فصل چهارم

تبدیل فوریه گسسته زمان

مقدمه

روش‌های پیوسته زمان که در فصل ۳ مورد بررسی قرار گرفتند، دارای اهمیت زیادی هستند. در حقیقت این ابزارها به همراه نوع گسسته زمان آن تشکیل یک زوج ابزار قوی و کارآمد را در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI می‌دهند. اگرچه وجوه تشابه زیادی میان تبدیل فوریه پیوسته زمان و گسسته زمان وجود دارد، اما هنوز تفاوت‌های عمده‌ای میان این دو نوع وجود دارد که ناشی از ماهیت متفاوت آنهاست.

در این فصل بر آن نیستیم که از لحاظ تاریخی، منشأ تبدیل فوریه گسسته زمان را مورد بررسی قرار دهیم. اما واضح است که تبدیل فوریه اساساً برای سیگنال‌های پیوسته زمان ارائه شده است و بعدها با توجه به کاربرد وسیع دنباله‌های گسسته زمان، نوع دیگری از این تبدیل که مناسب برای استفاده در حالت گسسته زمان است، ارائه شده است. لذا منطقی است که بتوان با ایجاد برخی تناظرها و با استفاده از تعاریف و خواص حالت پیوسته زمان، تعاریف و خواص متناظر برای حالت گسسته زمان را بدست آورد.

از لحاظ مفهوم، شناخت و درک برخی خواص در حوزهٔ پیوسته زمان بسیار ساده‌تر و بدیهی‌تر از نوع گسسته زمان آن است. به عنوان مثال مفهوم پایین‌گذر یا بالاگذر بودن طیف یک سیگنال در حالت پیوسته زمان کاملاً بدیهی است. به عبارت دیگر اگر طیف سیگنال بیشتر در حوالی فرکانس‌های پایین و صفر متمرکز باشد، آن سیگنال پایین‌گذر است و متناسب با میزان دور بودن محل طیف از فرکانس‌های حوالی صفر، سیگنال میان‌گذر و یا بالاگذر می‌شود. اما در مورد سیگنال‌های گسسته زمان، طیف حوزه فرکانس متناوب است و در فاصله فرکانسی 2π مرتباً تکرار می‌شود، لذا تعریف پایین‌گذر یا بالاگذر بودن باید دقیق‌تر اعمال گردد. در این مورد اگر طیف سیگنال حول مضارب زوج π، $(2k\pi)$ متمرکز باشد، سیگنال پایین‌گذر است و اگر طیف سیگنال حول مضارب فرد π، $[(2k+1)\pi]$ متمرکز باشد، سیگنال بالاگذر است.

در این فصل پس از بررسی مختصری بر روی دنباله‌های متفاوت و استخراج ضرایب سری فوریه، توجه خاص خود را به تبدیل فوریه و بررسی خواص آن متمرکز می‌کنیم. در این رهگذر ضرایب DFT یک دنباله را تعریف کرده و از آن در محاسبه کانولوشن از کامپیوتر کمک می‌گیریم. با توجه به اهمیت تفاوت‌ها و شباهت‌های روش‌های پیوسته و گسسته زمان در تمام مراحل فوق و به مناسبت، از این تفاوت‌ها و شباهت‌ها صحبت به میان خواهیم آورد و قسمت خاصّی را به آن اختصاص خواهیم داد و در انتهای فصل به بررسی روش‌های ساخت سیستم‌های مختلف گسسته زمان LTI به کمک بلوک‌های اساسی می‌پردازیم.

۴-۱ توابع ویژه [1] سیستم‌های LTI گسسته زمان

مراحل نمایش فوریه در حالت گسسته زمان (یا به عبارت دیگر مراحل نمایش یک دنباله (تابع) دلخواه به صورت ترکیب خطی توابع نمایی مختلط)، با آنچه در حالت پیوسته زمان انجام دادیم، یکسان است. نشان می‌دهیم که دنباله‌های مختلط نمایی، توابع ویژه برای سیستم‌های LTI گسسته زمان هستند. به عنوان مثال فرض کنید که یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ دارای ورودی زیر باشد.

$$x[n] = z^n \tag{۴-۱}$$

که در آن z یک عدد مختلط است. خروجی سیستم را می‌توان از جمع کانولوشن بدست آورد.

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^n h[k] z^{-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \end{aligned} \tag{۴-۲}$$

در این جا دیده می‌شود که اگر ورودی ($x[n]$) یک تابع نمایی مختلط مثل تابع (۴-۱) باشد، خروجی نیز شامل همان تابع نمایی مختلط خواهد بود که در یک ضریب ثابت (که تابع مقدار z است) ضرب شده است.

$$y[n] = H(z) z^n \tag{۴-۳}$$

که در آن

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \tag{۴-۴}$$

در اینجا $H(z)$ مقدار ویژه مربوط به تابع ویژه z^n خواهد بود.

در حالت کلی‌تر می‌بینیم که معادله (۴-۳) با توجه به خاصیت جمع اثر که در مورد سیستم‌های LTI صادق است، روشن‌گر این مطلب است که نمایش سیگنال‌ها برحسب توابع نمایی مختلط می‌تواند ما را به عبارت‌های مناسبی برای پاسخ یک سیستم LTI راهنمایی کند. بدین صورت که اگر ورودی یک سیستم LTI گسسته به صورت ترکیب خطی از توابع نمایی مختلط نمایش داده شود، یعنی اگر $x[n]$ به صورت زیر نوشته شود:

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \tag{۴-۵}$$

در آن صورت خروجی با توجه به خاصیت جمع آثار و رابطه (۴-۳) به صورت زیر بیان می‌گردد

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n \tag{۴-۶}$$

به عبارت دیگر خروجی را می‌توان به صورت ترکیب خطی از همان دنباله‌های مختلط نمایش داد که در تولید $x[n]$ به صورت مجموع (۴-۵) شرکت داشته‌اند، با این تفاوت که علاوه بر ضرایب a_k که

[1] Eigen Function

مربوط به بسط ورودی برحسب توابع نمایی هستند، باید ضریب $H(z_k)$ را نیز بـه عنـوان مقـدار ویـژه تابع z_k^n اضافه کرد.

مشابه روش فصل سوم ما بحث خود را به تـوابعی بـه صـورت $e^{j\Omega n}$ (بـه عبـارت دیگـر z^n بـا $|z|=1$) محدود می‌کنیم. در فصل هفتم حالت کلی را در نظر خواهیم گرفت.

در قسمت‌های بعدی ابتدا نمایش فوریه سیگنال‌های تناوبی را در نظر خواهیم گرفـت و در قسـمت (۴-۳) تبدیل فوریه گسسته زمان را به عنوان تعمیمی از سری فوریه، دقیقاً مشـابه آنچـه در بخـش (۳-۴) انجام دادیم، مطرح خواهیم کرد. روش کار دقیقاً مشابه روش پیوسته زمـانی اسـت کـه در فصـل سـوم بحث شده است. همانگونه که قبلاً اشاره شد میان حالت پیوســته و گسســته زمـانی شـاهد اختلافـات و تشابهات مهمی خواهیم بود که به تفصیل به بررسی هر یک خواهیم پرداخت.

۴-۲ نمایش دنباله‌های متناوب

۴-۲-۱ ترکیب خطی نمایی‌های مختلط

همانگونه که در فصل ۲ توضیح داده شد، یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ تنـاوبی اسـت اگـر بـازاء عـدد ثابت و مثبت N داشته باشیم.

$$x[n]=x[n+N] \tag{۴-۷}$$

به عنوان مثال همان‌گونه که در قسمت (۲-۴-۳) دیدیم، تابع نمایی مختلط به صـورت $e^{j[\frac{2\pi}{N}]n}$ تنـاوبی با دوره تناوب N می‌باشد. بعلاوه مجموعهٔ دنباله‌های نمایی مختلط که با دوره N تنـاوبی هسـتند، بـه صورت زیر قابل نمایش هستند.

$$\phi_k[n]=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad ,k=0,\mp1,\mp2,\ldots \tag{۴-۸}$$

فرکانس زاویه‌ای همهٔ این دنباله‌ها مضربی از فرکانس زاویـه‌ای اصـلی $\frac{2\pi}{N}$ اسـت. بنـابراین همـه ایـن سیگنال‌ها را می‌توان به عنوان هم آهنگ‌های[2] مختلف این فرکانس زاویه‌ای تلقی کرد.

اختلاف مهم میان مجموعه سیگنال‌های هم آهنگ در حالت پیوســته و گسســته زمـان ایـن اسـت کـه تمامی سیگنال‌های موجود در مجموعه سیگنال‌ها، در حالت پیوسته زمـان کـه در معادلـه (۳-۱۲) داده شده‌اند، مجزا و دارای فرکانس مخصوص به خود هستند، ولی در مجموعه دنباله‌های گسسته زمـان (۴-۷) تنها N دنباله مجزا با فرکانس مخصوص به خود دیده می‌شود. دلیل این امر نیز واضـح اسـت چـون تمامی دنباله‌هایی که فرکانس زاویه‌ای آنها مضربی از 2π با هم تفاوت دارند، مشابه هستند. یعنی

$$e^{j(\Omega+2\pi r)n}=e^{j\Omega n}e^{j2\pi rn}=e^{j\Omega n} \tag{۴-۹}$$

نتیجه مستقیم این مبحث این است که $\phi_1[n]=\phi_{N+1}[n],\phi_0[n]=\phi_N[n]$ و در حالت کلی‌تر

$$\phi_k[n]=\phi_{k+rN}[n] \tag{۴-۱۰}$$

---

2 Harmonics

یعنی هنگامی که k با ضریب صحیحی از N تغییر کند، دوباره همان دنباله قبلی تولید خواهد شد.
اکنون می‌خواهیم یک دنباله تناوبی دلخواه را به صورت مجموعی از دنباله‌های $\phi_k[n]$ بنویسیم.

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{۱۱-۴}$$

از آنجائیکه $\phi_k[n]$ فقط به ازاء N مقدار متوالی از k تولید دنباله‌های مجزا می‌کند، مجموع (۴-۱۱) فقط احتیاج به N عبارت متوالی دارد، یعنی

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۱۲-۴}$$

به عنوان مثال می‌توان k را در محدوده $k=0,1,2,...,N$ و یا $k=3,4,...,N+2$ متغیر فرض کرد.
توجه شود که دراینجا فرض شده است که بتوان $x[n]$ را به صورت مجموع (۴-۱۲) بسط داد، بنابراین در مورد شرایط وجود سری فوریه یا به عبارت دیگر شرط همگرایی سری (۴-۱۲) به $x[n]$، بحث نخواهیم کرد. در جای خود شرایط وجود سری فوریه گسسته زمان را با استفاده از شرایط وجود سری فوریه پیوسته زمان ارائه می‌کنیم. همچنین لازم به ذکر است که سری فوریه پیوسته زمان در حالت کلی یک سری نامتناهی است (با تعداد جملات نامتناهی)، در حالیکه سری فوریه گسسته زمان یک سری متناهی است. بنابراین تحقیق شرط همگرایی برای سری فوریه گسسته زمان[3] بسیار ساده‌تر است.

معادله (۴-۱۲) را به عنوان سری فوریه گسسته زمانی و ضرایب a_k را به عنوان ضرایب سری فوریه می‌شناسند. همانگونه که اشاره شد در حالت گسسته زمانی این مجموع محدود است که نتیجه مستقیم رابطه (۴-۱۰) است.

۴-۲-۲ تعیین سری فوریه دنباله‌های متناوب

اکنون فرض کنید که یک دنباله به نام $x[n]$ با دوره تناوب N داشته باشیم. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان $x[n]$ را به صورت مجموع (۴-۱۲) نوشت. در صورت مثبت بودن جواب، می‌خواهیم a_k را تعیین کنیم. این سوال را می‌توان به صورت پیدا کردن جواب برای یک مجموعه معادلات خطی مطرح کرد.

اگر معادله (۴-۱۲) را برای مقادیر متوالی n محاسبه کنیم، داریم.

3 Discrete Fourier Series

$$x[0] = \sum_{k=<N>} a_k$$
$$x[1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}k} \qquad (۱۳-۴)$$
$$\vdots$$
$$x[N-1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j2\pi k(N-1)/N}$$

از آنجا که هر دو طرف معادله با دوره تناوب N، متناوب هستند، رابطه $x[N]$ مشابه $x[0]$ خواهد شد. بنابراین معادله (۴-۱۳) نمایش دهندهٔ یک مجموعه از N معادله و N مجهول a_k می‌باشد. می‌توان نشان داد که این مجموعهٔ N معادله‌ای به صورت خطی مستقل هستند و بنابراین جهت بدست آوردن a_k بر حسب مقادیر معلوم $x[n]$ قابل حل می‌باشند. اما رابطه ساده‌تری جهت تعیین a_k نیز وجود دارد. برای بدست آوردن این رابطه استفاده از معادله زیر مفید است.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \mp N, \ldots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad (۱۴-۴)$$

رابطه فوق مشابه حالت پیوسته زمان زیر است.

$$\int_0^T e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} dt = \begin{cases} T & k = 0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad (۱۵-۴)$$

برای بدست آوردن رابطه (۴-۱۴) از مجموع زیر استفاده کردیم.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} \qquad (۱۶-۴)$$

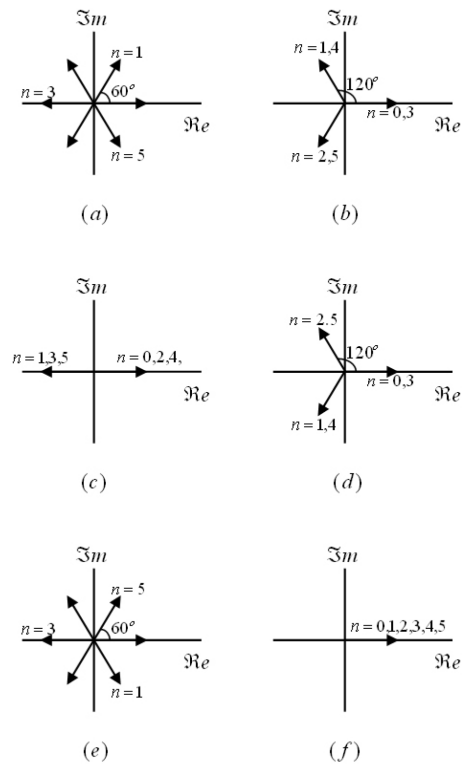
همچنین می‌دانیم تابع $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ فقط گاهی که k ضریبی از N باشد مساوی واحد است. اگر α را مساوی $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ بگیریم، داریم.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \mp N, \mp 2N, \ldots \\ \dfrac{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad (۱۷-۴)$$

از آنجایی که نمایی‌های مختلط در مجموع (۴-۱۴) متناوب با دوره تناوب N می‌باشند، تساوی مطرح شده در معادله (۴-۱۴) برای هر مجموعی که در فاصله N گرفته شود، صادق است.

$$\sum_{n=r}^{r+N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \mp N, \ldots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad (۱۸-۴)$$

نمایش تصویری معادله (۴-۱۸) در شکل (۴-۱) برای $N = 6$ داده شده است (به ازاء k های مختلف) در این شکل اعداد مختلط به صورت بردارهایی در صفحه مختلط داده شده‌اند که طول همه آنها واحد است و زاویه آنها $\frac{2\pi}{6}n$ می‌باشد که $n = 0,1,2,..,5$.



شکل (۴-۱): دنباله‌های نمایی مختلط $\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}$ در یک دوره تناوب بازاء مقادیر مختلف k.

$$k = 6(f) \quad k = 5(e) \quad k = 4(d) \quad k = 3(c) \quad k = 2(b) \quad k = 1(a)$$

از حالت تقارن هر یک از این شکل‌ها می‌توان دید که مجموع $e^{jk\frac{2\pi}{6}n}$ در یک دوره تناوب صفر است به جز هنگامی که $k = 0,6,12$ است که در حالت اخیر همه بردارها روی هم می‌افتند و به طور عددی با هم جمع می‌شوند.

اکنون سری فوریه معادله (۴-۱۲) را در نظر گرفته، هر دو طرف را در $e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$ ضرب کرده و در یک دوره تناوب N جمع می‌زنیم. طبق روابط (۴-۱۴) تا (۴-۱۸) نتیجه حاصل Na_k خواهد بود چون

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{n=<N>} \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۱۹-۴}$$

با تعویض مرتبه جمع در سمت راست داریم.

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(\frac{2\pi}{N})n(k-r)} \qquad (۴-۲۰)$$

باتوجه به معادله (۴-۱۸) مجموع دوم درطرف راست مساوی صفر است مگر در مواقعی که $k-r$ مساوی صفر یا مضرب صحیحی از N باشد. بنابراین اگر r درمحدوده تغییرات k وجود داشته باشد، در آنصورت معادله (۴-۲۰) مساوی N است اگر $k=r$ و مساوی صفر است اگر $k \neq r$. پس سمت راست مساوی Na_r می‌شود و به این ترتیب a_r بدست می‌آید.

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} \qquad (۴-۲۱)$$

بنابراین ما زوج سری فوریه (۴-۲۲) و (۴-۲۳) را به ترتیب به عنوان معادلات ترکیب و تحلیل خواهیم داشت.

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad (۴-۲۲)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad (۴-۲۳)$$

ضرایب سری فوریه a_k را اغلب به عنوان ضرایب طیفی $x[n]$ می‌نامند. این ضرایب، $x[n]$ را به صورت N دنباله هماهنگ نمایش می‌دهند. با توجه به معادله (۴-۱۲) می‌بینیم که اگر k در محدودهٔ 0 تا $N-1$ تغییر کند، می‌توان $x[n]$ را به صورت زیر نوشت.

$$x[n] = a_0\,\phi_0[n] + a_1\,\phi_1[n] + \ldots + a_{N-1}\,\phi_{N-1}[n] \qquad (۴-۲۴)$$

و اگر k در محدوده 1 تا N تغییر کند، می‌توان $x[n]$ را به صورت زیر نشان داد.

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + \ldots + a_N\phi_N[n]$$

اما چون $\Phi_0[N] = \Phi_N[n]$, $a_0 = a_N$ می‌باشد پس باید $a_0 = a_N$ شود. بنابراین

$$a_k = a_{k+N} \qquad (۴-۲۵)$$

بنابراین ضرایب سری فوریه نیز متناوب بوده ودوره تناوب آنها نیز همان دوره تناوب دنباله مربوطه می‌باشد.

مثال (۴-۱): سری فوریه دنباله $x[n]$ را بیابید اگر $x[n] = Sin\,\Omega_0\,n$

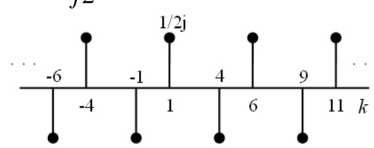
حل: این دنباله در صورتی متناوب است که $\Omega_0 = 2\pi\frac{m}{N}$ باشد (N,m هر دو عدد صحیح هستند).

پس

$$x[n] = \frac{1}{j2}e^{j(\frac{2\pi}{N}m)n} - \frac{1}{j2}e^{-j(\frac{2\pi}{N}m)n}$$

از مقایسه با رابطه (۴-۲۲) داریم.

$$a_m=\frac{1}{j2} \quad , \quad a_{-m}=-\frac{1}{j2}$$



شکل (۴-۲): نمایش ضرایب سری فوریه $x[n]$ در حالت $N=5,m=1$.

و بقیه ضرایب در فاصله جمع بندی صفر هستند. همانطور که گفتیم این ضرایب با دوره تناوب N تکرار می‌شوند. مثلاً اگر $m=1,N=5$ باشند: $a_1=a_6,a_{-1}=a_4$

اگر $N=5,m=3$ باشد $x[n]$ را به صورت زیر خواهیم داشت.

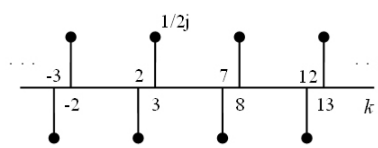
$$x[n]=\frac{1}{j2}e^{j(\frac{2\pi}{5})3n}-\frac{1}{j2}e^{-j(\frac{2\pi}{5})3n}$$

در نتیجه داریم

$$a_3=\frac{1}{j2} \quad , \quad a_{-3}=-\frac{1}{j2}$$

و با استفاده از خاصیت تناوبی داریم.

$$a_{-3+5}=a_2=-\frac{1}{j2} \quad , \quad a_{3-5}=a_{-2}=\frac{1}{j2}$$



شکل (۴-۳): نمایش ضرایب سری فوریه $x[n]$ در حالتی که $m=1,N=5$ باشد.

مثال (۴-۲): سری فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n]=1+Sin(\frac{2\pi}{N})n+3Cos(\frac{2\pi}{N})n+Cos(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})$$

حل: سیگنال فوق تناوبی با دوره تناوب N است. بابسط $x[n]$ داریم.

$$x[n]=1+\frac{1}{j2}\left[e^{j(\frac{2\pi}{N})n}-e^{-j(\frac{2\pi}{N})n}\right]+\frac{3}{2}\left[e^{j(\frac{2\pi}{N})n}+e^{-j(\frac{2\pi}{N})n}\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{j\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)2n+\pi/2\right]}+e^{-j\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)2n+\frac{\pi}{2}\right]}\right]$$

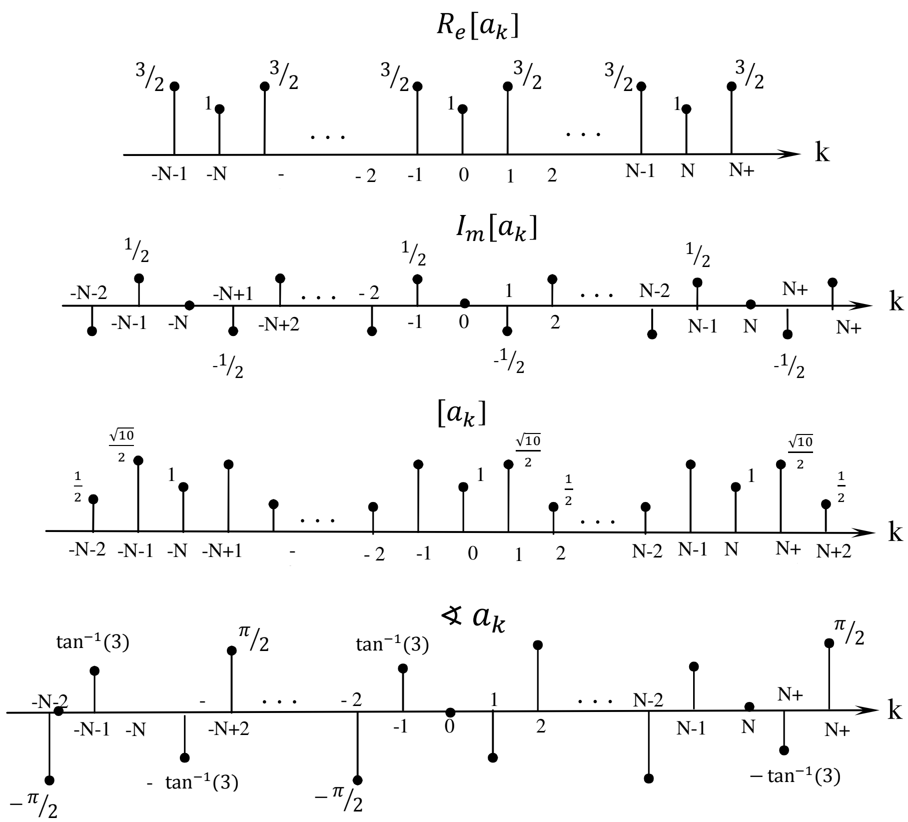
$$=1+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{j2}\right)e^{j(\frac{2\pi}{N})n}+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{j2}\right)e^{-j(\frac{2\pi}{N})n}+\frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j(\frac{2\pi}{N})2n}+$$

$$\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j(\frac{2\pi}{N})2n}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه بدست می‌آیند.

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{j2} \quad , \quad a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{j2}$$
$$a_2 = \frac{1}{2} e^{j\pi/2} = \frac{j}{2}, a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} = -\frac{j}{2}$$

که به صورت‌های زیر می‌توان آن را نمایش داد.



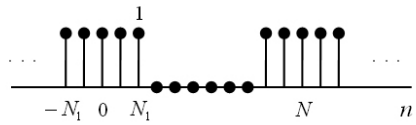
شکل (۴-۴): a) قسمت‌های حقیقی و موهومی ضرایب سری فوریه مثال (۴-۲) b)دامنهٔ همان ضرایب

توجه کنید که در مثال، $a_{-k} = a_k^*$ برای تمام مقادیر k صادق است. البته این تساوی هنگـامی صـادق است که $x[n]$ حقیقی باشد.

مثال (۴-۳): برای دنبالهٔ مربعی به صورت شکل (۴-۵) مطلوبست تعیین ضرایب سری فوریه.

