می توان یک a حقیقی به دست آورد به نحوی که $e^{ja\omega}X(j\omega)$ حقیقی باشد.

(٤) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega=\circ$

(٥) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(j\omega)d\omega=\circ$

(٦) $X(j\omega)$

(ب) سیگنالی بسازید که خصوصیات (۱)، (۲)، و (٥) را داشته و بقیه را نداشته باشد.

حل:

(الف) (i) بـرای اینکـه $\mathrm{Re}\{x(j\omega)\}=\circ$ بایـستی سـیگنال $x(t)$ حقیقـی و فـرد باشـد. بنـابراین سیگنالهای شکل های(الف) و (پ) این خاصیت را دارا می باشند.

(ii) برای اینکه $\mathrm{Im}\{x(j\omega)\}=\circ$ بایستی سیگنال $x(t)$ حقیقی و زوج باشد. بنابراین سـیگنالهای اشکال (ث) و (ح) این خاصیت را دارند.

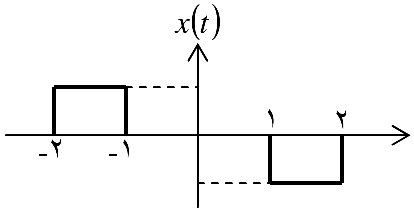
(iii) برای اینکه عددی حقیقی مانند α موجود باشد طوریکه $e^{j\alpha\propto}x(j\omega)$ حقیقی باشد، بایـستی $x(t+\alpha)$ یک سیگنال حقیقی و زوج باشـد. سـیگنالهای اشـکال (الـف) و (ب) و (ث) و (ح) ایـن خاصیت را دارند.

(iv) برای اینکه این شرط صحیح باشد بایستی $x(0)=0$، بنابراین سیگنالهای (الف) و (ب) و (پ) و (ت) و (ح) این خاصیت را دارا می باشند.

(v) برای این که شرط برقرار باشد بایستی $x(t=0)=0$ باشد. بنابراین سیگنال در (ب) و (ج) و (د) و (هـ) این خاصیت را دارا می باشند.

(vi) برای اینکه این شرط برقرار باشد بایستی سیگنال $x(t)$ متناوب باشد. تنها سیگنال شکل (الف) این خاصیت را در (ب) برای اینکه سیگنالی شرطهای (i) و (iv) و (v) را برآورده سازند، بایستی فرد و حقیقی باشد و $x'(t)=0$ و $x(t)=0$

سیگنال در زیر نشان داده شده است.



شکل ح ٤,٢,٤

.....

٤,٢٥) $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ شکل م ٤-٢٥ است.

(الف) $\sphericalangle X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) $X(j0)$ را بیابید.

(ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega$ را بیابید.

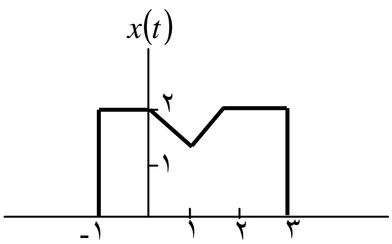
(د) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j}2\omega d\omega$

(هـ) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

(و) عکس تبدیل فوریه $\Re e\{X(j\omega)\}$ را رسم کنید.

راهنمایی: می توانید تمام این محاسبات را بدون یافتن $X(j\omega)$ انجام دهید.

شکل م ٤-٢٥



حل:

(الف) توجه کنید که $y(t)=x(t+1)$ سیگنالی حقیقی زوج می باشد. بنابراین $Y(j\omega)$ نیز حقیقی و زوج می باشد که بیان می کند $\Delta Y(j\omega)=\circ$ و نیز چون $Y(j\omega)=e^{j\omega}x(j\omega)$ می دانیم که $\Delta x(j\omega)=-\omega$.

(ب) داریم: $$x(j_\circ)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=7$$

(ج) داریم: $$\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\omega)d\omega=2\pi x(\circ)=4\pi$$

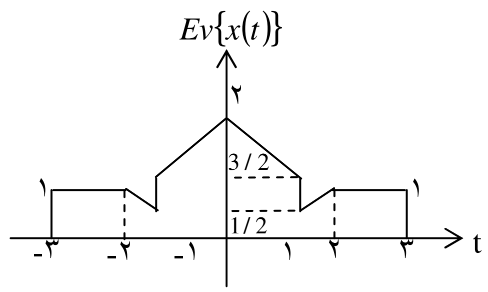
(ت) فرض کنید $Y(j\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{2j\omega}$. سیگنال خروجی $y(t)$ برابر است با:

$$y(t)=\begin{cases}1 & -3<t<-1\\ \circ & other\end{cases}$$

در این صورت انتگرال داده شده عبارتست از:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=26\pi$$

(د) تبدیل فوریه معکوس $\mathrm{Re}\{x(j\omega)\}$ برابر است با $\varepsilon v\{x(t)\}$ که برابر است با: $[x(t)+x(-t)]/2$ که این مطلب در شکل زیر نشان داده شده است: $\varepsilon v(x(t))$



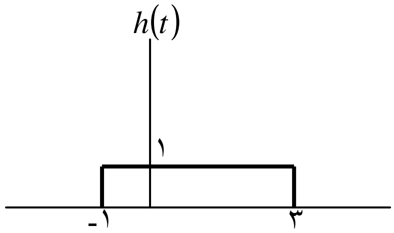
٤,۲٦) (الف) کانولوشن زوجهای $x(t)$ و $H(j\omega)$، استفاده از خاصیت کانولوشن، و عکس تبدیل فوریه به دست آورید.

(i) $$h(t)=e^{-4t}u(t) \text{ و } x(t)=te^{-2t}u(t)$$

(ii) $$h(t)=te^{-4}u(t),\ x(t)=te^{-2t}u(t)$$

(iii) $h(t)=e^{t}u(-t)\ ,\ x(t)=e^{-t}u(t)$

(ب) فرض کنید $x(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$ و $h(t)$ مطابق شکل م ٤-٢٦ است. خاصیت کانولوشن را با توجه به این زوج سیگنال نشاندهید. به این منظور تبدیل فوریه $y(t)=x(t)*h(t)$ و حاصلضرب $H(j\omega)X(j\omega)$ را بیابید.



شکل م ٤-٢٦

حل:

(الف) کانولوشن زوجهای $x(t)$ و $h(t)$ داده شده را با محاسبه $X(j\omega)$ و $H(j\omega)$، استفاده از خاصیت کانولوشن، و عکس تبدیل فوریه به دست آورید.

(i) $h(t)=e^{-4t}u(t)\ , \ x(t)=te^{-2t}u(t)$

(الف) (i) داریم:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=\left[\frac{1}{(2+j\omega)^2}\right]\left[\frac{1}{4+j\omega}\right]$$

$$=\frac{114}{4+j\omega}-\frac{1/4}{2+j\omega}+\frac{1/2}{(2+j\omega)2}$$

گرفتن عکس تبدیل فوریه خواهیم داشت:

$$y(t)=\frac{1}{4}e^{-4t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-2t}u(t)+{}^{1}\!/_{2}\,te^{-2t}u(t)$$

(ii) داریم:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=\left[\frac{1}{(2+j\omega)^2}\right]\left[\frac{1}{(4+j\omega)^2}\right]$$

$$=\frac{1/4}{2+j\omega}+\frac{1/4}{(2+j\omega)^2}-\frac{1/4}{4+j\omega}+\frac{1/4}{(4+j\omega)^2}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\tfrac{1}{4}e^{-2t}u(t)+\tfrac{1}{4}te^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{4}e^{-4t}u(t)+\tfrac{1}{4}te^{-4t}u(t)$$

(iii) داریم:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)$$

$$=\left[\frac{1}{1+j\omega}\right]\left[\frac{1}{1-j\omega}\right]$$

$$y(t)=\tfrac{1}{2}e^{-|t|}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

(ب) با استفاده از کانولوشن $x(t)$ و $h(t)$ داریم:

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 1-e^{-(t-1)} & 1<t\le 5\\ e^{-(t-5)}-e^{-(t-1)} & t>5\end{cases}$$

با گرفتن تبدیل فوریه داریم:

$$Y(j\omega)=\frac{2e^{-j3\omega}}{\omega(1+j\omega)}$$

$$=\left[\frac{e^{-2j\omega}}{1+j\omega}\right]\frac{e^{-j\omega}2\sin 2\omega}{\omega}$$

$$=x(j\omega)H(j\omega)$$

۴,۲۷) سیگنالهای زیر را در نظر بگیرید

$$x(t)=u(t-1)-2u(t-3)$$

و

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$

که در آن $a_k .T > 0$ را ضرائب سـری فوریـه $\tilde{x}(t)$، و $X(j\omega)$ را تبـدیل فوریـه $x(t)$ فـرض کنید.

(الف) عبارت ریاضی $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) عبارت ریاضی ضرائب a_k را یافته، نشاندهید که $a_k=\frac{1}{T}X\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)$.

حل:

سیگنالهای زیر را در نظر بگیرید.

تبدیل فوریه $x(t)$ که همان $x(j\omega)$ است عبارتست از:

$$x(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_1^2 e^{-j\omega t}dt-\int_2^3 e^{-j\omega t}dt$$

$$=2\frac{\sin \omega/2}{\omega}\left(1-e^{-j\omega}\right)e^{-j\omega/2}$$

(ب) ضرایب سری فوریه a_k برابرند با:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\tilde{x}(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt$$

$$=1/2\left\{\int_1^2 e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt^{-}-\int_2^3 e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt\right\}$$

$$=\frac{\sin\left(k\pi/2\right)}{k\pi}\left(1-e^{-jk\pi}\right)e^{-j3k\pi/2}$$

با مقایسه جواب بدست آمده از قسمت (الف) و (ب) داریم:

$$a_k=\frac{1}{T}x\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

که $T=2$.

٤,٢٨) (الف) $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ و

$$P(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{jn\omega_\circ t}$$

نمایش سری فوریه سیگنال متناوب $p(t)$، با فرکانس پایه $\omega_\circ$ است. تبدیل فوریه سیگنال زیـر را بیابید.

$$y(t)=x(t)p(t) \qquad \text{(م ٤–٢٨–١)}$$

(ب) فرض کنید $X(j\omega)$ مطابق شکل م ٤–٢٨ (الف) است. طیف $y(t)$ معادله (م ٤–٢٨–١) به ازای هر یک از (pt)های زیر رسم کنید.

