فصل سوم

تبدیل فوریه پیوسته زمان

مقدمه

همانگونه که گفتیم هدف ما در این کتاب تجزیه و تحلیل سیستم‌هایLTI است. روش حوزه زمان در تجزیه و تحلیل این سیستم‌ها با همه وضوح و روشنی در بعضی موارد به محاسبات پیچیده و خسته‌کننده منتهی می‌شود. این امر باعث شده است تا روش تجزیه و تحلیل فوریه در این موارد به کار گرفته شود. البته تنها بدلیل سادگی این روش مورد توجه قرار نگرفته است، بلکه دلیل عمده توجه متخصصان به تحلیل فوریه در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI، این است که در واقع یک نوع برداشت جدید از سیستم‌ها به خواننده می‌دهد و خواننده را به دنیای جدیدی به نام حوزه فرکانس برده و او را در این دنیای جدید با خواص سیستم‌ها آشنا می‌سازد. البته لازم است توجه شود که تحلیل فوریه فقط و فقط در مورد سیستم‌های خطی کاربرد دارد. تبدیل فوریه در واقع ابتدا به عنوان یک ابزار ریاضی کارآمد جهت تفسیر برخی از پدیده‌های فیزیکی و همچنین حل برخی مسایل پیچیده ریاضی ارائه گردید. تبدیل فوریه عملگری است که برخی معادلات پیچیده را به معادلات ساده جبری تبدیل می‌نماید. اساس کار این عملگر بسط یک تابع بر اساس مؤلفه‌های فرکانسی به صورت $e^{j\omega t}$ است. اهمیت تحلیل فوریه در تجزیه و تحلیل سیستم‌ها و سیگنال‌ها نیز از همین جا ناشی شده است. توابعی به صورت $e^{j\omega t}$ نوع خاص و بسیارمهمی از توابع هستند که اگر پاسخ سیستم خطی به این توابع را داشته باشیم اطلاعات مهمی در مورد سیستم و خواص آن می‌توان بدست آورد. این خواص به خواص سیستم در حوزه فرکانس موسوم هستند و از روی آنها می‌توان سایر خواص سیستم را نیز بدست آورد. جالب است توجه کنیم که پاسخ سیستم خطی به این گونه توابع دقیقا مشابه ورودی به استثناء یک ضریب ثابت مختلط است. بعبارت دیگر توابعی بصورت $e^{j\omega t}$ توابع ویژه سیستم های LTI هستند. بنابراین مشاهده می‌شود که تحلیل فوریه یک ابزار کارآمد و سریع در بدست آوردن خواص سیستم‌های خطی و تجزیه و تحلیل عملکرد آنهاست. در این فصل توجه خود را به تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌های پیوسته زمان معطوف می‌داریم و در فصل چهارم به بررسی سیستم‌ها و دنباله‌های گسسته زمان می‌پردازیم. در اینجا جهت یادآوری لازم است تعریف انرژی و توان را برای سیگنال های انرژی و توان که در فصل اول ارائه شد را مجددا تکرار کنیم.

انرژی سیگنال $v(t)$ طبق تعریف برابر است با

$$E_v = \lim_{T \to \infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |v(t)|^2 \, dt \qquad (۱-۳)$$

که از تعریف انرژی برای یک مقاومت واحد بدست آمده است. رابطه (۳-۱) را به صورت (۳-۲) نیز می توان نوشت.

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 \, dt \qquad (۲-۳)$$

علامت قدر مطلق برای داشتن انرژی مثبت و حقیقی برای سیگنال‌های مختلط گذاشته شده است. همچنین طبق تعریف توان (قدرت) سیگنال $v(t)$ به صورت زیر است.

$$P_v = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2\, dt \qquad (۳-۳)$$

۳-۱ تقسیم‌بندی سیگنال‌ها از نظر توان و انرژی

البته تقسیم‌بندی سیگنال‌ها نمی‌تواند یک تقسیم‌بندی منحصر بفرد باشد و با توجه به هر خاصیت از سیگنال می‌توان یک نوع تقسیم‌بندی ارائه کرد. در اینجا منظور ما از تقسیم‌بندی از لحاظ میزان انرژی موجود در سیگنال است. در این صورت سیگنال‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند.

الف- سیگنال انرژی

سیگنال انرژی سیگنالی است که انرژی آن محدود باشد.

ب- سیگنال توان

سیگنال توان سیگنالی است که توان آن محدود باشد.

دیده می‌شود که در سیگنال‌های انرژی E_v محدود و مثبت و توان صفر است، چون توان از تقسیم انرژی به تمام طول زمان بدست می‌آید، و اگر E_v محدود باشد P_v صفر می‌شود. همچنین چون توان در سیگنال‌های توان محدود است E_v بینهایت می‌شود، چون انرژی از حاصلضرب توان در تمام طول زمان بدست می‌آید. البته بعضی از سیگنال‌ها نه سیگنال توان هستند و نه سیگنال انرژی. در جدول (۳-۱) خواص سیگنال‌های انرژی و توان خلاصه شده‌اند.

سیگنال انرژی	$E_v < \infty$	$p_v = 0$
سیگنال توان	$E_v = \infty$	$p_v < \infty$

جدول(۳-۱) خواص سیگنال‌های انرژی و توان

چند نمونه از سیگنال‌های توان و انرژی در جدول (۳-۲) آورده شده‌اند.

انرژی	توان	نوع سیگنال	رابطه سیگنال
$A^2\frac{\tau}{2}$	0	انرژی	$Ae^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$
$A^2\tau$	0	انرژی	$A[u(t)-u(t-\tau)]$
∞	$\frac{A^2}{2}$	توان	$A\cos(\omega t+\theta)$
∞	A^2	توان	A
∞	∞	تعریف نشده (نه توان و نه انرژی)	$Atu(t)$

جدول (۳-۲) چند نمونه از سیگنال‌های توان و انرژی

مثال (۳-۱): انرژی و توان را برای سیگنال‌های جدول (۳-۲) بدست آورید.

حل:

الف)
$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} u(t)dt = -\frac{\tau}{2}A^2 e^{-2\frac{t}{\tau}}\Big|_0^{\infty} = \frac{\tau}{2}A^2,\ \ P_v = \frac{E_v}{T} = 0$$

ب)
$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\left[u(t)-u(t-\tau)\right]dt = A^2\tau \quad , \quad P_v = \frac{E_v}{T} = 0$$

ج)
$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 Cos^2(\omega t+\theta)dt = \infty$$

$$P_v = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 Cos^2(\omega t+\theta)dt = \lim_{T\to\infty}\ \frac{A^2}{T}\quad\frac{T}{2} = \frac{A^2}{2}$$

د)
$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt = \infty \quad ; \qquad P_v = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{A^2T}{T} = A^2$$

هـ)
$$E_v=\int_{-\infty}^{+\infty}A^2t^2u^2(t)dt=\int_0^{\infty}A^2t^2dt=\infty$$
$$P_v=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}A^2t^2u^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2\left(T/2\right)^3}{3T}=\infty$$

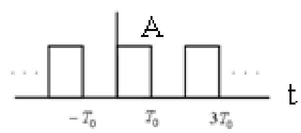
لازم بذکر است تمام سیگنال‌های متناوب جزء سیگنال‌های توان هستند.

همچنین باید توجه کرد که در حالت کلی سیگنال‌های انرژی سیگنال غیر متناوب هستند.

مثلاً سیگنال شکل (۳-۱) متناوب و سیگنال توان است.

$$E_v=\int_{-\infty}^{+\infty}v^2(t)dt\to\infty \quad \text{و} \quad \mathrm{P}_v=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}_0}\int_0^{T_0}v^2(t)dt=\lim_{T_0\to\infty}\frac{A^2T_0}{2T_0}=\frac{A^2}{2}$$

جهت نمایش حوزهٔ فرکانس در مورد سیگنال‌های توان از سری فوریه و برای سیگنال‌های انرژی از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم.



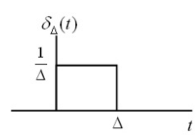
شکل (۳-۱): یک نمونه سیگنال توان

مثال (۳-۲): مطلوبست انرژی سیگنال $\delta(t)$.

حل: برای اینکار ابتدا انرژی سیگنال $\delta_\Delta(t)$ را بدست می‌آوریم و بعد می‌بینیم $\Delta\to 0$ چه اثری روی انرژی خواهد داشت.

$$E_v=\int_{-\infty}^{+\infty}|v(t)|^2dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_0^{\Delta}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2dt\to\infty$$

بنابراین اگر $\Delta\to 0$ می‌بینیم که حد انرژی بسمت ∞ میل می‌کند، لذا این سیگنال نمی‌تواند یک سیگنال انرژی باشد.



شکل (۳-۲): سیگنال $\delta_\Delta(t)$ که در حد وقتی $\Delta\to 0$ بسمت $\delta(t)$ میل می‌کند.

اکنون به محاسبه توان P_v برای سیگنال $\delta(t)$ می‌پردازیم. مجدداً اینکار را برای $\delta_\Delta(t)$ انجام می‌دهیم

$$P_v=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\Delta}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\Delta T}$$

بنابراین می‌بینیم که اگر $\Delta \to 0$، با توجه به اینکه مرتبه میل کردن Δ بسمت صفر و T بسمت بی‌نهایت از یک مرتبه است، حاصلضرب آنها عدد ثابت و محدودی است. پس سیگنال ضربه یک سیگنال توان است.

۳-۲ فضای سیگنال[1]

هر سیگنال عضوی از فضای سیگنال است که در فضای سیگنال بعضی از عملیات را روی سیگنال تعریف می‌نمایند (همانند تعریف فضای سه‌بعدی). شباهت‌های زیادی میان سیگنال در فضای سیگنال و بردار در فضای سه بعدی وجود دارد. در حقیقت هر سیگنال برداری است در فضای سیگنال. در این قسمت به برخی عملیات‌های مهم که در فضای سیگنال تعریف شده‌اند می‌پردازیم.

۳-۲-۱ ضرب داخلی[2] دو سیگنال

اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو سیگنال انرژی (غیر متناوب) باشند ضرب داخلی دو سیگنال طبق تعریف برابر است با

$$< v(t), w(t) > \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) w^*(t) dt \qquad (۴-۳)$$

اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو سیگنال توان (متناوب) با دوره تناوب مشترک T_0 باشند در آنصورت ضرب داخلی بدینصورت تعریف می‌شود.

$$< v(t), w(t) > \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{\mathrm{T}_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) w^*(t) dt \qquad (۵-۳)$$

برای سیگنال‌های متعامد حاصلضرب داخلی مساوی صفر است. بنابراین $v(t)$ و $w(t)$ متعامد هستند اگر

$$< v(t), w(t) >= 0 \qquad (۶-۳)$$

دقیقاً مانند تعریف بردارهای متعامد در فضای بردارها (فضای سه بعدی)، سیگنالهائی مانند $v(t)=\cos\omega t$ و $w(t)=\sin\omega t$ بر هم عمودند و حاصلضرب داخلی آنها صفر است. ضرب داخلی معیاری است از میزان شباهت دو سیگنال به هم. هر چه دو سیگنال به هم شبیه‌تر باشند ضرب داخلی آنها بیشتر می‌شود. در حالتی که $w(t)=v(t)$ باشد در آنصورت حاصلضرب داخلی بیانگر انرژی سیگنال است. برعکس اگر ضرب داخلی دو سیگنال صفر باشد آن دو سیگنال حداقل شباهت را بهم دارند، در اینصورت سیگنال‌ها را متعامد[3] نامند. بنابراین شباهت v به w_1 بیشتر است از شباهت v به w_2 است اگر

[1] Signal Space
[2] Inner Product
[3] Orthogonal

$$(< v(t), w_1(t) >)\rangle(< v(t), w_2(t) >)$$

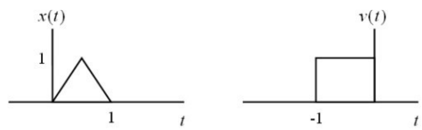
به شرط اینکه انرژی $w_1(t)$ و $w_2(t)$ مساوی باشند.

مثال (۳-۳): مطلوبست حاصلضرب داخلی سیگنال‌های شکل (۳-۳).

حل: چون روی هم افتادگی از لحاظ زمان میان دو سیگنال وجود ندارد پس

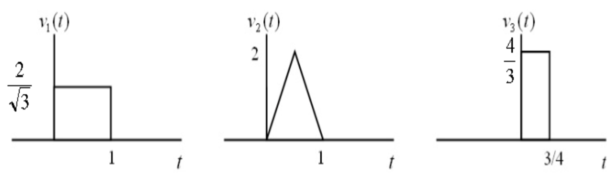
$$< x(t) \ , \ v(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ v(t) = 0$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که کلیه سیگنال‌هایی که از لحاظ زمانی روی هم افتادگی ندارند بر هم عمودند.



شکل(۳-۳): سیگنال‌های مثال (۳-۳)

مثال (۳-۴): شباهت سیگنال $x(t)$ مثال (۳-۳) به کدامیک از سیگنال‌های $v_1(t)$، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ بیشتر است؟



شکل (۳-۴): سیگنال‌های $v_1(t)$، $v_2(t)$ و $v_3(t)$ مربوط به مثال (۳-۴)

حل: برای بررسی شباهت، ابتدا توجه می‌کنیم که انرژی کلیه سیگنال‌های داده شده $v_1(t)$ و $v_2(t)$ و $v_3(t)$ یکسان است. اکنون به محاسبه حاصلضرب داخلی سیگنال $x(t)$ با هر یک از سیگنال‌ها می‌پردازیم.

$$< x(t), v_1(t) >= \int x(t) v_1(t) dt = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$< x(t), v_2(t) >= \int_0^1 x(t) v_2(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (2t)(4t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 8(1-t)(1-t) dt = \frac{2}{3}$$

$$< x(t), v_3(t) >= \int_0^1 x(t) v_3(t) dt = \int_0^{0.5} (2t)\frac{4}{3} dt + \int_{0.5}^{0.75} 2(1-t)\frac{4}{3} = \frac{7}{12}$$

مشاهده می‌شودکه حاصلضرب داخلی $x(t)$ با $v_2(t)$ از بقیه حاصلضرب‌های داخلی بیشتر است پس شباهت $x(t)$ با $v_2(t)$ بیشتر است.

تمرین(۳-۱): نشان دهید که اگر $<x_1(t),x_2(t)>=0$ باشد در آنصورت توان (انرژی) سیگنال زیر مساوی مجموع توان‌های (انرژی‌های) هر یک از سیگنال‌ها است.

$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

۳-۲-۲ اندازه سیگنال (مشابه اندازه بردار)

تعریف اندازه سیگنال در فضای سیگنال مشابه تعریف اندازهٔ بردار در فضای سه‌بعدی می‌باشد.
در حقیقت جذر انرژی سیگنال برای سیگنال‌های انرژی و جذر توان سیگنال برای سیگنال‌های توان را اندازهٔ سیگنال می‌نامند.

$$\|v(t)\|=\sqrt{<v(t),v(t)>} \qquad (۳-۸)$$

به خاطر آورید که اندازهٔ بردار $\vec{V}$ در فضای سه بعدی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\vec{V}.\vec{V}}$$

مثال (۳-۵): اندازهٔ سیگنال $v_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ و $v_2(t)=A\cos\omega_0 t$ را بیابید.

حل: در مورد سیگنال $v_1(t)$ چون یک سیگنال انرژی است داریم.

$$\|v_1(t)\|=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}v_1{}^2(t)dt}=\sqrt{\int_0^{\infty}e^{-2\alpha t}dt}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

و در مورد سیگنال $v_2(t)$ چون یک سیگنال توان است داریم.

$$\|v_2(t)\|=\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0/2}A^2\cos^2\omega_0 t dt}=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

مثال (۳-۶): اندازهٔ سیگنال $x(t)=Ae^{j\omega_0 t}$ را بیابید.

حل: این سیگنال یک سیگنال توان و مختلط است. پس

$$\|x(t)\|=\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)x^*(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}A^2dt}=A$$

تمرین (۳-۲): فرض کنید $x_1(t)$ و $x_2(t)$ متعامد باشند، در آنصورت اندازهٔ سیگنال مجموع را برحسب اندازه هر یک از سیگنال‌ها بدست آورید.

مثال (۳-۷): نشان دهید سیگنال‌های $\cos\omega_0 t$ و $\sin\omega_0 t$ در فاصلهٔ $(0,T_0)$ بر هم عمود هستند. $\left(T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

حل:

$$<\sin\omega_0 t,\cos\omega_0 t>=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t dt=0$$

۳-۲-۳ سیگنال یکه[4] (مشابه بردار یکه)

تعریف سیگنال یکه در فضای سیگنال مشابه تعریف بردار یکه در فضای بردارها است. اگر اندازهٔ سیگنال $v(t)$ مساوی واحد باشد در آنصورت $v(t)$ یک سیگنال یکه است. پس سیگنال $v(t)$ یک سیگنال یکه است اگر

$$\|v(t)\| = 1 \tag{۱۰-۳}$$

۴-۲-۳ سیگنال‌های متعامد یکه[5] (مختصات متعامد یکه)

تعریف سیگنال‌های متعامد یکه در فضای سیگنال‌ها دقیقاً مشابه تعریف بردارهای متعامد یکه در فضای برداریست.

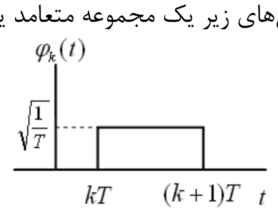
مجموعهٔ سیگنال‌های $\Phi_1(t)$، $\Phi_2(t)$ و .... را مجموعهٔ سیگنال‌های متعامد یکه گویند اگر همهٔ آنها دوبه دو متعامد باشند $(j \neq i, <\Phi_i, \Phi_j> = 0)$ و اندازهٔ همهٔ آنها مساوی واحد باشند.

$$<\Phi_i(t), \Phi_j(t)> = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{۱۱-۳}$$

دقیقاً مشابه آنچه که در مورد تجزیه هر بردار، به بردارهای یکه متعامد می‌دانیم هر سیگنال را می‌توان به سیگنال‌های متعامد یکه تجزیه کرد. بدین ترتیب هر عملیات مطلوب را می‌توان روی سیگنال‌های متعامد یکه انجام داد. البته چون عملیات روی سیگنال‌های متعامد یکه ساده‌تر بوده و سریعتر به جواب می‌رسد تجزیه سیگنال به سیگنال‌های متعامد یکه بسیار رایج است.

در مورد فضای سیگنال‌ها باید توجه داشت که مجموعهٔ سیگنال‌های متعامد یکه، که سایر سیگنال‌ها بر حسب آنها قابل تجزیه می‌باشند، یکتا نیستند و ممکن است یک سیگنال به چندین شکل قابل بسط باشد. بنابراین مساله مهمی که باید در انتخاب مجموعهٔ سیگنال‌های متعامد یکه در نظر گرفت، سهولت انجام عملیات مختلف ریاضی روی این مجموعه بوده و در ضمن ضرایب بسط نیز باید بسادگی بدست آیند. عدم وجود هر یک از شرایط فوق باعث سخت‌تر شدن مساله می‌شود. بنابراین از توضیح فوق مشخص می‌شود که انتخاب مجموعه سیگنال‌های متعامد یکه بستگی به نوع مساله دارد.

مثال (۳-۸): نشان دهید که سیگنال‌های زیر یک مجموعه متعامد یکه هستند.



شکل (۳-۵) مجموعه سیگنال‌های متعامد یکه

حل: رابطه ریاضی این مجموعه بصورت زیر است.