حل: با استفاده از رابطه (۴-۲۲) داریم

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$



شکل (۴-۵): دنبالهٔ مربعی

چون فقط $2N_1+1$ جمله داریم. اگر m را مساوی $n+N_1$ قرار دهیم.

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})(m-N_1)} \\
&= \frac{1}{N} e^{jk(\frac{2\pi}{N})N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \\
&= \frac{1}{N} e^{jk(\frac{2\pi}{N})N_1} \frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} \\
&= \frac{1}{N} \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N.}}} \\
&= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}} \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}\left[N_1+\frac{1}{2}\right]}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left[N_1+\frac{1}{2}\right]}}{e^{jk\frac{2\pi}{2N}}-e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}}
\end{aligned}
$$

بنابراین می‌توان ضرایب سری فوریه یک دنباله مربعی را به صورت زیر نوشت.

$$
a_k = \frac{1}{N}\frac{Sin\left[k(\frac{2\pi}{N})(N_1+\frac{1}{2})\right]}{Sin\left[k(\frac{2\pi}{2N})\right]} \qquad k \neq 0, \pm N, \ldots \tag{a-۲۶-۴}
$$

$$
a_k = \frac{1}{N}(2N_1+1) \qquad k = 0, \pm N, \ldots \tag{b-۲۶-۴}
$$

عبارتی را که برای ضرایب سری فوریه بدست آوریم می‌توانیم به صورت ضرایبی از نمونه‌های پوش تـابع زیر فرض کنیم.

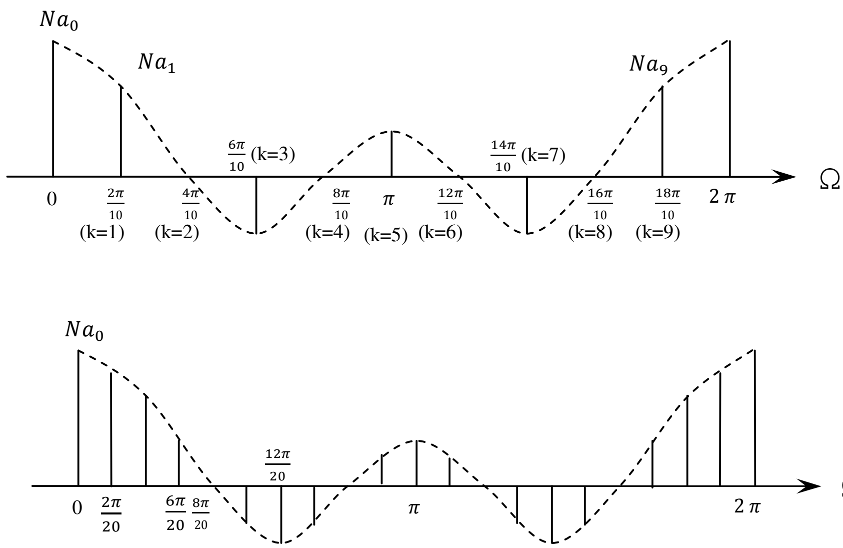
$$
Na_k = \left.\frac{Sin\left[(2N_1+1)\Omega/2\right]}{Sin(\frac{\Omega}{2})}\right|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} \tag{۲۷-۴}
$$

در شکل (۴-۶) ضرایب Na_k برای $2N_1+1=5$ و $N=10,20$ رسم شده‌اند.

با افزایش N و ثابت بودن N_1 پوش Na_k ثابت می‌ماند اما فاصلهٔ نمونه‌هایی که برای محاسـبه ضـرایب سری فوریه به کار برده می‌شوند، کمتر می‌شود. توجه شود که در حالـت پیوسـته زمـان پـوش بدسـت آمده برای یک پالس مربعی یک تابع $Sinc$ بود ولی در اینجا و در مورد دنباله مربعی بـه دلیـل تنـاوبی

بودن ضرایب سری فوریه یک $Sinc$ بدست نمی‌آید. بنابراین معادل گسسته زمان یک تابع $Sinc$ به صورت $\frac{Sin[\beta n]}{Sin[n]}$ خواهد بود.

یکی دیگر از تفاوت‌های سری فوریه گسسته و پیوسته زمان در این است که در حالت پیوسته زمان برای یک سیگنال موج مربعی متقارن دیدیم که هر چه تعداد عبارات مجموع سری فوریه به سمت ∞ میل می‌کرد، مجموع به سمت موج مربعی میل می‌کرد ولی در نقاط ناپیوستگی پدیدهٔ گیبس[1] مشاهده می‌شد. اما در حالت گسسته زمان تعداد جملات سری فوریه محدود و همچنین پدیدهٔ گیبس مشاهده نمی‌شود.



شکل (۴-۶): ضرایب سری فوریه مربوط به دنباله مربعی بازاء

$$N = 40(c) \quad N = 20(b) \quad N = 10(a), 2N_1 + 1 = 5$$

بنابراین با توجه به شکل (۴-۶) دیده می‌شود که با افزایش N یا دوره تناوب، طیف ضرایب سری فوریه به سمت یک طیف پیوسته میل می‌کند و این کاملاً منطقی و قابل پیش بینی می‌باشد، چرا که با

1-Gibbs phenomena

افزایش دوره تناوب و میل کردن آن به سمت مقادیر خیلی بزرگ دنباله، $x[n]$ به یک دنباله محدود تبدیل خواهد شد و بعدها خواهیم دید که دنباله‌های دوره محدود، دارای طیف پیوسته می‌باشند.
یکی دیگر از مهمترین تشابهات بین سیستم‌های پیوسته و گسسته ناشی از این حقیقت است که نمایی‌های مختلط، توابع ویژه برای سیستم‌های LTI پیوسته و گسسته زمان می‌باشند. فرض کنید $x[n]$ ورودی یک سیستم LTI گسسته زمان با پاسخ ضربه $h[n]$ باشد. اگر $x[n]$ یک دنباله متناوب با دوره تناوب N باشد، با توجه به خاصیت خطی بودن سیستم انتظار داریم که پاسخ سیستم ($y[n]$) نیز متناوب باشد. هدف، ارائه رابطه برای ضرایب سری فوریه خروجی برحسب ضرایب سری فوریه ورودی است. ابتدا بسط دنباله $x[n]$ را برحسب ضرایب سری فوریه می‌نویسیم.

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۲۸-۴}$$

اگر پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ باشد، می‌توان با استفاده از (۴-۶) رابطه زیر را برای خروجی نوشت.

$$y[n]=\sum_{k=<N>}a_k H(\frac{2\pi k}{N})e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۲۹-۴}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه خروجی به صورت $a_k H(\frac{2\pi k}{N})$ هستند که در آن

$$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}z^{-k}h[n] \tag{۳۰-۴}$$

بنابراین

$$H(\frac{2\pi k}{N})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۳۱-۴}$$

برای توضیح بیشتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۴-۵): فرض کنیم پاسخ ضربه سیستم LTI به صورت $h[n]=\alpha^n u[n]$ باشد که در آن $-1<\alpha<1$ است. اگر ورودی این سیستم به صورت $x[n]=Cos(\frac{2\pi}{N})n$ باشد، مطلوبست خروجی سیستم و سری فوریه آن.

حل: ابتدا ورودی را به صورت سری فوریه بسط می‌دهیم.

$$x[n]=\frac{1}{2}e^{-j(\frac{2\pi}{N})n}+\frac{1}{2}e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$$

با توجه به پاسخ ضربه سیستم و رابطه (۴-۳۱) داریم.

$$H(\frac{2\pi}{N}k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\alpha e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}\right]^n=\frac{1}{1-\alpha e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

بنابراین می‌توان خروجی را به صورت سری فوریه نوشت.

$$y[n]=\frac{1}{2}H(\frac{2\pi}{N})e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}H(\frac{-2\pi}{N})e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}})e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}})e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

اگر فرض کنیم.

$$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}}=re^{j\theta}$$

در آن صورت داریم.

$$y[n]=\frac{1}{2}re^{j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}re^{-j\theta}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}=rCos(\frac{2\pi}{N}n+\theta)$$

۴-۳ دنباله‌های غیرمتناوب-تبدیل فوریه گسسته زمان[۴] (DTFT)

در مثال (۴-۳) و در شکل (۴-۶) دیدیم که با افزایش دوره تناوب فاصله این نمونه‌ها از هم کمتر می‌شود. با مشاهدات مشابه در مورد سیگنال‌های پیوسته زمان توانستیم با افزایش دوره تناوب به سمت ∞ نمایش تبدیل فوریه را برای یک سیگنال غیرمتناوب ارائه کنیم. در این فصل دقیقاً همان عملیات را پیش می‌گیریم و ابتدا تابع $\tilde{x}[n]$ متناوب را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که در یک دوره تناوب مساوی سیگنال غیرمتناوب باشد.

فرض می‌کنیم $x[n]$ در فاصله $|n|>N_1$ مساوی صفر باشد. هرچه دوره تناوب N بیشتر می‌شود، درناحیه بزرگتری می‌توان $x[n]$ را با $\tilde{x}[n]$ مساوی گرفت و اگر N به سمت بینهایت ∞ میل کند آنگاه $\tilde{x}[n]=x[n]$ می‌گردد.

اکنون سری فوریه $\tilde{x}[n]$ را در نظر بگیرید.

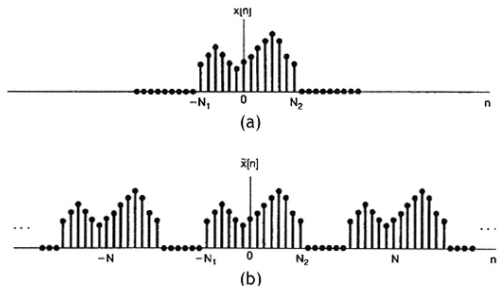
$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad (۴-۳۲)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad (۴-۳۳)$$

از آنجا که در یک دوره تناوب که شامل $|n|\le N_1$ است، $x[n]$ مساوی $\tilde{x}[n]$ است، مناسب است که حدود مجموع را در فاصلهٔ مذکور در نظر بگیریم. در این صورت می‌توان جای $\tilde{x}[n]$ را با $x[n]$ عوض کرد و نوشت.

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}\tilde{x}[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad (۴-۳۴)$$

[4] Discrete Time Fourier Transform



شکل (۴-۷): a)سیگنال با دوره محدود $x[n]$

b) سیگنال تناوبی $\tilde{x}[n]$ که در یک دوره تناوب با $x[n]$ مساوی است

اگر دوره تناوب N به سمت بینهایت میل کند، در آن صورت $k\dfrac{2\pi}{N}$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می‌کنـد و اگر چه a_k به سمت صفر میل می‌کند ولی Na_k مقادیر محدود غیر صفر را اتخاذ می‌کند.

اکنون پوش $X(\Omega)$ مربوط به Na_k را به صورت رابطه (۴-۳۵) می نویسیم.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \qquad (۳۵\text{-}۴)$$

در رابطه (۴-۳۵)، $\Omega=k\dfrac{2\pi}{N}$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می‌کند. رابطه فوق تبدیل فوریه مستقیم نامیـده می‌شود. بنابراین می‌توان ضرایب فوریه دنباله $\tilde{x}[n]$ (که از تکرار مداوم $x[n]$ با دوره تناوب N واحـد بدست می‌آید) را از رابطه (۴-۳۵) بدست آورد.

$$Na_k=X(\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad (۳۶\text{-}۴)$$

$$a_k=\frac{1}{N}X(k\Omega_0) \qquad (۳۷\text{-}۴)$$

که در آن $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}$ می‌باشد.

بنابراین ضرایب a_k متناسب با نمونه‌های متساوی‌الفاصله از تابع پوش می‌باشـند. از ترکیـب معـادلات (۴-۳۲) و (۴-۳۷) داریم.

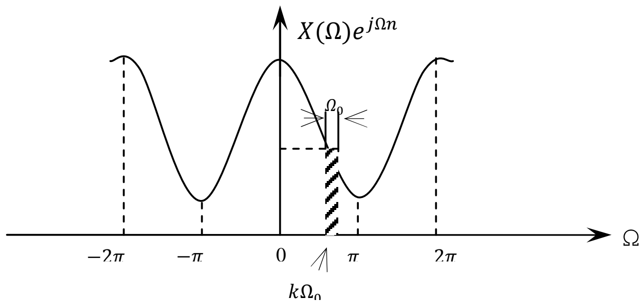
$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=<N>}\frac{1}{N}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} \qquad (۳۸\text{-}۴)$$

از آنجائیکه $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N}$ یا $\dfrac{1}{\Omega_0}=\dfrac{N}{2\pi}$ است، معادله (۴-۳۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=<N>}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0 \qquad (۳۹\text{-}۴)$$

هنگامیکه $N\to\infty$ آنگاه $\Omega_0\to 0$ و $k\mathbf{\Omega_0}$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می‌کند. بنـابراین $\tilde{x}[n]$ بـرای هـر مقدار محدود n مساوی $x[n]$ خواهد شد و از اینجا می‌توان رابطه تبدیل معکوس فوریه گسسته زمان را بدست آورد. در حالت حدی مذکور، معادله (۴-۳۹) در فاصـله یـک دوره تنـاوب بـه انتگـرال تبـدیل

می‌شود. برای واضح‌تر شدن مطلب فرض کنید $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ به صورت نمایش داده شـده در شـکل (۴-۸) باشد.



شکل (۴-۸): نمایش معادله (۴-۳۹)

از معادله (۴-۳۵) پی می‌بریم که $X(\Omega)$ متناوب و دوره تناوب آن 2π است. همچنین $e^{j\Omega n}$ نیز متناوب با دوره تناوب 2π است. بنابراین حاصل ضرب $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ نیز تناوبی با دوره تناوب 2π است. همانگونه که از شکل پیداست، هر عبارت در مجموع (۴-۳۹) نمایانگر مساحتی به ارتفاع $X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$ و پهنای Ω_0 است.

هنگامی که $\Omega_0 \to 0$ مجموع تبدیل به انتگرال شده و $x[n]=\tilde{x}[n]$ می‌شود. بنابراین رابطـه (۴-۳۹) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \qquad (۴-۴۰)$$

محدوده انتگرال‌گیری دلخواه ولی طول آن 2π است.

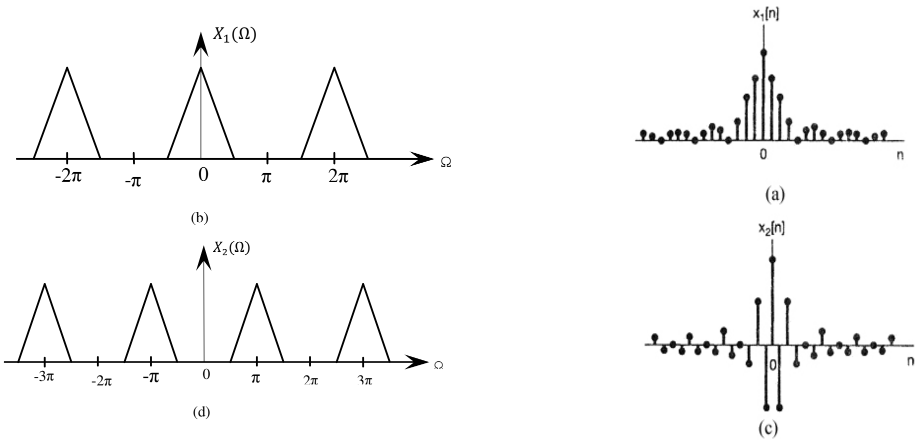
بنابراین زوج تبدیل فوریه زیر را بدست آوردیم.

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \qquad (۴-۴۱)$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \qquad (۴-۴۲)$$

$X(\Omega)$ را معمولاً طیف $x[n]$ می‌نامند و متناوب با دوره تناوب 2π می‌باشد و این یکی از تفاوت‌هـای تبدیل فوریه گسسته و پیوسته زمان می‌باشد. تبدیل فوریه سیگنال پیوسته زمان غیرمتنـاوب اسـت در حالیکه تبدیل فوریه دنبال گسسته زمان متناوب است و دوره تنـاوب آن در حـوزه فرکـانس مسـتقل از نوع و شکل دنباله گسسته زمان، مساوی 2π است. تفاوت دیگر در محدود بودن حـدود انتگـرال‌گیـری در معادله (۴-۴۱) است که باز ناشی از تناوبی بودن $X(\Omega)$ می‌باشد. بنابراین چون $\Omega=2\pi, \Omega=0$ یک فرکانس را مشخص می‌کنند، فرکانسهای نزدیک بـه ایـن مقـادیر و یـا هـر مضـرب زوجـی از π را فرکانس پایین گویند. همچنین فرکانسهایی که نزدیک مضارب فرد π باشند را فرکانسهای بالا گویند.

بنابراین دنباله $x_1[n]$ رسم شده در شکل (۴-۹) بسیار آهسته‌تر از $x_2[n]$ تغییر میکند و دارای مؤلفه‌های فرکانسی پایین می‌باشد که در شکل مشخص شده است.



شکل (۴-۹): a) دنباله گسسته زمان $x_1[n]$ b)تبدیل فوریه $X_2(\Omega)$ که در حوالی $\Omega=\pm\pi,\pm3\pi$ متمرکز است.

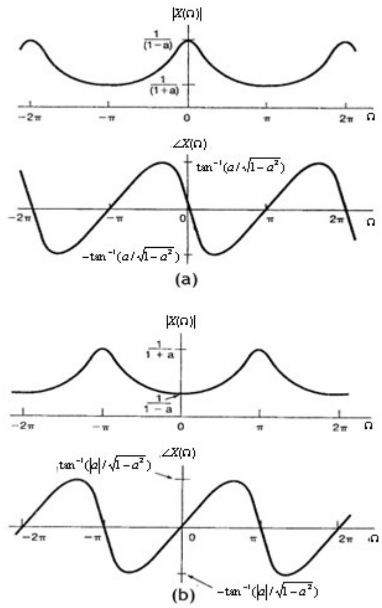
مثال (۴-۵): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n]=a^n u[n] \qquad |a|<1$$

حل: با استفاده از رابطه (۴-۴۲) داریم.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}[ae^{-j\Omega}]^n=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

دامنه و فاز $X(\Omega)$ در شکل (a-۱۰-۴) برای $a>0$ و در شکل (b-۱۰-۴) برای $a<0$ نشان داده شده است. توجه می‌کنیم که در هر دو حالت دوره تناوب 2π است و طیف دامنه زوج وطیف زاویه، فرد می‌باشد.در ضمن توجه می‌کنیم که اگر $a>0$ باشد، دنباله فوق در فرکانسهای پایین بیشینه دامنه را خواهد داشت و اگر $a<0$ باشد در فرکانسهای بالا بیشینه دامنه را خواهد داشت. البته در هر دو حالت لازمه همگرا شدن تبدیل فوریه، شرط $|a|<1$ می‌باشد.

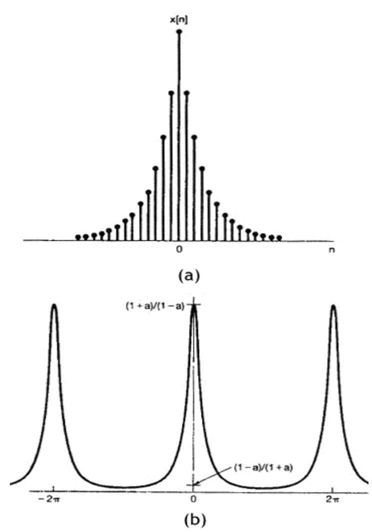


شکل (۴-۱۰): دامنه و زاویه تبدیل فوریه مثال (۴-۵) برای a) $0 < a$ b) $a < 0$

مثال (۴-۶): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = \alpha^{|n|}$$

حل: شکل سیگنال به ازاء $0<\alpha<1$ در شکل (۴-۱۱-a) رسم شده است.



شکل (۴-۱۱): (a) سیگنال $x[n]$ مثال (۴-۶) و (b) تبدیل فوریه آن $0<\alpha<1$

تبدیل فوریه این سیگنال برابر است با

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{-n}e^{-j\Omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{n}e^{-j\Omega n}$$
$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\alpha^{m}e^{j\Omega m}+\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{n}e^{-j\Omega n}$$
$$=\frac{1}{1-\alpha e^{j\Omega}}-1+\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}=\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha Cos\Omega+\alpha^2}$$

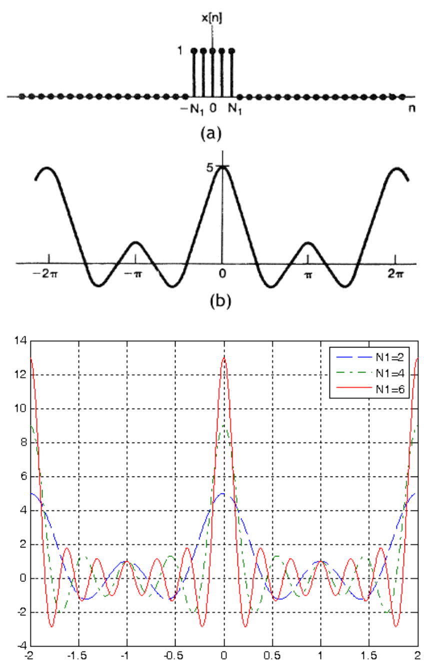
در این حالت $X(\Omega)$ حقیقی و برای $0<\alpha<1$ در شکل (۴-۱۱-b) رسم شده است.

مثال (۴-۷): تبدیل فوریه پالس مربعی را بدست آورید.

پالس مربعی: $x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & |n|>N_1\end{cases}$

حل:

$$X(\Omega)=\sum_{n=-N_1}^{+N_1}e^{-j\Omega n}=\sum_{m=0}^{2N_1}e^{-j\Omega(m-N_1)}$$



شکل (۴-۱۲): (a)پالس مربعی مثال (۴-۷) برای $N_1=2$ (b)تبدیل فوریه آن برای $N_1=2$ (c) مقایسه تبدیل فوریه پالس مربعی برای سه مقدار مختلف $N_1=2,4,6$

مجموع دوم به کمک تبدیل زیر از مجموع اول بدست آمده است.

$$m = n + N_1$$

بنابراین می‌توان نوشت.

این تبدیل در شکل (۴-۱۲) رسم شده است.

$$X(\Omega) = e^{j\Omega N_1} \frac{1-e^{-j\Omega(2N_1+1)}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega N_1} - e^{-j\Omega(N_1+1)}}{1-e^{-j\Omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\Omega/2}}{e^{-j\Omega/2}} \frac{e^{j\Omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\Omega(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}$$

$$X(\Omega) = \frac{Sin\Omega(N_1+\frac{1}{2})}{Sin\frac{\Omega}{2}}$$

جهت مشاهده تاثیر افزایش طول پالس مربعی طیف این سیگنال به ازاء افزایش N_1 طیـف ایـن پـالس برای سه مقدار مختلف $N_1 = 2,4,6$ در شکل ۴-۱۲ نیز رسم شده است. دیده می شود که با افزایش N_1 طیف سیگنال در حوزه فرکانس بسته تر می شود که به مفهوم کاهش دامنه در فرکانسهای بالاتر است.

۴-۴ دنباله‌های متناوب و تبدیل فوریه گسسته زمانی

همانند حالت پیوسته زمان، روابط مهمی بین نمایش سری فوریه دنبالـه‌هـای متنـاوب و تبـدیل فوریـه دنباله‌های غیرمتناوب وجود دارد. در این بخش ابتدا نحوۀ بدست آوردن ضرایب سری فوریه یک دنبالـه متناوب از روی تبدیل فوریه یک دوره تناوب از آن دنباله را تشریح می‌کنیم. سپس نشـان خـواهیم داد که چگونه سری فوریه دنباله‌های متناوب را می‌توان به کمک نمایش تبدیل دنباله متنـاوب بـه صـورت قطار ضربه، در چهار چوب تبدیل فوریه جای داد.

۴-۴-۱ ضرایب سری فوریه به عنوان نمونه‌های تبدیل فوریه در یک دوره تناوب

فرض کنید که $\tilde{x}[n]$ یک دنباله متناوب با دوره تناوب N باشد و همچنین فرض کنیـد $x[n]$ در یـک دوره تناوب به صورت زیر باشد

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & M \le n \le M+N-1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad (۴۳-۴)$$

که در آن M یک عدد دلخواه است.

قبلاً نشان دادیم که

$$Na_k = X(k\frac{2\pi}{N}) \qquad (۴۴-۴)$$

که در آن a_k ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ و $X(\Omega)$ تبدیل فوریه $x[n]$ می‌باشـد. بنـابراین Na_k معـادل است با نمونه‌های تبدیل فوریه در یک دوره تناوب. نکته دیگری که باید به آن توجه کرد این اسـت کـه

اگرچه شکل $x[n]$ و $X(\Omega)$ به انتخاب M وابسته است ولی مقادیر $X(\Omega)$ در فرکانسهای نمونه برداری $\frac{2\pi k}{N}$ به مقدار M بستگی ندارد.