(i) $p(t)=\cos(t/2)$

(ii) $p(t)=\cos(t)$

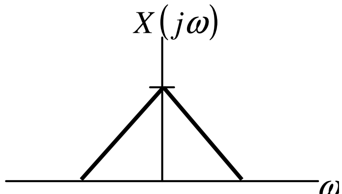
iii) ($p(t)=\cos(2t)$

iv) ($p(t)=(\sin)(\sin 2t)$

v) ($p(t)=\cos 2t-\cos t$

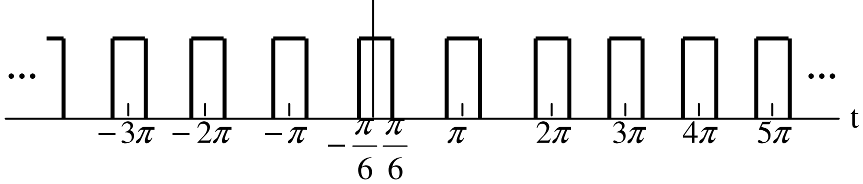
vi) ($p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\pi n)$

vii) ($p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2\pi n)$



(الف)

شکل م ٤–٢٨



(ب)

viii) ($p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4\pi n)$

ix) ($p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \pi n)$

x) $p(t)$ موج چهارگوش متناوب شکل م ٤–۲۸ (ب)

حل:

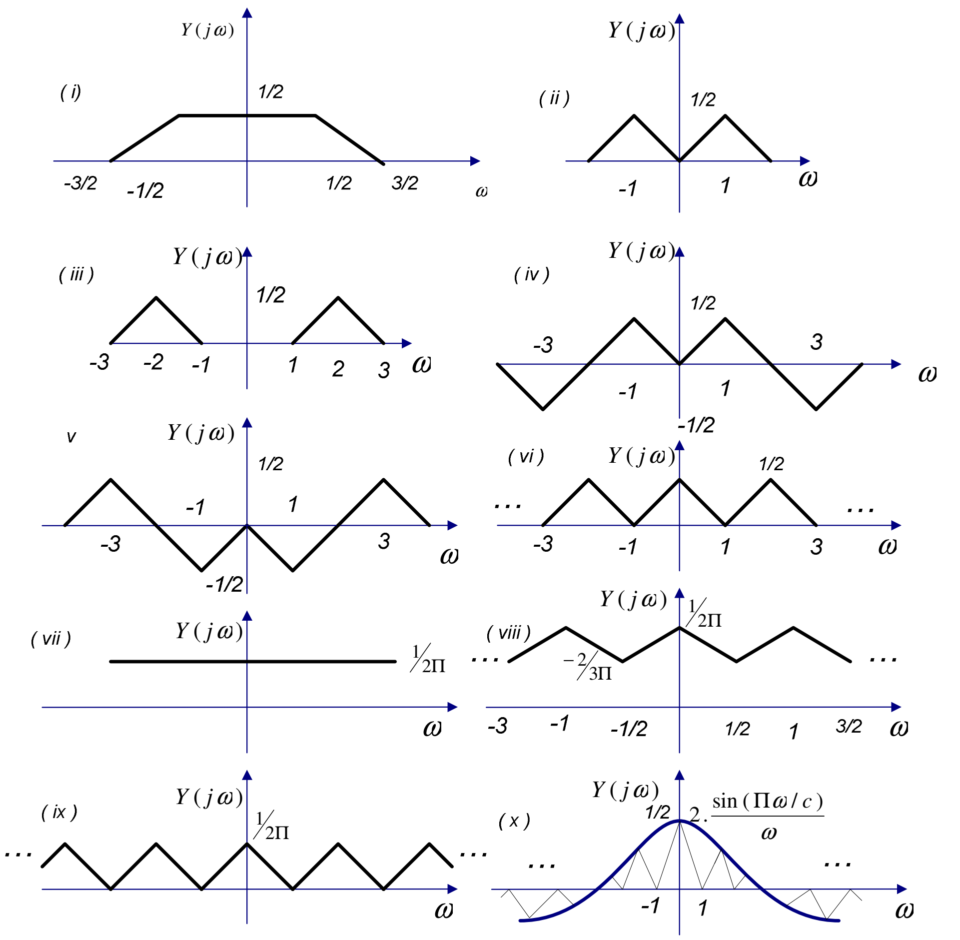
(الف) از جدول ٤,۲ می دانیم که:

$$p(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_k e^{jn\omega_\circ t} \xleftrightarrow{FT} p(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha / \delta(\omega - k\omega_\circ)$$

از این مطلب داریم:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \{x(j\omega) * H(j\omega)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x(j(\omega - k\omega_\circ))$$

(ب) طیف در شکل ح٤,۲۸. نمایش داده شده است.



شکل ح٤,٢٨.

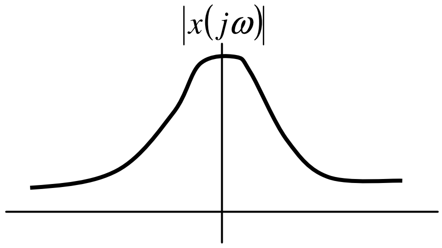
....

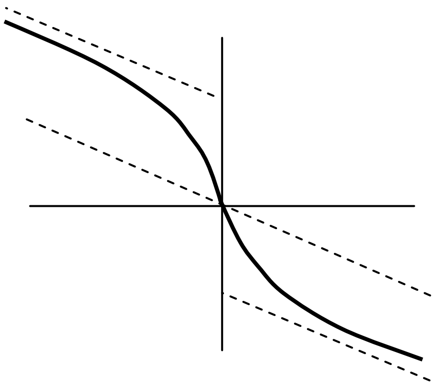
.

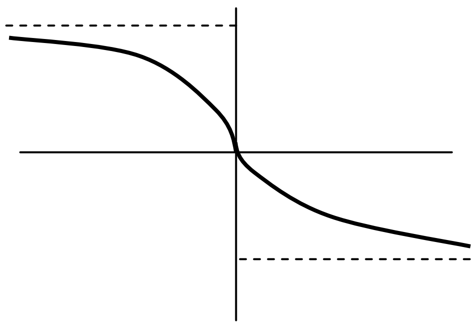
٤,٢٩) $x(t)$ تابع حقیقی پیوسته در زمانی است که شکل م ٤–٢٩ (الف) اندازه و فاز تبدیل فوریه $X(j\omega)$ آن را نشان می دهد.

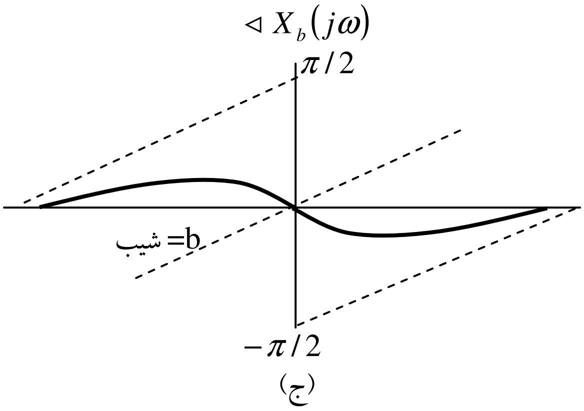
اندازه تبدیل فوریه توابع $x_a(t)$، $x_b(t)$، $x_c(t)$، و $x_d(t)$ همان اندازه $X(j\omega)$ است، ولی فاز تبدیل فوریه هر یک متفاوت، و مطابق شکلهای م ٤–٢٩ (ب) تا (هـ) است. $X_a(j\omega)\triangleleft$ و

$X_b(j\omega)$ با افزودن یک فاز خطی به $\sphericalangle X(j\omega)$ به دست آمده اند. برای به دست آوردن $\sphericalangle X_c(j\omega)$، $\sphericalangle X(j\omega)$ را حول $\omega = 0$ منعکس کرده ایم، و $\sphericalangle X_d(j\omega)$ از جمع $\sphericalangle X_c(j\omega)$ و یک فاز خطی به دست آمده است. به کمک خواص تبدیل فوریه $x_a(t)$، $x_b(t)$، $x_c(t)$، و $x_d(t)$ را بر حسب $x(t)$ به دست آورید.

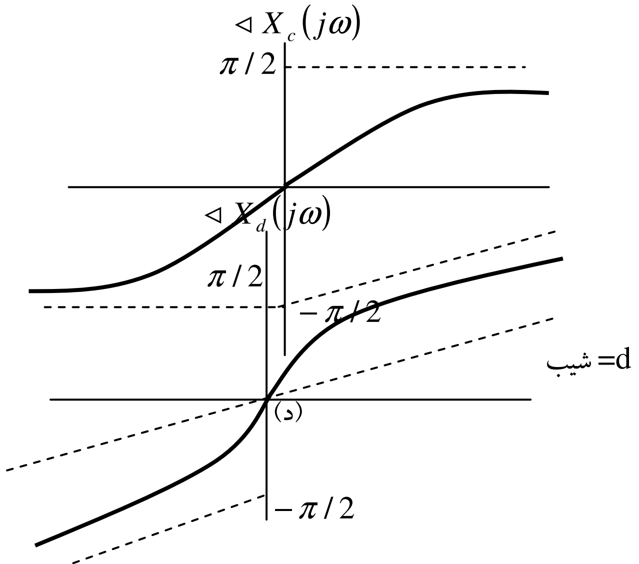








(ج)



(هـ)

حل:

(i) داریم:

$$x_a(j\omega)=|x(j\omega)|e^{jx(j\omega)-j\propto\omega}$$
$$=x(j\omega)e^{-j\propto\omega}$$

از این خاصیت شیفت زمانی داریم:

$$x_\propto(t)=x(t-a)$$

(ii) داریم:

$$x_b\{j\omega\}=|x(j\omega)|e^{j_\circ\, x(j\omega)+jb\omega}$$
$$=x(j\omega)e^{jb\omega}$$

از خاصیت شیفت زمانی می دانیم که:

$$x_b(t) = x(t+b)$$

(iii) داریم:

$$x_c(j\omega) = |x(j\omega)| e^{-j2\ x(j\omega)} = x^*(j\omega)$$

از مزدوج گیری و خاصیت معکوس ـ زمانی می دانیم که:

$$x_c(t) = x^*(-t)$$

چون $x(t)$ حقیقی است، بنابراین $x_c(t) = x(-t)$

(iv) داریم:

$$x_d(j\omega) = |x(j\omega)| e^{-j_\circ x(j\omega) + j\omega d}$$

$$= x^*(j\omega) e^{j\omega}$$

از خاصیتهای مزدوج گیری و معکوس زمانی و شیفت زمانی، می دانیم که:

$$x_d(t) = x^*(-t-d)$$

چون $x(t)$حقیقی است، $x(-t-d)$ نیز حقیقی می باشد.

٤,۳۰) فرض کنید $g(t) = x(t)\cos$ و $g(t)$ دارای تبدیل فوریه زیرست

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le 2 \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) $x(t)$ را بیابید..

(ب) تبدیل فوریه $X_1(j\omega)$ سیگنال $x_1(t)$ را به نحوی بیابید. که داشته باشیم.

$$g(t) = x_1(t)\cos\left(\frac{2}{3}t\right)$$

حل:

(الف) می دانیم که:

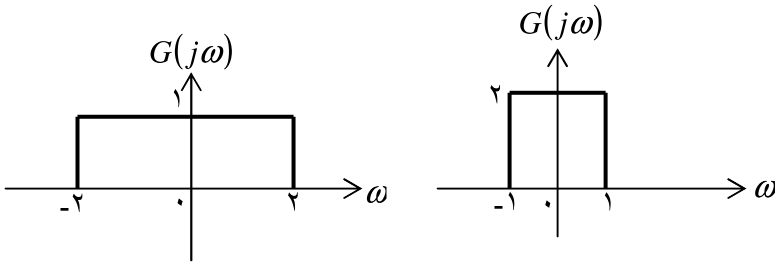
$$\omega(t) = \cos t \xleftrightarrow{FT} \omega(j\omega) = \pi[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)]$$

$$g(t) = x(t)\cos t \xleftrightarrow{FT} G(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[x(j\omega) * \omega(j\omega)]$$

بنابراین

$$G(j\omega)=\frac{1}{2}x(j(\omega-1))+{}^{1}\!/_{2}\,x(j(\omega+1))$$

چون $G(j\omega)$ در شکل ح۴٫۳۰ نمایش داده شده است. از معادله ی فوق واضح است که $x(j\omega)$ همانطوری که در شکل ح۴٫۳۰ نمایش داده شده است، می باشد.



شکل ح۴٫۳۰

بنابراین

$$x(t)=\frac{2\sin}{\pi t}$$

(ب) $x_1(j\omega)$ در شکل ح۴٫۳۰ نمایش داده شده است.

۴٫۳۱) (الف) نشان دهید که هر سه سیستم LTI دارای پاسخ ضربه های زیر

$$h_1(t)=u(t)$$
$$h_2=-2\delta(t)+5e^{-2}u(t)$$
$$h_3(t)=2t^{-t}u(t)$$

به ورودی $x(t)$ پاسخ یکسانی دارند.

(ب) پاسخ ضربه یک سیستم LTI دیگر بیابید که همین پاسخ را بـه ورودی $\cos t$ بدهـد. ایـن مسئله نشان می دهد که پاسخ به $\cos t$ را نمی توان برای مشخص کردن کامل یـک سیـستم LTI بـه کار برد.