[4] Normal Signal
[5] Orthonormal Signals Set

$$\Phi_k(t)=\sqrt{\frac{1}{T}}[u(t-kt)-u(t-(k+1)T)]$$

ابتدا تحقیق می‌کنیم این مجموعه سیگنال‌ها یکه هستند یعنی اندازۀ آنها مساوی واحد است.

$$\|\Phi_k(t)\|=\sqrt{<\Phi_k(t),\Phi_k(t)>}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{kT}^{(k+1)T}dt}=1$$

از لحاظ تعامد مساله واضح است چون از لحاظ زمانی سیگنال‌های $\Phi_k(t)$ روی‌هم‌افتادگی ندارند. بنابراین

$$<\Phi_k(t),\Phi_j(t)>=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

در مورد سیستم‌های خطی دیدیم که اگر بتوان ورودی را بصورت مجموع زیربسط داد.

$$x(t)=\sum_k a_k\Phi_k(t)$$

در آنصورت پاسخ سیستم به این ورودی برابر است با

$$y(t)=\sum_k a_k \mathrm{T}[\Phi_k(t)]$$

که در آن $T[\Phi_k(t)]$ پاسخ سیستم به ورودی $\Phi_k(t)$ است. در فصل دوم دیدیم که با بسط سیگنال بر حسب توابع ضربه بصورت $\delta(t-\tau)$ می‌توان تا حد زیادی تحلیل عملکرد سیستم‌ها را ساده کرد. و دیدیم که چگونه فقط با داشتن پاسخ به ضربه انتقال یافته $h_\tau(t)$ می‌توان پاسخ سیستم به هر ورودی دیگر را یافت. در این قسمت می‌خواهیم توابع جدیدی را بعنوان توابع پایه انتخاب کنیم. در نحوۀ این انتخاب دقت می‌کنیم که مشابه پاسخ ضربه باید یافتن پاسخ به این توابع پایه ساده باشد و در ضمن یافتن ضرایب بسط بسادگی امکان‌پذیر باشد. این توابع پایه جدید توابع نمائی مختلط هستند.

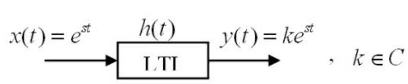
اگر $x(t)$ متناوب باشد مجموعه سیگنال‌های متعامد یکه مناسب بصورت زیر می‌باشند.

$$\Phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{۱۲-۳}$$

که هر کدام متناوب با دوره تناوب $\left|\frac{2\pi}{k\omega_0}\right|$ می‌باشند. این مجموعه توابع متعامد یکه هستند. چون

$$<\Phi_l(t),\Phi_m(t)>=<e^{jl\omega_0 t},e^{jm\omega_0 t}>=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}e^{jl\omega_0 t}e^{-jm\omega_0 t}dt=\begin{cases}1 & l=m\\ 0 & l\neq m\end{cases} \tag{۱۳-۳}$$

مزیت سیگنال‌هایی که بصورت $e^{jk\omega_0 t}$ هستند، بخاطر شکل پاسخ سیستمLTI به آنها است. اگر به سیستم LTI یک ورودی نمایی بصورت e^{st} (که s عددی است مختلط) بدهیم در آنصورت پاسخ نیز به همان شکل، منتها با دامنه و زاویه‌ای متفاوت است. بعبارت دیگر توابع e^{st} توابع ویژه سیستم‌های LTI پیوسته زمان هستند.



شکل (۳-۶): نمایی‌های مختلط توابع ویژه سیستم‌های LTI پیوسته زمان هستند

اثبات این مطلب با استفاده از انتگرال کانولوشن بسادگی امکان‌پذیر است.

$$y(t)=e^{st}*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau=e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}h(\tau)d\tau \quad (۱۴-۳)$$

از اینجا مشخص می‌شود که ضریب ثابت مورد بحث بصورت زیر است.

$$k=H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (۱۵-۳)$$

حال اگر بتوانیم ورودی را بصورت مجموعه‌ای از سیگنال‌هایی بصورت e^{st} بنویسیم. یعنی

$$x(t)=a_1e^{s_1t}+a_2e^{s_2t}+\ldots \quad (۱۶-۳)$$

در آن صورت پاسخ بسادگی بصورت زیر است.

$$y(t)=a_1H(s_1)e^{s_1t}+a_2H(s_2)e^{s_2t}+\ldots \quad (۱۷-۳)$$

به خاطر همین خاصیت سیگنال e^{st} است که باعث شده سعی کنیم ورودی را بر حسب سیگنال‌هایی بصورت $e^{jk\omega_0t}$ بسط دهیم. به سیگنال e^{st} تابع ویژه [۶] سیستم LTI پیوسته زمان گویند.

چون پاسخ به همان صورت ورودی منتها با دامنه و زاویه متفاوت است. دامنه و زاویه ایجاد شده فقط بستگی به سیستم دارد (به رابطه (۳-۱۵) توجه کنید). توجه کنید که سیگنال‌هایی بصورت $e^{st}u(t)$ توابع ویژه سیستم‌های LTI پیوسته زمان نیستند.

مثال (۳-۹): نشان دهید سیگنال‌هایی بصورت $e^{st}u(t)$ توابع ویژه برای سیستم‌های LTI نیستند.

حل: فرض می‌کنیم ورودی یک سیستم LTIپیوسته زمان بصورت $e^{st}u(t)$ باشد از انتگرال کانولوشن برای محاسبه خروجی استفاده می‌کنیم.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{s(t-\tau)}u(t-\tau)h(\tau)d\tau=e^{st}\int_{-\infty}^{t}e^{-s\tau}h(\tau)d\tau$$

دیده می‌شود که انتگرال خود تابعی از t است. بنابراین شکل تابعیت خروجی از t فقط بصورت e^{st} نیست. بعنوان مثال اگر پاسخ ضربه سیستم بصورت زیر باشد.

$$h(t)=e^{-t}u(t)$$

داریم.

$$\begin{aligned}y(t)&=e^{st}\left(\int_0^t e^{-(s+1)\tau}d\tau\right)u(t)\\&=e^{st}\frac{1}{s+1}[1-e^{-(s+1)t}]u(t)\end{aligned}$$

مثال (۳-۱۰): کدامیک از سیگنال‌های زیر توابع ویژه سیستم‌های LTIپیوسته زمان هستند.

الف) $x(t)=e^{-t}+e^{-2t}$

ب) $g(t)=e^{t}$

---

[6] Eigen Function

ج) $w(t)=e^{-st}+e^{-t}u(t)$

حل: الف) سیگنال $x(t)$ یک تابع ویژه برای سیستم‌های LTI پیوسته زمان نیست.

چون

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-(t-\tau)}+e^{-2(t-\tau)}]h(\tau)d\tau$$

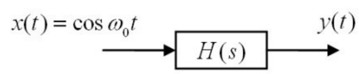
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t-\tau)}h(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2(t-\tau)}h(\tau)d\tau=e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\tau}h(\tau)d\tau+e^{-2t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\tau}h(\tau)d\tau$$

بنابراین خروجی بصورت $y(t)=H(s)x(t)$ نیست.

ب) $g(t)$ یک تابع ویژه است چون بصورت e^{st} است.

ج) $w(t)$ یک تابع ویژه نیست.

مثال (۳-۱۱): برای سیستم زیر $y(t)$ را بیابید. فرض کنید $H(s)=\dfrac{1}{s+1}$ باشد.



شکل (۳-۷): یک سیستم LTI

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

با توجه به (۳-۱۷) داریم

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}=\frac{1}{2}(\frac{e^{j\omega_0 t}}{j\omega_0+1}+\frac{e^{-j\omega_0 t}}{-j\omega_0+1})$$

$$y(t)=\frac{1}{2}[\frac{(1-j\omega_0)e^{j\omega_0 t}}{1+\omega_0^2}+\frac{(1+j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}}{1+\omega_0^2}]$$

$$=\frac{1}{2(1+\omega_0^2)}[(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})+j\omega_0(e^{-j\omega_0 t}-e^{j\omega_0 t})]$$

$$\rightarrow y(t)=\frac{1}{2(1+\omega_0^2)}[2\cos\omega_0 t+j\omega_0(-j2\sin\omega_0 t)]$$

$$=\frac{1}{1+\omega_0^2}[\cos\omega_0 t+\omega_0\sin\omega_0 t]$$

۳-۳ سری فوریه

اکنون آماده هستیم که سیگنال دلخواه متناوب $x(t)$ را بصورت مجموعه‌ای از سیگنال‌های متعامد یکه $\Phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}$ بنویسیم. رمز موفقیت در محاسبه ضرایب بسط است. روابط تبدیل فوریه و ضرایب سری فوریه بصورت زیر هستند.

(۳-۱۸) (رابطه تبدیل فوریه)
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_\circ t}$$

(۳-۱۹) (رابطه ضرایب تبدیل)
$$a_k=\frac{1}{T_\circ}\int_{T_\circ} x(t)\, e^{-jk\omega_\circ t}dt$$

که a_k مؤلفه $x(t)$ روی $e^{jk\omega_0 t}$ یا ضریب kام تبدیل فوریه نامیده می‌شود. طریقه بدست آوردن ضرایب a_k از روی $x(t)$ به کمک خاصیت تعامد سیگنال‌هایی بصورت $e^{jm\omega_0 t}$ و $e^{jk\omega_0 t}$ می‌باشد.

برای اثبات رابطه (۳-۱۹) ابتدا توجه می کنیم که توابعی بصورت $e^{jk\omega_0 t}$ و $e^{jm\omega_0 t}$ به ازاء $m\neq k$ متعامد هستند.

اکنون طرفین رابطه (۳-۱۸) را در $e^{-jm\omega_0 t}$ ضرب کرده و روی یک دوره تناوب انتگرال می‌گیریم

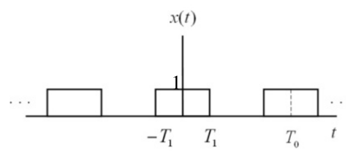
(۳-۲۰)
$$\int_{T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt=\sum_k a_k\int_{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt$$

مشاهده می‌کنیم که طرف دوم برابر $a_m T_0$ است چون به ازاء سایر kها حاصل انتگرال صفر است. پس

(۳-۲۱)
$$\int_{T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt=a_m T_0$$

و این همان رابطه (۳-۱۹) می‌باشد.

مثال (۳-۱۲): ضرایب a_k را برای سیگنال $x(t)$ شکل (۳-۸) بیابید.



شکل (۳-۸): سیگنال مثال (۳-۱۲)

حل:

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}1\times e^{-jk\omega_0 t}dt=-\frac{1}{jk\omega_0 T_0}[e^{-jk\omega_0 T_1}-e^{jk\omega_0 T_1}]=\frac{-j2\sin(k\omega_0 T_1)}{-jk\omega_0\dfrac{2\pi}{\omega_0}}$$

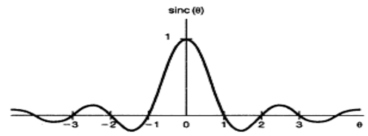
بنابراین

$$a_k=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

تابع سینک بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$Sin\,c(\theta)\underline{\underline{\Delta}}\frac{Sin\pi\theta}{\pi\theta}$$

شکل این تابع به صورت زیر است.



شکل (۳-۹): رسم تابع سینک

به ازاء مقادیر صحیح x تابع $Sinc(x)$ مساوی صفر است.

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\sin k\pi \frac{2T_1}{T_0}}{k\pi} = \frac{2T_1}{T_0} Sinc(\frac{k2T_1}{T_0}) = \frac{2T_1}{T_0} Sinc(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi})$$

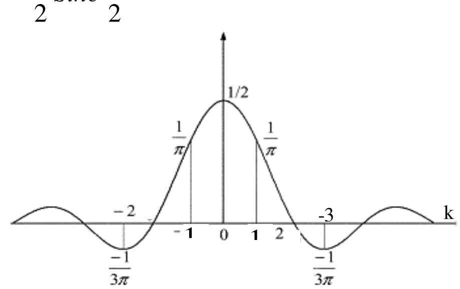
رسم a_k:

هر چه نسبت $\frac{T_0}{T_1}$ بزرگتر باشد تغییرات از یک مؤلفه به مؤلفه بعدی کمتر خواهد بود لذا می‌توان گفت که، دامنه بازاء $k\omega_0$ از روی پوش منحنی بدست خواهد آمد.

رابطه $\frac{T_1}{T_0} \to 0$ دو معنی می‌دهد یکی T_0 ثابت و$T_1 \to 0$ که در آنصورت یک ردیف پالسهای سوزنی خواهیم داشت و دیگر اینکه T_1 ثابت و $T_0 \to \infty$ که در آنصورت یک پالس منفرد خواهیم داشت که از لحاظ طیف فرکانس هر دو دارای شکل $Sinc$ هستند، که قبلاً رسم شده است. اگر T_0 ثابت باشد چون طیف فقط در نقاط $k\omega_0$ دارای مقدار است تغییر دامنه‌ها ملایم تر می شود ولی به هم نزدیکتر نمی‌شوند. ولی اگر $T_0 \to \infty$ بعبارتی$\omega_0 \to 0$ در آنصورت $k\omega_0$ مقادیر نزدیک به هم اتخاذ خواهد کرد و طیف پیوسته خواهد شد. به عنوان مثال دو حالت ساده را در نظر می گیریم.

الف) I) اگر

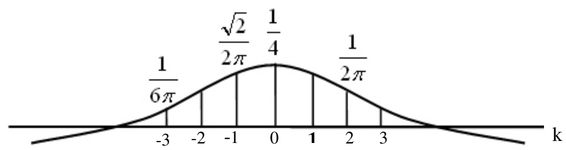
$$T_1 = \frac{T_0}{4} \to a_k = \frac{1}{2} Sinc\frac{k}{2}$$



شکل (۳-۱۰): رسم دامنه a_k برحسب $k\omega_0$

ب) II) اگر

$$T_1 = \frac{T_0}{8} \to a_k = \frac{1}{4} Sinc\frac{k}{4}$$



شکل (۳-۱۱): رسم دامنه a_k به ازا مقادیر مختلف $\frac{T_0}{T_1}$

می‌بینیم هرچه $T_1 \to 0$ میل داده شود در حالی که T_0 ثابت است طیف به سمت پیوسته شدن میل نمی‌کند ولی تغییراتش ملایم‌تر می‌شود.

مثال (۳-۱۳): $x(t)$ را به صورت سری فوریه بسط دهید.

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} Cos\, 2\pi\, t + Cos\, 4\pi\, t + \frac{2}{3} Cos\, 6\pi\, t$$

حل: با استفاده از رابطه اولر داریم

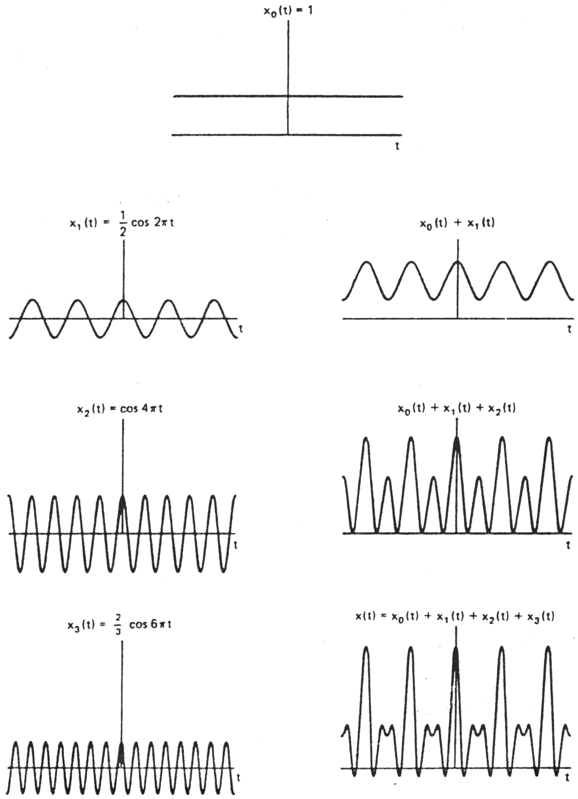
$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right) + \frac{1}{3}\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right)$$

بنابراین ضرایب سری فوریه بصورت زیر بدست می‌آیند

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \quad , \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \quad , \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

مراحل تشکیل $x(t)$ از روی سیگنال‌های متعامد یکه در شکل (۳-۱۲) نمایش داده شده است.

بسادگی می‌توان نمایش دیگری برحسب توابع سینوسی و کسینوسی برای $x(t)$ یافت جهت یافتن این



شکل (۳-۱۲): مراحل ساخت $x(t)$ مثال (۳-۱۳) بصورت یک ترکیب خطی از سیگنال‌های متعامد یکه

نمایش لازم است توجه کنید که اگر $x(t)$ حقیقی باشد در آن صورت $a_k = a_{-k}^*$.

تمرین (۳-۳): ثابت کنید اگر $x(t)$ حقیقی باشد در آن صورت $a_k = a_{-k}^*$.

در صورتی که $a_k = a_{-k}^*$ باشد، داریم

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$$
(۲۲-۳)
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\ [a_k e^{jk\omega_0 t}]$$

که در آن $\mathrm{Re}[.]$ به معنای قسمت حقیقی سیگنال است. اگر فرض کنیم $a_k = A_k e^{j\theta_k}$ باشد در آن صورت داریم (θ_k , A_k حقیقی هستند):

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k Cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$ (۲۳-۳)

معادله (۳-۲۳) یک روش برای نمایش $x(t)$ می‌باشد. یا می‌توان روش نمایش دیگری را نیز بدست آورد. این کار به کمک نوشتن a_k بصورت رابطه (۳-۲۴) ممکن است.

$$a_k = b_k + jc_k \tag{۳-۲۴}$$

در آن صورت داریم.

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[b_k \cos k\omega_0 t - c_k \sin k\omega_0 t] \tag{۳-۲۵}$$

تمرین (۳-۴): رابطه (۳-۲۵) را بدست آورید.

۳-۳-۱ تقریب سیگنال از روی سری فوریه

از لحاظ ریاضی رابطه بسط سری فوریه یک رابطه تحقیقی است، اما اگر حدود مجموع آن را محدود کنیم در آن صورت یک تقریب از $x(t)$ بدست می‌آید.

اگر $2N+1$ جمله از سری فوریه را در نظر بگیریم در این صورت یک سیگنال جدید خواهیم داشت. که با سیگنال اصلی $x(t)$ متفاوت است.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{۳-۲۶}$$

در اینصورت مقدار خطای لحظه‌ای از رابطه (۳-۲۷) محاسبه می‌گردد.

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{۳-۲۷}$$

از یک دیدگاه مقدار عددی خطا زیاد برایمان مهم نیست بلکه انرژی موجود در آن برایمان مهم است. انرژی خطا بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon(t)|^2 dt \tag{۳-۲۸}$$

هرچه انرژی خطا کوچکتر باشد $\hat{x}(t)$ شباهت بیشتری به $x(t)$ دارد. البته این نوع شباهت تضمینی در مورد شباهت مقادیر لحظه‌ای دو سیگنال ایجاد نمی‌کند. در حقیقت ممکن است در لحظات منفصل و محدود، مقدار تفاضل دو سیگنال بزرگ شود اما سطح زیر منحنی مربع تفاضل مقداری محدود باشد و انتظار داریم هرچه N بزرگتر شود این مقدار نیز نسبت صفر میل نماید.

