فصل دهم

تبدیلات Z

۱۰,۱) برای همگرا بودن جمعهای زیر $z=|z|$ باید چه شرطی را ارضا کند:

الف ـ $\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{-n}$

ب ـ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} z^{n}$

ج ـ $\sum_{n=\circ}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\} z^{-n}$

د ـ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)|n|\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) z^{-n}$

حل:

(الف) سری داده شده را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} 1/2\left(1/2\, r^{-1}\right)^n e^{-j\omega n}$$

با جایگذاری z با $re^{j\omega}$، اگر $r<\frac{1}{2}$ در اینصورت $\frac{1}{2}r^{-1}>1$ و تابع داخل سری با افزایش n نامحدود می شود. همچنین سری همگرا نمی شود. اما اگر $r>12$ باشد در اینصورت سری همگرا خواهد بود.

(ب) سری داده شده به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(2r)^n e^{j\omega n}$$

با تعویض z با $r>\frac{1}{2}$ باشد در اینصورت $2r>1$ خواهد بود و تابع داخل سری با افزایش n تا بی نایت افزایش می یابد. همچنین، سری همگرا نیست. اما اگر $r<\frac{1}{2}$ باشد سری همگرا می گردد.

(ج) سری را به شکل زیر می توان نوشت:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{r^{-n}+\left(-r\right)^{-n}}{2}e^{-j\omega n}$$

با تعویض z با $r>\frac{1}{2}$ باشد در اینصورت $2r>1$ خواهد بود و تابع داخل سری با افزایش n تا بی نهایت افزایش می یابد. همچنین، سری همگرا نیست. اما اگر $r<\frac{1}{2}$ باشد سری همگرا می گردد.

(ج) سری را به شکل زیر می توان نوشت:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{r^{-n}+\left(-r\right)^{-n}}{2}e^{-j\omega n}$$

با تعویض z و $re^{j\omega}$، اگر $r>1$ در اینصورت تابع داخل سری با افزایش n تا بی نهایت افزایش خواهد یافت. همچنین سری همگرا نیست. اما اگر $r<1$ باشد مجموع فوق همگرا خواهد بود.

(د) سری را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{2}r^{-1}\right)^{n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{\circ}\left(\frac{1}{2}r\right)^{-n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)e^{-j\omega n}$$

با تعویض z و $re^{j\omega}$. سری اول برای $r>1/2$ همگرا بوده و سری دوم برای $r<2$، بنابراین حاصل جمع دو سری تنها برای $1/2<r<2$ همگرا خواهد بود.

۱۰,۲) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n-3]$$

با استفاده از معادله (۳۰-۳) تبدیل z این سیگنال را بیابید، و ناحیه همگرایی آن را مشخص کنید.

حل:

با استفاده از معادله (۱۰,۳):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n-3] z^{-n}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} \left(1/5\right)^n z^{-n}$$
$$= \left(\frac{z^{-3}}{125}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(1/5\right)^n z^{-n}$$
$$= \left(\frac{z^{-3}}{125}\right) \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{5}$$

۱۰,۳) فرض کنید

$$x[n] = (-1)^n u[n] + a^n u[-n-n_0]$$

عدد مختلط a و عدد صحیح n_0 باید چه شرایطی را ارضا کنند، تا ناحیه همگرایی $X(z)$ به صورت زیر باشد.

$$1 < |z| < 2$$

حل:

با بهره گیری از معادله (۹,۳) به راحتی می توانیم نشان دهیم که:

$$a^n u[-n-n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{-z^{-n_{\pm 0}}}{1-a_z^{-1}} \;\; ; \; |z| < |\infty|$$

بدست می آوریم:

$$x(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{-z^{-n_0+1}}{1-a_z^{-1}} \qquad 1 < |z| < |a|$$

بنابراین بایستی $|a| = 2$ باشد. n_0 هر مقداری را بخود می تواند بگیرد.

۱۰,٤) سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), & n \le 0 \\ 0 \;, & n > 0 \end{cases}$$

قطبها و ناحیه همگرایی $X(z)$ را تعیین کنید.

حل:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)z^{-n}$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n}e^{j\pi/4}z^{-n}+\tfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n}e^{-j\pi/4}z^{-m}$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-n}e^{-j\pi n/4}z^{n}+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-n}e^{j\pi n/4}z^{n}$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{1-3e^{-j\pi/4}z}+\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{1-3e^{-j\pi/4}z}+\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{1-3e^{j\pi/4}z}\ ,\ |z|<\tfrac{1}{3}$$

قطبهای آن در $z=\frac{1}{3}e^{j\pi/4}$ و $z=\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}$ واقع شده اند.

۱۰,۵) برای هر یک از تبدیل z های د اده شده تعداد صفرهای متناهی و تعداد صفرهای واقع در بینهایت آن را تعیین کنید.

(الف) $$\frac{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

(ب) $$\frac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)}$$

(ج) $$\frac{z^{-2}\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

حل:

(الف) تبدیل z موردنظر را به صورت زیر می توان نوشت:

$$X(z)=\frac{z-\tfrac{1}{2}}{\left(z-\tfrac{1}{4}\right)\left(z-\tfrac{1}{3}\right)}$$

مشخصاً، $X(z)$، صفری در $z = 1/2$ دارد. چون $X(z)$ مرتبه چند جمله ای مخرج به اندازه (۱) مرتبه از مرتبه چند جمله ای صورت بیشتر است، $X(z)$ دارای صفری + ∞ می باشد.

بنابراین $X(z)$ دارای صفری در صفحه ی S محدود و صفری در بی نهایت می باشد.

(ب) تبدیل z موردنظر به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$X(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$$

واضح است که $X(z)$ صفرهایی را در $z = 1$ و $z = 2$ دارد. چون در $X(z)$ مرتبه ی چند جمله ای مخرج و صورت یکسان است. $X(z)$ هیچ صفری در بی نهایت ندارد. بنابراین $X(z)$ دو صفر محدود دارد و صفری در بی نهایت ندارد.

(ج) تبدیل z داده شده را به صورت زیر می توان نوشت:

$$X(z) = \frac{z-1}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)}$$

مشخص است، $X(z)$ صفری در $z = 1$ دارد. چون در $X(z)$ مرتبه صورت ۲ مرتبه بیشتر از مخرج دست $X(z)$ دو صفر در ∞ دارد. بنابراین $X(z)$ یک صفر در صفحه z محدود و ۲ صفر در بی نهایت دارد.

۱۰،٦) $x[n]$ را سیگنالی مطلقاً جمعپذیر با تبدیل z گویای $X(z)$ فرض کنید. می‌دانیم $X(z)$ قطبی در $z = \frac{1}{2}$ دارد. آیا $x[n]$ می‌تواند

(الف) سیگنالی با عمر محدود باشد؟

(ب) سیگنالی دست چپی باشد؟

(ج) سیگنالی دست راستی باشد؟

(د) سیگنالی دو طرفه باشد؟

حل:

خیر، از خاصیت ۳ در بخش ۱۰,۲ می دانیم که برای سیگنال، دامنه محدود، Roc، کل صفحه z می باشد. بنابراین، هیچ قطبی در صفحه z محدود برای سیگنال با دامنه محدود متصور نیست. مشخصاً در این مسئله این مورد نظر نیست.

(ب) خیر، چون سیگنال به صورت معین جمع پذیر می باشد، Roc باید شامل دایره واحد باشد. همچنین از آنجا که داده شده است که سیگنال قطبی در $z = 1/2$ دارد، Roc صحیح برای این سیگنال برابر است با $\frac{1}{2} < |z|$. از خاصیت ٤ بخش ۱۰,۲ می دانیم که این متناظر با یک سیگنال دست راستی است.

(د) صحیح؛ از آنجا که سیگنال بطور معین جمع پذیر است، Roc باید شامل دایره واحد باشد. مشخصاً یک Roc را تعریف می کنیم که شامل حلقه ای در صفحه ی z و شامل دایره واحد باشد. از خاصیت ٦ بخش ۱۰,۲ می توانیم نتیجه بگیریم که سیگنال دو طرفه است.

۱۰,۷) عبارت زیر تبدیل z سیگنال $x[n]$ است.

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

حل:

می‌توانیم سیگنالهای مختلفی را با تبدیل z داده شده با انتخاب ناحیه همگرایی بدست آوریم.

قطبهای تبدیل z عبارتند از:

$$z_\circ=\frac{1}{2}j \quad , \quad z_1=\frac{1}{2}j \quad , \quad z_2=\frac{1}{2}j \quad , \quad z_3=\frac{1}{2}j$$

بر اساس محل این قطبها، می توانیم از نواحی همگرایی زیر انتخاب کنیم:

(i) $\circ<|z|<\frac{1}{2}$

(ii) $1/2<|z|<\frac{3}{4}$

(iii) $z>\frac{3}{4}$

۱۰,۸) $x[n]$ سیگنالی است که تبدیل z گویای $X(z)$ آن قطبی در $z=\frac{1}{2}$ دارد. می‌دانیم که

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]$$

مطلقاً جمعپذیرست و

$$x_2[n]=\left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]$$

مطلقاً جمعپذیر نیست. تعیین کنید که $x[n]$ دست چپی است، دست راستی است، یا دو طرفه.

حل:

اگر $x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z), R$

در اینصورت از جدول ۱۰,۱ داریم:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n X[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X(4z)\ ,\ \frac{1}{4}R$$

,

$$\left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X(8z)\ \ ,\ \frac{1}{8}R$$

از آنجایی که $\frac{1}{4}R$ شامل دایره واحد می شود، و $X(z)$ قطبی در $z=\frac{1}{2}$ دارد، می توان نتیجه گرفت که R بنا به تعریف خارج دایره به شعاع $1/2$ می باشد. از آنجا که $1/8\,R$ شامل دایره واحد نیست، مشخص است که این مورد نظر نیست. بنابراین R حلقه ای در صفحه ی z است.

از خاصیت ٦ در بخش ۱۰,۲ می دانیم که $x[n]$ باید یک سیگنال دو طرفه باشد.

۱۰,۹) با استفاده از بسط به کسرهای جزیی و این که

$$a^n u[n]\overset{\mathrm{Z}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-az^{-1}}\,|z|>|a|,$$

عکس تبدیل z تابع زیر را بیابید

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}\ \ |z|>2$$

حل:

با بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$X(z)=\frac{2/9}{1-z^{-1}}+\frac{7/9}{1+2z^{-1}}\ ,\quad |z|>2$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$x[n]=\frac{2}{9}u[n]+7/9\,(-2)^n u[n]$$

۱۰,۱۰) عبارت جبری زیر تبدیل z سیگنال $x[n]$ است:

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

(الف) با فرض ناحیه همگرایی $|z|>\frac{1}{3}$ و بسط بـه سـری توانـایی مقـادیر $x[0]$، $x[1]$، و $x[2]$ را بیابید.

(ب) با فرض ناحیه همگرایی $|z|<\frac{1}{3}$ و بسط به سری توانی مقـادیر $x[0]$، $x[-1]$، و $x[-2]$ را بیابید.

حل:

(الف) چون $|x|>\frac{1}{3}$ می توانیم از تقسیمات متوالی برای بدست آوردن بسط سری توانی استفاده کنیم.

داریم:

$$1+\frac{1}{3}\mathfrak{I}^{-1}\Big)1+3^{-1}\left(1+\frac{2}{3}\mathfrak{I}^{-1}+\frac{2}{9}\mathfrak{I}^{-2}+\ldots\right)$$

$$\frac{1+\frac{1}{3}\mathfrak{I}^{-1}}{}$$

$$\frac{2}{3}\mathfrak{I}^{-1}+\frac{2}{9}\mathfrak{I}^{-2}$$

$$\frac{\frac{2}{9}\mathfrak{I}^{-2}+\frac{2}{27}\mathfrak{I}^{-3}}{\vdots}$$

با مقایسه $X(z)$ با تعریف تبدیل z در معادله (۱۰،۳) مشاهده می کنیم که:

$$x[\circ]=1 \quad , \quad x[1]=\frac{2}{3} \quad , \quad x[2]=\frac{-2}{9}$$

(ب) چون $|z|<\frac{1}{3}$، می توانیم از تقسیمات متوالی برای بدست آوردن سری توانی استفاده کنیم.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad 3^{-1}+1 \\ 1/3\,\mathfrak{I}^{-1}+1\overline{\big)3-6\mathfrak{I}+18\mathfrak{I}^{2}+\ldots} \\ \underline{3^{-1}+3} \\ -2 \\ \underline{-2-6\mathfrak{I}^{-1}} \\ \quad 6\mathfrak{I}^{-1} \\ \quad\vdots \end{array}$$

با مقایسه $X(z)$ با تعریف تبدیل z در معادله (p.۳) ملاحظه می شود که:

$$x[\circ]=3 \quad , \quad x[-1]=-6 \quad , \quad x[-z]=18$$

۱۰،۱۱) عکس تبدیل z تابع زیر را بیابید.

$$X(z)=\frac{1}{1024}\left[\frac{1024-z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right], \quad |z|>\circ$$

حل:

چون Roc شامل کل صفحه z است. می دانیم که سیگنال بایستی دامنه ی محدودی داشــته باشــد. از فرمول سری محدود داریم:

$$\frac{1}{2024}\left[\frac{1024-z^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]=\sum_{n=\circ}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}$$

با مقایسه با تعریف تبدیل z در معادله (۱۰,۳) داریم:

$$x[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & \circ\leq n\leq 9\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

۱۰,۱۲) با در نظر گرفتن تعبیر هندسی اندازه تبدیل فوریه از نمودار قطب صفر تعیین کنید هـر یک از تبدیل z های زیر تقریباً سیگنالی پایین‌گذر، یا بالاگذر را نشان می‌دهند:

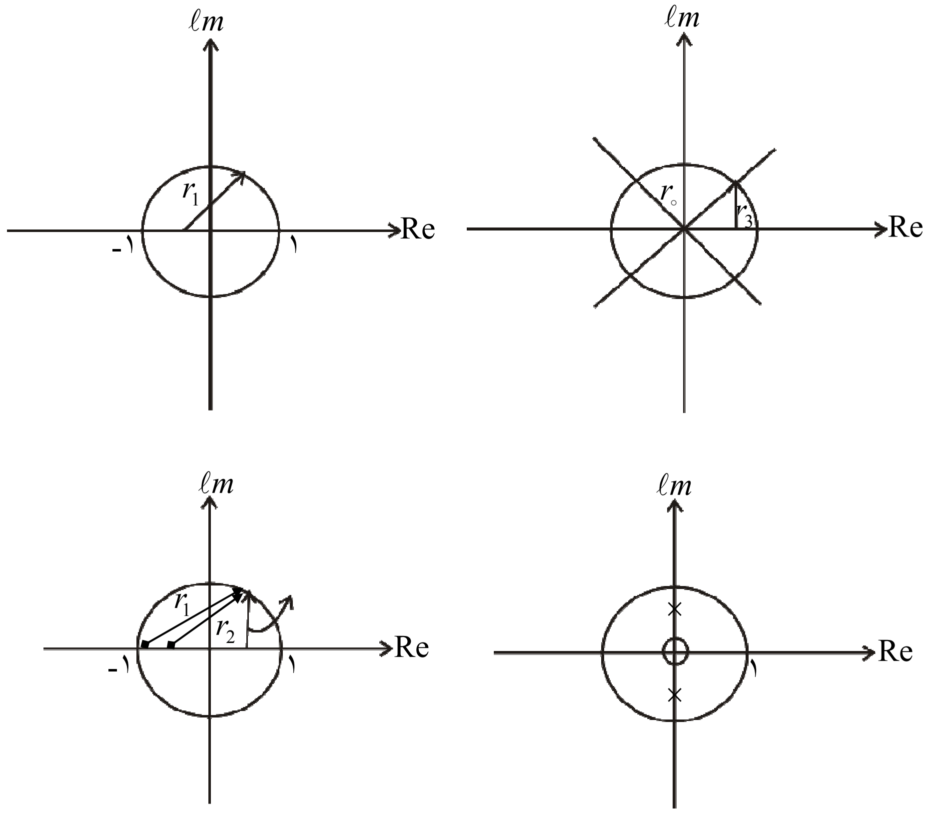
(الف) $X(z)=\dfrac{z^{-1}}{1+\frac{8}{9}z^{-1}} \qquad |z|>\dfrac{8}{9}$

(ب) $X(z)=\dfrac{1+\frac{8}{9}z^{-1}}{1-\frac{16}{9}z^{-1}+\frac{64}{81}z^{-2}} \qquad |z|>\frac{8}{9}$

(ج) $X(z)=\dfrac{1}{1+\frac{64}{81}z^{-2}} \qquad |z|>\dfrac{8}{9}$

حل:

طرحواره صفر ـ قطب برای هر سه تبدیل z در شکل S.۱۰,۱۲ نشان داده شده است:



شکل S.۱۰,۱۲

(الف) از بخش ۱۰,٤ می دانیم که اندازه تبدیل فوریه می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{\vec{v}_1} = \frac{1}{\text{طول } \vec{v}_1}$$

که $\vec{v}_1$ در شکل بالا نشان داده شده است. واضح است کـه بـرای مقـادیر کوچـک ω (ω نزدیـک صفر) طرف راست معادله بالا کوچک است. اما هنگامیکه ω نزدیک n است، طرف راست معادلـه ی بالا بزرگ می شود. بنابراین $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ تقریباً میانگذار است.

(ب) از بخش ۱۰,٤ می دانیم که ا ندازه تبدیل فوریه به صورت زیر بدست می آید:

$$\left|H_2\left(e\right)^{j\omega}\right| = \frac{\left(\text{طول } \vec{v}_1\right)\left(\text{طول } \vec{v}_2\right)}{\left(\text{طول } \vec{v}_3\right)}$$

طوری که $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ در شکل بالا نشان داده شده اند. واضح است که برای مقادیر کوچک ω (ω نزدیک صفر) صورت طرف راست معادله بالا بسیار بزرگ تـر از مخـرج آن مـی باشـد. بنـابراین $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ در نزدیکی $\omega = \circ$ بزرگ است. اما برای ω در نزدیکی π، مخرج معادله بالا بسیار بزرگ تر از صورت آن می باشد. بنـابراین $H_2\left(e^{j\omega}\right)$ در نزدیکـی $\omega = n$ کوچـک مـی گـردد. بنـابراین $H_2\left(e^{j\omega}\right)$ تقریباً پائین گذر است.

(ج) از بخش ۱۰،٤ می دانیم که اندازه تبدیل فوریه به صورت زیر بیان می شود:

$$\left|H_3\left(e\right)^{j\omega}\right| = \frac{\left(\text{طول } \vec{v}_1\right)^2}{\left(\text{طول } \vec{v}_2\right)\left(\text{طول } \vec{v}_3\right)}$$

که v_1 و v_2 و v_3 در شکل بالا نشان داده شده اند. واضح است که برای مقادیر کوچـک ω (ω نزدیک صفر) و برای ωی نزدیک π صورت معادله فوق بیشتر نزدیک مخرج می شود، اما هنگامیکـه $|\omega|$ نزدیک $\frac{\pi}{2}$ باشد، صورت معادلـه فـوق بـسیار بزرگتـر از مخـرج معادلـه مـی گـردد و در نتیجـه $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ در نزدیکی $\omega = \pi/2$ بزرگ است.

بنابراین $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ تقریباً میانگذار است.