حل:

(الف) داریم:

$$x(t)=\cos t \xleftrightarrow{FT} x(j\omega)=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]$$

(i) داریم:

$$h_1(t)=u(t) \xleftrightarrow{FT} H_1(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

بنابراین:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H_1(j\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-1)]$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\sin(t)$$

(ii) داریم:

$$h_2(t)=-2\delta(t)+5e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{FT} H_2(j\omega)=-2+\frac{5}{2+j\omega}$$

بنابراین:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H_1(j\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\sin(t)$$

(iii)
$$h_3(t)=2te^{-t}u(t) \xleftrightarrow{FT} H_2(j\omega)=\frac{2}{(1+j\omega)^2}$$

بنابراین:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H_1(j\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\sin(t)$$

(ب) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه:

$$h_4(t)=1/2\,[h_1(t)+h_2(t)]$$

پاسخ مشابه $x(t)=\cos t$ را خواهد داشت. می توانیم دیگر پاسخ هـای ضـربه ی مـشابهی را بـا ترکیب خطی و اسکیل $h_1(t)$ و $h_2(t)$ و $h_3(t)$ پیدا کنیم.

٤,۳۲) یک سیستم LTI، سیستم s، با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید.

$$h(t)=\frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}$$

خروجی s را به ازای ورودیهای زیر بیابید.:

(الف) $x_1(t)=\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)$

(ب) $x_2(t)=\sum^{\infty} k=\circ\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt)$

(ج) $x_3(t)=\frac{\sin 4(t+1)}{\pi(t+1)}$

(د) $x_4(t)=\left(\frac{\sin\ 2t}{\pi t}\right)^2$

حل:

توجـه کنیـد کـه $h(t)=h_1(t-1)$ کـه $h_1(t)=\frac{\sin 4t}{\pi t}$، تبـدیل فوریـه $h_1(t)$ عبارتـست از: $H_1(j\omega)$ در شکل S.٤,۳۲ نشان داده شده است.

از شکل بالا واضح است که $h_1(t)$ پاسخ ضربه یک فیلتر پائین گذر ایده آل است که بانـد گـذر آن در بازه $|\omega|<4$ قرار دارد. بنابراین، $h(t)$ پاسخ ضربه یک فیلتر پائین گذرانیده آل است که بـه انـدازه ۱ واحد به سمت راست شیفت یافته است. بااستفاده از خاصیت شیفت:

$$H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega|<4 \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(الف) داریم:

$$x_1(j\omega)=\pi e^{j\pi/12}\delta(\omega-6)+\pi e^{j\pi/12}\delta(\omega+6)$$

واضح است که:

$$Y_1(j\omega)=x_1(j\omega)H(j\omega)=\circ \Rightarrow y_1(t)=\circ$$

این نتیجه به این معنی است که $x_1(j\omega)$ در باند گذر $H(j\omega)$ صفر است.

(ب) داریم:

$$x_2(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\sum_{k=\circ}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)\{\delta(\omega-3k)-\delta(\omega+3k)\}\right]$$

بنابراین:

$$Y_2(j\omega)=x_2(j\omega)H(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)\{\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)\}e^{-j\omega}\right]$$

که بیان می دارد که:

$$y_2(t)=\tfrac{1}{2}\sin(3t-1)$$

نتیجه مشابهی با توجه به اینکه تنها یک سینوسی با فرکانس ۳ در $x_2(j\omega)$ در باند گذر $H(j\omega)$ واقع شده است.

(ج) داریم:

$$x_3(j\omega)=\begin{cases} e^{j\omega} & |\omega|<4 \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$Y_3(j\omega)=(j\omega)H(j\omega)=x_3(j\omega)e^{-j\omega}$$

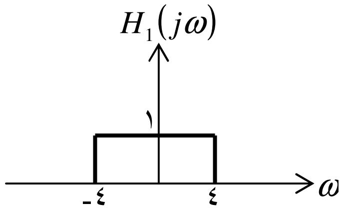
که بیان می دارد:

$$y_3(t)=x_3(t-1)=\frac{\sin 4t}{\pi t}$$

نتیجه مشابهی با توجه به اینکه $x_3(j\omega)$ در باند گذر $H(j\omega)$ قرار دارد، بدست آورد.

(د) $x_4(j\omega)$ در شکل ح۴٫۳۲ نشان داده شده است.

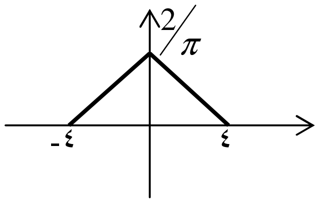
بنابراین



$$Y_4(j\omega)=x_4(j\omega)H(j\omega)$$
$$=x_4(j\omega)e^{-j\omega}$$

که بیان می کند:

$$y_4(t) = x_4(t-1) = \left(\frac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)} \right)^2$$



شکل ح ۴,۳۲

می توان نتایج مشابهی با توجه به اینکه $x_4(j\omega)$ در باند گذر $H(j\omega)$ واقع شـده اسـت، بدسـت آورد.

٤,٣٣) ورودی و خروجی یک سیستم LTI علی بامعادله دیفرانسیل زیر به هم مربوط اند.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{d\ y(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

(الف) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = te^{-2t}u(t)$ را بیابید.

(ج) بند (الف) را برای سیستم LTI علّی زیر توصیف شده با معادله زیر تکرار کنید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{d\ y(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله ی دیفرانسیل داده شده، بدست می آوریم:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{2}{-\omega^2 + 2j\omega + 8}$$

با استفاده از بسط به کسرهای جزئی خواهیم داشت:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 4}$$

با گرفتن عکس فوریه:

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

(ب) از سیگنال داده شده بدست می آوریم:

$$x(j\omega)=\frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

بنابراین

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=\frac{2}{\left(-\omega^2+2j\omega+8\right)}\frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

با استفاده از روش بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$y(t)=\tfrac{1}{4}e^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{2}te^{-2t}u(t)+t^2e^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{4}e^{-4t}u(t)$$

(ج) باگرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{2\left(-\omega^2-1\right)}{-\omega^2+\sqrt{2}j\omega+1}$$

با استفاده از بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$H(j\omega)=2+\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{2}j}{j\omega-\dfrac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}}+\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{2}j}{j\omega-\dfrac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}}$$

با استفاده از تبیل فوریه عکس معکوس:

$$h(t)=2\delta(t)-\sqrt{2}(1+2j)e^{-(1+j)t/\sqrt{2}}u(t)-\sqrt{2}(1-2j)e^{-(1-j)t/\sqrt{2}}u(t)$$

٤,٣٤) پاسخ فرکانسی سیستم LTI پایدار S به صورت زیرست

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{6-\omega^2+5j\omega}$$

(الف) معادله دیفرانسیلی را که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستم S را به هم مرتبط می کند، بنویسید.

(ب) پاسخ ضربه $h(t)$ سیستم S را بیابید.

(ج) خروجی $y(t)$ به ازای ورودی زیر را بیابید.

$$x(t)=e^{-4t}u(t)-te^{-4t}u(t)$$

حل:

(الف) داریم:

$$\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{j\omega+4}{6-\omega^2+5j\omega}$$

با طرفین وسطین وعکس تبدیل فوریه داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\delta\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$$

(ب) داریم:

$$H(j\omega)=\frac{2}{2+j\omega}-\frac{1}{3+j\omega}$$

با گرفتن عکس تبدل فوریه داریم:

$$h(t)=2e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

(ج) داریم:

$$x(j\omega)=\frac{1}{4+j\omega}-\frac{1}{(4+j\omega)^2}$$

بنابراین

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{(4+j\omega)(2+j\omega)}$$

با یافتن بسط کسرهای جزئی و گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\tfrac{1}{2}e^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{2}e^{-4}u(t)$$

٤,۳۵) در این مسئله مثالهایی از اثر تغییر غیر خطی در نظر می گیریم.

(الف) یک سیستم LTI پیوسته در زمان، با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید

$$H(j\omega)=\frac{a-j\omega}{a+j\omega}$$

که در آن $a>0$، دامنـه $H(j\omega)$ چقدرسـت؟ فـاز $\triangleleft H(j\omega)$ چقدرسـت؟ پاسـخ ضـربه ایـن سیستم را به دست آورید.

(ب) خروجی سیستم بند (الف) را به ازای $a=1$ و ورودی زیر بیابید.

$$\cos\left(t/\sqrt{3}\right)+\cos+\cos\left(\sqrt{3}\,t\right)$$

ورودی و خروجی را به طور تقریبی رسم کنید.

حل:

(الف) از اطلاعات داده شده:

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{\sqrt{a^2+w^2}}{\sqrt{a^2+w^2}} = 1$$

و نیز

$$\circ\, H(j\omega) = -tg^{-1}\frac{\omega}{a} - tg^{-1}\frac{\omega}{a}$$

$$tg^{-1} = -2tg^{-1}\frac{\omega}{a}$$

و نیز

$$H(j\omega) = -1 + \frac{2a}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow h(t) = -\delta(t) + 2a\,e^{-at}u(t)$$

(ب) با یافتن بسط کسرهای جزئی قسمت (الف)، و گرفتن عکس تبدیل فوریه:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$$

٤,۳۷) سیگنال $x(t)$ شکل م ٤-۳۷ را در نظر بگیرید.

(الف) تبدیل فوریه $x(t)$ را بیابید.

(ب) سیگنال زیر را رسم کنید.

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k)$$

(ج) یک سیگنال $g(t)$ بیابید که همانند $x(t)$ نباشد ولی برای آن

$$\tilde{x}(t) = g(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k)$$

(د) نشاندهیدکه هر چند $G(j\omega)$ و $G(j\omega)$ متفاوت اند، ولی به ازای هر k صحیح $G\left(j\frac{\pi k}{2}\right)=X\left(j\frac{\pi k}{2}\right)$. برای پاسخ به این سئوال لازم نیست $G(j\omega)$ را حساب کنید.

حل:

(الف) توجه کنید که

$$x(t)=x_1(t)*x_1(t)$$

$$x_1(t)=\begin{cases}1 & |\omega|<1/2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

و نیز تبدیل فوریه $x(t)$ که عبارتست از $x(j\omega)$ برابر است با:

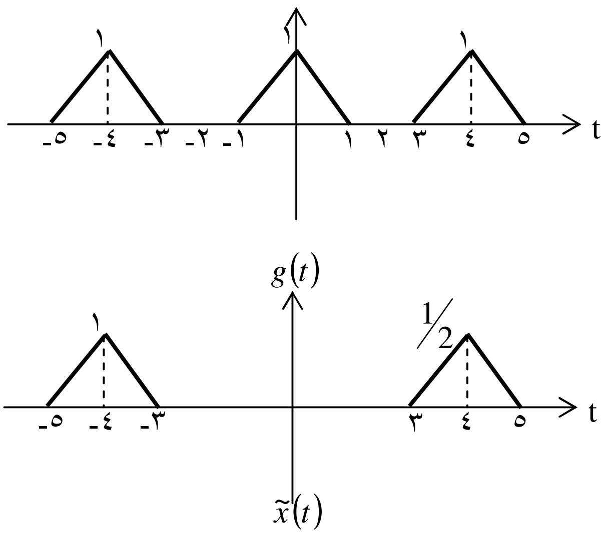
$$x_1(j\omega)=2\frac{\sin \omega/2}{\omega}$$

با استفاده از خاصیت کانولوشن داریم:

$$x(j\omega)=x_1(j\omega)x_1(j\omega)$$

$$=\left[2\frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\right]^2$$

(ب) سیگنال $\tilde{x}(t)$ در شکل ح٤,۳۷. نشان داده شده است:



شکل ح٤,۳۷

(ج) یک انتخاب ممکن برای $g(t)$ در شکل S٤,۳۷ نشان داده شده است.