۳-۳-۲ شرایط وجود سری فوریه

این شرایط بصورت زیر خلاصه می‌گردند از اثبات در کلیه مراحل صرف نظر شده است

۱-انرژی سیگنال در یک دوره تناوب محدود باشد. (شرط کافی) $\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$

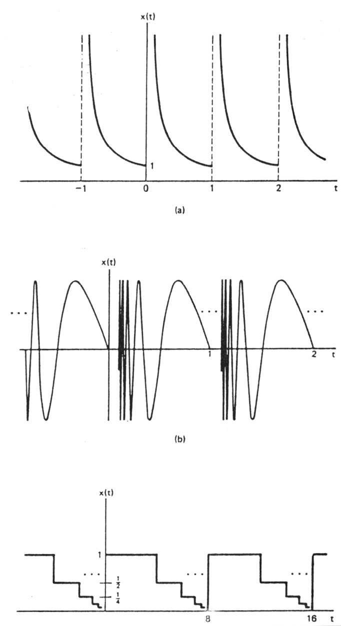
۲-شرایط دیریکله با هم برقرار باشند.

الف) $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$

ب) تعداد ماکزیمم‌ها و مینیمم‌ها در یک دوره تناوب محدود باشد.

ج) تعداد ناپیوستگی‌ها در یک دوره تناوب محدود باشد.

درحالت کلی شرایط فوق فقط شرط کافی می‌باشند، امّا برای سیگنال‌های خوشرفتار شرایط فوق بصورت شرط لازم و کافی خواهند شد. سیگنال‌های خوشرفتار سیگنال‌هایی هستند که بصورت فیزیکی قابل ساخت هستند.



شکل (۳-۱۳): نمونه سیگنال‌هایی که بترتیب شرطهای الف، ب و ج از شرایط دیریکله را نقض می‌کنند.

۳-۴ تبدیل فوریه[7]

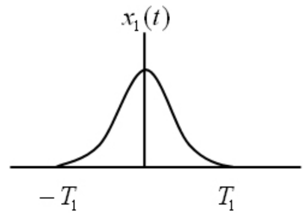
۳-۴-۱ تبدیل فوریه بعنوان تعمیمی از سری فوریه

دراین قسمت تعریف تبدیل فوریه را بعنوان یک تعمیم منطقی از سری فوریه ارائه می‌نمائیم. در ضمن توجه می‌کنیم که تبدیل فوریه بعنوان یک رابطه ریاضی و بطور مستقل از سری فوریه قابل تعریف است. تعریف تبدیل فوریه بعنوان تعمیمی از سری فوریه ما را یاری می‌نماید تا از رابطه ضرایب سری فوریه، که در جای خود ثابت شد، برای یافتن رابطه معکوس تبدیل فوریه استفاده کنیم.

ابتدا سیگنال $x_1(t)$ که از لحاظ زمانی محدود است را در نظر می‌گیریم.

---

[7] Fourier Transform

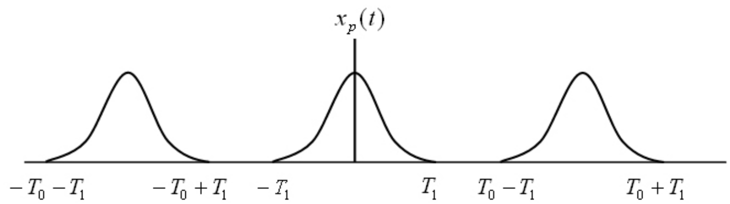


شکل (۳-۱۴): یک سیگنال دوره محدود دلخواه.

رابطه ریاضی این سیگنال کاملاً دلخواه و بصورت زیر فرض می‌شود.

$$x_1(t)=\begin{cases} x(t) & |t|<T_1 \\ 0 & |t|>T_1 \end{cases} \tag{۲۹-۳}$$

اکنون با استفاده از سیگنال فوق، سیگنال متناوب $x_p(t)$ را بگونه‌ای می‌سازیم که در هر دوره تناوب سیگنال $x_p(t)$ برابر $x_1(t)$ باشد.



شکل (۳-۱۵): سیگنال متناوب $x_p(t)$ که در یک دوره تناوب مساوی $x_1(t)$ است.

اکنون سری فوریه را برای سیگنال $x_p(t)$ می‌نویسیم.

$$x_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \ e^{jk\omega_0 t} \tag{۳۰-۳}$$

که در آن

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x_p(t)\ e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t)\ e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{۳۱-۳}$$

چون در فاصله $(-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2})$ مساوی $x(t)$ است پس قرار می‌دهیم

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\ e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{۳۲-۳}$$

حال برای اینکه سعی کنیم $x(t)$ رابدست آوریم، دوره تناوب T_0 مربوط به $x(t)$ را بسمت بینهایت میل می‌دهیم. در نتیجه

$$T_0\to\infty\Rightarrow x_p(t)=x(t)$$

اگر $T_0 \to \infty$ خود a_k بسمت صفر میل می‌کند ولی حاصلضرب $T_0 a_k$ عددی محدود می‌شود. لذا $T_0 a_k$ را بدست می‌آوریم

$$T_0 a_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\ e^{-jk\omega_0 t} dt \Rightarrow \lim_{T_0\to\infty} T_0 a_k = \lim_{T_0\to\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\ e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad (۳-۳۳)$$

اگر $T_0 \to \infty$ در آنصورت $\omega_0 \to 0$ یعنی $k\omega_0$ مقادیر بسیار نزدیک به هم یا پیوسته را اختیار می‌کند. پس اجازه دهید بجای $k\omega_0$ از مقدار پیوسته ω استفاده کنیم و نام حد $T_0 a_k$ را $X(\omega)$ گذارده و به آن تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ بگوئیم. بنابراین تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ برابر است با

$$X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad (۳-۳۴)$$

۳-۴-۲ تبدیل معکوس فوریه

همانگونه که گفتیم تعریف تبدیل فوریه بعنوان یک تعمیم از سری فوریه به ما این امکان را می‌دهد که با استفاده از رابطه ضرایب سری فوریه، رابطه تبدیل معکوس فوریه را بدست آوریم. در اینجا لازم بذکر است که رابطهٔ تبدیل معکوس فوریه مستقیماً و با استفاده از تعریف تبدیل فوریه قابل استخراج است.

با توجه به رابطه سری فوریه می‌توان نوشت.

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ T_0\ e^{-jk\omega_0 t} \qquad (۳-۳۵)$$

در حد وقتی که $T_0 \to \infty$ داریم

$$\lim_{T_0\to\infty} x_p(t) = x(t)$$

و از طرفی با توجه به معلومات مقدماتی در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که وقتی $T_0 \to \infty$، حد مجموع بسمت انتگرال میل می‌کند و با توجه به اینکه می‌دانیم

$$X(\omega) = \lim_{T_0\to\infty} a_k T_0$$

و همچنین

$$\frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

پس نتیجه می‌گیریم که (در حد ω_0 بسمت $d\omega$ میل می‌کند)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\ e^{jk\omega_0 t} d\omega = F^{-1}[X(\omega)] \qquad (۳-۳۶)$$

از این به بعد رابطه تبدیل معکوس فوریه را بصورت $F^{-1}[.]$ نمایش می‌دهیم.

۳-۵ محاسبه ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب از روی تبدیل فوریه سیگنال غیر متناوب

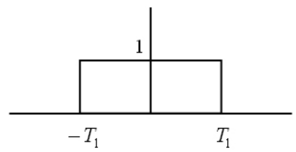
در این قسمت نشان می‌دهیم که اگر تبدیل فوریه یک سیگنال غیر متناوب دلخواه مانند $x(t)$ را داشته باشیم در اینصورت می‌توان ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب متناظر $x_p(t)$ که از تکرار

$x(t)$ حاصل می‌شود را بدست آورد فرض کنید که $X(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ است، و همچنین $x_p(t)$ یک سیگنال متناوب است که در هر دورهٔ تناوب مساوی $x_p(t)$ است. اگر ضرایب سری فوریه $x_p(t)$ را a_k بنامیم، بسادگی می‌توان ثابت کرد که

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \tag{۳-۳۷}$$

تمرین (۳-۵): رابطه (۳-۳۷) را ثابت کنید.

مثال (۳-۱۴): تبدیل فوریه سیگنال شکل (۳-۱۶) را بدست آورید.



شکل (۳-۱۶)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1})$$

$$\frac{j2\sin \omega T_1}{j\omega} = \frac{2\sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1} = 2T_1 \frac{\sin \pi(\frac{\omega T_1}{\pi})}{\pi(\frac{\omega T_1}{\pi})}$$

با توجه به تعریف تابع سینک که بصورت زیر است.

$$Sinc(x) = \frac{Sin\ \pi\ x}{\pi\ x} \tag{۳-۳۸}$$

می‌توان رابطه $X(\omega)$ را بصورت زیر نوشت.

$$X(\omega) = 2T_1 Sinc(\frac{\omega T_1}{\pi})$$

قبلاً برای سیگنال متناوب پالس مستطیلی بعرض $2T_1$ ضرایب a_k را بصورت زیر داشتیم.

$$a_k = \frac{2T_1}{T_0} Sinc\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) \tag{۳-۳۹}$$

بنابراین از روی $X(\omega)$ نیز می‌توانیم همین نتیجه را بدست آوریم

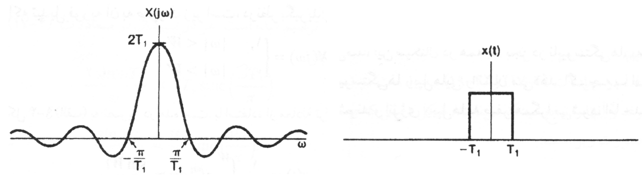
$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) = \frac{2T_1}{T_0} Sinc(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi})$$

بدلیل اهمیت پالس مستطیلی بهتر است تبدیل آن را به خاطر بسپاریم.

بطور کلی تبدیل فوریه یک پالس متقارن با عرض $2T_1$ و ارتفاع A بصورت زیر است.

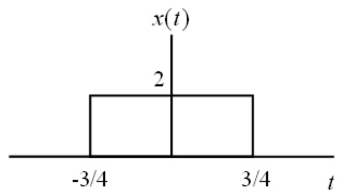
$$X(\omega) = (\text{سطح زیر پالس}) \times Sinc[\frac{\omega}{\pi} \times \text{نصف عرض پالس}]$$

$$X(\omega) = 2AT_1 Sinc\,(\frac{\omega}{\pi}T_1) \tag{۴۰-۳}$$



شکل (۳-۱۷): نمایش سیگنال $x(t)$ در حوزۀ زمان و رسم طیف آن در حوزۀ فرکانس

به عنوان مثال برای شکل (۳-۱۸) رابطه تبدیل فوریه به صورت زیر است.



شکل (۳-۱۸)

$$X(\omega) = 2 \times 2 \times \frac{3}{4} Sinc\,(\frac{\omega}{\pi} \times \frac{3}{4)}) = 3Sinc\,\frac{3\omega}{4\pi}$$

مثال (۳-۱۵): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = e^{-at}u(t) \tag{۴۱-۳}$$

اگر $a<0$ باشد $x(t)$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر نیست و بنابراین $X(\omega)$ وجود ندارد. ولی اگر $a>0$ باشد $X(\omega)$ بصورت زیر بدست می‌آید.

$$X(\omega) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{-1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^\infty$$

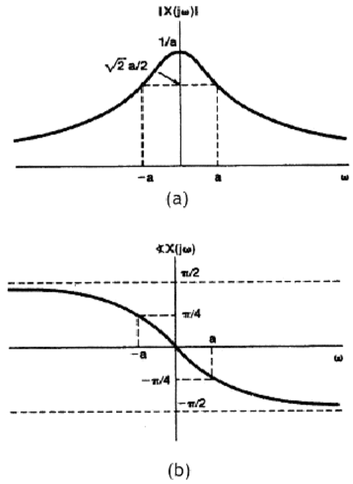
بنابراین

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \quad , \quad a>0 \tag{۴۲-۳}$$

دامنه و زاویه فاز $X(\omega)$ نیز بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \quad , \quad \angle X(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{a} \tag{۴۳-۳}$$

که در شکل (۳-۱۹) ترسیم شده‌اند.



شکل (۳-۱۹): تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=e^{-at}u(t)$ و $a>0$ که در مثال (۳-۸) مورد بحث است.

از این شکل‌ها پیداست که دامنه بیشینه برای مؤلفه‌های $X(\omega)$ در فرکانس‌های پایین قرار دارد یا بعبارت دیگر می‌توان گفت این سیگنال پایین‌گذر است.

روش دیگر برای رسم $X(\omega)$ رسم مقادیر حقیقی و موهومی آن بطور جداگانه و یا روی یک فضای سه‌بعدی می‌باشد.

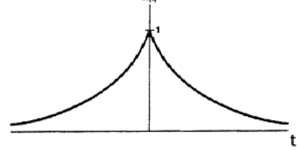
مثال (۳-۱۶): مطلوبست تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=e^{-a|t|}$

تبدیل فوریه $x(t)=e^{-a|t|}$ اگر $a>0$ باشد بصورت زیر است.

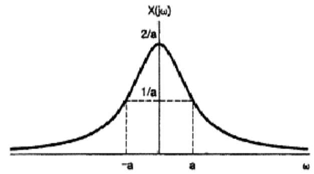
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$\frac{1}{a+j\omega}+\frac{1}{a-j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad (۴۴-۳)$$

شکل‌های (۳-۲۰) و (۳-۲۱) سیگنال $x(t)$ و تبدیل فوریه آنرا نشان می‌دهند. توجه کنید که در این مثال خاص تبدیل فوریه حقیقی است. بنابراین نیازی به رسم طیف فاز نیست.



شکل (۳-۲۰): نمایش سیگنال $x(t)$ مورد بحث در مثال (۳-۹)



شکل (۳-۲۱): تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ مورد بحث در مثال (۳-۹)

مثال (۳-۱۷): ثابت کنید تبدیل فوریه پالس گاوسی $x(t)=e^{-\pi t^2}$ بصورت زیر است.

$$X(\omega)=e^{-\pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2}=e^{\frac{-\omega^2}{4\pi}} \tag{۳-۴۵}$$

حل: برای حل این مساله از روش حل مستقیم انتگرال استفاده می‌کنیم. پس از مطالعه خواص تبدیل فوریه یک روش ساده‌تر برای بدست آوردن تبدیل فوریه پالس گاوسی ارائه خواهیم کرد.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi(t+\frac{j\omega}{2\pi})^2-\frac{\omega^2}{4\pi}}dt=$$

$$e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi(t+\frac{j\omega}{2\pi})^2}dt$$

با انتخاب یک متغیر جدید بنام y و قرار دادن $y=t+\frac{j\omega}{2\pi}$ داریم.

$$X(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi y^2}dy$$

محاسبه انتگرال در سمت راست بصورت زیر امکان‌پذیر است. ابتدا نام این انتگرال را I_y نهاده و یک انتگرال متناظر بصورت I_x تعریف می‌کنیم و حاصلضرب این دو انتگرال را تشکیل می‌دهیم این حاصل‌ضرب بیانگر یک انتگرال دوگانه روی کل صفحه xy است.

$$I_xI_y=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi(x^2+y^2)}dxdy$$

اکنون این انتگرال را در مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم.

$$(y=r\sin\theta \quad , \quad x=r\cos\theta)$$

$$I_xI_y=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{-\pi r^2}rd\theta dr$$

بنابراین

$$I_xI_y=1\Rightarrow I_x=I_y=1$$

پس

$$X(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

همچنین با استفاده از تعریف $X(\omega)$ داریم.

$$X(0)=1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}dt \tag{۳-۴۶}$$

که این انتگرال به روش عادی کمی مشکل‌تر قابل محاسبه است.

تمرین (۳-۶): انتگرال فوق را بروش عادی محاسبه کنید.

مثال (۳-۱۸): اگر تبدیل فوریه سیگنالی بصورت زیر باشد مطلوبست رابطه $x(t)$.

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<W \\ 0 & |\omega|>W\end{cases} \tag{۴۷-۳}$$

حل: با استفاده از رابطهٔ تبدیل معکوس فوریه بسادگی می‌توان $x(t)$ را بدست آورد.

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}\, d\omega=\frac{Sin\ Wt}{\pi t} \tag{۴۸-۳}$$

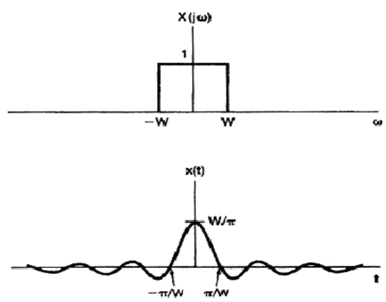
مثال (۱۹-۳): تبدیل فوریه سیگنال ضربه را بدست آورید: $x(t)=\delta(t)$

حل: با قرار دادن $\delta(t)$ در رابطهٔ تبدیل فوریه و با توجه به خواص سیگنال ضربه داریم:

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{j\omega t}dt=1 \tag{۴۹-۳}$$

در واقع این رابطهٔ فوق بیانگر این است که سیگنال ضربه تمام مؤلفه‌های فرکانسی را از $-\infty$ تا $+\infty$ دارا است. بعبارت دیگر شدت تغییرات زمانی سیگنال ضربه بسیار زیاد و در بین سیگنال‌ها بیشترین است.

مثال (۳-۲۰): تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=e^{-t}\cos\omega_0 t u(t)$ را بیابید.



شکل (۳-۲۲): زوج تبدیل فوریه مثال (۳-۱۸)

حل: می‌دانیم که $\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$ بنابراین $x(t)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$x(t)=e^{-t}\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}]u(t)=[\frac{1}{2}e^{(j\omega_0-1)t}+\frac{1}{2}e^{-(j\omega_0+1)t}]u(t)$$

اکنون می‌توان تبدیل فوریه را بسادگی بدست آورد.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{(j\omega_0-1)t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-(j\omega_0+1)t}e^{-j\omega t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega-\omega_0)+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{j(\omega+\omega_0)+1} \quad (۵۰-۳)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{j2\omega+2}{-(\omega^2-\omega_0^2)+1+j2\omega}\right]=\frac{j\omega+1}{1-(\omega^2-\omega_0^2)+j2\omega}$$

مثال (۲۱-۳): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\ \delta\left(t-kT\right) \quad (۵۱-۳)$$

حل: با گرفتن تبدیل فوریه از رابطه (۳-۵۱) داریم.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(t-kT)e^{-j\omega t}dt \quad (۵۲-۳)$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-j\omega t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{-jk\omega T}$$

در طی مراحل یافتن پاسخ برای این مساله توجه کنید که بدلیل خطی بودن عملیات مجموع (Σ) و انتگرال قابل جابجایی هستند.

مثال (۳-۲۲): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t)=[u(t)-u(t-T_0)]A \quad (۵۳-۳)$$

حل: با توجه به تبدیل فوریه تابع پالس که قبلا بدست آوردیم می‌توان نوشت.

$$X(\omega)=\int_{0}^{T_0}Ae^{-j\omega t}dt \quad , \quad X(\omega)=\left(AT_0\ \ Sinc\,\frac{\omega T_0}{2\pi}\right)e^{-j\omega\frac{T_0}{2}} \quad (۵۴-۳)$$

۳-۶ همگرایی تبدیل فوریه

اگر چه رابطه تبدیل فوریه با فرض دوره محدود بودن سیگنال $x(t)$ بدست آمده است ولی همانگونه که دیدیم تبدیل فوریه برای طیف وسیعی از سیگنال‌هائی که دارای دوره نامحدودی هستند نیز وجود دارد. در حقیقت شرایط گفته شده در مورد وجود سری فوریه عیناً در مورد تبدیل فوریه نیز مطرح است بدون اثبات می‌پذیریم که شرایط همگرا شدن تبدیل فوریه بصورت زیر می‌باشند.