مثال (۴-۸): فرض کنیم دنباله تناوبی به صورت زیر تعریف گردد.

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$$

این دنباله در شکل (۴-۱۳-a) رسم شده است. مطلوبست محاسبه ضرایب سری فوریه دنباله فوق.

حل:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

اگر فاصلهٔ مجموع را $0\le n\le N-1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

$$a_k=\frac{1}{N}$$

اکنون اگر $x_1[n]$ را به صورت رابطهٔ (۴-۴۳) با $M=0$ تعریف کنیم، داریم.

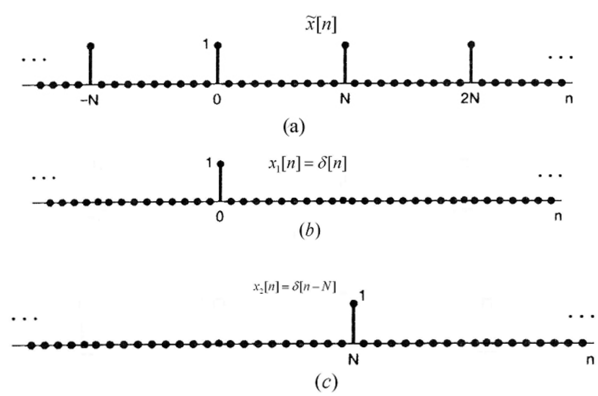
$$x_1[n]=\delta[n]$$

که در شکل (۴-۱۳-b) رسم شده است.

تبدیل فوریه این دنباله به سادگی از تعریف تبدیل فوریه قابل محاسبه است.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]e^{-j\Omega n}=1$$

در اینجا می‌بینیم که رابطه $a_k=\frac{1}{N}$ برقرار است. چون در اینجا $\left(X(\Omega)\Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}}\right)$ مساوی واحد ومستقل از مقدار k است.



شکل (۴-۱۳): (a)قطار ضربه تناوبی گسسته زمانی (b,c) دو دنباله غیرتناوبی که هر کدام مساوی $\tilde{x}[n]$ در یک دوره تناوب دنباله هستند.

اکنون اگر $0<M<N$ اختیار کنیم و سیگنال $x_2[n]$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$x_2[n]=\delta[n-N] \tag{۴-۴۵}$$

که تبدیل فوریه آن نیز متفاوت خواهد بود.

$$X(\Omega)=e^{-j\Omega N} \tag{۴-۴۶}$$

ولی به هر حال در فرکانسهای نمونه برداری $k\dfrac{2\pi}{N}$، مقدار $e^{-j\Omega N}$ نیز مساوی واحد است. در اینصورت نیز رابطه (۴-۴۴) در فرکانسهای $k\dfrac{2\pi}{N}$ برقرار است.

۴-۴-۲ تبدیل فوریه برای دنباله‌های متناوب

اکنون می‌خواهیم تبدیل فوریه دنباله‌های متناوب را بیـابیم. بـرای شـروع، ابتـدا دنبالـه زیـر را در نظـر بگیرید.

$$x[n]=e^{j\Omega_0 n} \tag{۴-۴۷}$$

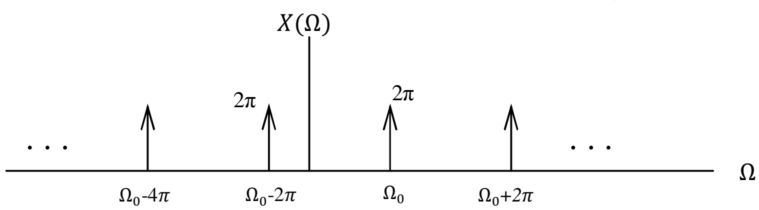
در حالت پیوسته زمان، دیدیم که تبدیل فوریه $e^{j\omega_0 t}$ یک ضربه در $\omega=\omega_0$ می‌باشـد. بنـابراین انتظـار داریم که در حالت گسسته زمان نیز چنین شود. اما تبدیل فوریه در حالت گسسته زمان با دوره تنـاوب 2π متناوب است، چون

$$e^{j\Omega_0 n}=e^{j(\Omega_0+2\pi r)n} \tag{۴-۴۸}$$

توجه شود که این تابع برحسب Ω متناوب است، حتی اگر بر حسب n متناوب نباشد. بنابراین تبـدیل فوریه (۴-۴۸) را باید به صورت (۴-۴۹) نوشت.

$$X(\Omega)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l) \tag{۴-۴۹}$$

که در شکل (۴-۱۴) نشان داده شده است.



شکل (۴-۱۴): تبدیل فوریه $x[n]=e^{j\Omega_0 n}$

جهت اطمینان از صحت رابطه می‌خواهیم تبدیل فوریه معکوس رابطه (۴-۴۹) را بیابیم.

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l)\,e^{j\Omega n}d\Omega \tag{۴-۵۰}$$

توجه کنید که فاصله طیفی به طول 2π دقیقاً شامل یک ضربه اسـت. بنـابراین اگـر ضـربه را فقـط در Ω_0 درنظر بگیریم، نتیجهٔ (۴-۵۰) به صورت زیر خواهد بود.

$$x[n]=e^{j\Omega_0 n} \tag{۴-۵۱}$$

در حالت کلی‌تر اگر $x[n]$ شامل مجموعی از نمایی‌های مختلط باشد.

$$x[n]=b_1e^{j\Omega_{10}n}+\ldots+b_Me^{j\Omega_M n} \tag{۵۲-۴}$$

طبق (۴-۴۹) تبدیل فوریه (۴-۵۲) برابر است با (۴-۵۳)

$$\begin{aligned}X(\Omega)&=b_1\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-\Omega_1-2\pi l)+b_2\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-\Omega_2-2\pi l)+\\&\ldots+b_M\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-\Omega_M-2\pi l)\end{aligned} \tag{۵۳-۴}$$

این رابطه به ما می‌گوید $X(\Omega)$ یک قطارضربه متناوب است که ضربه‌های آن در فرکانس‌های $\Omega_1,\ldots,\Omega_M$ و در فاصله مضارب صحیحی از 2π قرار دارند. بنابراین هر فاصلهٔ 2π دقیقاً یک ضربه از هر یک از مجموعه‌های طرف راست در (۴-۵۳) را دارا خواهد بود.

توجه کنید که معادله (۴-۴۹) تبدیل فوریه دنبالهٔ مشخص شده توسط رابطه (۴-۴۷) است، چه این دنباله متناوب و چه غیرمتناب باشد، یعنی چه Ω_0 را بتوان به صورت کسر گویایی از 2π نوشت و چه نتوان. به طور مشابه دنباله رابطهٔ (۴-۵۲) فقط هنگامی تناوبی است که تمام Ω_0های آن را به صورت کسر گویایی از 2π بتوان نوشت.

اکنون فرض کنید $x[n]$ تناوبی با دوره تناوب N باشد، در اینصورت می‌توان $x[n]$ را به صورت سری فوریه نوشت.

$$x[n]=\sum_{k=\le N>}a_ke^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۵۴-۴}$$

اگر رابطه فوق را به صورت جمله به جمله بنویسیم، داریم.

$$x[n]=a_0+a_1e^{j(\frac{2\pi}{N})n}+a_2e^{j2(\frac{2\pi}{N})n}+\ldots+a_{N-1}e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \tag{۵۵-۴}$$

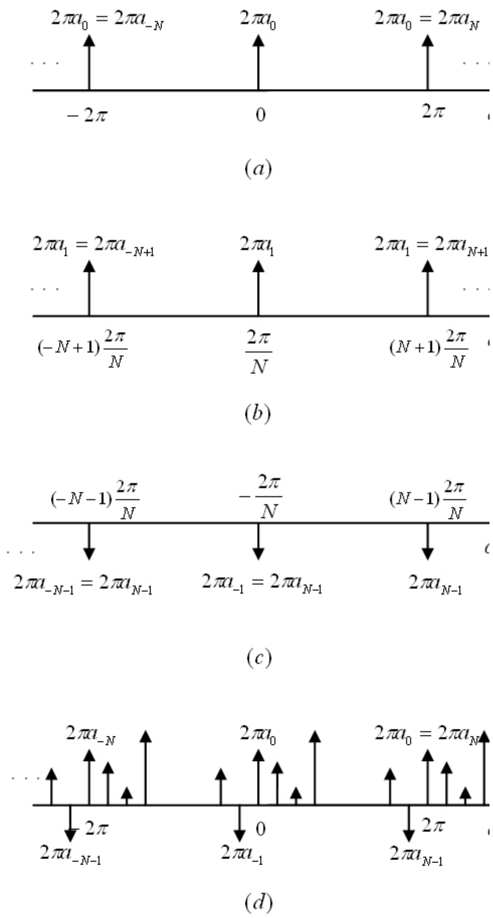
در مقایسه با (۴-۵۲) می‌توان تناظر زیر را میان Ω_iها و فرکانسهای موجود در (۴-۵۴) ایجاد کرد.

$$\Omega_1=0,\Omega_2=\frac{2\pi}{N},\Omega_3=2(\frac{2\pi}{N}),\ldots,\Omega_N=(N-1)\frac{2\pi}{N} \tag{۵۶-۴}$$

بنابراین از معادله (۴-۵۳) داریم.

$$\begin{aligned}X(\Omega)&=a_0\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-2\pi l)+a_1\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-\frac{2\pi}{N}-2\pi l)+\ldots+\\&a_N\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\Omega-(N-1)\frac{2\pi}{N}-2\pi l)\end{aligned} \tag{۵۷-۴}$$

که در شکل (۴-۱۵) نمایش داده شده است.



شکل (۴-۱۵): تبدیل فوریه سیگنال تناوبی گسسته زمان

در شکل (۴-۱۵-a) اولین مجموع در سمت راست معادله (۴-۷۱) را رسم کرده‌ایم و از خاصیت تنـاوبی استفاده کردیم و نوشتیم.

$$a_0 = a_N = a_{-N} \tag{۵۸-۴}$$

در شکل (۴-۱۵-a) اولین مجموع و در شکل (۴-۱۵-c) آخرین مجموع را رسـم کـرده‌ایـم. شـکل (۴-۱۵-d) مجموع کلی را برای $X(\Omega)$ نمایش می‌دهد.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{k=<N>} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi l) \\ &= \sum_{k=<N>} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega - \frac{k-lN}{N}2\pi) \end{aligned} \tag{۵۹-۴}$$

دراینجا فقط با تغییر k می‌توان تمام جملات مجموع را ساخت یعنی می‌توان نوشت.

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) \qquad (۴-۶۰)$$

بنابراین (۴-۶۰) تبدیل فوریه دنباله متناوب $x[n]$ با ضرایب سری فوریه a_k می‌باشد. بدین ترتیب هر دو نوع دنباله‌های متناوب و غیرمتناوب در یک قالب قابل بیان توسط تبدیل فوریه می‌شوند. همه این مراحل مرهون تعریف تابع جادویی ضربه می‌باشند.

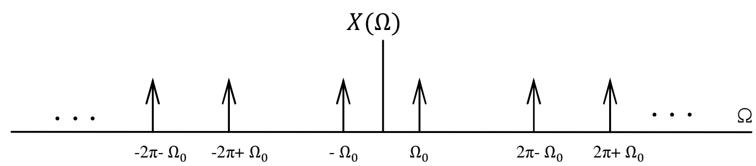
مثال(۴-۹): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله متناوب زیر

$$x[n] = Cos\Omega_0 n = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 n}$$

حل: از معادلهٔ (۴-۵۳) بلافاصله داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\{\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega - \Omega_0 + 2\pi l)\}$$

که در شکل (۴-۱۶) رسم شده است.



شکل (۴-۱۶): تبدیل فوریه گسسته زمانی $x[n] = Cos\,\Omega_0 n$

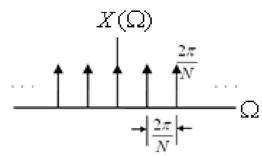
مثال (۴-۱۰): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله زیر

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

حل: چون سیگنال تناوبی با دوره تناوب N است.

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

که در شکل (۴-۱۷) رسم شده است. در اینجا مشاهده می‌شود که هر چه فاصله بین ضربه‌ها در زمان بیشتر می‌شود (دوره تناوب بیشتر می‌شود)، فاصله ضربه‌ها در حوزهٔ فرکانس کمتر می‌گردد (فرکانس اصلی کمتر می‌شود) و این نتیجه‌ای آشنا می‌باشد که در حوزه پیوسته زمان نیز کم و بیش در مورد آن بحث شد. در واقع شدت تغییرات سیگنال (دنباله) در حوزه زمان بیانگر وجود مؤلفه‌های فرکانس بالا در حوزه فرکانس سیگنال (دنباله) می‌باشد. بنابراین برای یک دنباله تناوب با دوره تناوب کوچک می‌توان انتظار مؤلفه‌های فرکانس بالا در حوزه فرکانس را داشت و برعکس اگر دوره تناوب بزرگ باشد، می‌توان انتظار داشت که مؤلفه‌های فرکانس بالا کمتر شوند. در اینجا دوباره لازم به ذکر است که به علت متناوب بودن حوزه فرکانس برای دنباله‌های گسسته زمان، تعریف فرکانسهای پایین شامل ضرایب زوج π می‌باشد کمااینکه فرکانسهای بالا شامل ضرایب فرد از π است.



شکل (۴-۱۷): تبدیل فوریه قطار ضربه گسسته زمان

۴-۵ خواص تبدیل فوریه گسسته زمان

در این قسمت به بررسی چند خاصیت مهم از خواص تبدیل فوریه گسسته زمان می‌پردازیم. همانگونه که قبلاً اشاره شد برخی از این خواص بسیار مشابه خاصیت متناظر در مورد سیگنال‌های پیوسته زمان هستند. در برخی موارد میزان این شباهت به حدی است که می‌توان با توجه به خاصیت پیوسته زمان متناظر، مستقیماً خاصیت گسسته زمان را استخراج کرد.

اما در همه موارد وضع بدین صورت نیست و گاهی برخی خواص تبدیل فوریه گسسته زمان دارای تفاوت‌های اساسی با نوع پیوسته زمان هستند. اصولاً دلیل اصلی این تفاوت‌ها در تناوبی بودن تبدیل فوریه گسسته زمان نهفته است.

اگر تبدیل فوریه گسسته زمان $x[n]$ را $X(\Omega)$ بنامیم. جهت نمایش این رابطه و برای سهولت از علامت‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$X(\Omega) = F\{x[n]\}$$
$$x[n] = F^{-1}\{X(\Omega)\} \qquad (۴-۶۱)$$
$$x[n] \overset{F}{\Leftrightarrow} X(\Omega)$$

همه علائم فوق معادل یکدیگر بوده و یک مفهوم را می‌رسانند.

۴-۵-۱ تناوبی بودن تبدیل فوریه گسسته زمان

همانطور که قبلاً گفتیم تبدیل فوریه گسسته زمان یک تابع پیوسته و متناوب از Ω می‌باشد که دوره تناوب آن 2π است.

$$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi r) \qquad (۴-۶۲)$$

این خاصیت ارتباطی به نوع دنباله در حوزه زمان ندارد و یک خاصیت عمومی در حوزه فرکانس برای دنباله‌های گسسته زمان است.

۴-۵-۲ خطی بودن

اگر تبدیل فوریه دنباله گسسته زمان $x_i[n]$ را $X_i(\Omega)$ بنامیم، مثلاً اگر

$$x_1[n] \overset{F}{\Leftrightarrow} X_1(\Omega) \qquad (۴-۶۳)$$

$$x_2[n] \overset{F}{\Leftrightarrow} X_2(\Omega) \qquad (۴-۶۴)$$

در آن صورت

$$a_1x_1[n]+bx_2[n]\overset{F}{\Leftrightarrow}a_1X_1(\Omega)+bX_2(\Omega) \tag{۶۵-۴}$$

همانگونه که در مورد خاصیت متناظر در حوزه پیوسته زمان بیان کردیم، خاصیت خطی بودن شامل دو خاصیت جمع آثار و همگن بودن است. خاصیت همگن بودن به صورت زیر قابل بیان است. اگر

$$X_i(\Omega)=F\{x_i[n]\} \tag{۶۶-۴}$$

در آنصورت تبدیل فوریه $ax_i[n]$ برابر است با

$$aX_i(\Omega)=F\{ax_i[n]\} \tag{۶۷-۴}$$

و همچنین خاصیت جمع آثار بیان می‌دارد که

$$F\{\sum x_i[n]\}=\sum F\{x_i[n]\}=\sum X_i(\Omega) \tag{۶۸-۴}$$

بنابراین در حالت کلی

$$\begin{aligned}F\{\sum a_ix_i[n]\}&=\sum F\{a_ix_i[n]\}=\sum a_iF\{x_i[n]\}\\&=\sum a_iX_i(\Omega)\end{aligned} \tag{۶۹-۴}$$

عدم مشخص کردن حد مجموع به مفهوم دلخواه بودن آن است.

۴-۵-۳ تقارن

با توجه به رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان به سادگی میتوان ثابت کرد که اگر $x[n]$ حقیقی باشد.

$$X(\Omega)=X^*(-\Omega) \tag{۷۰-۴}$$

اثبات: طبق تعریف تبدیل فوریه داریم.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \tag{۷۱-۴}$$

بنابراین

$$X^*(-\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*[n]e^{-j\Omega n} \tag{۷۲-۴}$$

که اگر $x[n]$ حقیقی باشد رابطه فوق مساوی $X(\Omega)$ خواهد بود.

اگر تبدیل فوریه را طبق رابطه اولر برحسب توابع سینوس و کسینوس بنویسیم، داریم.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]Cos\Omega n-j\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]Sin\Omega n$$

بنابراین رابطه دامنه و زاویه بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$|X(\Omega)|=\sqrt{\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]Cos\Omega n\right\}^2+\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]Sin\Omega n\right\}^2} \tag{۷۳-۴}$$

$$X(\Omega)=-\tan^{-1}\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]Sin\Omega n}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]Cos\Omega n} \tag{۷۴-۴}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم کـه قسـمت حقیقـی و دامنـه $X(\Omega)$ تـابعی زوج از Ω و قسـمت موهـومی و همچنین زاویه آن تابع فردی از Ω می‌باشد. بنابراین تبدیل فوریـه قسـمت‌هـای زوج و فـرد $x[n]$ بـه ترتیب مساوی قسمت‌های حقیقی و موهومی $X(\Omega)$ خواهند بود.

$$\varepsilon v\{x[n]\} \overset{F}{\Leftrightarrow} \Re e\{X(\Omega)\} \tag{۷۵-۴}$$

$$Od\{x[n]\} \overset{F}{\Leftrightarrow} -j\Im m\ \{X(\Omega)\} \tag{۷۶-۴}$$

اثبات: از بسط $x[n]$ به قسمت‌های زوج و فرد و از بسط $X(\Omega)$ بـه قسـمت‌هـای حقیقـی و موهـومی داریم.

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\varepsilon v\{x[n]\} + Od\{x[n]\}\right]e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varepsilon v\{x[n]\}Cos\Omega n - j\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Od\{x[n]\}Sin\Omega n \\
&- j\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varepsilon v\{x[n]\}Sin\Omega n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ Od\{x[n]\}Cos\Omega n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varepsilon v\{x[n]\}Cos\Omega n - j\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Od\{x[n]\}Sin\Omega n \\
&= \Re e\{X[\Omega]\} + j\Im m\ \{X(\Omega)\}
\end{aligned} \tag{۷۷-۴}$$

بنابراین روابط زیر را خواهیم داشت که مؤید ادعای ما می‌باشند.

$$\Re e\{X[\Omega]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varepsilon v\{x[n]\}Cos\Omega n \tag{۷۸-۴}$$

$$\Im m\{X[\Omega]\} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Od\{x[n]\}Sin\Omega n \tag{۷۹-۴}$$

۴-۵-۴ انتقال در حوزه زمان و فرکانس

با توجه به رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان می‌توان به سادگی تبدیل فویه دنبالـۀ انتقـال داده شـده در حوزه زمان را بدست آورد.

$$x[n-n_0] \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j\Omega\, n_0}X(\Omega) \tag{۸۰-۴}$$

همچنین می‌توان تبدیل را به صورت انتقالی از $X(\Omega)$ بدست آورد.

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(\Omega-\Omega_0) \tag{۸۱-۴}$$

تمرین (۴-۱): روابط (۴-۸۰) و (۴-۸۱) را ثابت کنید.

۴-۵-۵ تفاضل و مجموع

در حقیقت معادل انتگرال‌گیری در حوزه گسسته زمان، مجموع می‌باشد. متناظر با آن، معادل مشتق‌گیری در حوزه گسسته زمان، تفاضل می‌باشد. فرض کنید دنباله $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(\Omega)$ باشد، در آن صورت با استفاده از خواص خطی بودن تبدیل فوریه و انتقال در حوزه زمان، می‌توان تبدیل فوریه تفاضل (به عنوان معادل گسسته زمان مشتق‌گیری) $x[n]-x[n-1]$ را به صورت زیر ارائه کرد.

$$x[n]-x[n-1]\overset{F}{\leftrightarrow}(1-e^{-j\Omega})X(\Omega) \tag{۸۲-۴}$$

اما مجموع زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m] \tag{۸۳-۴}$$

چون

$$y[n]-y[n-1]=x[n] \tag{۸۴-۴}$$

شاید تصور کنیم که تبدیل فوریه $y[n]$ باید تبدیل فوریه $x[n]$ تقسیم بر $(1-e^{-j\Omega})$ بشود. اما این فقط قسمتی از جواب است و جواب کلی باید شامل مولفه DC سیگنال هم بشود. پس

$$\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)+\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k) \tag{۸۵-۴}$$

که جملهٔ دوم یک مؤلفه DC در سیگنال می‌باشد.

تمرین (۴-۲): سعی کنید با ایجاد تناظر میان حالت پیوسته زمان و گسسته زمان رابطه (۴-۸۵) را استخراج کنید.

مثال (۴-۱۲): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله $u[n]$.

حل: با توجه به (۴-۸۵) می‌توان تبدیل فوریه $u[n]$ را به عنوان مجموع $\delta[n]$ بدست آورد، چون

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$

و چون تبدیل فوریه $\delta[n]$ برابر واحد است، داریم.

$$F\{u[n]\}=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-k2\pi)$$

۴-۵-۶ مقیاس‌بندی در حوزه زمان و فرکانس

به خاطر ماهیت گسسته مقادیر متغیر مستقل، در مورد دنباله‌های گسسته زمان خاصیت مقیاس‌بندی باید به گونه‌ای دیگر برای این نوع دنباله‌ها تعریف شود. ابتدا فرض کنید $y[n]=x[-n]$ باشد، در اینصورت داریم.

$$Y(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[-n]e^{-j\Omega n} \tag{۸۶-۴}$$

با تغییر متغییر $m=-n$ داریم.

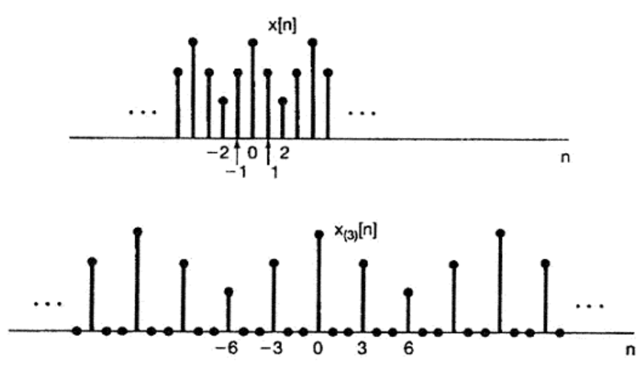
$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{j\Omega n} = X(-\Omega) \qquad (۸۷-۴)$$

اگر چه رابطه فوق مشابه رابطه متناظر پیوسته زمان آن است، اما تفاوت‌های اصلی هنگامی ظاهر می‌شوند که بخواهیم مقیاس‌بندی دنباله‌های گسسته زمان را تعریف کنیم. همانگونه که قبلاً نشان دادیم در مورد دنباله‌های گسسته زمان نتیجه عملیات مقیاس‌بندی لزوماً مشابه دنباله اصلی نیست و گاهی بسیار متفاوت است. بنابراین نباید انتظار داشت که در حالت کلی میان تبدیل فوریه یک دنباله و تبدیل فوریه دنباله مقیاس‌بندی شده، یک رابطه مشخص وجود داشته باشد. در حالت پیوسته در حقیقت $x(at)$ اگر $a<1$ باشدیک نمونه سیگنال مشابه $x(t)$ است که فقط تغییرات آن روی محور زمان آهسته‌تر شده (در حوزه زمان سیگنال بازتر شده) است. همین سیگنال اگر $a>1$ باشد، هنوز مشابه سیگنال $x(t)$ است و فقط تغییرات آن روی محور زمان سریعتر شده (در حوزه زمان سیگنال بسته‌تر شده) است.