۱۰،۱۳) سیگنال چهارگوش زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \circ \le n \le 5 \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فرض کنید

$$g[n] = x[n] - x[n-1]$$

(الف) سیگنال $g[n]$ را بیابید و تبدیل z آن را مستقیماً حساب کنید.

(ب) با توجه به این که

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k]$$

تبدیل $X(z)$ را به کمک جدول ۱۰-۱ تعیین کنید.

حل:

(الف) سیگنال $g[n]$ برابر است با: $g \geq [n] = \delta[n] - \delta[n-6]$

با استفاده از تعریف تبدیل z در معادله (۱۰,۳) داریم:

$$G(z) = 1 - e^{-6}$$

(ب) با استفاده از جدول ۱۰,۱ داریم:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k] \xleftrightarrow{z} x(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} G(z)$$

حداقل $|z| > 1$

بنابراین:

$$x(z) = \frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}} \qquad |z| > ٠$$

Roc برابر است با $|z| > ٠$ زیرا سیگنال $x[n]$ سیگنالی با دامنه محدود است.

۱۰,۱٤) سیگنال مثلثی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n] = \begin{cases} n-1, & 2 \leq n \leq 7 \\ 13-n, & 8 \leq n \leq 12 \\ ٠, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) $n_\circ$ را به نحوی تعیین کنید که

$$g[n] = x[n] * x[n-n_\circ]$$

که $x[n]$ سیگنال چهارگوش مسئله ۱۰-۱۳ است.

(ب) با استفاده از خواص کانولوشن و جابجایی زمانی و $X(z)$ به دست آمده در مسئله ۱۰-۱۳ $G(z)$ را بیابید. نشان دهید که جوابتان قضیه شرط اولیه را ارضا می‌کند.

حل:

(الف) می دانیم که $x[n]*x[n]$ سیگنالی مثلثی خواهد بود که اولین مقدار غیر صفر آن در $n = ٠$ رخ می دهد. بعلاوه، می دانیم که $x[n]*x[n-n_\circ]$ اولین مقدار غیر صفرش در $n = n_\circ$ می باشد. بنابراین $n_\circ = 2$.

(ب) از مسئله ۱۰,۱۳ داریم:

$$X(z)=\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}} \qquad |z|>0$$

با استفاده از خاصیت شیفت:

$$x[n-2]\overset{z}{\longleftrightarrow} z^{2}\,\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}} \qquad |z|>0$$

با استفاده از خاصیت کانولوشن

$$g[n]=x[n]*x[n-1]\overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-2}\left(\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}\right)^{2} \qquad |z|>0$$

از آنجا که

$$\lim_{z\to\infty} G(z)=0=g[0]$$

$G(z)$ مقدار اولیه قضیه را برآورده می کند.

۱۰,۱۵) فرض کنید

$$y[n]=\left(\frac{1}{9}\right)^{n}u[n].$$

دو سیگنال مختلف هر یک با تبدیل z، $X(z)$ بیابید که شرایط زیر را ارضا کند:

۱. $[X(z)+X(-z)]/2=Y(z^{2})$

۲. $X(z)$ در صفحه z تنها یک قطب و یک صفر داشته باشد.

حل:

با گرفتن تبدیل z از $y[n]$، داریم:

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{9}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{9}$$

حال با توجه به جدول ۱۰,۱ داریم:

$$y_1[n]=y_2[n]=\begin{cases} y[r] & n=2r \\ 0 & n\neq 2r \end{cases} \overset{z}{\longleftrightarrow} Y_1(z)=Y(z^{2});|z|>1/3$$

در اینصورت

$$y_1[\circ]=1 \ , \ y_1[1]=\circ \ , \ y_1[2]=\frac{1}{9} \ , \ y_1[3]=\circ \ , \ y_1[4]=\frac{1}{81} \ , \dots$$

که به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$y_1[n]=\frac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{3}\right)nu[n]+(-1)^n\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]\right]$$

اگر $x[n]$ را به صورت $\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]\right]$ انتخاب کنیم، داریم:

$$Y_1(z)=Y\left(z^2\right)=\left(\tfrac{1}{2}\right)[X(z)+X](-2)\ ; \ |z|>\tfrac{1}{3}$$

بعلاوه چون $X(z)$ تنها یک قطب و یک صفر دارد، این انتخاب برای $x[n]$ هر دو شرط را برآورده می نماید.

....

۱۰,۱۶) توابع سیستم زیر به سیستمهای LTI پایدار مربوطاند. بدون استفاده از عکس تبدیل z تعیین کنید که کدام با سیستمی علّی متناظرند.

(الف) $$\frac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

(ب) $$\frac{z-\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{16}}$$

(ج) $$\frac{z+1}{z+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{2}{3}z^{-3}}$$

حل:

برای یک سیستم کازال و پایدار، تبدیل z متناظر نباید هیچ قطبی خارج از دایره واحد داشته باشد.

(الف) تبدیل z یک قطب در بی نهایت دارد، بنابراین سببی نیست.

(ب) قطب های این تبدیل z در $z=\frac{1}{4}$ و $z=\frac{-3}{4}$ قرار دارند، بنابراین کازال می باشد.

(ج) تبدیل z یک قطب در $z=\frac{-4}{3}$ دارد، بنابراین سیستم کازال نیست.

۱۰,۱۷) پنج دانستنی را در مورد یک سیستم LTI خاص S با پاسخ ضربه $h[n]$ و تبدیل $zH(z)$ در نظر بگیرید.

۱. $h[n]$ حقیقی است.

۲. $h[n]$ دست راستی است.

۳. حد $\underset{z\to\infty}{} H(z)=1$

٤. $H(z)$ دو صفر دارد.

۵. یکی از قطبهای غیر حقیقی $H(z)$ روی دایره $|z|=\frac{3}{4}$ قرار دارد.

به دو سئوال زیر پاسخ دهید:

(الف) آیا S علّی است؟ (ب) آیا S پایدارست؟

حل:

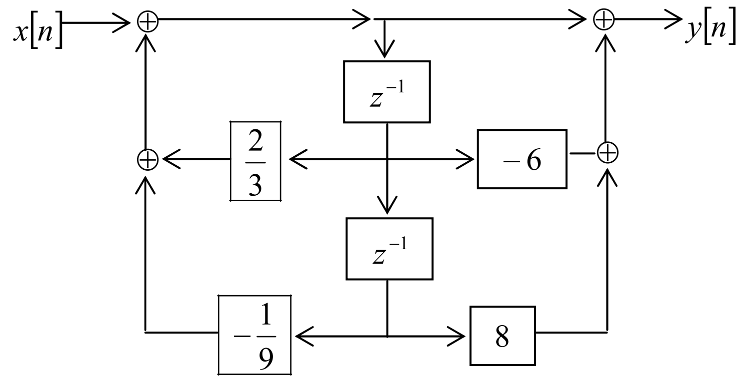
(الف) چون $\underset{z\to\infty}{Lim}=1$ و $H(z)$ هیچ قطبی در بی نهایت ندارد، بعلاوه چون $h[n]$ دست راستی می باشد، $h[n]$ باید کازال باشد.

(ب) چون $h[n]$ کازال است، چند جمله ای ها مخرج و صوت از مرتبه های یکسانی برخوردار هستند. چون $H(z)$ با دو صفر دارد، می توان نتیجه گرفت که بایستی دارای ۲ قطب نیز باشد.

چون $h[n]$ حقیقی است، قطبها بایستی در جفت مزدوج ها اتفاق بیافتند. همچنین داده شده است که یکی از قطب ها در روی دایره که به صورت $|z|=\frac{3}{4}$ تعریف می شود، قرار گرفت است. بنابراین قطب های دیگر نیز روی دایره ی مشابهی قرار گرفته اند.

مشخصاً، Roc برای $H(z)$ به صورت $|z|>\frac{3}{4}$ خواهد بود و شامل دایره ی واحد است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که سیستم پایدار است.

۱۰,۱۸) یک سیستم LTI علّی در نظر بگرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن توسط نمودار جعبه‌ای شکل م ۱۰–۱۸ به هم مرتبطاند.



شکل م ۱۰–۱۸

(الف) معادله تفاضلی ارتباط‌دهنده $y[n]$ و $x[n]$ را بیابید.

(ب) آیا سیستم پایدارست؟

حل:

(الف) با استفاده از آنالیز مثال ۱۰,۲۸ می توانیم نشان دهیم که:

$$H(z)=\frac{1-6_6^{-1}8_z^{-2}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}}$$

چون $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$، داریم:

$$Y(z)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}\right)=X(z)\left(1-6_2^{-1}+8_z^{-2}\right)$$

با گرفتن عکس فوریه داریم:

$$y(z)-\frac{2}{3}y[n-1]+\frac{1}{9}y[n-2]$$
$$=x[n]-6x[n-1]+8x[n-2].$$

ب) $H(z)$، فقط دو قطب دارد، و هر دو تای آنها در $z = 1/3$ واقع شـده انـد. چـون سیـستم کازال است، Roc یِ $H(z)$ به صورت $|z| > \frac{1}{3}$ خواهد بود. بدلیل اینکه Roc شامل د ایـره واحـد است، سیستم پایدار است.

....

۱۰,۱۹) تبدیل z یکطرفه سیگنالهای زیر را یافته، ناحیه همگرایی هر یک را مشخص کنید.

(الف) $x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+5]$

(ب) $x_2[n] = \delta[n+3] + \delta[n] + 2^n u[-n]$

(ج) $x_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

حل:

(الف) تبدیل z یکطرفه عبارتست از:

$$X(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n x[n+5] = n^{-n}$$

$$= \sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{4}\right)z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{4}$$

(ب) تبدیل z یک طرفه عبارتست از:

$$X(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\delta[n+3] + \delta[n] + 2^n[-n]\right)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\circ + \delta[n] + \delta[n]\right)z^{-n} \qquad all \quad z$$

تبدیل z یکطرفه برابر است با:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}z^{-n}=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}$$
$$=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

۱۰,۲۰) سیستمی با رابطه ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ زیر در نظر بگیرید

$$y[n-1]+2y[n]=x[n].$$

(الف) پاسخ ورودی ـ صفر این سیستم را به ازای $y[-1]=2$ بیابید.

(ب) پاسخ حالت ـ صفر این سیستم را به ازای ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$

(ج) خروجی سیستم در $n\geq 0$ را به ازای $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$ و $y[-1]=2$ بیابید.

حل:

با اعمال تبدیل z یکطرفه برای معادله دیفرانسیل داده شده، داریم:

$$z^{-1}Y(z)+y[-1]+2Y(z)=X(z)$$

(الف) برای پاسخ ورودی صفر، فرض کنید که $x[0]=0$. از آن جا که داده شده است $u[-1]=r$:

$$z^{-1}Y(z)+y[-1]+2Y(z)=0$$
$$\Rightarrow Y(z)=\frac{-1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}}$$

با گرفتن عکس تبدیل z

$$y[n]=-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

(ب) برای پاسخ حالات صفر قرار می دهیم $y[-1]=0$ بنابراین داریم

$$X(z)=Z\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$Y(z)=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{2}{2+z^{-1}}\right)$$

از بسط به به کسرهای جزئی و گرفتن عکس تبدیل z بدست می آوریم:

$$y[n]=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

(ج) پاسخ کلی مجموع پاسخ حالات صفر و پاسخ ورودی صفر است یعنی

$$y[n]=\frac{-2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

۱۰,۲۱) تبدیل z رشته‌های زیر را بیابید. نمودار قطب ـ صفر آن را رسم کرده، ناحیه همگرایـی آن را مشخص کنید. که تبدیل فوریه سیگنال وجود دارد یا نه.

(الف) $\delta[n+5]$

(ب) $\delta[n-5]$

(ج) $(-1)^{n}u[n]$

(د) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+3]$

(هـ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[-n-2]$

(و) $\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[3-n]$

(ز) $2^{n}u[-n]+\left(\frac{1}{4}^{n}\right)u[n-1]$

(ح) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}u[n-2]$

حل:

طرحهای صفر ـ گود کمکی در شکل S۱۰,۲۱ نشان داده شده اند.

(الف) ـ برای $x[n]=\delta[n+s]$

$$X(z)=z^{-5} \qquad all\ \ z$$

تبدیل فوریه وجود دارد زیرا Roc شامل دایره واحد است

ب) برای $x[n]=\delta[n-5]$

$$Z(z)=z^{-5}$$

همه z بجز $z=\circ$

تبدیل فوریه وجود دارد زیرا Roc شامل دایره واحد می باشد.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=\circ}^{\infty}(-1)^n z^{-n}$$

ج) برای

$$=\frac{1}{1+z^{-1}} \qquad |z|>1$$

تبدیل فوریه وجود ندارد زیرا Roc شامل دایره واحد نمی باشد.

د) برای $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+3]$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-3}^{\infty}\left(1/2\right)^{n+1} z^{-n}$$

$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/2\right)^{n-2} z^{-n+3}=\frac{4z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z|>\frac{1}{2}$$

تبدیل فوریه وجود دارد زیرا Roc شامل دایره واحد است.

هـ) برای $x[n]=\left(\frac{-1}{3}\right)^n u[-n+2]$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-1/3\right)^{n} z^{-n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1/3\right)^{-n} z^{n}$$
$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(-1/3\right)^{-n-2} z^{n+2}=\frac{9\,z^{2}}{1+3z}\qquad |z|<1/3$$
$$=\frac{3\,z}{1+1/3\,z^{-1}}$$

تبدیل فوریه وجود ندارد زیرا Roc شامل دایره واحد می باشد.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{3}\left(1/4\right)^{n} z^{-n}=\sum_{n=-3}^{\infty}\left(1/4\right)^{-n} z^{n}$$
$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2+3} z^{n-3}=\left(1/64\right)z^{-3}\Big/(1-4z)\qquad |z|<\frac{1}{4}$$
$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{-n+3} z^{n-3}=\left(1/64\right)z^{-3}\Big/(1-4a)\qquad |z|<\frac{1}{4}$$
$$=\left(1/16\right)z^{-4}\Big/\left(1-1/4\,z^{-1}\right)$$

تبدیل فورهی وجود ندارد زیرا Roc شامل دایره واحد نمی باشد.

و) فرض کنید $x_1[n]=2^{n}u[-n]$

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\circ} 2^{n}\;z^{-n}=\sum_{n=\circ}^{\infty}(2)^{-2} z^{n}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}\qquad |z|<2$$
$$=\frac{-2\,z^{-1}}{1-2\,z^{-1}}\qquad |z|<2$$

فرض کنید $x_2[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$.

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/4\right)^n z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1/4\right)^{n+1} z^{-n-1}=\left(z^{-1}/1\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z-1}\right) \qquad |z|>2$$

$$=\left(\frac{z^{-1}}{4}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right) \qquad \frac{1}{4}<|z|<2$$

تبدیل Z دیناله کلی $x[n]=x_1[n]+x_2[n]$ برابر است با:

$$X(z)=\frac{-2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)}+\frac{\frac{z^{-1}}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad \frac{1}{4}<|z|<2$$

تبدیل فوریه وجود دارد زیرا Roc شامل دایره واحد می باشد.

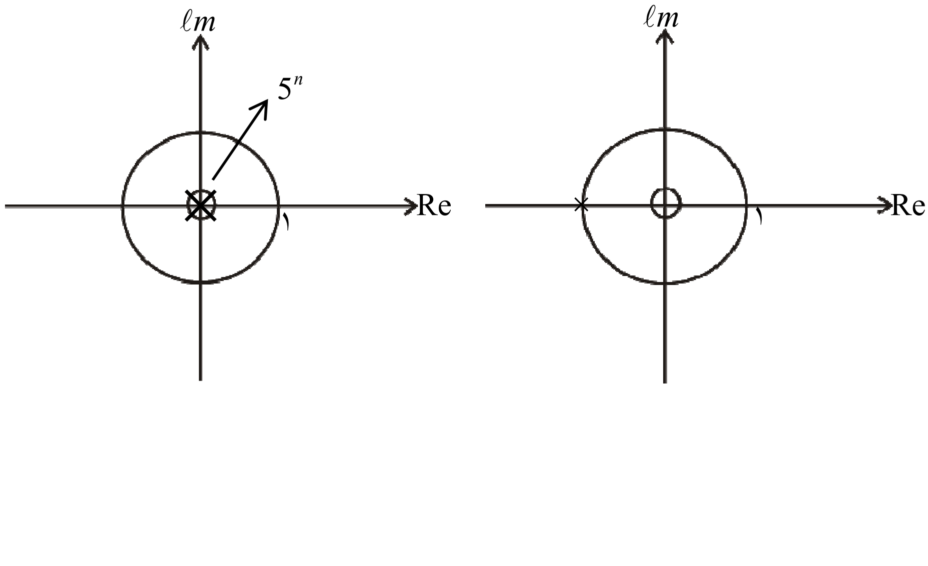
(ز) فرض کنید $x[n]=\left(1/3\right)^{n-2}u[n-2]$

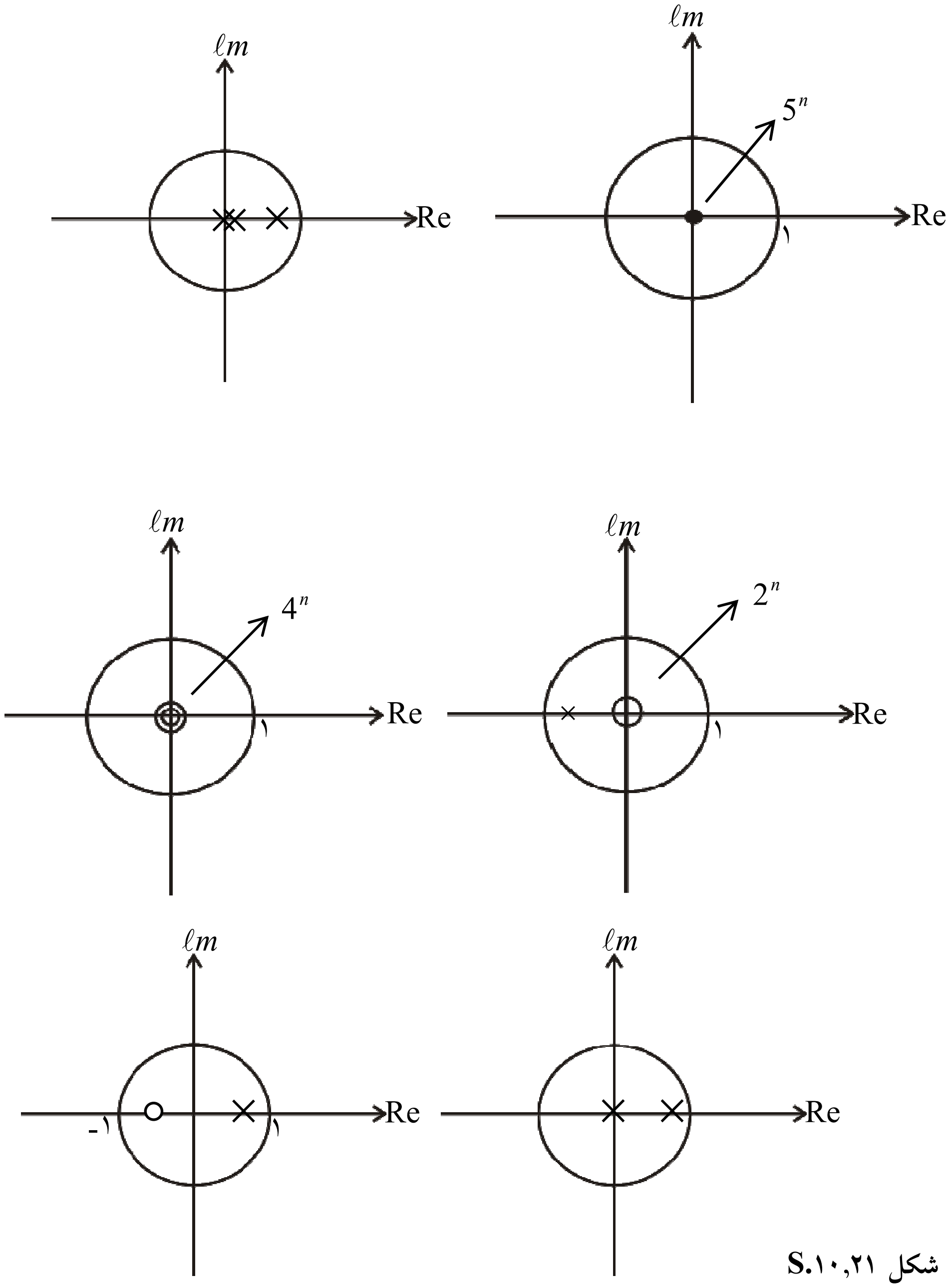
$$X_z=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z-n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1/3\right)^{n-2}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1/3\right)^n z^{-n-2}$$

$$=z^{-2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right) \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

تبدیل فوریه وجود دارد زیرا Roc شامل ویژه واحدی می باشد.





