فصل دوم

تحلیل سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان در حوزه زمان

مقدمه

در فصل یک با تعریف سیگنال و سیستم و هم‌چنین با دسته‌بندی سیگنال‌ها و سپس با خواص عمومی سیستم‌ها آشنا شدیم. از جمله خواص سیستم‌ها دو خاصیت خطی (Linear) و نامتغیر بودن سیستم با زمان (Time-Invariant) است. سیستمی که دارای این دو خاصیت است را بطور خلاصه یک سیستم LTI میگوییم و تجزیه و تحلیل این نوع سیستم‌ها موضوع این کتاب است. واقعیت این است که سیستم‌های LTI تنها زیرمجموعهٔ کوچکی از مجموعهٔ سیستم‌ها به شمار می‌روند. اما علیرغم این حقیقت، سیستم‌های LTI فقط به خاطر سادگیِ تحلیل‌اشان بسیار مورد علاقهٔ مهندسین قرار گرفته‌اند. علاوه بر آن، مهندسین سیستم در برخی موارد سعی می‌کنند تا حد امکان عملکرد سیستم‌های غیرخطی را با ترکیبی از چند سیستم LTI تقریب بزنند تا از لحاظ تحلیل مساله را ساده‌تر نمایند و به اصطلاح مساله را تحلیل‌پذیر خطی نمایند.

ماهیت تغییرناپذیری یک سیستم با زمان نیز از جمله خواصی است که در عمل بندرت اتفاق می‌افتد. هر سیستم، اعم از اینکه بوسیلهٔ انسان، و یا ماشین‌آلات ساخته شدهٔ توسط انسان، تولید شده باشد ویا یک سیستم طبیعی باشد، یک مخلوق است. بنابراین هر سیستم به اعتبار اینکه یک مخلوق است و زمان یکی از ابعاد آن به شمار می رود، بالاخره ماهیتش دستخوش تغییر و تحول است. به عبارت دیگر زمان در عملکرد هر سیستم یک عامل تعیین‌کننده به حساب می‌آید. مفهوم مطلق ساخت یک سیستم مستقل از زمان به دلایل فلسفی و هم‌چنین بدلایل عِلمی و عَمَلی غیرممکن است و به هر حال هر سیستم تابعی از زمان است. زیرا هر سیستم روزی خلق و بالاخره روزی هم از بین می‌رود که این نشان متغیر بودن سیستم با گذشت زمان است، اگرچه این تغییرات به کُندی و آرامی خود را ظاهر کند. با وجودی که هر سیستمی متغیر با زمان است ولی میتوان در مدت معقولی از زمان، که این مدت بستگی به نوع سیستم دارد، مشخصات سیستم را تقریباً ثابت فرض کرد و آن را یک سیستم نامتغیر با زمان پنداشت. بنابراین، باید توجه کرد *که تفاوت زیادی میان آنچه که قلم به عنوان یک سیستم LTI روی صفحه کاغذ و بصورت یک بلوک چهارگوش در کتاب می‌نگارد و تحقق واقعی آن وجود دارد.* بعنوان مثال، مقدار یک مقاومت ساده که باید ظاهرا مقداری ثابت باشد، توسط کارخانهٔ سازنده به صورت جمع یک مقدار ثابت و هم‌چنین یک مقدار خطا ارائه می‌شود. این عدم قطعیت در بیان مقدار دقیق مقاومت‌هایِ تولیدی کارخانجات سازنده بیانگر این واقعیت است که این سیستم ساده که قبلاً به عنوان سیستم ضرب و تقسیم‌کننده معرفی شد در حقیقت و در جهان خارج یک سیستم با مشخصات متغیر با زمان ومکان و پارامترهای ناشناختهٔ مختلف دیگر ازقبیل ***عوامل زیست محیطی*** است. از عواملی که در تعیین مقدار حقیقی یک مقاومت دخالت دارند می‌توان به رطوبت هوا و گرما اشاره کرد و اینها فقط برخی از مجموعه عوامل موثر و تعیین کننده بر عملکرد یک مقاومت ساده می‌باشند. از طرف دیگر فقط در محدوده خاصی از دامنه ورودی این مقاومت بصورت یک سیستم ضرب یا تقسیم‌کننده عمل می‌کند و اگر دامنه ورودی از یک حد بیشتر شود امکان تغییر ماهیت (مثلا مشاهده پدیده

سوختن) وجود دارد و سیستم خاصیت غیرخطی از خود نشان می‌دهد. بنابراین اگر واقع‌بینانه به جهان خارج نگاه کنیم امکان شناسائی یک سیستم ایده‌آل LTI بسیار مشکل است. یکی از سیستم‌های معروف غیر LTI، انسان است. برخوردهای چندگانه یک نفر با یک رویداد بیانگر ماهیت متغیر با زمان این سیستم است. این ماهیت متاثر از عوامل بسیاری است که نه تنها ماهیت دقیق این عوامل بلکه حتی اثرات هر یک از آن‌ها کاملاً شناخته شده نیست. ***خداوند متعال نیز در قرآن کریم یک سیر تکاملی و صعودی را برای انسان از لحاظ قدرت جسمی ذکر فرموده است که این سیر تا میانسالی ادامه پیدا میکند. پس از دورهٔ میانسالی، سیر نزولی قدرت جسمانی شروع می‌شود و تا پیری و نهایتاً مرگ جسمانی، این سیر ادامه پیدا می‌کند.***

بنابر این، در عبارات فوق، نوعی تابعیت زمانی برای جسم و قدرت جسمی انسان مشاهده می‌شود. در مورد سیستم‌های ساخت بشر نیز به تبعِ خودِ بشر، نوعی ماهیتِ تابعیت از زمان مشاهده می‌شود. اما به هر حال همانگونه که اشاره شد در محدودهٔ خاصی از زمان و مقادیر ورودی، می‌توان عملکرد برخی سیستم‌ها را بصورت سیستم‌های LTI شبیه‌سازی کرد. این حقیقت ما را رهنمون می‌سازد تا سطح معلومات خود را در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI بالا برده و این سیستم‌ها را که اتفاقاً ساده‌ترین نوع سیستم‌ها از لحاظ تحلیل هستند بیشتر مورد توجه قرار دهیم. در اینجا تذکر این نکته ضروری است که بحث ما دراین کتاب فقط به سیستم های تک ورودی و تک خروجی[1] اختصاص دارد. در اغلب موارد سیستم های مورد مطالعه درحقیقت سیستم های چند ورودی و چند خروجی[2] هستند. درحقیقت از بعد علمی و همینطور فلسفی تمامی موجودات در عملکرد یکدیگر موثرهستند، اگر چه مکانیزم این تاثیرات برای ما کاملا شناخته شده نباشد. هم‌چنین قوانین ثابتی (حداقل در محدودهٔ شرائط خاص) بر بسیاری یا همهٔ موجودات حاکم است. به عنوان یک مثال ساده، بالاخره هر سیستمی دارای جرمی است و تحت تاثیر قانون جاذبهٔ عمومی کلیهٔ اجرام در جهان هستی می‌باشد. البته این تاثیر از نوع شناخته شدهٔ آن در جهان است. البته از تاثیر بسیاری از اجرام بر جرمی که در فاصلهٔ بسیار دوری از آن قرار گرفته‌اند می‌توان صرفنظر کرد. در نتیجه تعداد ورودی‌های سیستم کاهش می‌یابد. تاثیرات متعدد دیگری بین موجودات هستی وجود دارد که اغلب آنها ناشناخته هستند و همگی می توانند منشا تغییر در عملکرد سیستم و اختلاف پیش بینی ما با واقعیت گردند. اگر در جائی مشاهده می کنیم که علیرغم دقت فوق العاده ما در مدلسازی یک سیستم، هنوز خروجی سیستم قابل پیش بینی نیست و یا خروجی های سیستم به ورودی های یکسان متفاوت است، به خاطر عدم شناخت دقیق ما از مکانیزم این تاثیرات ودامنهٔ آنها است.

از تعابیر فلسفی که بگذریم در یک سیستم با تعداد دلخواه ورودی وخروجی ارتباط یک خروجی دلخواه با برخی از ورودی ها می تواند خطی ویا غیر خطی باشد. اگر ارتباط مهمترین خروجی سیستم،

---

[1] Single Input Single Output (SISO)
[2] Multi Input Multi Output (MIMO)

از نقطه نظر ما، با مهمترین و تعیین کننده ترین ورودی، خطی و غیرمتغیربازمان باشد، منطقی است و مجاز هستیم که یک برداشت LTI از سیستم مورد نظر ارائه کنیم.

علت اصلی ساده شدن تحلیل در این گونه سیستم‌ها، استفاده از پاسخ سیستم به تابع ضربه است. ما با یافتن پاسخ سیستم به تابع ضربه، که آن‌را ***پاسخ به ضربه*** (و یا بطور کوتاه پاسخ ضربه) می‌نامیم، می‌توانیم پاسخ به هر ورودی دیگر را بدست آوریم. این کار با کانولوشن پاسخ ضربهٔ سیستم و سیگنال ورودی بدست می‌آید. بنابراین، عمده‌ترین بخش تحلیل سیستم‌های LTI عبارت از یافتن پاسخ ضربهٔ آن سیستم است. با معلوم بودن پاسخ ضربهٔ سیستم و کانولوشن آن با سیگنال ورودی، سیگنال خروجی بدست می‌آید. روش کانولوشن جهت یافتن پاسخ به ورودی دلخواه در این فصل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

تذکر این نکته ضروری است که پاسخ ضربه تنها راه یافتن پاسخ سیستم LTI به ورودی دلخواه نیست. بلکه می‌توان ورودی را به مجموعهٔ وزن‌دهی شده‌ای از هر نوع سیگنال‌های پایه یا ویژهٔ دیگر که از لحاظ تحلیل ساده است بسط داد (مثلاً توابع سینوسی یا نمایی) و بعد با یافتن پاسخ سیستم به یکی از این سیگنال‌های پایه، می‌توان پاسخ سیستم به هر نوع ورودی دیگری را بدست آورد. بعنوان مثال اگر ورودی قابل بسط بصورت زیر باشد:

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{۲-۱}$$

(مسلماً در این صورت ورودی متناوب خواهد بود) اگر پاسخ به ورودی $\exp(jk\omega_0 t)$ را برابر $G(k\omega_0 t)$ بنامیم، در اینصورت پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه، که قابل بیان به صورت (۲-۱) باشد، توسط رابطه (۲-۲) بیان می‌گردد:

$$y(t) = \sum a_k G(k\omega_0 t) \tag{۲-۲}$$

خاصیتی که توابع پایه باید داشته باشند این است که هم قابلیت توصیف هر سیگنالی و یا اکثر سیگنال‌های مهم را داشته باشند و هم پاسخ سیستم LTI به آن توابع به سادگی بدست آید. در میان توابع پایه مختلف تابع ضربه از همه ساده‌تر است، و کلیه خواص یک تابع پایه خوب را نیز دارا است. به همین خاطر در این فصل ابتدا به بررسی و تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI به کمک تابع ضربه (از طریق یافتن پاسخ ضربه) می‌پردازیم و در فصل‌های بعدی به بررسی کلی سیستم‌های LTI و ارائه توابع پایه جدید می‌پردازیم.

۲-۱ بسط سیگنال برحسب توابع ضربه

۲-۱-۱ بسط سیگنال گسسته زمان برحسب توابع ضربه

همانگونه که اشاره شد قدم اصلی در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه زمان (به مفهوم یافتن پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه) بسط دادن ورودی برحسب توابع ضربه است و پس از آن با محاسبه پاسخ به یک تابع پایه (یا همان پاسخ ضربه) و با توجه به خاصیت LTI بودن سیستم می‌توان پاسخ

سیستم به هر ورودی دلخواه را یافت. در این قسمت بخاطر سادگی ابتدا توجه خود را به سیستم‌های گسسته زمانی معطوف می‌کنیم و یک رابطه بسط برای یک دنباله دلخواه ورودی بصورت $x[n]$، برحسب توابع ضربه انتقال یافته $\delta[n-k]$ ارائه می‌کنیم. به دنباله دلخواه $x[n]$ در شکل (۲-۱-a) توجه کنید. این دنباله را می‌توان متشکل از یک رشته ضربه انتقال یافته و وزن‌دهی‌شده بیان کرد. بعنوان مثال ضربه‌های این دنباله را که به ترتیب در $n=-2, n=-1, n=0, n=1, n=2$ قرار دارند در شکلهای (۲-۱-a) الی (۲-۱-f) مشاهده می‌کنید. این ضربه‌های انتقال‌یافته و وزن‌دهی‌شده، قابل توصیف برحسب توابع ضربه ومقدار دنباله در هر نقطه هستند. بعنوان مثال ضربه‌های موجود در $n=-1, n=0, n=1$ بترتیب بصورت ریاضی زیر قابل بیان هستند.

$$\mathrm{x}[-1]\delta[n+1]=\begin{cases} x[-1] & n=-1 \\ 0 & n\neq -1 \end{cases}$$

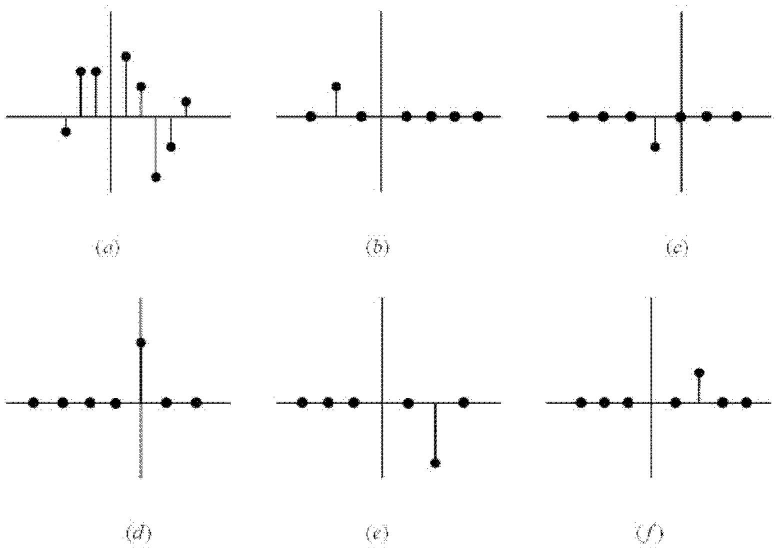
$$x[0]\delta[n]=\begin{cases} x[0] & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1]=\begin{cases} x[1] & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

=

بنابراین $x[n]$ به صورت مجموع جملات توابع ضربه چنین می‌شود:

$$x[n]=\ldots+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+\cdots$$



شکل (۲-۱): تجزیه سیگنالهای گسسته زمان بصورت مجموع توابع ضربه انتقال یافته و وزن شده

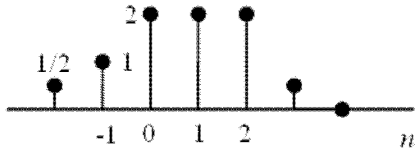
پس در حالت کلی داریم

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k] \tag{۲-۳}$$

رابطه (۲-۳) بسط سیگنال دلخواه $x[n]$ برحسب ترکیب خطی توابع ضربه انتقال یافته بصورت $\delta[n-k]$ می‌باشد که سنگینی هر عبارت مساوی $x[k]$ است. بنابراین به عنوان مثال برای $x[n]=u[n]$ داریم

$$u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$$

مثال (۲-۱): مطلوبست رابطه بسط دنباله زیر برحسب توابع ضربه.



حل: وزن ضربه منتقل شده $\delta[n-k]$، توسط مقدار $x[n]$ در همان نقطه $n=k$ تعیین می‌شود بنابراین داریم

$$x[n]=(1/2)\delta[n+2]+\delta[n+1]+2\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]+(1/2)\delta[n-3]$$

مثال (۲-۲): با توجه به رابطه بسط تابع پله برحسب توابع ضربه، دنباله مثال (۲-۱) را برحسب توابع پله بسط دهید.

حل: داریم

$$u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$$

بنابراین می‌توان یک ضربه را برحسب توابع پله بصورت زیر نوشت

$$\delta[n-m]=u[n-m]-u[n-m-1]$$

بنابراین دنباله مثال (۲-۱) را برحسب توابع پله بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned}x[n]&=(1/2)\{u[n+2]-u[n+1]\}+\{u[n+1]-u[n]\}\\&+2\{u[n]-u[n-1]\}+2\{u[n-1]-u[n-2]\}\\&+2\{u[n-2]-u[n-3]\}+(1/2)\{u[n-3]-u[n-4]\}\end{aligned}$$

که پس از ساده کردن به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$x[n]=(1/2)u[n+2]+(1/2)u[n+1]+u[n]-(3/2)u[n-3]-(1/2)u[n-4]$$

تمرین (۲-۱): اگر این دنباله به عنوان ورودی به یک سیستمLTI اعمال شود خروجی سیستم را بیابید، در صورتی‌که بدانیم پاسخ این سیستم به ورودی پله بصورت $y[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ است.

۲-۱-۲ بسط سیگنال پیوسته زمانی برحسب توابع ضربه

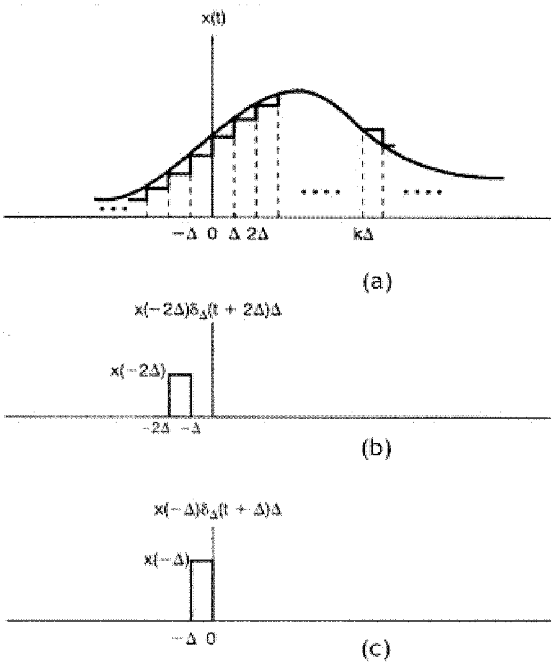
سیگنال پیوسته زمانی نیز مشابه حالت گسسته زمانی قابل بسط است. به‌عنوان مثال فرض کنید که $x_\Delta(t)$ تقریبی پله‌ای از تابع پیوسته $x(t)$ باشد. همانگونه که در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. با روشی مشابه حالت گسسته زمانی، می‌توان تابع $x(t)$ را بصورت ترکیبی خطی از پالس‌های تاخیر یافته نوشت. اگر پالس اصلی را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

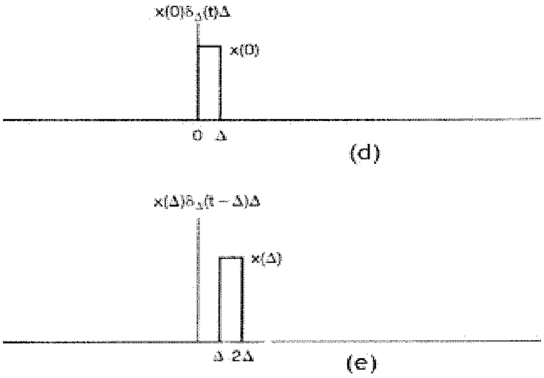
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \qquad (۴\text{-}۲)$$

بنابراین سنگینی هر پالس $x(k\Delta)$ است. البته لازم است تابع $\delta_\Delta(t)$را در Δ ضرب نمود تا دامنهٔ آن برابر واحد شود و سپس توسط توابع $x(k\Delta)$ وزن دهی کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta \qquad (۵\text{-}۲)$$

این مساله در شکل (۲-۲) به نمایش گذاشته شده است.





شکل (۲-۲): تقریب یک سیگنال پیوسته زمانی با استفاده از توابع پالس

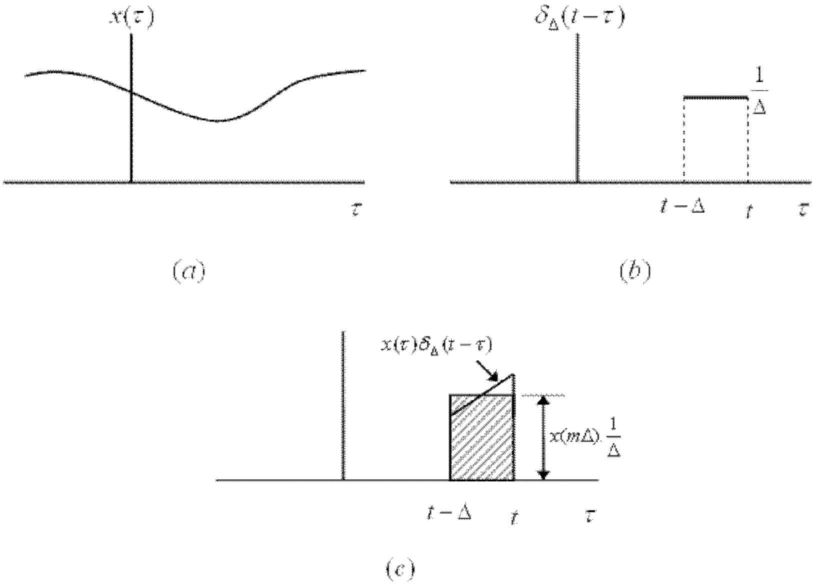
با توجه به شکل (۲-۲) مشاهده می‌شود که همانند حالت گسسته زمانی برای هر مقدار t، تنها یک جمله از مجموع در سمت راست معادله (۲-۵) غیرصفر است. با میل کردن Δ به سمت صفر رابطه (۲-۵) نمایانگر $x(t)$ خواهد شد، چون در این صورت حد $x_{\Delta}(t)$ با $x(t)$ مساوی خواهد شد. به عبارت ریاضی، یعنی

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \tag{۲-۶}$$

که در حد، علامت مجموع به سوی انتگرال، و $k\Delta$ به سمت یک عدد پیوسته مثل τ میل می کند ($k\Delta \to \tau$). در نهایت رابطه (۲-۶) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta\ (t - \tau)d\tau \tag{۲-۷}$$

با کمی دقت به شکل (۲-۳) متوجه می‌شوید که دامنهٔ سیگنال $x(\tau)\delta_{\Delta}(t-\tau)\Delta$ هنگامی که $\Delta \to 0$ نمایانگر مقدار $x(t)$ در نقطه $t = \tau$ می‌باشد. در این شکل ناحیه هاشور خورده بیانگر ناحیه‌ای است که مساحت آن تقریبا برابر سطح زیرمنحنی $x(\tau)\delta_{\Delta}(t-\tau)$ در فاصله $t-\Delta$ و t در نقطه $\tau = t = m\Delta$ می‌باشد.



شکل (۲-۳): نمایش معادله (۲-۶)

توجه کنید که رابطه (۲-۷) فقط با دانستن خواص تابع ضربه نیز قابل استنتاج است چون با توجه به خاصیت ضرب برای تابع ضربه، در اثر ضرب این تابع در تابع دلخواه $x(t)$، مقدار $x(t)$ در محل ضربه نمونه‌برداری می‌شود و سایر مقادیر $x(t)$ در مقدار حاصل‌ضرب تاثیری ندارند. به عبارت دیگر:

$$x(t)\delta(t-\tau)=x(\tau)\delta(t-\tau) \qquad (۸\text{-}۲)$$

که نمایانگر یک ضربه با مقدار $x(\tau)$ در $t=\tau$ می‌باشد. بدین ترتیب با جمع کردن نمونه‌ها می‌توان سیگنال $x(t)$ را بازسازی کرد. به عبارت ریاضی داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=x(t) \qquad (۹\text{-}۲)$$

در ایجاد تساوی از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که سطح زیر منحنی تابع ضربه مساوی واحد است.

مثال (۲-۳): اگر $x(t)=u(t)\ t>0$ باشد، به ازای $t>0$ داریم، $u(t)=1$. بنابراین رابطه (۲-۷) بصورت زیر در می‌آید:

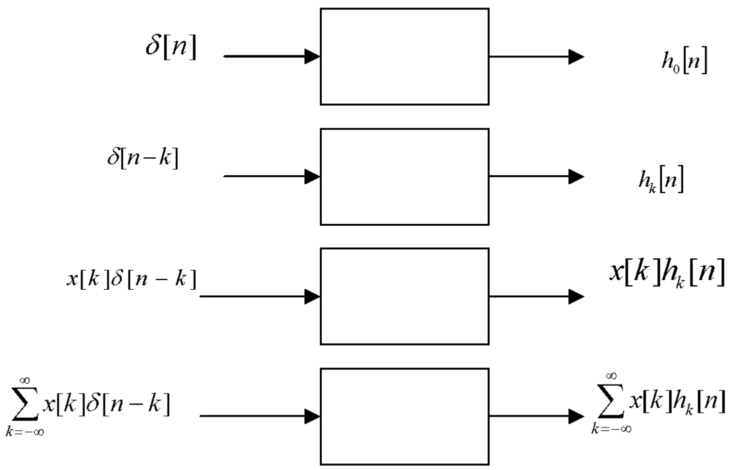
$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(t-\tau)d\tau \qquad (۱۰\text{-}۲)$$

رابطه فوق مشابه رابطه‌ای است که برای $u[n]$ در حالت گسسته زمانی ارائه شد.

۲-۲ جمع کانولوشن در سیستم‌های LTI

فرض کنید سیگنال $x[n]$ به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_0[n]$ اعمال می‌شود. با توجه به رابطه (۲-۲) که $x[n]$ را برحسب توابع ضربه انتقال یافته با وزن‌های متفاوت بیان می‌کند و باتوجه به

خاصیت جمع آثار[1] در سیستم‌های LTI می‌توان پاسخ $y[n]$ را برحسب پاسخ‌های ضربه انتقال یافته با وزنهای متفاوت نوشت. اگر $h_k[n]$ پاسخ ضربه سیستم به ورودی $\delta[n-k]$ باشد، در اینصورت چون سیستم همگن است، پاسخ سیستم به ورودی وزن شده $x[k]\delta[n-k]$ برابر $x[k]h_k[n]$ است. همچنین پاسخ سیستم به ورودی دلخواه $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$ برابراست با $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$. این مراحل در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۲-۴ مراحل تعیین پاسخ سیستم خطی گسسته زمانی به ورودی دلخواه

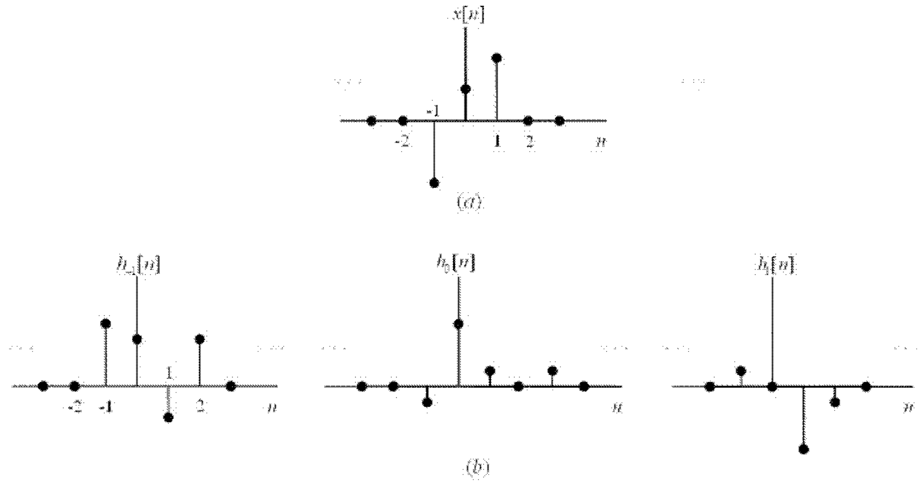
بنابراین پاسخ یک سیستم خطی، ولی نه لزوما مستقل اززمان، از رابطه جمع کانولوشن به صورت زیر بدست می آید.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] \qquad (۲-۱۱)$$

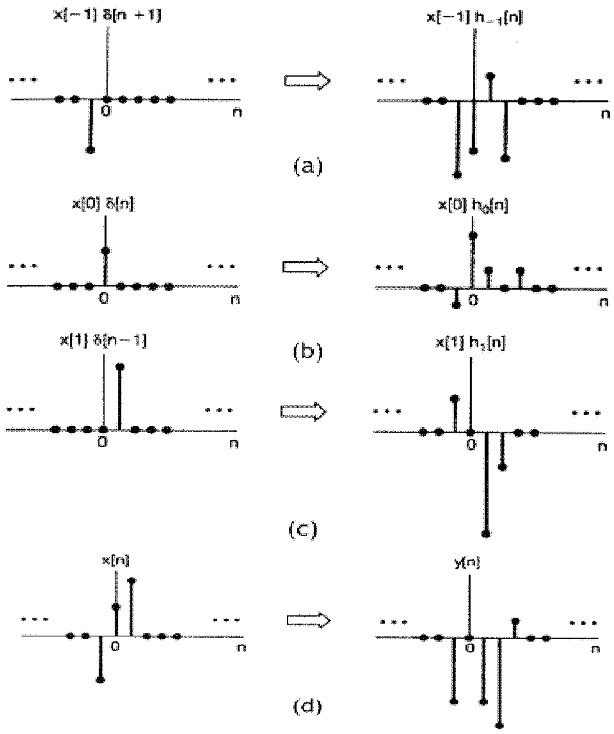
توجه داشته باشید که اگر سیستم LTI علاوه بر خطی بودن مستقل از زمان نیز باشد، درآنصورت $h_0[n-k] = h_k[n] = h[n-k]$ خواهد شد، یعنی با انتقال ورودی در حوزه زمان، خروجی فقط به همان اندازه در حوزه زمان انتقال پیدا خواهد کرد. به عنوان مثال به شکل‌های (۲-۵) و (۲-۶) توجه کنید.

---

[1] Superposition



شکل (۲-۵): نمایش پاسخ سیستم گسسته زمانی مربوط به رابطه (۲-۱۱)



شکل (۲-۶): محاسبه پاسخ سیستم خطی متغیر با زمان

خاصیت جمع آثار بخوبی از این شکل پیدا است. بعنوان مثال، شکل (۲-۵) می‌گوید اگر پاسخ سیستم به ضربه واحد برابر $h_0[n]$ باشد در این صورت پاسخ سیستم به $x[-1]\delta[n+1]$ می‌شود: $x[-1]h_{-1}[n]$، و پاسخ سیستم به $x[1]\delta[n-1]$، $x[1]h_1[n]$ می‌شود.

تا اینجا فقط از خاصیت خطی بودن سیستم استفاده کرده ایم و اگر سیستم مستقل از زمان (TI) نیز باشد رابطه (۲-۱۱) بصورت زیر درمی‌آید:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \qquad (۲-۱۲)$$

که این رابطه به جمع *کانولوشن* برای سیستم های LTI معروف است. معمولا از نماد * برای نمایش عمل کانولوشن استفاده می‌شود. در این صورت، می‌توان رابطه (۲-۱۲) را به صورت نمادین زیر نوشت:

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad (۲-۱۳)$$

مثال (۲-۴): فرض کنید ورودی $x[n] = \alpha^n u[n]$ به سیستمی با پاسخ ضربه $h[n] = u[n]$ اعمال شود. اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، مطلوبست پاسخ سیستم.

حل: در شکل (۲-۷) بترتیب $h[1-k], h[-1-k], h[-k], h[k]$ نمایش داده شده‌اند (بعبارت دیگر $h[n-k]$ به ازای $n = -1,0,1$). در شکل‌های (e-۷-۲) و (f-۷-۲) نیز بترتیب $h[n-k]$ به ازای مقدار مثبت و منفی دلخواه n رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که به ازای $n < 0$ هیچگونه روی هم افتادگی میان نقاط غیرصفر $x[k]$ و $h[n-k]$ وجود ندارد، پس برای $n < 0$ داریم (به ازای کلیه مقادیر k):

$$x[k]h[n-k] = 0$$

بنابراین برای $n < 0$ داریم:

$$y[n] = 0$$

برای $n \geq 0$ داریم:

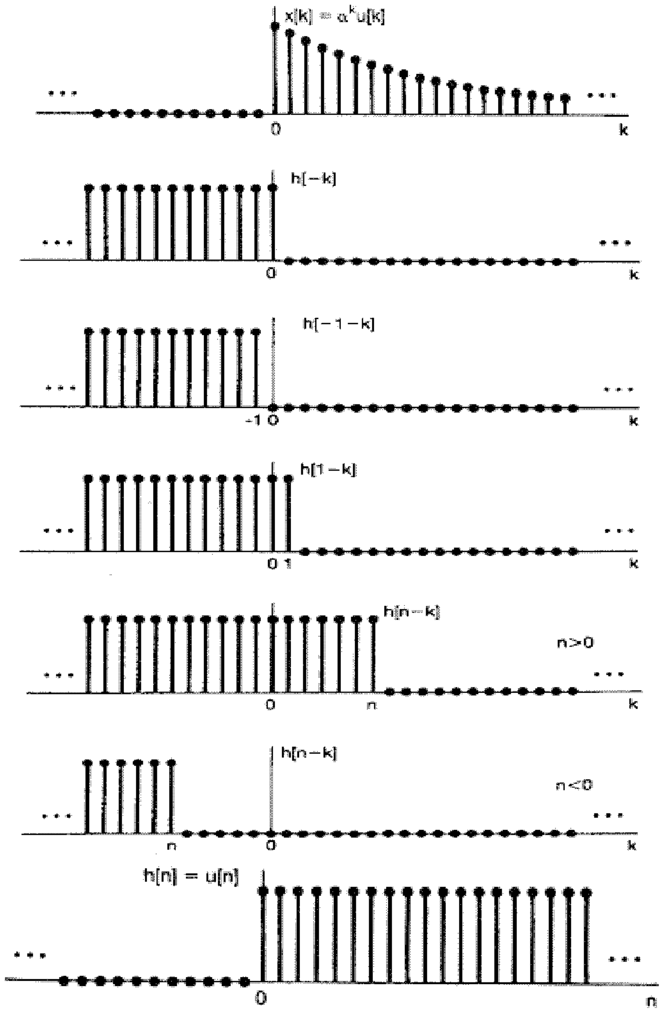
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{k} & 0 \geq k \geq n \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

بنابراین برای $n \geq 0$ داریم:

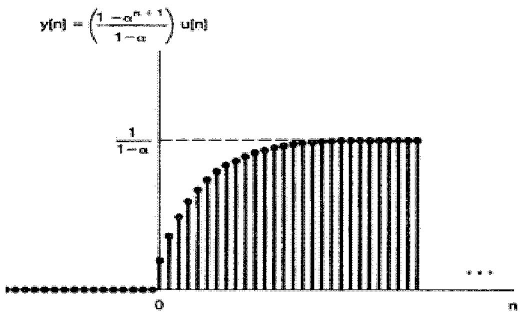
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \left(1-\alpha^{n+1}\right)/\left(1-\alpha\right)$$

در نتیجه، به ازای همه nها می‌توان خروجی را بصورت زیر نوشت:

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n]$$



شکل (۲-۷): نمایش مراحل جمع کانولوشن مثال (۲-۴)

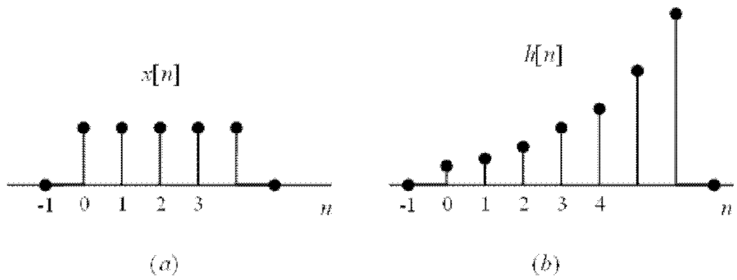


شکل (۲-۸): خروجی مثال (۲-۴)

مثال (۲-۵): بعنوان مثال دوم دو سیگنال زیر را با هم کانوالو کنید.
این سیگنال‌ها در شکل (۲-۹) نشان داده شده‌اند.