۱- $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt<\infty$

۲-سه شرط دیریکله با هم برقرار باشند:

الف: $x(t)$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر باشد. $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$

ب: $x(t)$ دارای تعداد قابل شمارش نقاط بیشینه و کمینه در هر فاصله محدود باشد.

ج: $x(t)$ دارای تعداد قابل شمارشی ناپیوستگی در هر فاصلۀ محدود باشد؛ علاوه بر آن باید این ناپیوستگی‌ها محدود باشند.

اگر چه شرایط فوق شروط کافی جهت وجود تبدیل فوریه به حساب می‌آیند، در قسمت‌های بعدی همین فصل مشاهده خواهیم کرد که سیگنال‌های متناوب که در شرط اول و قسمت (الف) از شرط دوم صدق نمی‌کنند، دارای تبدیل فوریه بصورت توابع ضربه می‌باشند. بدین خاطر می‌توان با وارد نمودن تعریف توابع ضربه در تبدیل فوریه ، سری فوریه و تبدیل فوریه را در یک چهارچوب قرار داد. بعبارت دیگر با تعریف توابع ضربه می‌توان برای سیگنال‌های متناوب نیز تبدیل فوریه تعریف کرد.

۳-۷ خواص تبدیل فوریه

(تمام خواص تبدیل فوریه که در ذیل می‌آید در مورد سری فوریه نیز صادق هستند).

۳-۷-۱ خطی بودن تبدیل فوریه

اگر تبدیل فوریه $x_i(t)$ را $X_i(\omega)$ بنامیم در این صورت داریم.

$$F\left[\sum_i a_i \; x_i(t)\right] = \sum_i a_i \; \mathrm{X}_i(\omega) \tag{۵۵-۳}$$

تمرین (۳-۷): رابطه (۳-۵۵) را ثابت کنید.

۳-۷-۲ تقارن تبدیل فوریه

اگر $x(t)$ حقیقی باشد در آنصورت داریم.

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \tag{۵۶-۳}$$

اثبات: رابطهٔ تبدیل فوریه بصورت زیر است.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

پس مزدوج مختلط فوریه بصورت زیر است.

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(-\omega)$$

در مورد آخرین قسمت تساوی فوق توجه کنید که $x(t) = x^*(t)$ است.

با توجه به رابطه (۳-۵۶) می‌توان گفت که اگر $x(t)$ حقیقی باشد در آنصورت دامنه تبدیل فوریه تابعی زوج نسبت به ω و زاویه تبدیل فوریه تابعی فرد نسبت به ω می‌باشد.

اثبات: از رابطه تبدیل فوریه داریم.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \rightarrow X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(-\omega)$$

از یک طرف $\left|X(\omega)\right| = \left|X^*(\omega)\right|$ است و از طرف دیگر از رابطهٔ فوق داریم.

$$\left|X(-\omega)\right| = \left|X^*(-\omega)\right|$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$\left|X(\omega)\right| = \left|X(-\omega)\right| \tag{۵۷-۳}$$

یعنی دامنه تبدیل فوریه تابعی زوج از ω است.

به روشی ساده‌تر می‌توان رابطه (۳-۵۶) یا (۳-۵۷) را ثابت کرد (با استفاده از رابطهٔ مثلثاتی تبدیل فوریه).

همانگونه که می‌دانیم $X(\omega)$ را می‌توان با بسط نمایی بصورت زیر نوشت.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Cos\ \ \omega t\ dt\text{-}j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Sin\ \ \omega t\ dt \tag{۳-۵۸}$$

با تبدیل ω به $-\omega$ در رابطه (۳-۵۸) داریم.

$$X(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Cos\ \ \omega t\ dt + j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Sin\ \ \omega t\ dt \tag{۳-۵۹}$$

و از مقایسه دو رابطهٔ فوق بوضوح مشاهده می‌شود که

$$|X(\omega)|=|X(-\omega)|$$

از همینجا نیز می‌توان قسمت دوم قضیه را ثابت کرد، فقط کافی است توجه کنیم زاویه $X(\omega)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$< X(\omega)=-tg^{-1}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Sin\ \omega t\ dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Cos\ \omega t\ dt} \tag{۳-۶۰}$$

با تبدیل ω به $-\omega$ داریم

$$< X(-\omega)=tg^{-1}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Sin\ \omega t\ dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Cos\ \omega t\ dt} \tag{۳-۶۱}$$

پس می‌بینیم که $\angle X(\omega)=-\angle X(-\omega)$ یعنی زاویه $X(\omega)$ تابعی فرد از ω است. اکنون فرض کنید $x(t)$ علاوه بر حقیقی بودن، تابعی زوج از t نیز باشد. در اینصورت جملهٔ زیر درست است.

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، تبدیل فوریه حقیقی خالص و زوج است.

اثبات: اگر $x(t)$ حقیقی باشد قبلاً داشتیم.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Cos\ \ \omega t\ dt\ -\ j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Sin\ \ \omega t\ dt \tag{۳-۶۲}$$

اگر $x(t)$ زوج باشد انتگرال دوم صفر می‌شود، چون حاصلضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد خود تابعی فرد است که وقتی انتگرالش را در فاصلهٔ متقارن حول صفر می‌گیریم مقدارش صفر می‌شود. بنابراین فقط انتگرال اول باقی می‌ماند که حقیقی خالص و زوج است.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) Cos\ \omega t dt\ =\ X(-\omega)$$

اما اگر $x(t)$ علاوه بر حقیقی بودن تابعی فرد از t نیز باشد در اینصورت عبارت زیر را داریم.

اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، تبدیل فوریه موهومی خالص و فرد است.

اثبات: بطریقی مشابه قضیه قبلی انتگرال اول صفر می‌شود. بنابراین فقط انتگرال دوم باقی می‌ماند.

$$X(\omega)=-j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ Sin\ \ \omega t\ dt \tag{۳-۶۳}$$

که این بیانگر موهومی خالص بودن $X(\omega)$ است و اما با تشکیل $X(-\omega)$ داریم.

$$X(-\omega)= j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,Sin\ \omega t dt$$

بنابراین $X(\omega)$ یک تابع فرد از ω می‌باشد.

۳-۷-۳ خاصیت دوگانی [۸]

فرض کنید رابطه زیر بین دو تابع f و g برقرار باشد.

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-juv}dv \qquad (۳-۶۴)$$

اگر قرار دهیم $u=\omega$ و $v=t$، در آنصورت $f(\omega)$ تبدیل فوریه $g(t)$ خواهد شد یا

$$f(\omega)= F\left[g(t)\right] \qquad (۳-۶۵)$$

و اگر $u=t$ و $v=\omega$ قرار دهیم، در آنصورت $g(-\omega)$ تبدیل فوریه $\frac{1}{2\pi}f(t)$ می‌گردد یا

$$2\pi g(-\omega)= F\left[f(t)\right] \qquad (۳-۶۶)$$

بنابراین اگر $f(\omega)$ تبدیل فوریه $g(t)$ باشد.

$$g(t)\overset{F}{\leftrightarrow} f(\omega) \qquad (۳-۶۷)$$

می‌توان گفت که تبدیل فوریه $f(t)$ مساوی $2\pi g(-\omega)$ خواهد بود.

$$f(t)\overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi\ g(-\omega) \qquad (۳-۶۸)$$

بعبارت دیگر از رابطه $x(t)=F[X(\omega)]$ داریم.

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (۳-۶۹)$$

و از اصل تبدیل فوریه با جابجا کردن متغیرها داریم.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (۳-۷۰)$$

بنابراین با مقایسه دو رابطه (۳-۶۹) و (۳-۷۰) می‌توان نوشت.

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)e^{-jut}d\omega \qquad (۳-۷۱)$$

اکنون اگر ω را به $-\omega$ تغییر دهیم و دو طرف را در $\frac{1}{2\pi}$ ضرب کنیم رابطهٔ (۳-۷۱) مثل رابطهٔ زیر می‌شود.

$$\frac{1}{2\pi}X(t)=\frac{1}{2\pi}\int x(-\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

و بنابراین داریم.

---

[8] Duality

$$\frac{1}{2\pi}X(t) \leftrightarrow x(-\omega) \qquad (۷۲-۳)$$

از خاصیت دوگانی می‌توان در محاسبه تبدیل فوریه و تبدیل معکوس فوریه کمک فراوانی گرفت.

مثال (۳-۲۳): مطلوبست تعیین فوریه سیگنال $x(t)$ اگر $x(t)=\dfrac{2}{t^2+1}$

حل: از روش‌های معمولی حل این مساله بسیار مشکل است ولی با استفاده از خاصیت دوگانی مساله را حل می‌کنیم. می‌دانیم که تبدیل فوریه $e^{-|t|}$ مساوی $\dfrac{2}{1+\omega^2}$ می‌باشد، پس

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2}{1+\omega^2} \qquad (۷۳-۳)$$

بنابراین با استفاده از خاصیت دوگانی می‌توان نوشت.

$$\frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{F} 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|} \qquad (۷۴-۳)$$

مثال (۳-۲۴): اگر $x(t) = A\tau\, Sinc\,\dfrac{t}{2\pi}\tau$ (τ عدد ثابت) باشد مطلوبست $X(\omega)$.

حل: می‌دانیم که تبدیل فوریه پالس مربعی بصورت زیر است.

$$A\left[u\left(t+\tau/2\right)-u\left(t-\tau/2\right)\right] \leftrightarrow A\,\tau Sinc\,\frac{\omega}{2\pi}\tau$$

اکنون با توجه به خاصیت دوگانی تبدیل فوریه $x(t)=A\tau\, Sinc\dfrac{1}{2\pi}\tau$ بصورت زیر است

$$A\,\tau Sinc\,\frac{1}{2\pi}\tau \leftrightarrow 2\pi A\left[u\left(\omega+\tau/2\right)-u\left(\omega-\tau/2\right)\right]$$

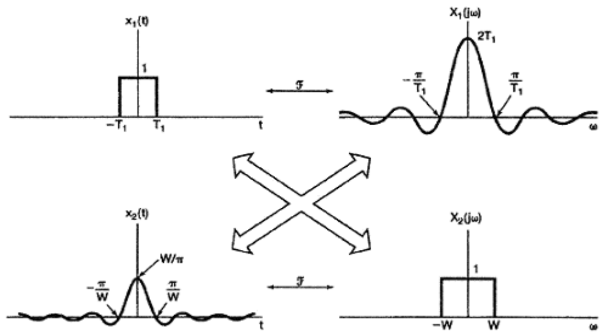
توجه کنید که به علت متقارن بودن پالس عملیات قرینه‌سازی تأثیری در پاسخ ایجاد نکرده است. شکل (۳-۲۳) بخوبی بیانگر مراحل فوق است.

۳-۷-۴ رابطه پارسوال[۹]

رابطه مهمی که با توجه به خواص تبدیل فوریه می‌توان بدست آورد، رابطه پارسوال می‌باشد که در حقیقت بیانگر این است که انرژی در حوزه زمان و فرکانس مساوی هستند. این رابطه بدین صورت بیان می‌گردد.

---

[9] Parsval's Equation



شکل (۳-۲۳): مراحل یافتن تبدیل فوریه $x(t)$ در مثال (۳-۲۴) با استفاده از دوگانی

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega \qquad (۷۵-۳)$$

اثبات: با توجه به اینکه

$$|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$$

و با استفاده از رابطه (۳-۶۹) داریم.

$$\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t)dt=\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}X^*(\omega)e^{-j\omega t}\,d\omega\right]dt \qquad (۷۶-۳)$$

با تغییر تقدم و تأخر انتگرال‌ها داریم.

$$\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}X^*(\omega)d\omega\left[\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right] \qquad (۷۷-۳)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}X^*(\omega)X(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega$$

رابطه پارسوال برای سیگنال‌های متناوب بصورت زیر قابل بیان است.

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt=\sum_{-\infty}^{\infty}|a_k|^2 \qquad (۷۸-۳)$$

با استفاده از قضیهٔ پارسوال می‌توان چگالی طیفی توان یا انرژی را بصورت $G_x(\omega)=|x(\omega)|^2$ در نظر گرفت.

تمرین (۳-۸): رابطهٔ (۳-۷۸) را با استفاده از تعریف تبدیل فوریه برای سیگنال‌های متناوب و با استفاده از رابطه (۳-۷۵) مستقیماً به دست آورید.

۳-۷-۵ انتقال در حوزهٔ زمان

اگر تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$را $X(\omega)$ بنامیم در آنصورت تبدیل فوریه سیگنال انتقال یافته $x(t-t_0)$ برابر $X(\omega)e^{-j\omega t_0}$ می‌باشد.

اثبات: قرار می‌دهیم $y(t)=x(t-t_0)$ و تبدیل فوریه $y(t)$ را بدست می‌آوریم.

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$$

با تغییر متغیر $t-t_0=\tau$ داریم.

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)}d\tau=e^{-j\omega t_0}X(\omega) \tag{۷۹-۳}$$

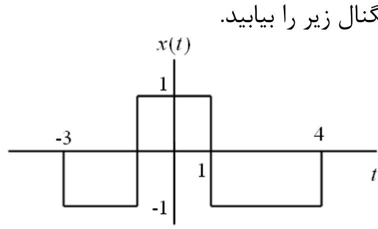
مثال (۳-۲۵): با استفاده از خاصیت انتقال در حوزهٔ زمان و تبدیل فوریه پالس گاوسی متقارن، تبدیل فوریه پالس گاوسی انتقال یافته زیر را حساب کنید.

$$x(t)=e^{-\pi(t-t_0)^2}$$

حل: تبدیل فوریه پالس گاوسی متقارن در رابطه (۳-۴۵) داده شده است. بنابراین تبدیل فوریه پالس گاوسی انتقال یافته بصورت زیر است.

$$X(\omega)=e^{-j\omega t_0}\;e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

مثال (۳-۲۶): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.



شکل (۳-۲۴): سیگنال مربوط به مثال (۳-۲۶)

حل: این سیگنال را می‌توان بصورت مجموع یک پالس متقارن و دو پالس انتقال یافته، بصورت زیر نوشت.

$$x(t)=-[u(t+3)-u(t+1)]+[u(t+1)-u(t-1)]-[u(t-1)-u(t-4)]$$

بنابراین با توجه به تبدیل فوریه پالس مربعی و خاصیت انتقال در حوزه زمان می‌توان تبدیل فوریه را بسادگی بدست آورد.

$$X(\omega)=\left(-2Sinc\,\frac{\omega}{\pi}\right)e^{j2\omega}+2Sinc\,\frac{\omega}{\pi}-\left(3Sinc\,\frac{3\omega}{2\pi}\right)e^{-j\frac{5}{2}\omega}$$

۳-۷-۶ مشتق‌گیری در حوزهٔ زمان

اگر تبدل فوریه $x(t)$ را $X(\omega)$ بنامیم، تبدیل فوریه مشتق مرتبه nام یا $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ بصورت زیر است:

$$F\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]=(j\omega)^n X(\omega) \tag{۸۰-۳}$$

اثبات: از رابطهٔ تبدیل معکوس فوریه استفاده می‌کنیم.

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

اکنون از طرفین رابطه فوق نسبت به t ، n بار مشتق می‌گیریم تا بسادگی رابطه (۳-۸۰) بدست آید. از خاصیت مشتق در حوزهٔ زمان برای محاسبهٔ تبدیل مستقیم و معکوس فوریه می‌توان استفاده شایانی برد.

۳-۷-۷ انتگرال‌گیری در حوزهٔ زمان

با توجه به خاصیت مشتق‌گیری در حوزهٔ زمان و با توجه به اینکه عملیات انتگرال‌گیری عکس عملیات مشتق‌گیری است، انتظار می‌رود که تبدیل فوریه انتگرال بصورت $\frac{X(\omega)}{j\omega}$ باشد. اما در حقیقت یک جملهٔ دیگر نیز باید در نظر گرفته شود که بیانگر مؤلفه در فرکانس صفر یا DC سیگنال است. پس در حالت کلی داریم.

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \qquad (۸۱-۳)$$

توجه کنید که اگر مقدار $X(0)$ غیر صفر باشد جملهٔ اول نامفهوم خواهد بود. این بدین معنی است که سیگنال $x(t)$ در حوزهٔ زمان دارای سطح زیر منحنی غیر صفر است، چون

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \qquad (۸۲-۳)$$

این جمله در حقیقت متناسب است با مؤلفه DC سیگنال $y(t)$ که معادل یک ضربه در فرکانس صفر خواهد بود که در جمله دوم رابطه (۳-۸۱) منظور شده است. توجه داشته باشید که اثبات ریاضی رابطه (۳-۸۱) نیاز به ریاضیات عالی دارد که از حوصله این کتاب خارج است. اما این سوال پیش می‌آید که وجود این جمله اضافی در مورد عملیات مشتق‌گیری بعنوان عکس عملیات انتگرال‌گیری چرا ظاهر نمی‌شود. دلیل این امر این است که طی عملیات مشتق‌گیری لازم است تبدیل فوریه متناظر در $j\omega$ ضرب شود در اینصورت جمله دوم بصورت $j\omega X(0)\delta(\omega)$ در می‌آید که برابر صفر است، بنابراین تأثیر خود را ازدست می‌دهد.

به همین جهت از لحاظ مشتق‌گیری بعنوان معکوس عملیات انتگرال‌گیری، وجود یا عدم وجود جمله دوم رابطهٔ (۳-۸۱) تفاوتی ندارد. اما اکنون این سؤال پیش می‌آیدکه چرا ضریب خاص $\pi X(0)$ بعنوان دامنهٔ ضربه در فرکانس صفرانتخاب شده است؟ پاسخ این سوال بعنوان تمرین بعهده دانشجویان گذاشته شده است.

تمرین (۳-۹): علت وجود ضریب $\pi X(0)$ برای دامنه ضربه در فرکانس صفر در رابطه (۳-۸۱) چیست؟

مثال (۳-۲۷): تبدیل فوریه تابع پله واحد را بدست آورید.

حل: همانطور که می‌دانید تابع پله واحد در شرایط وجود تبدیل فوریه صدق نمی‌کند بنابراین به روش محاسبه مستقیم انتگرال فوریه نمی‌توان تبدیل فوریه تابع پله واحد را بدست آورد. بلکه باید از این خاصیت استفاده کرد که تابع پله، انتگرال تابع ضربه است.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \qquad (۸۳-۳)$$

و چون تابع ضربه دارای تبدیل فوریه واحد است با استفاده از (۳-۸۱) و با انتخاب $x(t)=\delta(t)$ داریم $X(\omega)=1$ و تبدیل فوریه $u(t)$ بصورت زیر است.

$$F[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega) \qquad (۸۴-۳)$$

۳-۷-۸ مقیاس‌بندی زمانی

اگر تبدیل فوریه $x(t)$ را $X(\omega)$ بنامیم در اینصورت با فرض a عددی ثابت داریم.

$$F[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad (۸۵-۳)$$

اثبات: قرار می‌دهیم $y(t)=x(at)$ پس

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

با انتخاب $at=u$ داریم (اگر $a>0$ باشد).

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\frac{\omega}{a}u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

و اگر $a\leq 0$ باشد.

$$Y(\omega) = \int_{\infty}^{-\infty} x(u) e^{-j\frac{\omega}{a}u} \frac{du}{a} = \frac{-1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

بدین ترتیب رابطه (۳-۸۵) ثابت می‌شود.