شکل S.۱۰,۲۱

۱۰,۲۲) تبدیل z دنباله‌های زیر را بیابید. تمام جمعها را به شکل بسته بنویسید. نمودار قطب ـ صـفر را رسم کرده، ناحیه همگرایی را مشخص کنید. مشخص کنید که تبدیل فوریه سیگنال وجود دارد یا نه.

(الف) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n+4]-u[n-5]\}$ (د) $n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

(ج) $|n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ (ب) $4^n \cos\left[\frac{2\pi n}{6}+\frac{\pi}{4}\right]u[-n-1]$

حل:

با استفاده از معادله آنالیز تبدیل Z

$$x(z)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-4} z^4 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-3} z^{-3} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-2} z^2$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} z^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\circ} z^{\circ} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1} z^{-1} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2} z^{-2}$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3} z^{-3} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{4} z^{-4}$$

که می تواند بصورت زیر بیان شود

$$x(z)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-4} z^4 \left(\frac{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^9 z^{-9}}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)z^{-1}}\right)$$

این چهار، صفر در ٦ در $z=\circ$ و هشت صفر یا بیشتر پخش شده در شعاع $\frac{1}{2}$ دارد.

Roc کل صفحه Z خواهد بود، توجه کنید که یک صفر نیز در $\frac{1}{2}$ وجـود دارد کـه بـا قطـب خـویش حذف می شود از آن جا که Roc شامل دایره واحد می باشد تبدیل فوریه وجود دارد.

(ب) فرض کنید $x_1(z)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ می توان نوشت:

$$x_1[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]+2^n u[n-1]$$

حال

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\tfrac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\tfrac{1}{2}$$

و

$$2^n u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{-1}{1-2\ z^{-1}} \qquad |z|>2$$

بنابراین

$$x_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-2\ Z^{-1}} \qquad \tfrac{1}{2}<|z|<2$$

توجه کنید که $x[n]=(x_1[n])n$ بنابراین:

$$X(z)=-z\frac{d}{dz}X_1(z)=\frac{\left(\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)}{z-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-2\ z^{-1}} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\right)<|z|<2$$

Roc برابر است با: $\tfrac{1}{2}<|z|<2$ بنابراین تبدیل فوریه وجود دارد.

ج) $x[n]$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}x[n]&=n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]-n2^2u[n-1]\\&=n\,x_1[n]-n\,x_2[n]\end{aligned}$$

که

$$x_1[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$X_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

و

$$x_2[n]=2^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} X_2(z)=\frac{-1}{1-2z^{-1}} \qquad |z|<2$$

با استفاده از خاصیت مشتقگیری داریم:

$$X(z)=-z\frac{d}{dz}X_1(z)+z\frac{d}{dz}X_2(z)=-\frac{\left(\tfrac{1}{2}\right)z^{-1}}{\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)z^{-1}\right)^2}-\frac{2\ z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2}$$

با استفاده از خاصیت مشتقگیری داریم:

$$X(z)=-z\frac{d}{dz}X_1(z)+z\frac{d}{dz}X_2(z)=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right)^2}-\frac{2\ z^{-1}}{\left(1-2\ z^{-1}\right)^2}$$

Roc برابر است با: $\frac{1}{2}<|z|<2$ بنابراین تبدیل فوریه موجود می باشد.

(د) دنباله را به صورت زیر می نویسیم:

$$x[n]=4^n\left[\frac{e^{j(2\pi n/6)+j\frac{\pi}{4}}+e^{-j\frac{2\pi n}{6}-j\pi/4}}{2}\right]u[-n-1]$$

حال

$$4^n e^{j[2\pi n/6+\pi/4+\pi/4]}u[-n-1]\xleftrightarrow{z}\frac{e^{j\pi/4}}{2}\frac{1}{1-4e^{j2\pi/6}z^{-1}}\qquad |z|<4$$

و

$$4^n e^{-j[2\pi n/6+\pi/4]}u[-n-1]\xleftrightarrow{z}\frac{e^{-j\pi/4}}{2}\frac{1}{1-4e^{-j2\pi/6}z^{-1}}\quad |z|<4$$

بنابراین:

$$X(z)=\frac{e^{j\pi/4}}{2}\frac{1}{1-4\ e^{j2\pi/6}z^{-1}}$$

$$+\frac{e^{-j\pi/4}}{2}\frac{1}{1-4e^{-j\pi 2/6}z^{-1}}\qquad |z|<4$$

(i) با بسط به کسرهای جزئی $X(z)$ داریم:

$$X(z)=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

چون Roc برابر است با $|z|>\frac{1}{2}$ داریم:

$$x[n]=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

با تقسیمات متوالی به منظور بدست آوردن دنباله دست راست داریم:

$$X(z)=1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{4}z^{-3}+\frac{1}{16}z^{-4}-\frac{1}{16}z^{-4}+\ldots$$

که به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$X(z)=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}+-\ldots\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3}+\ldots\right]$$

بنابراین

$$x[n]=-\frac{1}{2}\left(1/2\right)^{n}u[n]+3/2\left(-1/2\right)^{n}u[n].$$

(ii) با بسط کسرهای جزئی $X(z)$ داریم:

$$X(z)=\frac{-1/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{3/2}{1+1/2\,z^{-1}}$$

چون Roc برابر است با $|z|<\frac{1}{2}$.

$$x[n]=\frac{1}{2}\left(1/2\right)^{n}u[-n-1]-\frac{3}{2}\left(-1/2\right)^{n}u[-n-1]$$

با انجام تقسیمات متوالی برای بدست آوردن دنباله دست راست، داریم:

$$X(z)=4z-4z^{2}+16z^{3}-16z^{4}+64z^{5}-64z^{6}+-\ldots$$

که به صورت زیر قابل بازنویسی می باشد:

$$x(z)=\frac{3}{2}\left[2z-4z^{2}+8z^{3}-16z^{4}+-\ldots\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[2z+4z^{2}+8z^{3}+16z^{4}+\ldots\right]$$

بنابراین

$$x[n]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-1]-\frac{3}{2}\left(-1/2\right)^{n}u[-n-1].$$

(iii) با بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$X(z) = -z + \frac{3/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

چون Roc $|z| > \frac{1}{2}$

$$x[n] = -2\,\delta[n] + \frac{3}{2}\left(1/2\right)^n u[n].$$

با انجام تقسیمات متوالی برای دنباله طرف راست داریم:

$$X(z) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} + \frac{3}{16}z^{3} + \ldots$$

که به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$X(z) = -2 + 3/2\left[1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \ldots\right]$$

بنابراین:

$$x[n] = -2\delta[n] + \frac{3}{2}\left(1/2\right)^n u[n].$$

(iv) با بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$X(z) = -z\frac{3/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

چون Roc برابر است با $|z| < \frac{1}{2}$ داریم:

$$x[n] = -2\,\delta[n] - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

با انجام تقسیمات متوالی به منظور رسیدن به طرف دوم داریم:

$$X(z) = -2 - 3z - 6z^{2} - 12z^{3} - 24z^{4} - \ldots$$

که به صورت زیر قابل نوشتن ا ست:

$$x[n] = -2\,\delta[n] - 3/2\left(1/2\right)^n u[-n-1]$$

(v) در این مورد می توانیم نشان دهیم که

$$x[n]=2x\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]$$

(vi) به طور مشابه می توانیم نشان دهیم که:

$$x[n]=-2x\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u(-n-2)$$

۱۰,۲۳) در زیر چند تبدیل z داده شده است. برای هر یک عکس تبدیل z را به هر دو رشو بسط به کسرهای جزیی و سری تیلور حاصل از تقسیم صورت بر مخرج به دست آورید.

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z|<\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z|<\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad |z|<\frac{1}{2}$$

....

۱۰,۲٤) دنباله متناظر با تبدیل z های زیر را به روش مشخص شده بیابید.

(الف) بسط به کسرهای جزیی:

$x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیرست

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

(ب) تقسیم:

$x[n]$ دست راستی است

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

(ج) بسط به کسرهای جزیی:

$x[n]$ مطلقاً جمعپذیرست

$$X(z)=\frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$$

حل:

(الف) $X(z)$ را به صورت زیر می توان نوشت:

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2\,z^{-1}\right)}$$

بنابراین:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

اگر $x[n]$ به طور معین جمع پذیر باشد، در اینصورت Roc ی $X(z)$ باید شامل دایره واحـد باشـد.

بنابراین Roc عبارتست از $|z|>\frac{1}{2}$ که به صورت زیر است:

$$x[n]=\left({}^{1}\!/\!{}_{2}\right)^{2}u[n]$$

(ب) با انجام تقسیمات متوالی بروی $X(z)$؛ داریم:

$$X(z)=1-z^{-1}+{}^{1}\!/\!{}_{2}\,z^{-2}\,\frac{-1}{4}z^{-2}+-\ldots$$

با استفاده از معادله تحلیل (۱۰,۳) داریم:

$$x[n]=\delta[n]-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}u[n-1]$$

(ج) می توانیم $X(z)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$X(z)=\frac{3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

با بسط به کسرهای جزئی روی $X(z)$ داریم:

$$X(z)=\frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{4}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

چون $x[n]$، بطور معینی جمعپذیر است، بـه منظـور اینکـه Roc شـامل دایـره واحـد باشـد بایـستی $|z|>\frac{1}{2}$. که به صورت زیر است:

$$x[n]=4\left(1/2\right)^{2}u[n]-4\left(1/4\right)^{2}u[n].$$

۲۰,۲۵) دنباله دست راستی $x[n]$ را با تبدیل z زیر را در نظر بگرید.

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} \qquad \text{(م ۱۰–۲۵–۱)}$$

(الف) معادله (م ۱۰–۲۵–۱) را به کسرهای جزیی که نسبت چند جملـه‌ایهـایی برحـسب z^{-1} باشـند، بسط دهید و از آن $x[n]$ را به دست آورید.

(ب) معادله (م ۱۰–۲۵–۱) را به صورت نسبت چند جملـه‌ایهـای برحـسب z بنویـسید. $X(z)$ را بـه کسرهای جزیی که نسبت چند جمله‌ایهایی بر حسب z باشند بـسط دهیـد، و از آن $x[n]$ را بیابیـد و نشان دهید که با نتیجه به دست آمده در بالا یکی است.

حل:

(الف) بسط به کسرهای جزئی $X(z)$ عبارتست از:

$$X(z) = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}}$$

چون $x[n]$ دست راستی است، Roc بایستی به صورت $|z|>1$. بنابراین

$$x[n] = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + 2u[n]$$

(ب) $X(z)$ به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$X(z) = \frac{z^2}{\left(z-\tfrac{1}{2}\right)(z-1)}$$

با استفاده از بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$X(z) = 2z^2\left[\frac{-1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{z-1}\right]$$

$$= 2z\left[\frac{-z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z-1}\right]$$

اگر $x[n]$ دست راستی باشد، در اینصورت Roc برایاین سیگنال برابر است با $|z|>1$.

با استفاده از این حقیقت که می توانیم تبدیل z معکوس جمله ی داخل برکت هـای بـالا $y[n]$ را بـه صورت $y[n] = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + u[n]$ را بدست آوریم. توجه کنید که $X(z) = 2z\,X(z)$، بنابراین $x[n] = 2y[n+1]$ که می دهد:

$$x[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + 2u[n+1]$$

توجه کنید که $x[-1]=0$، می توانیم این را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$x[n] = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + 2u[n]$$

این پاسخی است که در قسمت (الف) بدست آوریم.

....

۱۰,۲۶) دنباله دست‌چپی $x[n]$ را با تبدیل z زیر در نظر بگیرید.

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

(الف) $X(z)$ را به صورت نسبت چند جمله‌ایهایی برحسب z بنویسید.

(ب) با بسط به کسرهای جزیی $X(z)$ را به صورت مجموع دو جمله بنویسید، که هـر کـدام یکـی از قطبهای به دست آمده در بند (الف) را در بر داشته باشد.

(ج) $x[n]$ را به دست آورید.

حل:

(الف) از قسمت (الف) مسئله قبلی، داریم:

$$X(z)=\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

(ب) از قسمت (ب) مسئله قبلی داریم:

$$X(z)=2z\left[\frac{-z}{z-1/2}+\frac{z}{z-1}\right]$$

(ج) اگر $x[n]$ دست چپی باشد، در اینصورت Roc برای این سیگنال عبارتست از: $|z|<\frac{1}{2}$.

با استفاده از این حقیقت می توانیم تبدیل فوریه معکوس داخل براکتهای بالا برای اینکه

$$y[n]=\left(1/2\right)^n u[-n-1]-u[-n-1].$$

که می دهد:

$$x[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[-n-2]-2u[-n-2]$$

....

۱۰,۲۷) دنباله دست راستی $x[n]$ با تبدیل z زیر داده شده است.

$$X(z)=\frac{3z^{-10}+z^{-7}-5z^{-2}+4z^{-1}+1}{z^{-10}-5z^{-7}+z^{-3}}$$

$x[n]$ در ازای $n<0$ را بیابید.

حل:

ا انجام تقسیمات متوالی روی $X(z)$ برای بدست آوردن دنباله طرف دوم داریم:

$$X(z)=z^3+4z^2+5z+\ldots$$

بنابراین، با مقایسه با معادله (۱۰,۳) داریم:

$$x[-3]=1 \quad \text{و} \quad x[-2]=4 \quad \text{و} \quad x[-1]=5$$

و $x[n]=0$ برای $n<-3$

۱۰,۲۸) (الف) تبدیل z دنباله زیر را بیابید

$$x[n]=\delta[n]-0/95\delta[n-6]$$

(ب) نمودار صفر و قطب دنباله (الف) را رسم کنید.

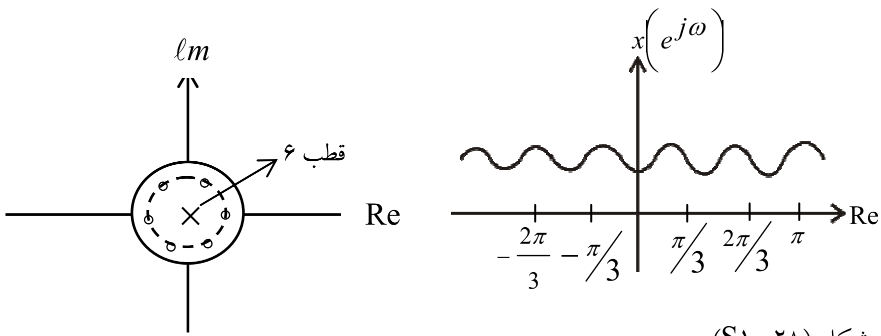
(ج) با بررسی رفتار بردارهای صفر و قطب در پیمودن دایره واحد، نمودار دامنه تبدیل فوریه $x[n]$ را به طور تقریبی رسم کنید.

حل:

(الف) با استفاده از معادله (۱۰,۳) داریم:

$$X(z)=1-0.95\ z^{-6}=\frac{z^6-0.95}{z^6}$$

(ب) بنابراین مطلب $X(z)$ دارای ٦ صفر روی دایره ای به شعاع ۰,۹۵ می باشد. (چنانچه در شکل S.۱۰,۲۸ نشان داده شده است.) و ٦ قطب در $z=0$ دارد.



شکل (S۱۰,۲۸)

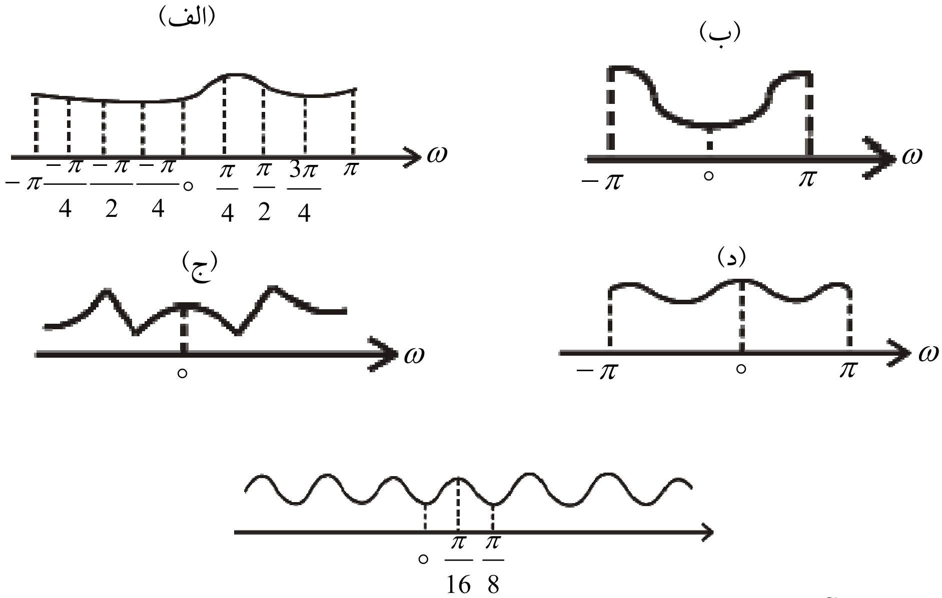
(ج) اندازه تبدیل فوریه در شکل S۱۰,۲۸ نشان داده شده است.

....

۱۰,۲۹) با استفاده از روش هندسی تعیین پاسخ فرکانسی بخش ۱۰–٤، دامنه تبدیل فوریه متناظر با هـر یک از نمودارهای قطب ـ صفر شکل م ۱۰–۲۹ را رسم کنید.

حل:

طرح ها در شکل S۱۰,۲۹ نشان داده شده‌اند.



شکل S۱۰,۲۹

....

۱۰,۳۰) سیگنال $y[n]$ به صورت زیر با دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ مرتبط است.