$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$$y[n]=\begin{cases}\alpha^{\mathrm{n}} & 0\le n\le 6\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$



شکل (۲-۹) :سیگنالهایی که در مثال (۲-۵) با هم کانولوشن می‌شوند.

برای محاسبه کانولوشن باید ۵ فاصله مجزا را در نظر گرفت (شکل ۲-۱۰ را ببینید).
فاصله اول: به ازای $n<0$ که هیچ اشتراکی بین $x[n]$ و $h[n-k]$ وجود ندارد، در نتیجه

$$y[n]=0$$

فاصله دوم: برای $0\le n\le 4$ داریم:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}$$

با تغییر متغیر $r=n-k$ داریم:

$$y[n]=\sum_{r=0}^{n}\alpha^{r}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

فاصله سوم: $4\le n\le 6$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\sum_{k=0}^{4}\left(\alpha^{-1}\right)^{k}=\alpha^{n}\frac{1-\alpha^{-5}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

فاصله چهارم: $6\le n\le 10$ داریم:

$$y[n]=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k}$$

با قرار دادن $r=k-n+6$ خواهیم داشت:

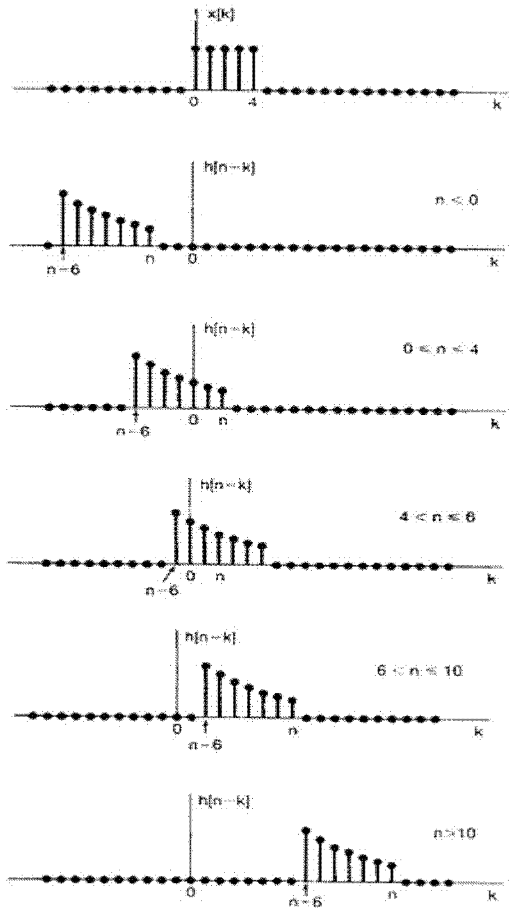
$$y[n]=\sum_{r=0}^{10-n}\alpha^{6-r}=\sum_{r=0}^{10-n}\alpha^{6}\left(\alpha^{-1}\right)^{r}$$

$$=\alpha^{6}\frac{1-\alpha^{n-11}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

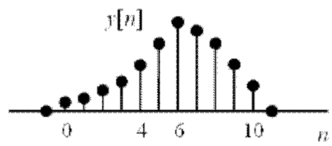
فاصله پنجم: برای $n>10$ باز هیچگونه وجه اشتراکی نخواهیم داشت و بنابراین:

$$y[n]=\begin{cases} 0 & n<0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0\le n\le 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 4\le n\le 6 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha} & 6\le n\le 10 \\ 0 & n>10 \end{cases}$$

کلیه این مراحل در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده اند.



شکل (۲-۱۰):نمایش جمع کانولشن مثال (۲-۵)

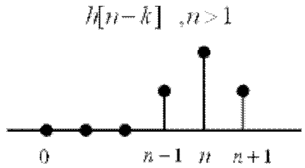


شکل (۲-۱۱): نتیجه عملیات کانولوشن مثال (۲-۵)

مثال (۲-۶): مطلوبست حاصل کانولوشن دو دنباله $h[n]$ و $x[n]$ *که بترتیب در سمت راست و چپ شکل* زیر نمایش داده شده‌اند.

شکل (۲-۱۲): دنباله‌های $x[n]$ ، $h[n]$ مربوط به مثال (۲-۶)

حل: با توجه به تقارن $h[n]$، متوجه می‌شویم که $h[-k]$ مشابه $h[k]$ است در شکل ۲-۱۳، $h[n-k]$ به ازاء مقادیر $n>1$ رسم شده است.



شکل (۲-۱۳): دنباله $h[n-k]$ به ازاء $n>1$ مربوط به مثال (۲-۶)

مشاهده می‌شود که هیچ‌گونه روی هم افتادگی میان دو دنباله $x[k]$ و $h[n-k]$ وجود ندارد، پس:

$$x[k]h[n-k]=0 \qquad >1$$

پس به ازای $n>1$ ، $y[n]$ مساوی صفر است، یعنی $\quad y[n]=0 \qquad >1$

اما برای $-4\le n\le 1$ دو تابع $x[k],h[n-k]$ روی هم افتادگی دارند، لذا مقدار $y[n]$ در این فاصله غیرصفر است. به ازاء $n=1$ فقط یک نقطه تداخل میان $h[n-k]$ و $x[k]$ وجود دارد (به ازاء $k=0$)، پس:

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[1-k]=x[0]h[1-0]=\frac{1}{2}$$

به ازاء $n=0$ دو نقطه تداخل میان $h[1-k],x[k]$ بوجود می‌آید (به ازایٔ $k=0,1$)، پس:

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\ h[1-k]=x[0]\ h[1-0]+x[1]\ h[0]$$

$$=(1)(\frac{1}{2})+(1)(1)=1+0.5=\frac{3}{2}$$

به ازاء دو مقدار درفاصله $-3<n<0$ نقاط تداخل ثابت باقی می‌ماند و در این دوحالت پاسخ برابر است با:

$$y[-1]=y[-2]=1(\frac{1}{2})+1(1)+1(\frac{1}{2})=2$$

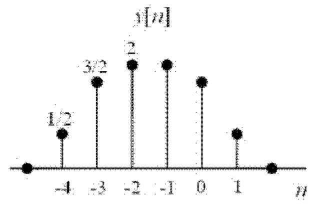
به ازاء $n=-3$ دو نقطه تداخل باقی می‌ماند و پاسخ برابر است با:

$$y[-3]=1(\frac{1}{2})+1(1)=\frac{3}{2}$$

به ازاء $n=-4$ فقط یک نقطه تداخل باقی می‌ماند:

$$y[-4]=1(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

و بنابراین $y[n]$ بصورت شکل زیر خواهد شد.



شکل (۲-۱۴): دنباله $y[n]$ حاصل کانولوشن مثال (۲-۶)

اکنون تعدادی از خواص مهم جمع کانولوشن را بیان می‌کنیم. این خواص عینا برای انتگرال کانولوشن که در بخش بعد به آن می پردازیم نیز صادق هستند.

۲-۳ خواص جمع کانولوشن

۱-جابجایی(۲-۱۴) $x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

این خاصیت به سادگی با قراردادن $r=n-k$ در رابطه (۲-۱۲) ثابت خواهد شد.

۲-شرکت‌پذیری(۲-۱۵) $x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$

اثبات این رابطه نیز به سادگی از تعریف جمع کانولوشن ۲-۱۲ امکان پذیر است.

اما توصیف و استفاده از این خاصیت در شکل (۲-۱۵) مارا به نتایج جالبی که فقط در مورد سیستم های LTI صادق است رهنمون می سازد.

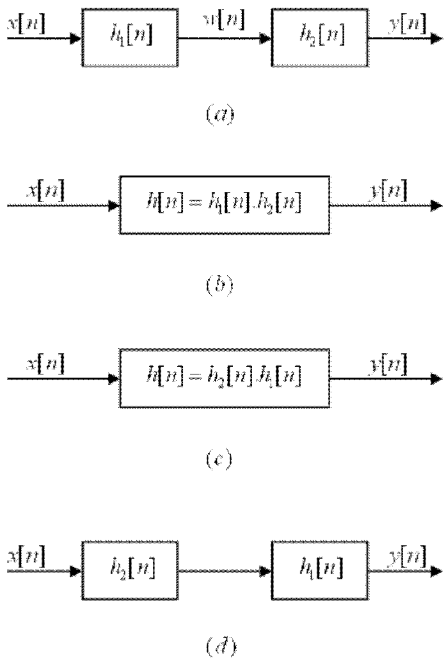
با توجه به شکل(۲-۱۵) داریم(۲-۱۶) $y[n]=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$

ولی با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری می‌توان نوشت(۲-۱۷) $y[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$

اکنون با توجه به خاصیت جابجایی در جمع کانولوشن داریم(۲-۱۸) $y[n]=x[n]*(h_2[n]*h_1[n])$

و دوباره با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری داریم(۲-۱۹) $y[n]=(x[n]*h_2[n])*h_1[n]$

بدین ترتیب ثابت می‌شود که عملکرد شکل‌های(۲-۱۵-a) و (۲-۱۵-d)یکسان است. به عبارت دیگر، همواره می توان ترتیب قرار گرفتن سیستم های LTI سری را تغییر داد بدون آنکه در عملکرد (پاسخ) کل سیستم تغییری حاصل شود.



شکل (۲-۱۵): خاصیت شرکت پذیری و استفاده از این خاصیت در ترکیب با خاصیت جابجایی جمع کانولوشن برای جابجایی سیستم‌های LTI

۳-خاصیت توزیع‌پذیری

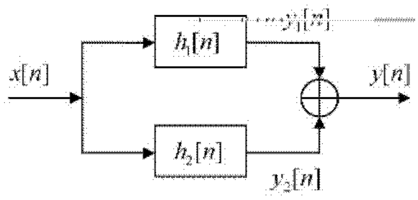
این خاصیت بیان می دارد که کانولوشن یک ورودی با مجموع چند پاسخ ضربه مساوی است با مجموع کانولوشن های همان ورودی با هریک از پاسخ ضربه های موردنظر.

$$x[n]*\left(\sum_{r=1}^{M} h_r[n]\right)=\sum_{r=1}^{M}\ (x[n]*h_r[n]) \qquad (۲۰-۲)$$

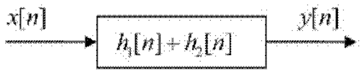
این خاصیت به سادگی با جابجائی ترتیب کانولوشن و مجموع ثابت می شود.

توصیف این خاصیت در شکل(۲-۱۶) داده شده است. به کمک این خاصیت می‌توان ترکیب موازی سیستم‌ها را به یک سیستم تبدیل کرد.

تمرین (۲-۳): آیا خاصیت جابجایی سیستم‌ها برای ترکیب متوالی سیستم‌های غیرخطی نیز صادق است؟



(a)



(b)

شکل (۲-۱۶): نمایش ساده‌ای از ساده کردن سیستم‌ها به کمک خاصیت توزیع پذیری

توجه به این نکته حائز اهمیت است که خواص فوق فقط در مورد سیستم‌های LTI صادق هستند، و در حالت کلی پاسخ ضربه یک سیستم غیرخطی بطور کامل نمی‌تواند سیستم و عملکرد آنرا مشخص سازد. بعبارت دیگر پاسخ ضربه یک سیستم غیرخطی همان قدراطلاعات در مورد سیستم دربردارد، که پاسخ به هر ورودی دیگر می‌تواند داشته باشد و ابدا بر ورودی های دیگر امتیازی ندارد. ولی در سیستم‌های LTI، پاسخ ضربه به تنهایی بیانگر سیستم و خواص آن و پیش‌بینی کننده عملکرد آن است. به بیان واضح‌تر می‌توان گفت که برای سیستم‌های LTI پاسخ ضربه بطور یکتا می‌تواند رابطه ورودی و خروجی سیستم را مشخص کند ولی در مورد سیستم‌های غیرخطی چنین نیست. به عنوان مثال، فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI بصورت زیر داده شده باشد:

$$h[n]=u[n]-u[n-3]$$

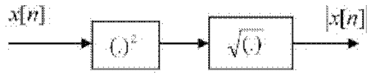
در این‌صورت، تنها و تنها یک سیستم LTI وجود دارد، که پاسخ ضربه آن بصورت فوق است و رابطه ورودی و خروجی آن سیستم دارای ضابطه زیر است:

$$y[n]=x[n]+x[n-1]+x[n-2]$$

در حالیکه اگر $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم غیرخطی در نظر گرفته شود چندین سیستم غیرخطی می‌توان یافت که پاسخ آنها به ورودی ضربه مساوی $h[n]$ شود. بعنوان مثال سیستم‌های زیر همگی دارای این خاصیت هستند.

$$y[n]=\left(x[n]+x[n-1]+x[n-2]\right)^m$$
$$y[n]=\max\left(x[n],x[n-1],x[n-2]\right)$$

مثال (۲-۷): آیا خاصیت جابجایی در مورد دو سیستم جذرگیرنده و بتوان ۲ رسانده صادق است؟
حل: پاسخ منفی است، چون اگر ابتدا سیستم بتوان ۲ رسانده و بعد جذرگیرنده را قرار دهیم، خروجی نهایی قدر مطلق ورودی است.



شکل (۲-۱۷): ترکیب متوالی دو سیستم غیرخطی

اما اگر ابتدا سیستم جذرگیرنده قرار داده شود خروجی این سیستم برای مقادیر منفی $x[n]$ تعریف نشده است (درمحدوده سیستم های حقیقی) لذا دو سیستم قابل جابجایی نیستند.

۲-۴ انتگرال کانولوشن برای سیستم‌های LTI پیوسته زمانی

همانند آنچه در مورد سیستم‌های گسسته زمانی انجام دادیم، هدف این بخش، بدست آوردن رابطه‌ای جهت توصیف پاسخ سیستم پیوسته زمانی به هر ورودی دلخواه برحسب فقط پاسخ ضربه سیستم است. قبلا دیدیم که هر ورودی دلخواه $x(t)$ را می‌توان برحسب توابع ضربه انتقال‌یافته و وزن‌دهی شده بصورت زیر نوشت:

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\ \delta_\Delta(t - k\Delta)\ \Delta \qquad (۲-۲۱)$$

که در آن تابع $\delta_\Delta(t)$ در رابطه (۲-۴) داده شده است. اکنون فرض می‌کنیم پاسخ سیستم به تابع $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ بصورت $h_{k\Delta}(t)$ در دسترس باشد، در این صورت با توجه به خطی بودن سیستم می‌توان پاسخ را بدست آورد.

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\ h_{k\Delta}(t)\ \Delta \qquad (۲-۲۲)$$

با میل کردن Δ به سمت صفر مجموع بسمت انتگرال، $x(k\Delta)$ به سمت $x(\tau)$ (که در آن τ مقادیر پیوسته اتخاذ می‌کند) و $h_{k\Delta}(t)$ به سمت $h_\tau(t)$ یا پاسخ به ضربه اعمال شده در لحظه $t=\tau$ میل می‌کنند. بدین ترتیب رابطه (۲-۲۲) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h_\tau(t)\ d\tau \qquad (۲-۲۳)$$

این رابطه انتگرال کانولوشن در حالت پیوسته زمانی برای سیستم های خطی ولی نه لزوما مستقل از زمان می باشد. به کمک این انتگرال می‌توان با در دست داشتن $h_\tau(t)$ یا پاسخ سیستم به ورودی $\delta(t-\tau)$، پاسخ به هر ورودی دلخواه $x(t)$ را یافت. توجه کنید که انتگرال فوق مستقیماً با استفاده از انتگرال (۲-۷) نیز قابل استخراج است، چون اگر داشته باشیم

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad (۲-۲۴)$$

با توجه به اینکه عملیات انتقال ورودی به خروجی در یک سیستم خطی توسط یک عملگر خطی انجام می‌شود، یعنی:

$$y[t] = T\big[x[t]\ \big] \qquad (۲-۲۵)$$

با استفاده از (۲-۲۴) برای سیگنال ورودی به سیستم، می‌توان رابطهٔ (۲-۲۵) را بصورت زیر نوشت:

$$y(t) = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\ d\tau\right] \tag{۲۶-۲}$$

و چون T خطی است می‌توان ترتیب آنرا با انتگرال عوض کرد. در این صورت

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T[x(\tau)\delta(t-\tau)]\ d\tau \tag{۲۷-۲}$$

و باز چون T خطی است می‌توان ضرایب ثابت (مستقل از t) را از آن خارج کرد، پس

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ T[\delta(t-\tau)]\ d\tau \tag{۲۸-۲}$$

و چون طبق تعریف پاسخ به ضربه انتقال یافته $\delta(t-\tau)$ برابر $h_\tau(t)$ است داریم

$$T[\delta(t-\tau)] = h_\tau(t) \tag{۲۹-۲}$$

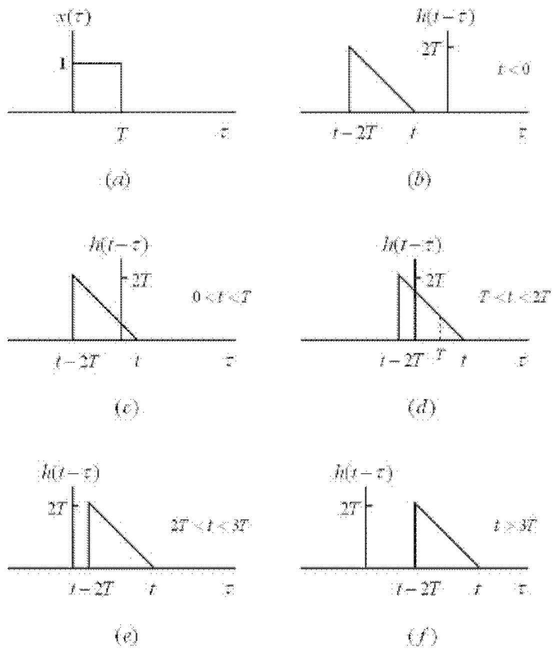
بنابراین، رابطه (۲-۲۳) مستقیماً بدست می‌آید. در اینجا تذکر این نکته حائز اهمیت است که کلیه خواص مطرح شده برای جمع کانولوشن از قبیل جابجائی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای انتگرال کانولوشن نیز صادق هستند.

مثال (۲-۹): مطلوبست محاسبه انتگرال کانولوشن زیر

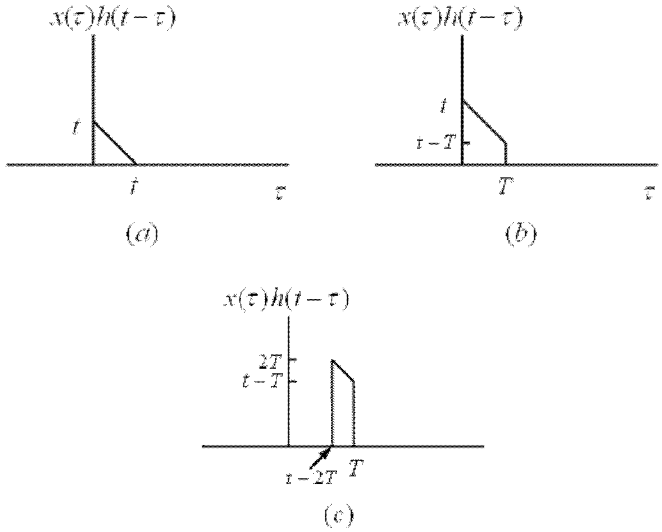
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad , \quad h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حل: باید محاسبه $y(t)$ را در چند فاصله مجزا انجام داد. برای $t<0$ و برای $t>3T$ عبارت $x(\tau)h(t-\tau)$ صفر است، بنابراین خروجی صفر است. برای فواصل دیگر حاصل ضرب $x(\tau)\ h(t-\tau)$ در شکل ۲-۱۸نمایش داده شده است.



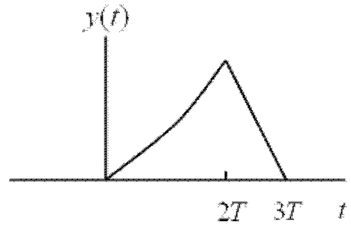
شکل (۲-۱۸): سیگنالهای $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ برای مقادیر مختلف t در مثال (۲-۹)



شکل (۲-۱۹): حاصل ضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ برای مثال (۲-۹) به ازاء سه مقدار t که در آنها این حاصلضرب لزوماً صفرنیست a) در بازه $0<t<T$ ، b) در بازه $T<t<2T$ و c)در بازه $2T<t<3T$

بنابراین داریم:

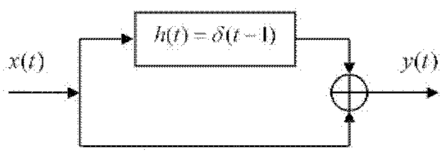
$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_{\tau=0}^{t}(t-\tau)d\tau = t^2-\frac{1}{2}t^2 & 0<t<T \\ \int_{\tau=0}^{T}(t-\tau)d\tau = tT-\frac{1}{2}T^2 & T<t<2T \\ \int_{\tau=t-2T}^{T}(t-\tau)d\tau = -\frac{1}{2}t^2+Tt+\frac{3}{2}T^2 & 2T<t<3T \\ 0 & t<3T \end{cases}$$



شکل (۲-۲۰): سیگنال $y(t)=x(t)*h(t)$ برای مثال (۲-۹)

تمرین (۲-۴): ثابت کنید حاصل کانولوشن تابع ضربه با تابع دلخواه $x(t)$ مساوی $x(t)$ است.

مثال (۲-۱۰): پاسخ ضربه سیستم زیرا را بیابید.



شکل (۲-۲۱): سیستم مثال (۲-۱۰)

حل: با توجه به شکل داریم:

$$y(t)=x(t)+x(t)*\delta(t-1)$$

با توجه به تمرین (۲-۴) می‌توان نوشت:

$$x(t)=x(t)*\delta(t)$$

پس،

$$y(t)=x(t)*\delta(t)+x(t)*\delta(t-1)$$

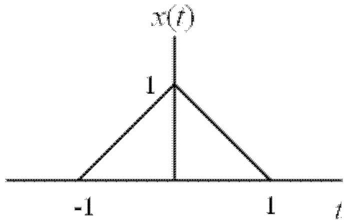
با توجه به خاصیت توزیع پذیری می‌توان نوشت:

$$y(t)=x(t)*[\delta(t)+\delta(t-1)]$$

بنابراین پاسخ ضربه کلی سیستم برابر است با

$$h(t)=\delta(t)+\delta(t-1)$$

مثال (۲-۱۱): مطلوب است خروجی سیستم فوق اگر ورودی آن به صورت شکل ۲-۲۲ باشد.



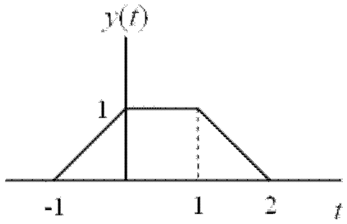
شکل (۲-۲۲): ورودی به سیستم مثال (۲-۱۰)

حل: برای محاسبه خروجی داریم: $y(t)=x(t)*[\delta(t)+\delta(t-1)]$

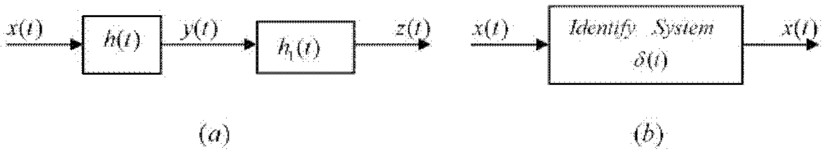
و با توجه به خاصیت توزیع پذیری: $y(t)=x(t)*\delta(t)+x(t)*\delta(t-1)$

و با توجه به این که حاصل کانولوشن هر تابع $x(t)$ با تابع ضربه انتقال یافته مساوی انتقال تابع $x(t)$ است، پس داریم: $y(t)=x(t)+x(t-1)$

خروجی در شکل ۲-۲۳ رسم شده است.



شکل (۲-۲۳): خروجی سیستم مثال (۲-۱۰) به ورودی به شکل (۲-۲۲)



شکل (۲-۲۴): سیستم معکوس برای سیستم LTI پیوسته زمانی، سیستم اصلی دارای پاسخ ضربه $h(t)$و معکوس آن دارای پاسخ ضربه $h_1(t)$ است به گونه‌ای که $h(t)*h_1(t)=\delta(t)$

مثال (۲-۱۲): سیستمی با رابطه ورودی و خروجی به صورت $y(t)=x(t-t_0)$ را در نظر بگیرید. مطلوب است سیستم معکوس آن.

حل: با قرار دادن ورودی سیستم به صورت تابع ضربه یعنی $x(t)=\delta(t)$ بسادگی پاسخ ضربه سیستم به صورت $h(t)=\delta(t-t_0)$ بدست می‌آید. بنابراین خروجی برابر است با $x(t-t_0)=x(t)*\delta(t-t_0)$.

برای بدست آوردن پاسخ ضربه سیستم باید خروجی سیستم معکوس همان ورودی سیستم اصلی باشد (شکل ۲-۲۴ را ببینید). بنابراین اگر پاسخ ضربه سیستم معکوس را $h_1(t)$ بنامیم، خواهیم داشت

$$h_1(t)=\delta(t+t_0)$$

با اتصال متوالی دو سیستم داریم

$$h_1(t)*h(t)=\delta(t+t_0)*\delta(t-t_0)=\delta(t)$$

این حقیقت از اینجا ناشی می‌شود که سیستم اصلی عملیات تا خـیر به اندازه t_0 واحد زمانی را انجام می‌دهد و سیستم معکوس عملیات جلواندازی به همان اندازه را انجام می‌دهد. لذا ترکیب متوالی آنها یک سیستم با پاسخ ضربه $\delta(t)$ است، که ورودی را مستقیماً در خروجی ظاهر می‌کند(شکل ۲-۲۴).

مثال (۲-۱۳): سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید.

$$h[n]=u[n] \tag{۳۰-۲}$$

با توجه به جمع کانولوشن می‌توان پاسخ سیستم را به هر ورودی دلخواه به دست آورد.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,u[n-k] \tag{۳۱-۲}$$

وچون $u[n-k]=0\ ;\ k\geq n+1$، بنابراین

$$y[n]=\begin{cases}\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\ ; & n\geq 0\\ 0\ ; & n\leq -1\end{cases}=\left(\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\right)u[n] \tag{۳۲-۲}$$

رابطه فوق بیانگر یک سیستم جمع‌کننده است. معکوس سیستم فوق عبارت است از:

$$y[n]=x[n]-x[n-1] \tag{۳۳-۲}$$

که به طور ساده عملگر تفاضلی مرتبه اول نام دارد و پاسخ ضربه سیستم معکوس می‌شود:

$$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1] \tag{۳۴-۲}$$

می‌توان بسادگی تحقیق کرد که این دو سیستم معکوس یکدیگر هستند. برای انجام این تحقیق داریم:

$$h[n]*h_1[n]=u[n]*\{\delta[n]-\delta[n-1]\}$$
$$=u[n]*\delta[n]-u[n]*\delta[n-1]=u[n]-u[n-1]=\delta[n]$$

۲-۵ بررسی برخی خواص سیستم LTI با استفاده از پاسخ ضربه

۲-۵-۱ علیت سیستم LTI

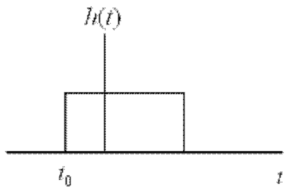
به طور ساده یک سیستم LTI، هنگامی علی است که پاسخ ضربه آن در حالت پیوسته زمانی به ازای $t<0$ مساوی صفر باشد ودر حالت گسسته زمانی به ازای $n<0$ مساوی صفر شود، یعنی:

$$h(t)=0 \qquad <0$$
$$h[n]=0 \qquad <0 \tag{۳۵-۲}$$

بنابراین، یک سیستم انتقال‌دهنده با پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t-t_0)$، رابطه (۲-۳۶) در زیر، علی است اگر $t_0>0$ باشد، و در غیراینصورت غیرعلی است.

$$h(t)=\delta(t-t_0) \tag{۳۶-۲}$$

بنابراین سیستمی که پاسخ ضربه آن بصورت زیر باشد علی نیست.



شکل (۲-۲۵): نمونه پاسخ ضربه یک سیستم غیرعلی

همچنین سیستم گسسته زمانی $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ علی است. ولی $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n+1} x[k]$ غیر علی است.

تمرین (۲-۵): آیا فقط از روی پاسخ ضربه می‌توان علیت را برای سیستم‌های فقط خطی یا فقط مستقل از زمان تحقیق کرد؟

۲-۵-۲ پایداری سیستم LTI

در فصل قبل بیان شد، شرط پایداری یک سیستم این است که اگر دامنه ورودی آن محدود باشد دامنه خروجی آن نیز محدود باشد. فرض می کنیم ورودی دارای حداکثر دامنه A باشد، یعنی:

$$|x(t)| < A \tag{۲-۳۷}$$

اگر سیستم LTI باشد پاسخ بصورت زیر درمی‌آید:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\ h(\tau)\ d\tau \tag{۲-۳۸}$$

پس،

$$|y(t)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\ h(\tau)\ d\tau\right| \tag{۲-۳۹}$$

و با توجه به اصل:

$$|A+B| \le |A|+|B| \tag{۲-۴۰}$$

می‌توان نوشت:

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-\tau) h(\tau)\ d\tau| \tag{۲-۴۱}$$

با قرار دادن (۲-۳۷) در (۲-۴۱) و بیرون آوردن مقدار ثابت داریم:

$$|y(t)| \le A\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau \tag{۲-۴۲}$$

پس اگر داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \text{مقدار محدود} \tag{۲-۴۳}$$

در آنصورت $|y(t)|$ نیز به ازای کلیه مقادیر t محدود خواهد بود. بنابراین شرط کافی برای پایداری سیستم‌های LTI پیوسته زمانی، توسط رابطه (۲-۴۳) داده می‌شود اما می‌توان ثابت کرد که این شرط لازم نیز هست.

تمرین (۲-۸): ثابت کنید شرط (۲-۴۳) برای پایداری سیستم LTI یک شرط لازم و کافی است.
راهنمایی: ورودی را بصورت زیر فرض کنید،

$$x(t)=\begin{cases}0 & h(-t)=0\\ \dfrac{h(-t)}{|h(-t)|} & h(-t)\neq 0\end{cases}$$

با انجام روندی مشابه، برای سیستم‌های گسسته زمانی نیز می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم گسسته زمانی LTI عبارت است از

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|h\ [n]\ \right| = \text{مقدار محدود} \qquad (۲-۴۴)$$

بطور خلاصه شرط لازم و کافی جهت پایداری یک سیستم این است که

در حالت پیوسته زمانی $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt\ <\infty$

در حالت گسسته زمانی $\sum_{-\infty}^{+\infty}\ |h[k\ ]|<\ \infty$

تمرین (۲-۹): شرط پایداری سیستم‌های گسسته زمانی را اثبات کنید.

بنابراین سیستم جمع‌کننده یک سیستم پایدار نیست چون اگر یک ورودی ثابت و دامنه محدود مثل $u[n]$ را به آن اعمال کنیم و خروجی آن بطور نامحدود با n افزایش یابد، در اینصورت می‌توان یک مقدار از n را تصور کرد که هنوز ورودی محدود و مساوی واحد است اما خروجی در حال میل کردن بسمت ∞ است. یعنی

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|u[n]|=\sum_{n=0}^{\infty}u[n]\rightarrow\ \infty$$

مثال (۲-۱۴): آیا مشتق‌گیر یک سیستم پایدار است؟ علیت در سیستم مشتق‌گیر را بررسی کنید.
حل: ضابطه سیستم مشتق‌گیر بصورت زیر است

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \qquad (۲-۴۵)$$

این رابطه را می‌توان بدو صورت نوشت:

$$y(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t} \qquad (۲-۴۷)$$

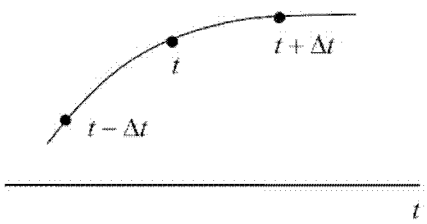
$$y(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \qquad (۲-۴۶)$$

برای هر یک از حالت‌های فوق پاسخ ضربه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$h_2(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta(t)-\delta(t-\Delta t)}{\Delta t} \qquad (۲-۴۸)$$

$$h_1(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta(t + \Delta t) - \delta(t)}{\Delta t} \tag{۴۹-۲}$$

دیده می‌شود که سیستم مشتق‌گیر اگر توسط رابطه (۲-۴۶) مشخص شود بیانگر یک سیستم غیرعلی و غیر قابل ساخت است ولی اگر توسط رابطه (۲-۴۷) مشخص شود بیانگر یک سیستم علی و قابل ساخت است اما می‌دانیم اگر ورودی $x(t)$ مشتق‌پذیر باشد درآنصورت روابط (۲-۴۶) و (۲-۴۷) برابر هستند.



شکل (۲-۲۶): پیش‌بینی مقدار ورودی در لحظه $t + \Delta t$ با استفاده از مشتق‌گیر

در اینصورت با استناد به رابطه (۲-۴۷) این سیستم قابل ساخت و با استناد به رابطه (۲-۴۶) این سیستم غیرعلی است. بنابراین در حالتیکه تغییرات ورودی بسیار شدید نباشد (ورودی شامل توابع ضربه، پله و نقاط تکین نباشد) می‌توان با استفاده از سیستم مشتق‌گیر بصورت رابطه (۲-۴۷) با توجه به مقادیر ورودی در دو لحظه t و $t - \Delta t$ (به شکل (۲-۲۶) توجه کنید) مشتق ورودی را حساب کرد و سپس با توجه به تساوی دو رابطه (۲-۴۶) و (۲-۴۷)مقدار ورودی را در Δt ثانیه بعد پیش‌بینی کرد. چون اگر $\Delta t \to 0$ می‌توان $x(t + \Delta t)$ را با استفاده از خروجی سیستم مشتق‌گیر و توسط رابطه زیر بدست آورد.

$$x(t + \Delta t) \cong \left[\frac{dx(t)}{dt}\Delta t\right] + x(t) \tag{۵۰-۲}$$

مثال (۲-۹): یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ای بصورت زیر در دست است.
علیت و پایداری این سیستم را بررسی کنید.

$$h(t) = e^{-2t} Cost \quad u(t)$$

حل: چون $h(t < 0) = 0$ است پس سیستم علی است.
تحقیق پایداری: شرط پایداری توسط رابطه (۲-۴۳) داده شده است. آنرا تحقیق می‌کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} |\cos t| dt < \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

پس سیستم پایدار است.