هر خاصیتی که تاکنون در حوزهٔ زمان گفتیم، طبق خاصیت دوگانی برای حوزهٔ فرکانس با اندکی تفاوت نیز قابل بیان است.

۳-۷-۹ انتقال در حوزهٔ فرکانس

اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ باشد در آنصورت $X(\omega-\omega_0)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)e^{j\omega_0 t}$ است.

$$X(\omega-\omega_0) = F\left[e^{j\omega_0 t} x(t)\right] \qquad (۸۶-۳)$$

اثبات: با استفاده از رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$\frac{1}{2\pi}\int X(\omega-\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[X(\omega-\omega_0)]$$

با انتخاب $\omega-\omega_0=\lambda$

$$F^{-1}[X(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2\pi}\int X(\lambda) e^{j(\omega_0+\lambda)t} d\lambda = e^{j\omega_0 t} x(t)$$

خاصیت فوق با توجه به خاصیت دوگانی و از روی خاصیت انتقال در حوزه زمان نیز قابل استخراج است.

۳-۷-۱۰ مشتق‌گیری در حوزه فرکانس

اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ باشد، $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ تبدیل فوریه سیگنال $-jtx(t)$ است.

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = F[-jtx(t)] \quad (۳-۸۷)$$

اثبات:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

از طرفین رابطهٔ فوق نسبت به ω مشتق می‌گیریم

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)[-jt] e^{-j\omega t} dt$$

بنابراین تبدیل فوریه سیگنال $-jtx(t)$ مساوی $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ است.

خاصیت فوق برای محاسبه تبدیل معکوس فوریه بسیار مورد استفاده دارد.

مثال (۳-۲۸): تبدیل معکوس فوریه را بیابید اگر:

$$X(\omega) = \frac{1}{(j\omega + a)^2}$$

حل: با استفاده از روش انتگرال‌گیری حل این مساله مشکل است ولی با استفاده از خاصیت مشتق در حوزهٔ فرکانس مساله بسادگی قابل حل است. ابتدا توجه می‌کنیم که $X(\omega)$ مشتق $Y(\omega)$ به صورت زیر است.

$$Y(\omega) = \frac{j}{j\omega + a}$$

بعبارت دیگر

$$X(\omega) = \frac{dY(\omega)}{d\omega}$$

پس با توجه به اینکه

$$y(t) = je^{-at}u(t)$$

می‌توان $x(t)$ را بصورت زیر بدست آورد

$$x(t) = -jty(t) = te^{-at}u(t)$$

۳-۷-۱۱ انتگرال‌گیری در حوزهٔ فرکانس

این خاصیت با استفاده از دوگانی و رابطه (۳-۸۱) بصورت زیر قابل بیان است.

$$\int_{-\infty}^{\omega} X(\lambda) d\lambda = F\left[\frac{x(t)}{-jt} + \pi x(0)\delta(t)\right] \quad (۳-۸۸)$$

توجه کنید که $2\pi x(0)$ سطح زیرمنحنی $X(\omega)$ در حوزهٔ فرکانس است.

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega \quad (۳-۸۹)$$

۳-۷-۱۲ تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب

اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب باشد در آنصورت می‌توان سری فوریه آنرا بصورت زیر نوشت.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} \tag{۹۰-۳}$$

با توجه به اینکه تبدیل فوریه سیگنال $e^{jk\omega_0 t}$ مساوی $2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$ است، می‌توان سری فوریه سیگنال متناوب را بصورت زیر ارائه کرد.

$$X(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ \delta(\omega-k\omega_0) \tag{۹۱-۳}$$

به کمک تعریف توابع ضربه می‌توان یک نمایش مناسب برای سیگنال‌های متناوب در حوزهٔ فرکانس بصورت تبدیل فوریه ارائه کرد. در این صورت سیگنال‌های متناوب و غیر متناوب تحت یک مجموعه دارای تبدیل فوریه می‌باشند.

۳-۷-۱۳ مدولاسیون[10]

طبق خاصیت مدولاسیون، تبدیل فوریه حاصلضرب دو سیگنال، کانولوشن تبدیل فوریه‌ها می‌باشد. بعنی اگر

$$r(t)=s(t)p(t) \tag{۹۲-۳}$$

تبدیل فوریه $r(t)$ برابر است با

$$R(\omega)=\frac{1}{2\pi}[S(\omega)*P(\omega)] \tag{۹۳-۳}$$

اثبات: برای اثبات ابتدا حاصل کانولوشن $S(\omega)*P(\omega)$ را حساب می‌کنیم.

$$S(\omega)*P(\omega)=\int_{\lambda=-\infty}^{\infty} S(\lambda)P(\omega-\lambda)d\lambda \tag{۹۴-۳}$$

اکنون بجای $P(\omega-\lambda)$ رابطه معادل تبدیل معکوس فوریه را قرار می‌دهیم.

$$S(\omega)*P(\omega)=\int_{\lambda=-\infty}^{\infty} S(\lambda)\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} p(t)\ e^{-j(\omega-\lambda)t}dt\right]d\lambda \tag{۹۵-۳}$$

اکنون ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر می‌دهیم.

$$S(\omega)*P(\omega)=\int_{t=-\infty}^{\infty} p(t)[\int_{\lambda=-\infty}^{\infty} S(\lambda)e^{-j(\omega-\lambda)t}d\lambda]dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-j\omega t}dt[\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)e^{j\lambda t}d\lambda]$$

بنابراین با قرار دادن $2\pi s(t)$ بجای انتگرال دوم داریم.

$$S(\omega)*P(\omega)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\mathrm{p(t)}\ e^{-j\omega t}dt \tag{۹۶-۳}$$

با توجه به تعریف تبدیل فوریه می‌توان نتیجه زیر را گرفت.

---

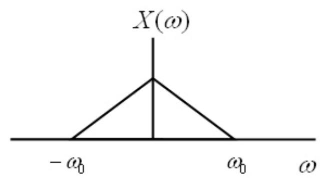
[10] Modulation

$$F[s(t)p(t)] = \frac{1}{2\pi}[S(\omega) * P(\omega)] \qquad (۹۷-۳)$$

این خاصیت پایه ریاضی برای انواع مدولاسیون است.

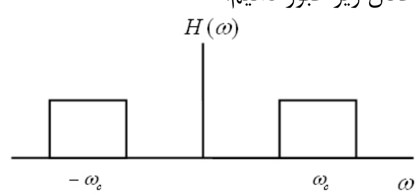
برای توضیح نحوه عمل مدولاسیون فرض کنید بخواهیم سیگنال پایین‌گذر $x(t)$ (منظور از سیگنال پایین‌گذر سیگنالی است که طیف آن در اطراف فرکانس های پائین (صفر) متمرکز است) را به فاصله‌ای دور از درون یک کانال میان‌گذر ارسال کنیم. این حالت اکثراً در مخابرات روزمره مشاهده می‌شود. یک نمونه از سیگنال‌های پایین‌گذر سیگنال صحبت می‌باشد. از طرف دیگر کانال‌های اصلی انتقال متداول در مخابرات معمولا میان‌گذر هستند. بنابراین سیگنال صحبت را بی‌هیچ تغییری در طیف فرکانس از این کانال‌ها نمی توان عبور داد. بنابراین مجبوریم که طیف سیگنال را در محدودهٔ باند عبور مجاز کانال قرار دهیم. بعبارت دیگر مجبوریم یک (انتقال) فرکانسی در طیف سیگنال ایجاد کرده و طیف سیگنال را به محدودهٔ باند عبور انتقال دهیم. این کار به کمک یکی از انواع مدولاسیون ها نظیر مدولاسیون دامنه امکان‌پذیر است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۳-۲۹): سیگنال پایین‌گذر $x(t)$ را با طیف زیر در نظر بگیرید.



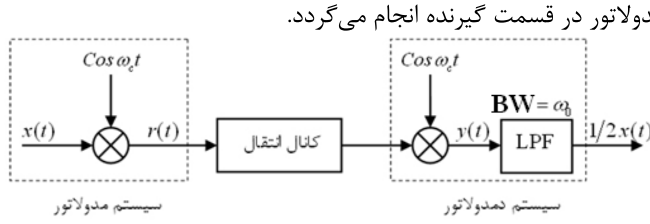
شکل (۳-۲۵): طیف سیگنال پایین‌گذر

می‌خواهیم این سیگنال را از کانال زیر عبور دهیم.



شکل (۳-۲۶): طیف کانال میان‌گذر (محدوده باند عبور مجاز)

در اینصورت برای انتقال طیف سیگنال به محدودهٔ باند عبور از سیستم مدولاتور استفاده می‌کنیم. البته پس از عبور سیگنال از کانال لازم است دوباره طیف سیگنال به باند اصلی بازگردانده شود که این کار توسط سیستم دمدولاتور در قسمت گیرنده انجام می‌گردد.



شکل (۳-۲۷): سیستمی جهت انتقال طیف سیگنال به محدوده باند عبور مجاز سیگنال و سپس پیاده کردن طیف در محدوده اصلی

طی عملیات مدولاسیون سیگنال پایین‌گذر در یک سیگنال سینوسی به نام سیگنال حامل ضرب می‌شود. فرکانس سیگنال حاصل در میانه باند کانال میان‌گذر قرار دارد.

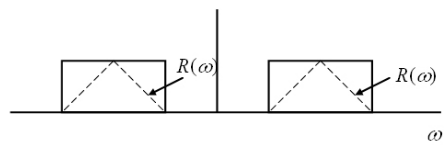
$$r(t) = x(t)\cos\omega_c t \tag{۹۸-۳}$$

این عملیات ضرب در حوزه زمان باعث انتقال طیف سیگنال $x(t)$ حول فرکانس ω_c می‌شود.

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\omega)]*[\pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)] \tag{۹۹-۳}$$

$$= \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)] \tag{۱۰۰-۳}$$

می‌بینیم که طیف $R(\omega)$ در محدوده باند عبور قرار می‌گیرد و براحتی از کانال عبور می‌کند.



شکل (۳-۲۸): طیف سیگنال پس از انتقال

اکنون برای بازسازی $X(\omega)$ از $R(\omega)$ باز هم عمل مدولاسیون را بصورت نشان داده شده در شکل بر روی سیگنال دریافتی انجام می‌دهیم. در این صورت طیف $y(t)$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$y(t) = r(t)\,Cos\ \omega_0 t = x(t)\,Cos^2\omega_c t = \frac{1}{2}x(t)\,Cos\ 2\omega_c t + \frac{1}{2}x(t) \tag{۱۰۱-۳}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}X(\omega-2\omega_c) + \frac{1}{2}X(\omega+2\omega_c)\right] \tag{۱۰۲-۳}$$

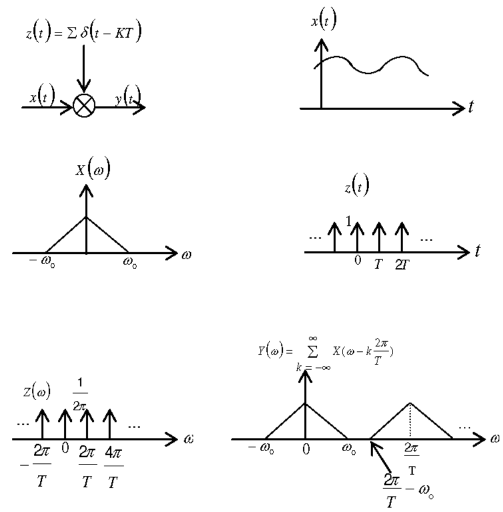
بنابراین اگر پهنای باند فیلتر را مساوی ω_0 در نظر بگیریم در آنصورت در خروجی $\frac{1}{2}x(t)$ را داریم و مؤلفه‌های دیگر از فیلتر عبور نخواهد کرد.

۳-۷-۱۴ نمونه‌برداری بعنوان مثالی از مدولاسیون

نمونه‌برداری زمانی از سیگنال‌های باند محدود در فصول آتی بتفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد، ولی در اینجا لازم است بعنوان یک مثال از قضیهٔ مدولاسیون از نمونه‌برداری نام برد.

مثال (۳-۲۹): فرض کنید $x(t)$ سیگنال باند محدود با پهنای باند ω_0 باشد. از این سیگنال توسط یک قطار ضربه که در حوزه زمان بفاصلهٔ T از هم قرار دارند نمونه‌برداری می‌شود. منظور از نمونه‌برداری کردن از یک سیگنال، ضرب کردن آن سیگنال در یک قطار پالس ضربه $p(t)$ می‌باشد.

در شکل (۳-۲۹) سیستم نمونه‌بردار و سیگنال‌های $x(t)$، $p(t)$ و $y(t) = p(t)x(t)$ طیف‌های آنها در حوزه فرکانس نمایش داده شده‌اند.



شکل (۳-۲۹): نمایش سیگنال‌های $x(t)$ و قطار ضربه در حوزهٔ زمان و فرکانس و نمایش سیگنال $y(t)$ در حوزهٔ فرکانس

شرط عدم تداخل طیفها در هم این است که $\frac{2\pi}{T}>2\omega_0$ باشد. در این صورت می توان از سیگنال $y(t)$ دوباره سیگنال $x(t)$ را با کمک یک فیلتر پایین‌گذر[11] بازسازی کرد، که این امر بعدها به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۳-۷-۱۵ خاصیت کانولوشن

یکی از مهمترین خواص تبدیل فوریه که می‌توان کاربرد آن را در تحلیل سیستم‌های LTI توسعه داد، خاصیت کانولوشن است، چون به کمک خاصیت فوق عمل کانولوشن در حوزهٔ زمان به عمل ضرب معمولی در حوزهٔ فرکانس تبدیل می‌شود. برای روشن شدن مطلب فرض کنید $x(t)$ ورودی به سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ است. در اینصورت $y(t)$ با رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)d\tau \qquad (۱۰۳\text{-}۳)$$

$$Y(\omega)=F\left[y(t)\right]=\int_{t=-\infty}^{\infty}\int_{\tau=-\infty}^{\infty}\left[x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt \qquad (۱۰۴\text{-}۳)$$

با تغییر ترتیب انتگرال گیری داریم.

$$Y(\omega)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,e^{-j\omega t}dt\right]d\tau \qquad (۱۰۵\text{-}۳)$$

با استفاده از خاصیت انتقال زمانی می‌فهمیم که انتگرال دوم مساوی است با $e^{-j\omega\tau}H(\omega)$ بنابراین داریم.

---

[11] Low Pass Filter

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau} H(\omega)=H(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{۱۰۶-۳}$$

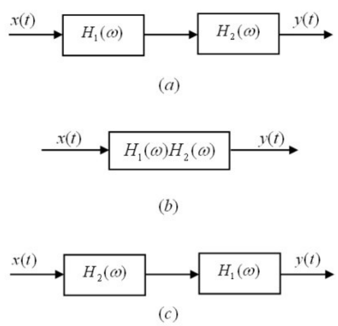
بنابراین

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \tag{۱۰۷-۳}$$

پس بطور خلاصه طبق خاصیت کانولوشن عملیات کانولوشن در حوزهٔ زمان به عملیات ضرب در حوزهٔ فرکانس تبدیل می‌شود.

$$y(t)=h(t)*x(t)\xleftrightarrow{F} Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \tag{۱۰۸-۳}$$

خاصیت فوق نتیجه مستقیم این واقیعت است که توابع نمایی توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند. تابع $H(\omega)$ اغلب بنام تابع شبکه یا پاسخ فرکانسی سیستم معروف است. با استفاده از خاصیت فوق می‌توان ترکیب متوالی دو سیستم را بصورت یک سیستم بیان کرد که در شکل (۳-۳۰) نشان داده شده است. با استفاده از خاصیت کانولوشن خاصیت جابجایی سیستم‌های متوالی LTI نیز بسادگی ثابت می‌شود.



شکل (۳-۳۰): سه سیستم معادل، در این جا سه سیستم نمایانگر یک سیستم یا یک عملکرد هستند.

مثال (۳-۲۹): برای سیستم مشتق‌گیر داریم

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \tag{۱۰۹-۳}$$

پاسخ در حوزه فرکانس چنین است.

$$Y(\omega)=\ j\omega X(\omega) \tag{۱۱۰-۳}$$

بنابراین تابع شبکه بدینصورت بدست می‌آید.

$$H(\omega)=\ j\omega \tag{۱۱۱-۳}$$

مثال (۳-۳۰): یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t-t_0)$ را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی سیستم و ارتباط ورودی و خروجی آنرا بیابید.

حل: تبدیل فوریه $h(t)$ همان پاسخ سیستم می‌باشد.

$$H(\omega)=e^{-j\omega t_0}$$

بنابراین خروجی در حوزه فرکانس بصورت زیر است.

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

و در حوزه زمان

$$y(t) = x(t - t_0)$$

مثال (۳-۳۱): سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید.

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$ را بیابید.

حل: به سادگی داریم.

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

با توجه به تبدیل فوریه ورودی که $X(\omega) = \sum_{k=-3}^{3} 2\pi\; a_k \delta(\omega - k2\pi)$ می‌باشد، می‌توان خروجی را بدین صورت نوشت.

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$\left[\sum_{k=-3}^{3} 2\pi a_k \delta(\omega - 2k\pi)\right]\frac{1}{1 + j\omega} = \sum_{k=-3}^{3} \frac{2\pi a_k}{jk2\pi + 1}\delta(\omega - 2k\pi)$$

و در حوزه زمان برای $y(t)$ بدست می‌آوریم.

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{3} \frac{a_k}{jk2\pi + 1} e^{j2\pi k t}$$

۳-۸ رسم بود

دررسم بود، دامنه و زاویه پاسخ فرکانسی سیستم‌ها در مقیاس لگاریتمی ترسیم می‌گردد و این نوع رسم بدلیل سادگی بر روش‌های دیگر ترسیم مزیت دارد. چون معمولا این نوع رسم در تعیین عملکرد سیستم‌ها در حوزهٔ فرکانس بسیار موفق عمل می‌کند و بهمین خاطر بسیار مورد استفاده دارد. دو روش متداول رسم بود که در کتاب‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از:

الف: روش Decade

ب: روش Octave

در روش اول که بیشتر هم کاربرد دارد محور عمودی بر حسب $20\log|H(\omega)|$ رسم می‌شود و محور افقی بر حسب $\log\omega$، اما معمولا خود ω را هم بر روی محور افقی می‌نویسند. ولی در روش دوم که در اینجا بحث نمی‌شود محور افقی بر حسب $\log_2\omega$ رسم می‌شود. در اینجا با یک مثال روش اول را توضیح می‌دهیم.