(د) توجه کنید که

$$\tilde{x}(j\omega)=x(j\omega)\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(j\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

$$G(j\omega)\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(j\left(\omega-k\pi/2\right)\right)$$

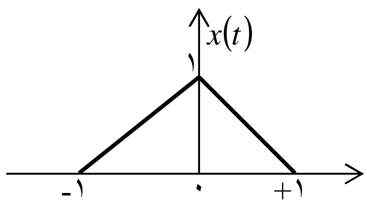
که آن را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\tilde{x}(j\omega)=\frac{\pi}{2}\sum x\left(jk/2\right)\delta\left(j\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}G\left(jk\pi/2\right)\delta\left(j\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

واضح است که این تنها در صورتی امکان دارد که:

$$G\left(jk\pi/2\right)=x\left(j\pi k/2\right)$$

٤,۳۸) $x^2(t)$ را سیگنال دلخواهی با تبـدیل فوریـه $X(j\omega)$ فـرض کنیـد. خاصـیت جابجـایی فرکانسی تبدیل فوریه را می توان به شکل زیر بیان کرد



شکل م ٤-۳۷

(الف) با اعمال جابجایی فرکانسی به معادله تجزیه تبدیل فوریه زیر، خاصیت جابجـایی فرکانـسی را ثابت کنید.

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

(ب) خاصیت جابجایی فرکانسی را با استفاده از تبدیل فوریه $e^{j\omega_\circ t}$ و خاصیت ضرب تبدیل فوریه ثابت کنید.

حل:

(الف) با بکارگیری شیفت فرکانسی برای معادله آنالیز داریم:

$$x(j)(\omega-\omega_\circ)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j(\omega-\omega_\circ)t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{+j\omega_\circ t}e^{-j\omega t}dt$$
$$=FT\left[x(t)e^{j\omega_\circ t}\right]$$

(ب) داریم:

$$\omega(t)=e^{j\omega_\circ t}\xleftrightarrow{FT}w(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_\circ)$$

همچنین

$$x(t)\omega(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}[x(j\omega)*\omega(j\omega)]$$
$$=x(j\omega)*\delta(\omega-\omega_\circ)$$
$$=x(j(\omega-\omega_\circ))$$

....

٤,۳۹) تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را $X(j\omega)$ فرض کنید. سیگنال $g(t)$ را مـشکل $X(j\omega)$ در ظنر بگیرید.

یعنی

$$g(t)=X(jt)$$

(الف) نشان دهید تبدیل فوریه $G(j\omega)$ همشکل $2\pi x(-t)$ است، یعنی

$$G(j\omega)=2\pi x(-\omega)$$

(ب) با استفاده از این که

$$\Im\{\delta(t+B)\}=e^{jB\omega}$$

و نتیجه بند (الف) نشان دهید

$$\Im\{e^{jBt}\}=2\pi\delta(\omega-B)$$

حل:

(الف) از معادله آنالیز تبدیل فوریه داریم:

$$G(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(jt)e^{-j\omega t}dt$$

(ح۱-۴,۳۹.)

و نیز از معادله عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(j\omega)e^{j\omega t}dtu$$

با تعویض t , ω داریم:

$$x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(jt)e^{j\omega t}dut$$

این معادله را به صورت زیر نیزز می توان نوشت:

$$2\pi x(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(jt)e^{-j\omega t}dt$$

با جایگذاری در معادله (ح۱-۴,۳۹) داریم:

$$G(j\omega)=2\pi x(-\omega)$$

(ب) اگر در قسمت (الف) داشته باشیم $x(t)=\delta(t+B)$، در اینصورت می توان نتیجه گرفت $g(t)=x(jt)=e^{jBt}$ و $G(j\omega)=2\pi x(-\omega)=2\pi\delta(-\omega+B)=2\pi\delta(\omega-B)$.

۴,۴۰) با استفاده از خواص تبدیل فوریه واستقراء ریاضی نشان دهید که تبدیل فوریه سیگنال زیر

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ a>0$$

عبارت است از

$$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

حل:

هنگامیکه $n=1$ باشد، $x_1(t)=e^{-at}u(t)$ و $x_1(j\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega}$ خواهد بود.

هنگامیکه $n=2$ باشد، $x_2(t)=te^{-at}u(t)$ و $x_2(j\omega)=\dfrac{1}{(a+j\omega)}$ خواهد بود.

حال، فرض کنیم که حالت داده شده برای $n=m$ درست باشد، یعنی

$$x_m=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{FT}x_m(j\omega)=\frac{-1}{(1+j\omega)m}$$

برای $n=m+1$ می توان از دیفرانسیل در حوزه فرکانس استفاده کرد و نوشت:

$$x_{m+1}(t)=\frac{t}{m}x_m(t)\xleftrightarrow{FT}x_{m+1}(j\omega)=\frac{1}{m}j\frac{dx_m(j\omega)}{d\omega}$$
$$=\frac{1}{(1+j\omega)^{m+1}}$$

که نشان می دهد که اگر فرض کنیم که حالت داده شده برای $n=m$ درست باشد، در اینصورت برای $n=m+1$ نیز صحیح خواهد بود. بدلیل اینکه نشان دادیم ک حالت داده شده برای $n=2$ نیز صحیح است، می توانیم برای $n=2+1$ و $n=3+1$ و ... نیز بحث کنیم. بنـابراین حالـت داده شـده برای هر n ای صحیح است.

(پانوشت مترجم: توجه شود که در این مسئله از استقراء ریاضی استفاده شده است).

۴,۴۱) (الف) داریم:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}[x(j\omega)*Y(j\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\theta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega\right]d\theta$$

(ب) با استفاده از خاصیت شیفت فرکانسی تبدیل فوریه می توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega=e^{j\theta t}y(t)$$

(ج) با ترکیب نتایج قسمتهای (الف) و (ب):

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\theta)e^{j\theta t}y(t)d\theta$$
$$=y(t)\frac{+1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\theta)e^{j\theta t}d\theta$$
$$=y(t)x(t)$$

....

٤,٤٢) فرض کنید

$$g_2(t)=\{[\sin(\omega_\circ t)]x(t)\}*h(t) \quad , \quad g_1(t)=\{[\cos(\omega_\circ t)]x(t)\}*h(t)$$

یک سیگنال حقیقی متناوب و $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI علّی است.

(الف) مقدار $\omega_\circ$ و شرایط لازم $H(j\omega)$برای داشتن روابط زیر را تعیین کنید.

$$g_2(t)=g_m\{a_5\} \quad , \quad g_1(t)=\Re e\{a_5\}$$

(ب) یک $h(t)$تعیین کنید، به نحوی که $H(j\omega)$ شرایطی را که در بند (الف) گذاشته ایم ارضا کند. ٤-٣٢ فرض کنید.

$$g(t)=x(t)\cos^2 t*\frac{\sin t}{\pi\, t}$$

$x(t)$ را حقیقی بگیرید به نحوی که در $|\omega|\geq 1$ داشته باشیم $X(j\omega)=\circ$. نشان دهید که یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان S وجود دارد، به نحوی که

$$x(t)\xrightarrow{S} g(t)$$

حل:

$x(t)$ سیگنالی متناوب با ضرایب سری فوریه a_k می باشد. فرکانس پایه $x(t)$ برابر است با $\omega_f=100^{rad/\sec}$. از بخش ٤,٢ می دانیم که تبدیل فوریه $x(t)$ عبارتست از:

$$x(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-100k)$$

(الف) بدلیل این که:

$$y_1(t)=x(t)\cos(\omega_\circ t)\xleftrightarrow{FT}Y_1(j\omega)=\frac{1}{2}[x(\omega-\omega_\circ)]+x(j(\omega+\omega_\circ))$$

داریم:

$$Y_1(j\omega)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[a_k\delta(\omega-100k-\omega_\circ)+a_k\delta(\omega-100k+\omega_\circ)]$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[a_{-k}\delta(\omega+100k-\omega_\circ)+a_k\delta(\omega-100k+\omega_\circ)]$$

اگر $\omega_\circ=500$، در اینصورت سری فوق با $k=5$ به صورت زیر خواهد بود:

$$x_{a-5}\delta(\omega)+\pi\, a_5\delta(\omega)$$

چون؛ $x(t)$ حقیقی است $a_k = a_{-k}^*$، بنابراین، بیان معادله بالا بـه صـورت $2\pi \operatorname{Re}\{a_5\}\delta(\omega)$ در خواهـد آمـد کـه ضـربه ای در $\omega = ۰$ مـی باشـد. توجـه نمائیـد کـه تبـدیل فوریـه معکوس $2\pi \operatorname{Re}\{a_5\}\delta(\omega)$ برابر $g_1(t) = \operatorname{Re}\{a_5\}$ می باشد. بنابراین، نیاز داریم تـا $H(j\omega)$ را بـه گونه ای بیابیم که:

$$Y_1(j\omega) = \theta_1(j\omega) = 2\pi \operatorname{Re}\{a_5\}\delta(\omega)$$

به راحتی $H(j\omega)$ را بـا توجـه بـه سـایر جمـلات (جملاتـی غیـر از $k=5$) در سـری معادلـه (S٤,٤٢) نتیجه ضربه در $\omega = 100m$ و $m \neq ۰$ بدست آوریم. بنابراین، می تـوانیم هـر $H(j\omega)$ را که برای و $\omega = 100m$ و $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ صفر است انتخاب کنیم:

بطور مشابه چون

$$y_2(t) = x(t)\sin(\omega_\circ t) \xleftrightarrow{FT} Y_2(j\omega)$$
$$= \frac{1}{2j}\{x(j(\omega-\omega_\circ)) - x(j(\omega+\omega_\circ))\}$$

داریم:

$$Y_2(j\omega) = \frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[a_k\delta(\omega-100k-\omega_\circ) - a_k\delta(\omega-100k+\omega_\circ)\right]$$
$$= \frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[a_{-k}\delta(\omega+100k-\omega_\circ) - a_k\delta(\omega-100k+\omega_\circ)\right]$$

اگر $\omega_\circ = 500$، آنگاه جملات در مجموع فوق با $k=5$ برابرند با:

$$\frac{\pi}{j}a_{-5}\delta(\omega) - \frac{\pi}{j}a_5\delta(\omega)$$

چون $x(t)$ حقیقی است $a_k = a_{-k}^*$. بنابراین بیان فوق به صورت $2\pi I_m\{a_5\}\delta(\omega)$ خواهد شـد، که ضربه ای در $\omega = ۰$ می باشد. توجه نمائید که تبدیل فوریه معکوس $2\pi \operatorname{Im}\{a_5\}\delta(\omega)$ برابر است با: $g_2(t) = \operatorname{Im}\{a_5\}$. بنابراین، نیاز به یافتن $H(j\omega)$ای به صورت زیر می باشیم:

$$Y_2(j\omega)H(j\omega) = G_2(j\omega) = 2\pi \operatorname{Re}\{a_5\}\delta(\omega)$$

به راحتی بـا توجـه بـه سـایر جمـلات (جملاتـی غیـر از $k=5$) در مجمـوع سـری (S٤,٤٢-٢) $H(j\omega)$را نتیجه در $\omega = 100m$ و $m \neq ۰$ بدست آوریم. بنابراین، می تـوانیم هـر $H(j\omega)$ای را برای $\omega = 100m$ و $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$، انتخاب کنیم.