مثال (۲-۱۰): نشان دهید که اگر $h(t)$ (پاسخ ضربه یک سیستم LTI) متناوب باشد، حتماً سیستم ناپایدار و غیرعلی است.

حل: واضح است که اگر $h(t)$ متناوب باشد باید برای $t>0$ و $t<0$ تعریف شده باشد. پس سیستم غیرعلی است. برای یک تابع متناوب $h(t)$ قدرمطلق سطح زیر منحنی همواره نامحدود است. چون اگر سطح زیر قدر مطلق را به اجزاء آن تقسیم کنیم داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}|h(t)|dt$$

و اگر انتگرال روی یک دوره متناوب عدد محدود و غیرصفر باشد در آنصورت مجموع بی‌نهایت عدد محدود، خود بی‌نهایت می‌شود و بنابراین سیستم ناپایدار است. تنها در یک حالت سطح زیر قدر مطلق منحنی صفر است و آن وقتی است که $h(t)$ متحد باصفر باشد که مسلماً این حالت مورد نظر نیست.

مثال (۲-۱۱): نشان دهید که اگر $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI دارای دوره محدود باشد در آنصورت حتماً سیستم پایداراست.

حل: اگر دوره تعریف پاسخ ضربه محدود باشد یعنی اگر $h(t) = 0, \forall t < t_0, t > t_1$

در آنصورت شرط پایداری بصورت: $\int_{t_0}^{t_1}|h(t)|dt < \infty$

در می‌آید و اگر بیشینه مقدار $h(t)$ در فاصله مذکور را h_0 بنامیم، داریم:

$$\int_{t_0}^{t_1}|h(t)|dt \le h_0(t_1 - t_0)$$

بنابراین سیستم پایدار است مگر در حالتی که خود h_0 بی‌نهایت شود، یعنی پاسخ ضربه در فاصله تعریف بی‌نهایت گردد که مسلماً این حالت مورد نظر نیست.

۲-۶ پاسخ پله سیستم‌های LTI

گاهی بررسی سیستم‌های LTI از روی پاسخ پله عملی‌تر و لازم‌تر است. لذا در این قسمت به نحوه استخراج پاسخ پله از روی پاسخ ضربه و برخی خواص پاسخ پله می‌پردازیم.

اگر $s[n]$ و $s(t)$ پاسخ پله سیستم‌های LTI گسسته و پیوسته زمانی باشند، برای حالت گسسته زمانی داریم:

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad (۲-۵۱)$$

بنابراین پاسخ ضربه از روی پاسخ پله توسط رابطه زیر بدست می آید:

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \qquad (۲-۵۲)$$

و برای حالت پیوسته زمانی پاسخ پله با استفاده از انتگرال کانولوشن بصورت زیر محاسبه می شود:

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \qquad (۲-۵۳)$$

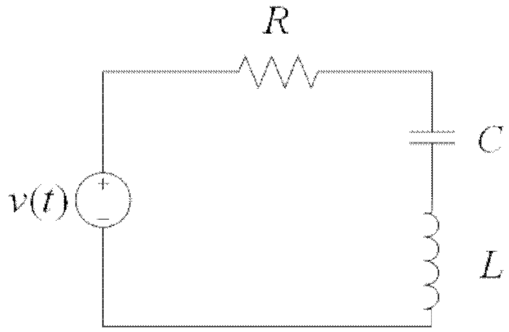
پاسخ ضربه نیز با استفاده از رابطه زیر از پاسخ پله بدست می‌آید.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \qquad (۲-۵۴)$$

روابط فوق همگی ناشی از این حقیقیت هستند که تابع پلهٔ واحد برابر انتگرال تابع ضربهٔ واحد است، و یا تابع ضربه مشتق تابع پله واحد است. بنابراین در هر دو حالت گسسته و پیوسته زمانی جهت تفسیر عملکرد سیستم می‌توان از پاسخ پله بجای پاسخ ضربه استفاده کرد. این امر در حالت کلی در مورد هر تابع که از روی پاسخ ضربه توسط یک رابطه یک به یک و خطی حاصل شده باشد نیز قابل تعمیم است. اما پاسخ ضربه و پاسخ پله به علت اهمیت عملی و کاربردی بیش از سایر توابع مورد استفاده قرار می‌گیرند. به علت ارتباط خطی و ساده پاسخ پله با پاسخ ضربه می‌توان کلیه خواص سیستم را از روی پاسخ پله تعیین کرد. بعنوان مثال از روی پاسخ پله بسادگی با مشاهده اینکه $s(t<0)=0$ است می‌توان علیت سیستم را تحقیق کرد.

۲-۷ توصیف سیستم‌های LTI پیوسته زمان بااستفاده ازمعادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت

در گسترهٔ وسیعی از سیستم‌های پیوسته زمانی، می‌توان رابطه ورودی و خروجی را بصورت یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت (مستقل از زمان و مستقل از ورودی) استخراج کرد. چنین رابطه دیفرانسیلی در برخی پدیده‌های فیزیکی مشاهده می‌شود. بعنوان مثال یک مدار RL یا RLC را در نظر بگیرید.



شکل (۲-۲۷) یک سیستم پیوسته زمانی که توسط معادله دیفرانسیلی خطی و با ضرایب ثابت قابل بیان است.

اگر ورودی این سیستم را ولتاژ $v(t)$ و خروجی آنرا جریان $i(t)$ فرض کنیم، یعنی:

$$x(t)=v(t) \quad , \quad (t)=i(t)$$

معادله دیفرانسیل مرتبط کننده ورودی $v(t)$ و خروجی $i(t)$ به صورت زیر است:

$$R\frac{dy(t)}{dt}+L\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{1}{C}y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \qquad (۲-۵۶)$$

همین امر در مورد سیستم‌های گسسته زمانی نیز مشاهده می‌شود. در این قسمت ما ابتدا توجه خود را به سیستم‌های پیوسته زمانی معطوف می‌کنیم و سپس به حالت گسسته زمانی می‌پردازیم. بعنوان یک مثال ساده فرض کنید که رابطه ورودی و خروجی یک سیستم بصورت معادله دیفرانسیل زیر باشد:

$$x(t)=2\frac{dy(t)}{dt}+4y(t) \qquad (۵۷-۲)$$

همان‌طور که از دروس ریاضیات مهندسی آموخته‌ایم، پاسخ این سیستم متشکل از دو قسمت است. یکی از پاسخ‌ها، پاسخ همگن یا پاسخ معادله بدون طرف ثانی است. شکل این پاسخ فقط بستگی به نحوه ارتباط عناصر و شکل سیستم دارد و اصلاً ارتباطی به ورودی ندارد. در مورد این مثال پاسخ همگن بصورت زیر از مساوی صفر قراردادن ورودی بدست می‌آید.

$$2\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=0 \qquad (۵۸-۲)$$

پاسخ همگن

$$y_h(t)=Ae^{-2t}u(t) \qquad (۵۹-۲)$$

اما قسمت دوم پاسخ را پاسخ خصوصی $y_p(t)$ می‌نامند، که نه فقط به نحوه ارتباط عناصر مدار بلکه به ورودی مدار نیز بستگی دارد. پاسخ خصوصی یک پاسخ خاص معادله دیفرانسیل است و از معلومات قبلی می‌دانیم که مجموع این دو قسمت پاسخ کلی معادله دیفرانسیل است، یعنی:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t) \qquad (۶۰-۲)$$

بعنوان مثال اگر در همین مساله، ورودی بصورت $u(t)$ باشد، یک پاسخ خاص با در نظر گرفتن پاسخ همگن به صورت $y_p(t)=k_0u(t)$ که در آن k_0 عدد ثابتی است. مقدار k_0 با در نظر گرفتن مسئله برای $t\to\infty$ محاسبه می‌گردد. برای $t\to\infty$ مشتقات خروجی همگی صفر می شوند. پس:

$$1=2\times 0+4\times k_0 \Rightarrow y_p(t)=\frac{1}{4}u(t) \qquad (۶۱-۲)$$

بنابراین پاسخ کلی معادله دیفرانسیل یا پاسخ سیستم به ورودی پله مساوی است با

$$y(t)=\left(Ae^{-2t}+\frac{1}{4}\right)u(t) \qquad (۶۲-۲)$$

جهت تکمیل پاسخ احتیاج به یک مقدار اولیه داریم. فرض می‌کنیم $y(0^+)=\frac{5}{4}$ باشد در اینصورت مقدار $A=1$ بدست می‌آید. لازم به تذکر است جهت یافتن پاسخ یکتا برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه Nام احتیاج به N شرط کمکی داریم.

اکنون حالت کلی یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^ky(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^kx(t)}{dt^k} \qquad (۶۳-۲)$$

پاسخ یک‌چنین معادله‌ای شامل مجموع دو جواب خصوصی و عمومی می‌باشد. جواب عمومی با مساوی صفر قراردادن طرف دوم بدست می‌آید که پاسخ همگن هم خوانده می‌شود و جواب خصوصی یا اجباری یک جواب خاص معادله فوق است. بنابراین

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t) \qquad (۶۴-۲)$$

$y_h(t)$ پاسخ معادله همگن است.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h}{dt^k} = 0 \qquad (۶۵-۲)$$

در حالت کلی معادله فوق دارای جوابی بصورت زیر است

$$y_h(t) = Ae^{\alpha t} \qquad (۶۶-۲)$$

با جایگذاری (۲-۶۶) در (۲-۶۵) داریم

$$Aa_N\alpha^N e^{\alpha t} + Aa_{N-1}\alpha^{N-1}e^{\alpha t} + ... + Aa_1\alpha e^{\alpha t} + Aa_o e^{\alpha t} = 0 \qquad (۶۷-۲)$$

$$a_o + a_1\alpha + ... + a_N\alpha^N = 0 \qquad (۶۸-۲)$$

معادله فوق را ***معادله مفسر*** می‌گویند و در حالت کلی، این معادله منجر به N جواب برای α می‌شود. حالتهای مختلف جواب و پاسخ همگن برای هر یک از N حالت، در زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند.

I) اگر این جوابها (یا ریشه‌های معادله مفسر) مستقل باشند:

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + ... + A_N e^{\alpha_N t} \qquad (۶۹-۲)$$

II) اگر دو ریشه مشابه و بقیه مستقل باشند:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_1 t} t + ... + A_N e^{\alpha_N t} \qquad (۷۰-۲)$$

و اگرتعدادریشه های مشابه بیشتر باشند به همین ترتیب پاسخ را تشکیل می دهیم. مثلا اگر سه ریشه مشابه باشند، یعنی: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$

در این صورت خواهیم داشت:

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 t e^{\alpha t} t + A_3 t^2 e^{\alpha t} + A_4 e^{\alpha_4 t} + ... + A_N e^{\alpha_N t} \qquad (۷۱-۲)$$

III) اگر دو ریشه مزدوج مختلط باشند، یعنی:

$$\alpha_1, \alpha_2 = \alpha \pm j\beta$$

$$y_h(t) = (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t)\ e^{\alpha t} + A_3 e^{\alpha_3 t} + ... + A_N e^{\alpha_N t} \qquad (۷۲-۲)$$

شکل جواب خصوصی مشابه ورودی است و باید با تجربه آنرا بدست آورد. مثلا اگر $x(t) = \cos \omega_o t$ باشد خروجی سیستم LTI حتما بصورت $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ می‌باشد که A و φ را باید با قراردادن در معادله دیفرانسیل بدست آورد و یا حتی می‌توان از روش تحلیل فازوری برای بدست آوردن پاسخ اجباری استفاده کرد. در واقع پاسخ اجباری همان پاسخ حالت دائم سیستم است.

مثال (۲-۱۲): مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر به ازای ورودی داده شده.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \qquad , \qquad x(t) = tu(t)$$

برای بدست آوردن پاسخ عمومی، ابتدا معادله مفسر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=0 \qquad \alpha^2+2\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=-1$$

$$y_h(t)=A_1e^{-t}+A_2te^{-t}=(A_1+A_2t)e^{-t}$$

اکنون پاسخ خصوصی سیستم را بدست می‌آوریم. با توجه به شکل سیگنال ورودی، شکل پاسخ می‌تواند فقط تا توان اول t را داشته باشد. با این همه پاسخ را عمداً به صورت چندجمله‌ای درجه دو می‌نویسیم تا ببینیم پاسخ خصوصی بدست آمده چگونه است، بنابراین:

$$y_p(t)=k_1t^2+k_2t+k_3 \Rightarrow y'_p(t)=2k_1t+k_2 \Rightarrow y''_p(t)=2k_1$$

مقادیر فوق را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم تا ضرایب k_3,k_2,k_1 بدست آیند.

$$2k_1+4k_1t+2k_2+k_1t^2+k_2t+k_3=t$$

$$\left.\begin{array}{l} 2k_1+k_3+2k_2=0 \\ 4k_1+k_2=1 \\ k_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_3=-2 \quad ,k_2=1 \quad ,y_p(t)=t-2$$

مشاهده می‌شود که پاسخ خصوصی به صورت چندجمله‌ای درجه یک بدست آمد. اکنون داریم:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=\left[(A_1+A_2t)e^{-t}+t-2\right]u(t)$$

که با قراردادن در معادله برای $t\geq 0$ می‌توان صحت جواب را تایید کرد.

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-A_2e^{-t}-A_2e^{-t}+(A_1+A_2t)\ e^{-t}=(A_1+A_2t)\ e^{-t}-2A_2e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt}=A_2e^{-t}-(A_1+A_2t)\ e^{-t}+1$$

$$\rightarrow (A_1+A_2t)\ e^{-t}-2A_2e^{-t}+2A_2e^{-t}$$

$$-2(A_1+A_2t)\ e^{-t}+2+(A_1+A_2t)\ e^{-t}+t-2=t$$

توجه کنید که وضعیت معادله دیفرانسیل در $t=0^+$ توسط شرائط اولیه تعیین می شود. برای بدست آوردن ضرایب A_2,A_1 احتیاج به دو شرط اولیه داریم. مثلاً اگر داشته باشیم:

$$y(0)=0; \qquad y'(0)=0$$

درآنصورت A_2,A_1 بدست می‌آیند: $A_1=2 \qquad A_2=1$

مثال (۲-۱۳): نشان دهید سیستمی که با معادله دیفرانسیل زیر (به همراه شرط کمکی داده شده) مشخص می‌شود یک سیستم غیرخطی است.

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t) \qquad y(0^+)=1$$

حل: پاسخ همگن این معادله بصورت زیر است:

$$y_h(t)=Ae^{-t}u(t)$$

و پاسخ اجباری یا خصوصی در صورتی که ورودی بصورت $x(t)=ku(t)$ باشد (k عدد ثابت)، برای $t\geq 0$ بصورت زیر است:

$$y_p(t)=k$$

برای $t\leq 0$ پاسخ اجباری صفر است (چون ورودی صفر است) و فقط پاسخ همگن $y_h(t)=Be^{-t}u(-t)$ وجود دارد. بنابراین پاسخ در حالت کلی بصورت زیر است

$$y(t)=\begin{cases}ku(t)+Ae^{-t}u(t) & t\geq 0\\ Be^{-t}u(-t) & t\leq 0\end{cases}$$

و با اعمال شرط اولیه می‌توان تنها مجهول A را بدست آورد. بنابراین:

$$y(0^+)=1\Rightarrow A=1-k$$

برای بدست آوردن B از شرط پیوستگی پاسخ در $t=0$ یا $y(0^+)=y(0^-)$ استفاده می کنیم، یعنی:

$$y\ (0^+)=1\Rightarrow y(0^-)=B=1$$

بنابراین:

$$y(t)=\begin{cases}k\left(1-e^{-t}\right)u(t)+e^{-t}u(t) & t\geq 0\\ e^{-t}u(-t) & t\leq 0\end{cases}$$

دیده می‌شود که اگر ورودی را در عدد ثابتی ضرب کنیم یک قسمت از خروجی بی‌تاثیر از این ضریبِ ثابت k باقی می‌ماند. بنابراین k هرچه باشد یک قسمت از خروجی که در حقیقت پاسخ ورودی صفر است بی‌تغییر می‌ماند لذا سیستم غیرخطی است. با کمی دقت متوجه می شویم که علت بوجود آمدن یک پاسخ افزاینده (بر حسب زمان) برای $t\leq 0$، تلاش سیستم برای ارضای شرائط اولیه غیر صفر در لحظه اعمال ورودی است. اگر چه شرائط اولیه فقط در قسمت $t\geq 0$ از جواب اعمال می شود اما اگر جمله پاسخ برای $t\leq 0$، از پاسخ حذف شود، معادله دیفرانسیل ارضاء نمی شود. چون با در نظر گرفتن فقط جمله اول پاسخ برای $t\geq 0$ داریم:

$$y(t)=k(1-e^{-t})u(t)+e^{-t}u(t)\Rightarrow\qquad \frac{dy}{dt}=ke^{-t}u(t)-e^{-t}u(t)-\delta(t)$$

$$\frac{dy}{dt}+y(t)=-\delta(t)+ku(t)$$

دیده می شود که یک جمله ضربه در لحظهٔ صفر باقی می ماند. این جمله با در نظر گرفتن قسمت دوم پاسخ در $t\leq 0$ بوجود می آید.

دیدیم که در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل با شرایط کمکی دلخواه غیرصفر بیانگر یک سیستم غیرخطی است. اکنون نشان می دهیم که تحت شرائط کمکی خاصی یک معادله دیفرانسیل با شرایط کمکی بیانگر یک سیستم خطی خواهد شد.

مثال (۲-۱۴): در مثال ۲-۱۳ اگر $y(0^+)=0$ باشد چه تغییری در پاسخ رخ می‌دهد؟

حل: در اینصورت سیستم خطی می‌شود و پاسخ سیستم برای $t \le 0$ وجود ندارد. بنابراین در این حالت پاسخ کلی به ورودی $x(t)=ku(t)$ بصورت زیراست:

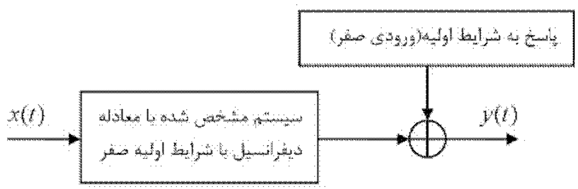
$$y(t)=ku(t)+Ae^{-t}$$

و اگر شرط اولیه $y(0^+)=0$ باشد ضریب مجهول $A=-k$ بدست می‌آید. پس

$$y(t)=k\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

دیده می‌شود که اگر ورودی k برابر شود خروجی نیز k برابر می‌شود پس سیستم خطی است.

اگر چه سیستم‌هایی که بوسیله یک معادله دیفرانسیل خطی باضرایب ثابت نمایش داده می‌شوند، در صورت داشتن شرایط کمکی در حالت کلی غیر صفر، خطی نیستند. در این حالت، پاسخ خصوصی فقط نسبت به ورودی (با در نظر گرفتن شرائط اولیه سیستم برابر صفر) رابطه خطی دارد. هم‌چنین، پاسخ همگن (یعنی پاسخ سیستم با در نظر گرفتن سیگنال ورودی برابر صفر) فقط نسبت به شرائط اولیهٔ غیر صفر یک رابطهٔ خطی دارد. به عبارت دیگر، می‌توان سیستم LTI با شرائط اولیه غیر صفر را بصورت خطی افزایشی (incremental linear) نمایش داد. دیاگرام بلوکی چنین سیستمی در شکل (۲-۲۸) نشان داده شده است.



شکل (۲-۲۸): نمایش معادله دیفرانسیل با شرایط کمکی غیر صفربصورت یک سیستم خطی افزایشی

۲-۸ حالت استراحت اولیه[1]

برای اینکه سیستم نشان داده شده بوسیله معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت علّی باشد، باید انتخاب بخصوصی را برای شرایط اولیه انجام دهیم. این انتخاب را استراحت اولیه گویند. استراحت اولیه سیستم علّی هنگامی برآورده می شود که خروجی سیستم و کلیه مشتقات آن دقیقا قبل از اعمال ورودی برابر صفر باشند. مثلا اگر ورودی در لحظه t_0^+ به سیستم اعمال شده باشد، خروجی سیستم و کلیه مشتقات آن در لحظه t_0^- برابر صفر در نظر گرفته شوند. به بیان ریاضی:

$$\text{اگر}\ x(t)=0 \quad \forall t \le t_0^+ \quad \Leftrightarrow \quad {}^{(n)}\left(t_0^-\right)=0 \qquad (۷۳\text{-}۲)$$

1-Initial Rest

بالا نویس (n) بیانگر مشتق مرتبه (n)ام است. با انتخاب شرائط استراحت اولیه برای معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت، این معادله دیفرانسیل می تواند بیانگر یک سیستم علی، خطی و غیر متغیر با زمان نیز باشد. حقیقت فوق را طی یک مثال بخوبی می‌توان نشان داد.

مثال (۲-۱۵): معادله دیفرانسیل زیر را به ازای دو ورودی داده شده و شرط اولیه یکسان داده شده، حل کنید.

$$\frac{dy}{dt}+2y=x \quad y(0)=0 \;,\; x_1(t)=0 \quad x_2(t)=\begin{cases}0 & t<-1\\ 1 & t>-1\end{cases}$$

حل: شرط اولیه $y(0)=0$ برای هردو ورودی صادق است. برای ورودی اول، چون سیستم خطی است، پس جواب یا پاسخ کلی عبارت است از: $y(t)=0$

برای بدست آوردن جواب عمومی ابتدا معادله مفسر را تشکیل داده و آنرا حل می‌کنیم

$$\alpha+2=0\rightarrow\alpha=-2\rightarrow y_h(t)=Ae^{-2t}$$

و جواب خصوصی، برای $t>-1$، برابر مقدار ثابتی می‌شود، که این مقدار ثابت در زیر محاسبه می‌شود:

$$2A_0=1\Rightarrow A_0=\tfrac{1}{2}$$

پس پاسخ کلی (برای $t>-1$) از مجموع دو پاسخ عمومی و خصوصی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y(t)=Ae^{-2t}+\frac{1}{2}$$

با اعمال شرط اولیه $y(0)=0$ داریم:

$$(t>-1)\quad y_1(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}$$

اما این جواب برای $t>-1$ فقط صادق است. برای $(t<-1)$ پاسخ عمومی همان Ae^{-2t} است ولی جواب خصوصی صفر می‌شود چون ورودی برای $t>-1$ اعمال شده است. پس:

$$y_2(t)=Be^{-2t}\quad ,\; t<-1$$

که در $t=-1$ باید هر دو جواب برابر باشند. پس:

$$Be^{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2}\qquad y_2(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2}\right)e^{-2(t+1)}\qquad t<-1$$

اما این سیستم علّی نیست چون با وجود اینکه ورودی‌ها به ازای $t<-1$ یکسان هستند خروجی‌ها یکسان نیستند.

$$x_1(t<-1)=x_2(t<-1)\quad ,\quad y_1(t<-1)\neq y_2(t<-1)$$

ولی با انتخاب $y(-1)=0$ که شرایط استراحت اولیه را فراهم می‌آورد سیستمی که با معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt}+2y=x$ داده شده است برای $t<-1$ *برای هر دو ورودی یک جواب می‌دهد، که این جواب برابر صفر است*. در اینصورت فقط لازم است معادله را برای $t>-1$ حل کنیم.

چون سیستم علّی است به ازای $t<-1$ قبل از اینکه ورودی اعمال شود خروجی نمی‌تواند ظاهر شود.

با اعمال شرط استراحت اولیه $y(-1)=0$، داریم:

$$A=-\frac{1}{2}e^{-2}$$

و با قرار دادن این مقدار در $y(t)$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2(t+1)} & t>-1 \\ y(t)=0 & t<-1 \end{cases}$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد که ارضاء حالت استراحت اولیه باعث می‌شود که علاوه بر خطی و علی شدن، سیستم مستقل از زمان نیز بشود.

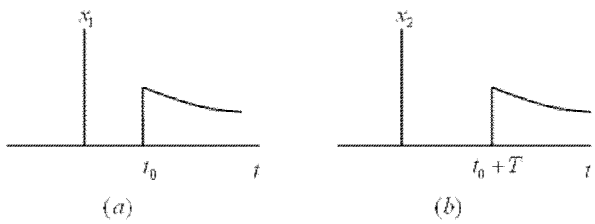
مثال (۲-۱۶): نشان دهید به کمک ارضاء شرایط استراحت اولیه معادله دیفرانسیل بیانگر یک سیستم مستقل از زمان می‌شود.

حل: در مثال قبل فرض کنید $y_1(t)$ پاسخ به ورودی $x_1(t)$ نشان داده شده در شکل (۲-۲۹) باشد. همچنین فرض کنید این سیستم در حالت استراحت اولیه باشد.

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t) \\ y_1(t_0)=0 \end{cases}$$

اکنون فرض کنید ورودی انتقال پیدا کند، یعنی $x_2(t)=x_1(t-T)$. دیده می‌شود که $x_2(t<t_0+T)=0$. بنابراین پاسخ $y_2(t)$ به این ورودی باید معادله دیفرانسیل به همراه شرط کمکی زیر را ارضاء کند.

$$\begin{cases} \frac{dy_2(t)}{dt}+2y_2(t)=x_2(t) \\ y_2(t_0+T)=0 \end{cases}$$



شکل (۲-۲۹) ورودی های مثال ۲-۱۶

با جایگذاری ساده می‌بینیم که پاسخ $y_2(t)=y_1(t-T)$ در معادلهٔ فوق صادق است یعنی جفت معادله دوم را بصورت اولی در می‌آورد، پس سیستم مستقل از زمان است.

۲-۹ تشریح سیستم‌های LTI گسسته زمانی با استفاده از معادلات تفاضلی

یک معادله تفاضلی از مرتبه N، در حالت کلی، بصورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad (۲-۷۴)$$

در رابطهٔ فوق M می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از N باشد. معادلات فوق دقیقاً به همان طریقی که برای معادلات دیفرانسیل ارائه شد قابل حل هستند. بنابراین پاسخ در حالت کلی متشکل از دو پاسخ خصوصی یا اجباری و همگن یا عمومی است.

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \quad (۲-۷۵)$$

پاسخ همگن از مساوی صفر قرار دادن ورودی بدست می‌آید و جواب خصوصی یک جواب خاص معادلهٔ تفاضلی است که مشابه ورودی است. اکنون ابتدا پاسخ همگن را بدست می‌آوریم. برای این‌کار طرف دوم را در (۲-۷۴) مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0 \quad (۲-۷۶)$$

می‌توان تحقیق کرد که جوابی بصورت $y_h[n] = A\alpha^n$ در معادله فوق صدق می‌کند.

$$a_N A\alpha^{n-N} + a_{N-1}A\alpha^{n-N+1} + ... + a_1 A\alpha^{n-1} + a_0 A\alpha^n = 0 \quad (۲-۷۷)$$

با جداسازی عامل مشترک داریم

$$A\alpha^{n-N}\left(a_N + a_{N-1}\alpha + a_{N-2}\alpha^2 + \cdots + a_1\alpha^{N-1} + a_0\alpha^N\right) = 0$$

بنابراین

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-2}\alpha^2 + a_{N-1}\alpha + a_N = 0 \quad (۲-۷۸)$$

معادله فوق *معادله مفسر* از مرتبه Nام می‌باشد و در حالت کلی N جواب دارد و در حالت کلی دو حالت برای جواب‌ها وجود خواهد داشت.

I) N ریشهٔ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ مستقل یا متفاوت باشند، در این صورت پاسخ همگن بصورت زیر است

$$y_h[n] = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + ... + A_N\alpha_N^n \quad (۲-۷۹)$$

II) اگر دو تا از ریشه‌ها مشابه و بقیه مستقل باشند، یعنی $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha)$، در اینصورت پاسخ همگن بصورت زیر است:

$$y_h[n] = A_1\alpha^n + A_2 n\alpha^n + A_3\alpha_3^n + ... + A_N\alpha_N^n \quad (۲-۸۰)$$

اگر سه ریشه مشابه و بقیه مستقل باشند $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha)$، در این حالت نیز مشابه حالت‌های قبل پاسخ همگن بصورت زیر است:

$$y_h[n] = \left(A_1 + A_2 n + A_3 n^2\right)\alpha^n + A_4\alpha_4^n + ... + A_N\alpha_N^n \quad (۲-۸۱)$$

در این قسمت به شکل جواب خصوصی که بستگی به نوع ورودی دارد می‌پردازیم. در برخی از حالات از نوع ورودی می‌توان شکل پاسخ خصوصی را حدس زد.

اگر ورودی بصورت زیر باشد:

$$x[n]=n^k \qquad (۸۲-۲)$$

در اینصورت، شکل پاسخ خصوصی در حالت کلی شامل یک چندجمله‌ای کامل از مرتبهٔ k است، یعنی

$$y_p[n]=P_1n^k+P_2n^{k-1}+....+P_{k-1}n+P_k \qquad (۸۳-۲)$$

مقادیر مجهول P_1 الی P_k با قرار دادن (۲-۸۳) در (۲-۷۴) بدست می‌آیند.

یک حالت معروف دیگر که در عمل زیاد دیده می‌شود این است که ورودی $x[n]$ بصورت نمایی، مطابق رابطهٔ زیر باشد:

$$x[n]=\alpha^n \qquad (۸۴-۲)$$

در این صورت سه حالت ممکن است رخ دهد.

۱- اگر α ریشه معادلهٔ مفسر نباشد در این صورت شکل پاسخ خصوصی بصورت زیر است

$$y[n]=P\alpha^n \qquad (۸۵-۲)$$

مجهول P با قرار دادن (۲-۸۵) در (۲-۷۴) بدست می‌آید.

۲- اگر α ریشه معادلهٔ مفسر باشد شکل پاسخ خصوصی بصورت زیر است

$$y_p[n]=P_1n\alpha^n+P_2\alpha^n \qquad (۸۶-۲)$$

۳- اگر α ریشهٔ مضاعف یکبار تکرار شده باشد شکل پاسخ خصوصی بصورت زیر است

$$y_P[n]=P_1n^2\alpha^n+P_2n\alpha^n+P_3\alpha^n \qquad (۸۷-۲)$$

و اگر α بیش از یک بار تکرار شده باشد به همین صورت پیش می‌رویم.

در تمام روابط فوق P_iها اعداد ثابتی هستند که با قرار دادن رابطهٔ متناظر برای $y_p[n]$ در (۲-۷۴) بدست می‌آیند.

مثال (۲-۱۷): مطلوبست حل معادلهٔ تفاضلی زیر با فرض شرایط اولیه مذکور و ورودی داده شده.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n] \qquad x[n]=n^2u[n]\ , y[0]=0$$

حل: بدست آوردن پاسخ همگن،

$$y_h[n]+2y_h[n-1]=0$$

با قرار دادن $y_h[n]=A\alpha^n$ در معادلهٔ فوق خواهیم داشت:

$$A\alpha^n+2\left(A\alpha^{n-1}\right)=0\Rightarrow\alpha^n+2\alpha^{n-1}=0\Rightarrow\alpha=-2$$

بنابراین پاسخ همگن بدین صورت است:

$$y_h[n]=A(-2)^n$$

بدست آوردن پاسخ خصوصی،

$$y_p[n]+2y_p[n-1]=n^2$$

فرم پاسخ خصوصی به استثناء سه ضریب مجهولمطابق رابطهٔ زیر است:

$$y_p[n]=P_1n^2+P_2n+P_3$$

وسه ضریب مجهول با قرار دادن پاسخ خصوصی در (۲-۷۴) بدست می‌آیند:

$$P_1 n^2 + P_2 n + P_3 + 2P_1(n-1)^2 + 2P_2(n-1) + P_3 = n^2$$

با حل معادلهٔ فوق داریم:

$$P_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad P_2 = \frac{4}{9} \quad , \quad \mathrm{P}_3 = \frac{1}{9}$$

بنابراین، پاسخ خصوصی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y_p[n] = \frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{9}n + \frac{1}{9}$$

و رابطهٔ کلی پاسخ به صورت زیر است:

$$y[n] = A(-2)^n + \frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{9}n + \frac{1}{9}$$

$$y[0] = A + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{9}$$

و با اعمال شرایط اولیه می‌توان ضریب A را بدست آورد:

پاسخ معادله تفاضلی، با شرایط اولیه داده شده صفر، برابر است با:

$$y[n] = \left[-\frac{1}{9}(-2)^n + +\frac{1}{3}n^2 + \frac{4}{9}n + \frac{1}{9}\right]u[n]$$

توجه شود که شرط اولیه $y[0] = 0$ ، با توجه به ورودی $x[n] = n^2 u[n]$ که در حقیقت در لحظات $n \geq 1$ به سیستم اعمال می شود، شرط استراحت اولیه محسوب می شود.

سیستم های با پاسخ ضربه محدود (FIR) و سیستم های با پاسخ ضربه نامحدود (IIR)

در رابطه (۲-۷۴)، اگر $N = 0$ باشد در آنصورت از طرف چپ تنها یک جمله باقی می‌ماند، یعنی:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \tag{۲-۸۸}$$

که این رابطه بدون هیچ شرط کمکی قابل حل است. چنین معادله‌ای را غیربازگشتی گویند و پاسخ ضربه این سیستم به صورت زیر است:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k] \tag{۲-۸۹}$$

چون مدت وجود پاسخ ضربه، محدود به زمان مشخصی (بین صفر و M) است به آن یک سیستم FIR می‌گویند که به معنی *سیستم با پاسخ ضربه محدود*[1] می‌باشد. چنین معادلاتی به شرایط کمکی احتیاج ندارند. اما محاسبه خروجی سیستم در هر لحظه با استفاده از معادله تفاضلی سیستم، رابطه (۲-۷۴)، وقتی که $N \geq 1$ است احتیاج به N شرط کمکی دارد. چنین معادله‌ای را در این حالت یک معادله

1. Finite Impulse Response

بازگشتی می‌گویند، و مدت وجود پاسخ ضربه چنین سیستمی نامحدود است. چنین سیستمی به *سیستم با پاسخ ضربه نامحدود*[1] (سیستم IIR) معروف است که در مثال (۲-۱۸)، در زیر، یک نمونه از آنها دیده می‌شود.

مثال (۲-۱۸): مطلوب است حل معادله تفاضلی زیر که بیانگر یک سیستم با پاسخ ضربه نامحدود (سیستم IIR) می‌باشد. در معادله تفاضلی زیر $N=1$ است.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]$$

اگر $y[-1]=\alpha$ و $x[n]=k\delta[n]$ باشد داریم:

$$y[0]=x[0]+\frac{1}{2}y[-1]=k+\frac{1}{2}\alpha$$

$$y[1]=x[1]+\frac{1}{2}y[0]=\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\alpha\right)$$

$$y[2]=x[2]+\frac{1}{2}y[1]=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(k+\frac{1}{2}\alpha\right)$$

....