اما ارتباط $x[an]$ و $x[n]$ به این سادگی نیست. به عبارت دیگر $x[an]$ نمی‌تواند در حالت کلی بیانگر یک دنباله با تغییراتی مشابه $x[n]$ باشد. بنابراین نمی‌توانیم تغییرات حوزهٔ زمانی دنباله $x[n]$ را با انتخاب $a<1$ آهسته‌تر کنیم. و یا اینکه اگر $a>1$ را عدد صحیح بگیریم (مثلاً $a=2$) در واقع دنباله $x[2n]$ را در حوزه زمان بازتر نکرده‌ایم، چون n فقط اعداد صحیح را اختیار میکند. بنابراین دنباله $x[2n]$ فقط شامل نمونه‌های زوج $x[n]$ خواهد بود. برای اینکه رفتار دنباله مقیاس‌بندی شده شبیه رفتار دنباله اصلی باشد، دنباله $x_k[n]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{اگر } n \text{ مضربی از } k \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ مضربی از } k \text{ نباشد} \end{cases} \qquad (۸۸-۴)$$

به عنوان مثال درشکل (۴-۱۹) $x[n]$ و $x_{(3)}[n]$ نمایش داده شده است



شکل (۴-۱۸): دنبالهٔ $x_{(3)}[n]$ که از $x[n]$ با قرار دادن دو صفر بین مقادیر متوالی دنباله اصلی بدست آمده است.

$x_{(k)}[n]$ از $x[n]$ با قرار دادن $k-1$ صفر بین مقادیر مختلف دنباله اصلی بدست می‌آید. بنابراین می‌توان $x_{(k)}[n]$ را شکل آهسته‌تر $x[n]$ فرض کرد. در این صورت می‌توان رابطه‌ای میان تبدیل فوریه این دو دنباله بدست آورد. بنابراین داریم

$$X_{(k)}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_{(k)}[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x_{(k)}[kr]e^{-j\Omega kr}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x[r]e^{-j(k\Omega)r}=X(k\Omega) \quad (۸۹-۴)$$

بنابراین تبدیل فوریه $x_{(k)}[n]$ برابر است با

$$x_{(k)}[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(k\Omega) \quad (۹۰-۴)$$

این نتیجه با توجه به خاصیت دوگانی حوزه‌های زمان و فرکانس کاملاً قابل توجیه است. به عبارت دیگر چون $x_{(k)}[n]$ در حقیقت شکل بازتر $x[n]$ است، انتظار داریم که تبدیل فوریه آن شکل فشرده‌تر تبدیل فوریه دنباله اصلی باشد.

۴-۵-۷ مشتق‌گیری در حوزه فرکانس

با مشتق‌گیری از رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان داریم.

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}jnx[n]e^{-j\Omega} \quad (۹۱-۴)$$

بنابراین $\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ تبدیل فوریه $-jnx[n]$ می‌باشد یا

$$-jnx[n]\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (۹۲-۴)$$

۴-۵-۸ قضیه پارسوال

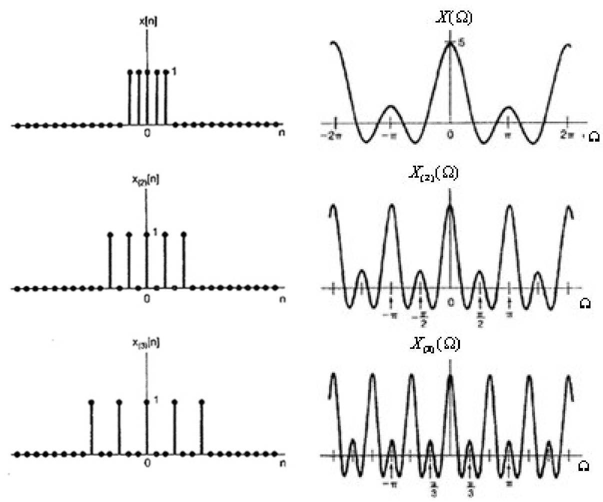
همانگونه که قبلاً بیان گردید، رابطه پارسوال بیانگر تساوی انرژی موجود در حوزه زمان و فرکانس برای یک دنباله می‌باشد.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2d\Omega \quad (۹۳-۴)$$

اثبات: با توجه به اینکه $|x[n]|^2=x[n]x^*[n]$ و با توجه به رابطه تبدیل معکوس فوریه در حوزه گسسته زمان، می‌توان نوشت.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}x[n]\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(\Omega)e^{-j\Omega n}d\Omega \quad (۹۴-۴)$$

با تغییر ترتیب انتگرال و مجموع داریم.



شکل (۴-۱۹): ارتباط بین حوزه‌های زمان و فرکانس; با افزایش k، $x_{(k)}[n]$ بازتر می‌شود ولی تبدیل فوریه آن فشرده‌تر می‌شود.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(\Omega)d\Omega\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(\Omega)\right|^2d\Omega \qquad (۹۵-۴)$$

به $\left|X(\Omega)\right|^2$ طیف چگالی انرژی نیز گفته می‌شود. انـرژی در دنبالـه متنـاوب بینهایـت اسـت و رابطـه پارسوال به شکل (۴-۹۵) در مورد این دنباله‌ها مفیـد نخواهـد بـود. بـرای دنبالـه‌هـای متنـاوب قضـیه پارسوال به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\left|x[n]\right|^2=\sum_{k=<N>}\left|a_k\right|^2 \qquad (۹۶-۴)$$

تمرین (۴-۳): رابطه فوق را با توجه به تعریف توان در مورد دنباله‌های متناوب ثابت کنید.

۴-۵-۹ خاصیت کانولوشن

قبلاً راجع به خاصیت مهم تبدیل فوریه در تبدیل عمل کانولوشن به عمل ضرب صحبت کـرده‌ایـم. اگـر $x[n]$ ورودی سیستمی باشد که پاسخ ضربه آن $h[n]$ است، در این صورت خروجی از رابطه کانولوشـن بدست می‌آید که جهت یاد آوری، دوباره تکرار می شود.

$$y[n]=x[n]*h[n] \qquad (۹۷-۴)$$

در آن صورت می‌توان ارتباط بین تبدیل فوریه دنباله‌های ورودی، خروجی و پاسخ ضـربه را بـه صـورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega) \qquad (۹۸-۴)$$

$H(\Omega)$ را پاسخ حوزه فرکانس یا تابع انتقال سیستم گسسته می‌گویند. رابطـه (۴-۹۸) قـبلاً در مـورد سیگنال‌های پیوسته زمان ثابت شده اسـت و اکنـون ایـن رابطـه را بـرای حالـت گسسـته زمـان ثابـت می‌کنیم.

اثبـات: همانطور که می‌دانیم جمع کانولوشن به صورت زیر بیان می‌شود.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \qquad (۴\text{-}۹۹)$$

اگر طرفین رابطه (۴-۹۹) را در $e^{-j\Omega n}$ ضرب کرده و روی n از $-\infty$ تا $+\infty$ جمع بزنیم، داریم.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h\,[n-k]x[k]\,e^{-j\Omega n} \qquad (۴\text{-}۱۰۰)$$

از تغییر مرتبه مجموع می‌توان طرف دوم رابطه (۴-۱۰۰) را به صورت (۴-۱۰۱) نوشت

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\,e^{-j\Omega n} \qquad (۴\text{-}۱۰۱)$$

با تغییر متغییر $n-k=m$ رابطه (۴-۱۰۱) به رابطه (۴-۱۰۲) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\,e^{-j\Omega(m+k)}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,e^{-j\Omega k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\,e^{-j\Omega m}\end{aligned} \qquad (۴\text{-}۱۰۲)$$

بنابراین رابطه (۴-۹۸) حاصل می‌شود و اثبات کامل می‌گردد.

مثال (۴-۱۳): یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ای به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$h[n] = \delta[n-n_0]$$

مطلوبست تعیین رابطه ورودی و خروجی سیستم مذکور.

حل: پاسخ فرکانسی سیستم مذکور به صورت زیر است.

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega n_0}$$

بنابراین برای هر ورودی $x[n]$ با تبدیل فوریه $X(\Omega)$، تبدیل فوریه خروجی برابر است با

$$Y(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

بنابراین می‌توان رابطه ورودی و خروجی سیستم را به این صورت نوشت.

$$y[n] = x[n-n_0]$$

مثال (۴-۱۴): فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم به صورت زیر باشد.

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

اگر ورودی این سیستم به صورت زیر در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین خروجی سیستم.

$$x[n] = \beta^n u[n]$$

حل: طی مراحل زیر می‌توان پاسخ را در حوزه زمان و فرکانس بدست آورد. ابتدا تابع انتقـال فرکانسـی سیستم محاسبه می‌گردد و سپس تبدیل فوریه ورودی بدست می‌آید.

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$
$$X(\Omega)=\frac{1}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

در نهایت حاصل ضرب تابع انتقال در تبدیل فوریه ورودی محاسبه می‌شود.

$$Y(\Omega)=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})(1-\beta e^{-j\Omega})}$$

اگر $\alpha\neq\beta$ باشد، می‌توان $Y(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega)=\frac{A}{1-\alpha e^{-j\Omega}}+\frac{B}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

که در آن

$$A=\frac{\alpha}{\alpha-\beta} \quad , \quad B=-\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

بنابراین $y[n]$ برابر است با

$$y[n]=A\alpha^n u[n]+B\beta^n u[n]$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1}u[n]-\beta^{n+1}u[n]\right]$$

اما اگر $\alpha=\beta$ باشد.

$$Y(\Omega)=(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}})^2$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega)=\frac{e^{j\Omega}}{-j\alpha}\frac{d}{d\Omega}(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}})$$

بنابراین داریم.

$$y[n]=\frac{j}{\alpha}\left[-j(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1]\right]$$

و یا

$$y[n]=(n+1)\alpha^n u[n+1]$$

از آنجائیکه فاکتور $n+1$ برای $n=-1$ مساوی صفر است، می‌توان نوشت.

$$y[n]=(n+1)\alpha^n u[n]$$

همانطوریکه قبلاً گفتیم عملکرد $h[n]$ در سیستم‌های گسسته همانند عملکـرد $h(t)$ در سیسـتم‌هـای پیوسته زمان است. بنابراین باید بتوان کلیهٔ خواص سیستم از قبیل پایداری،علیت، حافظه‌دار بـودن را از

روی این پاسخ بدست آورد. به عنوان مثال، یک سیستم گسسته، پایدار است وقتی که پاسخ ضربه آن در رابطه زیر صدق کند.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \qquad (۱۰۳-۴)$$

به عنوان مثال سیستمی با پاسخ ضربه $h[n]=z^n$ هرگز پایدار نخواهد بود. در نتیجه برای چنین سیستمی تبدیل فوریه $h[n]$ واگرا خواهد بود. بنابراین در حالت کلی شرط لازم برای وجود یا همگرائی تبدیل فوریه هر دنباله گسسته زمان $x[n]$ این است که در رابطه (۴-۱۰۳) صدق کند.

۴-۵-۱۰ کانولوشن تناوبی[۵]

خاصیت کانولوشن آنگونه که قبلاً مطرح شد، قابل اعمال برای دو دنباله متناوب نیست. چون در آن حالت جمع کانولوشن همگرا نخواهد شد. اما دراینجا کانولوشن تناوبی برای دو دنباله $\tilde{x}_2[n],\tilde{x}_1[n]$ که هر دو با دوره تناوب مشترک N متناوب هستند را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{y}[n]=\tilde{x}_1[n]\otimes\tilde{x}_2[n]=\sum_{m=<N>}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \qquad (۱۰۴-۴)$$

کاربرد معادله فوق را در شکل (۴-۲۱) نمایش داده شده است. سیگنال‌های $\tilde{x}_2[n-m],\tilde{x}_1[m]$ همانند کانولوشن معمولی در یکدیگر ضرب می‌شوند. توجه کنید که چون دو دنباله روی محور n با دوره تناوب N تناوبی هستند بنابراین حاصلضرب آن دو نیز روی محور n با دوره تناوب N متناوب است. همچنین توجه کنید که مجموع در یک دوره تناوب محاسبه می‌شود. برای محاسبهٔ $\tilde{y}[n]$ برای مقادیر متوالی n، $\tilde{x}_2[n-m]$ انتقال داده می‌شود با فرض اینکه m محور زمان است و با خارج شدن تدریجی یک دوره تناوب از فاصلهٔ مجموع ،دوره تناوب دیگر وارد فاصلهٔ مشخص شده، می‌شود. بنابراین با افزایش n به اندازه N واحد، $\tilde{x}_2[n-m]$ به اندازه یک دوره تناوب کامل انتقال داده می‌شود و از اینجا می‌توان گفت که $\tilde{y}[n+N]=\tilde{y}[n]$ یا به عبارت دیگر $\tilde{y}[n]$ نیز با دوره تناوب N متناوب است. نتایج حاصل بستگی به انتخاب محل حدود مجموع ندارد و فقط باید حد مجموع یک دوره تناوب را شامل شود. برای کانولوشن تناوبی، خاصیت کانولوشن که قبلاً مطرح شد را می‌توان برحسب ضرایب سری فوریه مستقیماً بیان کرد، که در آن c_k,b_k,a_k به ترتیب ضرایب سری‌های فوریه $\tilde{y}[n]$, $\tilde{x}_2[n]$, $\tilde{x}_1[n]$ می‌باشند.

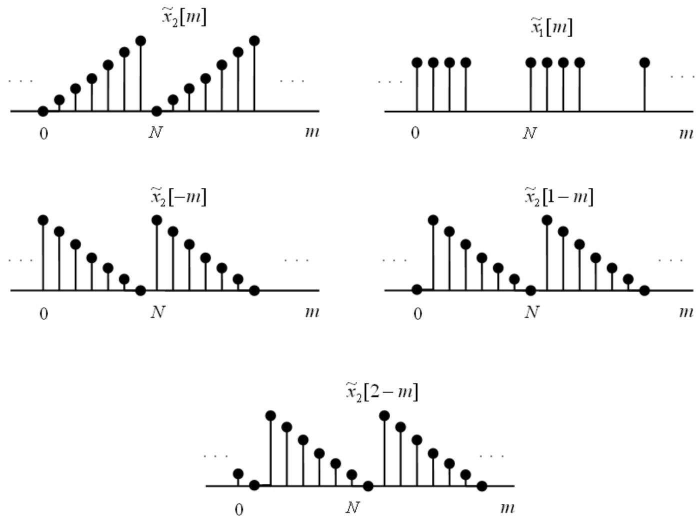
$$c_k = Na_kb_k \qquad (۱۰۵-۴)$$

اثبات: اگر $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ به ترتیب دارای ضرایب سری فوریهٔ a_k و b_k باشند، داریم (دوره تناوب هر دنباله N است).

$$\tilde{y}[n]=\sum_{k=<N>}\tilde{x}_1[k]\tilde{x}_2[n-k] \qquad (۱۰۶-۴)$$

---

[5] Periodic Convolution



شکل (۴-۲۰) مراحل شکل‌گیری کانولوشن تناوبی در دنبالهٔ تناوبی

$$\tilde{x}_1[n] = \sum_{m=<N>} a_m e^{jm(\frac{2k}{N})n} \qquad (۱۰۷-۴)$$
$$\tilde{x}_2[n] = \sum_{r=<N>} b_r e^{jr(\frac{2k}{N})n}$$

حدود مجموع را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$0<r<N-1 \qquad (۱۰۸-۴)$$
$$0<m<N-1$$

با قرار دادن (۴-۱۰۷) و (۴-۱۰۸) در (۴-۱۰۶) داریم.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=<N>} \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{j(\frac{2\pi}{N})mk} \sum_{r=0}^{N-1} b_r e^{jr(\frac{2\pi}{N})(n-k)} \qquad (۱۰۹-۴)$$
$$= \sum_{k=<N>} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} a_m b_r e^{jr(\frac{2\pi}{N})n} e^{jk(\frac{2\pi}{N})(m-r)}$$

با تغییر ترتیب مجموع داریم.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} a_m b_r e^{jr\frac{2\pi}{N}n} \sum_{k=<N>} e^{jk\frac{2\pi}{N}(m-r)} \qquad (۱۱۰-۴)$$

می‌بینیم مجموع آخر یعنی مجموعی که روی k عمل می‌کند، همواره مساوی صفر است مگر به ازاء $m=r$ در این حالت مقدار آن مساوی N می‌گردد که این مطلب تاکنون بارها مشاهده شده است. بنابراین می‌توان مجموع روی m و r, را به یک مجموع تبدیل کرد و نوشت.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a_m b_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} N \qquad (۱۱۱-۴)$$

اما سری فوریه $\tilde{y}[n]$ به صورت زیر است.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} \qquad (۱۱۲-۴)$$

از مقایسه (۴-۱۱۱) با (۴-۱۱۲) رابطه (۴-۱۱۳) را نتیجه می‌گیریم.

$$c_k = N a_k b_k \qquad (۱۱۳-۴)$$

۴-۵-۱۱ تبدیل فوریه گسسته DFT[6]

همانگونه که گفتیم از مزیت‌های عمده روش‌های گسسته زمان بر پیوسته زمان وجود روش‌های مناسب و سریع در تجزیه و تحلیل دنباله‌ها وسیستم‌های گسسته زمان می‌باشد. با توجه به کاربرد روزافزون رایانه در علوم مهندسی می‌توان با سرعت و دقت مطلوب هرگونه عملیات دلخواهی را روی دنباله‌ها و سیستم‌های گسسته زمان از قبیل کانولوشن و غیره را انجام داد. در میان روش‌های مختلف تحلیل، روشی مناسب جهت استفاده در رایانه‌های دیجیتال بنام DFT وجود دارد که تحقق آن به روش سخت‌افزاری و یا نرم‌افزاری نیز بسیار ساده است. DFT نوعی تبدیل فوریه برای دنباله‌های دوره محدود به شمار میرود که در حقیقت نمونه‌های تبدیل فوریه گسسته زمان یا DTFT در فرکانس‌های $k\frac{2\pi}{N}$ می‌باشد و در جای خود نحوهٔ انتخاب N به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف DFT

فرض کنید $x[n]$ دنباله‌ای با دوره محدود باشد، بنابراین یک عدد N_1 را می‌توان به قسمی یافت که

$$x[n] = 0 \quad n > N_1 - 1 \text{ و } n < 0 \qquad (۱۱۴-۴)$$

اکنون می‌توان دنباله تناوبی $\tilde{x}[n]$ را به قسمی تعریف کرد که در یک دوره تناوب مساوی $x[n]$ باشد. اگر $N \geq N_1$ باشد و $\tilde{x}[n]$ با دوره تناوب N متناوب باشد، داریم.

$$\tilde{x}[n] = x[n] \qquad 0 \leq n \leq N-1 \qquad (۱۱۵-۴)$$

ضرایب سری فوریه برای $\tilde{x}[n]$ با رابطه زیر داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk[\frac{2\pi}{N}]n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \end{aligned} \qquad (۱۱۶-۴)$$

N جمله اول از مجموع ضرایب که بوسیله (۴-۱۱۶) نمایش داده می‌شوند، را DFT مربوط به $x[n]$ می‌نامند که آن را با $\tilde{X}[k]$ نمایش می‌دهند.

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad k = 0, \dots, N-1 \qquad (۱۱۷-۴)$$

---

[6] **Discrete Fourier Transform**

اهمیت عملی DFT در این است که از روی آن می‌توان دنباله اصلی دوره محـدود را بازسـازی کـرد. از معادلهٔ (۴-۲۲) که بـرای دنبالـه متنـاوب $\tilde{x}[n]$ نوشـتیم، مـی‌تـوان $\tilde{x}[n]$ را از روی a_k بدسـت آورد. بنابراین از معادلات (۴-۱۱۵) و (۴-۱۱۷) می‌توان رابطه (۴-۱۱۸) را بدست آورد

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1 \tag{۱۱۸-۴}$$

رابطه (۴-۱۱۸) را رابطهٔ معکوس DFT یا (IDFT) مـی‌نامنـد. بنـابراین یـک دنبالـه دوره محـدود را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای محدود از مقادیر غیرصفر و یا به عنـوان مجموعـه‌ای محـدود از $\tilde{X}[k]$ در DFT تصور کرد، به عبارت دیگر این تناظر یک‌به‌یک است.

اهمیت دوّم DFT این است که الگوریتم‌های سریعی چون FFT برای محاسبهٔ آن وجود دارد. می‌تـوان نشان داد که $\tilde{X}[k]$ در واقع با یک نمونه‌برداری در حوزهٔ فرکـانس از $X(\Omega)$ بدسـت مـی‌آیـد، کـه در فرکانسهای متوالی $\frac{2\pi k}{N}$ برداشته می‌شوند. یعنی

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X(\frac{2\pi k}{N}) \qquad \text{در یک دوره تناوب } 2\pi \tag{۱۱۹-۴}$$

برای این کار به جای Ω در رابطه تبدیل فوریه مقدار $k\frac{2\pi}{N}$ را قرار می‌دهیم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \tag{۱۲۰-۴}$$

$$X(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{۱۲۱-۴}$$

با مقایسه این رابطه با رابطه زیرمی توان به نتیجه مورد نظر رسید.

$$\tilde{X}(k) = (\frac{1}{N}) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{۱۲۲-۴}$$

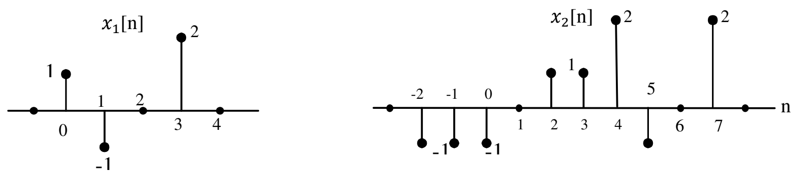
اما چون $x[n]$ فقط در دوره $0 \le n \le N_1$ که $N_1 < N$ است، مقدار غیرصفر دارد مـی‌تـوان رابطـه (۴-۱۲۲) را به صورت (۴-۱۲۳) نوشت.

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۱۲۳-۴}$$

که این همان رابطه (۴-۱۱۹) است.

باید دقت کرد که دوره تناوب نمونه‌بـرداری در حـوزه فرکـانس بگونـه‌ای باشـد کـه $N > N_1$ شـود. در غیراینصورت در بازسازی $x[n]$ از $X(\frac{2\pi k}{N})$ یا $\tilde{X}(k)$ دچار اشتباه خواهیم شد.

برای روشن شدن مطلب دو دنباله $x_2[n], x_1[n]$ را در نظر بگیرید.



شکل (۴-۲۱): نمایش دنباله‌های $x_2[n], x_1[n]$ در حوزه زمان

تبدیل فوریه $X_1(\Omega)$ و $X_2(\Omega)$ به سادگی قابل محاسبه می‌باشند.

$$X_1(\Omega) = 1 - e^{-j\Omega} + 2e^{-j3\Omega}$$

$$X_2(\Omega) = -e^{j2\Omega} - e^{j\Omega} - 1 + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} + 2e^{-j4\Omega} - e^{-j5\Omega} + 2e^{-j7\Omega} \qquad (۱۲۴-۴)$$

اگر دوره تناوب نمونه‌برداری را $N = 4$ در نظر بگیریم به ازاء جمیع مقادیر k رابطه زیر را داریم.

$$X_1(\frac{2\pi}{4}k) = X_2(\frac{2\pi}{4}k) \qquad (۱۲۵-۴)$$

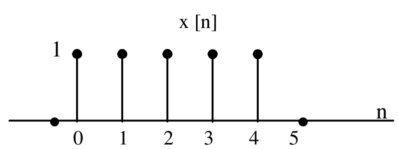
چون

$$X_1(\frac{2\pi}{4}k) = 1 - e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \qquad (۱۲۶-۴)$$

$$X_2(\frac{2\pi}{4}k) = -e^{jk\pi} - e^{j\frac{\pi k}{2}} - 1 + e^{-jk\pi} + e^{-j3k\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j2k\pi} - e^{-j\frac{5k\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{7k\pi}{2}} = 1 - e^{-j\frac{k\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{3k\pi}{2}} \qquad (۱۲۷-۴)$$

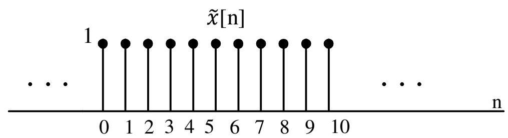
بنابراین نمونه‌های بدست آمده از طیف هر دو دنباله یکسان هستند. بنابراین اگر چه از این نمونه‌ها می‌توان دوباره $x_1[n]$ را بازسازی کرد چون دوره تناوب آن ۴ است، ولی نمی‌توان $x_2[n]$ را بازسازی کرد چون دوره تناوب آن ۱۰ است. بنابراین اگر بخواهیم نمونه‌های برداشته شده از $X_2(\Omega)$ به طور یکتا $x_2[n]$ را بازسازی کند. لازم است حداقل $N \geq 10$ شود.