مثال (۳-۳۲): رسم بود $H(\omega)$ را بیابید اگر

$$H(\omega)=\frac{1+{j\omega}/{10}}{(1+{j\omega}/{100})(1+{j\omega}/{1000})} \qquad (112\text{-}3)$$

ابتدا از طرفین $\log_{10}(.)$ گرفته و سپس در عدد ۲۰ ضرب می‌کنیم، واحدی که اکنون باید بکار برده شود دسی‌بل dB نام دارد، که دانشجویان با آن آشنایی کافی دارند.

$$y=20\log\left|H(\omega)\right|=20\log\sqrt{1+(\frac{\omega}{10})^2}-20\log\sqrt{1+(\frac{\omega}{100})^2}-20\log\sqrt{1+(\frac{\omega}{1000})^2} \qquad (113\text{-}3)$$

اگر مقداری تقریب استفاده کنیم که البته این تقریبها کاملا منطقی و قابل قبول نیز هستند در آنصورت برای $\omega<10$ می‌توان نوشت.

$$y\approx 0$$

همچنین برای سایر فواصل تقریب‌های زیر قابل قبول است

$$\begin{aligned}
&y\approx 20\log\frac{\omega}{10} && 10<\omega<100\\
&y\approx 20\log\frac{\omega}{10}-20\log\frac{\omega}{100}\approx 20\log 10\approx 20dB && 100<\omega<1000 \qquad (114\text{-}3)\\
&y\approx 20\log\frac{\omega}{10}-20\log\frac{\omega}{100}-20\log\frac{\omega}{1000}\approx 20-20\log\frac{\omega}{1000} && \omega>1000
\end{aligned}$$

و به ازاء ωهای بزرگتر مقدار y بسمت صفر وسپس به سمت مقادیر منفی میل می‌کند. بعنوان مثال برای $\omega=10^4$ داریم.

$$y\approx 0$$

و برای $\omega=10^5$ مقدار تابع مساوی ۲۰- دسی‌بل می‌شود. اگر دقت شود رسم شکل بروش فوق حداکثر سه dB خطا در نقاط شکستگی بوجود می‌آورد.

بعنوان مثال اگر بخواهیم بطور دقیق حساب کنیم در $\omega=10$ داریم.

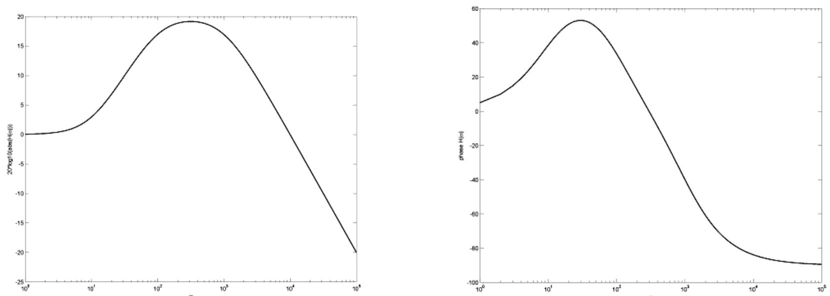
$$20\log\left|H(\omega)\right|=20\log\sqrt{1+(\frac{10}{10})^2}-20\log\sqrt{1+(\frac{10}{100})^2}-20\log\sqrt{1+(\frac{10}{1000})^2}$$

از دو جمله دوم با تقریب خوب می‌توان صرفنظر کرد و فقط از جملهٔ اول داریم.

$$y=10\log 2\simeq 3dB$$

در حالیکه طبق تعریف انجام شده در $\omega=10$ مقدار y مساوی صفر dB محاسبه شده بود. شکل صحیح بصورت خط تو پر رسم شده است.

رسم بود پاسخ زاویه نیز به کمک رابطه $\angle H(\omega)=tg^{-1}\frac{\omega}{10}-tg^{-1}\frac{\omega}{100}-tg^{-1}\frac{\omega}{1000}$ با تقریب خوبی بصورت شکل (۳-۳۱-ب) خواهد شد (توجه شود مقدار زاویه در فرکانس بی‌نهایت مساوی -90^o می‌باشد).



(الف) (ب)

شکل (۳-۳۱): رسم بود دامنه و زاویهٔ پاسخ فرکانسی

۳-۹ سیستم‌های مرتبه اول و دوم

سیستم‌های مرتبه اول و دوم بعنوان سیستم‌های پایه هستند و اکثر سیستم‌های مراتب بالاتر قابل تجزیه به سیستم‌های مراتب اول و دوم می‌باشند. بهمین خاطر بررسی معادلهٔ دیفرانسیل، پاسخ ضربه، پله و پاسخ فرکانسی آنها مهم است.

یک سیستم مرتبه اول دارای معادله دیفرانسیلی بصورت زیر است.

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \qquad (۳-۱۱۵)$$

که در آن τ عدد ثابتی است. با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین این معادلهٔ دیفرانسیل می‌توان پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آورد.

$$j\omega\tau Y(\omega) + Y(\omega) = X(\omega) \qquad (۳-۱۱۶)$$

و یا

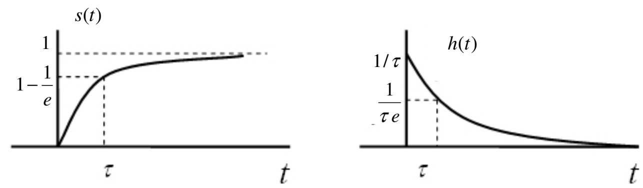
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \qquad (۳-۱۱۷)$$

با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم اکنون می‌توان پاسخ ضربهٔ آن را بدست آورد

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \qquad (۳-۱۱۸)$$

پاسخ پله سیستم را میتوان از کانولوشن پاسخ ضربه با پله واحد بدست آورد.

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = [1 - e^{-t/\tau}] u(t) \qquad (۳-۱۱۹)$$

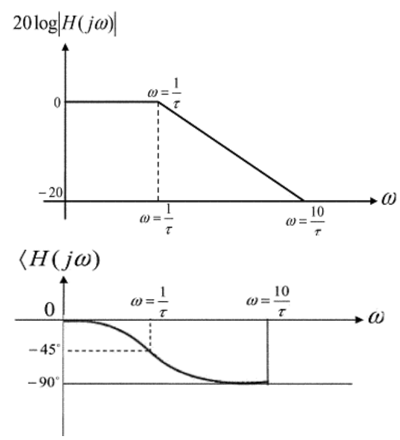


شکل (۳-۳۲): رسم پاسخ پله و ضربه برای سیستم مرتبه اول و دوم

ملاحظه می‌شود هر چه τ کمتر می‌شود، پاسخ ضربه (زودتر) سقوط می‌کند و زمان صعود پاسخ پله هم کمتر می‌شود و در واقع لختی سیستم کمتر می‌شود.

۳-۱۰ رسم بود سیستم‌های مرتبه اول

رسم بود برای قدر مطلق پاسخ دامنه و زاویه سیستم‌های مرتبهٔ اول در شکل (۳-۳۳) ترسیم شده است.



شکل (۳-۳۳): رسم بود برای دامنه و زاویهٔ پاسخ فرکانسی سیستم‌های مرتبه اول

معادلهٔ دیفرانسیل خطی مربوط به سیستم‌های مرتبهٔ دوم بصورت زیر است.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=\omega_n^2x(t) \qquad (۳-۱۲۰)$$

معادلهٔ دیفرانسیلی بصورت فوق در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی همانند مدارهای RLC به کرات مشاهده می‌شود. بسادگی از روی رابطهٔ (۳-۱۲۰) می‌توان پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم را بصورت رابطهٔ (۳-۱۲۱) بدست آورد.

$$H(\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+(\omega_n)^2} \qquad (۳-۱۲۱)$$

گاهی می‌توان $H(\omega)$ را بصورت زیر نوشت.

$$H(\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega-c_1)(j\omega-c_2)} \qquad (۳-۱۲۲)$$

که در آن

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad (۱۲۳\text{-}۳)$$

$$c_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad (۱۲۴\text{-}۳)$$

برای $\zeta \neq 1$، c_1 و c_2 متفاوت هستند و می‌توان نوشت.

$$H(\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2} \qquad (۱۲۵\text{-}۳)$$

که در آن

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \qquad (۱۲۶\text{-}۳)$$

در این صورت پاسخ ضربه به صورت زیربدست می‌آید.

$$h(t) = M\,[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \qquad (۱۲۷\text{-}۳)$$

اگر $\zeta = 1$ باشد در آنصورت $c_1 = c_2 = -\omega_n$ می‌شود و خواهیم داشت.

$$h(t) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2} \qquad (۱۲۸\text{-}۳)$$

و پاسخ ضربه در این حالت مساوی است با

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t) \qquad (۱۲۹\text{-}۳)$$

منحنی‌های مختلف $\frac{h(t)}{\omega_n}$ به ازاء ζهای مختلف در شکل۳-۴۳ رسم شده است. به ζ ضریب میرایی[12] و به ω_n فرکانس طبیعی غیر میرایی[13] می‌گویند.

اگر $0 < \zeta < 1$ باشد c_1 و c_2 مختلط می‌شوند و پاسخ ضربه به صورت زیر در می‌آید.

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\iota\omega_n\zeta}}{j2\sqrt{1-\zeta^2}}\left[e^{j(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} - e^{-j(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}\right]u(t) \qquad (۱۳۰\text{-}۳)$$

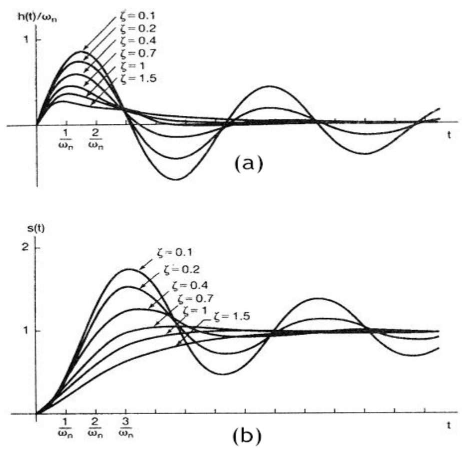
$$= \frac{\omega_n e^{-\iota\omega_n\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t\right]u(t) \qquad (۱۳۱\text{-}۳)$$

پاسخ پله نیز که از رابطهٔ $h(t) * u(t)$ بدست می‌آید بازاء ζهای متفاوت در شکل۳-۳۴ ترسیم شده‌اند.

---

12 Damping Ratio

13 Undamped Natural Frequency



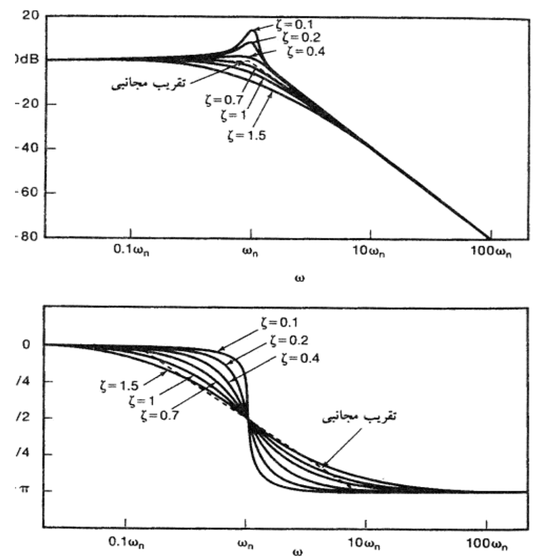
شکل (۳-۳۴) a)پاسخ ضربه و b)پاسخ پله برای سیستم مرتبه دوم بازاء مقادیرمختلف ضریب میرائی ζ.

رسم بود پاسخ فرکانسی نیز با استفاده از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$20\log|H(\omega)| = -10\log\left\{\left[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2\right\} \qquad (۱۳۲-۳)$$

$$\angle H(\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right) \qquad (۱۳۳-۳)$$

نمودار بود در شکل (۳-۳۵) رسم شده است.



شکل (۳-۳۵): رسم بود برای سیستم‌های مرتبهٔ دوم با چندین مقدار مختلف برای ضریب میرایی ζ.

۳-۱۱ تفکیک سیستم‌های مراتب بالاتر به سیستم‌های مراتب پائین‌تر

همانطور که گفته شد سیستم‌های مراتب بالاتر بسادگی قابل تفکیک به سیستم‌های مراتب اول و دوم می‌باشند. این حقیقت توسط مثال (۳-۳۳) نشان داده شده است.

مثال (۳-۳۳): فرض کنید سیستم $H(\omega)$ بصورت زیر را بخواهیم بکمک تفکیک آن به دو زیر سیستم مرتبه اول تحلیل کنیم.

$$H(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)(1+j\frac{\omega}{10})} \tag{۱۳۴-۳}$$

در این صورت با تجزیه $H(\omega)$ به حاصلضرب دو فاکتور $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ که پاسخ فرکانسی دو سیستم مرتبه اول هستند، داریم.

$$H(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)}\times\frac{1}{\left(1+{j\omega}/{10}\right)} \rightarrow H(\omega)=H_1(\omega)\times H_2(\omega) \tag{۱۳۵-۳}$$

که در آن

$$H_1(\omega)=\frac{1}{1+j\omega} \tag{۱۳۶-۳}$$

$$H_2(\omega)=\frac{1}{1+j{\omega}/{10}} \tag{۱۳۷-۳}$$

در این صورت داریم

$$20\log|H(\omega)| = 20\log|H_1(\omega)| + 20\log|H_2(\omega)| \qquad (۱۳۸-۳)$$

بنابراین جهت رسم پاسخ دامنه باید دامنه هر یک را بر حسب دسی‌بل با هم جمع کنیم و همین کار را برای فاز نیز باید انجام داد.

۳-۱۲ چگالی طیفی انرژی و توان

مفهوم چگالی یک مفهوم آشنا و شناخته شده در مهندسی و فیزیک می‌باشد. هر ذهن آشنا به مسائل علمی با شنیدن کلمه چگالی مفهوم تمرکز یک کمیت در یک محیط را در خود تداعی می‌کند و این مطلب کاملا بدیهی و صحیحی می‌باشد. البته در موارد مختلف منظور از کمیت و محیط در تعریف فوق متفاوت خواهد بود. بعنوان مثال چگالی بار الکتریکی میزان باری است که در یک نقطه از فضای یک بعدی، دو بعدی و یا سه بعدی متمرکز شده است.

عبارت چگالی طیفی انرژی (یا توان) بیانگر میزان انرژی (یا توان) یک سیگنال مفروض در فرکانس‌های مختلف می‌باشد. چگالی طیفی انرژی در مورد سیگنال‌های انرژی و چگالی طیفی توان در مورد سیگنال‌های توان تعریف می‌گردند.

اما همانطور که روشن است چگالی طیفی انرژی (یا توان) یک مفهوم حوزهٔ فرکانسی می‌باشد. بنابراین باید بتوان ارتباطی بین این مفاهیم و تبدیل فوریه (یا سری فوریه) سیگنال یافت. این ارتباط را بسادگی می‌توان توسط رابطهٔ پارسوال بدست آورد.

جهت یادآوری رابطهٔ پارسوال را برای سیگنال‌های انرژی دوباره ذکر می‌کنیم.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt \qquad (۱۳۹-۳)$$

طرف دوم این رابطه کل انرژی سیگنال را بدست می‌دهد. بنابراین با توجه به تعریف چگالی انرژی که باید انتگرال آن در سراسر حوزهٔ فرکانس مساوی کل انرژی سیگنال باشد می‌توان چگالی طیفی انرژی را به این صورت تعریف کرد.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}|X(\omega)|^2 \qquad (۱۴۰-۳)$$

با این تعریف می‌توان نوشت.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega \qquad (۱۴۱-۳)$$

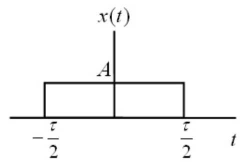
که در آن E کل انرژی سیگنال است.

بطریق مشابه و با استفاده از فرمول پارسوال برای سیگنال‌های توان می‌توان چگالی طیفی توان را به صورت زیر تعریف نمود.

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2\,\delta(\omega - k\omega_0) \quad ,\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad (۱۴۲-۳)$$

که در آن a_k ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)$ و T_0 دورهٔ تناوب آن است. در اینجا لازم به ذکر است که در بعضی کتاب‌ها چگالی طیفی انرژی بصورت $|X(\omega)|^2$ و بدون ضریب $\frac{1}{2\pi}$ تعریف شده است که تفاوت چندانی با تعریف ما ندارد.

مثال (۳-۳۴): مطلوب است تابع چگالی طیفی انرژی سیگنال زیر



شکل (۳-۳۶): سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال (۳-۳۴)

حل: می‌دانیم که برای $x(t)$ بصورت شکل فوق داریم.

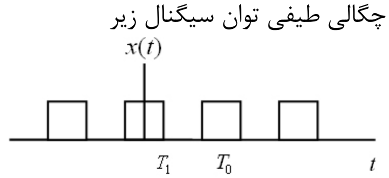
$$X(\omega) = A\,\tau\, Sinc\,\frac{\omega}{2\pi}\tau \qquad (۳-۱۴۳)$$

بنابراین طبق تعریف (۳-۱۴۰) داریم.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}|X(\omega)|^2 = \frac{A^2\tau^2}{2\pi}(Sinc\,\frac{\omega}{2\pi}\tau)^2 \qquad (۳-۱۴۴)$$

همانگونه که واضح است و دانشجویان باید خود حدس زده باشند تابع چگالی طیفی نامنفی و حقیقی است.

مثال (۳-۳۵): مطلوبست تابع چگالی طیفی توان سیگنال زیر



شکل (۳-۳۷): یک سیگنال توان با دوره تناوب $T_0 = 4T_1$

که تعریف آن در یک دوره تناوب بدین‌صورت است.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases} \qquad (۳-۱۴۵)$$

حل: همانگونه که می‌دانیم برای این سیگنال ضرایب سری فوریه بصورت زیر هستند(مثال ۳-۱۲ را ببینید).

$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \qquad (۳-۱۴۶)$$

بنابراین طبق تعریف (۳-۱۴۲) داریم.

$$S(\omega)=\frac{1}{4}\delta(\omega)+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\sin^2(k\pi/2)}{k^2\pi^2}\delta(\omega-k\omega_0) \qquad (۱۴۷-۳)$$

مثال (۳-۳۶): یک سیستم LTI بصورت زیر را در نظر بگیرید.

$$h(t)=e^{-4t}u(t)$$

سری فوریه خروجی سیستم زیر اگر ورودی بصورت $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$ باشد را بدست آورید.

حل: دوره تناوب ورودی واحد است. همچنین ضرایب سری فوریه این سیگنال برابر واحد هستند.

$$a_k=1$$

ابتدا تبدیل فوریه ورودی را می‌یابیم.

$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-2k\pi)$$

تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم با پاسخ فرکانسی سیستم برابر است با

$$H(\omega)=\frac{1}{1+j4\omega}$$

بنابراین تبدیل فوریه خروجی برابر است با

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+j4\omega}2\pi\delta(\omega-2k\pi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+j8k\pi}2\pi\delta(\omega-2k\pi)$$

سری فوریه خروجی بصورت زیر است.

$$a_k=\frac{1}{1+j8k\pi}$$

مثال (۳-۳۷): در همان سیستم مثال (۳-۲۴) اگر ورودی بصورت $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n)$ باشد

سری فوریه خروجی را بدست آورید.

حل: می‌توان ورودی را بصورت زیر تفکیک کرد.

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[t-(2n+1)]$$

بنابراین تبدیل فوریه آن به این صورت در می‌آید.

$$X(\omega)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)-\pi\, e^{-j\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)$$

بنابراین

$$X(\omega)=\left[\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)(1-e^{-j\omega})\right]$$

از حاصل‌ضرب تبدیل فوریه ورودی در پاسخ فرکانسی می‌توان سری فوریه خروجی را بدست آورد.