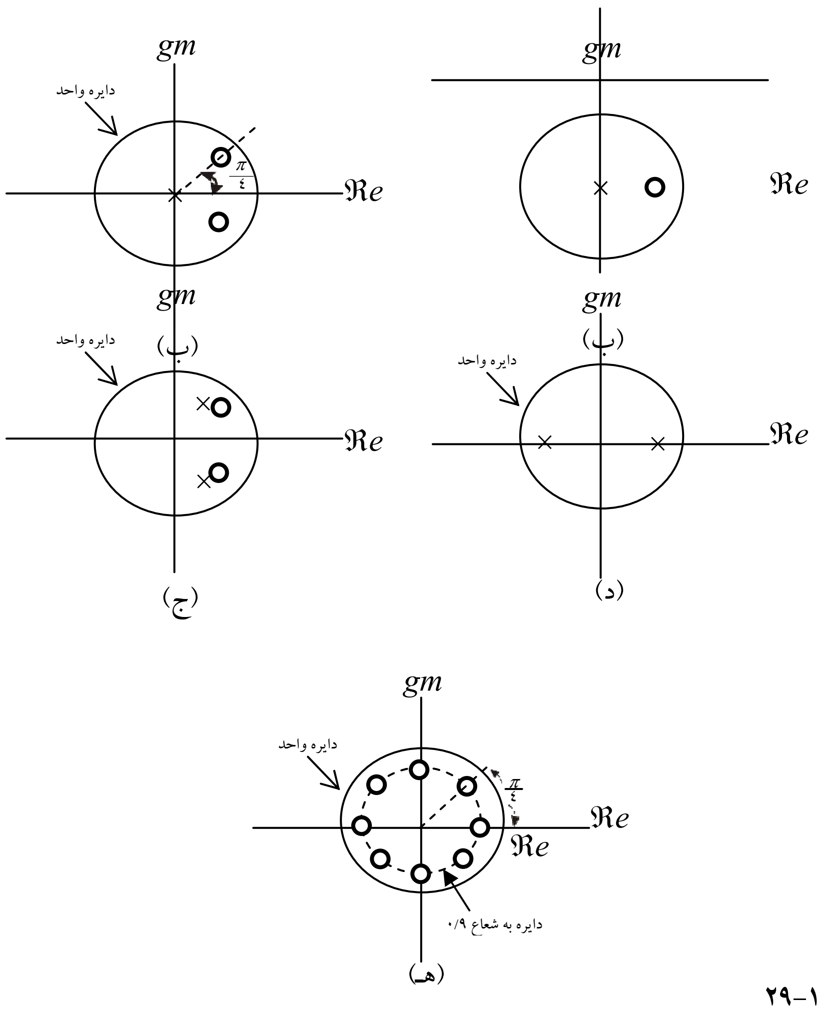
$$y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n+1]$$

که در آن

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad و \qquad x_2[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

با استفاده از

$$z^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} |z|>|a|,$$



شکل م ۱۰-۲۹

و خواص تبدیل z، تبدیل z سیگنال $y[n]$ را بیابید.

حل:

از اطلاعات داده شده داریم:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} x_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

و

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} x_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

با استفاده از خاصیت شیفت از زمان، داریم:

$$x_1[n+3] \xleftrightarrow{z} z^3 x_1(z) \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

با استفاده از خاصیت های معکوس زمانی و شیفت زمانی، خواهیم داشت:

$$x_2[-n+1] \xleftrightarrow{z} z^{-1} x_2(z^{-1}) \qquad |z| < 3$$

حال، با استفاده از خاصیت کانولوشن، داریم:

$$y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n+1] \xleftrightarrow{z} Y(z) = z^2 X_1(z) X_2(z^{-1}), \frac{1}{2} < |z| < 3$$

در نتیجه

$$Y(z) = \frac{z^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$$

....

۳۱-۱۰) پنج دانستنی زیر در مورد سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ با تبدیل $X(z)$ می‌دانیم

۱. $x[n]$ حقیقی و درست راستی است.

۲. $X(z)$ دقیقاً دو قطب دارد.

۳. $X(z)$ دو صفر در مبدأ دارد.

٤. $X(z)$ در $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/3}$ یک قطب دارد.

۵. $X(1)=\frac{8}{3}$

$X(z)$را یافته LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

حل:

از راهنمایی (۱)، می دانیم که $x[n]$ حقیقی است. بنابراین بایستی قطبها و صفرهای $x(z)$ در جفت های مزدوج اتفاق بیافتند. از آنجا که راهنمایی ٤ بیان می کند کـه $X(z)$ قطبـی در $z=\left(\frac{1}{2}\right)e^{j\pi/3}$ دارد، نتیجه می گیریم که $X(z)$ قطب های بیشتری نداشته باشد باید فرض کنید که $X(z)$ به تعداد ۲ صفر یا کمتر از آن صفر داشته باشد. اگر $X(z)$ بیشتر از ۲ صفر داشته باشد $X(z)$ بایستی قطب هایی در ∞ داشته باشد. راهنمایی ۳ بیان می کند که $X(z)$ در اصل ۲ صفر دارد.

متوجه می شویم که $X(z)$ بایستی به صورت زیر باشد:

$$X(z)=\frac{Az^2}{\left(z-\frac{1}{2}e^{j\pi/3}\right)\left(z-\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\right)}$$

چون راهنمایی ۵ می گوید که $X(1)=8/3$ نتیجه می گیریم که $A=2$ و بنابراین:

$$X(z)=\frac{2\,z^2}{\left(z-\frac{1}{2}e^{j\pi/3}\right)\left(z-1/2\,e^{-j\pi/3}\right)}$$

بدلیل اینکه $x[n]$ به دست راستی است، Roc باید به صورت $|z|>1/3$ باشد.

۱۰-۳۲) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$h[n]=\begin{cases}a^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

که ورودی زیر به آن اعمال شود

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\leq n\leq N-1\\ 0, & \text{درغیر این صورت}\end{cases}$$

(الف) خروجی $y[n]$ را با محاسبه صریح کانولوشن $x[n]$ و $h[n]$ به دست آورید.

(ب) خروجی $y[n]$ را با محاسبه عکحس تبدیل z حاصلضرب تبدیل zهـای ورودی و پاسـخ ضـربه بیابید.

حل:

(الف) داده شده است که $h[n]=a^n u[n]$ و $x[n]=x[n]-u[n-N]$ بنابراین:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]x[k] \\
&= \sum_{k=\circ}^{N-1} a^{n-k} u[n-k]
\end{aligned}
$$

حال، $y[n]$ به صورت زیر می باشد:

$$
y[n]=\begin{cases} \circ & n<\circ \\ \sum\limits_{k=\circ}^{n} a^n a^k & \circ \le n \le N-1 \\ \sum\limits_{k=\circ}^{N-1} a^n a^{-k} & n>N-1 \end{cases}
$$

با ساده سازی:

$$
y[n]=\begin{cases} \circ & n<\circ \\ \left(a^n-a^{-1}\right)/\left(1-a^{-k}\right) & \circ \le n \le N-1 \\ a^n\left(1-a^{-N}\right)/\left(1-a^{-1}\right) & n>N-1 \end{cases}
$$

(ب) با استفاده از جدول ۱۰,۲ داریم:

$$
H(z)=\frac{1}{1-a z^{-1}} \qquad |z|>|a|
$$

و

$$
X(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad all \quad z
$$

بنابراین

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-a\,z^{-1}\right)}-\frac{z^{-N}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-a\,z^{-1}\right)}$$

Roc برابر است با $|z|>|a|$؛ فرض کنید:

$$p(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-a\,z^{-1}\right)}$$

Roc عبارتست از $|z|>|a|$ با بسط به کسرهای جزئی برای $p(z)$ داریم:

$$p(z)=\frac{1/(1-a)}{1-z^{-1}}+\frac{1/\left(1-a^{-1}\right)}{1-a\,z^{-1}}$$

بنابراین:

$$p[n]=\frac{1}{1-a}u[n]+\frac{1}{1-a^{-1}}a^{n}u[n]$$

حال توجه کنید که

$$Y(z)=p(z)\left[1-z^{-N}\right]$$

بنابراین:

$$y[n]=p[n]-p[n-N]=\frac{1}{1-a}\left[u[n]-u[n-N]\right]+\frac{1}{1-a^{-1}}\left[a^{n}u[n]-a^{n-N}u[u-N]\right]$$

که به صورت زیر قابل بیان است:

$$y[n]=\begin{cases}\circ & n<\circ\\ \left(a^{n}-a^{-1}\right)/\left(1-a^{-1}\right) & \circ\le n\le N-1\\ a^{n}\left(1-a^{-N}\right)/\left(1-a^{-1}\right) & n>N-1\end{cases}$$

این همان نتیجه قسمت (الف) است.

....

۱۰,۳۳) (الف) تابع تبدیل سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را بیابید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$$

(ب) اگر

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

$y[n]$ را با استفاده از تبدیل z به دست آورید.

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل z از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده و خلاصه سازی، داریم:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

قطبهای $H[z]$ در $\left(\frac{1}{4}\right)\pm j\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ قرار دارند. چون $h[n]$ کازال است Roc عبارتست از

$$|z|>\frac{1}{4}+j\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)=\frac{1}{2}$$

(ب) داریم:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}|z|>\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}Y(z)&=H(z)X(z)\\&=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}\end{aligned}$$

Roc ی $Y(z)$ اشتراک Roc های $X(z)$ و $H(z)$ خواهند بود. کـه بیـان مـی کنـد Roc ی $Y(z)$ برابر است با $|z|>\frac{1}{2}$. با بسط به کسرهای جزئی $Y(z)$ داریم:

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

با استفاده از جدول ۱۰,۲ داریم:

$$y[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)u[n]$$

۱۰,۳٤) یک سیستم LTI علّی با معادله تفاضلی زیر تعریف شده است

$$y[n]=y[n-1]+y[n-2]+x[n-1]$$

(الف) تابع سیستم $H(z)=Y(z)/X(z)$ این سیستم را بیابید. صفرها و قطبهای $H(z)$ را رسم کرده، ناحیه همگرایی را مشخص کنید.

(ب) پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

(ج) می‌بینید که این سیستم ناپایدار است. یک پاسخ ضربه پایدار (غیر علّی) بیابید که معادله تفاضلی فوق را ارضا کند.

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین معادله دیفرانسیل و خلاصه سازی داریم:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}$$

قطبهای $H(z)$ در $z=\left(\tfrac{1}{2}\right)\pm\left(\frac{\sqrt{5}}{2}j\right)$ واقع شده اند. چون $H(z)$ صفری در $z=0$ دارد، شکلهای صفر ـ قطب در شکل S۱۰,۳٤ نشان داده شده اند چون $h[N]$ کازال است. Roc $h[z]$ باید بصورت $|z|>\left(\tfrac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ باشند.

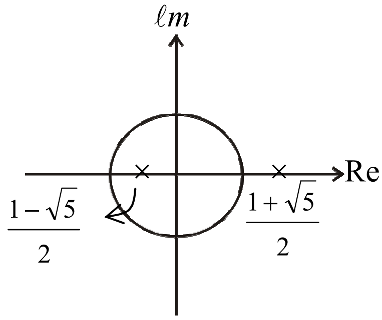
(ب) با بسط به کسرهای جزئی $H(z)$ داریم:

$$H(z)=\frac{-1/\sqrt{5}}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}+\frac{1/\sqrt{5}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}$$

بنابراین:

$$h[n]=\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

حال بصورت زیر است:



شکل S.۱۰,۳٤

$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\left(1/2\right)<|z|<\left(1/2\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ داریم:

(ج) حال با فرض اینکه Roc برابر است با:

$$h[n]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[-n-1]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

....

۱۰,۳۵) یک سیستم LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید که برای آن

$$y[n-1]-\frac{5}{2}y[n]+y[n+1]=x[n]$$

این سیستم می‌تواند پایدار و علّی باشد یا نباشد.

با در نظر گرفتن نمودار قطب ـ صفر این معادله تفاضلی، سه پاسخ ضربه ممکن سیستم را به دست آورید. نشان دهید که هر سه پاسخ تفاضلی را ارضا می‌کنند.

حل:

با گرفتن تبدیل z از طرفین معادله دیفرانسیل و ساده سازی بدست می آوریم:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X[z]}=\frac{1}{z-\frac{5}{2}+z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

با بسط به کسرهای جزئی $H(z)$ داریم:

$$H(z)=\frac{-2/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2/3}{1-2\,z^{-1}}$$

اگر Roc برابر باشد با $2<|z|$ در اینصورت داریم:

$$h_1[n]=\frac{-2}{3}\left(1/2\right)^n u[n]+\frac{2}{3}(2)^n[n]$$

اگر Roc برابر باشد $1/2<|z|$ در اینصورت:

$$h_3[n]=\frac{2}{3}\left(1/2\right)^n u[+n]-\frac{2}{3}(2)^n u[-n-1]$$

اگر Roc برابر باشد $1/2>|z|$ در اینصورت:

$$h_3[n]=\frac{2}{3}\left(1/2\right)^n u[-n-1]-\frac{2}{3}(2)^n u[-n-1]$$

برای هر مقـدار $h_1[n]$، حـال نیـاز داریـم نـشان دهـیم اگـر $y[n]=h_1[n]$ در معادلـه دیفرانـسیل در اینصورت $x[n]=\delta[n]$. فرض کنید $h[N]$ را در معادله دیفرانسیل جایگزین سیستم در اینصورت

$$\frac{2}{3}\left(1/2\right)^{n-1}u[-n-1]-\frac{2}{3}(2)^{n-1}u[n-1]\frac{-5}{3}\left(1/2\right)^n u[n]$$
$$+\frac{5}{3}(2)^n u[n]+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]\frac{-2}{3}(2)^{n+1}u[n+1]=x[n]$$

که از معادله

$$x[n]=\circ \quad for\ \ n<-1$$
$$x[-1]=2/3-2/3=\circ$$
$$x[n]=\circ \quad for\ n>\circ$$

که از $x[n]=\delta[n]$ پیروی مـی کنـد، بطـور مـشابه مـی تـوان نـشان داد کـه $h_2[n]$ و $h_3[n]$ معـاده دیفرانسیل را ارضاء می کند.

....

۱۰,۳۶) یک سیستم خطی گسسته در زمان تغییر ناپذیر با جابجایی، با ورودی $x[n]$ و خروجـی $y[n]$ در نظر بگیرید که برای آن

$$y[n-1]-\frac{10}{3}y[n]+y[n+1]=x[n]$$

سیستم پایدارست. پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

حل:

با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین معادله دیفرانسیل و خلاصه سازی داریم:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^{-1}-\frac{10}{3}+z}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}}$$

با بسط کسرهای جزئی داریم:

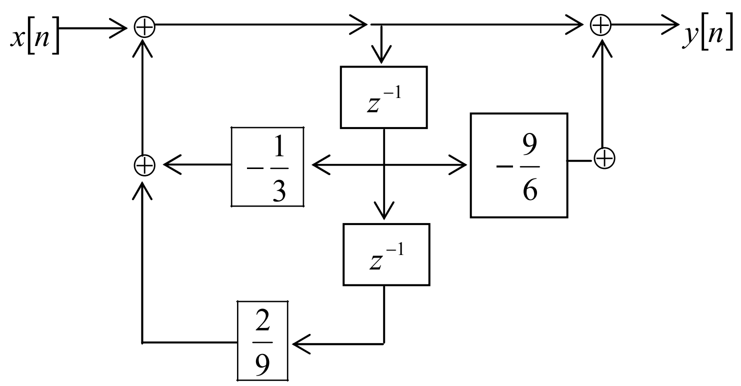
$$H(z)=\frac{-3/8}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{3/8}{1-3z^{-1}}$$

چون $H(z)$ با یک سیستم پایدار متناظر است، Roc بایستی به صورت $3>|z|>1/3$ باشد. در این صورت:

$$h[n]=\frac{-3}{8}\left(1/3\right)^{n}u[n]-3/8\,(3)^{n}u[-n-1]$$

....

۱۰٫۳۷) شکل م ۱۰–۳۷ نمایش جعبه‌ای یکی سیستم LTI علّی را نشان می‌دهد.

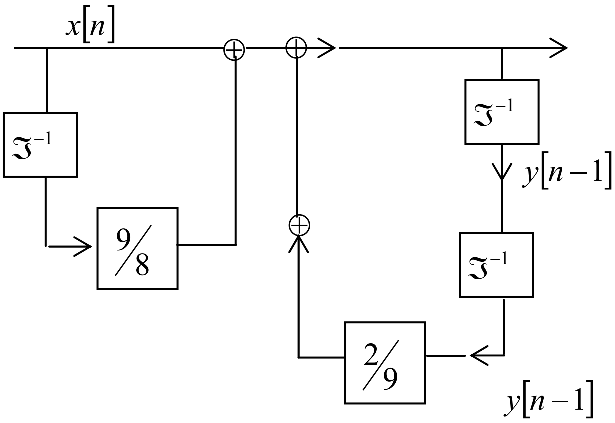


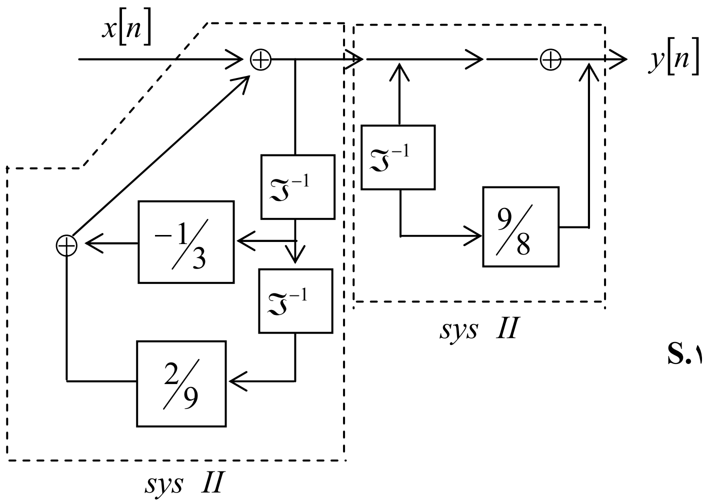
(الف) معادله تفاضلی ارتباط‌دهنده $y[n]$ و $x[n]$ را بیابید.

(ب) آیا سیستم پایدارست؟

حل:

(الف) بلوک دیاگرام را مجدداً می توان به صورت نشان داده شده در قسمت (الف) شکل زیر رسم کرد. این می تواند به صورت اتصال کاسکد دو سیستم نشان داده شد در داخل خط چین در شکل S.۱۰,۳۷ نشان داده شود. دو سیستم می تواند به صورت نشان داده شده در قسمت (ب) شکل S.۱۰,۳۷ نشان داده شود. بدون اینکه تابع تبدیل سیستم کلی تغییر یابد از شکل زیر واضح است که:





شکل S.۱۰,۳۷

(ب) با گرفتن تبدیل z از طرفین معادله دیفرانسیل و خلاصه سازی داریم:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{9}{8}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}}=\frac{1+\frac{9}{8}z^{-1}}{\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$H(z)$ قطبهایی را در $z=\frac{1}{3}$ و $z=-\frac{2}{3}$. چون سیستم کازال است، Roc بایستی به صورت $|z|>\frac{2}{3}$ باشد. Roc شامل دایره واحد می باشد و بهرحال سیستم پایدار است.

....