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(k+\frac{1}{2}\alpha\right) \qquad n\geq 0$$

و برای $n<0$ نیز با قرار دادن مقادیر $y[n]$ بدست آمده در هرمرحله، در مرحله بعدی داریم:

$$y[-1]=x[-1]+\frac{1}{2}y[-2]=\alpha$$

$$y[-2]=2\alpha$$

$$y[-3]=2^2\alpha$$

$$y[-n]=(2)^{n-1}\alpha \Rightarrow y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}; \qquad n\leq -1$$

چنین سیستمی غیرعلی است. در این حالت علاوه بر غیرعلی بودن مشاهده می‌شود که سیستم غیرخطی نیز هست چون یک جمله در خروجی وجود دارد که اصلا بستگی به ورودی ندارد و اگر ورودی k برابر باشد آن جمله بطور ثابت در خروجی ظاهر می‌شود. این جمله در حقیقت پاسخ ورودی صفر سیستم است که باعث غیرخطی و در حالت کلی خطی افزایشی شدن سیستم می‌گردد.

برای اینکه سیستم علی و خطی شود باید شرایط استراحت اولیه را اعمال کنیم که عبارت است از:

$$y[-1]=0$$

2- Infinite Impulse Response

در این صورت کافی است معادله را برای $n \ge 0$ حل کرد:

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2} y[-1] = k$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2} y[0] = \frac{1}{2} k$$

$$\dots$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n k$$

بنابراین در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$y[n] = k\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

پاسخ فوق به ازاء $x[n] = k\delta[n]$ بدست آمد. اما برای $x[n] = \delta[n]$ داریم:

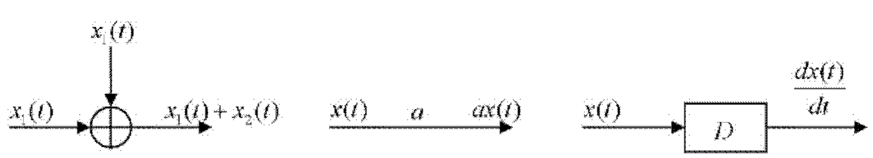
$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

که این در حقیقت پاسخ ضربه سیستم است.

توجه شود که مانند حالت پیوسته زمانی فرض شرایط استراحت اولیه در مورد سیستم‌های گسسته زمانی باعث می‌شود که سیستم خطی، مستقل از زمان و علی گردد.

۲-۱۰ نمایش معادلات دیفرانسیل به صورت نمودار جعبه‌ای[1]

یکی از روش‌های ساخت عملی و بررسی پاسخ یک سیستم که رابطه ورودی و خروجی آن به صورت یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرئب ثابت داده شده است، *استفاده از شبیه‌سازی در کامپیوتر* می‌باشد. شبیه‌سازی یک سیستم جهت بررسی عملکرد آن *بسیار ارزان‌تر و بی‌خطر* می‌باشد. در حالیکه گاهی اوقات ساخت سیستم اصلی و آزمایش آن مستلزم صرف *هزینه* فراوان و هم‌چنین *خطرات* فراوان می‌باشد. برای شبیه‌سازی لازم است معادله دیفرانسیل را بکمک *نمودار جعبه‌ای* نمایش داد. لازم به ذکر است سیستم‌هایی که در این فصل توسط معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند همگی خطی هستند، بعبارت دیگر معادلات دیفرانسیل دارای شرایط استراحت اولیه هستند. در این نمایش‌ها از سه عملگر *جمع دو سیگنال*، *ضرب*، و *مشتق* با دیاگرام بلوکی با نمایش قراردادی زیر استفاده می‌کنیم.



شکل (۲-۳۰): قراردادهای نمودار جعبه ای برای عملیات جمع و ضرب و مشتق

1-Block Diagram

جهت آشنایی بیشتر به مثال (۲-۱۹) و (۲-۲۰) توجه کنید. اما لازم است به یک مساله عملی در اینجا اشاره داشته باشیم و آن این است که چون از مشتق‌گیر در مدارات عملی کمتر استفاده می‌شود بلوک دیاگرام را با استفاده از انتگرال‌گیر رسم می‌کنیم. علت استفاده کم از مشتق‌گیر در مدارات این است که به ازای یک تغییر بسیار کوچک در مدت زمان خیلی کوچک از خود خاصیت ناپایداری نشان می‌دهد (نقاط انفصال). بطور کلی، یک مشتق‌گیر با ازاء هر گونه اغتشاش (یعنی تغییر محدود در دامنهٔ سیگنال ورودی در فاصلهٔ زمانی بسیار کوچک) ناپایدار میشود، اما یک انتگرال‌گیر با اینکه بازهم ناپایدار است، ناپایداریش به ازای اِعمال ورودی ثابت در مدت زمان نامحدود ظاهر می‌شودکه البته ازلحاظ فیزیکی غیرممکن است.

مثال (۱۹-۲): یک نمودار جعبه‌ای رسم کنید که رابطه ورودی و خروجی‌اش به صورت زیر باشد:

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t)$$

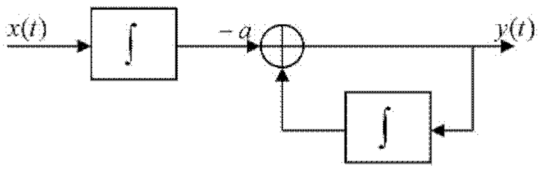
حل:برای شروع، ابتدا از طرفین رابطه فوق، به تعداد بزرگترین درجه مشتق موجود در رابطه، انتگرال می گیریم تا مشتق جای خود را به انتگرال دهد.

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{dy(t)}{dt}+\int_{-\infty}^{t}ay(t)dt=\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$$

$$y(t)+\int_{-\infty}^{t}ay(t)dt=\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)dt-\int_{-\infty}^{t}ay(t)dt$$

اکنون نمودار جعبه ای این سیستم به سادگی قابل نمایش است.



شکل (۲-۳۱): نمودار جعبه‌ای سیستم مثال (۲-۱۹)

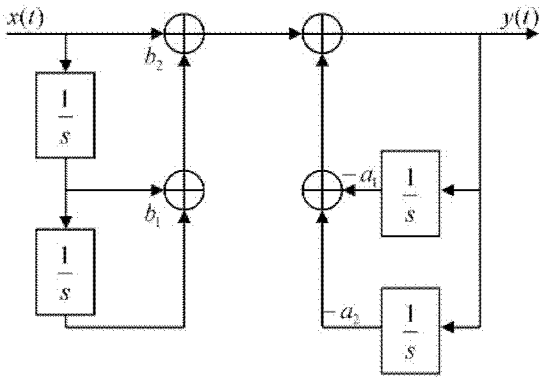
مثال (۲-۲۰): مطلوبست نمودار جعبه ای معادله دیفرانسیل زیر:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=x(t)+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

از طرفین معادله دوبارانتگرال می‌گیریم تا مشتق‌ها از بین بروند. گاهی بلوک انتگرال‌گیر را با $\frac{1}{s}$ و بلوک مشتق‌گیری را با s مشخص می‌کنند که درفصل تبدیل لاپلاس علت امر مشخص می‌شود.

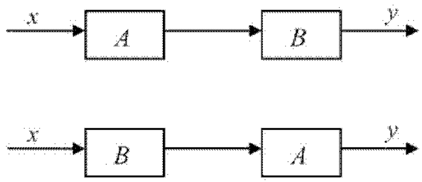
$$y(t)+a_1\int_{-\infty}^{t}y(t)dt+a_2\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}y(t)dt=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}x(t)dt+b_1\int_{-\infty}^{t}x(t)dt+b_2x(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}x(t)dt+b_1\int_{-\infty}^{t}x(t)dt+b_2x(t)-a_1\int_{-\infty}^{t}y(t)dt-a_2\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}y(t)dt$$



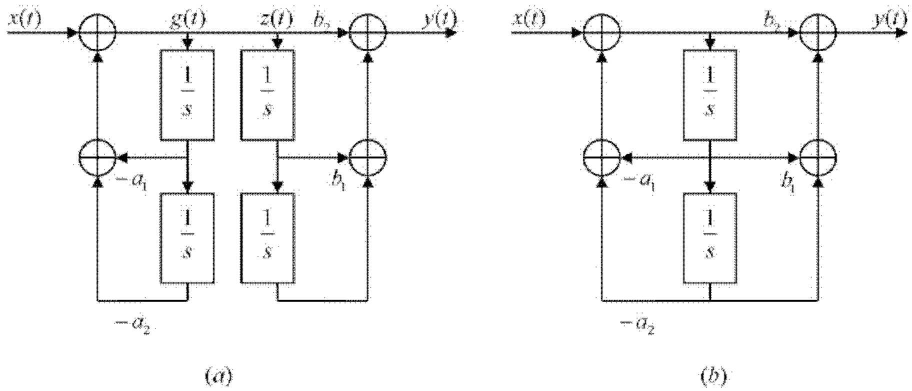
شکل (۲-۳۲): نمودار جعبه‌ای سیستمی مربوط به مثال (۲-۲۰)

به این طریقه نمایش، شکل مستقیم نوع I، (Direct form I) نام نهاده‌اند اما طریقه ساخت دیگری با حداقل تعداد جعبه‌های انتگرال امکان دارد و آن وقتی است که از جابجایی سیستم‌ها استفاده کنیم.



شکل (۲-۳۳):خاصیت جابجایی در سیستم‌های LTI

بدین ترتیب می‌توان با جابجا کردن دو بلوک فوق به سیستمی با حداقل تعداد بلوک‌های انتگرال‌گیر رسید.



شکل (۲-۳۴): طریقه تشکیل یک نمودار جعبه ای به شکل مستقیم نوع II

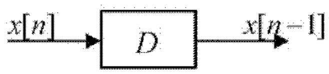
در مرحله اول با جابجا کردن دو قسمت شکل (۲-۳۲) به شکل (۲-۳۴-a) می‌رسیم. در این شکل چون $y(t)=z(t)$ است می‌توان عملیات انتگرال‌گیری در دو مسیر را توسط فقط یک مسیر انجام داد. بنابراین، شکل (۲-۳۴-b) حاصل می‌شود.

تمرین (۲-۹): نمودار جعبه‌ای سیستمی که بوسیله معادله زیر مشخص می‌شود را رسم کنید.

$$\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+5y=\frac{dx}{dt}$$

۲-۱۱ نمایش معادلات تفاضلی به کمک نمودار جعبه‌ای

بدلیل کاربرد سریع، ارزان و وسیع رایانه‌ها، شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته زمانی به کمک نمودار جعبه‌ای، که قابل تعریف در رایانه‌ها هستند، بسیار مفید و جالب توجه است. حتی در بعضی از موارد نمودار سیستم‌های پیوسته زمانی را توسط تکنیک‌های خاصی به حوزه گسسته زمانی منتقل می‌کنند تا بتوانند آنها را شبیه‌سازی نمایند. در اینجا نیز از همان سه عملگر قراردادی استفاده می‌شود با این تفاوت که در مورد سیستم‌های گسسته زمانی، عنصر مشتق تبدیل به عنصر تاخیر می‌گردد.



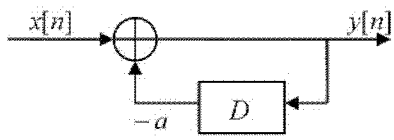
شکل (۲-۳۵): عنصر تاخیری در حوزه گسسته زمان

این عنصر پایدار است و به سادگی قابل ساخت نرم‌افزاری یا سخت‌افزاری می‌باشد.

مثال (۲-۲۱): مطلوب است ساخت یک سیستم گسسته زمان که توسط معادله تفاضلی زیر توصیف می‌گردد.

$$y[n]+ay[n-1]=bx[n]$$

بلوک دیاگرام سیستم فوق بصورت زیر است.

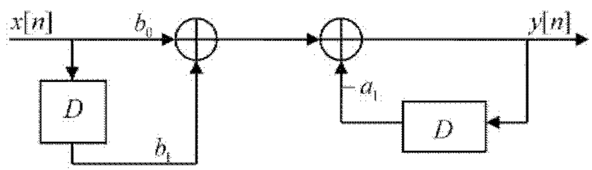


شکل (۲-۳۶): نمودار بلوکی معادله تفاضلی مثال (۲-۲۱)

مثال (۲-۲۲): معادله تفاضلی زیر را توسط نمودار بلوکی نمایش دهید.

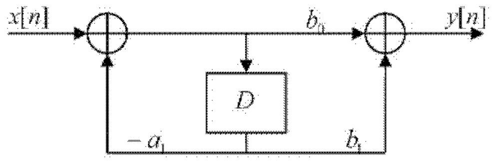
$$y[n]+a_1y[n-1]=b_0x[n]+b_1x[n-1]$$

نمودار جعبه‌ای سیستم فوق به صورت زیر است.



شکل (۲-۳۷): نمایش جعبه‌ای معادله تفاضلی مثال (۲-۲۲) به روش مستقیم نوع I

اگر از خاصیت جابجایی سیستم‌های خطی که ناشی از خاصیت جابجایی جمع کانولوشن است استفاده شود نمودار جعبه‌ای فوق بصورت زیر خلاصه می‌شود.



شکل (۲-۳۸): نمودار جعبه‌ای معادله تفاضلی مثال (-۲-۲۲) به روش مستقیم نوع II

در حالت کلی اگر معادله تفاضلی یک سیستم بصورت زیر باشد:

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{N}b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\right\} \tag{۹۰-۲}$$

در آن صورت نمودار جعبه‌ای روش مستقیم نوع I برای این سیستم بصورت شکل (a-۳۹-۲) رسم می‌شود. قسمت سمت راست این نمودار بیانگر ضرایب a_k بوده و مسیرهای پس‌خور را مشخص می‌سازند. اما سمت چپ نمودار مربوط به مسیرهای جلوخور (ضرایب b_k) می‌باشد.

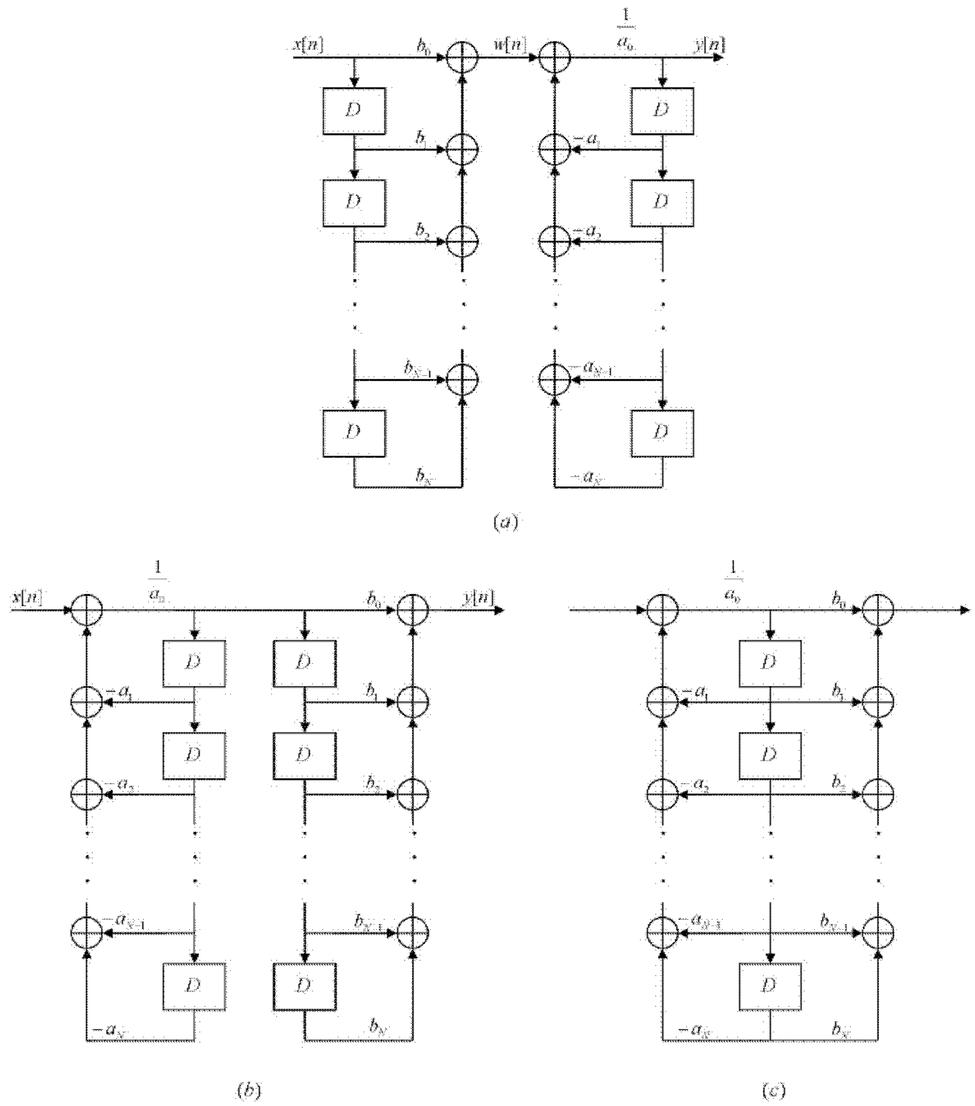
شکل (b-۳۹-۲) همان سیستم شکل (a-۳۹-۲) است و فقط با استفاده از خاصیت جابجایی سیستم‌های LTI دو قسمت سمت چپ و راست آن جابجا شده‌اند. در شکل (c-۳۹-۲) با توجه به عملکرد یکسان عناصر تاخیر که در مجاورت یکدیگر قرار دارند، سیستم ساده‌تر شده و به صورت مستقیم نوع II رسم شده است.

مثال (۲-۲۳): در این مثال می‌خواهیم به بررسی یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل زیر بپردازیم. یک سیستم LTI پیوسته زمان در استراحت اولیه که با معادله دیفرانسیل زیر مشخص می‌شود را در نظر بگیرید

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t) \tag{۹۱-۲}$$

پاسخ پلهٔ آن بدین‌صورت بدست می‌آید:

$$s(t)=y_h(t)+y_p(t)$$



شکل (۲-۳۹): نمایش سیستم به صورت مستقیم I و II برای معادله تفاضلی (۲-۹۰)

که در آن $y_h(t)$ پاسخ معادله همگن و $y_p(t)$ یک پاسخ خصوصی از معادله فوق است. معادله مشخصه بدین صورت است:

$$P^2 + P - 2 = 0$$

این معادله دو پاسخ بصورت $p=1$ و $p=-2$ دارد.

بنابراین برای پاسخ همگن داریم:

$$y_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{+t}$$

به ازای $t>0$ پاسخ دائمی ما چنین است (توجه کنید که در $t>0$ چون خروجی برابر مقدار ثابتی می‌شود، پس مشتقش صفر است). این پاسخ با توجه به ورودی پله که به ازاء $t>0$ دارای مقدار ثابتی است بدست می‌آید.

$$-2y_p(t)=1 \Rightarrow y_p(t)=\frac{-1}{2}$$

پس پاسخ پله در حالت کلی برابر است با:

$$s(t)=(Ae^{-2t}+Be^{t}-\frac{1}{2})u(t)$$

اکنون باید ضرایب را محاسبه کرد. از معلوماتمان در مورد استراحت اولیه استفاده می‌کنیم. شرایط استراحت اولیه را به صورت مقابل داریم:

$$s(0)=s'(0)=0$$

با قرار دادن این معلومات در رابطهٔ پاسخ پله داریم:

$$A+B-\frac{1}{2}=0$$
$$-2A+B=0$$

از حل این دو معادله می‌توان مجهولات A و B را بدست آورد:

$$A=\frac{1}{6}, B=\frac{1}{3}$$

بنابراین پاسخ پله برابر است با

$$s(t)=\left[\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{2}\right]u(t)$$

اکنون پاسخ ضربه را می‌توان از دو راه بدست آورد.

الف) چون ورودی ضربه تنها در یک لحظه بسیار کوتاه ظاهر می‌شود، می‌توان آن را بعنوان محرک ایجادکننده پاسخ همگن در نظر گرفت. بنابراین می‌توان تصور کرد که تنها پاسخ همگن در ایجاد پاسخ ضربه دخالت دارد و با استفاده از خواص تابع ضربه تنها باید ضرایب مجهول را بدست آورد یعنی تنها شرایط اولیه سیستم تغییر خواهند کرد.

معادله دیفرانسیل سیستم با طرف دوم بصورت $\delta(t)$ بصورت زیر است:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=\delta(t)$$

پاسخ همگن نیز قبلا به صورت زیر بدست آمده است (ضرایب a و b مجهول هستند).

$$y(t)=\left[ae^{-2t}+be^{t}\right]u(t)$$

به مشتقات اول و دوم پاسخ همگن نیز جهت جایگذاری در معادله دیفرانسیل سیستم احتیاج داریم:

$$y'(t)=\left[-2ae^{-2t}+be^{t}\right]u(t)+(a+b)\delta(t)$$
$$y''(t)=\left[4ae^{-2t}+be^{t}\right]u(t)+(-2a+b)\delta(t)+(a+b)\delta'(t)$$

اکنون مقادیر فوق را در معادلهٔ دیفرانسیل مشخص‌کننده سیستم قرار می‌دهیم و در طرفین ضرایب را مساوی قرار می‌دهیم.

$$\left(4ae^{-2t}+be^{t}\right)u(t)+(-2a+b)\,\delta(t)+(a+b)\,\delta'(t)$$
$$+\left(-2ae^{-2t}+be^{t}\right)u(t)+(a+b)\,\delta(t)-2\left(ae^{-2t}+be^{t}\right)u(t)=\delta(t)$$

از مساوی قرار دادن ضرایب جملات مشابه در دو طرف رابطه، مجهولات a و b را بدست می‌آید.

$$\begin{cases}-a+2b=1\\ a+b=0\end{cases}$$

از حل این دو رابطه $a=\frac{-1}{3}$ و $b=\frac{1}{3}$ بدست می‌آوریم.

و بدین ترتیب پاسخ ضربه بدست می‌آید:

$$h(t)=y(t)=\left[\frac{-1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right]u(t)$$

ب) می‌توان پاسخ ضربه را مستقیما از مشتق پاسخ پله بدست آورد.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\left[\frac{-1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right]u(t)$$

مثال (۲-۲۴): فرض کنید رابطه پاسخ یک سیستم LTI با ورودی آن بدین صورت است

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(t-2)d\tau$$

پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید.

حل: پاسخ ضربه سیستم چنین است (بجای $x(t)$ یا ورودی، $\delta(t)$ قرار می‌دهیم)

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

و با استفاده از خواص تابع ضربه می‌توان نوشت:

$$=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-2)}\delta(\tau-2)d\tau=e^{-t+2}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-2)d\tau$$

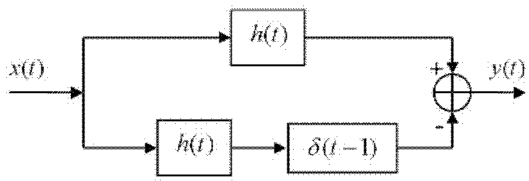
چون

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

با یک تغییر متغیر، می‌توان انتگرال ظاهر شده در جواب $h(t)$ را به صورت زیر تبدیل کرد:

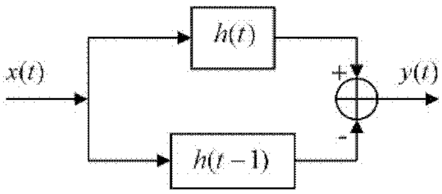
$$h(t)=e^{-t+2}\int_{-\infty}^{t-2}\delta(u)\;du=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

مثال (۲-۲۵): پاسخ ضربه کلی سیستم زیر را بدست آورید (فرض کنید ضابطه $h(t)$ معلوم است)



شکل (۲-۴۰): سیستم مثال (۲-۲۵)

حل: حلِ این سیستم معادل حل سیستم زیر است:



شکل (۲-۴۱): سیستم معادل شکل (۲-۴۰)

چون اگر رابطه ورودی و خروجی را برای شکل (۲-۴۰) بنویسیم، داریم:

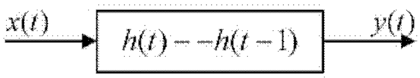
$$y(t)=x(t)*h(t)-x(t)*\delta(t-1)*h(t)$$

و طبق خاصیت توزیع‌پذیری کانولوشن می‌توان نوشت: $y(t)=x(t)*[h(t)-\delta(t-1)*h(t)]$

و با توجه به اینکه $h(t)*\delta(t-1)=h(t-1)$

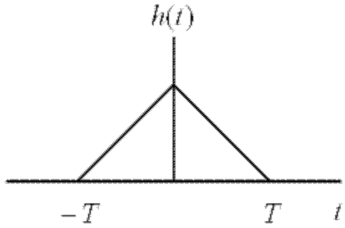
پس، داریم $y(t)=x(t)*[h(t)-h(t-1)]$

بنابراین، سیستم شکل (۳-۴۱) در نهایت بصورت شکل (۲-۴۲) ظاهر می‌شود.



شکل (۲-۴۲): سیستم معادل شکل (۲-۴۰)

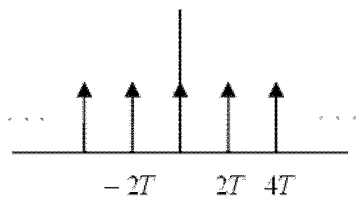
مثال (۲-۲۶): فرض کنید پاسخ ضربهٔ یک سیستم بشکل زیر باشد، پاسخ این سیستم به ورودی قطار ضربه را بدست آورید.



شکل (۲-۴۳): پاسخ ضربه سیستم مثال (۲-۲۶)

حل: پاسخ این سیستم به ورودی قطار ضربه که رابطه ریاضی آن بصورت زیر است:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2kT)$$

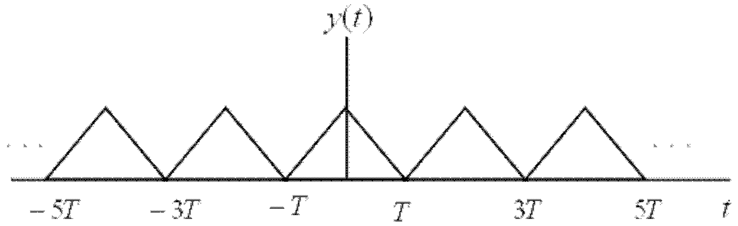


شکل (۲-۴۴): شکل قطار ضربه

چنین بدست می‌آید:

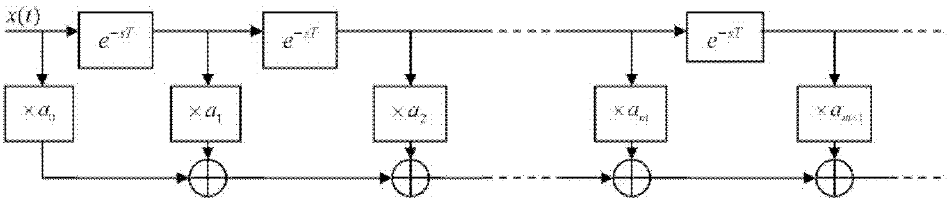
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-2kT)\ h(t-\tau)\ d\tau$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(t-2kT)$$

و این پاسخ یعنی مجموعه‌ای از توابع بصورت شکل (۲-۴۳) که با تناوب زمانی $2T$ تکرار می‌شوند.



شکل (۲-۴۵): پاسخ سیستم مثال (۲-۲۶) به قطار ضربه (۲-۴۴)

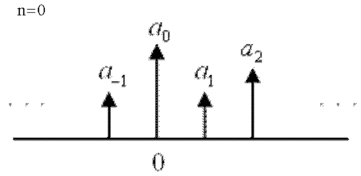
مثال (۲-۲۷): پاسخ ضربه سیستم شکل ۲-۴۶ را بدست آورید.



شکل (۲-۴۶): سیستم مورد نظر در مثال (۲-۲۷)

حل: اگر فرض کنیم N عنصر تاخیری داشته باشیم می‌توان $h(t)$ را از مجموع ورودی‌های وزن شده و انتقال یافته بصورت زیر پیدا کرد.

$$h(t)=a_0\delta(t)+a_1\delta(t-T)+a_2\delta(t-2T)+....+a_3\delta(t-mt)$$
$$+....+a_N\delta(t-NT)=\sum_{n=0}^{N}a_n\delta(t-nT)$$



شکل (۲-۴۷): پاسخ ضربه سیستم شکل (۲-۴۶)

مثال (۲-۲۸): حاصل کانولوشن‌های زیر را بدست آورید.

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

$a)\quad x[n]=\alpha^n u[n]$

$h[n]=\beta^n u[n] \qquad \alpha\neq\beta$

$\mathrm{b})\quad x[n]=h[n]=\alpha^n u[n]$

$c)\quad x[n]=(-1)^n\{\,u[-n]-u[-n-8]\,\}$

$h[n]=u[n]-u[n-8]$

$d)\quad x[n]=1 \qquad \forall\ n$

$$h[n]=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & n\geq 0\\ 4^n & n<0\end{cases}$$

$e)\quad x[n]=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n u[n-4]$

$h[n]=4^{\mathrm{n}}\ u[2-n]$

$f)\quad x[n]=\delta[n+1]+\delta[n]+\delta[n-2]+\delta[n-3]$

$h[n]=\delta[n+2]+2\delta[n+1]+3\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$

حل:

$$a)\quad y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[k]\beta^{n-k}u[n-k]=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\beta^{n-k}u[n-k]$$

توجه شود که مجموع فوق فقط برای $(k>0;\ \ k\leq n)$ مقدار دارد. پس برای $n<0$ داریم $y[n]=0$. برای $n\geq 0$ داریم:

$$y[n]=\beta^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k=\beta^n\,\frac{1-\left(\alpha/\beta\right)^{n+1}}{1-\alpha/\beta}$$

ویا در یک عبارت

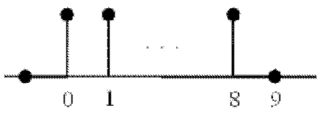
$$y[n]=\beta^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k=\beta^n\,\frac{1-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}u(t)$$

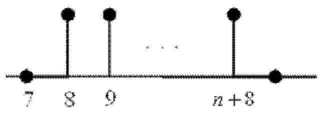
$$b)\quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\ h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[k]\ \alpha^{n-k}u[n-k]$$

$$y[n]=\begin{cases}\alpha^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}1=\alpha^n\,\dfrac{n(n+1)}{2} & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

$$c)\quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\{u[k]-u[k-8]\}\{u[-n+k]-u[-n+k-8]\}$$

ابتدا تابع $u[-n+k]-u[-n+k-8]$ را به ازای $n=0$ و یک n دلخواه رسم می‌کنیم.





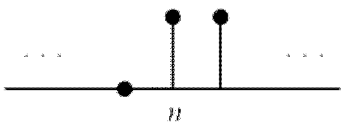
شکل (۲-۴۸): a) تابع $u[k]-u[-k-8]$ و b) تابع $u[-k+n]-u[n-k-8]$

اکنون با توجه به رابطه حاصل جمع تعداد محدودی از جملات یک تصاعد هندسی $\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ داریم:

$$0\le n\le 7\rightarrow y[n]=\sum_{k=n}^{7}(-1)^k=\sum_{k=0}^{7}(-1)^k-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k$$

$$=\frac{1-(-1)^8}{2}-\frac{1-(-1)^n}{2}=-\frac{1-(-1)^n}{2}$$

$$n>8\Rightarrow y[n]=0$$



شکل (۲-۴۸): تابع $u[n-k]-u[n-k-8]$

$$n<-7\Rightarrow y[n]=0$$

$$-7\le n<0\Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n+7}(-1)^k=\frac{1-(-1)^{n+8}}{2}$$

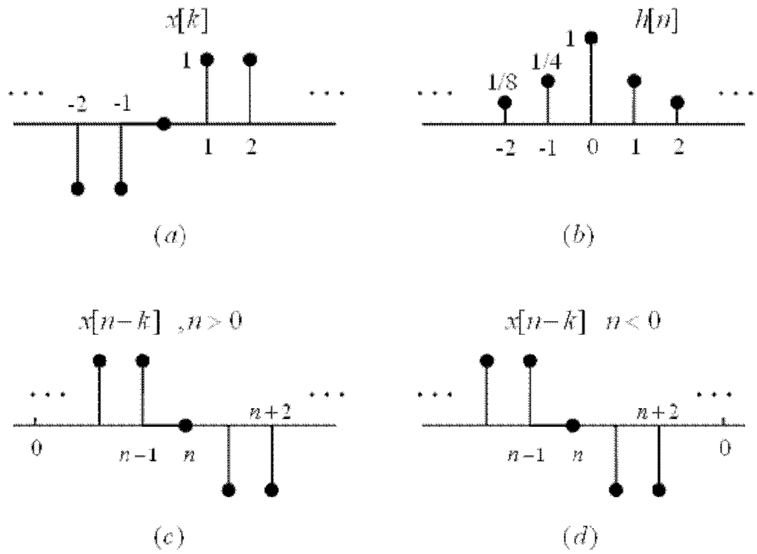
بنابراین، می‌توان پاسخ $y[n]$ را بصورت زیر نوشت:

$$y[n]=\begin{cases}0 & n<-7\\ 1 & -7\le n<0\ ,\quad n=2k\\ 0 & -7\le n<0\ ,\quad n=2k+1\\ 0 & 0\le n\le 7\ ,\quad n=2k\\ 1 & 0<n\le 7\ ,\quad n=2k+1\\ 0 & n>7\end{cases}$$

$$d)\ \ x[n]=u[n]-u[-n]$$

$$h[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n & n\geq 0\\ 4^n & n<0\end{cases}$$

ابتدا توابع مورد نیاز در محاسبه کانولوشن را رسم می‌کنیم.



شکل (۲-۴۹): a) تابع $x[k]$ b) تابع $h[k]$، c) تابع $x[n-k]$ به ازاء $n>0$ و d) تابع $x[n-k]$ به ازاء $n<0$

برای $n\geq 0$ ، داریم:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k]\ h[k]=\sum_{k=-\infty}^{-1}4^k+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

و برای $n<0$، داریم:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k]\ h[k]=\sum_{k=-\infty}^{n-1}4^k-\sum_{k=n}^{-1}(4)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

بنابراین، در حالت کلی داریم:

$$y[n]=\begin{cases}\sum_{k=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k & n\geq 0\\ -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=n}^{-1}4^k+\sum_{k=-\infty}^{n-1}4^k & n<0\end{cases}$$

جهت حل کامل احتیاج به روابط زیر داریم:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{1}4^k=\sum_{k=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=4+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=4+\frac{1}{3/4}=\frac{16}{3}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1-\left(1/2\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2-2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=2^{-n}$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه $y[n]$ می‌توان پاسخ به ازای $n>0$ را بدست آورد.