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi(1-e^{-jk\pi})\frac{1}{1+j4k\pi}\delta(\omega-k\pi)$$
$$a_k=\frac{(1-e^{-jk\pi})}{2(1+j4k\pi)}$$

مثال (۳-۳۸): تحقیق کنید مجموعه سیگنال‌های زیر در فاصلهٔ $[0,T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}]$ ارتونرمال هستند.

$$\Phi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}[\cos k\omega_0 t-\sin k\omega_0 t]$$

حل: شرط ارتونرمال بودن این است که

$$\int_0^T \Phi_m(t)\Phi_n(t)dt=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$
$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}}^2[\cos m\omega_0 t-\sin m\omega_0 t]\times[\cos n\omega_0 t-\sin n\omega_0 t]dt$$
$$=\frac{1}{T}[\int_0^T \cos m\omega_0 t\cos n\omega_0 tdt-\int_0^T \cos m\omega_0 t\sin n\omega_0 tdt$$
$$-\int_0^T \sin m\omega_0 t\cos n\omega_0 tdt+\int_0^T \sin m\omega_0 t\sin n\omega_0 tdt]$$

حاصل انتگرال دوم و سوم به ازاء جمیع مقادیر m و n صفر است اما برای انتگرال اول و چهارم اگر $m=n$ باشد موضوع فرق می‌کند.

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 tdt=\frac{T}{2}\quad,\int_0^T \sin^2 n\omega_0 tdt=\frac{T}{2}$$

نتیجتاً داریم

$$\int_0^T \Phi_m(t)\Phi_n(t)dt=\frac{1}{T}\left[\frac{T}{2}+0+0+\frac{T}{2}\right]=1\qquad m=n \text{ اگر}$$
$$=0\qquad m\neq n \text{ اگر}$$

پس مجموعه سیگنال‌های $\Phi_n(t)$ ارتونرمال هستند.

مثال (۳-۳۹): نشان دهید قسمتهای زوج و فرد یک سیگنال بر هم عمودند.

حل: شرط تعامد بصورت زیر است

$$<x_e(t),x_0(t)>=\int_{-\infty}^{\infty}x_e(t)x_0(t)dt=0$$

و این شرط صادق است چون $x_e(t)$ یک تابع زوج و $x_0(t)$ یک تابع فرد است.

مثال (۳-۴۰): اگر ضریب سری فوریه سیگنال $x(t)$ را a_k بنامیم. مطلوبست ضرایب سری فوریه $x(t-t_0)$ و $\dfrac{dx(t)}{dt}$.

حل: با توجه به تعریف a_k داریم.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

با تغییر آرگومان $x(t)$ خواهیم داشت.

$$x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 (t-t_0)}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 t}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه $y(t)$ بصورت زیر می‌باشند.

$$b_k = a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

در مورد سیگنال $\frac{dx(t)}{dt}$ بسادگی با مشتق‌گیری از $x(t)$ بدست می‌آوریم.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه $\frac{dx(t)}{dt}$ برابرند با $c_k = a_k jk\omega_0$.

مثال (۳-۴۱): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \sin t + \cos(2\pi t + \frac{\pi}{4})$$

حل: تبدیل فوریه بصورت زیر با بسط $x(t)$ بدست می‌آید.

$$x(t) = \frac{1}{2j}\left[e^{jt} - e^{-jt}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j(2\pi t+\frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\pi t+\frac{\pi}{4})}\right]$$

نتیجتاً تبدیل فوریه بصورت زیر است.

$$X(\omega) = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right] + \pi\left[e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-2\pi) + e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+2\pi)\right]$$

مثال (۳-۴۲): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2|n|t} u(t)$$

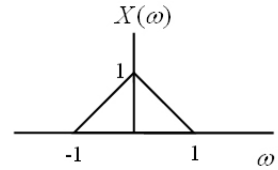
حل: تبدیل فوریه بصورت زیر است.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left(1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} e^{-2|n|t}\right) u(t)dt$$

با تغییر محل مجموع و انتگرال داریم.

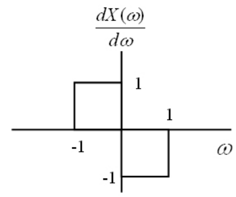
$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2nt}u(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n+j\omega}\right]$$

مثال (۳-۴۳): تبدیل معکوس فوریه طیف فرکانسی مشخص شده در شکل (۳-۴۰) را بیابید.



شکل (۳-۳۸) تبدیل فوریه مربوط به مثال ۳-۴۳

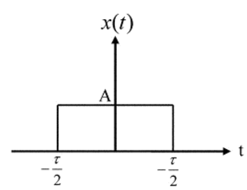
حل: با یک بار مشتق گرفتن از $X(\omega)$ شکل (۳-۳۹) حاصل می‌شود.



شکل (۳-۳۹) مشتق طیف شکل ۳-۳۸

بنابراین اول تبدیل معکوس $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ را می‌یابیم.

در حقیقت $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ شامل مجموع دو پالس مستطیلی انتقال یافته می‌باشد که یکی به اندازه $\frac{1}{2}$ واحد سمت راست و دیگری به اندازه $\frac{1}{2}$ واحد سمت چپ انتقال پیدا کرده است. بنابراین با توجه به تبدیل فوریه پالس مستطیلی (که جهت یادآوری ذکر می‌گردد)،

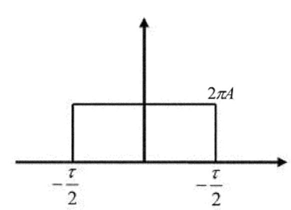


$$\xleftrightarrow{f} A\,\tau\, Sinc\frac{\omega}{2\pi}\tau$$

شکل ۳-۴۰ رابطه تبدیل فوریه یک پالس حوزه زمان

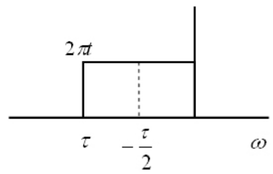
و با استفاده از خاصیت دوگانی

$$A\,\tau Sinc\frac{t}{2\pi}\tau \xleftrightarrow{f}$$



شکل ۳-۴۱ رابطه تبدیل فوریه معکوس یک پالس حوزه فرکانس

بنابراین تبدیل فوریه معکوس طیفی بصورت زیر

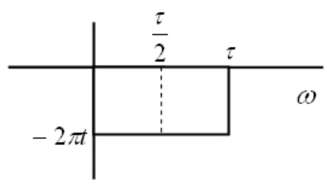


شکل (۳-۴۲) پالس انتقال یافته در حوزه فرکانس

مساوی است با

$$A\,\tau e^{-jt\,\tau/2}\,Sinc\,\frac{t}{2\pi}\tau$$

و تبدیل معکوس فوریه طیفی بصورت زیر



شکل (۳-۴۳) پالس انتقال یافته در حوزه فرکانس

مساوی است با

$$-A\,\tau\,e^{jt\,\tau/2}\,Sinc\,\frac{t}{2\pi}\tau$$

بنابراین در مقایسه با شکل $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ و با استفاده از خاصیت جمع‌پذیری تبدیل فوریه و با انتخاب $\tau=1$ و $A=\frac{1}{2\pi}$ می‌توان تبدیل معکوس $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ را یافت.

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega}\xleftrightarrow{F}-\frac{1}{2\pi}e^{j\,t/2}\,Sinc\,\frac{t}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}e^{-j\,t/2}\,Sinc\,\frac{t}{2\pi}$$

اما با توجه به خواص تبدیل فوریه می‌دانیم که $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ در واقع تبدیل فوریه $-\,jtx(t)$ می‌باشد.

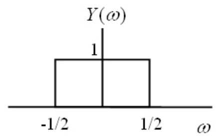
بنابراین داریم.

$$-\,jtx(t)=-\frac{1}{2\pi}(e^{j\,t/2}-e^{-j\,t/2})\,Sinc\,\frac{t}{2\pi}$$

و یا

$$x(t)=\frac{1}{\pi\,t}\,Sin\,\frac{t}{2}\,Sinc\,\frac{t}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}(Sinc\,\frac{t}{2\pi})^2$$

روش حل دیگر این مساله بدینصورت است که $X(\omega)$ را بصورت کانولوشن دو طیف بصورت زیر بنویسیم.



شکل (۳-۴۴) طیفی که از کانولوشن کردن با خودش شکل طیف ۳-۳۸ حاصل می شود.

در این صورت داریم.

$$Y(\omega) * Y(\omega) = X(\omega)$$

و با توجه به اینکه کانولوشن در حوزه فرکانس، تبدیل به ضرب در حوزه زمان می‌گردد، داریم.

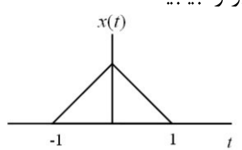
$$2\pi[y^2(t)] = x(t)$$

اما می‌دانیم که $y(t)$ یا تبدیل معکوس طیف پالسی شکل بدین صورت است.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} Sinc\ \frac{t}{2\pi}$$

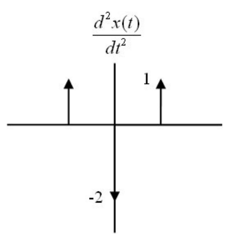
بنابراین همان پاسخ قبلی بدست می آید.

مثال (۳-۴۴): تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.



شکل (۳-۴۵) شکل سیگنال مربوط به مثال ۳-۴۴

حل: روشهای مختلفی برای حل این مساله وجود دارد که البته یکی از این روشها، روش مستقیم حل انتگرال است که در اینجا مورد نظر ما نیست. یک روش ساده‌تر مشتق‌گیری از $x(t)$ می‌باشد. اگر از $x(t)$ دوبار مشتق بگیریم داریم.



شکل (۳-۴۶) مشتق شکل موج رسم شده در شکل۳-۴۵

تبدیل فوریه این سیگنال برابر است با

$$F\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = -2 + e^{j\omega} + e^{-j\omega}$$

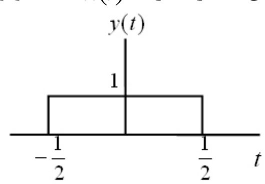
و چون تبدیل فوریه مشتق دوم $x(t)$ مساوی حاصلضرب $(j\omega)^2$ در تبدیل فوریه آن می باشد. پس

$$(j\omega)^2 X(\omega) = -2 + 2\cos\omega$$

و یا

$$X(\omega)=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}=\frac{4\sin^2(\frac{\omega}{2})}{\omega^2}$$

البته این روش وقتی قابل قبول است که $x(t)$ فاقد مقدار ثابت باشد. در غیر این صورت فرآیند مشتق گیری باعث حذف مولفه ثابت سیگنال شده و در پاسخ نهائی باید بطور جداگانه تاثیر این مولفه را بصورت ضربه در مبدا وارد نمود. روش دیگر تجزیه $x(t)$ به کانولوشن دو سیگنال پالسی است.



شکل (۳-۴۷) سیگنال پالسی برای تولید سیگنال مثلثی در فرآیند کانولوشن

تبدیل فوریه $y(t)$ عبارت است از

$$Y(\omega)=Sinc\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\sin{\omega/2}}{\omega/2}$$

و چون $x(t)=y(t)*y(t)$ داریم.

$$X(\omega)=Y^2(\omega)$$

بنابراین داریم.

$$X(\omega)=\frac{\sin^2{\omega/2}}{\omega^2/4}=\frac{4\sin^2{\omega/2}}{\omega^2}$$

مثال (۳-۴۵): تبدیل فوریه معکوس $X(\omega)$ را بیابید.

$$X(\omega)=\cos(4\omega+\frac{\pi}{3})$$

حل:

$$X(\omega)=\frac{1}{2}\left[e^{j(4\omega+\frac{\pi}{3})}+e^{-j(4\omega+\frac{\pi}{3})}\right]$$

و به سادگی می‌توان نوشت.

$$x(t)=\frac{1}{2}[e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(t+4)+e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(t-4)]$$

مثال (۳-۴۶): کدامیک از عبارتهای زیر صحیح است؟

الف) تمام توابع قدرت تبدیل فوریه دارند.

ب) هیچکدام از توابع قدرت تبدیل فوریه ندارند.

ج) تمام توابع انرژی تبدیل فوریه دارند.

د) هیچکدام از توابع انرژی تبدیل فوریه ندارند.

هـ) بعضی از توابع انرژی و بعضی از توابع قدرت تبدیل فوریه دارد.

حل: قسمت (ج) صحیح است. چون تابع انرژی یکی از شرایط کافی وجود تبدیل فوریه را ارضاء می‌کند و آن محدود بودن انرژی سیگنال است. یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt < \infty$$

بنابراین تمام توابع انرژی تبدیل فوریه دارند.

مثال (۳-۴۷): اگر $f(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ و $X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$ باشد مقدار $F(\dfrac{\omega}{4})$ و $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt$ را بیابید.

حل: با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه $f(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ داریم.

$$F(\omega)=(j\omega)^2 X(\omega)$$

از اینجا $F(\dfrac{\omega}{4})$ به سادگی بدست می آید. طبق رابطه پارسوال داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\omega^4 d\omega = \frac{1}{2\pi}(\frac{2}{5}) = \frac{1}{5\pi}$$

مثال (۳-۴۸): سیستم متوسط متحرک[۱۴] توسط رابطه زیر مشخص می‌گردد. مطلوبست $H(\omega)$ یا تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم.

$$y(t)=\frac{1}{2T_0}\int_{t-T_0}^{t+T_0}x(\alpha)d\alpha$$

حل: اگر ورودی سیستم $x(t)$ را مساوی ورودی ضربه $\delta(t)$ قرار دهیم داریم.

$$h(t)=y(t)=\frac{1}{2T_0}\int_{t-T_0}^{t+T_0}\delta(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2T_0}[u(t+T_0)-u(t-T_0)]$$

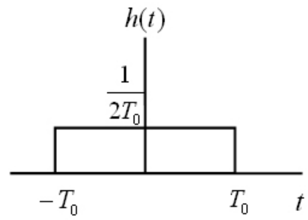
و پاسخ فرکانسی بسادگی بدست می‌آید.

$$H(\omega)=Sinc\frac{\omega T_0}{\pi}$$

پاسخ ضربه بصورت شکل (۳-۴۸) ترسیم می‌گردد.

---

1. Moving Average



شکل (۳-۴۸) پاسخ ضربه سیستم متوسط متحرک

مثال (۳-۴۹): تعیین کنید که کدامیک از عبارتهای زیر صحیح هستند.

الف) اگر $x(t)$ فرد باشد، در آن صورت $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 0$ می‌باشد.

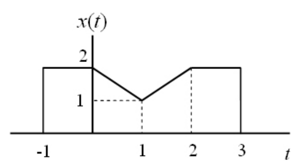
ب) اگر $x(t)$ زوج باشد در آن صورت $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega)d\omega = 0$ می‌باشد.

ج) اگر $x(t)$ متناوب باشد در آ نصورت $X(\omega)$ نیز متناوب است.

د) اگر $x(t)$ حقیقی باشد، در آن صورت $X(\omega)$ نیز حقیقی است.

حل: بندهای (الف) و (ب) صحیح و بندهای (د) و (ج) غلط است.)

مثال (۳-۵۰): سیگنال $x(t)$ بصورت شکل زیر را در نظر بگیرید.



شکل (۳-۴۹) سیگنال مربوط به مثال ۳-۵۰

الف) زاویه $X(\omega)$ را بیابید.

ب) $X(0)$ را محاسبه کنید.

ج) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega$ را بدست آورید.

حل: الف) با توجه به شکل $x(t+t_0)$ یک سیگنال زوج است بنابراین تبدیل فوریه آن حقیقی و زوج خواهد بود. اما تبدیل فوریه $x(t)$ با تبدیل فوریه $x(t+t_0)$ (با فرض اینکه $y(t) = x(t+t_0)$) با رابطه زیر مربوط است.

$$Y(\omega) = e^{j\omega t_0} X(\omega)$$

بنابراین داریم

$$X(\omega) = Y(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

و چون $Y(\omega)$ حقیقی خالص است، زاویه $X(\omega)$ مساوی $-\omega t_0$ است.

$$\angle X(\omega) = -\omega\, t_0$$

ب) چون

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

داریم

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

برای محاسبه $X(0)$ کافیست سطح زیر منحنی $x(t)$ را حساب کرد، پس $X(0) = 7$.

ج: با استفاده از رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}dt$$

و با قرار دادن $t = 0$ داریم.

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega$$

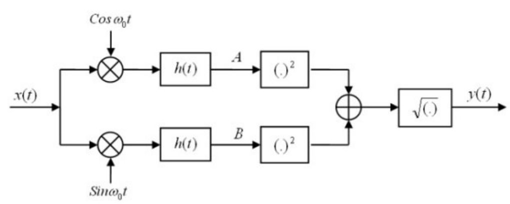
بنابراین داریم.

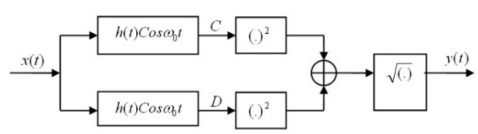
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

مثال (۳-۵۱): ثابت کنید که خروجی دو سیستم زیر یکسان است.

شکل (۳-۵۰) سیستم مربوط به مثال ۳-۵۱

حل:





$$A = \int x(\tau)\cos\ \omega_0\tau\ \ h(t-\tau)d\tau$$

$$B = \int x(\tau)\sin\ \omega_0\tau\ \ h(t-\tau)d\tau$$

$$C = \int x(\tau)\cos[\ \omega_0(t-\tau)]\ \ h(t-\tau)d\tau$$

$$D = \int x(\tau)\sin[\ \omega_0(t-\tau)\ ]\ h(t-\tau)d\tau$$

با بسط $\cos\omega_0(t-\tau)$ و $\sin\omega_0(t-\tau)$ در مورد C و D داریم.

$$C = \int x(\tau)h(t-\tau)[\cos\omega_0 t.\cos\omega_0\tau + \sin\omega_0 t.\sin\omega_0\tau]d\tau$$

$$= \cos\omega_0 t\int x(\tau)h(t-\tau)\cos\omega_0\tau + \sin\omega_0 t\int x(\tau)h(t-\tau)\sin\omega_0\tau\ \ d\tau$$

$$= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

و بهمین ترتیب برای D داریم

$$D = A\sin\omega_0 t - B\cos\omega_0 t$$

در نتیجه داریم

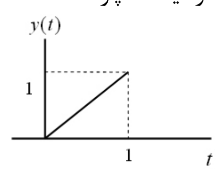
$$C^2 = A^2\cos^2\omega_0 t + B^2\sin^2\omega_0 t + 2AB\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t$$
$$D^2 = A^2\sin^2\omega_0 t + B^2\cos^2\omega_0 t - 2AB\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t$$
$$C^2 + D^2 = A^2(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t) + B^2(\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t)$$
$$\Rightarrow C^2 + D^2 = A^2 + B^2$$

بنابراین خروجی هر دو سیستم یکسان است.

مثال (۳-۵۲): یک سیستم LTI، با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید.

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & 2 < |\omega| < 3 \\ 0 & \text{سایر فرکانسها} \end{cases}$$

آیا می‌توان یک ورودی $x(t)$ به این سیستم یافت که خروجی سیستم فوق به آن مطابق شکل زیر باشد؟ اگر هست آن را مشخص کنید و اگر نیست چرا؟



شکل (۳-۵۱) خروجی سیستم مربوط به مثال ۳-۵۲

حل: چون خروجی در حوزه زمان محدود است پس در حوزه فرکانس نامحدود خواهد بود. از طرفی، چون اصلاً خروجی سیستم $H(\omega)$ نمی‌تواند از لحاظ فرکانسی نامحدود باشد، نمی‌توان یک ورودی به سیستم فوق یافت که خروجی $y(t)$ (شکل فوق) را نتیجه دهد.

مثال (۳-۵۳): آیا سیستم مطرح شده در مثال (۳-۳۸): معکوس پذیر است؟ توضیح دهید.