مثال (۴-۱۵): ضرایب DFT مربوط به دنباله $x[n]$ که در شکل (۴-۲۳) نمایش داده شده است را بیابید.



شکل (۴-۲۲) دنباله مربعی $x[n]$

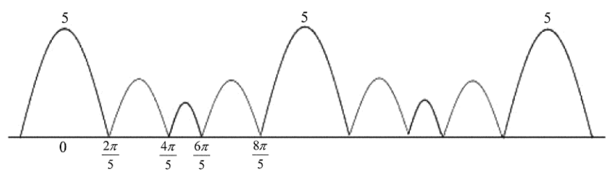
حل: اگر دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ را از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 5$ بسازیم دنباله شکل (۴-۲۴) حاصل می‌شود. در این صورت ضرایب سری فوریه دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ به صورت (۴-۱۲۵) بدست می‌آیند.



شکل (۴-۲۳): دنباله متناوب که از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N=5$ ساخته شده است.

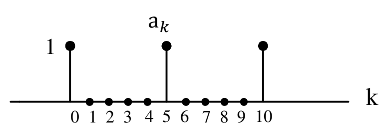
$$a_k = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} e^{-jk(\frac{2\pi}{5}k)n} = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ 0 & \text{در غیراینصورت} \end{cases} \tag{۱۲۸-۴}$$

و البته می‌توان این ضرایب را به صورت نمونه‌های $F(x[n]) = X(\Omega)$ در فرکانس‌های $\Omega = k\dfrac{2\pi}{5}$ بـه ازاء $k = 1,2,3,\ldots$ بدست آورد . قبلا دیدیم که قدر مطلق تبدیل فوریه گسسته زمانی $x[n]$ به صـورت زیر است.



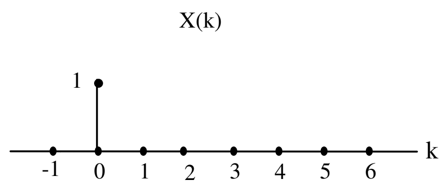
شکل (۴-۲۴): طیف دامنه $|X(\Omega)|$

می‌توان به سادگی a_k را بدست آورد.



شکل (۴-۲۵): ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$

و ضرایب DFT مساوی ضرایب a_k در یک دوره متناوب می‌باشند.

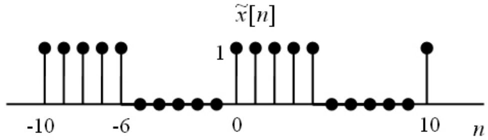


شکل (۴-۲۶): ضرایب DFT مربوط به $x[n]$

بنابراین

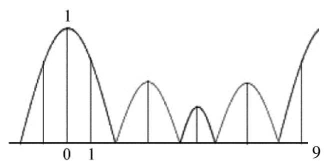
$$X[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1,2,3,4 \end{cases}$$

اکنون فرض کنید $\tilde{x}[n]$ را از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N=10$ بسازیم.

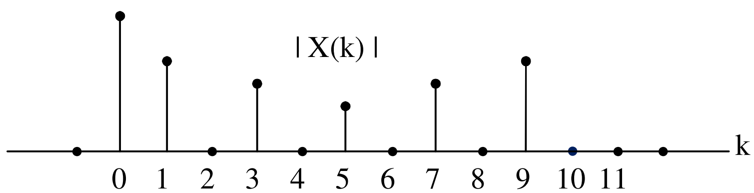


شکل (۴-۲۷): دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ که از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N=10$ ساخته شده است.

طیف $X(\Omega)$ مثل حالت اول است چون از روی $x[n]$ بدست می‌آید، اما اکنـون بایـد از طیـف $X(\Omega)$ در فرکانس‌های $\Omega = k\dfrac{2\pi}{10}$ نمونه‌برداری کنیم.



شکل (۴-۲۸): ضرایب سری فوریه مربوط به $\tilde{x}[n]$ برحسب k



شکل (۴-۲۹): ضرایب DFT مربوطه به $x[n]$

محدوده تغییرات دامنه $X(k)$ در شکل فوق نمایش داده شده است، که برابر یک دوره تناوب از a_k است.

محاسبهٔ کانولوشن معمولی به کمک DFT

مهمترین کاربرد معادله (۴-۱۰۵) این است که به کمک این معادله DFT می‌توان محاسبات مربوط بـه کانولوشن معمولی دو دنباله دوره محدود را ساده کرد. به عنوان مثال فرض کنید.

$x_1[n]=0 \qquad 0 \le n \le N_1 - 1$ در خارج ناحیه (۴-۱۲۹)

$x_2[n]=0 \qquad 0 \le n \le N_2 - 1$ در خارج ناحیه (۴-۱۳۰)

همچنین فرض کنید $y[n]$ نمایانگر کانولوشن معمولی دو دنباله فوق باشد، بنابراین در خارج ناحیهٔ

$$0 \le n \le N_1 + N_2 - 2 \qquad (۴-۱۳۱)$$

$y[n]$ برابر صفر است.

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = 0 \qquad (۴-۱۳۲)$$

اکنون دوره تناوب N را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$N \ge N_1 + N_2 - 1 \qquad (۴-۱۳۳)$$

باشد و دنباله‌های $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ را با دوره تناوب N از روی سیگنالهای متنـاظر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ مـی سازیم.

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[n] \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{۱۳۴-۴}$$

$$\tilde{x}_2[n] = x_2[n] \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{۱۳۵-۴}$$

اگر $y[n]$ نمایانگر کانولوشن متناوب $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ باشد، داریم.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m] \;\; \tilde{x}_2[n-m] \tag{۱۳۶-۴}$$

در آن صورت در یک دوره تناوب حاصل کانولوشن تناوبی و معمولی یکسان است.

$$\tilde{y}[n] = y[n] \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{۱۳۷-۴}$$

توضیح معادله فوق در شکل (۴-۳۰) بوضوح دیده می‌شود. در این شکل فرض شده است کـه $N_1 = 5$ و $N_2 = 7$. بنا براین با انتخاب $N = 12\rangle 11$ سیگنالهای متناوب $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ ایجاد شده انـد و حاصـل کانولوشن تناوبی آنها در یک دوره تناوب گرفته شده است. دیده می شـود کـه ایـن حاصـل بـا حاصـل کانولوشن معمولی در یک دوره تناوب برابر است.

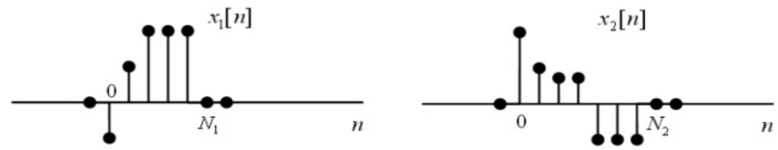
بنابراین ابتدا باید به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ به اندازه کافی صفر اضافه کـرد تـا دوره تنـاوب سـیگنال متنـاوب متناظر N شود (به گونه‌ای که $N \ge N_1 + N_2 - 1$ اسـت). پاسـخ کانولوشـن معمـولی $y[n]$ در خـارج ناحیهٔ $0 \le n \le N-1$ صفر است، بنابراین $y[n]$ که از کانولوشن معمولی (غیرتناوبی) $x_1[n]$ و $x_2[n]$ بدست می‌آید را می‌توان از کانولوشن تناوبی $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ بدست آورد. البته به شرط اینکه نتیجـه را فقط در یک دوره تناوب N در نظر بگیریم. از طرفی می‌دانیم که سری فوریه $\tilde{y}_2[n]$ را می‌توان از روی سری‌های فوریـه $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ بدسـت آورد و چـون $\tilde{y}[n]$ و $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ متنـاظر بـا $y[n]$ و $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در فاصله $0 \le n \le N-1$ می‌باشند، بنابراین از معادله (۴-۱۱۷) می‌بینیم کـه ضـرایب سری‌های فوریه برای سیگنال‌های متناوب مسـاوی DFTهـای سـه سـیگنال غیرمتنـاوب مـی‌باشـند.

بنابراین الگوریتم زیر را می‌توان برای پیدا کردن کانولوشن غیرمتناوب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ارائه کرد.

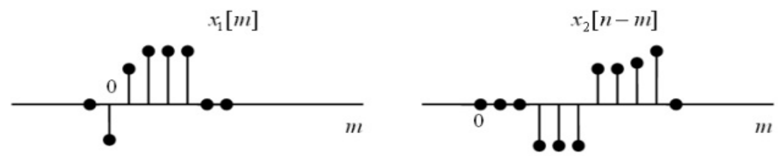
۱- ابتدا DFT ، N نقطه‌ای مربوط به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ($X_1(k)$ و $X_2(k)$) را محاسبه می‌کنیم.

۲- دو DFT را در هم ضرب می‌کنیم تا DFT مربوط به $y[n]$ بدست آید.

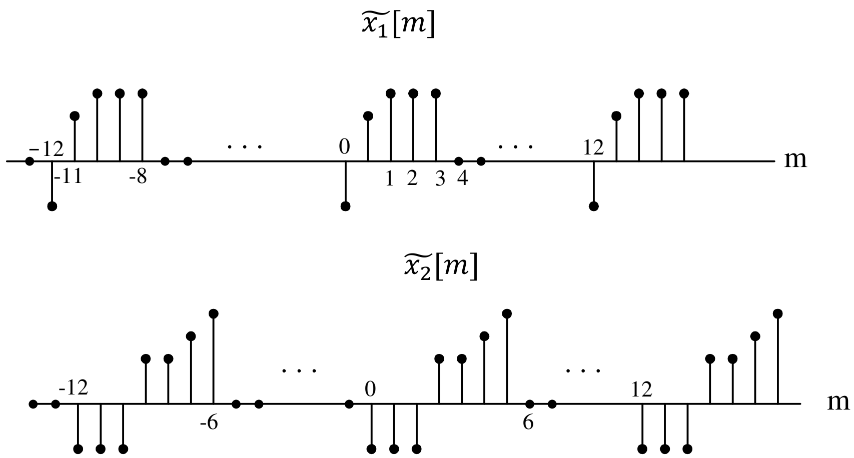
$$Y(k) = X_1(k) X_2(k) \tag{۱۳۸-۴}$$



(a)



(b)



(c)

شکل (۴-۳۰): محاسبه کانولوشن معمولی دو دنباله با دوره‌های محدود (a)دنباله اصلی (b)کانولوشن معمولی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ (c)کانولوشن تناوبی $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$

۳- IDFT را حساب کرده و $y[n]$ را بدست می‌آوریم (معادله (۴-۱۱۸)) تنها محدودیت عملیات فوق این است که باید حتماً DFT، N نقطه‌ای را حساب کرد به گونه‌ای کـه $N \geq N_1 + N_2 - 1$ باشـد. بـا توجه به وجود الگوریتم FFT برای محاسبهٔ سریع DFT مجموع سه عملیات گفتـه شـده روش بسـیار ساده و سریعی را جهت محاسبهٔ کانولوشن غیرتناوبی دو دنباله دوره محدود، ارائه میکند.

۴-۵-۱۲ خاصیت مدولاسیون

فرض کنید $y[n] = x_1[n]x_2[n]$ در این صورت طبق خاصیت مدولاسیون تبدیل فوریه حاصـل ضـرب دنباله‌ها در حوزه زمان به کانولوشن تبدیل‌های فوریه در حوزه فرکانس تبدیل می‌شوند.

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta)d\theta \tag{۴-۱۳۹}$$

اثبات: رابطه تبدیل فوریه به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\Omega n} \tag{۴-۱۴۰}$$

از طرفی می‌توان به جای $x_1[n]$ مقدارش را نوشت.

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta \tag{۴-۱۴۱}$$

با جایگذاری در (۴-۱۴۰) داریم

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{2\pi} X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta\right\}e^{-j\Omega n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta\, e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta)d\theta\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-jn(-\theta+\Omega)}$$

و بالاخره

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta)d\theta \tag{۴-۱۴۲}$$

مثال (۴-۱۶): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله $(-1)^n$.

$$x_1[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

حل: چون دنباله $x_1[n]$ متناوب است، داریم.

$$X_1(\Omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

توجه می‌شود که برای $x_1[n]$ دوره تناوب $N = 2$ می‌باشد.

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = \frac{1}{2}[1-e^{-j\frac{2\pi}{2}k}] = \frac{1}{2}[1-e^{-jk\pi}]$$

بنابراین ضرایب سری فوریه به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1$$

و با استفاده از تعریف تبدیل فوریه برای دنباله‌های متناوب می‌توان تبدیل فوریه دنباله $x_1[n]$ را بدست آورد.

$$X_1(\Omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\Omega - k\pi)$$

که مجموع فوق فقط به ازاء kهای فرد مقدار دارد، پس می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر نیز نوشت.

$$X_1(\Omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - (2k+1)\pi)$$

در شکل (۴-۳۱) مراحل کانولوشن $X_1(\Omega)$ و یک تبدیل فوریه دلخواه $X_2(\Omega)$ نشان داده شده است.

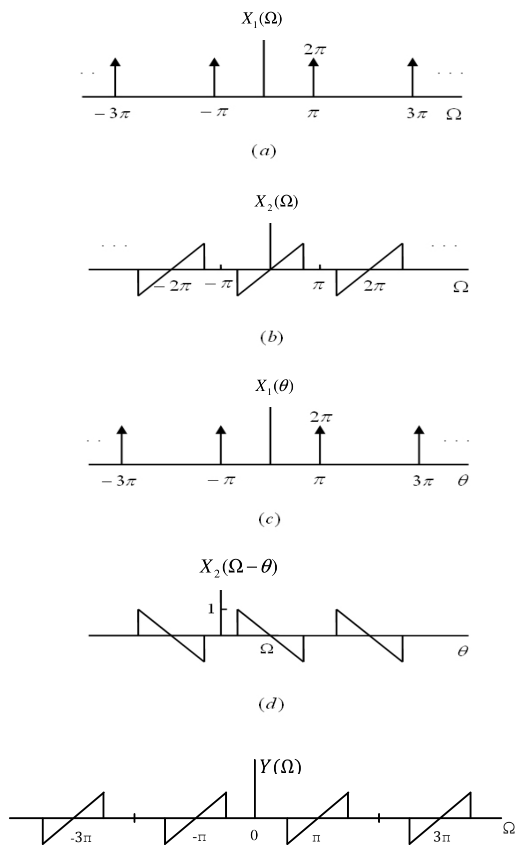
اگر $X_2(\Omega)$ را همانند شکل (b-۳۱-۴) را در نظر بگیریم، در آن صورت با انتخاب ناحیهٔ انتگرال‌گیـری بین 0 و 2π داریم.

$$\int_0^{2\pi} X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} X_2(\Omega-\theta)\delta(\theta-\pi)d\theta = X_2(\Omega-\pi) \qquad (۱۴۳\text{-}۴)$$

که طیف حاصل از حاصل ضرب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در شکل (d-۳۱-۴) رسم شده است. البته این نتیجـه را از خاصیت انتقال به حوزه فرکانس نیز می‌توانستیم بدست آوریم. چون $(-1)^n = e^{j\pi n}$ و طبق خواص تبدیل فوریه، ضرب یک دنباله مفروض در یک دنباله نمایی موجب انتقال طیف دنباله مفـروض خواهـد شد.

$$e^{j\pi n}x_2[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_2(\Omega-\pi) \qquad (۱۴۴\text{-}۴)$$

در اینجا می‌بینیم که ضرب یک دنباله در $(-1)^n$ باعث می‌شود که فرکانسهای بالا و پایین در طیف دنباله جابه‌جا شوند که این خاصیت بسیار مهمی است.



شکل (۴-۳۱): مراحل مختلف مدولاسیون گسسته زمان یک سیگنال دلخواه $x_2[n]$ با $x_1[n]=(-1)^n$

۴-۵-۱۳ خواص دوگانی

در اینجا به بررسی چند نوع دوگانی جدید و جالب می‌پردازیم.

ضرایب سری فوریه متناوب

در حالت پیوسته زمان، خاصیت تقارن یا دوگانی بین دو معادله مستقیم و معکوس تبدیل فوریه دیده می‌شد ولی در حالت تبدیل فوریه گسسته زمان چنین خاصیتی وجود ندارد، اما یک نوع تقارن در سری فوریه گسسته زمان دیده می‌شود. برای روشن شدن مطلب دو دنباله متناوب با دوره تناوب N را در نظر بگیرید که بوسیله رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$f[m]=\frac{1}{N}\sum_{r=<N>}g[r]e^{-jr(\frac{2\pi}{N})m} \tag{۱۴۵-۴}$$

اگر $r=n,m=k$ در نظر بگیریم، داریم.

$$f[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}g[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۱۴۶-۴}$$

بنابراین $f[k]$ متناظر با ضرایب سری فوریه دنباله $y[n]$ خواهد بود.

$$g[n]\overset{F}{\leftrightarrow}f[k] \tag{۱۴۷-۴}$$

توجه شود که در نمایش فوق عملگر F مبین ارتباط سری فوریه بین دو دنباله می‌باشد.

اگر $r=-k,m=n$ در نظر بگیریم، داریم.

$$f[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}y[-k]e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}=\sum_{k=<N>}\frac{1}{N}g[-k]e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \tag{۱۴۸-۴}$$

و در نتیجه $\frac{1}{N}g[-k]$ متناظر با ضرایب سری فوریه دنباله $f[n]$ خواهد بود.

$$f[n]\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{N}g[-k] \tag{۱۴۹-۴}$$

در واقع عملیات فوق بیانگر این حقیقت است که ضرایب سری فوریه دنباله متناوب، a_k، متناسب با دنباله اصلی $x[n]$ است که در زمان معکوس شده باشد ($x[n]$ دنباله‌ای است که a_k ضرایب سری فوریه آن است). این دوگانی در تمام خواص سری فوریه مشاهده می‌شود. دانشجویان به عنوان مثال می‌توانند موارد زیر را تحقیق کنند.

$$\begin{cases} e^{jm(\frac{2\pi}{N})n}x[n]\overset{F}{\leftrightarrow}a_{k-m} \\ x[n-n_0]\overset{F}{\leftrightarrow}a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0} \end{cases} \tag{۱۵۰-۴}$$

$$\begin{cases} \sum_{r=<N>}x[r]y[n-r]\overset{F}{\leftrightarrow}Na_k b_k \\ x[n]y[n]\overset{F}{\leftrightarrow}\sum_{l=<N>}a_l b_{k-l} \end{cases} \tag{۱۵۱-۴}$$

تمرین (۴-۴): صحت روابط فوق را تأیید کنید.

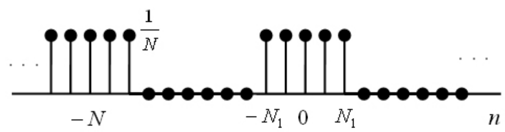
هر دستگاه نمایانگر یک جفت دوگانی است. کاربرد خاصیت دوگانی در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال (۴-۱۷): دنباله متناوب زیر را درنظر بگیرید.

$$x[n]=\frac{1}{N}\frac{Sin\left[(\frac{2\pi n}{N})(N_1+\frac{1}{2})\right]}{Sin(\frac{2\pi n}{2N})}$$

ضرایب سری فوریه این دنباله را با استفاده از خاصیت دوگانی بدست آورید.

حل: دیدیم که اگر $g[n]\overset{F}{\leftrightarrow}x[k]$، در آن صورت $x[n]\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{N}g[-k]$. بنابراین ضرایب سری فوریه $x[n]$، همان دنباله مربعی است که دامنه‌اش در $\frac{1}{N}$ ضرب شده و در زمان نیز معکوس شده است(به شکل (۴-۳۲) توجه کنید).



شکل (۴-۳۲): ضرایب سری فوریه دنباله $x[n]$ که در مثال (۴-۱۷) ذکر شده است.

تبدیل فوریه گسسته زمان و سری فوریه پیوسته زمان

نوعی دوگانی بین تبدیل فوریه گسسته زمان و ضرایب سری فوریه پیوسته زمان وجود دارد که از مقایسه معادلات مربوطه بوضوح مشاهده می‌شود. جهت مقایسه بهتر فرمول‌ها را دوباره تکرار می‌کنیم.

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \qquad (۴-۱۵۲)$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \qquad (۴-۱۵۳)$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (۴-۱۵۴)$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad (۴-۱۵۵)$$

فرض کنید که $f(u)$ نمایانگر یک تابع متناوب پیوسته زمان باشد که دوره تناوب آن 2π است و همچنین فرض کنید $g[m]$ یک دنباله گسسته باشد که با $f(u)$ به صورت زیر مربوط باشد.

$$f(u)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}g[m]e^{-jum} \qquad (۴-۱۵۶)$$

با قرار دادن $u=\Omega$ و $m=n$ می‌بینیم که $f(\Omega)$ تبدیل فوریه $g[n]$ است، همچنین می‌توان $g[m]$ را از $f(u)$ بازسازی کرد.

$$g[n]\leftrightarrow f(\Omega) \qquad (۴-۱۵۷)$$

$$g[m]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(u)e^{jum}du \qquad (۱۵۸-۴)$$

اگر در رابطه (۴-۱۵۵) $m=-k,u=t$ قرار دهیم، رابطه زیر را بدست خواهیم آورد.

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k]e^{jkt} \qquad (۱۵۹-۴)$$

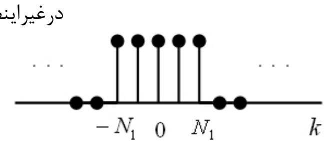
بنابراین $g[-k]$ ضرایب سری فوریه $f(t)$ می‌باشند.

$$f(t)\overset{F}{\leftrightarrow} g[-k] \qquad (۱۶۰-۴)$$

که سری فوریه فوق مربوط به حالت پیوسته زمان باشد. معنی عبارات فوق این است که اگر فرض کنیم $x[n]$ یک دنباله گسسته زمان با تبدیل فوریه $X(\Omega)$ باشد، از آنجائیکه $X(\Omega)$ متناوب و تابعی پیوسته از Ω است، می‌توان ضرایب سری فوریه آن را بدست آورد به طوریکه $\omega_0=1$ و به جای t از متغیر Ω به عنوان متغییر پیوسته استفاده خواهیم کرد. از خاصیت دوگانی درمی‌یابیم که ضرایب سری فوریه $X(\Omega)$ همان دنباله اصلی $x[n]$ هستند که در زمان معکوس شده باشد.

مثال (۴-۱۸): سیگنال پیوسته زمان $x(t)$ که با دوره تناوب 2π متناوب است را در نظر بگیرید. فرض کنید $x(t)$ دارای ضرایب سری فوریه به صورت زیر باشد.

$$a_k=\begin{cases}1 & |k|\le N_1\\ 0 & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$



شکل (۴-۳۳): نمایش ضرایب سری فوریه سیگنال پیوسته زمانی $x(t)$

مطلوبست پیداکردن سیگنال $x(t)$.

حل: اگر از خاصیت دوگانی استفاده شود، می‌توان به سادگی $x(t)$ را بدست آورد.

$$x(t)=\frac{Sin(N_1+\frac{1}{2})t}{Sin\frac{t}{2}}$$

به طریق مشابه تبدیل فوریه گسسته زمان $X(\Omega)$ که در یک دوره تناوب $-\pi<\Omega<\pi$ تعریف شده است را در نظر می‌گیریم.

$$X(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\le w\\ 0 & w<|\Omega|\le\pi\end{cases} \qquad (۱۶۱-۴)$$

می‌توان $X(\Omega)$ را به عنوان یک سیگنال مربعی متناوب با سری فوریه زیر در نظر گرفت.

$$x[n]=\frac{Sinwn}{\pi n}=\frac{w}{\pi}Sinc\,(\frac{wn}{\pi}) \qquad (۱۶۲-۴)$$

چون برای چنین سیگنالی $T_1=w$, $\omega_0=1$ می‌باشد (به فصل ۳ مراجعه شود).

در جدول (۴-۱) خواص دوگانی در حوزه پیوسته و گسسته زمان نمایش داده شده‌اند.