و برای محاسبه $y[n]$ به ازاء nهای منفی احتیاج به روابط زیر داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

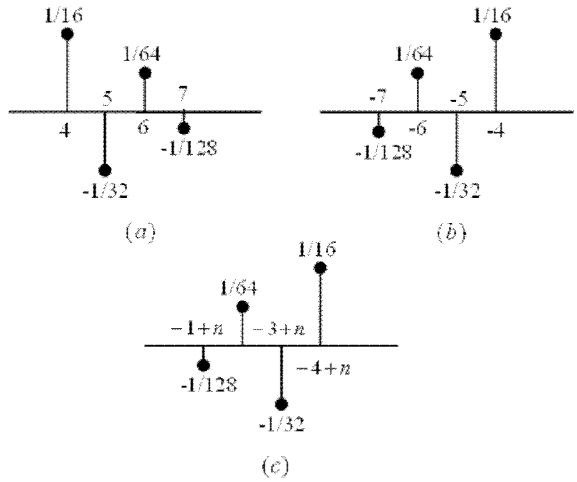
$$\sum_{k=-1}^{n+1}4^k=\sum_{k=1}^{-n-1}(\frac{1}{4})^k=(\sum_{k=0}^{-n-1}(\frac{1}{4})^k)-1$$

$$=-1+\frac{1-(\frac{1}{4})^{-n}}{1-\frac{1}{4}}=-1+\frac{4}{3}[1-(4)^n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n-1}4^k=\sum_{k=-n+1}^{\infty}(\frac{1}{4})^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k-\sum_{k=0}^{-n}(\frac{1}{4})^k=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1-(\frac{1}{4})^{-n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}(\frac{1}{4})^{-n+1}=\frac{1}{3}4^n$$

$$e)x[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n-4];\quad h[n]=4^n u[2-n];\quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-k]h[k]$$



شکل (۲-۵۰): a) تابع $x[k]$ b) تابع $x[-k]$ و c) تابع $x[n-k]$ به ازاء n دلخواه

تابع $h[k]=4^k u[2-k]$ فقط به ازاء $k \le 2$ مقدار دارد. پس تا هنگامی که $n-4 \le 2$ یا $n \le 6$ داریم:

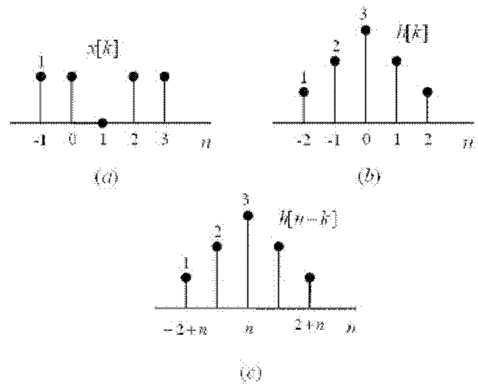
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}4^k \qquad -\infty < n \le 6$$

برای $n-4 \ge 3$ داریم:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}4^k \qquad 7 \le n < \infty$$

(محاسبه مجموع‌های مذکور ساده است و از آن صرفنظر می‌شود.)

f) توابع $x[n]$ و $x[n]$ در شکل ۲-۵۱ رسم شده اند.



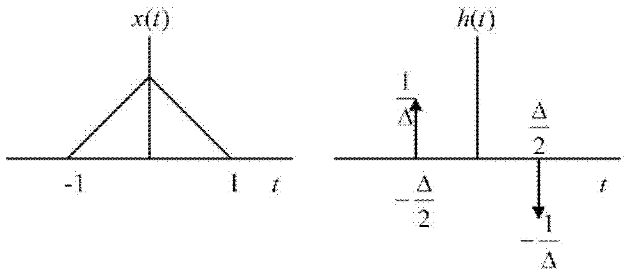
شکل (۲-۵۱): a) تابع $x[k]$، b) تابع $h[k]$، c) تابع $h[n-k]$ مربوط به قسمت f

نواحی متمایز برای این کانولوشن و پاسخ در هر ناحیه از قرار زیر هستند:

$$n < -3 \Rightarrow y[n] = 0$$
$$n = -3 \Rightarrow y[n] = 1$$
$$n = -2 \Rightarrow y[n] = 1\times 1 + 2\times 1 = 3$$
$$n = -1 \Rightarrow y[n] = 1\times 0 + 2\times 1 + 3\times 1 = 5$$
$$n = 0 \Rightarrow y[n] = 1\times 1 + 2\times 0 + 3\times 1 + 2\times 1 = 6$$
$$n = 1 \Rightarrow y[n] = 1\times 1 + 2\times 1 + 3\times 0 + 2\times 1 + 1 = 6$$
$$n = 2 \Rightarrow y[n] = 1\times 1 + 2\times 0 + 3\times 1 + 2\times 1 + 1 = 6$$
$$n = 3 \Rightarrow y[n] = 3\times 1 + 2\times 1 + 1\times 0 = 5$$
$$n = 4 \Rightarrow y[n] = 2\times 1 + 1\times 1 = 3$$
$$n \geq 5 \Rightarrow y[n] = 0$$

مثال (۲-۲۹): مطلوبست محاسبه کانولوشن‌های زیر.

$a)$



شکل (۲-۵۲): توابع $x(t)$ و $h(t)$ مربوط به مثال (۲-۲۹)

b) $x(t) = at + b$ و $h(t) = \frac{4}{3}[u(t) - u(t\text{-}1)] - \frac{1}{3}\delta(t-2)$

حل:

$$a) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t\text{-}\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t\text{-}\tau)\left[\frac{1}{\Delta}\delta\left(\tau + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta}\delta\left(\tau - \frac{\Delta}{2}\right)\right] d\tau$$
$$= \frac{1}{\Delta}x\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{\Delta}x\left(t - \frac{\Delta}{2}\right)$$

$$b) \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t\text{-}\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$
$$x(t) = at + b \Rightarrow x(t\text{-}\tau) = at - a\tau + b$$
$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [at\text{-}a\tau + b]\left[\frac{3}{4}u(\tau) - u(\tau-1) \text{-} \frac{1}{3}\delta(\tau-2)\right] d\tau$$
$$y(t) = \int_{0}^{1} \frac{4}{3}\, [u(\tau) - u(\tau-1)](at\text{-}a\tau + b)d\tau \text{-} \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} [at\text{-}a\tau + b]\delta(\tau-2)d\tau$$

$$y(t)=\frac{1}{3}\left[a(t-1)-b\right]$$

مثال (۲-۳۰): پاسخ ضربه تعدادی سیستم خطی در زیر داده شده است. برای این سیستم‌های خطی اولا خروجی را بیابید، ثانیا تعیین کنید کدامیک علی است و کدام غیر علی، (در حالت کلی در مورد مستقل از زمان بودن سیستم اطلاعی نداریم).

$$i)\quad h_k[n]=\delta[n-k] \Rightarrow y[n]=x[n]*h_k[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]=x[n]$$

این سیستم علی است.

$$ii)\quad h_k[n]=\begin{cases}\delta[n-k] & k\ \text{زوج}\\ 0 & k\ \text{فرد}\end{cases} \Rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[2k]\,\delta[n-2k]$$

$$\Rightarrow y[n]=\begin{cases}0 & n\ \text{فرد}\\ x[n] & n\ \text{زوج}\end{cases}$$

این سیستم علی است.

$$iii)\quad h_k[n]=\delta[2n-k] \Rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[2n-k]$$

$$\Rightarrow y[n]=x[2n]$$

این سیستم غیر علی است چون اگر $n=1$ در نظر بگیریم پاسخ در این لحظه بستگی به مقدار ورودی در لحظه $n=2$ دارد.

$$iv)\quad h_k[n]=ku[n-k] \Rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,ku[n-k]$$

$$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} kx[k]$$

این سیستم علی است.

$$v)\quad h_k[n] = k\delta[n-2k] + 3k\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\delta[n-2k]\, x[k] + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 3k\delta[n-k]x[k]$$

$$y[n] = \begin{cases} \frac{n}{2}x\left[\frac{n}{2}\right] + 3nx[n] & n = 2k \\ \\ 3nx[n] & n = 2k+1 \end{cases}$$

این سیستم غیر علی است چون اگر $n=-2$ در نظر بگیریم پاسخ در این لحظه بستگی به مقدار ورودی در لحظه $n=-1$ دارد.

مثال (۲-۳۱): سیستمی با پاسخ ضربه داده شده در زیر مفروض است. آیا این سیستم علی و مستقل از زمان است؟

پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ و $x_1(t)$، که در زیر داده شده‌اند، را بیابید.

$$\begin{cases} x_1(t) = u(t-1) - u(t-3) \\ x_2(t) = e^{-t}u(t) \end{cases} \qquad h_\tau(t) = u(t-\tau) - u(t-2\tau) = f[\delta(t-\tau)]$$

حل: از پاسخ ضربه این سیستم مشخص است که این سیستم خطی اما متغیر با زمان است. *بعنوان مثال پاسخ به چند ضربه انتقال یافته متفاوت بصورت زیر است:*

$$f[\delta(t)] = h_0(t) = u(t) - u(t) = 0$$
$$f[\delta(t-2)] = h_2(t) = u(t-2) - u(t-4)$$
$$f[\delta(t+1)] = h_{-1}(t) = u(t+1) - u(t+2)$$

بنابراین این سیستم متغیر با زمان و همچنین غیر علی است.

برای یافتن پاسخ به $x_1(t)$، داریم:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\, h_\tau(t) d\tau$$

و یا

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\tau-1) - u(\tau-3)]\,[u(t-\tau) - u(t-2\tau)]\, d\tau$$

اکنون این انتگرال را به چهار قسمت تفکیک کرده و هر قسمت را جداگانه حساب می‌کنیم.

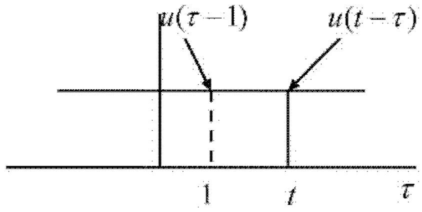
$$y_1(t) = I_1 - I_2 - I_3 + I_4$$

که در آن

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau-1)\,u(t-\tau)\,d\tau$$
$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau-1)\,u(t-2\tau)\,d\tau$$
$$I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau-3)\,u(t-\tau)\,d\tau$$
$$I_4=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau-3)\,u(t-2\tau)\,d\tau$$

برای محاسبه قسمت اول پاسخ یا I_1 لازم است دو ناحیه متفاوت در نظر بگیریم. برای ناحیه اول یعنی $-\infty<t<1$ همانگونه که از شکل (۲-۵۳) پیداست روی هم افتادگی میان دو سیگنال وجود ندارد. پس در این ناحیه $I_1=0$. اما برای ناحیه دوم داریم

$$I_1=\int_1^t d\tau=t-1 \qquad 1<t<\infty$$

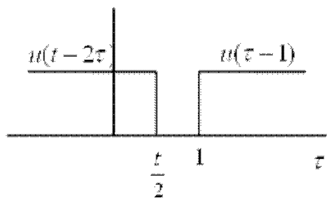


شکل (۲-۵۳): توابع $u(\tau-1)$ و $u(t-\tau)$ بر حسب τ (t پارامتر است)

برای I_2 نیز باید دو ناحیه تعریف کنیم.

برای ناحیه اول همانگونه که از شکل (۲-۵۴) پیداست روی هم افتادگی بین $u(\tau-1)$ و $u(t-2\tau)$ وجود ندارد پس

$$I_2=0 \qquad -\infty<t/2<1 \text{ یا } -\infty<t<2$$



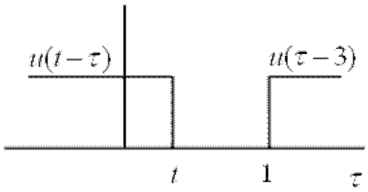
شکل (۲-۵۴): توابع $u(t-2\tau)$ و $u(\tau-1)$ بر حسب τ (t پارامتر است)

ولی برای ناحیه دوم داریم

$$I_2=\int_1^{\frac{t}{2}} d\tau=t/2-1 \qquad t/2>1 \text{ یا } t>2$$

برای I_3 نیز دو ناحیه تعریف می‌کنیم. در ناحیه اول از شکل (۲-۵۵) پیداست که روی هم افتادگی بین دو تابع وجود ندارد پس

$$I_3=0 \qquad -\infty<t<3$$



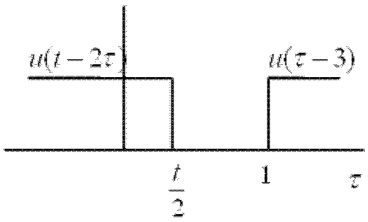
شکل (۲-۵۵): توابع $u(t-\tau)$ و $u(\tau-3)$ برحسب τ (t پارامتر است)

ولی برای ناحیه دوم داریم

$$I_3=\int_3^t d\tau=t-3 \qquad t>3$$

برای I_4 نیز داریم

$$I_4=0 \qquad t/2\le 3 \quad \text{یا} \quad t\le 6$$
$$I_4=\int_3^{t/2} d\tau=\frac{t}{2}-3 \qquad \frac{t}{2}\ge 3 \quad \text{یا} \quad t\ge 6$$



شکل (۲-۵۶): توابع $u(t-2\tau)$ و $u(\tau-3)$ بر حسب τ (t پارامتراست)

اکنون بسادگی با در نظر گرفتن I_1 الی I_4 می‌توان پاسخ کلی را در فواصل مختلف نوشت. جواب نهایی برابر جواب حاصله از روش دوم است که در زیر ارائه می‌شود.

روش دوم حل مسئله این است که منحنی های توابع $[u(t-\tau)-u(t-2\tau)]$ و $[u(\tau-1)-u(\tau-3)]$ را بر حسب τ بکشیم. در این صورت می توان کانولوشن را با توجه به نواحی تلاقی دو منحنی بدست آورد.

شکل ۲-۵۷ محاسبه کانولوشن مثال ۲-۳۱ از طریق رسم مستقیم توابع $[u(\tau-1)-u(\tau-3)]$ و $[u(t-\tau)-u(t-2\tau)]$

باتوجه به شکل ۲-۵۷ داریم:

$$y_1(t)=0 \qquad t\le 3$$
$$y_1(t)=\int_1^t d\tau=t-1 \qquad 1\le t\le 2$$
$$y_1(t)=\int_{\frac{t}{2}}^t d\tau=\frac{t}{2} \qquad 2\le t\le 3$$

$$y_1(t)=\int_{\frac{t}{2}}^{3} d\tau=\frac{t}{2} \qquad 3\le t\le 6$$

$$y_1(t)=0 \qquad\qquad t\ge 6$$

برای بررسی پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$

$$y_2(t)=x_2(t)*h_\tau(t)$$

$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}u(\tau)[u(t-\tau)-u(t-2\tau)]d\tau$$

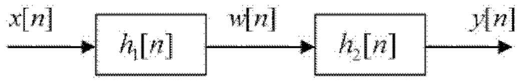
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}u(\tau)u(t-2\tau)\,d\tau$$

$$y_2(t)=\left(\int_0^t e^{-\tau}d\tau\right)u(t)-\left(\int_0^{t/2} e^{-\tau}d\tau\right)u(t)=-e^{-t}+1+e^{-t/2}-1$$

$$y_2(t)=e^{-t/2}-e^{-t}$$

مثال (۲-۳۲): $y[n]$ خروجی سیستم شکل (۲-۵۸) را بیابید اگر $h_2[n]=a^n u[n]$, $h_1[n]=Sin8n$ و $|a|<1$ باشد. همچنین سیگنال ورودی بصورت زیر است:

$$x[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$$



شکل (۲-۵۸): سیستم مربوط به مثال (۲-۳۲)

با استفاده از خاصیت جابجایی کانولوشن می‌توان محل سیستم‌های $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را عوض کرد.

$$y[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]=x[n]*h_2[n]*h_1[n]$$

حال حاصل کانولوشن $x[n]*h_2[n]$ را می‌یابیم.

$$g[n]=x[n]*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\;h_2[n-k]$$

$$g[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[k]a^{n-k}u[n-k]-a\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a^{n-k}u[n-k]\delta[k-1]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a^n u[n]\delta[k]-a\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a^{n-1}u[n-1]\delta[k-1]$$

$$=a^n u[n]-a^n u[n-1]=a^n(u[n]-u[n-1])=a\delta[n]$$

اکنون حاصل کانولوشن $g[n]*h_1[n]$ را پیدا می‌کنیم.

$$y[n]=g[n]*h_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a\;\delta[k]\;[Sin\,8(n-k)]$$

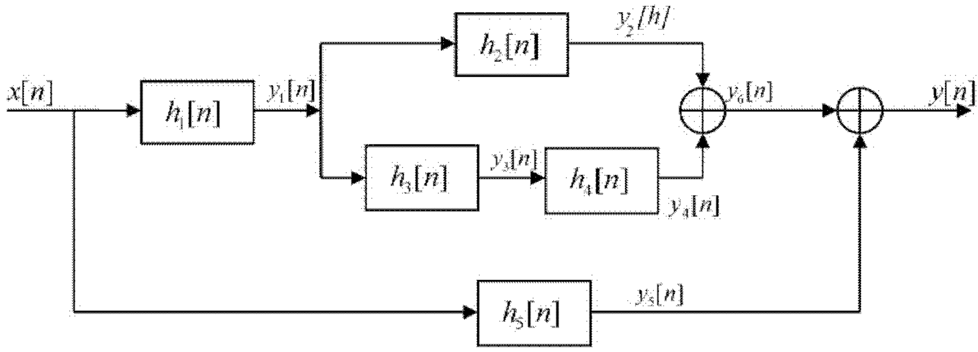
$$y[n]=aSin\,8n$$

مثال (۲-۳۳): سیستم مرکب زیر را که ترکیبی از ۵ سیستم LTI است را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه سیستم مرکب را برحسب پاسخهای ضربه سیستم‌های جزیی به دست آورید.

حل: ابتدا $y_6[n]$ را برحسب سیستم‌های داده شده و ورودی به دست می‌آوریم.

$$y_6[n]=y_2[n]-y_4[n]=y_2[n]-y_3[n]*h_4[n]$$

$$\begin{aligned}y_6[n]&=y_2[n]-y_1[n]*h_3[n]*h_4[n]\\&=y_1[n]*h_2[n]-y_1[n]*h_3[n]*h_4[n]\\&=y_1[n]*\left(h_2[n]-(h_3[n]*h_4[n])\right)\\&=\left(x[n]*h_1[n]\right)*\{h_2[n]-(h_3[n]*h_4[n])\}\end{aligned}$$



شکل (۲-۵۹): سیستم مرکب از سیستم‌های جزیی مربوط به مثال (۲-۳۳)

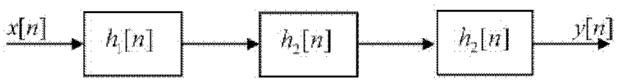
اکنون همه چیز آماده است تا $y[n]$ نهایی را بدست آورده و از روی آن پاسخ ضربه کل سیستم را محاسبه کنیم.

$$y[n]=\left(x[n]*h_5[n]\right)+y_6[n]$$

بنابراین پاسخ ضربه کلی سیستم به صورت زیر است:

$$h[n]=h_1[n]*\{h_2[n]-\left(h_3[n]*h_4[n]\right)\}+h_5[n]$$

مثال (۲-۳۴): سیستم مرکب زیر از سه سیستم جزیی تشکیل شده است.



شکل (۲-۶۰): سیستم مرکب از سه سیستم جزیی مربوط به مثال (۲-۳۴)

اگر $h_2[n]=u[n]-u[n-2]$ باشد و اگر پاسخ ضربه کلی سیستم به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned}h[n]&=\delta[n]+5\delta[n-1]+10\delta[n-2]\\&+11\delta[n-3]+8\delta[n-4]+4\delta[n-5]+\delta[n-6]\end{aligned}$$

الف) مطلوبست $h_1[n]$

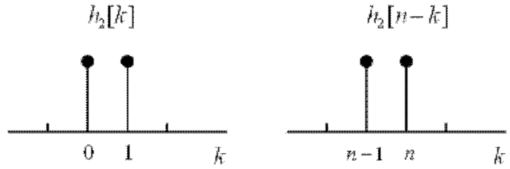
ب) مطلوبست پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

حل: می‌دانیم که ترکیب متوالی سه سیستم معادل کانولوشن پاسخ ضربه آنها است

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]*h_2[n]$$

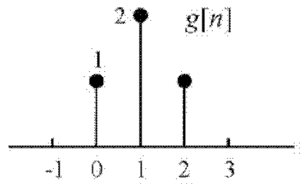
ابتدا حاصل کانولوشن $h_2[n]*h_2[n]$ را می‌یابیم

$$g[n]=h_2[n]*h_2[n]=\sum_{K=-\infty}^{+\infty}\{u[k]-u[k-2]\}\{u[n-k]-u[n-k-2]\}$$



شکل (۲-۶۱): دنباله $h_2[n-k],h_2[k]$

پاسخ این کانولوشن در شکل (۲-۶۲) رسم شده است.



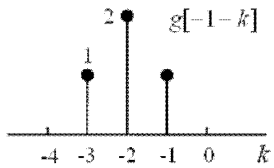
شکل (۲-۶۲): حاصل کانولوشن $h_2[n]$ با خودش

اکنون باید حاصل کانولوشن $g[n]$ و دنباله مجهول $h_1[n]$ برابر $h[n]$ (معلوم) باشد، یعنی:

$$h[n]=h_1[n]*g[n]=\sum_{K=-\infty}^{+\infty}h_1[k]g[n-k]$$

با رسم دنباله $g[-1-k]$ (شکل (۲-۶۳)) می‌بینیم چون $h[-1]=0$ است، یک جواب ممکن برای $h_1[k]$ به ازاء $k=-1,-2,-3$ مقدار صفر است. در این صورت حاصلضرب $h_1[k]$ در تابع $g[-1-k]$ به ازاء همه مقادیر k مساوی صفر می‌شود. به زبان ریاضی،

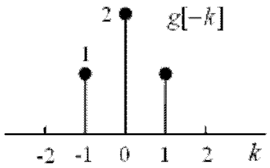
$$h[-1]=0\Rightarrow\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_1[k]\,g[-1-k]=0 \qquad h_1[-1]=0 \qquad h_1[-2]=h_1[-3]=0$$



شکل (۲-۶۳): دنباله $g[-1-k]$

چون $h[0]=1$ است و با رسم دنباله $g[-k]$ مشاهده می‌شود که لازم است $h_1[0]=1$ شود تا حاصل کانولوشن مساوی یک گردد. (توجه کنید که مقادیر $h_1[-2]$, $h_1[-1]$ قبلا مساوی صفر به دست آمده‌اند.)

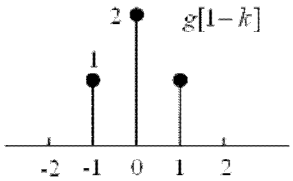
$$h[0]=1 \Rightarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h_1[k]\ g[-k]=1 \Rightarrow 1\times h_1[-2]+2\times h_1[-1]+1\times h_1[0]=1$$
$$\Rightarrow h_1[0]=1$$



شکل (۲-۶۴): دنباله $g[-k]$

با ادامه همین روند می‌توان سایر مقادیر $h_1[n]$ را یافت. به عنوان مثال چون $h[1]=5$ است و با توجه به دنباله $g[1-k]$ که در شکل (۲-۶۵) رسم شده است درمی‌یابیم که $h_1[1]=3$ است.

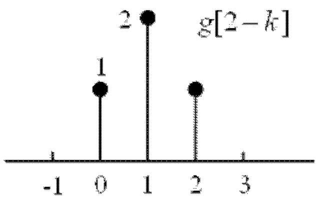
$$h[1]=5 \Rightarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h_1[k]\ g[1-k]=5$$
$$\Rightarrow 1\times h_1[-1]+2\times h_1[0]+1\times h_1[1]=5 \Rightarrow 0+2+h_1[1]=5 \Rightarrow h_1[1]=3$$



شکل (۲-۶۵): دنباله $g[1-k]$

و همچنین با توجه به $g[2-k]$ و مقدار $h[2]=10$ درمی‌یابیم که باید $h_1[2]=3$ باشد.

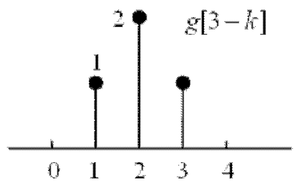
$$h[2]=10 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]\ g[2-k]=10$$
$$\Rightarrow 1\times h_1[0]+2\times h_1[1]+1\times h_1[2]=10 \Rightarrow 1+2\times 3+h_1[2]=10$$
$$\Rightarrow h_1[2]=3$$



شکل (۲-۶۶): دنباله $g[2-k]$

مقدار $h_1[3]$ نیز با توجه به مقادیر محاسبه شده قبلی و برنامه $g[3-k]$ و مقدار $h[3]=1$ به دست می‌آید

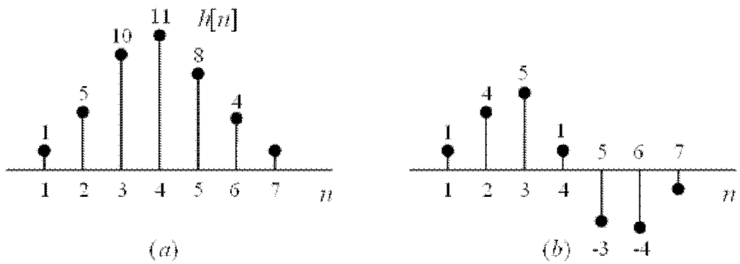
$$h[3]=11 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]g[3-k]=11$$
$$\Rightarrow 1\times h_1[1]+2\times h_1[2]+1\times h_1[3]=11 \Rightarrow 1\times 3+2\times 3+h_1[3]=11$$
$$\Rightarrow h_1[3]=2$$



شکل (۲-۶۷): دنباله $g[3-k]$

سایر مقادیر h_1 نیز به همین ترتیب محاسبه می شوند.

ب) دنباله $h[n]$ در شکل (۲-۶۸-a) رسم شده است.



شکل (۲-۶۸): a) دنباله $h[n]$ b) حاصل کانولوشن

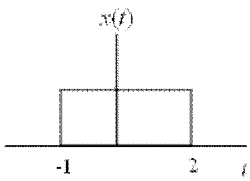
حاصل کانولوشن با توجه به خاصیت تابع ضربه بسادگی به دست می‌آید.

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta[k]-\delta[k-1]\right\}h[n-k]$$
$$=h[n]\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[k]-h[n-1]\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[k-1]=h[n]-h[n-1]$$

مثال (۲-۳۵): یک سیستم LTI پیوسته زمانی را در نظر بگیرید. رابطه ورودی و خروجی این سیستم به صورت زیر است:

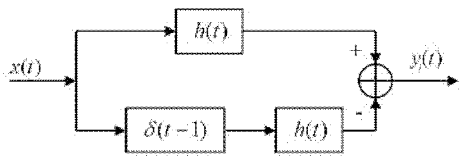
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)\; d\tau$$

الف) پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ را که در شکل ۲-۶۹ نمایش داده شده است بیابید.



شکل (۲-۶۹): ورودی سیستم برای مثال (۲-۳۵)

ب) ترکیبی از سیستم‌های LTI رابه صورت زیر در نظر بگیرید.



شکل (۲-۷۰): سیستم مرکب مربوط به مثال (۲-۳۵)

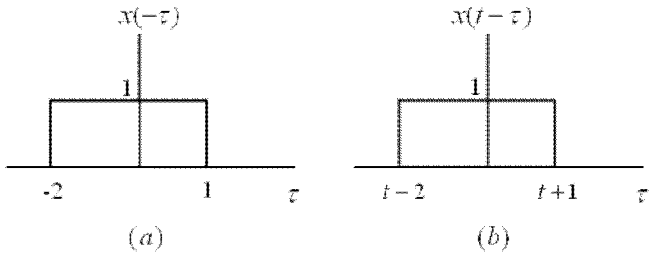
خروجی این سیستم را به دست آورید وقتی ورودی همان $x(t)$ ذکر شده در قسمت (الف) باشد.

حل: الف) در مثال (۲-۲۴) پاسخ ضربه این سیستم به صورت زیر به دست آمده است.

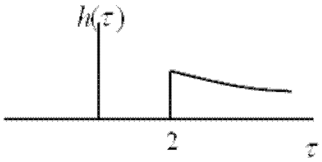
$$h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

اکنون با توجه به پاسخ ضربه سیستم می‌توان پاسخ به ورودی $x(t)$ را یافت.

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$



شکل (۲-۷۱): a) تابع $x(-\tau)$ b)تابع $x(t-\tau)$ برحسب τ (t پارامتر است)



شکل (۲-۷۲): پاسخ ضربه سیستم

همانگونه که مشاهده می‌شود به ازاء $t<1$ روی هم افتادگی بین $x(t-\tau),h(\tau)$ وجود ندارد پس

$$y(t)=0 \quad ,t<1$$

در فاصله $1<t<4$ با افزایش t ، روی هم افتادگی $h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ افزایش می‌یابد و

$$y(t)=\int_{2}^{t+1} e^{-(\tau-2)}d\tau \qquad 1<t<4$$

و به ازاء $t>4$ همه تابع $x(t-\tau)$ روی $h(\tau)$ می‌افتد پس

$$y(t)=\int_{t-2}^{t+1} e^{-(t-\tau)}d\tau \qquad 4<t$$

ب) با استفاده از خواص کانولوشن می‌توان نوشت:

$$y_1(t) = x(t) * h(t) - x(t) * \delta(t-1) * h(t)$$
$$= y(t) - y(t-1)$$

و چون $y(t)$ معلوم است (در قسمت الف محاسبه شده است) حل مساله تمام است.

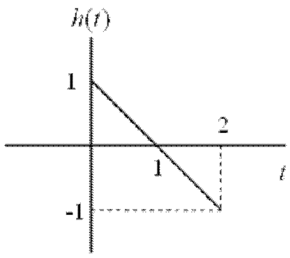
مثال (۲-۳۶): الف) یک سیستم LTI پیوسته زمانی با پاسخ ضربه $h(t)$ به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی قطار ضربه را بیابید.

ب) پاسخ ضربه یک سیستم LTI پیوسته زمانی در شکل ۲-۷۳ داده شده است. مطلوب است پاسخ این سیستم به ورودی:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t-kT)$$



شکل (۲-۷۳): پاسخ ضربه مربوط به قسمت (ب) مثال (۲-۳۶)

حل: الف) قطار ضربه به این صورت است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \qquad \text{عدد صحیح } k$$

اگر پاسخ ضربه سیستم به این صورت باشد:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

با توجه به رابطه کانولوشن می‌توان پاسخ ضربه سیستم را به دست آورد.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) \right] e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) e^{-t+\tau} u(t-\tau) \right] d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT) e^{-t+kT} u(t-kT) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\delta(\tau - T) e^{-t+T} u(t-T)$$
$$+ \delta(\tau - 2T) e^{-t+2T} u(t-2T) + \delta(\tau - 3T) e^{-t+3T} u(t-3T) + \ldots \Big] d\tau$$

$$y(t)=e^{-t+T}u(t-T)+e^{-t+2T}u(t-2T)+\ldots+e^{-t+nT}u(t-nT)+$$
$$e^{-t-T}u(t+T)+e^{-t-2T}u(t+2T)+e^{-t+nT}u(t-nT)$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-t+kT}u(t-kT)$$

روش دوم برای حل قسمت (الف)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-kT)\right]e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

می‌توان جای علامت مجموع و انتگرال را جابجا کرد.

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-kT)\ e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\ d\tau=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-(t-kT)}u(t-kT)$$

حل قسمت (ب):

در این مساله ورودی قطار ضربه است اما دامنه آن مرتباً تغییر علامت می‌دهد.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(t-kT)$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه کانولوشن داریم

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(\tau-kT)\right]h(t-\tau)d\tau$$

و یا

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(\tau-kT)h(t-\tau)\right]d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k h(t-kT)\delta(\tau-kT)\right]d\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(-1)^0h(t)\delta(\tau-0)+(-1)^1h(t-T)\delta(\tau-T)+(-1)^2h(t-2T)\delta(\tau-2T)+\ldots\right]d\tau$$
$$=(-1)^0h(t)+(-1)^1h(t-T)+(-1)^2h(t-2T)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k h(t-kT)$$

روش دوم حل قسمت (ب) با توجه به اینکه علامت‌های مجموع و انتگرال قابل جابجایی هستند

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(\tau-kT).\right]h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k\delta(\tau-kT)h(t-\tau)d\tau=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k h(t-kT)$$

مثال (۲-۳۷): در مورد عبارتهای زیر تعیین کنید که کدام عبارت صحیح و کدام غلط است.

(در مورد عبارت‌های صحیح اثبات لازم است ولی در مورد عبارت‌های غلط یک مثال نقض کافی است.)

الف) $x[n]*\{h[n].g[n]\}=\{x[n]*h[n]\}.g[n]$

ب) $a^n x[n]*a^n h[n]=a^n\{x[n]*h[n]\}$

ج) اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد آنگاه $y(2t)=2x(2t)*h(2t)$

د) اگر $x(t)$ و $h(t)$ فرد باشند در آن صورت $y(t)=x(t)*h(t)$ زوج است.

حل:

الف) این تساوی در حالت کلی برقرار نیست و این مساله به سادگی قابل اثبات است.

$$x[n]*\{h[n]g[n]\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\,h[n-k]g[n-k]$$

با تغییر متغیر $n-k=m$ داریم

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[n-m]\,h[m]g[m]\neq\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k]\,h[k]\right\}g[n]$$

البته می‌توان با یک مثال نقض نیز عدم صحت قسمت الف را تایید کرد. برای این مثال نقض فرض می‌کنیم $x[n]$ دلخواه باشد

$$g[n]=\delta[n-1]\qquad h[n]=\delta[n+1]$$

در این صورت طرف اول تساوی برابر صفر است اما طرف دوم تساوی برابر $x[2]\delta[n-1]$ می‌شود. پس بنابراین این تساوی در حالت کلی برقرار نیست.

ب) با توجه به خاصیت کانولوشن می‌توان نشان داد که این تساوی در حالت کلی صحیح است.

$$a^n x[n]*a^n h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k x[k]a^{n-k}h[n-k]=a^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$
$$=a^n\{x[n]*h[n]\}$$

ج) صحت این تساوی نیز به کمک خواص کانولوشن در حالت کلی قابل اثبات است.

$$g(t)=x(2t)*h(2t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(2\tau)\,h(2t-2\tau)\,d\tau$$

با انجام تغییر متغیر $t_0=2\tau$ داریم

$$2\tau=t_0\Rightarrow d\tau=\frac{1}{2}dt_0$$

و با جایگذاری در انتگرال کانولوشن

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_0)h(2t-t_0)\,{dt_0}/{2}$$

اما چون $y(t)=x(t)*h(t)$ است داریم

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$y(2t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(2t-\tau)d\tau=2g(t)=2x(2t)*h(2t)$$

د) با توجه به فرض مسئله $y(t)=x(t)*h(t)$ است پس

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

با تغییر متغیر $-\tau=t_0$ می‌توان $y(-t)$ را به صورت زیر نوشت

$$y(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(-t-\tau)d\tau=\int_{t_0=+\infty}^{-\infty}x(-t_0)h(-t+t_0)d(-t_0)$$
$$y(-t)=\int_{t_0=-\infty}^{+\infty}x(-t_0)h(t_0-t)dt_0=\int_{t_0=-\infty}^{+\infty}\{-x(t_0)[-h(t-t_0)]\}dt_0$$
$$\Rightarrow y(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_0)h(t-t_0)dt_0=y(t)$$

پس $y(t)$ زوج است.