۱۰,۳۸) سیستم LTI علّی S با ورودی $x[n]$ و تابع سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)$$

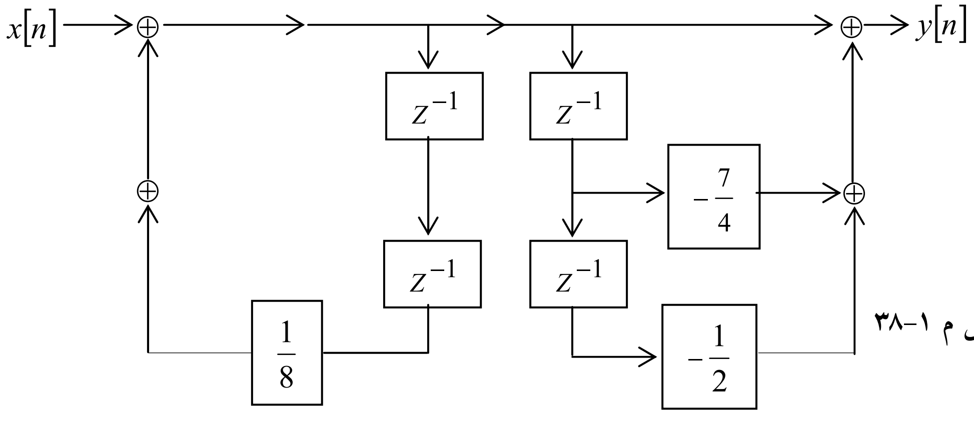
که در آن

$$H_1(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

و

$$H_2(z)=1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}$$

نمایش جعبه‌ای $H(z)$ به صورت اتصال سری نمایشهای جعبه‌ای $H_1(z)$ و $H_2(z)$ را در نظر بگیرید. نمایش حاصل در شکل م ۱۰–۳۸ نشان داده شده است، در این شکل سیگنالهای فرعی $e_1[n]$، $e_2[n]$، $f_1[n]$ و $f_2[n]$ نیز مشخص شده‌اند.



شکل م ۱–۳۸

(الف) رابطه $e_1[n]$ و $f_1[n]$ چیست؟

(ب) رابطه $e_2[n]$ و $f_2[n]$ چیست؟

(ج) با توجه به پاسخهای بندهای (الف) و (ب) نمایش جعبه‌ای مستقیم سیستم S را با تنها دو تـأخیر دهنده رسم کنید.

(د) یک نمایش جعبه‌ای سری برای s، بر اساس رابطه زیر رسم کنید:

$$H(z)=\left(\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)$$

(هـ) یک نمایش جعبه‌ای موازی برای S، بر اساس رابطه زیر رسم کنید.

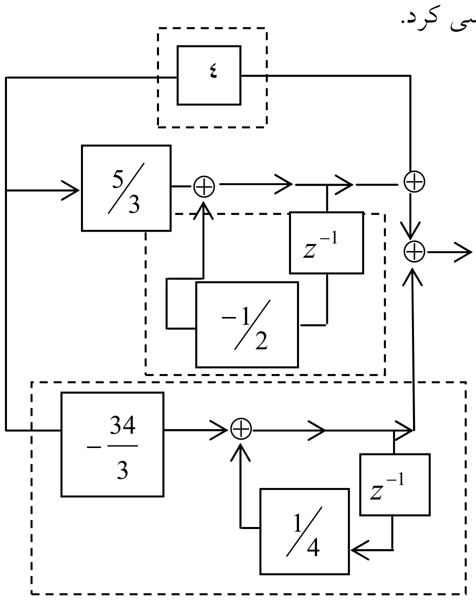
$$H(z)=4+\frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{14}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

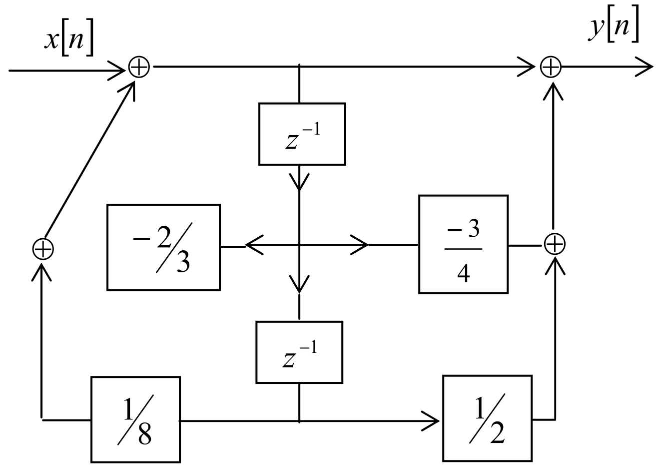
حل:

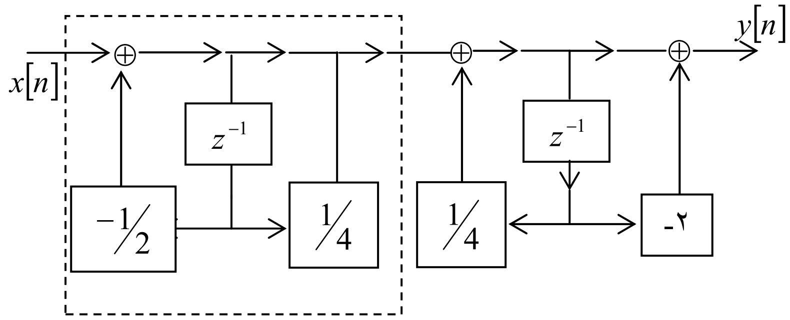
(الف) $e_1[n]=f_1[n]$

(ب) $e_2[n]=f_2[n]$

(ج) با استفاده از نتایج قسمتهای (الف) و (ب)، می توان بلوک دیاگرام موردنظر را دوباره بـه صـورت شکل S.۱۰,۳۸ بازنویسی کرد.







شکل S.۱۰,۳۸

(د) با استفاده از روش نشان داده شده در مثال در کتاب درسی (متن اصلی)، بلوک دیاگرام $H_1(z)=\frac{\left[1+\frac{1}{4}z^{-1}\right]}{\left[1+\frac{1}{2}z^{-1}\right]}$ و $H_2(z)=\frac{\left(1-2\ z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\ z^{-1}\right)}$ طوریکـه در خـط چـین z در شـکل زیـر نمایش داده شده اند. $H(z)$ کاسکد این دو سیستم است.

(هــ) بـا اسـتفاده از روش نـشان داده شـده در مثـال کتـاب درسـی، بلـوک دیـاگرام $H_1(z)=4$ و $H_2(z)=\frac{5/3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ و $H_3(z)=\frac{-14/3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ را می توان بصورتی که در بلوک های شکل زیـر نشان داده شده اند رسم کرد.

$H(z)$ ترکیب موازی $H_1(z)$و $H_2(z)$ و $H_3(z)$ است.

۱۰,۳۹) سه تابع سیستم زیر به سیستمهای LTI علّی مربوط می‌شوند.

$$H_1(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}\right)}$$

$$H_2(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}\right)}$$

$$H_3(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$$

(الف) نمایش جعبه‌ای مستقیم هر یک از این سیستمها را رسم کنید.

(ب) برای هر سیستم یک نمایش جعبه‌ای به صورت ترکیب متوالی دو نمایش جعبه‌ای رسم کنید. هـر نمایش جعبه‌ای مرتبه دوم باید به شکل مستقیم ساخته شده باشد.

(ج) برای هر سیستم تعیین کنید که آیا می‌توان یک نمایش جعبه‌ای یافت که اتصال چهار سیستم مرتبه اول باشد، با این قید که تمام ضرائب حقیقی باشند.

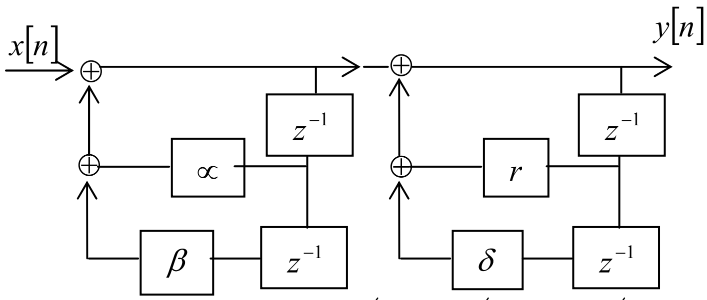
حل:

شکل مستقیم بلوک دیاگرام می تواند بصورت نـشان داده شـده در قـسمت (a-i) از شـکل S.۱۰,۳۹ رسم شود.

با توجه به اینکه

$$H_1(z)=\frac{1}{1-\frac{5}{3}z^{-1}-\frac{1}{36}z^{-2}-\frac{3}{8}z^{-3}+\frac{1}{36}z^{-4}}$$

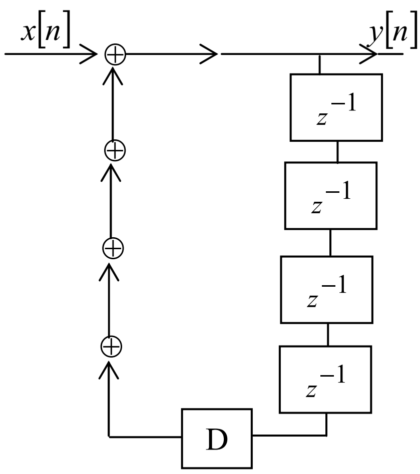
بلوک دیاگرام کاسکد قسمت (a-i) از نشان S.۱۰,۳۹ نشان داده شده است.



$part\ a: \propto =1\ ,\ \beta = -\frac{1}{4}\ ,\ r=\frac{2}{3}\ ,\ \delta = -\frac{1}{9}$

$part\ b: \propto =1\ ,\ \beta = -\frac{1}{2}\ ,\ r=\frac{1}{2}\ ,\ \delta = -1$

$part\ c: \propto =1\ ,\ \beta = -\frac{1}{2} , r=1\ ,\ \delta = -\frac{1}{4}$



$part\ a: A=\frac{5}{3}\ ,\ B=\frac{11}{36}\ ,\ C=\frac{15}{54}\ ,\ D=\frac{1}{32}$

$part\ b: A=\frac{5}{2}\ ,\ B=-1\ ,\ C=\frac{5}{4}\ ,\ D=-\frac{1}{2}$

$part\ c: A=2\ ,\ B=-\frac{3}{4}\ ,\ D=-\frac{1}{8}$

شکل S۱۰,۳۹

توجه کنید که

$$H_1(z)=\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}\,z^{-1}}\right]$$

بنابراین $H_1(z)$ می تواند بعنوان چهار سیستم کاسکد برای ضرایب حقیقی رسم گردد.

(ب) شکل مستقیم بلوک سرد یا گرم را می توان بصورت نشان داده شده در قسمت (b-i) شکل S۱۰,۳۹ رسم کرد. با توجه به اینکه

$$H_2(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{2}\,z^{-1}+2z^{2}-\frac{5}{4}\,z^{-3}+\frac{1}{2}\,z^{-4}}$$

بلوک دیاگرام کاسکد در قسمت (b-ii) شکل S۱۰,۳۹ نشان داده شده است.

توجه کنید که

$$H_2(z)=\left[\frac{1}{1-\frac{(1+j)}{2}z^{-1}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1+j\sqrt{15}}{4}\,z^{-1}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{15}j}{4}\,z^{-1}}\right]$$

بنابراین $H_1(z)$ نمی تواند به صورت کاسکد چهار سیستم برای ضرایب حقیقی، رسم شود.

(ج) شکل سیستم بلوک دیاگرام را می توان بصورت نشان داده شده در قسمت (c-i) از شکل S۱۰,۳۹ رسم کرد.

با توجه اینکه

$$H_3(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}+\frac{7}{4}\,z^{-2}-\frac{3}{4}\,z^{-1}+\frac{1}{8}\,z^{-4}}$$

بلوک دیاگرام کاسکد در قسمت (c-ii) شکل S۱۰,۳۹ نشان داده شده است.

توجه کنید که

$$H_3(z)=\left[\frac{1}{1-\frac{(1+j)}{2}z^{-1}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1-j}{2}z^{-1}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]$$

بنابراین $H_1(z)$ نمی توانند بعنوان کاسکد چهار سیستم برای ضرایب حقیقی رسم شود.

....

۱۰,٤۰) تبدیل z یکطرفه هر یک از دنباله‌های مسئله ۱۰-۲۱ را بیابید.

حل:

با استفاده از تعریف تبدیل z یک طرفه داریم:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

(الف) چون $x[n] = \delta[n+s]$ صفر است در بازه $0 \le n \le \infty$ ، $X(z)$ برابر صفر است.

(ب) تبدیل لاپلاس یکطرف $x[n] = \delta[n-s]$ صفر است در بازه، برابر است با:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-5] z^{-n} = e^{-5\omega}$$

(ج) تبدیل لاپلاس یکطرف $x[n] = (-1)^n u[n]$ برابر است با:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u[n] z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

(د) تبدیل لاپلاس یکطرفه $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+3]$ برابر است با:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1/2\right)^n u[n+3] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1/2\right)^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}} \qquad |z| > 1/2 \end{aligned}$$

(هـ) بدلیل آنکه $x[n] = \left(-1/3\right)^n u[-n-2]$ در بازه $0 \le n \le \infty$ می باشد، $X(z)$ نیز $X(z)$.

(و) تبدیل z یکطرفه

$$X(z)=\sum_{\circ=n}^{\infty}\left(1/4\right)^{n}u[-n+3]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/4\right)^{n}z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\qquad all\ \ z$$

(ز) تبدیل z یکطرفه برای $x[n]=2^{n}u[-n]+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n-1]$ برابر است با:

$$X(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}2^{n}u[-n]+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n-1]\,z^{-n}$$

$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/4\right)^{n}z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\qquad all\ \ z.$$

(خ) تبدیل z یکطرفه ی $x[n]=\left(1/3\right)^{n-2}u[n-2]$ برابر است با:

$$X(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/3\right)^{n-2}u[n-2]\,z^{-n}$$

$$=z^{-2}\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/3\right)^{n}z^{-n}$$

$$=\frac{z^{-2}}{1-\left(1/2\right)z^{-1}}\qquad |z|>1/2$$

....

۱۰,۴۱) دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]$$

$$x^{2}[n]=\left(\frac{1}{4}^{n}u[n]\right)$$

$\chi_1(z)$ و $X_1(z)$ به ترتیب تبدیل z یکطرفه و دوطرفه $x_1[n]$، و $\chi_2[n]$ و $X_2(z)$ به ترتیب تبـدیل z یکطرفه و دو طرفه $x_2[n]$ هستند.

(الف) با گرفتن عکس تبدیل z دوطرفه $X_1(z)\ X_2(z)$ سیگنال $g[n]=x_1[n]*x_2 n$ را بیابید.

(ب) با گرفتن عکس تبدیل z یکطرفه $\chi_1(z)\ \chi_2(z)$ سیگنال $q[n]$ در $n \le \circ$ را بیابید.. توجه کنیـد که $q[n]$ و $g[n]$ در $n \ge \circ$ یکسان نیستند.

حل:

با استفاده از اطلاعات داده شده:

$$x_2(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/4\right)^n u[n]z^{-n}$$

و

$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/4\right)^n z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\left(1/4\right)z^{-1}} \qquad |z|>1/4$$

با استفاده از جدول ۱۰,۲ و خاصیت شیفت در حوزه زمان:

$$X_1(z)=\frac{z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

,

$$X_2(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{4}$$

(الف) داریم:

$$G(z)=X_1(z)X_2(z)=\frac{z}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Roc برابر است با: $|z|>\left(1/2\right)$، بسط به کسرهای جزئی $G(z)$ عبارتست از:

$$G(z)=z\left[\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right]$$

با استفاده از جدول ۱۰،۲ و خاصیت شیفت در حوزه زمان، داریم:

$$g[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}u[n+1]$$

(ب) داریم:

$$Q(z)=X_1(z)X_2(z)=\frac{1/2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Roc یِ $Q(z)$ عبارتست از $|z|>1/2$. بسط به کسرهای جزئی $Q(z)$ نیز برابر است با:

$$Q(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right]$$

بنابراین

$$q[n]=\left(1/2\right)^n u[n]-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

واضح است که برای $n>0$، $q[n]\neq q[n]$.

۱۰،۴۲) در هر بند یک معادله تفاضلی، یک ورودی، و شرط اولیه داده شده است، پاسخهای ورودی ـ صفر و حالت ـ صفر را به کمک تبدیل z یکسان نیستند.

(الف)

$$y[n]+3y[n-1]=x[n]$$
$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$
$$y[-1]=1$$

(ب)

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$
$$x[n]=u[n]$$
$$y[-1]=0$$

ج)

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$
$$x[n]=u[n]$$
$$y[-1]=1$$

حل:

با گرفتن تبدیل z یکطرفه از طرفین معادله دیفرنسیل، داریم:

$$Y(z)+3\ z^{-1}Y(z)+3y[-1]=X(z)$$

با جابگذاری $X(z)=0$؛

$$Y(z)=\frac{-3}{1+3\ z^{-1}}$$

با گرفتن عکس تبدیل z، پاسخ، ورودی خروجی بدست می آید:

$$y_{2j}[n]=-3(-3)^n u[n]=(-3)^{n+1}u[n]$$

حال از آنجا که می دانیم $x[n]=\left(1/2\right)^n u[n]$، داریم:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}}\qquad |z|>1/2$$

با جایگذاری $y[-1]=0$ بدست می آوریم:

$$Y(z)+3\ z^{-1}Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}}$$

بنابراین

$$Y(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\ z^{-1}\right)\left(1+3z^{-1}\right)}$$

با بسط به کسرهای جزئی عبارت فوق داریم:

$$Y(z)=\frac{1/7}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}}+\frac{6/7}{1+3\ z^{-1}}$$

با گرفتن عکس تبدیل z خواهیم داشت:

$$y_{22}[n]=\left(1/7\right)\left(1/2\right)^{n}u[n]+\frac{6}{7}(-3)^{n}u[n]$$

(ب) با گرفتن تبدیل z یکطرفه از طرفین معادله دیفرنسیلداریم:

$$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{2}y[-1]=X(z)-\frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

با جایگذاری $X(z)=0$ داریم:

$$Y(z)=0$$

حال، از آنجا که داده شده است؛ $x[n]=u[n]$، داریم:

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\qquad |z|>1$$

با جایگذاری $y[-1]=0$ ، داریم:

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\qquad |z|>1$$

با جایگذاری $y[-1]=0$ داریم:

$$Y(z)-\frac{1}{2}\,z^{-1}Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{\left(1/2\right)z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

در اینصورت:

$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

عکس تبدیل z یکطرفه، پاسخ حالت صفر سیستم را بدست می دهد:

$$y_{23}[n]=u[n]$$

(ج) با گرفتن تبدیل z یکطرفه از طرفین معادله تفاضلی، داریم:

$$Y(z)\frac{-1}{2}z^{-1}Y(z)\frac{-1}{2}y[-1]=X(z)-\frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

با جایگذاری $X(z)=0$ ، داریم:

$$Y(z)=\frac{1/2}{1-\frac{1}{2\,z^{-1}}}$$

با جایگذاری $X(z)=0$ داریم:

$$Y(z)=\frac{1/2}{1-1/2\ z^{-1}}$$

با گرفتن عکس تبدیل z یکطرفه و پاسخ ورودی ـ خروجی به صورت زیر است:

$$y_{z4}[n]=\left(1/2\right)^{n+1}u[n]$$

چون ورودی $x[n]$ مشابه ورودیی است که در قسمت (ب) استفاده شد، پاسخ حالت صفر به صورت زیر است:

$$y_{z3}[n]=u[n]$$

۱۰,۴۳) یک دنباله زوج $x[n]$ (یعنی $x[n]=x[-n]$) با تبدیل z گویا در نظر بگیرید.