(ب) یک مثال برای $H(j\omega)$ درست، می تواند پاسخ ضربه یک فیلتر پائین گذر ایده آل، بهره باند گذر واحد و فرکانس قطع $50^{rad/\sec}$ باشد. در این مورد داریم:

$$h(t)=\frac{\sin 50t}{\pi t}$$

٤,٤٣) فرض کنید

$$g(t)=x(t)\cos^2 t*\frac{\sin t}{\pi t}$$

$x(t)$ را حقیقی بگیرید به نحوی که در $|\omega|\geq 1$ داشته باشیم $X(j\omega)=0$. نشان دهید که یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان S وجود دارد، به نحوی که

$$x(t)\xrightarrow{S}g(t)$$

حل:

چون

چون $y_1(t)=\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$

بدست می آوریم:

$$Y_1(j\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\delta(\omega-2)+\pi/2\,\delta(\omega+2)$$

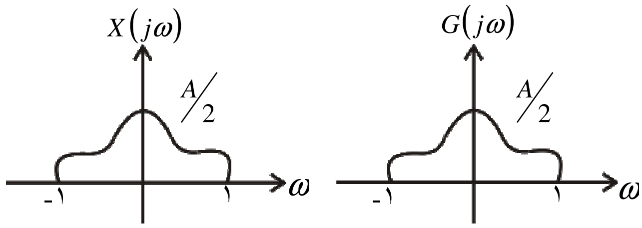
بنابراین:

$$y_2(t)=x(t)y_1(t)=x(t)\cos^2 t\xleftrightarrow{FT}Y_2(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\{x(j\omega)*Y_1(j\omega)\}$$

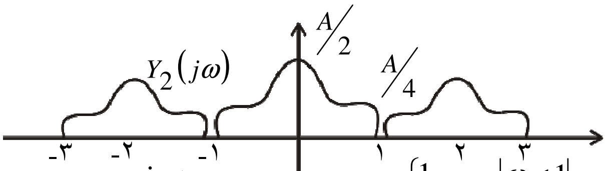
که می دهد:

$$Y_2(j\omega)=\frac{1}{2}x(j\omega)+\frac{1}{4}x(j(\omega-2))+\frac{1}{4}x(j(\omega+2))$$

$x(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)$ در شکل ح٤,٤٣. نشان داده شده است.



شکل ح۴۳,٤.



حال:

$$y_3(t)=\frac{\sin t}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}Y_3(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega<1| \\ \circ & other\ wise\end{cases}$$

همچنین:

$$g(t)=y_2(t)*y_3(t)\xleftrightarrow{FT}G(j\omega)=Y_2(j\omega)Y_3(j\omega)$$

از شکل ح۴۳,٤. واضح است که

$$G(j\omega)=\frac{1}{2}x(j\omega)$$

بنابراین یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)$ می توانـد بـرای بدسـت آوردن $g(t)$ از $x(t)$ مورد استفاده قرار بگیرد.

٤,٤٤) خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI علّی، با معادله زیر به ورودی $x(t)$ آن مرتبط شده است.

$$\frac{d\,y(t)}{d\,t}+10y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-x(t)$$

که در آن $z(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$

(الف) پاسخ فرکانسی این سیستم، $H(j\omega)=Y(j\omega)/X(j\omega)$، را بیابید.

(ب) پاسخ ضربه این سیستم را پیدا کنید.

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله دیفرانسیل داده شده دادیم:

$$Y(j\omega)[10+j\omega]=x(j\omega)[z(j\omega)-1]$$

بدلیل اینکه $z\{j\omega\}=\frac{1}{1+j\omega}+3$ از معادله بالا بدست می آوریم:

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)}$$

(ب) نسبط کسرهای جزئی $H(j\omega)$ را بدست آورده و عکس تبدیل فوریه آن را بدست می آوریم داریم:

$$h(t)=\frac{1}{9}e^{-t}u(t)+\frac{17}{9}e^{-10t}u(t)$$

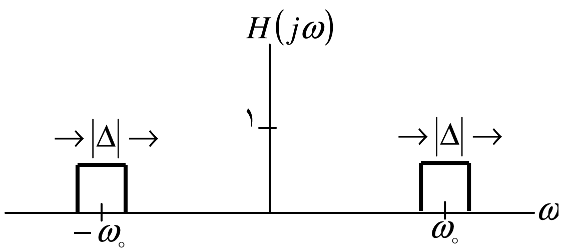
٤,٤٥) در بخش ٤-٣-٧ طی مبحث قضیه پارسئوال برای سیگنالهای پیوسته در زمان نشان دادیم که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega$$

یعنی انتگرال گیری از $|X(j\omega)|^2$ روی تمام فرکانسها می توان کل انرژی موجود در سیگنال را به دست آورد. حال سیگنال حقیقی $x(t)$ رادر نظر بگیرید که توسط فیلتر میانگذار ایده آل $H(j\omega)$ شکل م ٤-٤٥ پردازش می شو. انرژی سیگنال خروجی $y(t)$ را به صورت انتگرال فرکانسی $|X(j\omega)|^2$ بیان کنید.

Δ را به قدر کافی کوچک فرض کنید، طوری که بتوان $H(j\omega)$ در یک فاصله فرکانسی به پهنای Δ را تقریباً ثابت دانست. نشان دهید که انرژی خروجی فیلتر میان گذار تقریباً با $\Delta|X(j\omega_\circ)|^2$ متناسب است.

بر مبنای نتیجه فوق $\Delta|X(j\omega_\circ)|^2$ با انرژی سیگنال در پهنای باند Δ حول فرکانی ω_c متناسب است.بر مبنای نتیجه فوق $\Delta|X(j\omega_\circ)|^2$ را غالباً طیف چگالی انرژی سیگنال $x(t)$ می نامند.



$x(t)\rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow y(t)$

شکل م ٤-٤٥

حل:

داریم:

$$y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)$$

از رابطه پارسئوال، انرژی کل $y(t)$ عبارتست از:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\omega)|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\omega)|^2|H(j\omega)|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_\circ-\Delta/2}^{-\omega_\circ+\frac{\Delta}{2}}|x(j\omega)|^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_\circ-\frac{\Delta}{2}}^{\omega_\circ+\frac{\Delta}{2}}|x(j\omega)|^2d\omega$$

$$E\approx\frac{1}{2}|x(-j\omega_\circ)|^2\Delta+\frac{1}{2\pi}|x(j\omega_\circ)|^2\Delta$$

برای $x(t)$ حقیقی؛ $|x(j\omega_\circ)|^2$؛ بنابراین:

$$E=\frac{1}{\pi}|x(j\omega_\circ)|^2\Delta$$

٤،٤٦) در بخش ٤-٥-١ کاربرد مدولاسیون دامنه ای باحامل نمایی مختلط در ساختن فیلتر میانگذار را دیدیم. سیستم درشکل ٤-٢٦ نشان داده شده است و اگر تنها بخش حقیقی $f(t)$ را نگه داریم، معادل فیلتر میانگذار شکل ٤-٣٠ است. در شکل م ٤-٤٦ تحقق یک فیلتر میانگذار با استفاده از مدولاسیون سینوسی و فیلتر پایین گذر نشان داده شده است. نشان دهید که خروجی $y(t)$ این سیستم با بخش حقیقی خروجی سیستم شکل ٤-٢٦، یعنی $\Re e\{(f)\}$ یکسان است.

حل:

فرض کنید $g_1(t)$ پاسخ $H_1(j\omega)$ به $x(t)\cos\omega_c t$ باشد. و همچنین $g_2(t)$ پاسخ $H_2(j\omega)$ به $x(t)\sin\omega_c t$ باشد. در اینصورت با مراجعه به

شکل ٤،٣٠ : $y(t)=x(t)e^{j\omega_c t}=x(t)\cos_c t+jx(t)\sin\omega_c t$

و $\omega(t)=g_1(t)+jg_2(t)$

همچنین

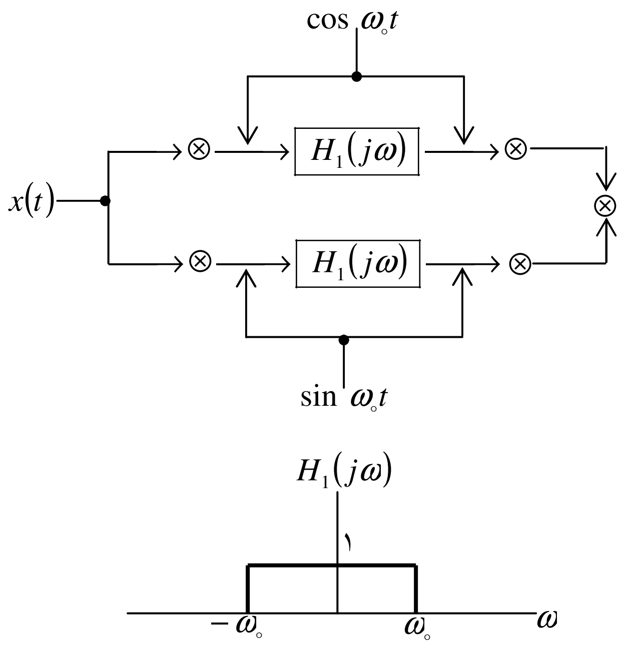
$$f(t) = -e^{-j\omega_c t} \omega(t) = [\cos\omega_c t - j\sin\omega_c t][g_1(t) + jg_2(t)]$$

بنابراین:

$$\mathrm{Re}\{f(t)\} = g_1(t)\cos\omega_c t + g_2(t)\sin\omega_c t$$

٤,٤٧) یکی از خواص پاسخ فرکانسی سیستمهای LTI پیوسته در زمان، با پاسخ ضربه $h(t)$ حقیقی و علّی، این است که قسمت حقیقی $H(j\omega)$ یعنی $\Re e\{H(j\omega)\}$، $H(j\omega)$ را به طور کامل مشخص می کند. این خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی نام دارد و در این مسئله بعضی نتایج ضمنی آن بررسی می شود.

–



(الف) با بررسی سیگنال $h_e(t)$، که قسمت زوج $h(t)$ است، خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی را ثابت کنید. تبدیل فوریه $h_e(t)$ چیست؟ چگونه می توان $h(t)$ را از $h_e(t)$ به دست آورد.

(ب) بخش حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم علّی عبارت است از

$$\Re e\{H(j\omega)\} = \cos\omega$$

$h(t)$ را بیابید.

(ج) نشان دهید که به ازای همه مقادیر t بجز $t=0$، می توان $h(t)$ را از $h_o(t)$، یعنی قسمت فرد $h(t)$، به دست آورد. اگر $h(t)$ در $t=0$ تابع تکین [$\delta(t)$، $u_1(t)$، $u_2(t)$ و غیره] نداشته باشد، می توان مقدار $h(t)$ را در $t=0$، مقدار محدود دلخواهی فرض کرد بدون اینکه پاسخ فرکانسی زیر تغییر کند.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

به این ترتیب نشان دهید که قسمت موهومی $H(j\omega)$ نیز $H(j\omega)$ را به طور کامل مشخص می کند.

حل:

(الف) داریم:

$$h_e(t) = \frac{h(t)+h(-t)}{2}$$

چون $h(t)$ کازال می باشد، قسمتهای غیر صفر $h(t)$ و $h(-t)$ تنها در $t=0$ روی هم می افتند، بنابراین:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ h_e(t) & t=0 \\ 2h_e(t) & t>0 \end{cases} \qquad (\text{ح}٤,٤٧)$$

همچنین از جدول ٤,١ داریم:

$$he(t) \xleftrightarrow{FT} \mathrm{Re}[H(j\omega)]$$

$R_e[H(j\omega)]$ داده شده است پس می توانیم $he(t)$ را بدست آوریم. از $h_e(t)$ دوباره می توانیم $h(t)$ را تحت پوشش قرار دهیم. (و مکرراً $H(j\omega)$ را از معادله (١-٤٧-S٤) بدست می آوریم.) بنابراین $H(j\omega)$ به طور کامل به $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$ اختصاص یافته است.