مثال (۲-۳۸): اطلاعات زیر در مورد توابع $y(t),x(t),h(t)$ در دست است.

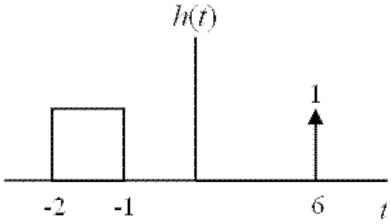
$$x(t)=0 \qquad |t|>T_1$$
$$h(t)=0 \qquad |t|>T_2$$
$$y(t)=x(t)*h(t)=0 \qquad |t|>T_3$$

الف) رابطه T_3,T_2,T_1 را بدست بیاورید.

ب) یک سیستم گسسته زمانی با ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ و خروجی $y[n]$ را در نظر بگیرید. اگر $h[n]$ در خارج فاصله $N_0 \le n \le N_1$ مساوی صفر باشد و $x[n]$ در خارج فاصله $N_2 \le n \le N_3$ مساوی صفر باشد در آن صورت $y[n]$ در خارج فاصله $N_4 \le n \le N_5$ مساوی صفر است رابطه n_iها را بیابید.

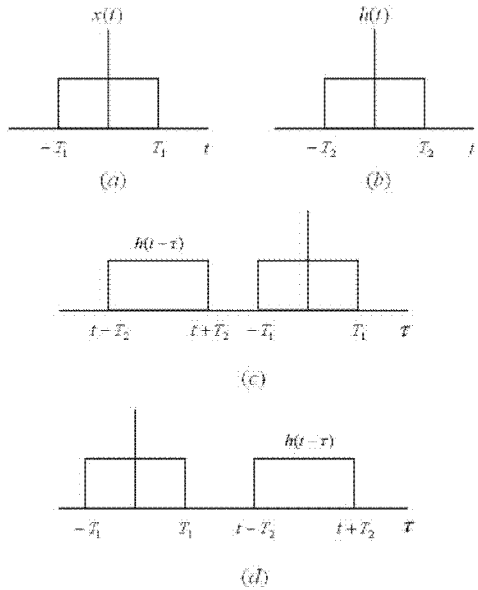
ج) یک سیستم گسسته زمانی LTI علی با این خاصیت در نظر بگیرید که اگر ورودی آن به ازای $n \ge 10$ مساوی صفر باشد خروجی آن به ازاء $n \ge 15$ مساوی صفر است. چه شرطی در مورد دوره غیرصفر $h[n]$ باید وجود داشته باشد؟

د) یک سیستم LTI پیوسته زمانی مفروض است که پاسخ ضربه آن در زیر رسم شده است. برای محاسبه $y[0]$ لازم است $x(t)$ را در چه فاصله‌ای داشته باشیم؟



شکل (۲-۷۴): پاسخ ضربه سیستم LTI مربوط به قسمت (د) مثال (۲-۳۸)

حل: الف) مطابق اطلاعات داده شده $x(t)$ و $h(t)$ را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت. البته در اینجا فقط نشان دادن محدوده وجود مورد نظر است و در این فاصله این توابع هر مقداری می‌توانند داشته باشند.



شکل (۲-۷۵): a) تابع $x(t)$ b) تابع $h(t)$ c) رسم همزمان $x(\tau), h(t-\tau)$ طی مرحله کانولوشن برحسب τ (t منفی است) d) رسم همزمان توابع $x(\tau), h(t-\tau)$ برحسب τ (t مثبت است)

دیده می‌شود اگر $t+T_2<-T_1$ یا $t<-T_1-T_2$ باشد حاصل کانولوشن صفر است پس

$$x(t)*h(t)=0 \qquad t<-T_1-T_2$$

حاصل کانولوشن در فاصله $t>T_2+T_1$ نیز مساوی صفر است چون روی هم افتادگی بین دو تابع وجود نخواهد داشت.

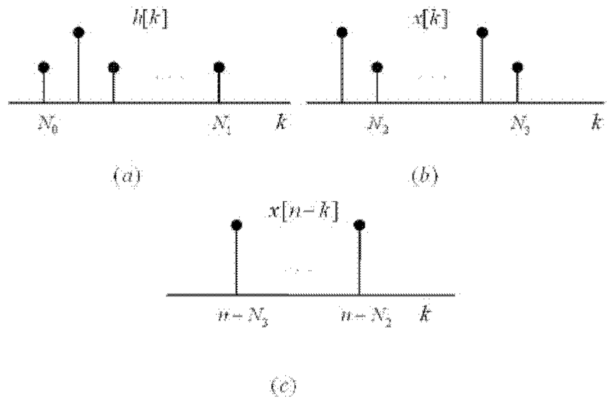
پس

$$y(t)=x(t)*h(t)=0 \qquad |t|>T_3$$

بنابراین

$$T_3=T_1+T_2$$

ب) دو دنباله دلخواه فرضی برای $x[n]$ و $h[n]$ در نظر می‌گیریم.



شکل (۲-۷۶): a) دنباله $h[k]$ b) دنباله $x[k]$ c) دنباله $x[n-k]$ برحسب k (n پارامتر منفی است)

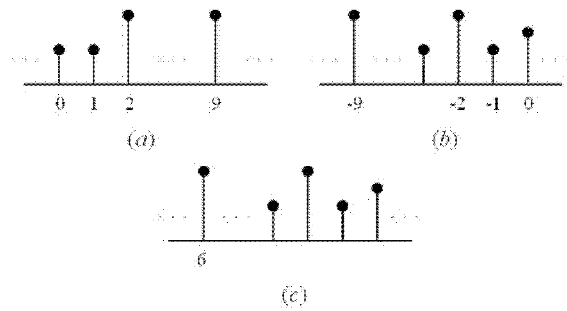
همانگونه که از شکل‌ها مشخص است، حاصل کانولوشن به ازاء $n < N_0 + N_2$ و $n > N_1 + N_3$ مساوی صفر است.

$$h[k]x[n-k] = 0 \qquad n - N_2 < N_0 \Rightarrow n < N_0 + N_2$$
$$h[k]x[n-k] = 0 \qquad n - N_3 > N_1 \Rightarrow n > N_3 + N_1$$

بنابراین

$$N_4 = N_0 + N_2 \qquad , \qquad N_5 = N_1 + N_3$$

ج) یک ورودی به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که به ازاء $n \geq 10$ مساوی صفر است برای این ورودی، خروجی به ازاء $n \geq 15$ باید صفر باشد.



شکل (۲-۷۷): a) دنباله $x[k]$ b) دنباله $x[-k]$ c) دنباله $x[15-k]$

$$y[n \geq 15] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(n \geq 15) - k]h[k] = 0$$

د) با توجه به انتگرال کانولوشن زیر داریم

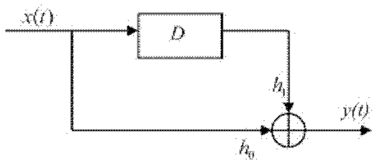
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$
$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\tau)x(\tau)d\tau$$

و با قراردادن ضابطه $h(t)$ در رابطه فوق

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(-\tau-6)x(\tau)]d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\tau-1) - u(\tau-2)]x(\tau)d\tau$$
$$= x(-6) + \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\tau-1) - u(\tau-2)]x(\tau)d\tau$$

پس باید $x(\tau)$ را در فاصله $1 < t < 2$ داشته باشیم همچنین داشتن مقدار $x(t)$ در لحظه $t = -6$ نیز لازم است.

مثال (۲-۳۹): الف) پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید، که D معادل T ثانیه تأخیر در زمان است.

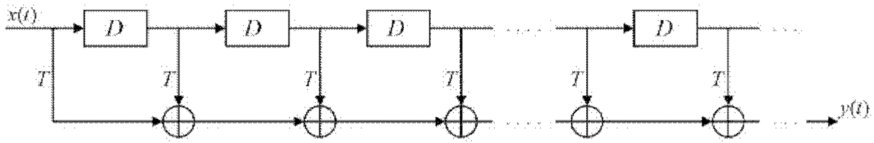


شکل (۲-۷۸): سیستم مثال (۲-۳۹) قسمت (الف)

با فرض

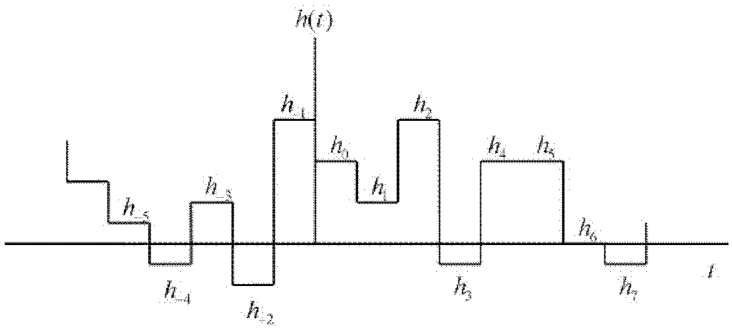
$$\left.\begin{array}{l} h_0 = 1 \\ h_1 = -1 \end{array}\right\}$$

ب) سیستم زیر را در نظر بگیرید که دارای n بلوک تأخیر زمانی است. اگر ورودی این سیستم $x(t) = e^{-t}u(t)$ باشد، پاسخ سیستم را بیابید. در حالت حدی اگر T خیلی کوچک شود پاسخ به چه صورت خواهد بود؟



شکل (۲-۷۹): سیستم مثال (۲-۳۹) قسمت (ب)

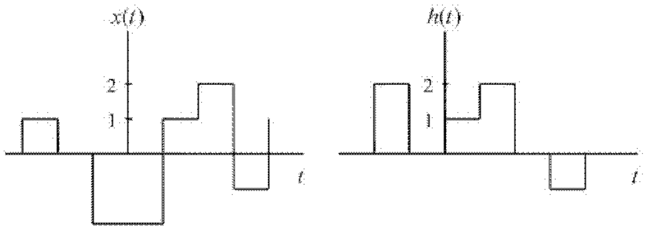
ج) یک سیستم با پاسخ ضربه بصورت زیر را در نظر بگیرید $n < t < n+1, h(t) = h_n$ یک نمونه از پاسخ ضربه به فرم فوق رسم شده است.



شکل (۲-۸۰): سیستم مثال (۲-۳۹) قسمت (ج)

نشان دهید که چنین پاسخ ضربه‌ای به کمک سیستمی که فقط شامل عناصر تاخیری جمع و ضرب‌کننده‌ها و یک سیستم با پاسخ ضربه $h(t) = u(t) - u(t-1)$ قابل ساخت است.

د) کانولوشن سیگنال‌های $x(t), h(t)$ رسم شده در شکل (۲-۸۱) را به دست آورید.



شکل (۲-۸۱): سیگنال‌های $x(t), h(t)$ مربوط به قسمت به قسمت (د) مثال (۲-۳۹)

حل: الف) رابطه مرتبط کننده ورودی و خروجی این سیستم به صورت زیر است

$$y(t) = h_0 x(t) + h_1 x(t-T)$$

بنابراین پاسخ ضربه این سیستم با قراردادن $x(t) = \delta(t)$ بدست می‌آید.

$$h(t) = h_0 \delta(t) + h_1 \delta(t-T) = \delta(t) - \delta(t-T)$$

ب) این سیستم در حقیقت تعمیم یافته سیستم شکل (۲-۷۸) است بنابراین رابطه مرتبط کننده ورودی و خروجی آن بدین صورت است

$$y(t) = T[x(t) + x(t-T) + \ldots + x(t-nT)]$$

اگر ورودی این سیستم $x(t) = e^{-t}u(t)$ باشد داریم

$$y(t) = T\left[e^{-t} + e^{-t+T} + e^{-t+2T} + \ldots + e^{-t+nT}\right]$$

$$= Te^{-t}\left[1 + e^{T} + e^{2T} + \ldots + e^{nT}\right] = Te^{-t}\sum_{k=0}^{n} e^{kT}$$

$$= Te^{-t}\left[\frac{\left(e^{T}\right)^{n+1} - 1}{e^{T} - 1}\right] = Te^{-t}\left[\frac{\left(e^{n+1}\right)^{T} - 1}{e^{T} - 1}\right]$$

اگر T خیلی کوچک شود در آنصورت

$$e^{T} = 1 + \frac{T}{1!} + \frac{T^2}{2!} + \ldots \Rightarrow e^{T} \approx 1 + T$$

و با توجه به اینکه

$$e^{(n+1)T} \cong 1 + (n+1)T$$

می‌توان نوشت

$$y_0(t) = Te^{-t}\,\frac{1 + (n+1)T - 1}{1 + T - 1} = e^{-t}(n+1)T$$

$y_0(t)$ حالت حدی $y(t)$ است وقتی که $T \to 0$ میل کند.

ج) می‌توان $h(t)$ را بصورت کانولوشن دو تابع بصورت زیر نوشت

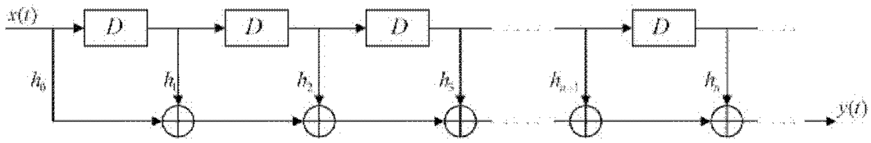
$$h_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \delta(t - nT)$$

$$h_2(t) = u(t) - u(t-T)$$

بنابراین

$$h(t)=h_1(t)*h_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_n[u(t-nT)-u(t-(n+1)T)]$$

اما سیستمی با پاسخ ضربه $h_1(t)$ یک سیستم شامل عناصر تاخیری و ضرب کننده‌ها بصورت زیر می‌باشد



شکل (۲-۸۲): سیستم با عناصر تاخیری و جمع و ضرب کننده‌ها

بنابراین ثابت می‌شود که پاسخ ضربه به صورت شکل (۲-۸۰) قابل ایجاد توسط دو سیستم با اتصال متوالی یکی بصورت شکل (۲-۸۲) و دیگری با پاسخ ضربه $h_2(t)=u(t)-u(t-T)$ می‌باشد.

د) می‌توان $x(t),h(t)$ را به صورت زیر نوشت

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n\delta(t-nT)*[u(t)-u(t-T)]$$

$$h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_n\delta(t-kT)*[u(t)-u(t-T)]$$

که در آن h_n و u_n به سادگی از روی شکل قابل تعیین هستند. بنابراین داریم

$$x(t)*h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n\delta(t-nT)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\delta(t-kT)*p(t)$$

که در آن

$$p(t)=[u(t)-u(t-T)]*[u(t)-u(t-T)]$$

محاسبه $p(t)$ ساده است و به عهده خواننده واگذار می‌شود اما محاسبه قسمت اول کانولوشن ذیلاً ارائه می‌شود

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n\delta(t-nT)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\delta(t-kT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\delta(t-nT)*\delta(t-kT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_nh_k\delta(t-kT-nT)$$

اگر تغییر متغیر بدهیم به طوری که $n+k\to k$ باشد، در این صورت:

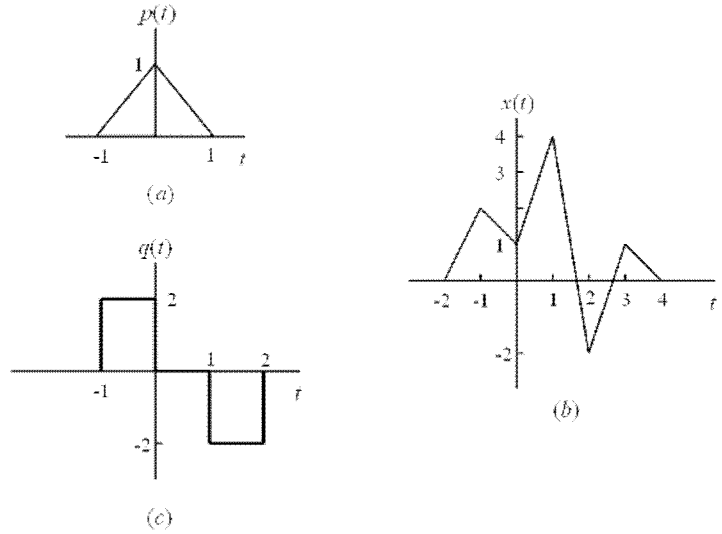
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n h_{k-n} \delta(t-kT)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta(t-kT)$$

که y_k جمع کانولوشن u_k و h_k است، یعنی:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n h_{k-n}$$

مثال (۲-۴۰): الف) نشان دهید که سیگنال ورودی $x(t)$ که در شکل نشان داده شده است قابل بسط به صورت زیر است

$$x(t) = \sum a_n p(t-n)$$



شکل (۲-۸۳): a) سیگنال پایه $p(t)$ b) سیگنال $x(t)$ c) پاسخ سیستم به ورودی $p(t)$

ب) عبارتی برای پاسخ $y(t)$ سیستم به ورودی $x(t)$ برحسب پاسخ سیستم به ورودی $p(t-n)$ بدست آورید. فرض کنید $q(t)$ پاسخ سیستم به ورودی $p(t)$ می‌باشد.

ج) پاسخ سیستم به تابع شیب واحد را بیابید. (تابع شیب واحد به صورت $x(t) = tu(t)$ است)

د) پاسخ پله و ضربه به این سیستم را بیابید.

هـ) نمودار جعبه‌ای سیستم را با استفاده از عناصر تاخیر انتگرال گیر، مشتق‌گیر، جمع و ضرب‌کننده‌ها رسم کنید.

حل: الف) مناسب است رابطه $p(t)$ را به صورت زیر بنویسیم

$$p(t) = (t+1)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)]$$
$$= -2tu(t) + (t+1)u(t+1) + (t-1)u(t-1)$$

اکنون رابطه $x(t)$ مربوط به شکل (۲-۸۳-b) را می‌نویسیم

$$x(t) = (2t+4)u(t+2) - (3t+3)u(t+1) + 4tu(t) + (-9t+9)u \setminus (t-1)$$
$$+ (9t-18)u(t-2) - (4t+12)u(t-3) + (t-4)u(t-4)$$

با توجه به رابطه $p(t)$ می‌توان رابطه انتقال‌های مختلف آنرا نیز بدست آورد

$$p(t+2) = -(2t+4)u(t+2) + (t+3)u(t+3) + (t+1)u(t+1)$$
$$p(t+1) = -(2t+2)u(t+1) + (t+2)u(t+2) + tu(t)$$
$$p(t-1) = -(2t-2)u(t-1) + tu(t) + (t-2)u(t-2)$$
$$p(t-2) = -(2t-4)u(t-2) + (t-1)u(t-1) + (t-3)u(t-3)$$
$$p(t-3) = -(2t-6)u(t-3) + (t-2)u(t-2) + (t-4)u(t-4)$$

بنابراین می‌توان $x(t)$ را برحسب $p(t)$ بسط داد.

$$x(t) = 2p(t+1) + p(t) + 4p(t-1) - 2p(t-2) + p(t-3) \Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

ب) با توجه به LTI بودن سیستم اگر ورودی بصورت مجموعه‌ای از توابع انتقال و وزن یافته $p(t)$ باشد، بعبارت دیگر اگر

$$x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n p(t-n)$$

در آنصورت پاسخ به صورت زیر بدست می‌آید

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q(t-n) = 2q(t+1) + q(t) + 4q(t-1) - 2q(t-2) + q(t-3)$$

ج) تابع شیب واحد بصورت $r(t) = tu(t)$ می‌باشد که قابل بسط برحسب توابع $p(t-n)$ بصورت زیر است

$$r(t) = tu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(t-k)$$

بنابراین پاسخ سیستم به تابع شیب واحد بصورت زیر بدست می‌آید.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kq(t-k)$$

د) می‌دانیم اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی شیب واحد $r(t)$ مساوی $y(t)$ باشد پاسخ پله آن مساوی است با

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}\{y(t)\} = \frac{d}{dt}\{q(t-1) + 2q(t-2) + \ldots\}$$

پس پاسخ پله بصورت زیر است

$$y_1(t)=\sum_{k=1}^{\infty}kq'(t-k)=2[\delta(t)+\delta(t-1)]$$

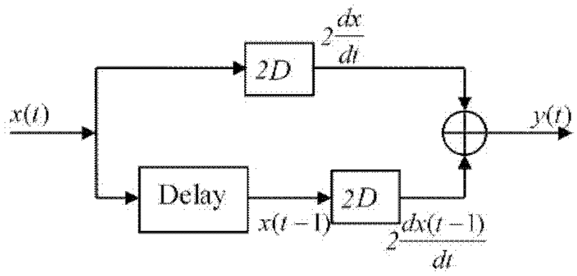
و پاسخ ضربه آن مشتق پاسخ پله است، یعنی

$$y_0(t)=\left\{\frac{d^2}{dt^2}q(t-1)+2\frac{d^2}{dt^2}q(t-2)+\ldots\right\}$$
$$=\sum_{K=1}^{\infty}kq''(t-k)=2(\delta'(t)+\delta'(t-1))$$

هـ) ابتدا با داشتن p,q رابطه بین ورودی و خروجی را بدست می‌آوریم،

$$q(t)=2\left(\frac{dp(t)}{dt}+\frac{dp(t-1)}{dt}\right)\Rightarrow y(t)=2\left(\frac{dx(t)}{dt}+\frac{dx(t-1)}{dt}\right)$$

بنابراین نمودار جعبه‌ای این سیستم بصورت زیر است:



شکل (۲-۸۴): نمودار جعبه‌ای مربوط به قسمت (هـ) مثال (۲-۴۱)

از اینجا می‌توان پاسخ ضربه را هم بدست آورد.

$$h(t)=2(\delta'(t)+\delta'(t-1))$$

مثال (۲-۴۱): پاسخ پله سیستمی با پاسخ ضربه زیر را بدست آورید.

$$h[n]=(n+1)\alpha^n u[n]\qquad |\alpha|<1$$

حل: می‌دانیم که رابطه پاسخ پله و ضربه بصورت مقابل است

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

بنابراین:

$$s[n]=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{d}{d\alpha}\alpha^{k+1}=\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{k+1}$$
$$=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\alpha^{n+2}-\alpha}{\alpha-1}\right]=\frac{[(n+2)\alpha^{n+1}-1](\alpha-1)-\alpha^{n+2}+\alpha}{(\alpha-1)^2}$$
$$=\frac{(n+2)\alpha^{n+1}(\alpha-1)-\alpha^{n+2}+1}{(\alpha-1)^2}$$

مثال (۲-۴۲): سیستم‌های زیر را از لحاظ علیت و پایداری بررسی کنید.

$$a)\quad h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2<\infty$$

حل: این سیستم علی و پایدار است.

$$b)\quad h[n]=(0.99)^n u[n+3]$$

$$\sum_{n=-3}^{+\infty}(0.99)^n=\frac{(0.99)^{-3}[-1]}{0.99-1}=\frac{(0.99)^{-3}}{0.01}<\infty$$

حل: این سیستم غیرعلی ولی پایدار است.

$$c)\quad h[n]=(0.99)^n u[-n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{0}(0.99)^n\to\infty$$

حل: این سیستم غیرعلی و ناپایدار است.

$$d)\quad h[n]=4^n u[2-n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{2}4^n=\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=20+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

حل: این سیستم غیرعلی ولی پایدار است.

$$e)\quad h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n+2]+(1.01)^n u[n+2]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=-2}^{\infty}(1/01)^n\to\infty$$

حل: این سیستم غیرعلی و ناپایدار است.

$$f)\quad h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+(1.01)^n u[-n+1]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|+\sum_{n=-\infty}^{1}(1.01)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+1.01+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1.01}\right)^n=2+1.01+\frac{1}{1-\frac{1}{1.01}}$$

حل: این سیستم پایدار و غیرعلی است.

$$g)\quad h[n]=n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

حل: با توجه به اینکه داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}np^n=p\frac{d}{dp}\sum_{n=0}^{\infty}p^n=\frac{p}{(1-p)^2}=\frac{1/2}{(1-1/2)^2}=2$$

بنابراین سیستم علی و پایدار است.

$$h)\quad h(t)=e^{-3t}u(t-1)$$

حل: این سیستم پایدار و علی است زیرا

$$\int_{1}^{\infty}e^{-3t}dt=-\frac{1}{3}e^{-3t}\Big|_{1}^{\infty}=-\frac{1}{3}\left(0-e^{-3}\right)=\frac{1}{3}e^{-3}$$

$$i)\quad h(t)=e^{-3t}u(-t-1)$$

حل: این سیستم ناپایدار و غیرعلی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{-1}e^{-3t}dt=-\frac{1}{3}e^{-3t}\Big|_{-\infty}^{-1}\to\infty$$

$$j)\quad h(t)=e^{-t}u(t+100)$$

حل: این سیستم غیرعلی و پایدار است زیرا

$$\int_{-100}^{\infty}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_{-100}^{\infty}=0-\left(-e^{+(100)}\right)=e^{100}$$

$$k)\quad h(t)=e^{t}u(-t-1)$$

حل: این سیستم پایدار و غیرعلی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{-1}e^{t}dt=e^{t}\Big|_{-\infty}^{-1}-0=e^{-1}$$

$$l)\quad h(t)=e^{-4|t|}$$

حل: این سیستم پایدار و غیرعلی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-4|t|}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{4t}dt=-\frac{1}{4}e^{-4t}\Big|_{0}^{\infty}+\frac{1}{4}e^{4t}\Big|_{-\infty}^{0}=\left(-\frac{1}{4}\right)(-1)+\left(\frac{1}{4}\right)(1)=\frac{1}{2}$$

$$m)\quad h(t)=te^{-t}u(t)$$

حل: این سیستم پایدار و علی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t}u(t)=\int_{0}^{\infty}te^{-t}dt=\left\{-te^{-t}-e^{-t}\right\}_{0}^{\infty}=1$$

$$n)\quad h(t)=\left(2e^{-t}-e^{\frac{t-100}{100}}\right)u(t)$$

حل: این سیستم ناپایدار و علی است زیرا

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(2e^{-t}-e^{\frac{t-100}{100}}\right)u(t)dt=\int_{0}^{\infty}\left(2e^{-t}-e^{\frac{t-100}{100}}\right)dt\to\infty$$

مثال (۲-۴۳): سه سیستم LTI با پاسخ‌های ضربه $h_3(t),h_2(t),h_1(t)$ مطابق شکل (۲-۸۵) را در نظر بگیرید.

الف) سیگنال $x_1(t)$ را به گونه‌ای بیابید که

i) $x_1(t)$ حقیقی باشد

ii) $x_1(t<0)=0$

iii) برای $t \geq 0 \Leftarrow |x_1(t)| \leq 1$

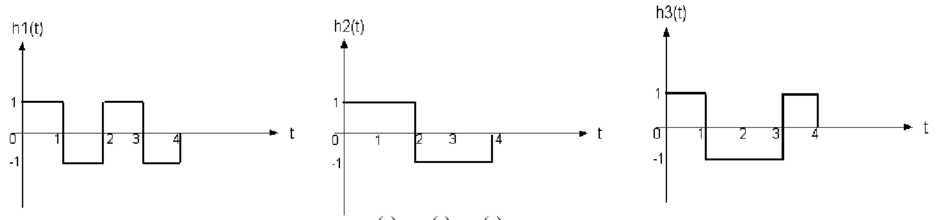
iv) $y_1(t) = x_1(t) * h_1(t)$ تا حد ممکن در $t = 4$ بزرگ باشد.

ب) قسمت (الف) را برای $x_2(t)$ و $x_3(t)$ دوباره تکرار کنید. اما با انتخاب مناسب این بار $y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$ و $y_3(t) = x_3(t) * h_3$ را تا حد امکان در $t = 4$ بزرگ کنید.

ج) مقدار $y_{ij}(t)$ در لحظه $t = 4$ چیست؟

$$\begin{cases} y_{ij}(t) = x_i(t) * h_j(t) \\ i, j = 1,2,3 \end{cases}$$

د) هر کدام از سیستم‌های فوق را بوسیله عناصر خط تاخیر و جمع و ضرب کننده‌ها بسازید.



شکل (۲-۸۵): پاسخهای ضربه $h_3(t), h_2(t), h_1(t)$ مربوط به مثال (۲-۴۳)

حل: الف) خروجی سیستم اول برابر است با

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau)\, h_1(\tau) d\tau$$

همچنین مقدار خروجی در $t = 4$ برابراست با

$$y_1(4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(4-\tau) h_1(\tau)\, d\tau$$

با توجه به شکل $h_1(t)$ می‌توان این سیگنال را بصورت زیر تجزیه کرد

$$y_1(4) = \int_0^1 x_1(4-\tau) d\tau - \int_1^2 x_1(4-\tau) d\tau + \int_2^3 x_1(4-\tau) d\tau - \int_3^4 x_1(4-\tau) d\tau$$

بیشترین مقداری که برای $y(4)$ متصور است با توجه به اینکه $|x_1(t)| < 1$ موقعی است که

$$\begin{cases} x_1(4-t) = 1 & 0 < t < 1 \\ x_2(4-t) = -1 & 0 < t < 2 \\ x_3(4-t) = 1 & 2 < t < 3 \\ x_4(4-t) = -1 & 3 < t < 4 \end{cases}$$

و یا

$$x_1(t) = h_1(4-t) \Rightarrow x_1(t) = h_1(4-t)$$

$$x_1(t) \begin{cases} h_1(4-t) & 0 < t < 4 \\ \text{arbitrary} & \text{t} > 4 \end{cases}$$

ب) مشابه عملیات قسمت (الف) عمل می‌کنیم و داریم

$$\mathrm{x}_2(4-t)=h_2(t)\rightarrow \mathrm{x}_2(t)=h_2(4-t)$$
$$x_3(4-t)=h_3(t)\rightarrow x_3(t)=h_3(4-t)$$

توجه شود که در خارج فاصله $1<t<4$ توابع $x_2(t)$ و $x_3(t)$ دلخواه هستند.

ج) طبق تعریف $y_{ij}(t)$ داریم

$$y_{ij}(t)=x_i(t)*h_j(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_i(t-\tau)h_j(\tau)d\tau$$

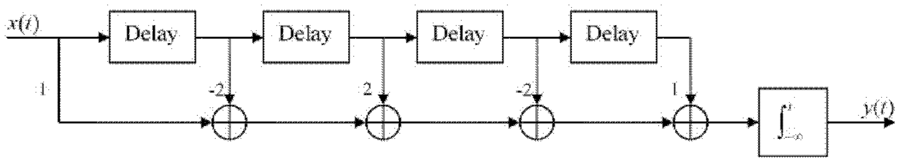
و در لحظه $t=4$ داریم

$$y_{ij}(4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_i(4-\tau)\,h_j(\tau)d\tau=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 4 & i=j\end{cases}$$

د) نمودار جعبه‌ای سیستم اول را بدست می‌آوریم بقیه بلوک‌ها با عملیاتی مشابه بدست می‌آیند. با کمی دقت می‌بینیم که $h_1(t)$ قابل بیان بصورت زیر است.

$$h_1(t)=4u(t)-2u(t-1)+2u(t-2)-2u(t-3)+u(t-4)$$
$$=u(t)*[\delta(t)-2\delta(t-1)+2\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)]$$

بنابراین می‌توان نمودار جعبه‌ای این سیستم را بصورت زیر رسم کرد. بلوک dealay به اندازه یک واحد در زمان تاخیر ایجاد می‌کند.



شکل (۲-۸۶): نمودار جعبه‌ای سیستمی با پاسخ ضربه $h_1(t)$

در این سیستم داریم

$$z(t)=\delta(t)-2\delta(t-1)+2\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)$$
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}z(\tau)d\tau=u(t)-2u(t-1)+2u(t-2)-2u(t-3)+u(t-4)$$

مثال (۲-۴۴): معادله تفاضلی زیر را حل کنید (با فرض شرایط استراحت اولیه).

$$\begin{cases}y[n]-\dfrac{1}{2}y[n-1]=x[n]\\ x[n]=k\ \cos(\Omega_0\,n)\ u[n]\end{cases}$$

حل: ابتدا برای یافتن پاسخ همگن طرف دوم را مساوی صفر قرار می‌دهیم

در این معادله پاسخی بصورت $y_h[n]=A\alpha^n$ صدق می‌کند که با قرار دادن این پاسخ در معادله فوق داریم:

$$y_h[n]-\frac{1}{2}y_h[n-1]=0$$

$$A\alpha^{n}-\frac{1}{2}A\alpha^{n-1}=0 \Rightarrow A\alpha^{n-1}\left\{\alpha-\frac{1}{2}\right\}=0$$

این معادله فقط یک ریشه دارد. $\alpha=\frac{1}{2}$ در نتیجه پاسخ همگن برابر است با:

$$y_h[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

با توجه به نوع ورودی می‌توان شکل پاسخ خصوصی را حدس زد و بعد باید این شکل حدسی پاسخ را در معادله تفاضلی قرار داد. برای قرار دادن در معادله تفاضلی به $y_p[n-1]$ نیز نیاز داریم، پس:

$$\begin{aligned}
&y_p[n]=B\cos(\Omega_0 n+\theta)\\
&y_p[n-1]=B\cos(\Omega_0(n-1)+\theta)=B\cos(\Omega_0 n-\Omega_0+\theta)\\
&\Rightarrow B\{Cos(\Omega_0 n)Cos\theta-Sin(\Omega_0 n)Sin\theta\}-\\
&\frac{B}{2}\{Cos(\Omega_0 n)Cos(-\Omega_0+\theta)-Sin(\Omega_0 n)Sin(-\Omega_0+\theta)\}\\
&=kCos(\Omega_0 n)
\end{aligned}$$

پس از کمی محاسبه ساده خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
&Cos(\Omega_0 n)\left\{BCos\theta-\frac{1}{2}BCos(-\Omega_0+\theta)\right\}\\
&+Sin(\Omega_0 n)\left\{-BSin\theta+B\frac{1}{2}Sin(-\Omega_0+\theta)\right\}=\mathrm{k}Cos(\Omega_0 n)
\end{aligned}$$

اکنون باید ضرایب $Cos\Omega_0 n$ و $Sin\Omega_0 n$ را در دو طرف معادله مساوی قرار دهیم

$$\begin{cases}
BCos\theta-\frac{1}{2}BCos(-\Omega_0+\theta)=k\\
-BSin\theta+\frac{1}{2}BSin(-\Omega_0+\theta)=0
\end{cases}$$

از معادله دوم داریم

$$\begin{aligned}
&Sin(-\Omega_0+\theta)=2Sin\theta\\
&-Sin\Omega_0 Cos\theta+Cos\Omega_0 Sin\theta=2Sin\theta\\
&Sin\Omega_0 Cos\theta=Sin\theta(Cos\Omega_0-2)
\end{aligned}$$

که از این تساوی می‌توان رابطه زیر را بدست آورد

$$\theta=tg^{-1}\left(\frac{Sin\Omega_0}{Cos\Omega_0-2}\right)$$

اکنون ضریب B هم بسادگی قابل محاسبه است

$$B=\frac{k}{Cos\theta-\frac{1}{2}Cos(\theta-\Omega_0)}$$

بنابراین $y[n]$ بصورت روبرو بدست می‌آید

$$y[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^n+BCos(\Omega_0 n+\theta)$$

با اعمال شرایط اولیه می‌توان تنها جواب باقیمانده یعنی A را هم بدست آورد

$$y[0]=0\Rightarrow A+BCos\theta=0\Rightarrow A=-BCos\theta$$

مثال (۲-۴۵): یک سیستم که توسط معادله تفاضلی زیر تعریف می‌شود را با فرض شرایط استراحت اولیه در نظر بگیرید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

الف) فرض کنید $x[n]=\delta[n]$ باشد. مقدار $y[0]$ چیست؟ چه معادله‌ای در مورد $h[n]$ به ازای $n\geq 1$ وجود دارد و شرایط کمکی این معادله را بنویسید. معادله بدست آمده را برای محاسبه $h[n]$ حل کنید.