حل: خیر، چون باند فرکانسی $H(\omega)$ محدود است و اگر فرض کنیم $G(\omega)$ سیستم معکوس $H(\omega)$ باشد باید رابطه زیر به ازاء همه فرکانسها صادق باشد.

$$G(\omega)H(\omega) = 1$$

ملاحظه می‌شود که در خارج از محدوده $2 < |\omega| < 3$ تساوی فوق نمی‌تواند برقرار شود چون $H(\omega)$ مساوی صفر است و اصولاً در حالت کلی می‌توان گفت تمام سیستم‌های که از لحاظ فرکانسی باند محدود هستند معکوس پذیر نمی‌باشند.

مثال (۳-۵۴): سیگنال حقیقی $x(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(\omega)$ می‌باشد که دامنه آن از رابطه زیر تبعیت می‌کند

$$Ln|X(\omega)| = -|\omega|$$

$x(t)$ را تعیین کنید اگر

الف) $x(t)$ سیگنال زوج باشد.

ب) $x(t)$ سیگنال فرد باشد.

حل: الف) چون $x(t)$ سیگنال زوج است باید $X(\omega)$ در این حالت حقیقی خالص و زوج باشد. یعنی

$$X(\omega)=\begin{cases} e^{\omega} & \omega<0 \\ e^{-\omega} & \omega>0 \end{cases}$$

در نتیجه

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-jt}+\frac{1}{1+jt}\right]=\frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

ب) چون $x(t)$ سیگنال فرد است باید $X(\omega)$ موهومی خالص و فرد باشد.

یعنی

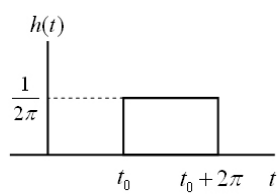
$$X(\omega)=\begin{cases} -je^{\omega} & \omega<0 \\ je^{-\omega} & \omega>0 \end{cases}$$

در نتیجه

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{j}{2\pi}\left[\frac{-1}{1+jt}+\frac{1}{1-jt}\right]=\frac{-t}{\pi(1+t^2)}$$

مثال (۳-۵۵): آیا می‌توان سیستمی با قدر مطلق پاسخ فرکانسی بصورت $\left|Sinc(\omega)\right|$ ساخت؟

حل: سیستمی که دارای قدر مطلق تبدیل فوریه بصورت $\left|Sinc(\omega)\right|$است دارای پاسخ ضربه ای بصورت زیر است.

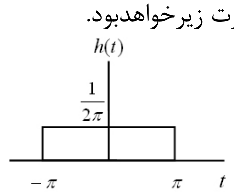


شکل (۳-۵۲) پاسخ ضربه سیستمی با قدر مطلق پاسخ فرکانسی بصورت $\left|Sinc(\omega)\right|$

که در آن t_0 می‌تواند مثبت یا منفی باشد. لازمه عملی بودن ساخت چنین سیستمی، علی بودن آن است. بنابراین لازم است $t_0>0$ باشد. چنانچه سیستم را بصورت زیر تعریف کنیم.

$$H(\omega)=Sinc(\omega)$$

در آن صورت پاسخ ضربه سیستم بصورت زیرخواهدبود.



شکل (۳-۵۳) پاسخ ضربه سیستمی با پاسخ فرکانسی بصورت $Sinc\,(\omega)$

ملاحظه می‌شود که سیستم غیر علی است. برای علی شدن سیستم فوق، یک تاخیر باندازه π یا بیشتر باید به آن افزود. بنابراین سیستم زیر پاسخ مساله ما خواهد بود.

$$H(\omega) = Sinc\ \omega\ e^{-j\omega l} \quad , \ l \ge \pi$$

۳-۱۳ خلاصه

در این فصل تبدیل فوریه بعنوان ابزاری کارآمد در تجزیه و تحلیل سیستم LTI معرفی گردید و برخی خواص تبدیل فوریه و برخی تعاریف رایج در حوزهٔ فرکانس ارائه شد.

خاصیت نمونه‌برداری دارای کاربردهای فراوانی است که با تفصیل در فصل ۵ در مورد آن توضیح داده خواهد شد.

انتظار می‌رود که دانشجو در پایان این فصل بتواند از تبدیل فوریه در جایی که عملیات کانولوشن برای یافتن پاسخ سیستم مشکل است، استفاده شایانی ببرد. همچنین دانشجو باید بتواند در عملیات یافتن پاسخ برای سیستم های پیچیده، با ترکیب برخی خواص با یکدیگر به آسانی انتقال عملیات از حوزهٔ زمان به فرکانس یا بالعکس را انجام دهد.

۳-۱۴ مسائل

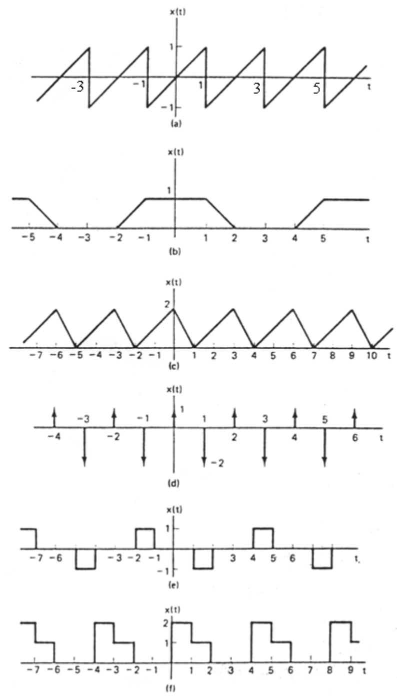
۳-۱ سری فوریه سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $\cos\left[\dfrac{\pi(t+1)}{4}\right]$

ب) $x(t)=\begin{cases}(1-t)+\sin 2\pi t & 0<t<1\\ 1+\sin 2\pi t & 1<t<2\end{cases}$ و $x(t)$ متناوب با دوره تناوب ۲ می‌باشد.

ج) $x(t)=\begin{cases}\sin \pi t & 0\le t\le 2\\ 0 & 2\le t\le 4\end{cases}$ و $x(t)$ متناوب با دوره تناوب ۴ می‌باشد.

۳-۲ سری فوریه سیگنال‌های زیر را بیابید.



شکل۳-۵۴ سیگنالهای مربوط به مسئله ۳-۲

۳-۳ سیستمی که توسط معادله دیفرانسیل زیر مشخص می‌شود را در نظر بگیرید.

$$y(t) = t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt}$$

الف) آیا این سیستم LTI است.؟

ب) نشان دهید که توابعی بصورت $\Phi_k(t) = t^k$ توابع ویژه سیستم فوق هستند.

ج) پاسخ سیستم فوق به ورودی زیر را بیابید.

$$x(t) = 10t^{-10} + 3t + \frac{1}{2}t^4 + \pi$$

۳-۴ ثابت کنید که خروجی هر یک از سه سیستم زیر به ورودی $x(t)=\cos t$ با پاسخ دو سیستم دیگر به آن برابر است.

1) $h_1(t) = u(t)$

2) $h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$

3) $h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$

۳-۵ تابع همبستگی دو تابع $x(t)$ و $y(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

مطلوبست:

الف) تبدیل فوریه تابع همبستگی برحسب تبدیلهای فوریه $X(\omega)$ و $Y(\omega)$.

ب) اگر $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب ورودی و خروجی یک سیستم LTI باشند، با فرض اینکه

$$x(t)=\begin{cases} t & 0\langle t\langle 1 \\ 0 & t\le 0, t\ge 1 \end{cases}$$

$$h(t)=e^{-\alpha t} \quad ,\alpha\rangle 0$$

مطلوبست محاسبه $\Phi_{yy}(\omega),\Phi_{xy}(\omega),\Phi_{xx}(\omega)$.

۳-۶ خروجی سیستمی با پاسخ ضربه $h(t)=\dfrac{\sin 2\pi t}{\pi t}$ به ورودی‌های زیر را بیابید.

$$1) x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t+\frac{10k}{3})$$

$$2) x_2(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

$$3) x_3(t)=\cos(\omega\pi\, t)$$

۳-۷ مطلوبست خروجی سیستم های زیر اگر $x(t)=\sin(2\omega_c t)+\cos(\omega_c \frac{t}{2})$.

$$h_1(t)=\frac{d}{dt}\frac{\sin\omega_c t}{2\pi t} \qquad h_2(t)=\frac{\sin 3\omega_c t}{\pi t}$$

$$h_3(t)=e^{-j2\pi \omega/\omega_c} \qquad h_4(t)=u(t)$$

کدامیک از سیستم های فوق پایدار است؟

۳-۸ با توجه به تعریف تبدیل هیلبرت

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}.d\tau$$

تبدیل هیلبرت سیگنال‌های $x_1(t)=\cos t$, $x_2(t)=e^{-t}u(t)$ را بدست آورید.

۳-۹ پاسخ فرکانسی سیستمی که خروجی آن تبدیل هیلبرت ورودی آن است را بدست آورید.

۳-۱۰ تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]u(t)$, $\alpha>0$

ب) $e^{2+t}u(-t+1)$

ج) $x(t)=\begin{cases} 1+\cos\pi t & |t|\le 1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$

د) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-|t-2n|}$

هـ) $\delta(t)+2\delta(3-2t)$

و) $e^{-3t}[u(t+2)-u(t-3)]$

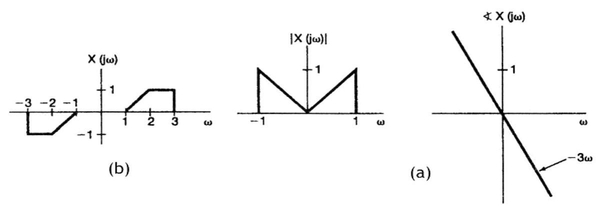
ز) $e^{-3|t|}\sin 4t$

ح) $[te^{-3t}\sin 4t]u(t)$

۳-۱۱ تبدیل معکوس فوریه را برای $X(\omega)$ های زیر بیابید.

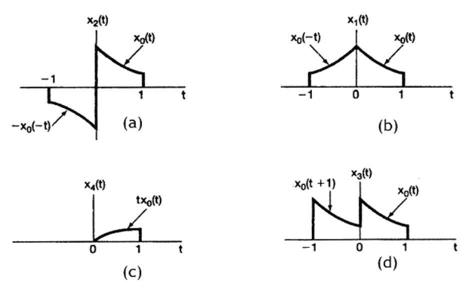
الف) $X(\omega)=\dfrac{2\sin[3(\omega-2\pi)]}{\omega-2\pi}$

(ب) و (ج) مطابق شکل.



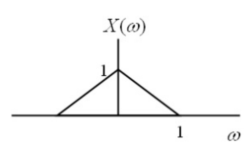
شکل۳-۵۵ شکل مربوط به مسئله ۳-۱۰

۳-۱۲ اگر $x_0(t)=\begin{cases}e^{-t} & 0\le t\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$ باشد مطلوبست تبدیل فوریه سیگنال‌های رسم شده در شکل زیر.



شکل ۳-۵۶ شکل مربوط به مسئله ۳-۱۱

۳-۱۳ تبدیل فوریه سیگنال $y(t)=x(t)p(t)$ را بیابید، اگر $X(\omega)$ بصورت شکل زیر و $p(t)$ توسط رابطه‌های زیر داده شده باشند.



شکل۳-۵۷ شکل مربوط به مسئله ۳-۱۲

الف) $p(t)=\cos 2t-\cos t$

ب) $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\pi)$

ج) $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)$

د) $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-4n\pi)$

هـ) $p(t)=\sin t\sin 2t$

و) $p(t)=\cos t$

۳-۱۴ سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر مفروض است.

$$H(\omega)=\frac{a-j\omega}{a+j\omega}$$

اگر ورودی سیستم $x(t)=e^{-bt}u(t)$ و $b>0$ باشد مطلوبست خروجی سیستم به ازای

الف) $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

ب) $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

ج) $\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$

۳-۱۵ با فرض $a=1$، خروجی سیستم مساله (۳-۱۳) را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t)=Cos\ t/\sqrt{3}+Cost+Cos\sqrt{3}t$$

۳-۱۶ معکوس سیستم زیر را بیابید.

$$h(t)=e^{-at}u(t)\qquad(\forall a>o)$$

۳-۱۷ رابطه ورودی و خروجی یک سیستمLTI علی بدین صورت است.

$$\frac{dy(t)}{dt}+10\,y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-x(t)$$

که در آن $z(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$ می‌باشد.

الف) پاسخ فرکانسی سیستم را بیابید.

ب) پاسخ دامنه و فاز را توسط رسم بود نمایش دهید.

ج) پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

۳-۱۸ خروجی یک سیستمLTI علی توسط رابطه زیر به ورودی مربوط است.

$$\frac{dx(t)}{dt}+2\,y(t)=x(t)$$

الف) پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آورده و رسم نمائید.

ب) اگر تبدیل فوریه ورودی بصورت زیر باشد خروجی را بیابید.

$$X_1(\omega)=\frac{1+j\omega}{2+j\omega}\quad X_2(\omega)=\frac{2+j\omega}{1+j\omega}\quad X_3(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

۳-۱۹ رابطه ورودی و خروجی یک سیستم LTI علی توسط رابطه زیر داده شده است.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=2x(t)$$

الف) پاسخ فرکانسی را بدست آورده و رسم نمایید.

ب) خروجی سیستم را برای ورودی $x(t)=te^{-2t}$ بیابید.

۳-۲۰ تبدیل معکوس فوریه $X(\omega)$ را بیابید اگر

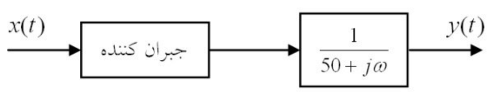
الف) $X(\omega)=1+\frac{j\omega}{10}$

ب) $X(\omega)=\frac{1+\frac{j\omega}{10}}{1+\omega}$

ج) $X(\omega)=\frac{1+j3\omega}{(1+j\omega)(1+j2\omega)}$

۳-۲۱ آیا می‌توان سیگنالی را یافت که تبدیل فوریه آن $X(\omega)=\frac{1}{1-j\omega}$ باشد؟ توضیح دهید.

۳-۲۲ سیستم رسم شده در زیر را در نظر بگیرید.



شکل۳-۵۸ سیستم مربوط به مسئله ۳-۲۱

فرض کنید خواسته باشیم پاسخ فرکانسی کل سیستم دارای شرایط زیر باشد:

الف) لگاریتم دامنه $H(\omega)$ دارای شیب $-40\,{dB}/{dec}$ برای $\omega>1000$ باشد.

ب) برای $0<\omega<1000$ لگاریتم دامنه بین $\pm 10dB$ نوسان کند.

مطلوبست جبران کننده‌ای که شرایط فوق را برای $H(\omega)$ برآورده کند.

۳-۲۳ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.

$$H(\omega)=\frac{5(j\omega)+7}{(4+j\omega)[(j\omega)^2+j\omega+1]}$$

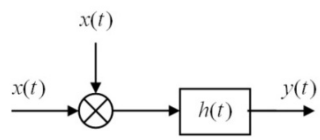
۳-۲۴ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.

$$H(\omega)=\frac{1}{(j\omega+2)^3}$$

۳-۲۵ دو سیگنال دلخواه $x_1(t), x_2(t)$ در فضای بردارها را با انرژی یکسان در نظر بگیرید. می‌خواهیم سیگنال‌های فوق را بگونه‌ای انتخاب کنیم که فاصله آنها در فضای سیگنال‌ها بیشینه باشد. مطلوبست رابطه میان دو سیگنال (دو بردار) فوق.
راهنمایی: فاصله دو سیگنال در فضای سیگنال‌ها مشابه فاصله دو بردار در فضای بردارها است و طول هر بردار مشابه انرژی سیگنال است.
۳-۲۶ تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = 5(0.8)^{|t|}$$

۳-۲۷ کدامیک از سیگنال‌های زیر می‌توانند توابع ویژه سیستم‌های LTI باشند؟
الف) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$
ب) $x(t) = e^{j\omega_0 t} + e^{j\omega_1 t}$
ج) $x(t) = e^{j(\omega_0+\omega_1)t}$
۳-۲۸ بازای ورودی $x(t) = A\tau\, Sinc\left(\frac{t}{2\pi}\tau\right)$ خروجی سیستم زیر را بیابید.

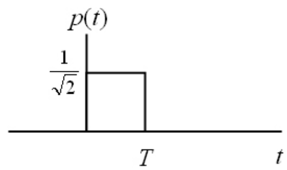


شکل۳-۵۹ سیستم مربوط به مسئله ۳-۲۷
۳-۲۹ تبدیل فوریه هر یک از سیگنال‌های زیر را بیابید.
الف) $x(t) = \cos\omega_0 t u(t)$
ب) $x(t) = \cos\omega_0 t[u(t) - u(t-T_0)]\ , T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

۳-۳۰ سیستمی که رابطه ورودی و خروجی آن توسط رابطه $y(t) = \frac{1}{2T_0}\int_{t-T_0}^{t+T_0} x(\alpha)d\alpha$ مشخص می‌شود، مفروض است. ثابت کنید خروجی سیستم به ورودی زیر مقداری مستقل از زمان (DC) است.

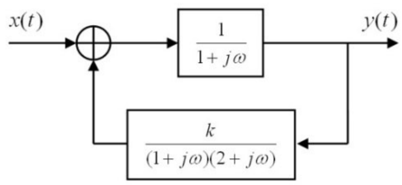
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \omega_0) \quad ,\omega_0 = \frac{2\pi}{t}$$

۳-۳۱ ثابت کنید مجموعه سیگنال‌های بصورت زیر یک مجموعه متعامد یکه هستند.
$\Phi_k(t) = p(t-kT)$ و $p(t)$ مطابق شکل زیر است.



شکل۳-۶۰ شکل مربوط به مسئله ۳-۳۰

۳-۳۲ شرط اینکه سیستم پس خور(فیدبک) زیر دارای پاسخ فرکانسی محدود باشد (تبدیل فوریه پاسخ ضربه موجودباشد) را بیابید.

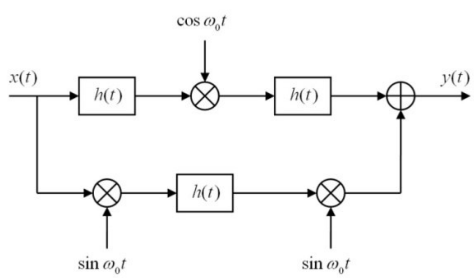


شکل۳-۶۱ یک سیستم پس خور(فیدبک) مربوط به مسئله ۳-۳۱

۳-۳۳ $h(t)$ را بیابید اگر علی باشد و $\left|H(\omega)\right|^2 = \dfrac{6}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$. آیا پاسخ این مسئله یکتاست.

۳-۳۴ خروجی سیستم زیر را بیابید.

$$x(t) = u(t) - u(t-T)$$
$$h(t) = k_1\delta(t) + k_2\delta(t-T)$$



شکل۳-۶۲ سیستم مسئله ۳-۳۳

۳-۳۵ با استفاده از تبدیل فوریه ثابت کنید سیستم زیر معکوس پذیر نیست.

$$h(t) = u(t+T_o) - u(t-T_o)$$

۳-۳۶ تبدیل فوریه پالس گاوسی کسینوسی بصورت زیر را بیابید.

$$x(t) = Ae^{-\pi t^2}\cos\omega_0 t$$

(ω_0 معلوم)

۳-۳۷ مطلوبست محاسبه انتگرال زیربا استفاده از خواص تبدیل فوریه.

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sinc^2 t dt$$