(ب) اگر $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = \cos = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}$

در این صورت:

$$he(t) = \frac{1}{4}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$$

(ج) داریم:

$$h_{\circ}(t) = \frac{h(t) + h(-y)}{2}$$

چون $h(t)$ کازال است. اجزاء غیر صفر $h(t)$ و $h(-t)$ تنها روی $t = \circ$ همپوشانی دارند و $h_{\circ}(t)$ تنها در $t = \circ$ صفر خواهد بود. بنابراین:

(ح۲-٤,٤٧)

$$h(t) = \begin{cases} \circ & t < \circ \\ \text{نامعلوم} & t = \circ \\ 2h_{\circ}(t) & t > \circ \end{cases}$$

همچنین از جدول ٤,١ داریم:

$$h_{\circ} \xleftrightarrow{FT} \mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$$

$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$ داده شده است پس می توان $h_{\circ}(t)$ را بدست آورد. از $h_{\circ}(t)$، می توانیم $h(t)$ را بجز برای $t = \circ$ ، با استفاده از معادله (٢-S٤,٤٧) پوشش دهیم. اگر در $t = \circ$ هیچ نقطه ی تکینی در $h(t)$ وجود داشته باشد، در اینصورت $H(j\omega)$ توسط $h(t)$ زوج اگر $h(\circ)$ نامعلوم باشد، پوشش داد. بنابراین $H(j\omega)$ در این مورد فقط به $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$ اختصاص یافته است.

٤,٤٨) یک سیستم با پاسخ ضربه علّی $h(t)$ در نظر بگیرید که در $t = \circ$ تکینی نداشته باشد. در مسئله ٤-٤٧ دیدیم که بخش حقیقی یا موهومی $H(j\omega)$ آن را به طور کامل تعیین می کند. در این مسئله رابطه صریحی بین $H_R(j\omega)$ و $H_I(j\omega)$، یعنی بخشهای حقیقی و موهومی $H(j\omega)$ به دست می آوریم.

(الف) ابتدا توجه کنید که چون $h(t)$ علّی است می توان نوشت

$$h(t) = h(t)u(t) \qquad \text{(م ٤-٤٨-١)}$$

بجز احتمالاً در $t=0$. چون $h(t)$ در $t=0$ تابع تکین ندارد، تبدیل فوریه دو طرف معادلـه (م ٤-٤٨-۱) باید یکسان باشد. با استفاده از مطلب فوق و خاصیت ضرب نشان دهید که

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(j\eta)}{\omega-\eta}d\eta \qquad \text{(م ٤-٤٨-٢)}$$

بـا اسـتفاده از معادلـه فـوق، $H_R(j\omega)$ را بـر حـسب $H_I(j\omega)$ و $H_I(j\omega)$ را برحـسب $H_R(j\omega)$ بیان کنید.

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d \qquad \text{(م ٤-٤٨-٣)}$$

تبدیل هیلبرت نامیده می شود. که بـرای پاسـخ ضـربه حقیقـی و علّـی $h(t)$، بخـشهای حقیقـی و موهومی تبدیل فوریه را می توان به کمک تبدیل هیلبرت، به یکدیگر ربط داد.

حال معادله (م ۳-٤٨-۳) را در نظر بگیرید و $y(t)$ را خروجی یک سیستم عبارت است از

$$G(j\omega)=\begin{cases}-j, & \omega>0\\ j, & \omega<0\end{cases}$$

(ج) تبدیل هیلبرت سیگنال $x(t)=\cos 3t$ را به دست آورید.

حل:

(الف) با استفاه از خاصیت ضرب داریم:

$$h(t)=h(t)u(t)\xleftrightarrow{FT}H(j\omega)*\left[\frac{1}{\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

طرف راست تساوی فوق را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$H(j\omega)=\frac{1}{2}H(j\omega)+\frac{1}{2\pi j}\left[H(j\omega)*\frac{1}{\omega}\right]$$

یعنی

$$H(j\omega)=\frac{1}{\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(j\eta)}{\omega-y}dy$$

با شکستن $H(j\omega)$ به قسمتهای حقیقی و موهومی داریم:

$$H_R(j\omega)+jH_I(j\omega)=\frac{1}{\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_R(jy)+jH_I(jy)}{\omega-y}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_I(jy)}{\omega-n}dy$$

با مقایسه قسمت حقیقی و موهومی در دو طرف داریم:

$$H_R(j\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_I(jy)}{\omega-y}dy \quad \text{و} \quad H_I(j\omega)=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_R(jy)}{\omega-y\ \ dy}$$

(ب) از (م۳,٤,٤۸) می توان نوشت:

$$y(t)=x(t)*\frac{1}{\pi t}\Rightarrow Y(j\omega)=x(j\omega)FT\left\{1/_{\pi t}\right\}$$

(ح۱-.٤,٤۸.)

و نیز از جدول ٤,۲ داریم:

$$u(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

بنابراین

$$2u(t)-1\xleftrightarrow{FT}2\frac{1}{j\omega}$$

با استفاده از خاصیت دوگان، داریم:

$$\frac{2}{jt}\xleftrightarrow{FT}[2u(-\omega)-1]$$

و یا

$$\frac{1}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}j[2u(-\omega)-1]$$

بنابراین از معادله (ح۱-٤,٤۸.) داریم:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)$$

که

$$H(j\omega)=j[2u(-\omega)-1]=\begin{cases}-j & \omega>0\\ +j & \omega<0\end{cases}$$

(ج) فرض کنید $y(t)$ تبدیل هیبرت $x(t)=\cos 3t$ در اینصورت:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=x[\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)]H(j\omega)=-j\pi\delta(\omega-3)+j\pi\delta(\omega+3)$$

بنابراین:

$$y(t)=\sin(3t)$$

۴،۴۹) $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI پیوسته در زمان است، $H(j\omega)$ را حقیقـی، زوج و مثبت فرض کنید. همچنین فرض کنید که

$$\max_{\omega}\{H(j\omega)\} = H(0)$$

(الف) نشان دهید

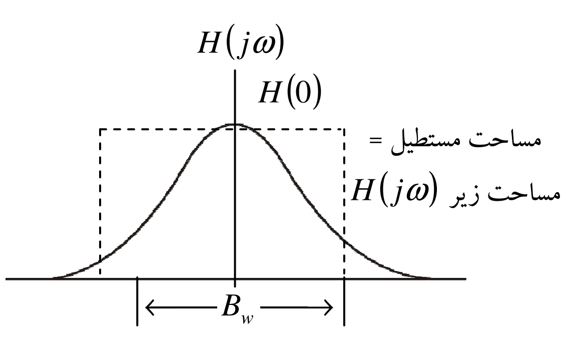
(i) پاسخ ضربه $h(t)$ منتفی است.

(ii) $\max\{|h(t)|\} = h(t)$.

راهنمایی: اگر $f(t,\omega)$ تابع مختلطی از دو متغیر باشد، آنگاه

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\omega) \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t,\omega) d\omega|\right|$$

(ب) یکی ز مفاهیم مهم در تحلیل سیستم، پهنای باند سیستم LTI اسـت. بـرای تعریـف ریاضـی پهنای باند راههای گوناگونی وجود دارد، اما اساس همه این تعریفها این ایده کیفی و حسی اسـت کـه در فاصله ای مقدار $G(j\omega)$ بزرگ است، سیگنالهای نمایی مختلط از سیستم (می گذرند). پهنای ایـن فاصله عبور سیگنال پهنای باند نامیده می شود. این ایده در فصل ٦ واضح تر می شود، ولی فعلاً بـرای سیستمهایی به پاسخ فرکانسی آنها خواص قبلاً بیان شده برای $G(j\omega)$ را دارد، یک پهنای باند خـاص تعریف می کنیم. یکی از تعاریف پهنای باند B_w بـرای چنـین سیـستمی، پهنـای مـستطیلی بـه ارتفـاع $H(j0)$ است، به شرطی که مساحت آن با سطح زیر $H(j\omega)$ برابر باشد. این مطلب در شکل ٤-٤٩ (الف) تصویر شده است. چون $H(j0) = \max_{\omega} H(j\omega)$، فرکانسهای داخل باند نـشان داده شـده در شکل، فرکانسهای داخل باند نشان داده شده در شکل، فرکانسهایی اند کـه بـه ازای آنهـا $H(j\omega)$ بیشترین مقادیر را دارد. البته انتخاب دقیق این پهنا تا حدی دلخواه است، ما در اینجا تعریفی را پذیرفته ایم تا بتوانیم سیستمهای مختلف را با هم مقایسه و یک رابطه مهم بین زمان و فرکانس را به دقت بیـان کنیم.



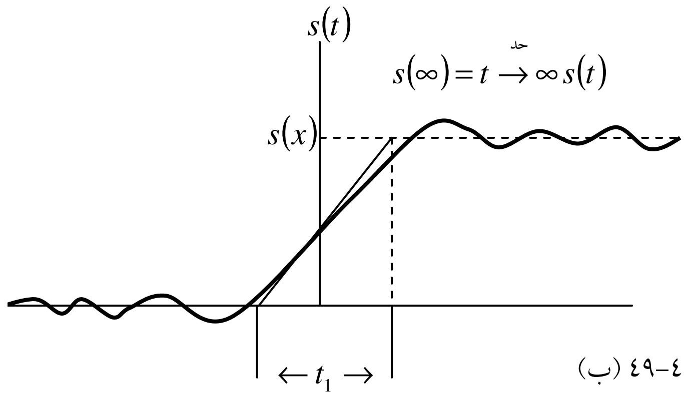
شکل م ٤-٤٩ الف

پهنای باند سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر چقدرست؟

$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ \circ, & |\omega|>W\end{cases}$$

(ج) پهنای باند B_w را برحسب $H(j\omega)$ بنویسید.

(د) $s(t)$ را پاسخ پله سیستم بند (الف) بگیرید. یکی از معیارهای مهم سرعت پاسخ سیستم زمان صعود آن است، که آن هم یک تعریف کیفی است و بنابراین می توان تعاریف ریاضی مختلفی برای آن ارائه داد. در اینجا یکی از این تعاریف را به کار می بریم. زمان صعود، به طور شهودی سرعت رسیدن پاسخ سیستم از صفر به مقدار نهایی زیرست.



شکل م ٤-٤۹ (ب)

پس هر چه زمان زمان صعود کمتر باشد، سیستم سریعتر است. برای سیستم مورد بررسی زمان صعود را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$t_r=\frac{s(\infty)}{h(\circ)}$$

چون

$$s'(t)=h(t)$$

دیدیم که $\max_1 h(t)=h(\circ)$، پس می توان t_r را به صورت زمانی که طول می کشد تا خروجی با ماکزیمم سرعت $s(t)$ از به $s(\infty)$ برسد، تعبیر کرد. این مطلب در شکل م ٤-٤٩ (ب) تصویر شده است.

برای t_r عبارتی بر حسب $H(j\omega)$ بیابید.

(هـ) با ترکیب نتایج بندهای (ج) و (د) نشان دهید که

$$B_w t_r = 2\pi \qquad \text{(م ٤-٤٩-١)}$$

پس نمی توانیم پهنای باند و زمان صعود را به طور مستقل مشخص کنیم. مثلاً اگر بخواهیم سیستم سریعی داشته باشیم (t_r کوچک) بنا به معادله (م ٤-٤٩-١) باید سیستمی با پهنای باند بزرگ انتخاب کنیم. این مصالحه ی اساسی است که در بسیار از مسائل مربوط به طراحی سیستمهای اهمیت کلیدی دارد.

حل:

(الف) (i) چون $H(j\omega)$ حقیقی و زوج است، $h(t)$ نیز حقیقی و زوج است.

(ii)
$$|h(t)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(j\omega)|e^{j\omega t}d\omega$$

چون $H(j\omega)$ حقیقی و مثبت است.

$$|h(t)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=h(\circ)$$

بنابراین

$$\max[|h(t)|]=h[\circ]$$

(ب) پنهانی باند این سیستم برابر است با 2ω.