	پیوسته زمان		گسسته زمان	
	حوزه زمان	حوزه فرکانس	حوزه زمان	حوزه فرکانس
سری فوریه	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ پیوسته زمان متناوب درزمان	$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}$ فرکانس گذشته غیرمتناوب در فرکانس	$x[n]=\sum_{n=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$ گسسته زمان متناوب در زمان	$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$ گسسته در فرکانس متناوب در فرکانس
تبدیل فوریه	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$ پیوسته زمان غیرمتناوب	$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}dt$ پیوسته در فرکانس غیرمتناوب در فرکانس	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$ گسسته زمان غیرمتناوب در زمان	$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ پیوسته در فرکانس متناوب درفرکانس

جدول (۴-۱)

۴-۶ نمایش تبدیل فوریه گسسته زمانی DTFT به صورت قطبی

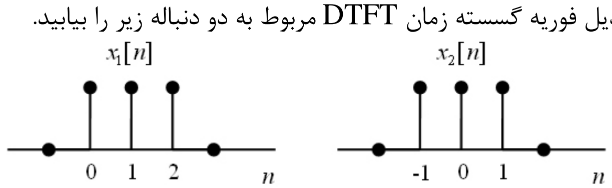
فرض کنید $x[n]$ یک دنباله گسسته زمانی با تبدیل فوریه $X(\Omega)$ باشد، همانطور که می‌دانیم $X(\Omega)$ یک تابع مختلط می‌باشد، بنابراین می‌توان آن را به صورت قطبی نمایش داد.

$$X(\Omega)=\left|X(\Omega)\right|e^{j\angle X(\Omega)} \qquad (۴-۱۶۳)$$

چون $X(\Omega)$ با دوره تناوب 2π متناوب است، لازم است دامنه و زاویه $X(\Omega)$ نیز با دوره تناوب 2π متناوب باشند. $\left|X(\Omega)\right|$ شامل اطلاعات مربوط به دامنه نمایی‌های مختلطی است که در $x[n]$ وجود دارند و $\angle X(\Omega)$ نیز زاویه نمایی‌ها را معین می‌کند. بنابراین دانستن هر دو عامل قدر مطلق و زاویه برای تعیین یکتای $X(\Omega)$ لازم و کافی است. به هر حال می‌توان چندین دنباله متفاوت را یافت که دارای دامنه تبدیل فوریه یکسان باشند.

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۴-۱۹): تبدیل فوریه گسسته زمان DTFT مربوط به دو دنباله زیر را بیابید.



شکل (۴-۳۴): دو دنباله متفاوت که دارای قدر مطلق تبدیل فوریه یکسان هستند

حل: ابتدا برای $x_1[n]$ داریم

$$X_1(\Omega)=\sum_{n=0}^{2}e^{-j\Omega n}=1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}$$

و برای $x_1[n]$ نیز داریم.

$$X_2(\Omega)=\sum_{n=-1}^{1}e^{-j\Omega n}=e^{j\Omega}+1+e^{-j\Omega}$$

اگر از رابطه اول عبارت $e^{-j\Omega}$ را فاکتور بگیریم، رابطه دوم بدست می‌آید، یعنی

$$X_1(\Omega)=e^{-j\Omega}[X_2(\Omega)]$$

بنابراین دامنه هر دو تبدیل فوریه یکسان است.

$$\left|X_1(\Omega)\right|=\left|X_2(\Omega)\right|$$

نمایش DTFT به صورت قطبی بسیار مفید است. مثلا در مورد سیستم‌های LTI کـه در آنهـا رابطـه بین خروجی، ورودی و تابع شبکه به صورت زیر است.

$$Y(\Omega)=H(\Omega)X(\Omega) \tag{۱۶۴-۴}$$

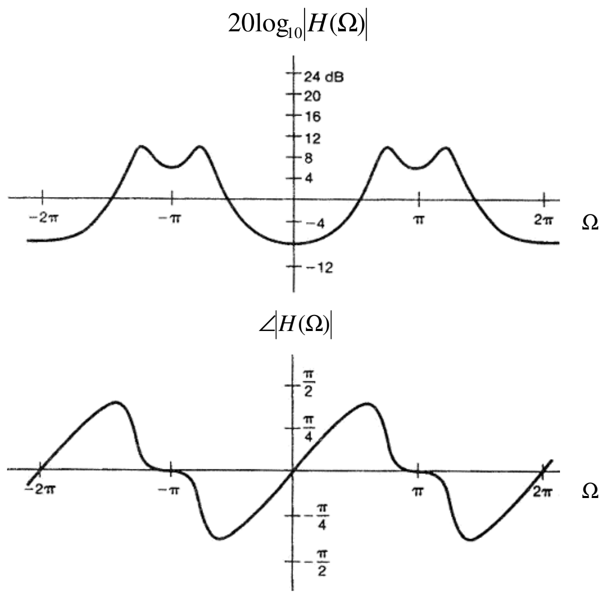
می‌توان ارتباط بین دامنه‌ها و زاویه‌ها را به صورت زیر نوشت.

$$\left|Y(\Omega)\right|=\left|H(\Omega)\right|\left|X(\Omega)\right| \tag{۱۶۵-۴}$$

$$\angle Y(\Omega)=\angle H(\Omega)+\angle X(\Omega) \tag{۱۶۶-۴}$$

لازم است توجه شود که دامنه $X(\Omega)$ تابعی زوج و متناوب از Ω اسـت و زاویـه $X(\Omega)$ تـابعی فـرد و متناوب از Ω می‌باشد. این مطلب با توجه به نمایش تبدیل فوریه به صورت قطبی کاملاً آشکار می‌شـود (به روابط (۴-۷۱) الی (۴-۷۴) مراجعه کنید). پس $\left|X(\Omega)\right|$ یک تابع زوج و متناوب از Ω است، چـون از مجموع دو تابع زوج و متناوب با دوره تناوب یکسان تشکیل شـده اسـت و همچنـین $\angle X(\Omega)$ یـک تابع فرد و متناوب از Ω است، چون از حاصل تقسیم دو تابع زوج و فرد که هر دو بـا یـک دوره تنـاوب یکسان متناوب هستند، تشکیل شده است. به عنوان مثـالی از $\left|X(\Omega)\right|$ و $\angle X(\Omega)$ بـه شـکل (۴-۳۵) توجه کنید.

به دلیل زوج بودن دامنه تبدیل فوریه، دانستن آن فقط در هر فاصله به طول π کافی اسـت. همچنـین با فردبودن زاویه تبدیل فوریه، دانستن آن در هر فاصله به طول π جهـت مشـخص کـردن $X(\Omega)$ بـه طور یکتا کافی می‌باشد.



شکل (۴-۳۵): نمای قدر مطلق و زاویه تبدیل فوریه.

۴-۷ تابع انتقال سیستم‌هایی که بوسیلهٔ معادله تفاضلی با ضرایب ثابت توصیف می‌گردند

۴-۷-۱ محاسبه پاسخ ضربه و تابع انتقال

همانگونه که در فصل دوم توضیح داده شد سیستم‌های LTI گسسته زمان را می‌توان به وسیله یک معادله تفاضلی با ضرایب ثابت و با فرض شرایط استراحت اولیه توصیف نمود. در حالت کلی یک معادله تفاضلی از مرتبهٔ Mام به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (۱۶۷-۴)$$

در اولین قدم جهت محاسبه پاسخ ضربه لازم است فرض کنیم که تبدیل فوریه $h[n]$، $y[n]$ و $x[n]$ وجود دارند و همگرا هستند. در این صورت می‌توان از طرفین رابطه (۴-۱۶۷) تبدیل فوریه گرفت و رابطه (۴-۱۶۸) و سپس (۴-۱۶۹) را بدست آورد.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega) \qquad (۱۶۸-۴)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}} \qquad (۱۶۹-۴)$$

بنابراین با داشتن معادله تفاضلی به راحتی می‌توان تابع انتقال سیستم را بدست آورد.

مثال (۴-۲۱): پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI که توسط معادله تفاضلی زیر توصیف می‌گردد را با فرض شرایط استراحت اولیه بدست آورید.

$$y[n]-\alpha y[n-1]=x[n] \qquad (۱۷۰-۴)$$

حل: اگر فرض کنیم $|\alpha|<1$ باشد با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه (۴-۱۷۰) به رابطه (۴-۱۷۱) می‌رسیم.

$$Y(\Omega)-\alpha e^{-j\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega) \qquad (۱۷۱-۴)$$

بنابراین تابع انتقال سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \qquad (۱۷۲-۴)$$

رابطه (۴-۱۷۲) یک رابطه آشنا برای دانشجویان و در حقیقت تبدیل فوریهٔ دنباله زیر می‌باشد.

$$h[n]=\alpha^n u[n] \qquad (۱۷۳-۴)$$

مثال (۴-۲۲): با توجه به معادله تفاضلی زیر که مبین یک سیستم LTI و علّی می‌باشد، مطلوبست تابع انتقال سیستم.

$$y[n]-y[n-1]+\frac{2}{9}y[n-2]=x[n] \qquad (۱۷۴-۴)$$

حل: با فرض وجود تبدیل فوریه $x[n], y[n], h[n]$ از تبدیل فوریه (۴-۱۷۴) به رابطه (۴-۱۷۵) می‌رسیم.

$$Y(\Omega)-e^{-j\Omega}Y(\Omega)+\frac{2}{9}e^{-j2\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega) \qquad (۱۷۵-۴)$$

و یا

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}+\frac{2}{9}e^{-j2\Omega}} \qquad (۱۷۶-۴)$$

با تفکیک (۴-۱۷۶) به کسور جزئی داریم.

$$H(\Omega)=\frac{-1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}+\frac{2}{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}} \qquad (۱۷۷-۴)$$

بنابراین به سادگی می‌توان $h[n]$ را بدست آورد.

$$h[n]=-(\frac{1}{3})^n u[n]+2(\frac{2}{3})^n u[n] \qquad (۱۷۸-۴)$$

مثال (۴-۲۲): فرض کنید ورودی سیستم مذکور در رابطه (۴-۱۷۷) به صورت زیر باشد.

$$x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$$

مطلوبست پاسخ سیستم.

حل: تبدیل فوریه ورودی برابر است با

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

بنابراین طبق خاصیت مدولاسیون می‌توان تبدیل فوریه خروجی را بدست آورد.

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega})}$$

می‌توان رابطه فوق را به کسور جزئی بسط داد، در این صورت داریم.

$$Y(\Omega)=\frac{a}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}+\frac{b}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}+\frac{c}{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}}$$

مقادیر a,b,c باید در روابط زیر صدق کنند.

$$a+b+c=1$$

$$-\frac{11}{12}a-b-\frac{7}{12}c=0$$

$$\frac{1}{6}a+\frac{2}{9}b+\frac{1}{12}c=0$$

از حل معادلات فوق به روش کرامر می‌توان a,b,c را بدست آورد.

$$a=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 7/12\\ 0 & 2/9 & 1/12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 11/12 & 1 & 7/12\\ 1/6 & 2/9 & 1/12\end{vmatrix}}=\frac{\frac{-5}{108}}{\frac{5}{432}}=-4$$

و به همین ترتیب می‌توان مقادیر b,c را بدست آورد.

$$b=1.8, c=3.2$$

۴-۷-۲ نمایش سیستم LTI گسسته زمان به کمک بلوک‌های اساسی

هر سیستم LTI گسسته زمان که به صورت یک معادله تفاضلی با ضرایب ثابت داده شده است، را می‌توان به کمک بلوک‌های اساسی نمایش داد. در اینجا منظور ما از بلوک‌های اساسی بلوک تأخیر، ضرب‌کننده و جمع‌کننده می‌باشد. این نوع نمایش کاربرد فراوانی در شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته زمان به کمک رایانه دارد.

دو نوع ساختار برای نمایش سیستم‌های LTI گسسته زمان به کمک بلوک‌های اساسی وجود دارد که این دو نوع ساختار کاملاً معادل می‌باشند (اگرچه از لحاظ ظاهر و تعداد بلوک‌های مورد استفاده متفاوت هستند). به عنوان مثال جهت سادگی فرض می‌کنیم در معادله تفاضلی (۴-۱۶۷)، $M = N$ باشد.

ساختار سری هنگامی بدست می‌آید که بتوان صورت و مخرج رابطه (۴-۱۶۹) را به صورت حاصل ضرب عوامل تجزیه کرد. در اینصورت می‌توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega)=\frac{b_0\prod_{k=1}^{N}(1+\mu_k e^{-j\Omega})}{a_0\prod_{k=1}^{N}(1+\eta_k e^{-j\Omega})} \qquad (۴\text{-}۱۷۹)$$

توجه شود که در حالت کلی η_k,μ_k اعداد مختلطی هستند.آن تعداد از ریشه‌ها که مختلط هستند به صورت دو به دو مزدوج ظاهر می‌شوند، در نتیجه می‌توان با یکی کردن ریشه‌های مزدوج به فرم زیر به $H(\Omega)$ دست یافت.

$$H(\Omega)=\frac{b_0\prod_{k=1}^{P}(1+\beta_{1k}e^{-j\Omega}+\beta_{2k}e^{-j2\Omega})\prod_{k=1}^{N-2P}(1+\mu_{1k}e^{-j\Omega})}{a_0\prod_{k=1}^{Q}(1+\alpha_{1k}e^{-j\Omega}+\alpha_{2k}e^{-j2\Omega})\prod_{k=1}^{N-2Q}(1+\eta_k e^{-j\Omega})} \qquad (۴\text{-}۱۸۰)$$

در رابطه فوق Q و P تعداد جفت ریشه‌های مزدوج صورت و مخرج می‌باشند. بنابراین اکنون تمام ضرایب معادله (۴-۱۸۰) حقیقی هستند و می‌توان تابع $H(\Omega)$ را به صورت حاصلضرب توابع درجه یک و درجه دو نوشت و در نتیجه ساختاری که توسط معادله (۴-۱۸۰) پیشنهاد می‌شود یک ساختار سری از سیستم‌های مرتبه اول و دوم می‌باشد. جهت روشن‌تر شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۴-۲۳): $H(\Omega)$ را توسط بلوک‌های اساسی بسازید.

$$H(\Omega)=\frac{b_0(1+\beta_{11}e^{-j\Omega}+\beta_{21}e^{-j2\Omega})(1+\mu_1 e^{-j\Omega})}{a_0(1+\alpha_{11}e^{-j\Omega}+\alpha_{21}e^{-j2\Omega})(1+\eta_1 e^{-j\Omega})}$$

حل: ابتدا $H(\Omega)$ را به دو جزء به صورت زیر تقسیم می‌کنیم.

$$H(\Omega)=H_1(\Omega)H_2(\Omega)$$

که در آن

$$H_1(\Omega)=\frac{b_0}{a_0}\,\frac{(1+\beta_{11}e^{-j\Omega}+\beta_{21}e^{-j2\Omega})}{(1+\alpha_{11}e^{-j\Omega}+\alpha_{21}e^{-j2\Omega})}$$

$$H_2(\Omega)=\frac{1+\mu_1 e^{-j\Omega}}{1+\mu_2 e^{-j\Omega}}$$

با نوشتن $H_1(\Omega)$ به صورت $\frac{Y_1(\Omega)}{X(\Omega)}$ داریم.

$$\frac{Y_1(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{b_0}{a_0}\,\frac{1+\beta_{11}e^{-j\Omega}+\beta_{21}e^{-j2\Omega}}{1+\alpha_{11}e^{-j\Omega}+\alpha_{21}e^{-j2\Omega}}$$

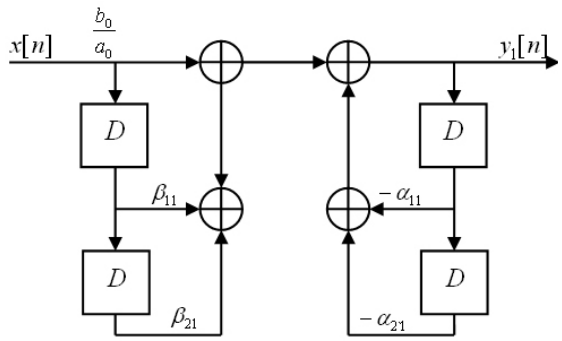
و در نتیجه

$$Y_1(\Omega)[1+\alpha_{11}e^{-j\Omega}+\alpha_{21}e^{-j2\Omega}]=\frac{b_0}{a_0}X(\Omega)[1+\beta_{11}e^{-j\Omega}+\beta_{21}e^{-j2\Omega}]$$

و در حوزه زمان می‌توان رابطه ورودی و خروجی را بدین صورت نوشت.

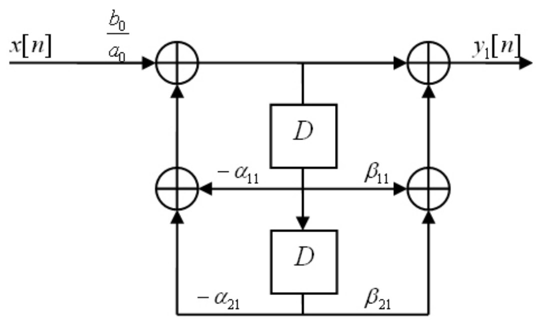
$$y_1[n]+\alpha_{11}y_1[n-1]+\alpha_{21}y_1[n-2]$$
$$=\frac{b_0}{a_0}\{x[n]+\beta_{11}x[n-1]+\beta_{21}x[n-2]\}$$
$$y_1[n]=\frac{b_0}{a_0}\{x[n]+\beta_{11}x[n-1]+\beta_{21}x[n-2]\}-\alpha_{11}y_1[n-1]+\alpha_{21}y_1[n-2]$$

ساختار رابطه فوق به صورت شکل صفحه بعد است. (نوع مستقیم شماره۱)



شکل (۴-۳۶): نمایش نوع مستقیم شماره ۱ مربوط $H_1(\Omega)$ درمثال (۴-۲۳)

البته می‌توان ساختار فوق را با جابه‌جا کردن جزئی در سیستم به صورت زیر نمایش داد. (نوع مستقیم شماره ۲)



شکل (۴-۳۷): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ مربوط به $H_1(\Omega)$ در مثال(۴-۲۳)

اکنون لازم است $H_2(\Omega)$ را نیزبه کمک بلوک‌های اساسی بسازیم. این کار را با نوشتن $H_2(\Omega)$ به صورت حاصل تقسیم $Y(\Omega)$ بر $Y_1(\Omega)$ آغاز می‌کنیم.

$$H_2(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{Y_1(\Omega)}=\frac{1+\mu_1e^{-j\Omega}}{1+\eta_1e^{-j\Omega}}$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega)(1+\eta_1e^{-j\Omega})=Y_1(\Omega)(1+\mu_1e^{-j\Omega})$$

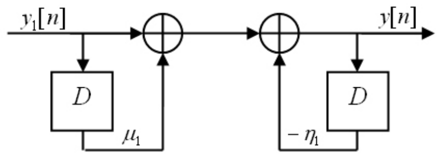
و در حوزه زمان می‌توان نوشت.

$$y[n]+\eta_1y[n-1]=y_1[n]+\mu_1y_1[n-1]$$

و یا

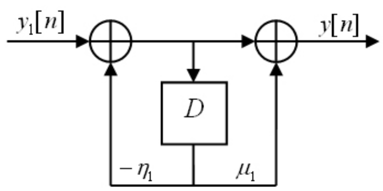
$$y[n] = y_1[n] + \mu_1 y_1[n-1] - \eta_1 y[n-1]$$

بنابراین می‌توان نمایش زیر را برای تابع انتقال $H_2(\Omega)$ ارائه نمود (نوع مستقیم شماره ۱).



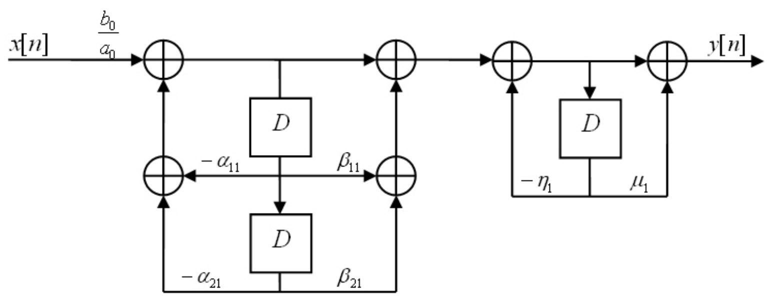
شکل (۴-۳۸): نمایش نوع مستقیم شماره ۱ مربوط به $H_2(\Omega)$ در مثال (۴-۲۳)

و نمایش نوع مستقیم شماره ۲ به صورت زیر بدست می‌آید.



شکل (۴-۳۹): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ مربوط به $H_2(\Omega)$ در مثال (۴-۲۳)

اکنون از ترکیب دو شکل (۴-۳۷) و (۴-۳۹) می‌توان ساختار سری مربوط بـه مثـال (۴-۲۳) را بدسـت آورد.



شکل (۴-۴۰): نمایش ساختار سری مثال (۴-۲۳)

واضح است که می‌توان جای دو بلوک $H_1(\Omega)$ و $H_2(\Omega)$ را در ساختار سری عوض کرد.

ساختار معادل دیگری که برای سیستم با پاسخ فرکانسی (۴-۱۶۹) می‌توان در نظر گرفت بنـام سـاختار موازی معروف است. این ساختار از نوشتن معادله (۴-۱۶۹) به صورت (۴-۱۸۱) استخراج می‌گردد.

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{b_N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1+\eta_k e^{-j\Omega}} \tag{۱۸۱-۴}$$

در اینجا نیز η_k در حالت کلی عدد مختلط می‌باشد. اگر هر زوج ریشه های مختلط مـزدوج را در یـک جمله مختصر کنیم، رابطه (۴-۱۸۱) بصورت (۴-۱۸۲) تبدیل می‌شود.

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{b_N} + \sum_{k=1}^{Q} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} e^{-j\Omega}}{1+\alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-j2\Omega}} + \sum_{k=1}^{N-2Q} \frac{A_k}{1+\eta_k e^{-j\Omega}} \tag{۱۸۲-۴}$$

در رابطه (۴-۱۸۱) تمام ضرایب حقیقی هستند و می‌توان آن را بوسیله بلوک‌های اساسی ساخت. جهت روشن‌تر شدن مطلب به مثال (۴-۲۴) توجه کنید.

مثال (۴-۲۴): $H(\Omega)$ را توسط بلوک‌های اساسی بسازید.

$$H(\Omega)=1+\sum_{k=1}^{2}\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}e^{-j\Omega}}{1+\alpha_{1k}e^{-j\Omega}+\alpha_{2k}e^{-j2\Omega}}+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{1+\eta_k e^{-j\Omega}}$$

حل: می‌توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega)=1+H_1(\Omega)+H_2(\Omega)+H_3(\Omega)+H_4(\Omega)$$

که در آن

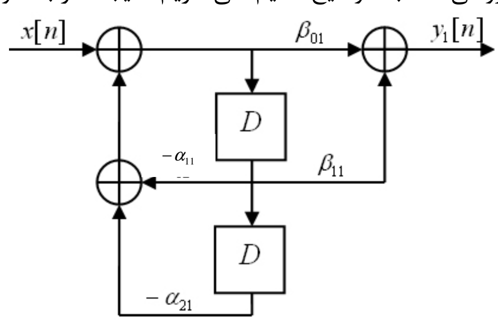
$$H_1(\Omega)=\frac{\beta_{01}+\beta_{11}e^{-j\Omega}}{1+\alpha_{11}e^{-j\Omega}+\alpha_{21}e^{-j2\Omega}}$$

$$H_2(\Omega)=\frac{\beta_{02}+\beta_{12}e^{-j\Omega}}{1+\alpha_{12}e^{-j\Omega}+\alpha_{22}e^{-j2\Omega}}$$

$$H_3(\Omega)=\frac{A_1}{1+\eta_1 e^{-j\Omega}}$$

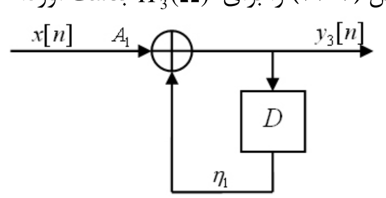
$$H_4(\Omega)=\frac{A_2}{1+\eta_2 e^{-j\Omega}}$$

ابتدا $H_1(\Omega)$ را مشابه روشی که قبلاً توضیح دادیم، می‌سازیم. نتیجهٔ کار به صورت شکل زیر است.



شکل (۴-۴۱): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ برای $H_1(\Omega)$ مربوط به مثال (۴-۲۴)

همچنین می توان ساختار شکل (۴-۴۲) را برای $H_3(\Omega)$ بدست آورد.



شکل (۴-۴۲): نمایش ساختار سیستم $H_3(\Omega)$ مربوط به مثال (۴-۲۴)

همین کار را برای هر چهار سیستم تشکیل دهنده سیستم اصلی نیز انجام می‌دهیم و درنهایت ساختار سیستم کلی از ترکیب موازی این سیستم ها بدست می آید. این کار به صورت تمرین به عهده دانشجویان گذاشته می شود.

۴-۸ پاسخ ضربه و پله سیستم‌های LTI گسسته زمان مرتبه اول ودوم

به دلیل اهمیت این دو سیستم درساخت سیستم‌های مراتب بالاتر می‌توان این سیستم‌ها را سیستم‌های پایه در نظر گرفت بنابراین بررسی آنها لازم و ضروری است.

۴-۸-۱ پاسخ ضربه و پله سیستم مرتبه اول

سیستم مرتبه اول در حالت کلی با معادله تفاضلی زیر مشخص می‌گردد.

$$y[n]-\alpha y[n-1]=x[n] \qquad (۴-۱۸۳)$$

و پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر است (با فرض $|\alpha|<1$).