ب) سیستم LTI با استراحت اولیه که توسط معادله تفاضلی زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+2x[n-1]$$

پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

ج) سیستم LTI با فرض شرایط استراحت اولیه که توسط معادله تفاضلی زیر داده شده است را در نظر بگیرید.

$$\sum_{K=0}^{N}a_k y[n-k]=x[n]$$

با فرض $a_0\neq 0$ مقدار $y[0]$ را بدست آورید. ورودی را $x[n]=\delta[n]$ در نظر بگیرید.

پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

حل: الف)

$$\begin{cases} y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \\ x[n]=\delta[n] \end{cases}$$

چون سیستم در حال استراحت اولیه است پس علی است. بنابراین $h[n<0]=0$ یعنی پاسخ ضربه واحد برای $n<0$ مساوی صفر است. اکنون در معادله تفاضلی $x[n]=\delta[n]$ و $y[n]=h[n]$ را قرار داده و معادله را به روش بازگشتی حل می‌کنیم.

و یا

$$y[0]-\frac{1}{2}y[-1]=\delta[0]$$
$$y[0]=\delta[0]\Rightarrow h[0]=1$$

و برای $n\geq 1$ ورودی صفر است و فقط پاسخ همگن باقی می‌ماند.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=0 \Rightarrow h[n\geq 1]=A\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

اکنون برای بدست آوردن ضریب مجهول A لازم است $h[1]$ را به روش بازگشتی از معادله تفاضلی بدست آورد.

$$h[n]-\frac{1}{2}h[n-1]=0 \quad , \quad h[0]=1$$

بنابراین با قراردادن $n=1$ در رابطه فوق داریم

$$h[1]-\frac{1}{2}h[0]=0 \rightarrow h[1]=\frac{1}{2}$$

اکنون با توجه به اینکه $h[n\geq 1]=A\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ و $h[1]=\frac{1}{2}$ می‌توان مجهول A را بدست آورد

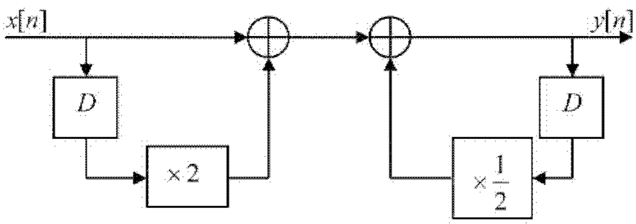
بنابراین خواهیم داشت

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2} \rightarrow A=1$$

ب) این معادله را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$y[n]=x[n]+2x[n-1]+\frac{1}{2}y[n-1]$$

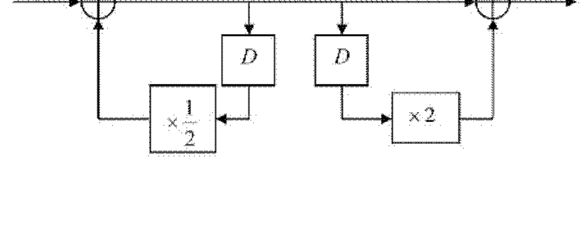
بنابراین می‌توان بصورت زیر و با استفاده از عناصر تاخیر و جمع و ضرب‌کننده‌ها این سیستم را ساخت.



شکل (۲-۸۷): ساخت سیستم شکل (۲-۸۶) بکمک ضرب و جمع‌کننده‌ها و عناصر تاخیر

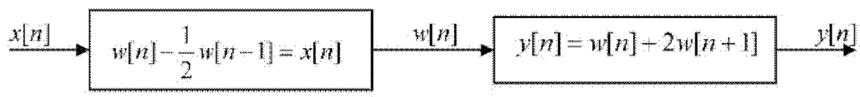
که در آن D عنصر تاخیردهنده به اندازه یک واحد است. اگر جای این دو سیستم را عوض کنیم مشاهده می‌شود که در این سیستم روابط روبرو را داریم

$$\begin{cases} x[n]+\frac{1}{2}w[n-1]=w[n] \\ w[n]+2w[n-1]=y[n] \end{cases}$$



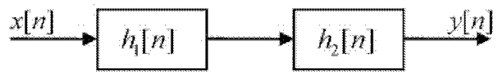
شکل (۲-۸۸): جابجایی سیستم‌ها با استفاده از خاصیت جابجایی

بنابراین می‌توان تصور کرد که این معادله تفاضلی توسط ترکیب متوالی دو سیستم بصورت زیر قابل بیان است



شکل (۲-۸۹): نمودار جعبه‌ای قسمت (ب) مثال (۲-۴۶)

گفتیم اگر دو سیستم بصورت متوالی بهم وصل شده باشند در آنصورت پاسخ ضربه کلی سیستم بصورت زیر بدست می‌آید



شکل (۲-۹۰): نمودار جعبه‌ای قسمت (ب) مثال (۲-۴۶)

در این ترکیب داریم $x[n]*h_1[n]*h_2[n]=y[n]$، بنابراین باید $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را بدست آوریم.

ابتدا $h_1[n]$ را بدست می‌آوریم

چون سیستم خطی است و در شرایط اولیه صدق می‌کند، خواهیم داشت:

$$h_1[n]=\frac{1}{2}h_1[n-1]+\delta[n]$$

$$h_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

اکنون $h_2[n]$ را بدست می‌آوریم.

$$h_2[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]$$

اکنون آماده هستیم پاسخ ضربه کل سیستم را پیدا کنیم

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*\{\delta[n]+2\delta[n-1]\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*\delta[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*2\delta[n-1]$$

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

راه حل دوم: معادله تفاضلی $y[n]-0.5y[n-1]=x[n]-2x[n-1]$ همان معادله تفاضلی در بند الف است که در طرف دوم آن جمله $2x[n-1]$ را نیز باید اضافه کرد. در بند الف پاسخ طرف اول معادله را به $x[n]=\delta[n]$ به دست می‌آوریم. این پاسخ را $y_1[n]$ می‌نامیم. چون سیستم در حالت استراحت اولیه است، پاسخ طرف اول به $x[n]+2x[n-1]$ برابر است با:

$$h[n] = y_1[n] + 2y_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

که همان جواب به دست آمده در راه حل اول است.

ج) چون سیستم علی است (طبق فرض استراحت اولیه) در آنصورت $h[n<0]=0$ قرار می‌دهیم

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]$$

$$x[n] = \delta[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \delta[n]$$

به ازای $n = 0$ داریم

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h[-k] = \delta[0] = 1$$

بنابراین داریم

$$a_0 h[0] = \delta[0] = 1 \rightarrow h[0] = \frac{1}{a_0}$$

بازاری $n > 0$ فقط پاسخ همگن می‌ماند، چون ورودی برابر صفر خواهد شد.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k h[n-k] = 0$$

پاسخ $h[n] = A\alpha^n$ در این معادله به ازای $n > 0$ صادق است پس آن را در معادله فوق جایگزین می‌کنیم:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k A\alpha^{n-k} = 0$$

معادله را بر A (که مخالف صفر است) تقسیم می‌کنیم:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{n-k} = 0$$

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_N\alpha^{n-N} = 0$$

با ضرب معادله فوق در α^{-n+N} داریم

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + a_2\alpha^{N-2} + \ldots + a_{N-1} + a_N = 0$$

این معادله N ریشه دارد که بسته به اینکه مستقل از هم باشند یا بعضی ریشه‌ها تکراری، پاسخ عمومی به صورت‌های زیر است

۱- N ریشه مستقل

$$h[n] = \left\{A_1(\alpha_1)^n + A_2(\alpha_2)^n + \ldots + A_N(\alpha_N)^n\right\} u[n]$$

۲-دو ریشه مضاعف $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ و بقیه مستقل می‌باشند.

$$h[n]=\left\{A_1(\alpha)^n+A_2n(\alpha)^n+A_3(\alpha_3)^n+\ldots+A_N(\alpha_N)^n\right\}u[n]$$

۳- m ریشه مضاعف $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=\alpha$ و $N-m$ ریشه مستقل می‌باشند.

$$h[n]=\left\{A_1\alpha^n+A_2n\alpha^n\ldots+A_mn^m\alpha^n+A_{m+1}(\alpha_{m+1})^n+\ldots+A_N(\alpha_N)^n\right\}u[n]$$

برای بدست آوردن ضرایب A_1 , A_2 ,...., A_N باید N شرط اولیه داشته باشیم که در زیر به دست می‌آوریم.

معادله داده شده سیستم را وقتی $x[n]=\delta[n]$ است بسط می‌دهیم

$$a_0h[n]+a_1h[n-1]+a_2h[n-2]+\cdots+a_Nh[n-N]=\delta[n]$$

به ازای $n=0$ داریم (توجه کنید که داریم $h(n<0)=0$)

$$a_0h[0]=1\Rightarrow h[0]=\frac{1}{a_0}$$

به ازای $n=1$ داریم

$$a_0h[1]+a_1h[0]+a_2h[-1]+a_3h[-2]+\cdots=0$$
$$a_0h[1]+a_1h[0]=0$$
$$h[1]=\frac{-a_1}{a_0}h[0]=-\frac{a_1}{a_0}\times\frac{1}{a_0}\rightarrow h[1]=-\frac{a_1}{a_0^2}$$

همچنین به ازای $n=2$ شرط سوم را بدست می‌آوریم

$$a_0h[2]+a_1h[1]+a_2h[0]=0$$
$$h[2]=-\frac{1}{a_0}\{a_1h[1]+a_2h[0]\}\rightarrow h[2]=\frac{1}{a_0}\left\{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0}\right\}$$

و به همین طریق بقیه شرایط اولیه بدست می‌آیند.

مثال (۲-۴۶): سیگنال $x(t)$ توسط یک سیستم ایجاد کننده اعوجاج با پاسخ ضربه $h(t)$ دچار اعوجاج شده است ضابطه $h(t)$ بصورت روبرو است، که می‌تواند بیان کننده اکو (Echo) یا انعکاس ضربه ورودی با پریود T و بهره h_k در نظر گرفته شود.

$$h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k\delta(t-kT)$$

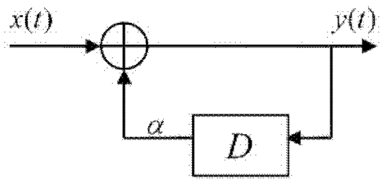
اگر بخواهیم دوباره $x(t)$ را بازسازی کنیم باید از سیستمی با پاسخ ضربه $g(t)$ که بطور متوالی با $h(t)$ قرار می‌گیرد استفاده کنیم که در آن داریم

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k\delta(t-kT)$$

الف) مطلوبست رابطه g_k و h_k

ب) اگر $h_0 = 1$ و $h_1 = \frac{1}{2}$ و $h_n = 0$ برای $n \geq 2$ ، در آنصورت $g(t)$ را بیابید.

ج) پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید، که D معادل T ثانیه تاخیر در حوزه زمان است.



شکل (۲-۹۱): سیستم مربوط به مثال (۲-۴۷) قسمت (ج)

د) فرض کنید که $y(t<0) = 0$ باشد اگر $x(t<0) = 0$. نشان دهید که سیستم به ازای $0 < \alpha < 1$ پایدار است.

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(t - kT)$$

حل:

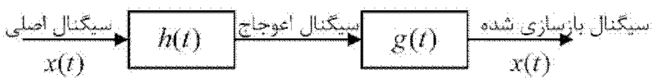
این یک سیستم ایجاد کننده اعوجاج است.

الف)

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

این یک سیستم بازساز $x(t)$ پس از عبور از سیستم ایجاد کننده اعوجاج است.

نمودار جعبه‌ای برای این قسمت بصورت زیر است



شکل (۲-۹۲): نمودار جعبه‌ای مثال (۲-۴۷) قسمت (الف)

اگر سیگنال بازسازی شده دقیقا همان سیگنال اصلی باشد باید داشته باشیم:

$$x(t) * h(t) * g(t) = x(t)$$

و یا

$$h(t) * g(t) = \delta(t)$$

ضرایب h_k معلوم هستند و هدف محاسبه ضرایب g_k و تعیین سیستم $g(t)$ است.

در مثال ۲-۳۹ بند ج محاسبه کانولوشن $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \delta(t - nT) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \delta(t - kT)$ را انجام دادیم. و نشان دادیم که حاصل آن برابر $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta(t - kT)$ می‌شود که:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n h_{k-n}$$

بنابراین برای این مساله نیز می‌توان نوشت:

$$h(t) * g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n h_{k-n}\right]\delta(t-kT) = \delta(t)$$

از مقایسه دو طرف رابطه فوق متوجه می‌شویم که باید به ازای $k \neq 0$، $y_k = 0$ و به ازای $k = 0$، $y_k = 1$ باشد. یعنی:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n h_{k-n} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

توجه شود که برای $n < 0$ مقدار g_n صفر است.

بنابراین به ازای $k = 0$ داریم

$$h_0 g_0 = 1 \rightarrow g_0 = \frac{1}{h_0}$$

به ازای $k = 1$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{1-n} g_n = h_1 g_0 + h_0 g_1 = 0 \rightarrow g_1 = -\frac{h_1}{h_0} g_0 \quad g_1 = -\frac{h_1}{h_0^2}$$

به ازای $k = 2$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{2-n} g_n = h_2 g_0 + h_1 g_1 + h_0 g_2 = 0$$

و یا

$$g_2 = -\frac{h_2 g_0 + h_1 g_1}{h_0}$$

به همین ترتیب می‌توان ادامه داد و بقیه ضرایب را حساب کرد.

ب) با استفاده از روابط بدست آمده داریم

$$h_0 = 1 \Rightarrow g_0 = 1 \Rightarrow g_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow g_1 = -\frac{1}{2}$$

برای محاسبه سایر ضرایب با توجه به اینکه $h_n = 0$ به ازای $n \geq 2$ می‌توان رابطه را ساده‌تر کرد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{L-n} g_n = h_L g_0 + h_{L-1} g_1 + \cdots + h_1 g_{L-1} + h_0 g_L = 0$$

$$g_L = -\frac{h_1}{h_0} g_{L-1} \Rightarrow g_3 = -\frac{h_1}{h_0} g_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \to g_3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$g_k = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

بنابراین

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t-kT)$$

ج) چون T ثانیه طول می‌کشد تا فیدبک اثر کند

$$\begin{cases} x(t) = \delta(t) \\ h(0) = \delta(t) \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \qquad h(T) = \alpha\delta(t-T)$$

از آنجا که $h(0)$ اثرش را اعمال کرده و از بین رفته، پس فقط در لحظات kT خروجی مقدار دارد، به طوری که:

$$h(2T) = \alpha^2 \delta(t-2T)$$
$$h(kT) = \alpha^k \delta(t-kT)$$
$$h(t) = \sum_{K=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t-kT)$$

د) با شرط $0 < \alpha < 1$ سیستم پایدار است چون

شرط پایداری سیستم این است که $0 < \alpha < 1$ ، چون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t-\tau-kT) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$$

مثال (۲-۴۷): پاسخ ضربه سیستم‌های LTI و علی که توسط معادلات تفاضلی زیر مشخص شده‌اند را بدست آورید.

الف) $y[n] - y[n-2] = x[n]$

ب) $y[n] - y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$

ج) $y[n] - y[n-2] = 2x[n] - 3x[n-4]$

د) $y[n] - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n]$

حل: الف) پاسخ ضربه را $h_0[n]$ می‌نامیم.

$$y[n] - y[n-2] = x[n] \quad , \quad h_0[n] - h_0[n-2] = \delta[n]$$

در $n=0$ داریم

$$h_0[0]-h_0[-2]=\delta[0]\rightarrow h_0[0]=1$$

چون سیستم علی است پس

$$h[n<0]=0$$

و برای $n\geq 1$فقط پاسخ همگن داریم

$$h_0[n]-h_0[n-2]=0$$

پاسخی بصورت $h_0[n]=A\alpha^n$ در معادله فوق صادق است. با قرار دادن این پاسخ در معادله مذکور داریم

$$A\alpha^n-A\alpha^{n-2}=0\Rightarrow \alpha^2-1=0\Rightarrow \alpha=\pm 1$$

بنابراین شکل کلی پاسخ همگن بصورت زیر است

$$h_0[n]=A_1(1)^n+A_2(-1)^n=A_1+A_2(-1)^n$$

برای بدست آوردن ضرایب مجهول احتیاج به دو شرط اولیه داریم. به روش بازگشتی و از روی معادله تفاضلی مستقیم می‌توان این دو شرط را بدست آورد. در معادله تفاضلی $n=1$ قرار می‌دهیم

$$h_0[1]-h_0[-1]=0\Rightarrow h_0[1]=0$$

پس $h_0[1]$ اولین شرط کمکی است. برای بدست آوردن شرط دوم در معادله $n=2$ قرار می‌دهیم

$$h_0[2]-h_0[0]=0$$

و یا

$$h_0[2]=h_0[0]=1$$

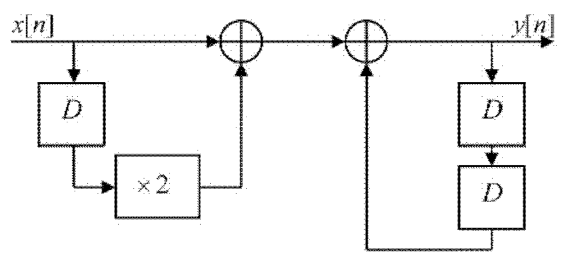
بنابراین از این مقادیر اولیه برای بدست آوردن A_1 و A_2 استفاده می‌کنیم.
همچنین

$$h_0[0]=A_1+A_2(-1)^2=A_1+A_2=1$$
$$h_0[1]=A_1+A_2(-1)^1=A_1-A_2=0$$

از حل دو معادله فوق A_1 و A_2 بدست می‌آیند

$$A_1=A_2=\frac{1}{2}$$

ب)این معادله تفاضلی بصورت زیر قابل ساخت است



شکل (۲-۹۰): نمودار جعبه‌ای سیستم مثال (۲-۴۸) قسمت (ب)

اگر جای دو سیستم را در شکل فوق عوض کنیم و آنرا با نمودار جعبه‌ای مربوط به قسمت (الف) مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود که پاسخ ضربه این سیستم نسبت به پاسخ ضربه سیستم قسمت (الف) فقط در $2h_0[n-1]$ تفاوت دارد که ناشی از عبور سیگنال از مسیر دارای تاخیر است. $h_0[n]$ همان $h[n]$ بند قبلی است. بنابراین برای این سیستم پاسخ ضربه را بصورت زیر داریم

$$h[n]=h_0[n]+2h_0[n-1]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}(-1)^{n-1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n+(-1)^{n-1}$$

ج)

$$y[n]-y[n-2]=2x[n]-3x[n-4]$$

مشابه قسمت (ب) عمل کرده و داریم

$$h[n]=2h_0[n]-3h_0[n-4]$$

د)

$$y[n]-\frac{\sqrt{3}}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$$

$$y[0]-\frac{\sqrt{3}}{2}y[-1]+\frac{1}{4}y[-2]=\delta[0]$$

چون سیستم علی است پس $y[-2]=y[-1]=0$ و $y[0]=h[0]=1$

همین عملیات را بطور بازگشتی برای دو مقدار $n=1$ و $n=2$ نیز انجام می‌دهیم. این مقادیر را برای حل معادله همگن بعنوان شرایط کمکی نیاز داریم

$$y[1]-\frac{\sqrt{3}}{2}y[0]+\frac{1}{4}y[-1]=0$$

$$\rightarrow y[1]=\frac{\sqrt{3}}{2}y[0]=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y[2]-\frac{\sqrt{3}}{2}y[1]+\frac{1}{4}y[0]=0\rightarrow y[2]=\frac{\sqrt{3}}{2}y[1]-\frac{1}{4}y[0]=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

با توجه به داشتن شرایط استراحت اولیه برای $k>0$ فقط پاسخ همگن خواهیم داشت، چون ورودی برابر صفر است

$$h[n]=A\alpha^n\rightarrow A\alpha^n-\frac{\sqrt{3}}{2}A\alpha^{n-1}+\frac{1}{4}A\alpha^{n-2}=0$$

$$\alpha^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{1}{4}=0\rightarrow\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}-4\left(\frac{1}{4}\right)}}{2}$$

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\pm j\frac{1}{4}$$

بنابراین پاسخ ضربه بصورت زیر است

$$h[n]=A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+j\frac{1}{4}\right)^n+A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-j\frac{1}{4}\right)^n$$

از شرایط کمکی برای بدست آوردن A_1 و A_2 استفاده می‌کنیم

$$h[1]=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+j\frac{1}{4}\right)+A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-j\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(A_1+A_2)+\frac{j}{4}(A_1-A_2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h[2]=\frac{1}{2}\Rightarrow A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{j}{4}\right)^2+A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{j}{4}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow\quad A_1\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{16}+j\frac{2\sqrt{3}}{16}\right)+A_2\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{16}-j\frac{2\sqrt{3}}{16}\right)=\frac{1}{2}$$

البته نیازی به حل هم زمان دو رابطه فوق الذکر نیست و می‌توان از هر یک از دو رابطه فوق $A_1=1$ و $A_2=1$ را بدست آورد.

مثال (۲-۴۸): الف) ثابت کنید برای یک سیستم LTI علی که توسط معادله دیفرانسیل زیر تعریف می‌شود $\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=x(t)$ با فرض شرایط استراحت اولیه لازم است شرایط زیر ارضاء شوند.

$$y(0^+)=\frac{dy(0^+)}{dt}=....=\frac{d^{N-2}y(0^+)}{dt^{N-2}}=0$$
$$\frac{d^{N-1}y(0^+)}{dt^{N-1}}=\frac{1}{a_N}$$

فرض کنید $y(0^-)=\frac{dy(0^-)}{dt}=\cdots=\frac{d^{N-1}y(0^-)}{dt^{N-1}}=0$

ب) پاسخ ضربه سیستمی که توسط معادله دیفرانسیل زیر داده شده است را بر حسب پاسخ ضربه سیستم مذکور در بند (الف) بیابید.

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{N}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

ج) با استفاده از قسمت‌های قبلی، با فرض سیستم‌های LTI علی با شرایط استراحت اولیه پاسخ ضربه سیستم بیان شده با معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$a)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$
$$b)\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$
$$c)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{d^3x(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

حل الف)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t)$$

جهت سادگی ابتدا حالت‌های خاص و ساده به ازای $N=1$ و $N=2$ را در نظر می‌گیریم.

به ازای $N=1$ داریم

$$x(t) = \delta(t)$$

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

از طرفین از 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم

$$a_0 \int_{0^-}^{0^+} y(t)dt + a_1 \int_{0^-}^{0^+} \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

در اینصورت داریم $a_1 y(0^+) = 1$ و یا $y(0^+) = \frac{1}{a_1}$

به ازای $N=2$ داریم:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \delta(t)$$

از طرفین از 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم،

$$\int_{0^-}^{0^+} \left(a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt} \right) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

بنابراین

$$a_1 y(0^+) + a_2 y'(0^+) = 1$$

حتما باید $y(0^+) = y(0^-) = 0$ باشد زیرا در غیر اینصورت در لحظه صفر یک پله در $y(t)$ وجود دارد. وجود پله در $y(t=0)$ به معنی وجود ضربه در $\frac{dy}{dt}$ است و همین طور وجود مشتق ضربه در $\frac{d^2 y}{dt^2}$ در $t=0$ است، در حالی که در طرف راست معادله سیستم، فقط تابع ضربه داریم. بنابراین

$$a_2 y'(0^+) = 1 \Rightarrow y'(0^+) = \frac{1}{a_2}$$

و اگر همینطور ادامه دهیم می‌بینیم که شروط زیر برقرار می‌باشند

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \int_{0^-}^{0^+} \frac{d^k y(t)}{dt^k} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left[\left. \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}} \right|_{0^+} - \left. \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}} \right|_{0^-} \right] = 1$$

چون سیستم علی می‌باشد، پس

$$y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = ... = 0$$

پس باید

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}}\Big|_{0^+} = 1$$

سیگنال خروجی و کلیه مشتقات آن (تا مرتبه $N-2$) باید برابر صفر باشد و فقط مشتق مرتبه $N-1$ سیگنال خروجی دارای ضربه باشد، زیرا در غیر این صورت در سمت چپ معادله سیستم مشتقات ضربه هم ظاهر خواهد شد. در حالی که در سمت راست معادله فقط ضربه داریم. بنابراین:

$$y(0^+) = \frac{dy(0^+)}{dt} = \frac{d^2 y(0^+)}{dt^2} = ... = \frac{d^{N-2} y(0^+)}{dt^{N-2}} = 0$$

مشتق $(N-1)$ام خروجی دارای ضربه است که انتگرالش حول زمان صفر یک پله می‌سازد، به طوری که:

$$a_N \frac{d^{N-1} y(0^+)}{dt^{N-1}} = 1 \Rightarrow \frac{d^{N-1} y(0^+)}{dt^{N-1}} = \frac{1}{a_N}$$

ب)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

اگر پاسخ ضربه سیستم قسمت (الف) همین مساله را $h_0(t)$ بنامیم، پاسخ ضربه سیستم فوق خواهد شد.

$$h(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k h_0(t)}{dt^k}$$

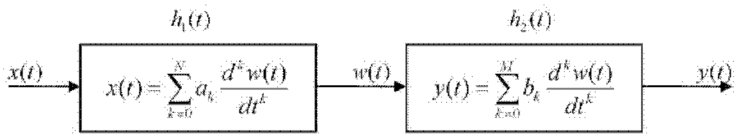
محاسبه $h_0(t)$ که در واقع پاسخ ضربه معادله همگن به ازای $t > 0$ و شرایط اولیه فوق‌الذکر می‌باشد.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \Rightarrow y_i(t) = A_i e^{\alpha_i t}$$

با فرض متمایز بودن ریشه‌ها داریم

$$y(t) = h_0(t) = A_0 e^{\alpha_0 t} + A_1 e^{\alpha_1 t} + \cdots + A_N e^{\alpha_N t}$$

بقیه حالات نیز ساده هستند و از توضیح آنها صرفنظر می‌گردد.



شکل (۲-۹۱): نمودار جعبه‌ای مثال (۲-۴۹) قسمت (ب)

مساله را به شرط متمایز بودن ریشه‌ها حل می‌کنیم

$$x(t)*h_1(t)*h_2(t)=y(t)$$

$$h_1(t)=h_0(t)=\sum_{k=0}^{N}A_k e^{\alpha_k t}$$

$$h_2(t)=\sum_{k=0}^{N}b_k\frac{d^k\delta(t)}{dt^k}\Rightarrow h_1(t)*h_2(t)=\sum_{k=0}^{N}A_k e^{\alpha_k t}*\sum_{k=0}^{N}b_k\frac{d^k\delta(t)}{dt^k}$$

چند جمله اول رابطه فوق را بسط می‌دهیم

$$=\left(\sum_{k=0}^{N}A_k e^{\alpha_k t}\right)*b_0\delta(t)+\left(\sum_{k=0}^{N}A_k e^{\alpha_k t}\right)*b_1\delta'(t)+\left(\sum_{k=0}^{N}A_k e^{\alpha_k t}\right)*b_1\delta''(t)+\ldots.$$

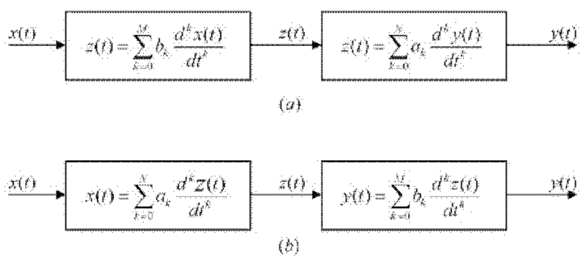
$$=b_0\sum_{k=0}^{N}A_k e^{\alpha_k t}+b_1\sum_{k=0}^{N}\alpha_k A_k e^{\alpha_k t}+b_2\sum_{k=0}^{N}A_k(\alpha_k)^2 e^{\alpha_k t}+\ldots.+b_N\sum_{k=0}^{N}A_k(\alpha_k)^N e^{\alpha_k t}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}b_k\frac{d^k h_0(t)}{dt^k}$$

توضیح: طرز بدست آوردن سیستم شکل (۲-۹۱) از معادله اصلی بدین صورت است که با توجه به معادله دیفرانسیل زیر

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

می‌توان شکل (۲-۹۲-a) را برای این معادله رسم کرد و با استفاده از جابجایی سیستم‌ها شکل (۲-۹۲-b) حاصل می‌شود که معادل سیستم (۲-۹۱) است.



شکل (۲-۹۲): a) نمودار جعبه‌ای مربوط به معادله دیفرانسیل b) جابجایی سیستم‌ها

ج)

$$a)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

محاسبه پاسخ ضربه

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\delta(t)$$

از طرفین رابطه از 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{0^-}^{0^+}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)\right]dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

نتیجه این انتگرال بصورت زیر است:

$$\frac{dy}{dt}\bigg|_{0^+}-\frac{dy}{dt}\bigg|_{0^-}+3y(0^+)-3y(0^-)+2\int_{0^-}^{0^+}y(t)dt=1$$

می‌دانیم $y(t)$ نمی‌تواند شامل پله باشد چون سمت چپ شامل مشتق ضربه می‌شود در حالیکه سمت راست فقط ضربه داریم و از طرفی می‌دانیم که سیستم در حال استراحت اولیه است پس

$$y(0^-)=\frac{dy}{dt}\bigg|_{0^-}=0\rightarrow\frac{dy}{dt}\bigg|_{0^+}+3y(0^+)=1$$

و چون در $y(t=0)$ پله نداریم $y(0^+)=y(0^-)=0$ و بنابراین

$$\frac{dy}{dt}\bigg|_{0^+}=1\quad,\quad y(0^+)=0$$

حال فرض می‌کنیم که فقط شرایط اولیه داریم و ورودی سیستم صفر است (پاسخ همگن).

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0\rightarrow s^2+3s+2=(s+1)(s+2)=0$$

ریشه‌های معادله مفسر $s=-1$ و $s=-2$ هستند. پس پاسخ همگن در حالت کلی بصورت زیر است:

$$y(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$$

و با استفاده از شرایط کمکی می‌توان ضریب مجهول را یافت.

$$y(0^+)=0\rightarrow A_1+A_2=0$$

$$\frac{dy}{dt}\bigg|_{0^+}=1\rightarrow A_1+2A_2=-1$$

از حل معادلات فوق A_1 و A_2 بدست می‌آیند. بنابراین داریم

$$y(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)=h(t)$$

$$b)\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

با توجه به معلومات مثال (۲-۴۸) بجای یافتن پاسخ ضربه سیستم فوق می‌توان پاسخ ضربه سیستم زیر را یافت

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\frac{dy(t)}{dt}dt+\int_{0^-}^{0^+}2y(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt\Rightarrow y(0^+)+2\int_{0^-}^{0^+}y(t)dt=1$$

با توجه به اینکه پاسخ ضربه خود نمی‌تواند شامل ضربه باشد پس $\int_{0^-}^{0^+}y(t)dt=0$ است. بنابراین داریم

$$y(0^+)=1$$

برای یافتن پاسخ همگن طرف دوم را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0 \Rightarrow s+2=0 \rightarrow h_0(t)=Ae^{-2t}u(t)$$

تنها ریشه معادله مفسر $s=-1$ است. بنابراین $h_0(t)=Ae^{-2t}u(t)$ است و با توجه به شرط کمکی داریم:

$$h_0(t)=1 \Rightarrow A=1 \Rightarrow h_0(t)=e^{-2t}u(t)$$

اکنون از روی پاسخ ضربه این سیستم می‌توان پاسخ ضربه سیستم اصلی را یافت.