(ج) داریم: ناحیه زیر $B_\omega H(j\circ)$

بنابراین:
$$B_\omega=\frac{1}{H(j\circ)}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega$$

(د) داریم:

$$t_r=\frac{s(\infty)}{h(\circ)}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega}=\frac{H(j\circ)}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega}=\frac{2\pi}{B\omega}$$

(هـ) بنابراین

$$B_\omega t_r B_\omega \frac{2\pi}{B\omega} = 2\pi$$

٤,٥٠) در مسائل ۱–٤٥ و ۲–٦٧ بعضی تابع همبستگی راتعریف و بعضی خواص آن را بررسی کردیم. در این تابع همبستگی مقابل $x(t)$ و $y(t)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

به همین ترتیب می توان توابع $\phi_{yx}(t)$، $\phi_{xx}(t)$، و $\phi_{yy}(t)$ را تعریف کرد. [دو تابع آخری به ترتیب توابع خود همبستگی $x(t)$ و $y(t)$ نام دارند.]. $\Phi_{xy}(j\omega)$، $\Phi_{yx}(j\omega)$، $\Phi_{xx}(j\omega)$، و $\Phi_{yy}(j\omega)$ را به ترتیب تبدیل فوریه $\Phi_{xy}(j\omega)$ و $\Phi_{yx}(j\omega)$ چه رابطه ای دارند؟

(الف) $\Phi_{xy}(j\omega)$ و $\Phi_{yx}(j\omega)$ چه رابطه ای دارند؟

(ب) $\Phi_{xy}(j\omega)$ را برحسب $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ به دست آورید.

(ج) نشان دهید که $\Phi_{xx}(j\omega)$، برای همه مقادیر ω حقیقی و غیر منفی است.

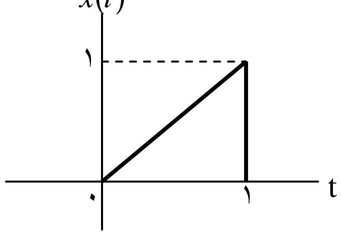
(د) حال فرض کنید $x(t)$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه حقیقی و پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ بیابید.

(هـ) $x(t)$ را به صورت شکل م ٤–٥٠ بگیرید و فرض کنید پاسخ ضربه سیستم LTI، $h(t) = e^{-at}u(t)$ با $a > ۰$ است. با استفاده از نتایج بندهای (الف) تا (د) $\Phi_{xy}(j\omega)$، $\Phi_{xx}(j\omega)$، و $\Phi_{yy}(j\omega)$ را بیابید.

(و) فرض کنید تبدیل فوریه تابع $\phi(t)$ به صورت زیرست

$$\Phi(j\omega) = \frac{\omega^2 + 100}{\omega^2 + 25}$$

پاسخ ضربه دو سیستم LTI علی و پایدار، با تابع خود همبستگی $\phi(t)$ را بیابید. کدام یک از این دو سیستم وارون پایدار و علّی دارد؟



شکل م ٤–٥٠

حل:

(الف) از مسئله های ۱٫٤۵ و ۲٫۹۷ می دانیم ک:

$$\phi_{xy}(t) = \phi_{yz}(-t)$$

بنابراین

$$\phi_{xy}(j\omega) = \phi_{yx}(-j\omega)$$

چون $\phi_{yx}(t)$ حقیقی است، داریم:

$$\phi_{xy}(j\omega) = \phi_{yz}^{*}(j\omega)$$

(ب) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau \\ &= x(t) * y(-t)\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\phi_{xy}(j\omega) = x(j\omega)Y(-j\omega)$$

چون $y(t)$ حقیقی است می توان نوشت:

$$\phi_{xy}(j\omega) = x(j\omega)Y^{*}(j\omega)$$

(ج) با استفاده از نتایج قسمت (ب) با $y(t) = x(t)$:

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(j\omega) &= x(j\omega)x^{*}(j\omega) \\ &= |x(j\omega)|^{2} \geq ٠\end{aligned}$$

(د) از قسمت ب داریم:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(j\omega) &= \phi(j\omega)Y^{*}(j\omega) \\ &= x(j\omega)[H(j\omega)x(j\omega)]^{*} \\ &= \phi_{xx}(j\omega)H^{*}(j\omega)\end{aligned}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned}\phi_{yy}(t) &= Y(j\omega)Y^{*}(j\omega) \\ &= [H(j\omega)x(j\omega)][H(j\omega)x(j\omega)]^{*} \\ &= \phi_{xx}(j\omega)|H(j\omega)|^{2}\end{aligned}$$

(هـ) از اطلاعات داده شده، داریم:

$$(j\omega)=\frac{e^{-j\omega}-1}{\omega^2}-j\frac{e^{-j\omega}}{\omega}$$

و

$$H(j\omega)=\frac{1}{\propto+j\omega}$$

بنابراین:

$$\phi_{xx}(j\omega)=|x(j\omega)|^2=\frac{2-2\cos\omega}{\omega^4}-\frac{2\sin\omega}{\omega^2}$$

$$\phi_{xy}(j\omega)=\phi_{xx}(j\omega)H^*(j\omega)=\left[\frac{2-2\cos\omega}{\omega^2}-\frac{2\sin\omega}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\right]\left[\frac{1}{\propto-j\omega}\right]$$

و

$$\phi_{yy}(j\omega)=\phi_{xx}(j\omega)|H(j\omega)|^2=\left[\frac{2-2\cos\omega}{\omega^4}-\frac{2\sin\omega}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\right]\left[\frac{1}{\propto^2+\omega^2}\right]$$

(و) نیاز داریم که:

$$|H(j\omega)|^2=\frac{\omega^2+100}{\omega^2+25}$$

انتخاب برای کازال و پایدار کردن $H(j\omega)$ عبارتست از:

$$H_1(j\omega)=\frac{10+j\omega}{5+j\omega} \quad \text{و} \quad H_2(j\omega)=\frac{10-j\omega}{5+j\omega}$$

پاسخ ضربه متناظر برابر است با:

$$h_1(t)=\delta(t)+5e^{-5t}u(t)$$

$$h_2(t)=-\delta(t)+15e^{-5t}u(t)$$

تنها سیستم با پاسخ ضربه $h_1(t)$ یک جواب پایدار و کازال و معکوس پذیر است.

٤,٥١) (الف) دو سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ و $g(t)$ فرض کنید، و آنها را وارون یکدیگر بگیرید.

همچنین پاسخ فرکانسی این سیستمها را $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ فرض کنید. رابطه بین $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ را بیابید.

(ب) سیستم LTI پیوسته در زمانی با **پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید.**

$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & 2<|\omega|<3\\ 0, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

(i) آیا می توان برای این سیستم یک ورودی $x(t)$ یا به نحوی که خروجی به صورت شکل م ٤-٥٠ باشد؟ اگر آری $x(t)$ را بیابید و اگر نه توضیح دهید چرا؟

(ii) آیا این سیستم وارون پذیرست؟ جواب خود را توضیح دهید.

(ج) تالاری را در نظر بگیرید که مشکل پژواک دارد. در مسئله ٢-٦٤ گفتیم که برای مدل اکوستیک تالار می توان یک سیستم LTI در نظر گرفت که پاسخ ضربه آن یک رشته ضربه است، ضربه k ام رشته با پژواک k ام متناظرست. در این مسئله، پاسخ ضربه را به صورت زیر فرض کنید.

$$h(t)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}\delta(t-kT)$$

عامل e^{-kT} تضعیف پژواک k ام را نشان می دهد.

برای اینکه بتوانیم صدا را با یک کیفیت خوب ضبط کنیم، باید سیگنال حس شده توسط دستگاه ضبط، را پردازش و پژواکها را حذف کنیم. در مسئله ٢-٦٤ با استفاده از روش کانولوشن، یک پردازنده نمونه و برای یک مدل پژواک متفاوت) طراحی کردیم. در این مسئله از روشهای حوزه فرکانس استفاده می کنیم. $G(j\omega)$ را پاسخ فرکانسی سیستم LTI پردازنده سیگنال صوتی دریافت شده فرض کنید. $G(j\omega)$ را به نحوی برگزینید که تمام پژواکها حذف شود و سیگنال حاصل، کاملاً مشابه سیگنال اصلی روی صحنه باشد.

(د) معادله دیفرانسیل سیستم وارون سیستمی با پاسخ ضربه زیر را بیابید.

$$h(t)=2\delta(t)+u_1(t)$$

(هـ) یک سیستم LTI ابتدائاً ساکن با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

وارون این سیستم هم ابتدائاً ساکن است و با یک معادله دیفرانسیل توصیف می شود. این معادله دیفرانسیل را بیابید. $h(t)$ و $g(t)$، یعنی پاسخ ضربه سیستم اصلی و سیستم وارون را به دست آورید.

حل:

(الف) $H(j\omega)= 1/G(j\omega)$.

(ب) (i) اگر خروجی را $y(t)$ نشان دهیم، در اینصورت داریم:

$$Y(j\circ)= 1/2$$

چون $H(j\circ)=\circ$، غیر ممکن است که داشته باشیم $Y(j\circ)=x(j\circ)H(j\circ)$. بنابراین نمی توان $x(t)$ ای را بیابیم که خروجی با متناسب شکل (م ٤,٥٠) بوجود آورد.

(ii) این سیستم معکوس پذیر نیست زیرا $1/H(j\omega)$ برای هیچ مقداری از ω، تعریف نشده است.

(ج) داریم:

$$H(j\omega)=\sum_{k=\circ}^{\infty}e^{-KT}e^{-j\omega KT}=\frac{1}{1-e^{-(1+j\omega)T}}$$

حال نیاز داریم تا برای $G(j\omega)$ داشته باشیم:

$$G(j\omega)=1-e^{-(1+j\omega)T}$$

(د) چون $H(j\omega)=2+j\omega$:

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{1}{2+j\omega}$$

با طرفین وسطین و گرفتن عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

(هـ) داریم:

$$H(j\omega)=\frac{-\omega^2+3j\omega+2}{-\omega^2+6j\omega+9}$$

بنابراین، پاسخ فرکانسی معکوس عبارتست از:

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=\frac{-\omega^2+6j\omega+9}{-\omega^2+3j\omega+2}$$

معادله دیفرانسیلی را که سیستم متناظر را توصیف می کند، عبارتست از:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

بااستفاده از بسط به کسرهای جزئی و اعمال عکس تبدیل فوریه، پاسخ ضربه را به صورت

$$h(t)=\delta(t)-3e^{-3t}u(t)+2te^{-3t}u(t)$$

و

$$g(t)=\delta(t)-e^{-2t}u(t)+4e^{-t}u(t)$$

داشته باشیم.

٤,٥٢) سیستمهای وارون معمولاً در مسائل مشتمل بر وسایل اندازه گیری کامل، کاربرد دارند. مثلاً یک وسیله اندازه گیری دمای مایع را در نظر بگیرید. مدل کردن این وسیله با یک سیستم LTI معقول به نظر می رسد این سیستم به خاطر مشخصات پاسخ عنصر اندازه گیری (مثلاً جیوه دماسنج)، به تغییرات دما به طور ناگهانی پاسخ نمی دهد. پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد به صورت زیرست

$$s(t)=\left(1-e^{-t/2}\right)u(t) \qquad \text{(م ٤-٥٢-١)}$$

(الف) یک سیستم جبرانساز طراحی کنید، که پاسخ آن به خروجی وسیله اندازه گیری دمای لحظه ای مایع را به دست دهد.