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \qquad (۴-۱۸۴)$$

بنابراین پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول برابر است با

$$h[n]=\alpha^{n}u[n] \qquad (۴-۱۸۵)$$

چند نمونه از این پاسخ ضربه‌ها به ازاء مقادیر مختلف α در شکل (۴-۴۳) نمایش داده شده است.

پاسخ پله نیز به صورت زیر از کانولوشن پاسخ ضربه در دنباله پله واحد قابل محاسبه است.

$$s[n]=h[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[n-k]u[k] \qquad (۴-۱۸۶)$$

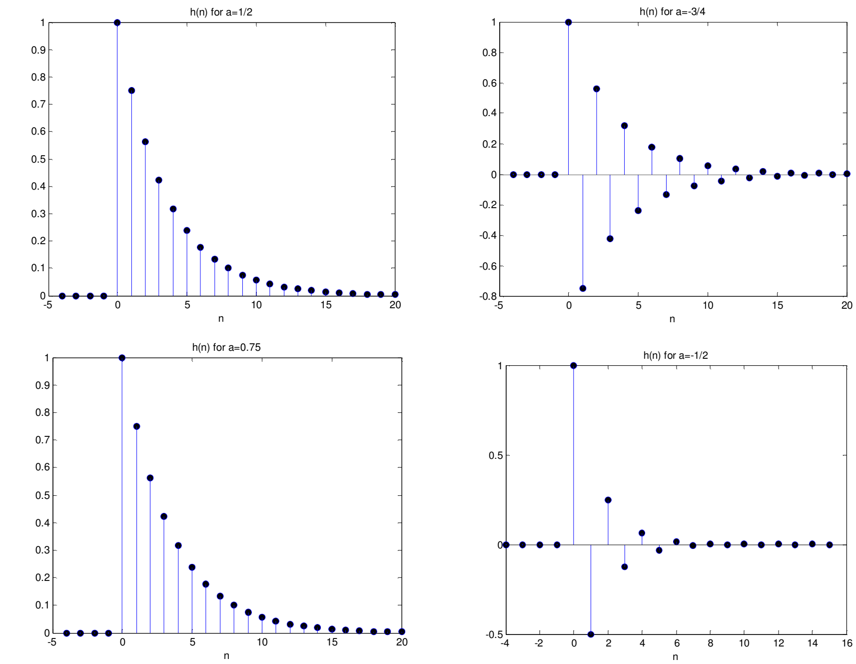
$$s[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{n-k}u[n-k]=\alpha^{n}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{-k}=\alpha^{n}\,\frac{1-\alpha^{-(n+1)}}{1-\alpha^{-1}} \qquad (۴-۱۸۷)$$

و یا

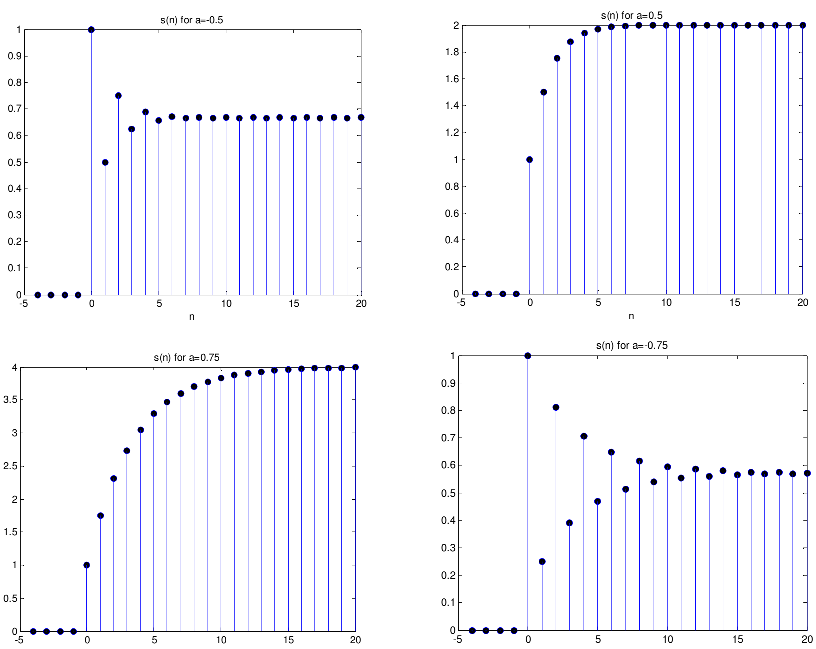
$$s[n]=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u[n] \qquad (۴-۱۸۸)$$

چند نمونه از این پاسخ پله‌ها به ازاء مقادیر مختلف $\alpha=a$ از روی رابطه (۴-۱۸۴) در شکل (۴-۴۴) رسم شده است.

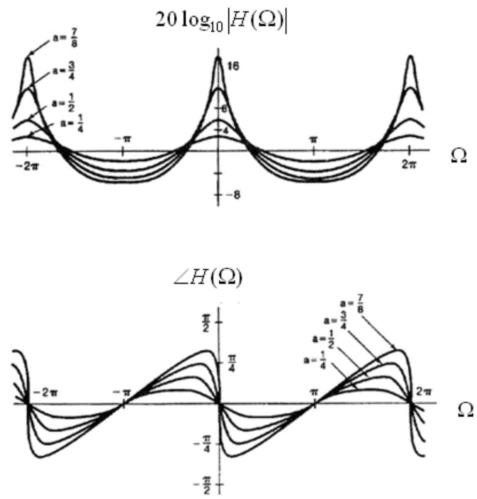
همچنین دامنه و فازتابع انتقال این سیستم به ازاء مقادی مختلف $\alpha=a$ در شکل (۴-۴۵)رسم شده است.



شکل (۴-۴۳): نمونه‌هایی از پاسخ ضربه سیستم‌های مرتبه اول به صورت رابطهٔ (۴-۱۸۵) به ازاء مقادیر مختلف a



شکل (۴-۴۴): چند نمونه از پاسخ پله سیستم مرتبه اول به صورت رابطه (۴-۱۸۸) به ازاء مقادیر مختلف a



شکل (۴-۴۵): دامنه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه اول به ازاء مقادیر مختلف a

۴-۸-۲ پاسخ ضربه و پله سیستم‌های مرتبه دوم

در حالت کلی می‌توان یک سیستم مرتبه دوم را توسط معادله تفاضلی به صورت زیر نمایش داد.

$$y[n]-2rCos\theta\, y[n-1]+r^2 y[n-2]=x[n] \tag{۱۸۹-۴}$$

با فرض $0\leq\theta\leq\pi, 0<r<1$ پاسخ فرکانسی برابر است با

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-2rCos\,\theta e^{-j\Omega}+r^2e^{-j2\Omega}} \tag{۱۹۰-۴}$$

می‌توان مخرج $H(\Omega)$ را به حاصلضرب دو عامل تجزیه کرد.

$$H(\Omega)=\frac{1}{[1-(re^{-j\theta})e^{-j\Omega}][1-(re^{j\theta})e^{-j\Omega}]} \tag{۱۹۱-۴}$$

می‌توان $H(\Omega)$ را بافرض $\theta\neq 0,\pi$ به صورت زیر نمایش داد.

$$H(\Omega)=\frac{A}{1-(re^{j\theta})e^{-j\Omega}}+\frac{B}{1-(re^{-j\theta})e^{-j\Omega}} \tag{۱۹۲-۴}$$

که در آن

$$A=\frac{e^{j\theta}}{j2Sin\,\theta} \quad , \quad B=\frac{-e^{-j\theta}}{j2Sin\,\theta} \tag{۱۹۳-۴}$$

در این صورت پاسخ ضربه برابر است با

$$h[n]=\left[A(re^{j\theta})^n+B(re^{-j\theta})^n\right]u[n]=\frac{r^nSin[(n+1)\theta]}{Sin\,\theta}u[n] \tag{۱۹۴-۴}$$

اگر $\theta=0$ باشد می‌توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega)=\frac{1}{(1-re^{-j\Omega})^2} \tag{۱۹۵-۴}$$

و در این حالت خاص $h[n]$ برابر است با

$$h[n]=(n+1)r^n u[n+1]=(n+1)r^n u[n] \qquad (۱۹۶\text{-}۴)$$

و اگر $\theta=\pi$ باشد.

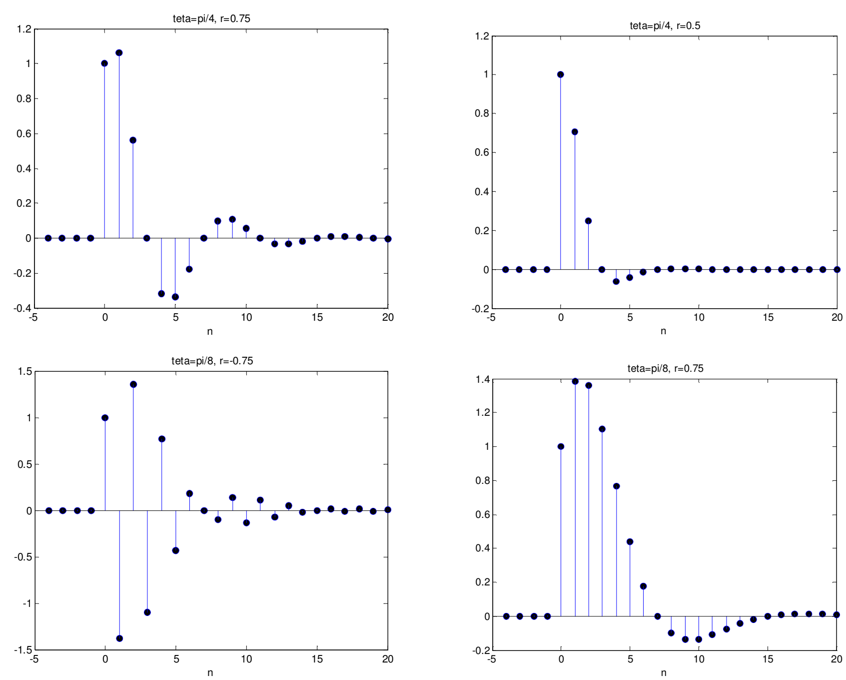
$$H(\Omega)=\frac{1}{(1+re^{-j\Omega})^2} \qquad (۱۹۷\text{-}۴)$$

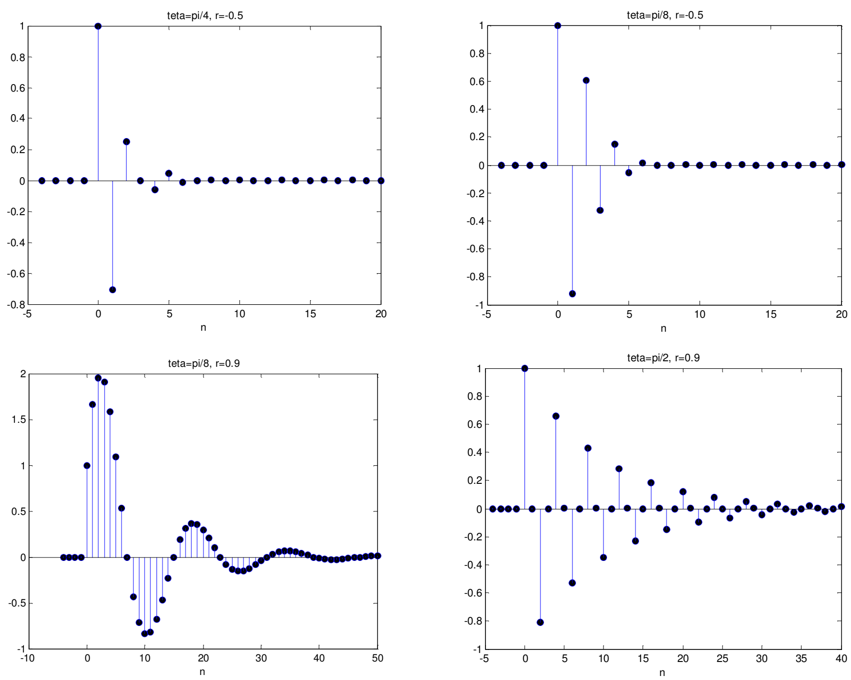
و پاسخ ضربه برابر است با

$$h[n]=(n+1)(-r)^n u[n+1]=(n+1)(-r)^n u[n] \qquad (۱۹۸\text{-}۴)$$

چند نمونه از تابع انتقال و پاسخ ضربه سیستم‌های مرتبه دوم در شکل هـای ۴-۴۶ و ۴-۴۷ نشـان داده شده است.

از این شکل‌ها نتیجه می‌گیریم که نرخ نزول $h[n]$ با تغییر r کنترل می‌شود، هر چه r به واحد نزدیکتر باشد، نرخ نزول کمتر می‌شود. همچنین θ تعیین کننده فرکانس نوسان پاسخ حول مقدار نهایی خود می‌باشد. اگر $\theta=0$ باشد، هیچگونه نوسانی در $h[n]$ مشاهده نمی‌شود، اما اگر $\theta=\pi$ باشد، نوسان‌ها سریع خواهند شد.





شکل (۴-۴۶) چند نمونه از پاسخ ضربه سیستم‌های مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف θ, r

اثر تغییر r و θ را در شکل موج پاسخ پله نیز می‌توان مشاهده کرد اگر $\theta \neq 0, \pi$ باشد، پاسخ پله برابر است با

$$s[n] = u[n] * h[n] = \left[A\frac{1-(re^{j\theta})^{n+1}}{1-re^{j\theta}}) + B\frac{1-(re^{-j\theta})^{n+1}}{1-re^{-j\theta}}) \right] u[n] \qquad (۴\text{-}۱۹۹)$$

و اگر $\theta = 0$ باشد.

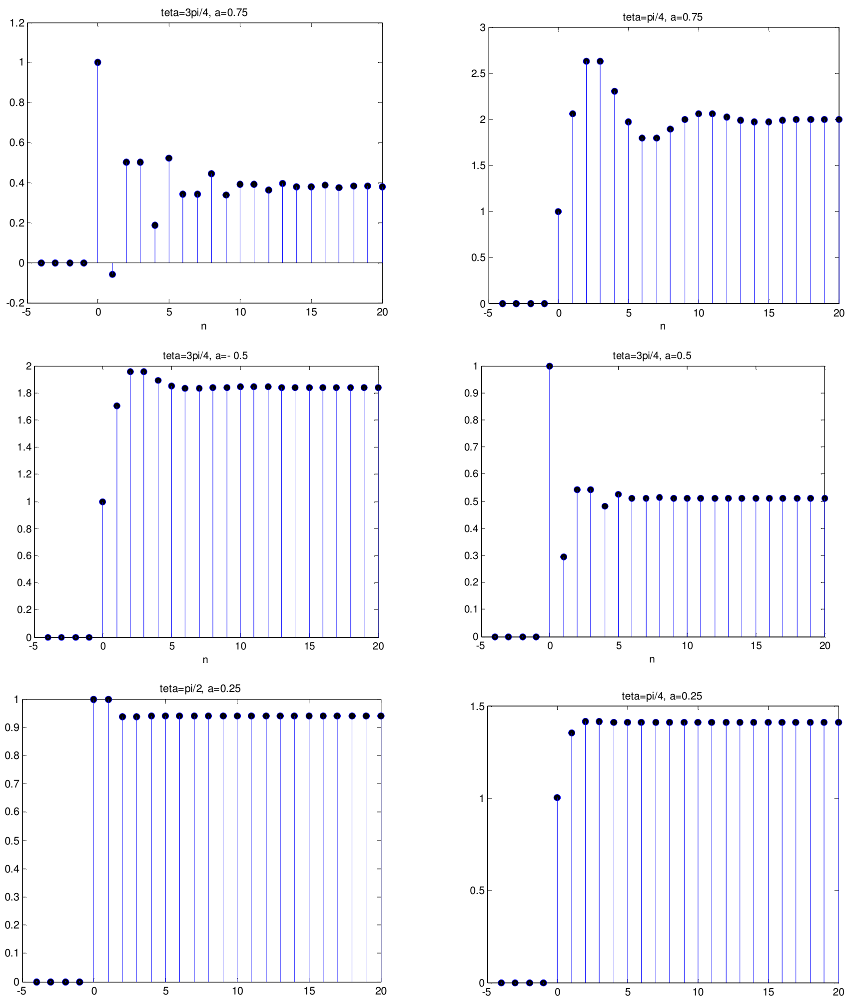
$$s[n] = \left[\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{r}{(r-1)^2} r^n + \frac{r}{r-1}(n+1)r^n \right] u[n] \qquad (۴\text{-}۲۰۰)$$

و اگر $\theta = \pi$ باشد.

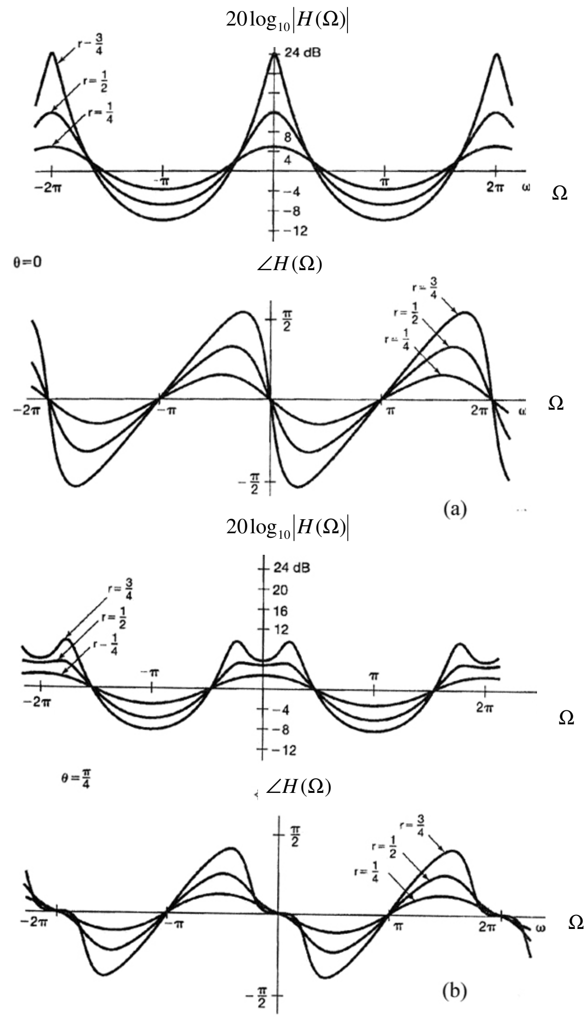
$$s[n] = \left[\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{r}{(r+1)^2}(-r)^n + \frac{r}{r+1}(n+1)(-r)^n \right] u[n] \qquad (۴\text{-}۲۰۱)$$

شکل پاسخ ضربه برای مقادیر مختلف θ, r در شکل (۴-۴۷) رسم شده است. می‌توان نشان داد که به ازاء هر مقدار θ غیراز صفر پاسخ ضربه دارای نوسانات میرا خواهد بود و پاسخ پله دارای بالاپرش و نوسان حول مقدار نهایی می‌باشد و جالب است توجه کنیم که θ در حقیقت تعیین کننده باند فرکانسی است که توسط سیستم مرتبه دوم تقویت می‌شود و r تعیین کننده میزان قله و تیزی آن در پاسخ فرکانسی و در باند عبور می‌باشد.

چند نمونه از پاسخ فرکانسی سیستم‌های مرتبه دوم به ازاء مقادیرمختلف θ, r در شـکل (۴-۴۸) رسـم شده‌اند.



شکل ۴-۴۷ پاسخ پله سیستم مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف $\theta, r = a$



شکل (۴-۴۸): رسم پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف θ, r

در پایان این بحث لازم به ذکر است که اگر معادله تفاضلی سیستم مرتبه دوم به صورت زیر باشد.

$$y[n]-(d_1+d_2)y[n-1]+d_1d_2y[n-2]=x[n] \qquad (۴-۲۰۲)$$

که در آن d_1, d_2 اعداد حقیقی هستند و در آن صورت می‌توان سیستم مرتبه دوم را بـه حاصلضـرب دو سیستم مرتبه اول تفکیک نمود. مراحل تفکیک به صورت زیر است.

$$H(\Omega)=\frac{1}{(1-d_1e^{-j\Omega})(1-d_2e^{-j\Omega})}=\frac{A}{1-d_1e^{-j\Omega}}+\frac{B}{1-d_2e^{-j\Omega}} \qquad (۴-۲۰۳)$$

که در آن

$$A = \frac{d_1}{d_1 - d_2} \quad , \quad B = \frac{d_2}{d_2 - d_1} \qquad (۲۰۴-۴)$$

در این صورت پاسخ ضربه و پاسخ پله به صورت زیر خواهند بود.

$$h[n] = [Ad_1^n + Bd_2^n]u[n] \qquad (۲۰۵-۴)$$

$$s[n] = \left[A\left(\frac{1-d_1^{n+1}}{1-d_1}\right) + B\left(\frac{1-d_2^{n+1}}{1-d_2}\right) \right] u[n] \qquad (۲۰۶-۴)$$

می‌بینیم در این حالت پاسخ ضربه شامل دو تابع نمایی حقیقی نزولی خواهد بود. چنین سیستمی را می‌توان از ترکیب سری دو سیستم مرتبه اول بدست آورد. اگر d_1, d_2 منفی باشند پاسخ نوسانی خواهد بود.

تاکنون توجه خود را به سیستم‌های پایدار معطوف کرده بودیم (سیستم‌هایی که تبدیل فوریه دارند). در حالت کلی سیستم مرتبه اولی که توسط معادله تفاضلی (۴-۱۸۳) مشخص می‌شود به ازاء $|a| > 1$ ناپایدار است و سیستم مرتبهٔ دوم که توسط معادله تفاضلی (۴-۱۸۹) یا معادله تفاضلی (۴-۲۰۲) مشخص می‌شوند متناظراً به ازاء $r \geq 1$ ($|d_1| \geq 1$ یا $|d_2|$) ناپایدار می‌باشند و خارج از مبحث فعلی ما قرار می‌گیرند.

۴-۹خلاصه

در این فصل با توجه به اهمیت دنباله‌ها و سیستم‌های گسسته زمان ابتدا سری فوریه گسسته مورد بحث قرار گرفته و سپس تبدیل فوریه گسسته زمان (DTFT) مورد بحث قرار گرفت. روش استفاده از ضرایب DFT در محاسبه کانولوشن و خواص DTFT به تفصیل مورد بحث قرار گرفت. روش ساخت سیستم‌های مراتب بالا به کمک بلوک‌های اساسی و بررسی سیستم‌های مراتب اول و دوم به عنوان بلوک‌های اصلی سازنده سیستم‌های مراتب بالاتر در پایان مورد بحث قرار گرفتند.

مثال (۴-۲۵): سری فوریه گسسته زمان دنباله زیر را بنویسید.

$$f[n] = Cos(0.1\pi n)$$

حل: در این حالت بدلیل اینکه $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{20}$ می‌باشد، $f[n]$ متناوب است و دوره تناوب آن به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$N_0 = m(\frac{2\pi}{\Omega}) = m(\frac{2\pi}{0.1\pi}) = 20m$$

کوچکترین عدد صحیح m که $20m$ را به یک عدد صحیح تبدیل نماید به ازاء $m = 1$ حاصل می‌شود، بنابراین دوره تناوب این دنباله $N_0 = 20$ می‌باشد و سری فوریه به صورت زیر است.

$$f[n]=\sum_{k=0}^{19}a_k e^{j0.1\pi k}$$

$$a_k=\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{19}f[n]e^{-j0.1\pi kn}=\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{19}Cos(0.1\pi n)\,e^{-j0.1\pi kn}$$

$$=\frac{1}{40}\sum_{n=0}^{19}\ (e^{j0.1\pi n}+e^{-j0.1\pi n})e^{-j0.1\pi kn}$$

$$=\frac{1}{40}\left[\sum_{n=0}^{19}\ e^{j0.1\pi n(1-k)}+\sum_{n=0}^{19}\ e^{-j0.1\pi n(1+k)}\right]$$

نتیجتاً اولین‌مجموع به ازاء جمیع مقادیر k صفر است به جز $k=1$. همچنین دومین مجموع به ازاء جمیع مقادیر k صفر است به جز $k=19$، در این صورت داریم.

$$a_1=a_{19}=\frac{1}{2}$$

$$f[n]=\frac{1}{2}(e^{j0.1\pi n}+e^{j1.9\pi n})$$

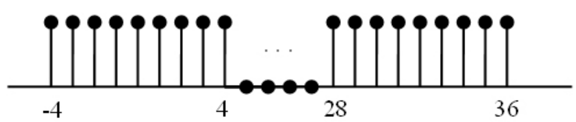
$$=\frac{1}{2}(e^{j0.1\pi n}+e^{-j0.1\pi n})$$

مثال (۴-۲۶): سری فوریه گسسته زمانی $f[n]=Sin0.1\pi\, n$ را بیابید.