(الف) نبا استفاده از تعریف تبدیل z نشان دهید که

$$X(z)=X\left(\frac{1}{z}\right)$$

(ب) با توجه به نتیجه بند (الف) نشان دهید که اگر $X(z)$ در $z=z_0$ یک قطب (صفر) داشته باشد، $X(z)$ باید در $z=1/z_0$ هم قطب (صفر) داشته باشد.

(ج) نتیجه بند (ب) را در مورد دنباله‌های زیر امتحان کنید.

(۱) $\delta[n+1]+\delta[n-1]$

(۲) $\delta[n+1]-\frac{5}{2}\delta[n]+\delta[n-1]$

حل:

(الف) ابتدا تبدیل z $X_1(z)$ دنباله $x_1[n]=X[-n]$ را برحسب $X_1(z)$ تعیین می کنیم:

$$\begin{aligned}X_1(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[-n]\,z^{-n}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{+n}\\&=X\left(1/Z\right)\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $x[n]=x[-n]$ در اینصورت $X(z)=X\left(\frac{1}{z}\right)$.

(ب) اگر $z_\circ$ یک قطب باشد، در این حالت $\frac{1}{X(z_\circ)} = \circ$. از نتیجه قسمت (الف) می دانیم که $X(Z_\circ) = X\left(\frac{1}{z_\circ}\right)$، بنابراین $\frac{1}{X(z_\circ)} = {}^{1}\!/_{x(z_\circ)} = o$. که بیان می کند یک قطب در $\frac{1}{z_\circ}$ وجود دارد.

(ج) (۱) در این مورد:

$$X(z) = z + z^{-1} = \frac{1+z^2}{z} \qquad , \qquad |z| > \circ$$

$X(z)$ صفرهایی در $z_2 = -j$ و $z_1 = j$ دارد. $X(z)$ قطبهایی در $p_1 = \circ$ و $p_2 = \infty$ دارد.

واضح است که $z_2 = \frac{1}{z_1}$ و $p_1 = \frac{1}{p_2}$، که نشان می دهند حالت (ب) صحیح می باشد.

(۲) در این مورد

$$X(z) = z - {}^{5}\!/_{2} + z^{-1} = \frac{1 - \frac{5}{2}z + z^2}{z} \qquad , \qquad |z| > \circ$$

$X(z)$ صفرهایی در $z_1 = -{}^{1}\!/_{2}$ و $z_2 = -2$ دارد. $X(z)$ قطبهایی در $p_1 = \circ$ و $p_2 = \circ$ دارد.

واضح است که $z_2 = {}^{1}\!/_{z_1}$ و $p_1 = \frac{1}{p_2}$. که نشان می دهد که حالت (b) صحیح است.

۱۰,٤٤) $x[n]$ یک سیگنال گسسته در زمان با تبدیل z $X(z)$ است. تبدیل z سیگنالهای زیر را برحسب $X(z)$ بیان کنید:

(الف) $\Delta x[n]$، که Δ عملگر تفاضل اول تعریف شده، به صورت زیرست

$$\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$$

(ب)
$$x_1[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n \text{ زوج} \\ \circ\,, & n \text{ فرد} \end{cases}$$

(ج) $x_1[n] = x[2n]$

حل:

(الف) با استفاده از خاصیت شیفت داریم:

$$Z\{\Delta x[n]\} = X(Z) - Z^{-1}X(Z) = (1 - Z^{-1})X(Z).$$

تبدیل Z برای $X_1(z)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-2n}$$
$$= x(2z)$$

(ج) فرض کنید سیگنال $g[n] = \{x[n] + (-1)^n x[n]\}/2$. توجه بفرمائید که برای n های فرد، $g[n] = ٠$ و $g[2n] = x[2n]$ همچنین با استفاده از جدول ١٠,١ داریم:

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[2n]\, z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty,\ \text{زوج}}^{\infty} g[n]\, z^{-n/2}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]\, z^{-n/2} = G\left(z^{1/2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} X\left(z^{1/2}\right) + \tfrac{1}{2} X\left(-z^{1/2}\right)$$

١٠,٤٥) تعیین کنید کدام یک از تبدیلهای داده شده می‌تواند تابع تبدیل یک سیستم گسسته در زمان علّی، ولی نه لزوماً پایدار، با پاسخ ضربه صفر در $n < ٠$ باشد. دلایل خود را به روشنی بیان کنید.

(الف) $\dfrac{(1 - z^{-1})^2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$

(ب) $\dfrac{(z-1)^2}{z - \frac{1}{2}}$

(ج) $\dfrac{\left(z - \frac{1}{4}\right)^5}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^6}$

(د) $\dfrac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5}$

حل:

در هر قسمت این مسأله، فرض می کنیم که سیگنال از معکوس تبدیل z بدست می آید و آن را $x[n]$ می نامیم.

(الف) بلی) در تبدیل z داده شده مرتبه به صورت برابر مرتبه مخرج است. بنابراین مـی تـوانیم بـرای بسط تبدیل z از تقسیمات متوالی استفاده کنیم، طوری که بیشترین توان Z در بـسط برابـر گـردد. کـه برای $n<0$ نتیجه می دهد که $x[n]=0$.

(ب) خیر، این تبدیل z از حاصلضرب تبدیل z قسمت قبلی در z بدست آیـد. بهرحـال معکـوس آن همان معکوس قسمت قبلی می باشد که به اندازه (۱) واحد به سمت چپ شیفت یافته است. که بیـان می کند سیگنال حاصله در $n=-1$ صفر نیست.

(ج) بلی، می توانیم از تقسیمات متوالی برای بسط تبدیل z استفاده کنیم بوطریکه بیـشتری تـوان z در بط برابر (۱-) گردد. که برای $n<0$ نتیجه می دهد، $x[n]=0$.

(د) خیر، هنگامیکه تقسیمات متوالی برای بسط تبدیل z اعمال می گـردد، بیـشترین تـوان z در بـسط برابر (۱) است. که نتیجه می دهد $x[-1]\neq 0$.

....

۱۰,٤٦) دنباله $x[n]$ خروجی یک سیستم LTI به ازای ورودی $s[n]$ اسـت. ایـن سیـستم بـا معادلـه تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$x[n]=s[n]-e^{7a}s[n-8] \quad , \qquad 0<a<1$$

(الف) تابع سیستم را بیابید

قطبها و صفرهای آن را روی صفحه z رسم کرده، ناحیه همگرایی آن را مشخص کنید.

(ب) می‌خواهیم با یک سیستم LTI، $x[n]$ را از $s[n]$ بازیابی کنیم. تابع تبدیل

$$H_2(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

را برای داشتن $y[n]=s[n]$ رسم کنید. تمام نواحی همگرایی ممکن $H_2(z)$ را تعیین کـرده، در هـر مورد علی بودن و پایداری سیستم را مشخص کنید.

(ج) تمام پاسخ ضربه‌های واحد $h_2[n]$ ممکن ارضاکننده رابطه زیر را بیابید

$$y[n]=h_2[n]*x[n]=s[n]$$

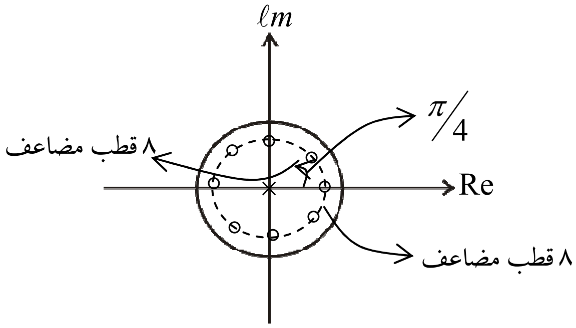
حل:

(الف) با گرفتن تبدیل z از طرفین معادله رابطه بین $x[n]$ و $s[n]$ و ساده سازی داریم:

$$H_1(z)=\frac{X(z)}{S(z)}=1-z^{-8}e^{-8\propto}=\frac{z^8-e^{-8\propto}}{z^8}$$

سیستم (۸) عدد قطب مضاعف در $z=0$ و ۸ صفر حول دایره ای به شعاع $e^{-\propto}$ دارد. ایـن موضـوع در شکل S.۱۰,٤٦ نشان داده شده است. Roc تمام مناطق روی صفحه z می باشد، بجز در $z=0$.

. $z=0$



شکل S.۱۰,٤٦

(ب) داریم:

$$H_2(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{S(Z)}{X(z)}=\frac{1}{H_1(z)}$$

بنابراین:

$$H_2(z)=\frac{1}{1-z^{-8}e^{-8\alpha}}=\frac{z^8}{z^8-e^{-8\alpha}}$$

دو Roc ممکن برای $H_2(z)$ به صورتهای $|z|<e^{-\alpha}$ و $|z|>e^{-\alpha}$ وجود دارند.اگر Roc، $|z|<e^{-\alpha}$ باشد، در اینصورت، Roc شامل دایره واحد نخواهد بود. که به صـراحت بیـان مـی کنـد کـه سیـستم

ناپایدار و آنتی ـ کازال است. اگر Roc به صورت $|z| > e^{-\alpha}$ باشد Roc شامل دایره واحد است که به صراحت بیان می کند که سیستم پایدار و کازال است.

(ج) داریم:

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-8}e^{-8\alpha}}$$

نیاز داریم تا Roc به صورت $|z| > e^{-\alpha}$ باشد تا پایداری سیستم تضمین شود. حال فرض کنید:

$$p(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-8\alpha}}\alpha$$

با Roc یِ $|z| > e^{-\alpha}$. با گرفتن عکس تبدیل z داریم:

$$p[n] = e^{-8\alpha n}u[n]$$

حال توجه کنید که $H_2(z) = p(z^8)$.

از جدول ۱۰,۱ می دانیم که:

$$h_2[n] = \begin{cases} p\left[n/8\right] = e^{-\alpha n} & n = \circ\ , \pm 8\ , \pm 16\ , \ldots \\ \circ & other \end{cases}$$

....

۱۰,٤۷) در مورد یک سیستم LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ مطالب زیر را می‌دانیم

۱- اگر به ازای تمام مقادیر n، $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$، آنگاه به ازای تمام مقادیر n داریم $y[n] = \circ$.

۲- اگر به ازای تمام مقادیر n، با a ثابت است، $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$، آنگاه بـه ازای تمـام مقـادیر n، $y[n]$ به صورت زیر

$$y[n] = \delta[n] + a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

که a ثابت است.

(الف) مقدار ثابت a را بیابید.

(ب) پاسخ $y[n]$ این سیستم به ورودی زیر را بیابید.

به ازای تمام مقادیر n، $x[n] = 1$

حل:

(الف) از راهنمایی (۱) داریم: $H(-2)=0$ و از راهنمایی (۲) می دانیم که هنگامیکه

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

داریم:

$$Y(z)=1+\frac{\propto}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X|z|}=\frac{\left(1+\propto-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad \text{و} \qquad |z|>\frac{1}{4}$$

با جایگذاری $z=-2$ در معادله فوق و با توجه به این مطلب که $H(-2)=0$ داریم:

$$\alpha=-9/8$$

(ب) پاسخ به سیگنال $x[n]=1=1^n$ به صورت $H(1)x[n]$ می باشد، بنابراین:

$$y[n]=H(1)=1/4$$

....

۱۰,٤۸) یک سیستم مرتبه دوم LTI علی با پاسخ ضربه $h[n]$ حقیقی و تابع سیستم گویای $H_1(z)$ ساخته شده است. شکل م ۱۰–٤۸ (الف) نمودار قطب ـ صفر $H_1(z)$ را نشان می‌دهد. حال سیستم مرتبه دوم علّی دیگری با پاسخ ضربه $h_2[n]$ و تابع سیستم گویای $H_2(z)$ در نظر بگیرید. نمودار قطب ـ صفر $H_2(z)$ در شکل م ۱۰–٤۸ (ب) نشان داده شده است. یک رشته $g[n]$ تعیین کنید که سه شرط زیر را داشته باشند:

(۱) $h_2[n]=g[n]h_1[n]$

(۲) $g[n]=0$ برای $n<0$

(۳) $\sum_{k=0}^{\infty}|g[k]|=3$

حل:

از دیاگرام صفر قطب، می توان نوشت:

$$H_1(z)=A\frac{\left(z-\frac{3}{4}e^{j\pi/4}\right)\left(z-3/4\,e^{-j\pi/4}\right)}{\left(z-\frac{3}{4}e^{3j\pi/4}\right)\left(z-\frac{3}{4}e^{-3\pi j/4}\right)}$$

,

$$H_2(z)=B\frac{\left(z-1/2\,e^{+j3\pi/4}\right)\left(z-1/2\,e^{-j3\pi/4}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)\left(z-1/2\,e^{-j\pi/4}\right)}$$

که A و B ضرایبی ثابت هستند. توجه فرمایید که

$$H_2(z)=\frac{B}{A}H_1\left(\frac{3}{2}ze^{j\pi}\right)=\frac{B}{A}\;H_1\left(-3/2\;\pi\right)$$

با استفاده از خاصیت ۱۰،۵،۳ برای تبدیلات z (جدول ۱۰،۱ را ببینید) داریم:

$$H_2[n]=\frac{B}{A}\left(\frac{-2}{3}\right)^n h[n]$$

که به صورت زیر می توان بازنویسی کرد:

$$h_2[n]=g[n]h_1[n]$$

که $g[n]=\left(B/A\right)\left(-2/3\right)^n$. توجه کنید از آ«جا که $h_1[n]$ و $h_2[n]$ کازال هستند می توان فرض کرد که برای $n<\circ$، $g[n]=\circ$، بنابراین:

$$g[n]=\frac{B}{A}\left(\frac{-2}{3}\right)^n u[n]$$

حال، از راهنمایی ۳ نیز داریم $\sum_{k=\circ}^{\infty}|g[k]|=3$ بنابراین:

$$\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{B}{A}\left(-2/3\right)^k=3$$

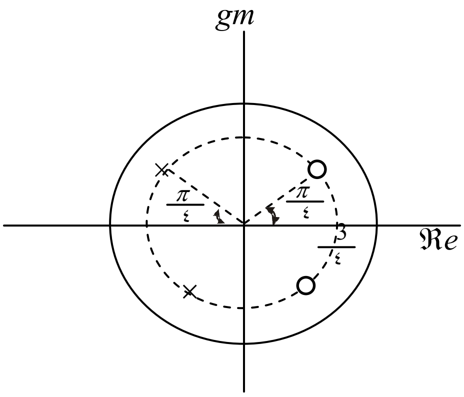
و یا

$$\frac{B}{A}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3\Rightarrow\frac{B}{A}=1$$

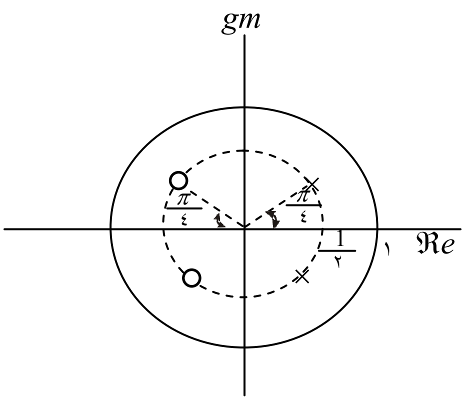
بنابراین

$$g[n]=\left(\frac{-2}{3}\right)^n u[n]$$

۱۰,٤۹) در خاصیت ٤ بخش ۱۰-۲ گفته شد که اگر $x[n]$ یک دنباله دست راستی و دایره $|z|=r_\circ$ جزء ROC باشد، تمام z های متناهی با $|z|>r_\circ$، نیز داخل ROC هستند. در آنجا استدلالی شهودی ارائه کردیم. استدلال دقیقتر، دقیقاً شبیه استدلال خاصیت ٤ بخش ۹-۲، در مورد تبدیل لاپلاس است. دنباله دست راستی $x[n]$ را در نظر بگیرید.



(الف)



(ب)

$$x[n] = 0\ ,\ n, \qquad n < N_1$$

که برای آن

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} = \sum_{n=-N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

پس ا گر $r_0 \le r_1$ آنگاه

(م ۱۰-٤۹-۱)

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} \le A \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n}$$

که در آن A یک عدد ثابت مثبت است.

(الف) درستی رابطه (م ۱۰-٤۹-۱) را نشان دهید و A را برحسب r_1 و N_1 به دست آورید.

(ب) با توجه به نتیجه بند (الف) نشاندهید که خاصیت ٤ بخش ۱۰-۲ درست است.

حل:

(الف) طرف چپ معادله (م ۱۰,٤۹,۱) را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(r_0 \frac{r_1}{r_0} \right)^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-n} \qquad \textbf{(S10,49,1)}$$

چون $r_1 > r_0$، دنباله ی $\left(r_1 / r_0 \right)^{-n}$ با افزایش n به سمت صفر میل می کند.

یعنی $\ell im \left(r_1 / r_0 \right)^{-n} = 0$. بنابراین برای $n \ge N$. $\left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-n} \le \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-N_1}$. با جایگذاری این در معادله (S۱۰,٤۹-۱)، داریم:

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-n} r_0^{-n} \le \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{-N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n}$$

بنابراین

$$A = \left(r_0 / r_1 \right)^{N_1} = \left(r_1 / r_0 \right)^{-N_1}$$

(ب) نامعادله بالا نشان می دهد که اگر $X(z)$ باند محدود B را برای $|z|=r_{\circ}$ داشته باشد، $X(z)$ باند محدود $B\left(\frac{r_{\circ}}{r_1}\right)^{N_1}$ را برای $|z|=r_1 \geq r_{\circ}$ خواهد داشت. بنابراین همگرایی $X(z)$ برای $|z|=r_1>r_{\circ}$ و خاصیت ٤ از بخش ۱۰,۲ پیروی می کند.

(ج) فرض کنید دنباله ی دست چپی $x[n]$ به صورت:

$$x[n]=\circ\ ;\ for\ \ n>N_2$$

باشد، و برای اینکه

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|r_{\circ}^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]|/r_{\circ}^{-n}$$

در اینصورت

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|r_1^{-n} \leq p\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\ r_{\circ}^{-n} \qquad \text{(S۱۰,٤۹-۲)}$$

که p ثابت یک مثبت می باشد.