محاسبه پاسخ ضربه اصلی سیستم

$$h(t)=3\frac{dh_0(t)}{dt}+h_0(t)=3\left[-2e^{-2t}u(t)+\delta(t)\right]+e^{-2t}u(t)$$

و یا

$$h(t)=-5e^{-2t}u(t)+3\delta(t)$$

روش دیگر حل مساله: فقط پاسخ همگن را محاسبه می‌کنیم و به آن ضریبی از ضربه اضافه می‌کنیم. چون سمت راست شامل مشتق ضربه است.

$$y(t)=Ae^{-2t}u(t)+B\delta(t)$$

اکنون از پاسخ ضربه مشتق می‌گیریم و آنرا در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم تا ضرائب مجهول B و A بدست آیند.

$$\frac{dy(t)}{dt}=-2Ae^{-2t}u(t)+A\delta(t)+B\delta'(t)$$

$$-2Ae^{-2t}u(t)+A\delta(t)+B\delta'(t)+2Ae^{-2t}u(t)+2B\delta(t)=3\delta'(t)+\delta(t)$$

بنابراین $B=3$ و $A=-5$ بدست می‌آیند. پس داریم:

$$y(t)=-5e^{-2t}u(t)+3\delta(t)$$

$$c)\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{d^3x(t)}{dt^3}+2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

ابتدا پاسخ ضربه سیستم زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t)$$

از طرفین از 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{0^-}^{0^+}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)\right]dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{0^+}+5y(0^+)+6\int_{0^-}^{0^+}y(t)dt=1$$

پاسخ نمی‌تواند شامل پله باشد پس $y(0^+)=0$ است. بنابراین:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{0^+}=1$$

و از حل معادله مفسر برای بدست آوردن پاسخ همگن استفاده می‌کنیم:

$$s^2+5s+6=0 \Rightarrow (s+3)(s+2)=0$$

$$h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$$

از شرط کمکی $h_0(0^+)=0$ داریم:

$$A_1+A_2=0$$

و همچنین از شرط دوم داریم:

$$\frac{dh_0(0^+)}{dt}=1 \to -2A_1-3A_2=1$$

از حل این دو معادله $A_1=1$ و $A_2=-1$ بدست می‌آیند. پس:

$$h_0(t)=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)u(t)$$

حال پاسخ سیستم اصلی را می‌یابیم:

$$h(t)=\frac{d^3h_0(t)}{dt^3}+2\frac{d^2h_0(t)}{dt^2}+4\frac{dh_0(t)}{dt}+3h_0(t)$$

$$\frac{dh_0(t)}{dt}=\left(-2e^{-2t}+3e^{-3t}\right)u(t)$$

$$\frac{d^2h_0(t)}{dt^2}=\left(4e^{-2t}-9e^{-3t}\right)u(t)+\delta(t)$$

$$\frac{d^3h_0(t)}{dt^3}=\left(-8e^{-2t}+27e^{-3t}\right)u(t)+\delta'(t)-5\delta(t)$$

$$h(t)=\left(-8e^{-2t}+27e^{-3t}\right)u(t)-5\delta(t)+\delta'(t)+2\left(4e^{-2t}-9e^{-3t}\right)u(t)+2\delta(t)$$
$$+4\left(-2e^{-2t}+3e^{-3t}\right)u(t)+3\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)u(t)$$

$$h(t)=\left(-5e^{-2t}+18e^{-3t}\right)u(t)-3\delta(t)+\delta'(t)$$

حل مساله به روش دیگر: ابتدا پاسخ همگن را حساب کرده و به آن ضرایبی از $\delta(t)$ و $\delta'(t)$ اضافه می‌کنیم (چون طرف دوم شامل ضربه و مشتق آن است). اکنون ضرایب مجهول را حساب می‌کنیم:

$$y(t)=\left(Ae^{-2t}+Be^{-3t}\right)u(t)+C\delta(t)+D\delta'(t)$$

اکنون مشتقات مراتب بالاتر را حساب کرده و در معادله دیفرانسیل جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left(-2Ae^{-2t}-3Be^{-3t}\right)u(t)+(A+B)\delta(t)+C\delta'(t)+D\delta''(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=\left(4Ae^{-2t}+9Be^{-3t}\right)u(t)-(2A+3B)\delta(t)+(A+B)\delta'(t)+C\delta''(t)+D\delta'''(t)$$

با جایگذاری در معادله اصلی

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=[3A+2B+6C]\delta(t)+[A+B+5C+6D]\delta'(t)+$$
$$[5D+C]\delta''(t)+D\delta'''(t)=\delta'''(t)+2\delta''(t)+4\delta'(t)+3\delta(t)$$

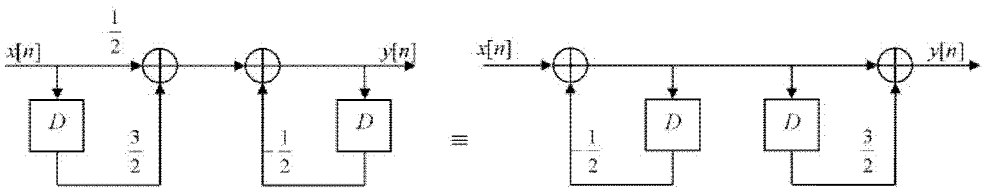
از مساوی قرار دادن ضرایب توابع ضربه و مشتقات آن در دو طرف داریم

$$\begin{cases} D=1 \\ 5D+C=2 \\ A+B+5C+6D=4 \\ 3A+2B+6C=3 \end{cases}$$

از حل همزمان این معادلات $A=-5$ و $B=18$ و $C=-3$ و $D=1$ بدست می‌آیند

$$\Rightarrow y(t)=\left(-5e^{-2t}+18e^{-3t}\right)u(t)-3\delta(t)+\delta'(t)$$

مثال (۲-۴۹): الف) پاسخ ضربه سیستمی با معادله تفاضلی زیر را بیابید (با فرض شرایط استراحت اولیه)؛ ب) پاسخ ضربه این سیستم به ورودی $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ را بیابید.



شکل (۲-۹۳): دو نمودار جعبه‌ای معادل مربوط به سیستم مثال (۲-۴۹) قسمت (ج-(b))

$$y[n]-\frac{5}{2}y[n-1]+y[n-2]=6x[n]-7x[n-1]+5x[n-2]$$

الف) ابتدا پاسخ ضربه سیستم با معادله زیر را پیدا می‌کنیم.

$$y[n]-\frac{5}{2}y[n-1]+y[n-2]=x[n]$$

از شرط استراحت $y[-1]=y[-2]=0$ داریم

$$y[0]-\frac{5}{2}y[-1]+y[-2]=1\Rightarrow y[0]=1$$

$$y[1]-\frac{5}{2}y[0]+y[-1]=0\Rightarrow y[1]=\frac{5}{2}$$

$$y[2]-\frac{5}{2}y[1]+y[0]=0\Rightarrow y[2]=\frac{5}{2}y[1]-y[0]=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$$

اکنون معادله همگن را حل می‌کنیم.

$$y[n]-\frac{5}{2}y[n-1]+y[n-2]=0$$

پاسخی بصورت $h_0[n]=A\alpha^n$ در معادله فوق (به ازای $n\geq 0$) صادق است. پس معادله مفسر بصورت زیر خواهد بود

$$A\alpha^n-\frac{5}{2}A\alpha^{n-1}+A\alpha^{n-2}=0\Rightarrow\alpha^2-\frac{5}{2}\alpha+1=0$$

ریشه‌های این معادله $\alpha=2$ و $\alpha=\frac{1}{2}$ هستند. پس:

$$h_0[n]=A(2)^n+B\left(\frac{1}{2}\right)^n\qquad n>0$$

اکنون از شرایط کمکی بدست آمده استفاده می‌کنیم:

$$h_0[1]=2A+\frac{B}{2}=\frac{5}{2}$$
$$h_0[2]=4A+\frac{B}{4}=\frac{21}{4}$$

از حل همزمان این دو معادله $A=\frac{4}{3}$ و $B=\frac{-1}{3}$ بدست می‌آوریم، پس:

$$h_0[n]=\frac{4}{3}(2)^n-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\qquad n\geq 0$$

حال پاسخ ضربه اصلی سیستم ر ابدست می‌آوریم

$$h[n]=6h_0[n]-7h_0[n-1]+5h_0[n-2]$$
$$h[n]=(8(2)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n)u[n]+(-\frac{28}{3}(2)^{n-1}+\frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1})u[n-1]+(\frac{20}{3}(2)^{n-2}-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2})u[n-2]$$

ب)

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k]h[k]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left[\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{3}(2)^{-k}\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{3}2^k(-2)^k(-\frac{1}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k(-2)^k(-\frac{1}{2})^n$$
$$=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}2^k(-2)^k-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k(-2)^k$$
$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left\{4\sum_{k=0}^{n}(-4)^k-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\right\}\qquad n\geq 0$$

مثال (۲-۵۰): یک سیستم پیوسته زمانی LTI با فرض شرایط استراحت اولیه که توسط معادله دیفرانسیل زیر مشخص می‌شود را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)$$

الف) پاسخ ضربه سیستم را حساب کنید.

ب) پاسخ سیستم فوق را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = e^{-2t}\cos(3t)\ u(t)$$

حل: الف)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

محاسبه پاسخ پله

$$s(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

برای محاسبه پاسخ همگن با معادله مفسر $p^2 + p - 2 = 0$ مواجه می‌شویم که دارای پاسخ‌های $p = 1$ و $p = -2$ می‌باشد. پس:

$$y_n(t) = Ae^{-2t} + Be^{t}$$

پاسخ خصوصی برای $t > 0$ در نظر گرفته می‌شود و چون در این ناحیه ورودی مقدار ثابتی است بنابراین پاسخ خصوصی به مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شود. پس:

$$\frac{d^2y_p(t)}{dt^2} + \frac{dy_p(t)}{dt} - 2y_p(t) = 1 \Rightarrow y_p(t) = \frac{-1}{2}$$

بنابراین پاسخ پله بصورت زیر است:

$$s(t) = Ae^{-2t} + Be^{t} - \frac{1}{2}$$

با توجه به شرایط اولیه $s(0) = 0$ و $s'(0) = 0$ داریم:

$$A + B - \frac{1}{2} = 0$$

$$-2A + B = 0$$

از حل این دو معادله $A = \frac{1}{6}$ و $B = \frac{1}{3}$ بدست می‌آیند پس پاسخ پله در حالت کلی بصورت زیر است

$$s(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}\right)u(t)$$

اکنون پاسخ ضربه بسادگی از مشتق تابع پله بدست می‌آید.

محاسبه پاسخ ضربه بطور مستقیم

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = \delta(t)$$

پاسخ فقط همان پاسخ همگن است منتها با شرایط اولیه متفاوت، بنابراین لازم است شرایط اولیه جدید که بدلیل اعمال ضربه به سیستم بدست آمده‌اند را بدست آورد.

$$y(t) = \left[ae^{-2t} + be^{t}\right] u(t)$$

$$y'(t) = \left[-2ae^{-2t} + be^{t}\right] u(t) + (a+b)\delta(t)$$

$$y''(t) = \left[4ae^{-2t} + be^{t}\right] u(t) + (-2a+b)\delta(t) + (a+b)\delta'(t)$$

مقادیر فوق را در معادله دیفرانسیل اصلی قرار می‌دهیم.

$$\left[4ae^{-2t}+be^{t}\right]u(t)+(-2a+b)\delta(t)+(a+b)\delta'(t)+$$
$$(a+b)\delta(t)-4ae^{-2t}-be^{t}u(t)=\delta(t)$$

از حل معادلات $a=-\dfrac{1}{3}$ و $b=\dfrac{1}{3}$ بدست می‌آیند.

$$y(t)=\left[-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right]u(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه سیستم بصورت مقابل است.

البته جهت اطمینان پاسخ پله را از انتگرال پاسخ ضربه نیز بدست می آوریم:

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right]u(t)=\int_{0}^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}dt+\int_{0}^{t}\frac{1}{3}e^{t}dt$$

$$s(t)=\frac{1}{6}\left(e^{-2t}-1\right)+\frac{1}{3}\left(e^{t}-1\right)=\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{2}\qquad t\geq 0$$

ب) پاسخ خصوصی

$$x(t)=e^{-2t}Cos3t\,u(t)\Rightarrow y_p(t)=Ae^{-2t}Cos(3t+\theta)$$

پاسخ خصوصی برای این ورودی به صورت $y_p(t)=Ae^{-2t}Cos(3t+\theta)$ است، پس

$$\frac{dy_p(t)}{dt}=-2Ae^{-2t}Cos(3t+\theta)+3Ae^{-2t}Sin(3t+\theta)=Ae^{-2t}\left(3Sin(3t+\theta)-2Cos(3t+\theta)\right)$$

$$\frac{d^2y_p(t)}{dt^2}=-2Ae^{-2t}\left[3Sin(3t+\theta)-2Cos(3t+\theta)\right]+Ae^{-2t}\left[9Cos(3t+\theta)+6Sin(3t+\theta)\right]$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه اصلی داریم:

$$-5Ae^{-2t}Cos(3t+\theta)-12Ae^{-2t}Sin(3t+\theta)-2Ae^{-2t}Cos(3t+\theta)$$
$$+3Ae^{-2t}Sin(3t+\theta)-2Ae^{-2t}Cos(3t+\theta)$$
$$\Rightarrow -9Ae^{-2t}Cos(3t+\theta)-9Ae^{-2t}Sin(3t+\theta)=e^{-2t}Cos3t$$

و یا

$$-9Ae^{-2t}\left[Cos\theta Cos3t-Sin\theta Sin3t+Sin3tCos\theta+Sin\theta Cos3t\right]$$
$$=e^{-2t}Cos3t$$

بنابراین $A=-\dfrac{1}{9}$ بدست آمده در روابط زیر نیز باید همزمان برقرار گردند

$$\begin{cases}-9A\left[Cos\theta+Sin\theta\right]=1\\ Cos\theta-Sin\theta=0\end{cases}$$

از حل همزمان این دو معادله $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ بدست می‌آید (فقط یک جواب کافیست)

با قرار دادن این مقادیر در پاسخ خصوصی داریم

$$y_p(t)=-\frac{1}{9}e^{-2t}Cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow y(t)=Ae^{-2t}+Be^{t}-\frac{1}{9}e^{-2t}Cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$$

اکنون از شرایط کمکی برای محاسبه مجهولات A و B استفاده می‌کنیم

$$y(0)=0 \Rightarrow A+B-\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}=0$$

$$y'(0)=0 \Rightarrow 2A+B-\frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}\times 3+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]=0$$

از حل همزمان این دو معادله آخرین ضرایب مجهول نیز بدست می‌آید

حل به روش فازوری:

فرض می‌کنیم y عدد مختلط است.

$$y_p(t)=R_e\left[Be^{(-2+3j)t}\right]$$

$$y'_p(t)=R_e\left[B(-2+j3)e^{(-2+3j)t}\right] \Rightarrow y''_p(t)=R_e\left[B(-5+j12)e^{(-2+3j)t}\right]$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل سیستم داریم

$$\Re e\left[B\times(-5+j12)\,e^{(-2+3j)t}\right]+\Re e\left[yB(-2+j3)\;e^{(-2+3j)t}\right]$$
$$-2\Re e\left[B\;e^{(-2+3j)t}\right]=\Re e\left[e^{(-2+3j)t}\right]$$

و یا

$$\Re e\left[B(-5+j12)\;e^{j3t}+B(-2+j3)e^{j3t}-2Be^{j3t}\right]=\Re e\left[e^{j3t}\right]$$

بنابراین از معادله فوق می‌توان بسادگی B را بدست آورد.

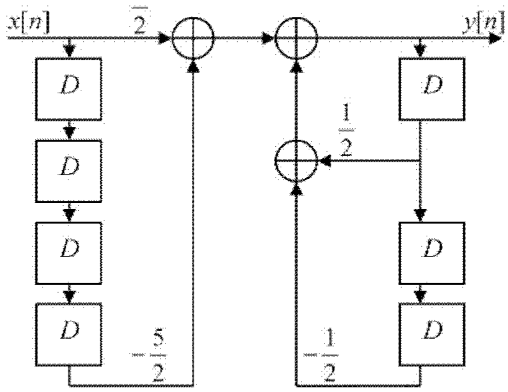
مثال (۲-۵۱): معادله تفاضلی زیر را به روش مستقیم نوع II نمایش دهید.

$$a)2y[n]-y[n-1]+y[n-3]=x[n]-5x[n-4]$$

ابتدا معادله را بدین صورت مرتب می‌کنیم

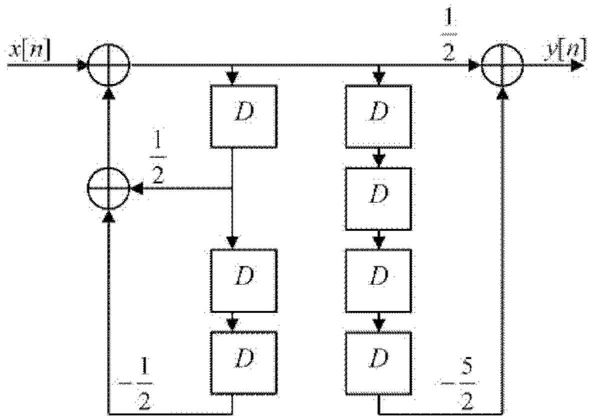
$$y[n]=\frac{1}{2}\{y[n-1]+y[n-3]+x[n]-5x[n-4]\}$$

اکنون می‌توان نمودار شکل (۲-۹۶) را برای سیستم نمایش داد، که در آن، سیستم D یک عنصر تاخیر بوده و عدد روی علامت پیکان بیانگر مقداری است که سیگنال در آن ضرب می‌شود.



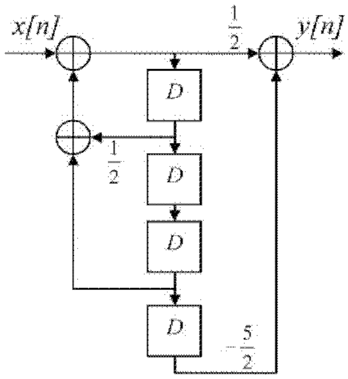
شکل (۲-۹۴): نمودار جعبه‌ای مثال (۲-۵۲) به روش نوع I

با جابه‌جایی این سیستم شکل (۲-۹۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود.



شکل (۲-۹۵)

و با حذف عناصر تاخیری اضافه، که بطور موازی هم قرار دارند، نمایش روش مستقیم نوع II بدست می‌آید.



شکل (۲-۹۶): نمودار جعبه‌ای روش مستقیم نوع II برای سیستم مثال (۲-۵۲)

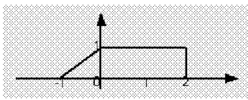
۲-۱۲ خلاصه

در این فصل، به مطالعه روش تحلیل سیستم‌های ***خطی نامتغیر با زمان*** (LTI) ، در حوزهٔ زمان، پرداختیم. در روش مورد مطالعه از پاسخ ضربه سیستم استفاده کردیم. در حالت سیستم گسستهٔ زمانی، سیگنال خروجی از جمع کانولوشن پاسخ ضربه و سیگنال ورودی بدست می‌آید. در حالت سیستم پیوستهٔ زمانی، انتگرال کانولوشن پاسخ ضربه و سیگنال ورودی، مقدار سیگنال خروجی را در هر لحظه از زمان مشخص می‌کند. برای بررسی خواص علی و پایدار بودن سیستم نیز از پاسخ ضربه

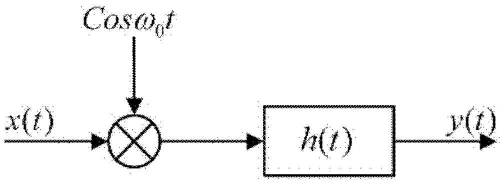
استفاده کردیم. علاوه بر استفاده از کانولوشن، به تحلیل سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان از طریق حل معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت برای سیستم‌های گسستهٔ زمانی، و حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت برای سیستم‌های پیوستهٔ زمانی پرداختیم. ساخت سیستم‌های LTI با استفاده از بلوک‌های مدارات استاندارد (انتگرال‌گیر، جمع‌کننده و ضرب‌کننده برای سیستم پیوستهٔ زمانی، و تاخیر زمانی، جمع‌کننده و ضرب‌کننده برای سیستم گسستهٔ زمانی) نیز ارائه گردید. هم‌چنین، با ارائه دهها مثال حل شده، نحوهٔ استفاده از تحلیل سیستم‌های LTI ، در حوزهٔ زمان، و بررسی خواص آن‌ها بیان شد.

۲-۱۳ مسائل

۲-۱ حاصل کانولوشن‌های زیر را بیابید.

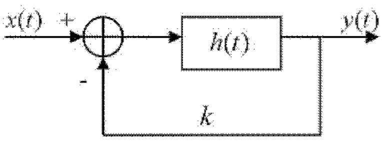
$x(t)$	$h(t)$
$e^{-t}u(t)$	$Cost\left(u(t)-u(t-T)\right)$
$\lvert t\rvert u(t)$	
$(-1)^n u[n]$	$u[n]-u[n-N_0]$
$n_0 u[n]$	$n\left[u[n]-u[n-N_0]\right]$

۲-۲ خروجی سیستم زیر را بیابید.



$x(t)=h(t)=2A\omega\ Sin(2\omega\ t)$ $\qquad\qquad$ $\omega_0>2\omega$

۲-۳ به ازای چه مقادیری از k سیستم زیر پایدار است؟



$h(t)=e^{-t}u(t)$

۲-۴ در علیت و پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی زیر بحث کنید.

$$h(t)=t^2e^{-t}u(t) \quad , \quad h(t)=e^{-t}Cost \quad , \quad h(t)=e^{Cost}u(t)$$

۲-۵ در علیت و پایداری سیستم‌های گسسته زمانی زیر بحث کنید.

$$h[n]=2^{-n}u[-n+1] \quad , \quad h[n]=(-1)^n e^{-n+1}u[-n+1] \quad , \quad h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$$

۲-۶ پاسخ ضربه سیستم با معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. (با فرض استراحت اولیه)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \quad ; \quad y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

۲-۷ پاسخ ضربه سیستم با معادله تفاضلی زیر را بدست آورید. (با فرض شرایط استراحت اولیه)

$$\sum_{k=0}^{4}ky[n-k]=2x[n] \quad , \quad \sum_{k=1}^{3}k^2y[n-k]=x[n]-x[n-1]$$

$$y[n]+y[n-1]+y[n-2]=x[n]+x[n-1]-x[n-2]$$

۲-۸ آیا معکوس یک سیستم LTI علی همواره یک سیستم LTI علی است؟

۲-۹ تحت چه شرایطی می‌توان گفت که معکوس سیستم LTI علی وجود دارد؟

۲-۱۰ سیستمی به صورت زیر مفروض است. خواص آن را بررسی کنید.

$$y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M}x[n-k]$$

۲-۱۱ حاصل کانولوشن زیر را بیابید. (و بر حسب مقادیر مختلف a و c روی پاسخ بحث کنید.)

$$qe^{c(t-a)}u(a-t)u(t)*e^{-ct}u(t)$$

۲-۱۲ سیستم علی $h(t)$ را به گونه‌ای بیابید که در رابطه زیر صدق کند. h2پارامتری با مقدار معین است.

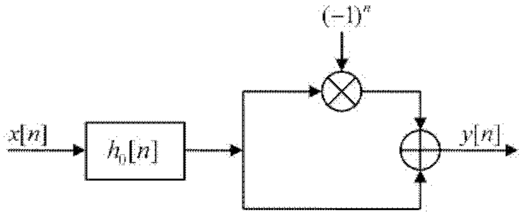
$$\int_0^{\infty}h(\alpha)R(\tau-\alpha)d\alpha=R(\tau+h2) \quad ; \quad \mathrm{R}(\tau)=\frac{3}{2}e^{-\tau}+\frac{11}{3}e^{-3\tau}$$

۲-۱۳ تبدیل هیلبرت سیگنال‌های $x_1(t)=Cost$, $x_2(t)=e^{-t}.u(t)$ را بدست آورید.

با توجه به تعریف این تبدیل ک عبارت است از:

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}.d\tau$$

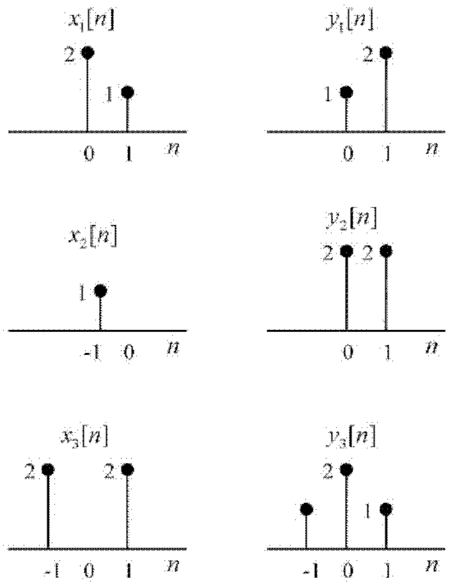
۲-۱۴ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.



$$h_0[n]=\frac{Sin(nR_0)}{n}$$

بر حسب مقادیر مختلف R_0 بحث کنید.

۲-۱۵ بر روی یک سیستم گسسته زمانی مستقل از زمان آزمایش انجام داده‌ایم و می‌خواهیم سایر مشخصات آن را از قبیل پایداری، علیت و خطی بودن مورد بررسی قرار دهیم. دنباله‌های ورودی و خروجی در هر حالت به صورت زیر هستند.

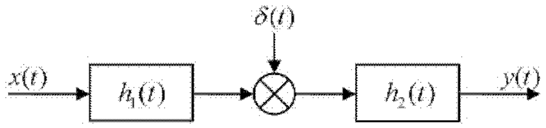


مطلوبست: الف) خواص سیستم، ب) پاسخ ضربه سیستم.

۲-۱۶ مطلوبست محاسبه انتگرال زیر.

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sinc^2 t dt$$

۲-۱۷ خروجی سیستم زیر را بیابید،



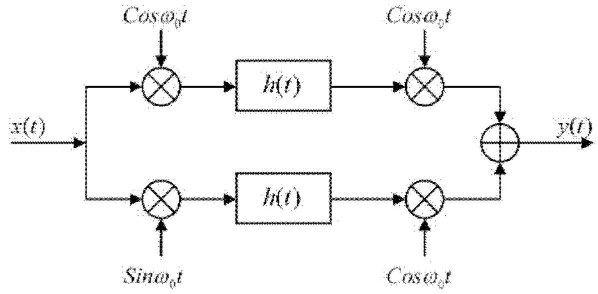
اگر $s(t) = h_1(t) = h_2(t) = A\tau \sin c \dfrac{t}{2\pi}\tau$ باشند.

۲-۱۸ سیستم متوسط متحرک (moving average) توسط رابطه زیر مشخص می‌گردد. خروجی سیستم را به ازای ورودی زیر بیابید.

$$\omega_0 t = \frac{2\pi}{T_0}, x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k . e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2T_0}\int_{t-T_0}^{t+T_0} x(\alpha) d\alpha$$

۲-۱۹ خروجی سیستم زیر را بیابید.



با فرض $x(t) = h(t) = A\tau\, Sin \dfrac{ct}{2\pi}\tau$ روی مقادیر مختلف ω_0 بحث کنید.

۲-۲۰ آیا ممکن است از ترکیب چند سیستم غیرخطی و خطی یک سیستم خطی بدست آید؟ (بحث و دلیل)

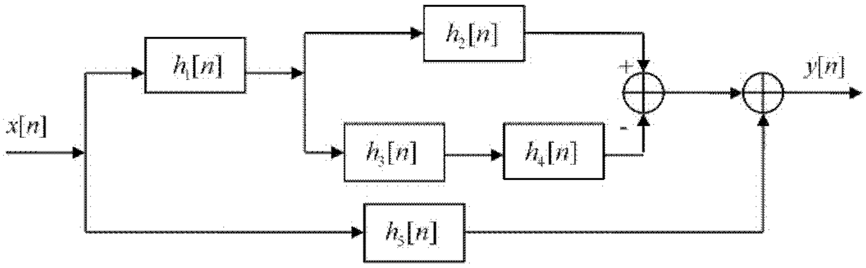
۲-۲۱ آیا ممکن است از ترکیب چند سیستم غیرعلی و علی سیستم علی بدست آورد؟ (بحث و دلیل)

۲-۲۲ آیا ممکن است از ترکیب چند سیستم پایدار و غیرپایدار سیستم پایدار بدست آورد؟ (بحث و دلیل.)

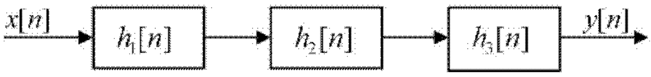
۲-۲۳ پاسخ ضربه کلی سیستم را بیابید، اگر:

$$h_1[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n\{u[n]-u[n-2]\} \quad , \quad h_2[n]=h_3[n]=nu[n]$$

$$h_4[n]=\delta[n-2] \quad , \quad h_5[n]=\delta[n]-4\delta[n-1]$$

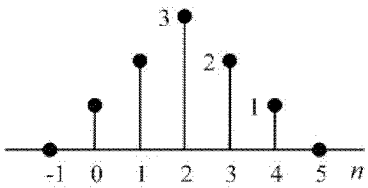


۲-۲۴ ترکیب متوالی سه سیستم را در نظر بگیرید.



اگر پاسخ ضربه کلی این ترکیب به صورت شکل زیر باشد:

مطلوبست $h_2[n]$



۲-۲۵ پاسخ ضربه یک سیستم پیوسته زمانی خطی ولی متغیر با زمان به صورت زیر است:

$$h_\tau(t)=u(t)-u(t-\tau)$$

مطلوبست پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=e^{-t}u(t)$.

$$h_k[n]=u[n]-u[n-k]$$

۲-۲۶ پاسخ ضربه یک سیستم گسسته زمانی خطی ولی متغیر با زمان بصورت زیر است. مطلوبست پاسخ این سیستم به ورودی:

$$x[n]=u[n]-u[n-4]$$

۲-۲۷ پاسخ ضربه یک سیستم گسسته زمانی خطی ولی متغیر با زمان به صورت زیر است:

$$h_k[n]=u[-kn]-u[n-2k]$$

مطلوبست پاسخ این سیستم به ورودی:

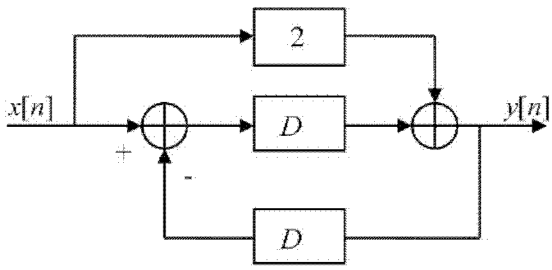
$$x[n]=n\{u[n]-u[n-5]\}$$

۲-۲۸ خواص سیستمی با ضابطه ورودی و خروجی بصورت زیر را بیابید.
(M عدد زوج)

$$y(t)=\frac{1}{M+1}\sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}}x(t-kT)$$

۲-۲۹ یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربهٔ $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ است. این سیستم را توسط عناصر تاخیر، جمع و ضرب‌کننده‌ها بسازید.

۲-۳۰ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید. (با فرض استراحت اولیه)



۲-۳۱ سیستم‌های LTI زیر را به روش مستقیم نوع II بسازید.

الف) $2y[n-2]+y[n-4]=x[n-5]+x[n]$

ب) $y[n]+y[n-3]=x[n-1]$

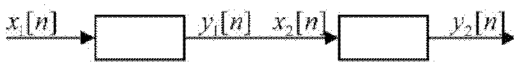
ج) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+\dfrac{3dy(t)}{dt}=x(t)+\dfrac{dx(t)}{dt}$

د) $5\dfrac{d^4y(t)}{dt^4}=2x(t)+3\dfrac{dx(t)}{dt}$

هـ) $\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=3\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau+x(t)$

۲-۳۲ دو سیستم LTI با معادلات تفاضلی زیر بطور متوالی پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

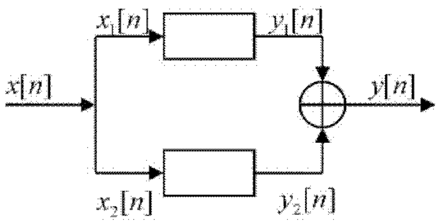
$$y_1[n] \neq 2y_1[n-1] = x_1[n-2] + x_1[n-4]$$
$$y_2[n] - y_2[n-2] = x_2[n] + x_2[n-1]$$



الف) معادله تفاضلی سیستم کلی (مرکب از دو سیستم متوالی) را بدست آورید.
ب) این سیستم را به روش مستقیم نوع II بسازید.

۲-۳۳ دو سیستم LTI با معادلات تفاضلی زیر بشکلی با هم ترکیب شده‌اند.

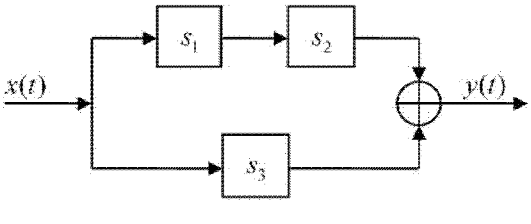
$$y_1[n] - 3y_1[n-2] = 2x_1[n-3] - x_1[n]$$
$$2y_2[n-1] - y_2[n-3] = x_1[n-1] - 3x_1[n]$$



الف) معادله تفاضلی سیستم کلی را بدست آورید. (این معادله باید بیانگر ارتباط $x[n]$ و $y[n]$ باشد)
ب) این سیستم را به روش مستقیم نوعII بسازید.

۲-۳۴ یک سیستم با استفاده از ترکیب متوالی و موازی سه سیستم LTI بصورت زیر ساخته شده است.
معادلات دیفرانسیل هر سیستم بصورت زیر هستند

$$3\frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{d^2y_1(t)}{dt^2} = 2\frac{dx_1(t)}{dt} + 4\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}$$
$$\frac{dy_2(t)}{dt} + \frac{d^3y_2(t)}{dt^3} = 3\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + \frac{d^3x_2(t)}{dt^3}$$
$$2\frac{d^2y_3(t)}{dt^2} + \frac{d^4y_3(t)}{dt^3} = \frac{dx_3(t)}{dt} + 2\frac{d^3x_3(t)}{dt^3}$$



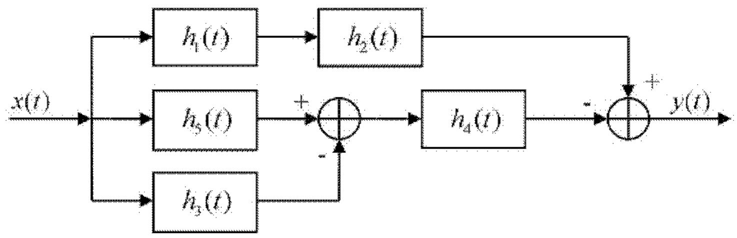
الف) مطلوبست معادله دیفرانسیل سیستم مرکب.
ب) سیستم مرکب را به روش مستقیم نوع II بسازید.

۲-۳۵ پاسخ ضربه یک سیستم LTI پیوسته زمانی، $h(t)=e^{-2t}u(t)$ می‌باشد. معادله دیفرانسیل بیانگر این سیستم را بدست آورده و آنرا به روش مستقیم نوع II بسازید.

۲-۳۶ پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته زمانی بصورت $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ می‌باشد. معادله تفاضلی بیانگر این سیستم را بدست آورده و آنرا به روش مستقیم نوع LTI بسازید.

۲-۳۷ نشان دهید که پاسخ ضربه یک سیستم پایدار هرگز نمی‌تواند متناوب باشد.

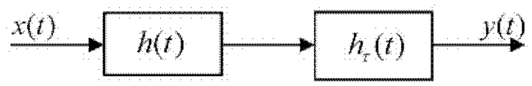
۲-۳۸ خروجی سیستم زیر را بیابید اگر ورودی به صورت $x(t)=e^{-t}u(t)$ باشد.



$$h_1(t)=u(t)-u(t-1) \qquad h_2(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-2)]$$
$$h_3(t)=|t|\ [u(t+1)-u(t-1)] \qquad h_4(t)=\delta(t)-\delta(t-2) \qquad h_5(t)=\delta(t)$$

۲-۳۹ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ به یک سیستم خطی ولی متغیر با زمان با پاسخ ضربه بطور متوالی متصل شده است

$$h(t)=u(t)-u(t-1)$$
$$h_\tau(t)=u(t)-u(t-\tau)$$



الف) خروجی سیستم مرکب را بدست آورید اگر ورودی بصورت $x(t)=u(t)-u(t-2)$ باشد.
ب) اگر جای دو سیستم را جابه‌جا کنیم آیا خروجی تغییر می‌کند؟

۲-۴۰ آیا می‌توان یک سیستم خطی طراحی کرد که اگر ورودی آن بصورت $x(t)=Sin2t$ باشد، خروجی آن بصورت $y(t)=Sin(t)$ گردد؟

۲-۴۱ اگر ورودی یک سیستم خطی در کلیه زمان‌ها غیر صفر باشد (مثلا $x(t) = Cos\, t$). آیا ممکن است خروجی این سیستم به ازاء زمان‌های محدود غیر صفر باشد؟ (مثلاً $T_1 < t < T_2 \quad , y(t) \neq 0$)

۲-۴۲ در مورد یک سیستم مجهول می‌دانیم که اگر ورودی بصورت $x(t) = e^{-t}$ باشد خروجی بصورت $y(t) = e^{-2t}$ است، آیا این سیستم می‌تواند خطی باشد؟