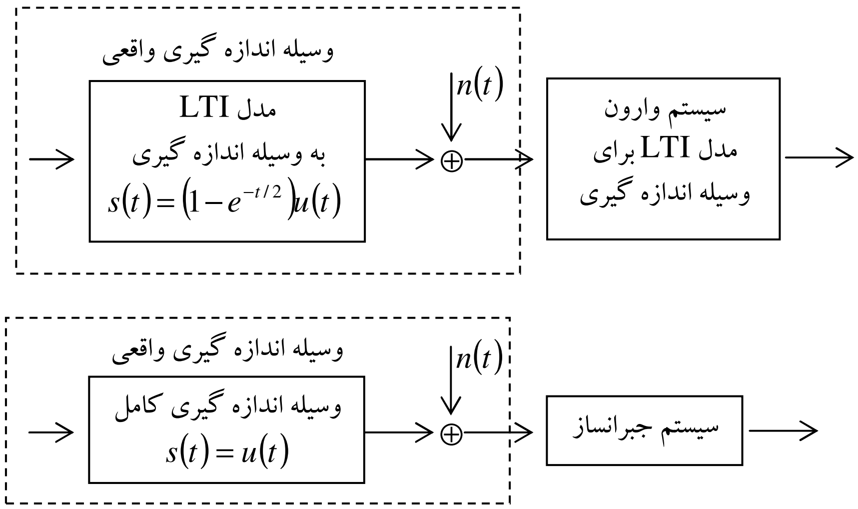
(ب) یکی از مشکلات کاربرد سیستمهای وارون به عنوان جبران ساز وسایل اندازه گیری این است که اگر خروجی واقعی وسیله اندازه گیری به خاطر پدیده های خطاآمیز وسیله خطا داشته باشد، دمای نشان داده شده می تواند خطای بزرگی داشته باشد. چون در سیستمهای حقیقی چنین خطایی همیشه وجود دارد، باید آنها را در نظر گرفت. برای روشن شدن مطلب یک وسیله اندازه گیری در نظر بگیرید که خروجی آن را بتوان به صورت مجموع پاسخ وسیله اندازه گیری مطابق معادله (٤-٥٢-١) و یک سیگنال «نویز» مزاحم $n(t)$ مدل کرد. شکل م ٤-٥٢ (الف) این وضعیت را نشان می دهد. در این شکل سیستم وارون بند (الف) هم گنجانده شده است. فرض کنید $n(t)=\sin \omega t$. سهم خروجی سیستم وارون چیست و با افزایش ω این خروجی چگونه تغییر می کند؟

(ج) مشکل مطرح شده در بند (ب) در بسیاری از کاربردهای سیستمهای LTI اهمیت دارد. در حقیقت باید بین سرعت پاسخ و توانایی سیستم در حذف تداخلهای فرکانس بالا مصالحه ای صورت گیرد. در بند (ب) دیدیم که این مصالحه ایجاب می کند که اگر بخواهیم سیگنالهای مزاحم سینوسی را

هم تقویت می کند. برای روشن شدن مطلب یک وسیله اندازه گیری در نظر بگیرید که بدون تأخیر بـه ورودی پاسخ دهد، ولی آلوده به نویز هم باشد. پاسخ این سیستم را مـی تـوان مطـابق شـکل م ٤-٥٢ (ب) به صورت مجموع پاسخ یک وسیله اندازه گیری کامل و سیگنال نـویز $n(t)$ مـدل کـرد. فـرض کنید بخواهیم مطابق شکل م ٤-٥٢ (ب) نیز تضعیف کند. پاسخ ضربه این سیـست جبـران سـاز را بـه صورت زیر فرض کنید.

$$h(t) = a\, e^{-at} u(t)$$

A را به نحوی برگزینید که پاسخ کل سیستم شکل م ٤-٥٢ (ب) به تغییرات پلـه ای دمـا تـا حـد امکان سریع باشد، ولی $n(t) = \sin 6t$ خروجی بزرگتر از $\frac{1}{4}$ ایجاد نکند.



شکل م ٤-٥٢

حل:

(الف) چون پاسخ پله $s(t)=\left(1-e^{-t/2}\right)u(t)$ می باشد، پاسخ ضربه عبارتست از:

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-t/2}u(t)$$

پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر است:

$$H(j\omega)=\frac{1/2}{1/2+j\omega}$$

حال می خواهیم برای سیستم فوق، معکوس بسازیم. بنابراین، پاسخ فرکانسی سیستم معکوس بایستی به صورت

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=2\left[1/2+j\omega\right]$$

با گرفتن تبدیل فوریه عکس، داریم:

$$g(t)=\delta(t)+2u_1(t)$$

(ب) وقتی $\sin \omega t$ از طریق سیستم معکوس انتقال یابد، خروجی برابر است با:

$$y(t) = \sin \omega t + 2\omega \cos \omega t$$

ملاحظه می کنیم که خروجی به صورت مستقیم به ω بستگی دارد. بنـابراین، چنانچـه ω افـزایش یابد، سهم خروجی بسته به نویز، افزایش خواهد یافت.

(ج) دراین مورد، نیاز داریم که $\left|H(j\omega)\right| \le 1/4$، وقتی که $\omega = 6$ – چون

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{a^2+\omega^2}$$

نیاز داریم که

$$\frac{1}{a^2+36} \le 1/16$$

بنابراین

$$a \le 6/\sqrt{15}$$

....

۴,۵۳) همانطور که در درس گفتیم، روشهای تحلیل فوریـه را مـی تـوان بـه سـیگنالهای دارای دو متغیر مستقل تعمیم داد. این روشها نیز مانند همتاهای یک بعدی شان نقشه مهمی در بعضی کاربردهـا، چون پردازش تصویر دارند. در این مسئله ایده های اولیه تحلیل فوریه دو بعدی را در نظر می گیریم. $x(t_1,t_2)$ را سیگنالی با دو متغیر مستقل t_1 و t_2 فرض کنید. تبدیل فوریه دو بعـدی $x(t_1,t_2)$ بـه صورت زیر تعریف می شود.

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1,t_2) e^{-j(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

(الف) نشان دهید که این انتگرال دو گانه را می توان به صورت دو تبدیل فوریه یک بعدی متوالی، ابتدا نسبت به t_1 (با فرض ثابت بودن t_2) و سپس نسبت به t_2 محاسبه کرد.

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) عکس تبـدیل ـ یعنـی $x(t_1,t_2)$ برحـسب $X(j\omega_1, j\omega_2)$ را بیابید.

(ج) تبدیل فوریه دو بعدی سیگنالهای زیر را بیابید.

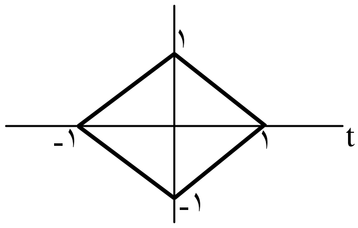
(i) $x(t_1,t_2) = e^{-t_1+2t_2} u(t_1-1) u(2-t_2)$

$$x(t_1,t_2)=\begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|}, & -1 < t_1 \le 1, -1 \le t_2 \le 1 \\ \circ \quad , & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

$$x(t_1,t_2)=\begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|}, & \circ < t_1 \le 1, -1 \le t_2 \le 1 \\ \circ \quad , & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

(iv) $x(t_1,t_2)$ شکل م ٤-۵۳

(v) $e^{-|t_1+t_2|-|t_1-t_2|}$



شکل م ٤-۵۳

(د) سیگنال $x(t_1,t_2)$ با تبدیل فوریه دو بعدی زیر را بیابید.

$$X(j\omega_1, j\omega_2)=\frac{2\pi}{4+j\omega_1}\delta(\omega_2-2\omega_1)$$

(هـ) $x(t_1,t_2)$ و $h(t_1,t_2)$ دو سیگنال دو بعدی با تبدیل فوریه های $X(j\omega_1, j\omega_2)$ و $H(j\omega_1, j\omega_2)$ بیابید:

i) $x(t_1-T_1\ ,\ t_2-T_2)$

ii) $x(at_1\ ,\ bt_2)$

iii) $y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1\ ,\ \tau_2)x(t_1-\tau_1\ ,t_2-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$

حل:

(الف) از تعریف داده شده، داریم:

$$x(j\omega_1, j\omega_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1,t_2)e^{-j(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)}dt_1 dt_2$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1,t_2)e^{-j\omega_1 t_1}dt_1\right]e^{-j\omega_2 t_2}dt_2$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega_1 t_2)e^{-j\omega_2 t_2}dt_2$$

(ب) از نتیجه قسمت (الف) می توانیم بنوییسم:

$$x(t_1,t_2)=FT_{\omega_1}^{-1}\left\{FT_{\omega_2}^{-1}\left(x(j\omega_1, j\omega_2)\right)\right\}=\frac{1}{4\pi_2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(j\omega_1, j\omega_2)e^{j(\omega_1 t_1+\omega_2+t_2)}d\omega_1 d\omega_2$$

(ج)

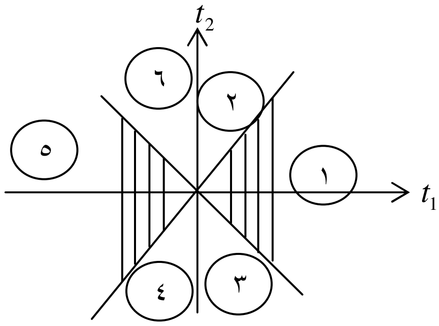
$$\text{(i)}\ \ x(j\omega_1,\omega_2)=\frac{e^{-(1+j\omega_1)}e^{2(2j\omega_2)}}{(1+j\omega_1)(2-j\omega_2)}$$

$$\text{(ii)}\ \ x(j\omega_1,\omega_2)=\frac{\left(1-e^{-(1+j\omega_1)}\right)\left(1-e^{-(1-j\omega_2)}\right)}{(1+j\omega_1)(1-j\omega_2)}+\frac{\left(1-e^{-(1+j\omega_1)}\right)\left(1-e^{-(1+j\omega_2)}\right)}{(1+j\omega_1)(1+j\omega_2)}$$

$$\text{(iii)}\ \ (x(j\omega_1,\omega_2)=\frac{2-e^{-(1+j\omega)}-e^{-(1+j\omega_2)}-\left(1-e^{-(1+j\omega_1)}\right)\left(1-e^{-(1+j\omega_2)}\right)}{(1+j\omega_1)(1+j\omega_2)}+\frac{1-e^{-(1+j\omega_1)}}{(1+j\omega_1)(1-j\omega_2)}+\frac{1-e^{-(1+j\omega_2)}}{(1-j\omega_1)(1+j\omega_2)}$$

$$\text{(iv)}\ \ x(\omega_1,\omega_2)=\frac{-1}{j\omega_2}\left[\frac{e^{-j\omega_2}\left(1-e^{j(\omega_1+\omega_2)}\right)+e^{-j(\omega_1-\omega_2)}-1}{-j(\omega_1-\omega_2)}\right]$$

(v) همانطور که در شکل ح۵۳. نشان داده شده است. ایـن سـیگنال ٦ ناحیـه مختلـف در (t_1,t_2) طرح دارد.



شکل ح۵۳

سیگنال $x(t_1,t_2)$ به صورت زیر است:

$$x(t_1, t_2)\begin{cases} e^{-2t_1} & \text{ناحیه ۱} \\ e^{-2t_2} & \text{ناحیه ۲} \\ e^{2t_2} & \text{ناحیه ۳} \\ e^{2t_2} & \text{ناحیه ۴} \\ e^{2t_1} & \text{ناحیه ۵} \\ e^{-2t_2} & \text{ناحیه ۶} \end{cases}$$

بنابراین:

$$x(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{(2+j\omega_1+j\omega_2)(2+j\omega_1-j\omega_2)}+\frac{1}{(2+j\omega_2)(2+j\omega_1+j\omega_2)}$$
$$+\frac{1}{(2-j\omega)(2+j\omega_1-j\omega_2)}+\frac{1}{(2-j\omega_2)(2-j\omega_1-j\omega_2)}$$
$$-\frac{1}{(2-j\omega_1-j\omega_2)(2-j\omega_1+j\omega_2)}+\frac{1}{(j\omega_2)(2-j\omega_1-j\omega_2)}$$

د) $x(t_1,t_2)=e^{-4(t_1+2t_2)}u(t+2t_2)$

هـ) (i) $e^{-j\omega_1T_1}e^{-j\omega_2T_2}x(j\omega_1,j\omega_2)$

(iii) $x(j\omega_1,j\omega_2)H(j\omega_1,j\omega_2)$