طرف چپ معادله (S۱۰,٤۹-۲) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]|\ r_1^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]|\left(r_{\circ}\frac{r_1}{r_{\circ}}\right)^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|r_{\circ}^{-n}\left(\frac{r_1}{r_{\circ}}\right)^{-n}\end{aligned} \qquad \text{(S۱۰,٤۹-۳)}$$

چون $r_1 \leq r_{\circ}$، دنباله $\left(\frac{r_1}{r_{\circ}}\right)^{-n}$ با کاهش n به زوال می رسد یعنی $\lim_{n\to-\infty}\left({r_1}/{r_{\circ}}\right)^{-n}=\circ$. بنابراین برای $n\leq N_2$، $\left({r_1}/{r\circ}\right)^{-n} \leq \left({r_1}/{r\circ}\right)^{-N}$. با جایگذاری این در معادله (S۱۰,٤۹-۳) بدست می آوریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]|\ r_1^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]|\ r_{\circ}^{-n}\left(\frac{r_1}{r_{\circ}}\right)^{-n} \leq \left(\frac{r_1}{r_{\circ}}\right)^{-N_2}\sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]|r_{\circ}^{-n}.$$

بنابراین

$$p=\left({r_1}/{r_{\circ}}\right)^{-N_2}=\left(\frac{r_{\circ}}{r_1}\right)^{N_2}$$

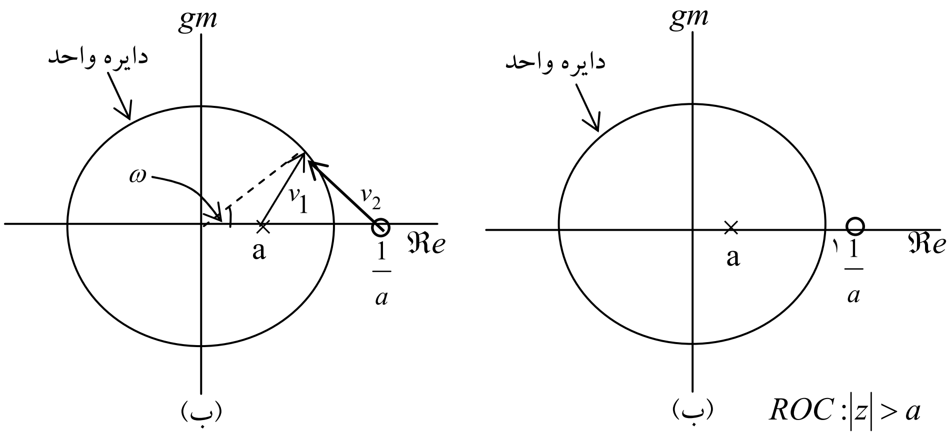
نامعادله فوق نشان می دهد که اگر $X(z)$ به ازای $|z|=r_\circ$ باند محدود B را داشته باشد، در اینصورت $X(z)$ باند محدود $B\left(\frac{r_\circ}{r_1}\right)^{N_2}$ را به ازاء $|z|=r\le r_\circ$ خواهد داشت.

نابراین $X(z)$ برای $|z|=r_1\le r_\circ$ همگراست و از خاصیت ۵ قسمت ۱۰،۲ تبعیت می کند.

....

۱۰،۵۰) سیستم گسسته در زمانی که نمودار قطب ـ صفر آن مطابق شکل م ۱۰–۵۰ (الف) باشد، سیستم مرتبه اول تمام‌گذر خوانده می‌شود، زیرا دامنه پاسخ فرکانسی آن به ازای تمام فرکانسها ثابت است.

(الف) به صورت جبری نشان دهید که $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ ثابت است.



شکل م ۱۰–۵۰

برای اثبات خاصیت فوق به طریق هندسی، نمودار‌برداری شکل م ۱۰–۵۰ (ب) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم که طول υ_2 طول υ_1، مستقل مقدار ω، متناسب است.

(ب) با اعمال قانون کسینوسها به مثلثی که اضلاع آن υ_1، بردار واحد و برداری به طول a است، طول υ_1 را بیابید.

(ج) طول υ_2 را به روش بند (ب) بیابید و نشان دهید که ω هر چه باشد، با طول υ_1 متناسب است.

حل:

(الف) از طرحهای صفر ـ قطب داده شده، داریم:

$$H(z)=A\frac{z^{-1}-a}{1-a\,z^{-1}}$$

که A ثابت می باشد. بنابراین

$$H\left(e^{j\omega}\right)=A\frac{e^{-j\omega}}{1-a\,e^{-j\omega}}$$

,

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=H\left(e^{j\omega}\right)H^*\left(e^{j\omega}\right)=|A|^2\left[\frac{e^{-j\omega}-a}{1-a\,e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{e^{j\omega}-a}{1-a\,e^{j\omega}}\right]$$

بنابراین

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=|A|^2\frac{1-ae^{-j\omega}-a\,e^{j\omega}+a^2}{1-a\,e^{-j\omega}-a\,e^{j\omega}+a^2}$$

که بیان می کند $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=A=$ ثابت.

(ب) داریم

$$\begin{aligned}|v_2|^2&=1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos\omega\\&=\frac{1}{a^2}\left[a^2+1+2a\cos\omega\right]=\frac{1}{2^2}|v_1|^2\end{aligned}$$

....

۱۰,۵۱) دنباله حقیقی $x[n]$ با تبدیل z گویای $X(z)$ را در نظر بگیرید.

(الف) با توجه به تعریف تبدیل z نشان دهید که

$$X(z)=X^*\left(z^*\right)$$

(ب) با توجه به نتیجه بند الف نشان دهید که اگر $X(z)$ در $z=z_\circ$ قطب (صفر) داشته باشد، حتماً در $z=z_\circ^*$ نز قطب (صفر) دارد.

(ج) نتیجه بند (ب) را برای هر یک از رشته‌های زیر امتحان کنید.

(۱) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(۲) $x[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]+\frac{1}{4}\delta[n-2]$

(د) با ترکیب نتایج بند (ب) و مسئله ۱۰-۴۳ (ب) نشان دهید که برای یک رشته حقیقی و زوج، اگر $H[z]$ در $z=\rho e^{j\theta}$ و $z=(1/\rho)e^{-j\theta}$ نیز قطب (صفر) دارد.

حل:

(الف) می دانیم برای دنباله حقیقی $x[n]$، $x[n]=x^*[n]$. ابتداً تبدیل z را برای $y[n]=x^*[n]$ برحسب $X(z)$ بدست می آوریم. (تبدیل z برای $x[n]$) داریم:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{-\infty=n}^{\infty} y[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\,z^{-n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(z^*\right)^{-n}\right]^* \\
&= \left[X\left(z^*\right)\right]^* = X^*\left(z^*\right)
\end{aligned}
$$

حال، بدلیل اینکه $x[n]=x^*[n]$، داریم: $Z\{x[n]\}=Z\{x^*[n]\}$ که به صراحت بیان می کند که $X(z)=X^*\left(z^*\right)$.

(ب) اگر $X(z)$ یک قطب در $z=z_\circ$ داشته باشد، در اینصورت $\frac{1}{X(z_\circ)}=\circ$. از نتیجه قسمت قبلی می دانیم که $\frac{1}{X^*\left(z_\circ^*\right)}=\circ$.

با گرفتن مزدوج از طرفی داریم $X\left(z_\circ^*\right)=\circ$. که این بیان می کند که $X(z)$ صفری در $z_\circ^*$ دارد.

(ج) (۱) تبدیل z برای دنباله داده شده برابر است با:

$$
X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z-1/2} \qquad |z|>1/2
$$

واضح است که $X(z)$ قطبی در $z=1/2$ و صفری در $z=\circ$ دارد و خاصیت قسمت (ب) حفظ می شود.

(۲) تبدیل z برای دنباله داده شده برابر است با:

$$
X(z)=1-\frac{1}{2}z^{1}+\frac{1}{4}z^{-2}=\frac{z^2-\left(1/2\right)z+1/4}{z^2}
$$

$X(z)$ صفرهای مضاعفی در $z=1/2$ و قطبهای مضاعفی در $z=\circ$ دارد. هنوز هم خاصیت قسمت (ب) حفظ شده است.

(د) حال، از قسمت (ب) مسئله ۱۰،٤۳، می دانیم که اگر $x[n]$ و $X(z)$ قطبی در $z_\circ = p\ e^{j\theta}$ داشته باشد، در اینصورت $X(z)$ بایستی که قطبی در $\left(\frac{1}{z_\circ}\right)=\left(\frac{1}{p}\right)e^{-j\theta}$ داشته باشد، در چنین شرایطی از قسمت (ب) می دانیم که $X(z)$ باید قطبی در $z_\circ^* = pe^{-j\theta}$ داشته باشد، در اینصورت، $X(z)$ بایـد قطبی در $\left(1\big/z_\circ^*\right)=\left(\frac{1}{p}\right)e^{j\theta}$ داشته باشد.

بحث مشابهی می تواند در مورد صفرها صورت گیرد.

۱۰،٥۲) رشته $x_1[n]$ با تبدیل $X_1(z)z$ و رشته $x_2[n]$ با تبـدیل $X_2(z)z$ را در نظـر بگیریـد، کـه برای آنها

$$x_2[n]=x_1[-n]$$

نشان دهید که $X_2(z)=X_1(1/z)$، و به کمـک آن نـشان دهیـد کـه اگـر $X_1(z)$ در $z=z_\circ$ قطـب (صفر) داشته باشد، قطب (صفر) $X_2(z)$ در $z=1/z_\circ$ است.

حل:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n_1[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] = z^{n} \\ &= X_1\left(z^{-1}\right) = X_1\ 1\!\big/\!2 \end{aligned}$$

با استفاده از بحث مشابهی که برای بار اول در قسمت (ب) مسئله ۱۰،٤۳ انجام شد، مـی تـوان بحـث کرد که اگر $X_1(z)$ قطبی (یا یک صفر) در $z=z_\circ$ داشته باشد، در اینصورت $X_2(z)$ بایستی قطـب یا صفری در $z=\frac{1}{z_\circ}$ داشته باشد.

۱۰،٥۳) (الف) این خواصمندرج در جدول ۱۰-۱ را ثابت کنید:

(۱) خاصیت بخش ۱۰-٥-۲ (۲) خاصیت بخش ۱۰-٥-۳

(۳) خاصیت بخش ۱۰-٥-٤

(ب) اگر $X(z)$ تبدیل $x[n]z$ و R_x ناحیه همگرایی آن باشد، تبدیل z و ناحیه همگرایی دنباله‌های زیر را با برحسب $X(z)$ و R_x به دست آورید

(۱) $x^*[n]$

(۲) $z_\circ^n x[n]$، که در آن $z_\circ$ یک عدد مختلط است.

حل:

فرض کنید $x[n]$ دنباله ای با تبدیل z به صورت $X(z)$ باشد که دارای Roc به صورت $a<|z|<\beta$ است.

(الف) تبدیل z برای دنباله ی $y[n]=x[n-n_\circ]$ عبارتست از:

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_\circ]\, z^{-n}$$

با جایگذاری $m=n-n_\circ$ داریم:

$$Y(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, z^{-m-n_\circ}$$
$$=z^{n_\circ}\sum x[m]\, z^{-m}=z^{-n_\circ}X(z).$$

مشخصاً، $Y(z)$ همگراست اگر $X(z)$ همگرا باشد بجز برای افزودن یا حذف کردن $z=\circ$ بدلیل جمله $z^{-n_\circ}$. بنابراین Roc برای $Y(z)$ برابر است با $\propto<|z|<\beta$ بجز برای افزودن یا حذف کردن ممکن برای $z=\circ$ در Roc.

(۲) تبدیل z دنباله ی $y[n]=z_\circ^n\ x[n]$ عبارتست از:

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_\circ^n\, x[n] z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(z/z_\circ\right)^{-n}=X\left(z/z_\circ\right)$$

چون $X(z)$ به ازای $\propto<|z|<\beta$ همگراست، $Y(z)$ به ازاء $\propto<\left|z/z_\circ\right|<\beta$ همگراست. بنابراین Roc برای $Y(z)$ برابر است با $\propto|z_\circ|<|z|<\beta|z_\circ|$.

(۳) تبدیل z براب دنباله $y[n]=x[-n]$ برابر است با:

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]\, z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{n}$$
$$=X\left(1/2\right)$$

چون $X(z)$ بـه ازای $\propto<|z|<\beta$ همگراسـت،$Y(z)$ بـرای $\propto<\left|1/2\right|<\beta$ همگراسـت، بنـابراین Rocی $Y(z)$ عبارتست از $1/\beta<|z|<1/\propto$.

(ب) (۱) از مسئله (۰,۵) (الف)، می دانیم که تبدیل z دنباله $y[n]=x^*[n]$.

(۲) فرض کنید که Roc $x[n]$ در $\propto<|z|<\beta$ برابر است با:

$$Y(z)=X\left(z/z_\circ\right)$$

Roc شامل $|z_\circ|\beta<|z|<|z_\circ|\propto$. بنابراین $Ry=|z_\circ|R_x$.

۱۰,۵٤) در بخش ۱۰–۵–۹ قضیه مقدار اولیه را برای دنبالههایعلی بیان و ثابت کردیم.

(الف) قضیه متناظری برای $x[n]$ های ضد علی (یعنی رشتهای که به ازای $n>\circ$، $x[n]=\circ$) بیـان و ثابت کنید.

(ب) نشان دهید اگر به ازای $n<\circ$، $x[n]=\circ$، آنگاه

$$x[1]=\underset{z\to\infty}{\text{حد}}\; z\big(X(z)-x[\circ]\big)$$

حل:

(الف) فرض کنید برای $n>\circ$، $x[n]=\circ$ ، در اینصورت

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\circ} x[n]\, z^{-n}$$
$$=x[\circ]+x[-1]z+x[-2]\, z^{2}+\dots$$

(ب) فرض کنید برای $n<\circ$، $x[n]=\circ$، در اینصورت

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]_z^{-n} \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= x[\circ]+x[1]z^{-1}+x[-2]\,z^{-2}+\ldots \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{z\to\infty} z(x(z)-x[\circ])$$
$$\lim_{z\to\infty} x\{x[1]\,z^{-1}+x[-2]\,z^{-2}+\ldots\}=x[1]$$

....

۱۰,۵۵) فرض کنید $x[n]$ یک رشته علی است (یعنی در $n<\circ$، $x[n]=\circ$) و $X(z)$ با تعداد صفرهای متناهی آن مساوی است.

حل:

(الف) از قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{z\to\infty} X(z)=x[\circ]=$$ غیر صفر و محدود

بنابراین با میل کردن $z\to\infty$، $X(z)$ به مقداری محدود و غیر صفر میل می کند. که بیان می کند $X(z)$ هیچ قطب و صفری در بی نهایت ندارد.

(ب) تبدیل z گویا، از فاکتورهای $\frac{1}{(z-a)}$ و $(z-b)$ تشکیل می شود. توجه کنید که فاکتور $\frac{1}{(z-a)}$ قطبی در $z=a$ و صفری در بی نهایت دارد. همچنین توجه کنید که فاکتور $(z-b)$ صفری در $z=b$ و قطبی در بی نهایت دارد. از نتایج قسمت (الف) می دانیم که دنباله کازال هیچ صفر و قطبی در بی نهایت ندارد. بنابراین تمام صفرها در بی نهایت توسط عامل $\frac{1}{z-a}$ حذف و تمام قطب ها در بی نهایت توسط عامل $(z-b)$ حذف می شوند. این بیانگر این مطلب است که مقدار فاکتور $(z-b)$ معادل تعداد فاکتور $\frac{1}{z-a}$ است. مکرراً، تعداد صفها در صفحه ی z محدود باید معادل تعداد قطبها در صفحه ی z محدود باشد.

۱۰,۵٦) در بخش ۱۰–۵–۷ خاصیت کانولوشن تبدیل کردیم. برای اثبات این خاصیت از جمع کانولوشن زیر شروع می‌کنیم

$$x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]x_2[n-k] \qquad \text{(م ۱۰–٥٦–۱)}$$

(الف) با گرفتن تبدیل z از دو طرف معادله (م ۱۰–٥٦–۱) و استفاده از معادله (۳۰–۳) نشان دهید که

$$X_3(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]\hat{x}_2(z)$$

که در آن $\hat{X}_2$ تبدیل $x_2[n-k]$ است.

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) و خاصیت ۱۰–۵–۲ جدول ۱۰–۱ نشان دهید که

$$X_3(z)=X_2(z)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]z^{-k}$$

(ج) با توجه به نتیجه بند (ب) نشان دهید که

$$X_3(z)=X_1(z)X_2(z)$$

که همان معادله (۱۰–۸۱) است.

حل:

(الف) تبدیل z برای $x_3[n]$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
x_3(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_3[n]\,z^{-n}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]x_2[n-k]\right]z^{-n}\\
&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n-k]\,z^{-n}\right]\\
&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]\,Z\{x_2[n-k]\}\\
&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]\,\widetilde{X}_2(x)
\end{aligned}$$

(ب) با استفاده از خاصیت شیفت زمانی (۱۰,۵,۲) داریم:

$$\widetilde{x}_2(z)=Z\{x_2[n-k]\}=z^{-k}X_2(Z)$$

که $X_2(z)$ تبدیل z برای $x_2[n]$ است. با جایگذاری در نتیجه قسمت (الف) داریم:

$$X_3(z)=X_z(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]\,z^{-k}$$

(ج) با توجه به اینکه تبدیل z برای $x_1[n]$ را به صورت زیر می توان نوشت داریم:

$$X_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]=z^{-k}$$

می توان نتیجه قسمت (ب) را به شکل زیر نوشت:

$$X_3(z)=X_1(z)X_2(z)$$

۱۰,۵۷) فرض کنید

$$X_1(z)=x_1[\circ]+x_1[1]z^{-1}+\ldots+x_1[N_1]z^{-N1}$$
$$X_2(z)=x_2[\circ]+x_2[1]z^{-1}+\ldots+x_2[N_2]z^{-N2}$$

تعریف می‌کنیم

$$Y(z)=X_1(z)X_2(z),$$

و

$$Y(z)=\sum_{k=\circ}^{M}y[k]z^{-k}$$

(الف) M را بر حسب N_1 و N_2 تعیین کنید

(ب) با ضرب چند جمله‌ایها $y[\circ]$، $y[1]$، و $y[2]$ را بیابید.

(ج) با ضرب چند جمله‌ایها نشان دهید که در $\circ \le k \le M$

$$y[k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1[m]x_2[k-m]$$

حل:

(الف) $X_1(z)$ یک چند جمله از مرتبه ی N_1 برحسب z^{-1} است. $X_2(z)$ نیز یک چند جمله ای از مرتبه N_2 می باشد. بنابراین $Y(z)=X_1(z)X_2(z)$، یک چند جمله ای با مرتبه N_1+N_2 برحسب z^{-1} می باشد یعنی $M=N_1+N_2$.

(ب) با توجه به اینکه $y[\circ]$ برابر ضریب z° برحسب $Y(z)$ می باشد، $y[1]$ ضریب z^{-1} برحسب $Y(z)$ است و $y(z)$ ضریب z^{-2} برحسب $Y(z)$ می باشد، بنابراین:

$$y[\circ]=x_1[\circ]x_2[\circ]$$
$$y[1]=x_1[\circ]x_1[\circ]x_2[1]+x_1[1]x_2[\circ]$$
$$y[2]=x_1[\circ]x_2[2]+x_1[1]x_2[1]+x_1[2]x_2[\circ]$$

(ج) بـه الگـویی توجـه کنیـد کـه از قـسمت (ب) داریـم. k–امـین نقطـه در دنبالـه، ضـریب z^{-k} برحسب $Y(z)$ است. جمله z^{-k} برحسب $Y(z)$ به صورت زیر می بشاد.

$$\begin{bmatrix} \text{حاصلضرب } z^{-1} \text{ برحسب } X_1(z) \\ \text{با } z^{-k+1} \text{ برحسب } X_2(z) \end{bmatrix} + \dots \begin{bmatrix} \text{حاصلضرب } z^{\circ} \text{ برحسب } X_1(z) \\ \text{با } z^{-k} \text{ برحسب } X_2(z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{حاصلضرب } z^{-N_1} \text{ برحسب } X_1(z) \\ \text{با } z^{-k+N_1} \text{ برحسب } X_2(z) \end{bmatrix} + \dots \begin{bmatrix} \text{حاصلضرب } z^{-2} \text{ برحسب } X_1(z) \\ \text{با } z^{-k+2} \text{ برحسب } X_2(z) \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$y[k] = \sum_{m=\circ}^{N_1} x[m]x_2[k-m]$$

بدلیل اینکه $x_1[m] = \circ$ برای $m > N_1$ و $m < \circ$، می‌توان دوباره بازنویسی زیر را داشت:

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[k-m]$$

....

۱۰,۵۸) سیستم می‌نیمم فاز سیستمی است که علّی و پایدار بوده، سیستم وارون آن نیز علّـی و پایـدار باشد. قیدهای لازم بر روی محل قطبها و صفرهای تابع سیستم یک سیستم می‌نیمم فاز را در صفحه z تعیین کنید.

حل:

سیستم پایدار و کازالی با تابع تبدیل $H(z)$ در نظر بگیرید و نیز فرض کنید سیستم معکوس آن دارای تبدیل $H_1(z)$ است. قطبهای $H_1(z)$ صـفرهای $H(z)$ هـستند و صـفرهای $H_1(z)$ قطبهـای $H(z)$ می‌باشند.

برای اینکه $H(z)$ متناظر با یک سیستم کازال و پایدار باشد، باید تمام قطبهای آن در درون دایره واحد باشند. بطور مشابه، برای اینکه $H_1(z)$ متناظر با سیستمی کازال و پایدار باشد باید تمام قطبهای آن در درون دایره واحد باشند. چون قطبهای $H_1(z)$ صفرهای $H(z)$ هستند. حالت قبلی بیان مـی‌کنـد کـه

صفرهای $H(z)$ باید در درون دایره واحد باشند، بنابراین تمام قطبها و صفرهای سیستم فـاز ـ مینـیمم باید در درون دایره واحد باشند.

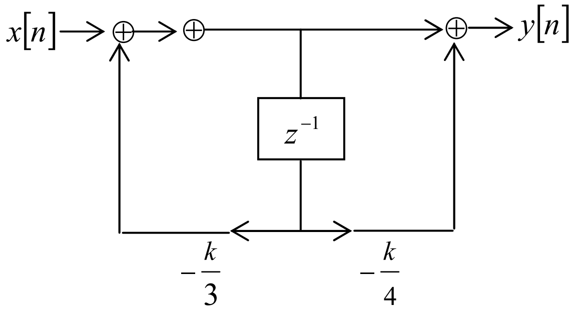
....

۱۰,۵۹) فیلتر دیجیتال شکل م ۱۰–۵۹ را در نظر بگیرید.

(الف) $H(z)$ این فیلتر علی را بیابید. نمودار قطب ـ صفر آن را رسـم کـرده، ناحیـه همگرایـی‌اش را تعیین کنید.

(ب) به ازای چه مقادیری از k سیستم پایدارست؟

(ج) اگر $k=1$ و به ازای تمام مقادیر n داشته باشیم $x[n]=\left(\frac{2}{3}\right)^n$، $y[n]$ را بیابید.



شکل م ۱۰–۵۹

حل:

(الف) از شکل S۱۰,۵۹، داریم:

$$W_1(z)=X(z)-\frac{k}{3}\,z^{-1}w_1(z)\Rightarrow w_1(z)=X(z)\frac{1}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}$$

و نیز

$$w_2(z)=-\frac{k}{4}\,z^{-1}\,w_1(z)=-X(z)\frac{\left(z^{-1}\right)}{1+\frac{k}{3}\,z^{-1}}$$

بنابراین $Y(z)=w_1(z)+w_2(z)$:

$$Y(z)=X(z)\frac{1}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}-X(z)\frac{\frac{k}{4}z^{-1}}{1+k/3\,z^{-1}}$$

و بالاخره:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{k}{4}z^{-1}}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}$$

چون $H(z)$ متناظر با یک فیلتر کازال است، Roc بصورت $|z|>\frac{|k|}{3}$ می‌باشد.

(ب) برای ینکه سیستم پایدار باشد بایستی Rocی $H(z)$ شامل دایره واحد باشد، این تنها در صورتی ممکن است که $1>|k|/3$. که بیان می‌دارد که $|k|$ باید کمتر از ۳ باشد.

(ج) اگر $k=1$ باشد، در اینصورت:

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1+1/3\,z^{-1}}$$

پاسخ به $x[n]=(2/3)^n$ به صورت زیر است:

$$y[n]=x[n]H(2/3)=\frac{5}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

۱۰,٦۰) سیگنال $x[n]$ با تبدیل ـ z یکطرفه $X(z)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تبدیل z یکطرفه $y[n]=x[n+1]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y(z)=zX(z)-zx[\circ].$$

حل:

تبدیل Z یکطرفه $y[n]=x[n+1]$ برابر است با:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} y[n]x^{-n} \\
&= y[\circ]+y[1]z^{-1}+y[2]z^{-2}+\ldots \\
&= x[1]+x[2]z^{-1}+x[3]z^{-2}+\ldots \\
&= z\{x[\circ]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]^{-3}+\ldots\}-zx[\circ] \\
&= zX(z)-zx[\circ]
\end{aligned}
$$

۱۰،۶۱) $X(z)$ تبدیل z یکطرفه $x[n]$ است. تبـدیل z یکطرفـه سـیگنالهای زیـر را برحـسب $X(z)$ بنویسید:

الف) $x[n+3]$

ب) $x[n-3]$

ج) $\sum_{k}^{n}=-\infty^{x[k]}$

حل:

الف) تبدیل z یکطرفه‌ای $y[n]=x[n+3]$ برابر است:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} y[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=\circ}^{\infty} x[n+3]z^{-n} \\
&= \sum_{n=\circ}^{\infty} x[n+3]z^{-n}+x[\circ]z^{3}+x[1]z^{2}+x[2]z \\
&= \sum_{n=\circ}^{\infty} x[n]z^{-n+3}-x[\circ]z^{3}+x[1]z^{2}+x[2]z \\
&= z^{3}\sum_{n=\circ}^{\infty} x[n]z^{-n}+x[\circ]z^{3}-x[1]z^{2}+x[2]z \\
&= z^{3}X(z)+x[\circ]z^{3}-x[1]x^{2}-x[2]z
\end{aligned}
$$

ب) تبدیل z یکطرفه‌ای $y[n]=x[n-3]$ برابر است با:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} y[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=\circ}^{\infty} x[n-3]z^{-n} \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} x[n-3]z^{-n} + x[-1]z^{-2} + x[-2]z^{-1} + x[-3] \\
&= \sum_{n=\circ}^{\infty} x[n]z^{-n-3} + x[-1]z^{-2} + x[-2]z^{-1} + x[-3] \\
&= z^{-3}\sum_{n=\circ}^{\infty} x[n]z^{-n} - x[\circ]z^{-3} - x[1]z^{-2} - x[2]z^{-1} + x[-3] \\
&= z^{-3}X(z) - x[\circ]z^{-3} - x[1]z^{-2} - x[2]z^{-1} + x[-3]
\end{aligned}
$$

ج) داریم:

$$
y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{m=\circ}^{\infty} x[n-m]
$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{m=\circ}^{\infty} z^{-m}X(z) + \sum_{m=1}^{\infty} z^{-m}\sum_{l=1}^{m} x[-l]z^{l} \\
&= \frac{X(z)}{1-z^{-1}} + \sum_{m=1}^{\infty} z^{-m}\sum_{l=1}^{m} x[-l]z^{l}
\end{aligned}
$$

۱۰,۶۲) دنباله خود همبستگی $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$
\phi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n+k]
$$

تبدیل $\phi_{xx}[n]$ را برحسب تبدیل z دنباله $x[n]$ بیان کنید.

حل:

توجه کنید که

$$
\phi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k] = x[n] * x[-n]
$$

حال، با استفاده از خاصیت کانولوشن تبدیل z برای $\phi_{xx}..[n]$ داریم:

$$\phi_{xx}(z) = X(z)Z\{x[-n]\}$$

و از خاصیت معکوس زمانی تبدیل z داریم:

$$x[-n] \xrightarrow{z} x\left(1/z\right)$$

....

۱۰,۶۳)با استفاده از بسط سری توانی زیر

$$\log(1-w) = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{w^i}{i} \quad , \quad |w|<1$$

عکس تبدیل z دو تابع زیر را بیابید:

(الف) $\quad |z|<\frac{1}{2} \quad , \qquad X(z)=\log(1-2z)$

(ب) $\quad |z|>\frac{1}{2} \quad , \qquad X(z)=\log\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$

حل:

الف) از آنجایی که ROC شامل $|z|<\frac{1}{2}$ می‌باشد، دنباله دست چپی است، بنـابراین بـا اسـتفاده از سری نهایی توانی داریم:

$$\log(1-2x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n z^n}{n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{2^{-n} z^{-n}}{n}$$

بنابراین:

$$x[n] = \frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]$$

ب) از آنجایی که ROC شامل $|z| > 1/2$ می‌باشد، دنباله دست راستی اسـت. بـا اسـتفاده از سـری نهایی توانی، بدست می‌آوریم:

$$\log\left(1-\left(1/2\right)z^{-1}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1/2\right)^n z^{-n}}{n}$$

بنابراین

$$x[n] = -\frac{2^{-n}}{n} u[n-1]$$

....

۱۰,٦٤) با مستقگیری از $X(z)$ و استفاده از خواص مناسب تبدیل z، عکس تبدیل z هر یک از توابع زیر را بیابید.

(الف) $|z| < \frac{1}{2}$ و $X(z) = \log(1-2z)$

(ب) $|z| > \frac{1}{2}$ و $X(z) = \log\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$

حل:

فرض کنیم $Y(z)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$y[z] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

در این صورت با استفاده از خاصیت دیفرنس تبدیل z ، داریم:

$$y[n] = nx[n]$$

الف) حال:

$$Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z) = z\frac{2}{1-2z} = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

حال با توجه به اینکه ROC ی $Y(z)$ شامل $|z| < \frac{1}{2}$ می‌باشد (مانند ROC ی $X(z)$) داریم:

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

بنابراین

$$x[n] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] = \sum_n^{-n} u[-n-1]$$

که مشابه جواب بدست آمده در قسمت (الف)از مسأله ی ۱۰,٦۳ می‌باشد.

ب) در این قسمت:

$$Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

با توجه به اینکه ROC ی $Y(z)$ شامل $|z| > \left(\frac{1}{2}\right)$ می‌باشد (مانند ROC ی $X(z)$؛ داریم:

$$y[n] = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

بنابراین:

$$x[n] = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n-1] = \frac{-2^{-n}}{n}u[n-1]$$

که مشابه جواب بدست آمده در قسمت (ب) از مسأله‌ی ۱۰٫۶۳ می‌باشد.

....

۱۰٫۶۵) تبدیل دو خطی نگاشتی برای یافتن تبدیل z گویای $H_d(z)$ از تبدیل لاپلاس گویای $H_c(s)$ است. این نگاشت دو خاصیت مهم دارد:

۱. اگر $H_c(s)$ تبدیل لاپلاس یک سیستم LTI علی و پایدار باشد، $H_d(z)$ تبـدیل z یـک سیـستم LTI علی و پایدارست.

۲. بعضی مشخصات مهم $|H_c(j\omega)|$ در $|H_d(e^{j\omega})|$ حفظ می‌شود.

در این مسئله خاصیت دوم را برای فیلترهای تمام گذر نشان می‌دهیم.

(الف) فرض کنید

$$H_c(s) = \frac{a-s}{s+a}$$

که در آن a عددی حقیقی و مثبت است. نشان دهید که

$$|H_c(j\omega)| = 1$$

(ب) حال تبدیل دو خطی را به $H_c(s)$ اعمال کرده، $H_d(z)$ را می‌یابیم.

$$H_d(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

نشان دهید که $H_d(z)$ یک قطب (داخل دایره واحد) و یک صفر (خارج دایره واحد) دارد.

(ج) نشان دهید که برای $H_d(z)$ به دست آمده در بند (ج) داریم $\left|H_d\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1$.

حل:

الف) با استفاده از $H_c(s)$ داده شده، داریم:

$$H_d(z) = \frac{a - \dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{a + \dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{a-1}{a+1}\left[\frac{1+z^{-1}\,\dfrac{\propto+1}{a-1}}{1+z^{-1}\,\dfrac{a-1}{a+1}}\right]$$

بنابراین $H_d(s)$ قطبی در $z = \dfrac{(a-1)}{(a+1)}$ و صفری در $z = \dfrac{(a+1)}{(a-1)}$ می‌باشد.

از آنجایی که a عددی حقیقی و مثبت می‌باشد داریم:

$$\left|\frac{a-1}{a+1}\right| \le 1 \qquad , \qquad \left|\frac{a+1}{a-1}\right| \ge 1$$

بنابراین، قطب $H_d(z)$ درون دایره‌ای واحد و صفرش خارج دایره واحد قرار می‌گیرد.

(ج) $H_d(z)$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$H(z) = \frac{(a-1)+z^{-1}(a+1)}{(a+1)+z^{-1}(a-1)}$$

$$H(z) = \frac{(a-1)+z^{-1}(a+1)}{(a+1)+z^{-1}(a-1)}$$

بنابراین

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{\left|(a-1)+e^{-j\omega}(a+1)\right|}{\left\|(a+1)+e^{-j\omega}(a-1)\right\|}$$

$$= \frac{(a-1)+(\cos\omega - j\sin\omega)(a+1)}{(a+1)+(\cos\omega - j\sin\omega)(a-1)}$$

رابطه‌ی فوق را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{\sqrt{(a-1)^2+\cos^2\omega(a+1)^2+2(a+1)(a-1)\cos\omega+(a+1)^2\sin^2\omega}}{\sqrt{(a+1)^2+\cos^2\omega(a-1)^2+2(a+1)(a-1)\cos\omega+(a-1)^2\sin^2\omega}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a-1)^2+(a+1)^2+2(a+1)(a-1)\cos\omega}}{(a+1)^2+(a-1)^2+2(a+1)(a-1)\cos\omega} = 1$$

۱۰,٦٦) تبدیل دوخطی معرفی شده در مسئله قبل را م ی‌توان برای ساختن فیلتر گسسته در زمـانی بـه کار برد که اندازه پاسخ فرکانسی آن با اندازه پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین‌گذر مـشابه باشـد. در ایـن مسئله ا ین تشابه را با یک مثال نشان می‌دهیم، تابع سیستم $H_c(s)$ فیلتر را از نوع با یروث مرتبه دوم برمی‌گزینیم.

(الف) فرض کنید

$$H_d(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

نشان دهید که

$$H_d(e^{j\omega}) = \left(j\ \tan\frac{\omega}{2}\right)$$

(ب) داریم

$$H_c(s) = \frac{1}{(s+e^{j\pi/4})(s+e^{-j\pi/4})}$$

و فیلتر متناظر با آن علی است. نشان دهید که $H_c(\circ)=1$ ، $|H_c(j\omega)|$ با افزایش ω بـه طـور یکنـوا کاهش می‌یابد، $H_c(j)\Big/^2 = \frac{1}{2}$ (یعنی فرکانس نصف توان $\omega_c = 1$ است، و $H_c(\infty) = \circ$.

(ج) نشان دهید که اگر $H_d(z)$ با اعمال تبدیل دو خطی به $H_c(s)$ بند (ب) به دست آید مـی‌تـوان مطالب زیر را در مورد $H_d(z)$ و $H_d(e^{j\omega})$ بیان کنید.

۱. $H_d(z)$ تنها دو قطب دارد که هر دو داخل دایره واحدند.

۲. $H_d(e^{jo}) = 1$.

۳. با افزایش ω از ∘ به π، $|H_d(e^{j\omega})|$ به طور یکنوا کم می‌شود.

٤. فرکانس نصف توان $H_d(e^{j\omega})$ برابر $n/2$ است.

حل:

(الف) داده شده است:

$$H_d(z) = H_c\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

بنابراین

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=H_c\left(\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right)=H_c\left(\frac{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}}\right)=H_c\left(j\tan\frac{\omega}{2}\right)$$

(ب) با استفاده از $H_c(s)$ داده شده، داریم:

$$H_c(\circ)=\frac{1}{\left(e^{j\pi/4}\right)\left(e^{-j\pi/4}\right)}=1$$

,

$$H_c(\infty)=\frac{1}{\lim\limits_{s\to\infty}\left(s+e^{j\pi/4}\right)\left(s+e^{-j\pi/4}\right)}=\circ$$

حال:

$$H_c(j\omega)=\frac{1}{\left|\left(j\omega+e^{j\pi/4}\right)\left(j\omega+e^{-j\pi/4}\right)\right|}$$

$$=\frac{1}{\left|\left(-\omega^2+2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)j^{\omega+1}\right)\right|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+2\omega\cos^2(\pi/4)\omega^2}}$$

واضح است که $\left|H_c(j\omega)\right|$ با افزایش ω کاهش می‌یابد.

(ج) (۱) داده شده است:

$$H_d(z)=H_c\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

بنابراین

$$H_d(z)=\frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+e^{j\pi/4}\right)\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+e^{-j\pi/4}\right)}$$

این عبارت را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$H_d(z)=\frac{1}{\left(1+e^{j\pi/4}\right)\left(1+e^{-j\pi/4}\right)}\frac{\left(1+z^{-1}\right)^2}{\left(1-z^{-1}\dfrac{1+e^{j\pi/4}}{1-e^{j\pi/4}}\right)\left(1-z^{-1}\dfrac{1+e^{-j\pi/4}}{1-e^{-j\pi/4}}\right)}$$

بنابراین $H_d(z)$ دقیقاً دو قطب در $z=-\left(1+e^{j\pi/4}\right)/\left(1-e\right)^{j\pi/4}$ و $z=\dfrac{-\left(1+e^{-j\pi/4}\right)}{\left(1-e^{-j\pi/4}\right)}$ دارد.

به سادگی می‌توان نشان داد که این دو قطب درون دایره واحد قرار می‌گیرند.

(۲) از نتیجه‌ی قسمت (الف)؛ داریم:

$$H_d\left(e^{jo}\right)=H_c\left(j\tan^{\circ}\right)=H_c\left(j\circ\right)=1$$

(۳) داریم:

$$\left|H_d\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|H_c\left(j\tan{\omega}/{2}\right)\right|=\frac{1}{\left|1-\tan^2\left({\omega}/{2}\right)+\sqrt{2}\,j\tan\left({\omega}/{2}\right)\right|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\tan^2\left({\omega}/{2}\right)\right)^2+2\tan^2\left({\omega}/{2}\right)}}$$

با افزایش ω از ۰ تا π، $\tan\left({\omega}/{2}\right)$ از ۰ تا ∞ به صورت یکنوا افزایش می‌یابد بنابراین $\left|H_d\left(e^{j\omega}\right)\right|$ به صورت یکنوا از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.

(٤) فرکانس نیم ـ توان ω_d را بطری زیر را برآورده می‌سازد:

$$\left|H_d\left(e^{j\omega d}\right)\right|^2=\frac{1}{2}=\left|H_c\left(j\tan\frac{\omega_d}{2}\right)\right|^2$$

از طرفی می‌دانیم $\left|H_c(j)\right|^2={1}/{2}$، بنابراین:

$$j\tan\frac{\omega}{2}=j\Rightarrow\qquad\omega_d=\pi/2$$