حل: مشابه حل مثال قبلی به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$f[n]=\frac{1}{j2}\left[e^{j0.1\pi n}-e^{-j0.1\pi n}\right]$$

مثال (۴-۲۷): سری فوریه گسسته زمانی دنباله رسم شده در زیر را بیابید.



شکل (۴-۴۹) سیگنال مربوط به مثال ۴-۲۷

حل: دوره تناوب این دنباله مساوی ۳۲ است پس $\Omega_0=\frac{2\pi}{32}=\frac{\pi}{16}$ در نتیجه سری فوریه به صورت زیر است.

$$f[n]=\sum_{k=<32>}a_k e^{jk\frac{\pi}{16}n} \qquad , \qquad a_k=\frac{1}{32}\sum_{n=<32>}f[n]\,e^{-jk\frac{\pi}{16}n}$$

برای سادگی فرض می‌کنیم در مجموع دوم $-16\le n\le 15$ انتخاب گردد، در این صورت

$$a_k=\frac{1}{32}\sum_{n=-16}^{15}f[n]\,e^{-jk\frac{\pi}{16}n}$$

و چون در فاصله مذکور فقط $f[n]$ به ازاء $-4\le n\le 4$ مقدار دارد.

$$a_k = \frac{1}{32}\sum_{n=-4}^{4} e^{-jk\frac{\pi}{16}n}$$

بنابراین

$$a_k = \frac{1}{32}\left[\frac{e^{-j\frac{5\pi k}{16}} - e^{j\frac{4\pi k}{16}}}{e^{-j\frac{\pi k}{16}} - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\frac{e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}}\left[e^{-j\frac{4.5\pi k}{16}} - e^{j\frac{4.5\pi k}{16}}\right]}{e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}}\left[e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}} - e^{j\frac{0.5\pi k}{16}}\right]}$$

$$= \frac{1}{32}\frac{Sin(\frac{4.5\pi k}{16})}{Sin(\frac{0.5\pi k}{16})}$$

$$= \frac{1}{32}\frac{Sin(4.5k\Omega_0)}{Sin(0.5k\Omega_0)} \qquad , \qquad \Omega_0 = \frac{\pi}{16}$$

مثال (۴-۲۸): نشان دهید که دنباله‌هایی به صورت

$$\varphi_k[n] = \delta[n-k] \qquad , \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$$

در فاصله $[-N, N]$ متعامد یکه (ارتونرمال) می‌باشند.

حل: کافی است شرایط زیر را تحقیق کنیم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1}\varphi_k[n] \quad \varphi_k^*[n] = \begin{cases}1 & k = m\\ 0 & k \neq m\end{cases}$$

با قرار دادن $\varphi_m[n], \varphi_k[n]$ در رابطه فوق داریم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1}\delta[n-k]\delta[n-m]$$

ولی می ببینیم که این مجموع به ازاء جمیع مقادیر k,m مساوی صفر است، مگر اینکه $k = m$ باشد. در آن صورت داریم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1}(\delta[n-k])^2 = 1$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال (۴-۲۹): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = a^n u[-(n+1)]$$

حل:

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-(n+1)]e^{-j\Omega n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(ae^{-j\Omega})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a}e^{j\Omega})^n=-1+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{a}e^{j\Omega})^n$$
$$=-1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}e^{j\Omega}}=\frac{1}{ae^{-j\Omega}-1}=\frac{1}{(aCos\Omega-1)-jaSin\Omega}$$ به شرط $|a|>1$

بنابراین

$$|X(\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2aCos\Omega}}$$
$$\angle X(\Omega)=tg^{-1}\left[\frac{aSin\Omega}{aCos\Omega-1}\right]$$

مثال (۳۰-۴): تبدیل معکوس فوریه طیف پالس مربعی $X(\Omega)$ را بیابید.

$$X(\Omega)=rect(\frac{\Omega}{2\Omega_c})$$

که در آن

$$rect(\frac{x}{2a})=\begin{cases}1 & -a<x<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

حل: طبق رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c}e^{j\Omega n}d\Omega$$
$$=\frac{1}{j2\pi n}e^{j\Omega n}\Big|_{-\Omega_c}^{\Omega_c}=\frac{Sin(\Omega_c n)}{\pi n}=\frac{\Omega_c}{\pi}Sinc(\frac{\Omega_c n}{\pi})$$

مثال (۴-۳۱): تبدیل فوریه دنباله‌های $x_2[n]=\delta[n-n_0], x_1[n]=\delta[n]$ را بیابید.

حل:

$$X_1(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]e^{-j\Omega n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]e^{-j\Omega n\times 0}=1$$

برای دنباله دوم نیز داریم.

$$X_2(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]e^{-j\Omega n}=e^{-j\Omega n_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]=e^{-j\Omega n_0}$$

مثال (۴-۳۲): نشان دهید که مجموعهٔ سیگنالی به صورت $\phi_k(n)=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ بـه ازاء $k=0,1,...,N-1$ در فاصله‌ای به طول N متعامد هستند.

حل: کافیست مجموع زیر را حساب کنیم و تساوی را ثابت کنیم.

$$\sum \phi_k[n]\phi_m^*[n]=\begin{cases}0 & k\neq m\\ A & k=m\end{cases}$$

که A عدد دلخواهی است.

با جایگذاری داریم (فاصله را به طور دلخواه از 0 تا $N-1$ در نظر می‌گیریم ولی هر فاصـله دیگـری بـا همین طول نیز همین جواب را می‌دهد).

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n}e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n}$$

در متن درس ثابت شده است که مجموعی به صورت فوق به ازاء $k\neq m$ مسـاوی صـفر اسـت و بـه ازاء $k=m$مساوی N است. پس

$$\sum \phi_k[n]\phi_m^*[n]=\begin{cases}0 & k\neq m\\ N & k=m\end{cases}$$

مثال (۴-۳۳) :نشان دهید اگـر $x[n]=\sum_{i=1}^{M}a_i\varphi_i[n]$ باشـد، کـه در آن $\varphi_i[n]$ یـک مجموعـه سـیگنال متعامد در فاصله (N_1,N_2) هستند، در آن صورت

$$\sum_{n=N_1}^{N_2}|x[n]|^2=\sum_{i=1}^{M}|a_i|^2A_i$$

که در آنA_iعدد ثابت است که البته تابع اندیس نیز می تواند باشد.

حل:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2}|x[n]|^2=\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]x^*[n]=\sum_{n=N_1}^{N_2}\left[\sum_{i=1}^{M}a_i\varphi_i[n]\sum_{j=1}^{M}a_j^*\varphi_j^*[n]\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\ a_ia_j^*\sum_{n=N_1}^{N_2}\varphi_i[n]\varphi_j^*[n]$$

اما در مثال (۴-۳۲) ثابت باشد که اگر $\varphi_i[n]$ تشکیل یـک مجموعـه سـیگنال متعامـد بـه ازاء مقـادیر مشخصی از i,j در فاصله مشـخص را بدهـد در آن صـورت مجمـوع $\sum_{n=N_1}^{N_2}\varphi_i[n]\varphi_j^*[n]$ فقـط بـه ازاء مقادیر $i=j$ غیرصفر و مساوی A_i می‌باشد، بنابراین

$$\sum_{n=N_1}^{N_2}|x[n]|^2=\sum_{i=1}^{M}|a_i|^2A_i$$

و قضیه ثابت می‌شود.

مثال (۴-۳۴): پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته زمان به صورت زیر است.

$$h[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$$

سری فوریه خروجی سیستم را بیابید اگر ورودی آن به صورت زیر باشد.

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4m]$$

حل: ابتدا تبدیل فوریه ورودی را پیدا می‌کنیم، برای این کار احتیاج به ضرایب سری فوریه $x[n]$ داریم.

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-4m] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} e^{-jk\frac{2\pi}{4}n}\delta[n] = \frac{1}{4}$$

بنابراین می‌توان $X(\Omega)$ را بدین صورت نوشت.

$$X(\Omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{k\pi}{2})$$

اما تبدیل فوریه ورودی را قبلاً در متن درس حساب کرده‌ایم.

$$X(\Omega) = \frac{1-\frac{1}{4}}{1-Cos\Omega+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5-4Cos\Omega}$$

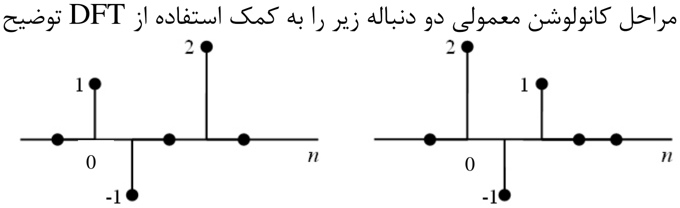
تبدیل فوریه خروجی از حاصلضرب تبدیل فوریه ورودی در تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{3}{5-4Cos\Omega}\times 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{k\pi}{2})$$
$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{3a_k}{5-4Cos\frac{k\pi}{2}}\delta(\Omega - \frac{k\pi}{2})$$

بنابراین ضرایب سری فوریه خروجی از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$b_k = \frac{\frac{3}{4}}{5-4Cos\frac{k\pi}{2}}$$

مثال (۴-۳۵): مراحل کانولوشن معمولی دو دنباله زیر را به کمک استفاده از DFT توضیح دهید.



شکل (۴-۵۰) مربوط به مثال (۴-۳۵)

حل: ابتدا DFT شش نقطه‌ای $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را حساب می‌کنیم. چون $N_2 = 3, N_1 = 4$ می‌باشد، لـذا دوره تناوب برای حاصل کانولوشن را برابر $N = N_1 + N_2 - 1 = 6$ در نظر می گیریم.

$$\tilde{X}_1(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{3} x_1[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{6})n} = \frac{1}{6}\left[1 - e^{-jk\frac{\pi}{3}} + 2e^{-jk\pi}\right]$$

که در آن $k = 0.1.2,3,4,5$.

همین کار را برای $x_2[n]$ نیز انجام می‌دهیم.

$$\tilde{X}_2(k) = \frac{1}{6}\left[2 - e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right] \qquad , k = 0,1,2,3,4,5$$

مرحله بعدی محاسبه حاصلضرب دو DFT می‌باشد.

$$\tilde{Y}(k) = 6\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} y[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$= \frac{6}{36}\left[2 - e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - 2e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2k\pi}{3}} - e^{-jk\pi} + 4e^{-jk\pi}\right.$$

$$\left. - 2e^{-j4\frac{k\pi}{3}} + 2e^{-j5\frac{k\pi}{3}}\right]$$

$$= \frac{6}{36}\left[2 - 3e^{-jk\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{2k\pi}{3}} + 3e^{-jk\pi} - 2e^{-j\frac{4k\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{5k\pi}{3}}\right]$$

بنابراین با توجه به رابطه معکوس DFT یا IDFT می‌توان حاصل کانولوشــن معمــولی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را بدست آورد.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{5}\tilde{Y}(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad n = 0,1,2,3,4,5$$

$$y[0] = 2 \quad , y[1] = -3 \quad , y[2] = 2 \quad , y[3] = 3 \quad , y[4] = -2 \quad , y[5] = 2$$

که البته مقادیر فوق از روش کانولوشن معمولی نیز به سادگی قابل محاسبه می‌باشد.

مثال (۳۶-۴): فرض کنید $X(\Omega)$ تبـدیل فوریـه یـک دنبالـه غیرحقیقـی $x[n]$ باشـد. تبـدیل فوریـه دنباله‌های زیر را برحسب تبدیل فوریه $X(\Omega)$ بیابید.

الف) $\Re e\{x[n]\}$

ب) $x^*[-n]$

ج) $\varepsilon v\{x[n]\}$

حل: الف)

$$y[n] = \Re e\{x[n]\} = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[n]\}$$

با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین رابطه فوق داریم.

$$Y(\Omega)=\frac{1}{2}\left\{F\{x[n]\}+F\{x^*[n]\}\right\}$$

اکنون فقط لازم است تبدیل فوریه $x^*[n]$ را بیابیم. تبدیل فوریه $x[n]$ به صورت زیر است.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$$

در نتیجه داریم.

$$X^*(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*[n]e^{j\Omega n}$$

و بالاخره با تبدیل Ω به $-\Omega$ رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$X^*(-\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*[n]e^{-j\Omega n}$$

پس تبدیل $x^*[n]$ فوریه مساوی است با $X^*(-\Omega)$ بنابراین

$$Y(\Omega)=\frac{1}{2}\left\{X(\Omega)+X^*(-\Omega)\right\}$$

ب) به سادگی با توجه به رابطه تبدیل فوریه و تبدیل n به $-n$ داریم.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[-n]e^{j\Omega n}$$

در نتیجه خواهیم داشت.

$$X^*(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*[-n]e^{-j\Omega n}$$

بنابراین تبدیل فوریه $x^*[-n]$ مساوی $X^*(\Omega)$ می‌باشد.

ج) $$y[n]=\varepsilon\upsilon\{x[n]\}=\frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}$$

برای بدست آوردن تبدیل فوریه $\varepsilon\upsilon\{x[n]\}$ کافی است تبدیل فوریه $x[-n]$ را یافت. با توجه بـه رابطـه تبدیل فوریه می‌توان به سادگی تبدیل فوریه $x[-n]$ را یافت.

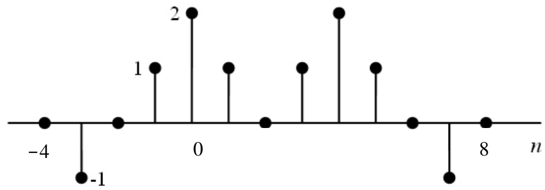
$$X(-\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[-n]e^{-j\Omega n}$$

بنابراین تبدیل فوریه $y[n]$ برابر است با

$$Y(\Omega)=\frac{1}{2}\{X(\Omega)+X(-\Omega)\}=\varepsilon\upsilon\{X(\Omega)\}$$

مثال (۳۷-۴): فرض کنید $X(\Omega)$ تبدیل فوریه دنباله $x[n]$ باشد ($x[n]$ درشـکل رسـم شـده اسـت). بدون محاسبه مستقیم $X(\Omega)$ مطلوبست.

الف) $X(0)$ ب) $\angle X(\Omega)$ ج) $\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)d\Omega$ د) $X(\pi)$ و) $\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega$



شکل (۴-۵۱)

الف) با توجه به رابطه تبدیل فوریه داریم

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \rightarrow X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 6$$

ب) با توجه به شکل $x[n]$ می‌بینیم دنباله $x[n+2]$ یک دنباله حقیقی زوج می‌باشد، بنـابراین تبـدیل فوریه دنباله $y[n] = x[n+2]$ دارای فاز صفر است (حقیقی می‌باشد) در نتیجه دنباله $x[n]$ برابر است با

$$x[n] = y[n-2]$$

و ارتباط تبدیل فوریه $x[n]$ برحسب تبدیل فوریه $y[n]$ به صورت زیر بیان می‌گردد.

$X(\Omega) = Y(\Omega)e^{-j2\Omega}$ و چـون $Y(\Omega)$ دارای فـاز صـفر اسـت، بنـابراین $X(\Omega)$ دارای فـاز $e^{-j2\Omega}$ می‌باشد.

ج) با توجه به رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

بنابراین

$$2\pi x[0] = \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)d\Omega = 4\pi$$

د)

$$X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n]$$
$$= (-1)^{-3}(-1) + (-1)^{-1}(1) + (-1)^0(2) + (-1)^1(1) + (-1)^3(1)$$
$$+ (-1)^4(2) + (-1)^5(1) + (-1)^7(-1)$$
$$= 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 + 1 = 2$$

و) طبق رابطه پارسوال

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$
$$= 2\pi[1+1+4+1+1+4+1+1] = 28\pi$$

مثال (۴-۳۸): یک سیستم LTI علی که بوسیله معادله تفاضلی زیر بیان می‌گـردد را در نظـر بگیریـد، مطلوبست پاسخ ضربه سیستم.

$$y[n] - \frac{3}{8}y[n-1] + \frac{1}{32}y[n-2] = x[n]$$

حل: با استفاده از تبدیل فوریه طرفین معادله تفاضلی فوق داریم.

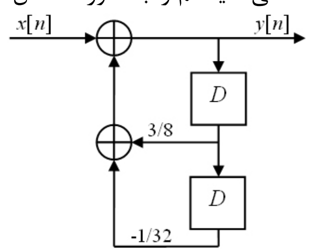
$$Y(\Omega)-\frac{3}{8}Y(\Omega)e^{-j\Omega}+\frac{1}{32}Y(\Omega)e^{-j2\Omega}=X(\Omega)$$

$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1}{1-\frac{3}{8}e^{-j\Omega}+\frac{1}{32}e^{-j2\Omega}}=\frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{8}e^{-j\Omega})}$$

$$=\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}+\frac{-1}{1-\frac{1}{8}e^{-j\Omega}}$$ و $$h[n]=\left[2(\frac{1}{4})^n-(\frac{1}{8})^n\right]u[n]$$

مثال (۴-۳۹): سیستم مثال(۴-۳۸) را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

حل: با توجه به معادله تفاضلی به سادگی سیستم را به صورت شکل ۴-۵۲ خواهیم داشت.



شکل (۴-۵۲): مربوط به مثال (۴-۳۹)

مثال ۴-۴۰ معکوس سیستم با معادله تفاضلی

$$y[n]+y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n-1]+\frac{1}{2}x[n-2]$$

را بیابید.

حل: یک روش حل این است که ابتدا تابع سیستم را بسازیم و بعد آن را معکوس کنیم. با گرفتن تبدیل فوریه از معادله فوق داریم.

$$Y(\Omega)+Y(\Omega)e^{-j\Omega}+\frac{1}{4}Y(\Omega)e^{-j2\Omega}=X(\Omega)e^{-j\Omega}+\frac{1}{2}X(\Omega)e^{-j2\Omega}$$

و بنابراین

$$H(\Omega)=\frac{e^{-j\Omega}+\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}{1+e^{-j\Omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

در نتیجه سیستم معکوس دارای تابع شبکه به صورت زیر است.

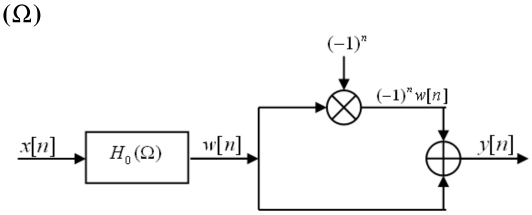
$$H_i(\Omega) = \frac{1}{H(\Omega)} = \frac{1 + e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}{e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}$$

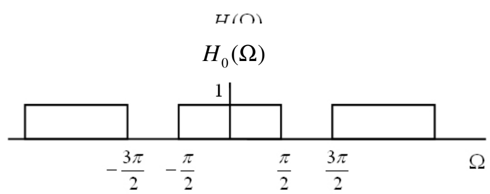
$$= \frac{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega}(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega}} = e^{j\Omega} + \frac{1}{2}$$

در حوزه زمان $h_i[n] = \delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n]$ همانگونه که می‌بینیم این سیستم علّی نمی‌باشد.

مثال (۴-۴۱): طیف $H(\Omega)$ را برای سیستم زیر بیابید.

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$





شکل ۴-۵۳ تابع انتقال سیستم $H_0(\Omega)$

حل: برای رسم طیف $H(\Omega)$ کافیست ورودی را $x[n] = \delta[n]$ در نظر گرفته، در آن صورت $y[n] = \delta[n]$ بدست می‌آید. البته لازم به ذکر است که تبدیل فوریه $(-1)^n$ قبلاً بدست آمده است.

$$(-1)^n = Cos\,\pi n = \frac{1}{2}\left[e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}\right]$$

$$(-1)^n \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - \pi - 2k\pi) + 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega + \pi - 2k\pi)\right]$$

که البته هر دو جمله طرف ثانی یکی هستند، پس

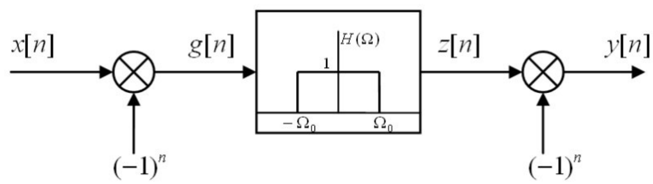
$$(-1)^n \leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - \pi - 2k\pi)$$

بنابراین طبق خاصیت مدولاسیون داریم.

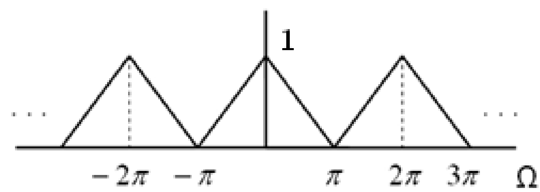
$$H(\Omega) = H_0(\Omega) + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\lambda - \pi - 2k\pi)H_0(\Omega - \lambda)d\lambda = H_0(\Omega) + H_0(\Omega - \pi) = 1$$

یعنی این سیستم یک سیستم تمام گذر است.

مثال (۸-۴):خروجی سیستم زیر را بیابید اگر $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

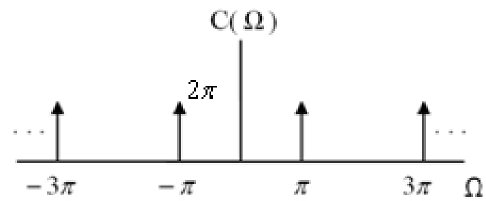


فرض کنید طیف $x[n]$ **بصورت زیر باشد.**

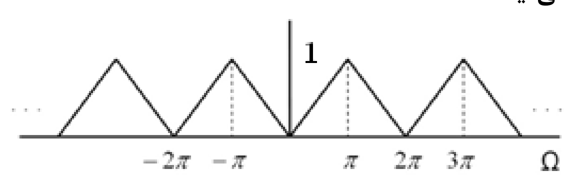


حل: طیف دنباله $c[n] = (-1)^n$ **بصورت زیر است.**

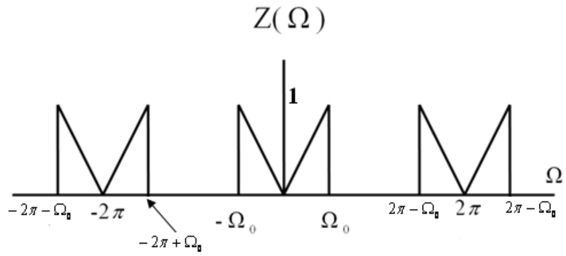
$$F\left[(-1)^n\right] = C(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - (2k+1)\pi)$$



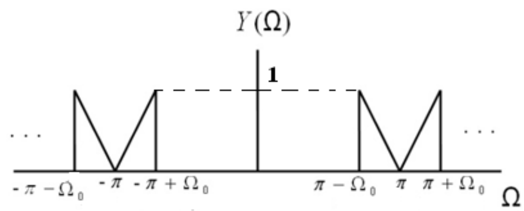
بنابراین دنباله $g[n]$ **در حقیقت یک دنباله مدولاسیون دامنه می‌باشد که از سوار شدن دنباله مدوله‌کننده** $x[n]$ **بر روی دنباله حامل** $c[n]$ **یا** $(-1)^n$ **حاصل شده است. بنابراین طیف** $G(\Omega)$ **بصورت زیربدست می‌آید.**



$z[n]$ **در حقیقت از فیلتر کردن** $g[n]$ **توسط یک فیلتر پایین‌گذر حاصل می‌شود. پس طیف** $z[n]$ **بصورت زیر است.**



$y[n]$ یک دنباله مدوله شده دامنه می‌باشد که ناشی از سوار شدن دنباله مدوله‌کننده $z[n]$ روی حامل $c[n]=(-1)^n$ می‌باشد. بنابراین طیف $y[n]$ از یک انتقال به اندازه π در طیف $z[n]$ بدست می‌آید.

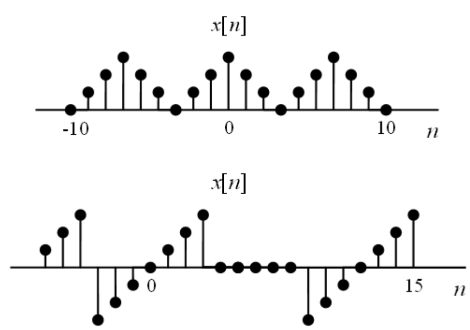


۴-۱۰ مسائل

۴-۱ سری فوریه گسسته زمانی سیگنال‌های زیر را بیابید.

$$x[n]=2Cos(3.2\pi(n-3))$$

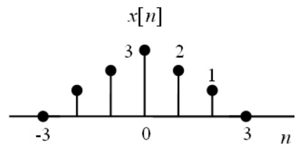
$$x[n]=2Cos(2.2\pi n)$$



شکل۴-۵۴ مربوط به مثال ۴-۱

۴-۲ تبدیل فوریه گسسته زمان دنباله‌های زیر را بیابید.

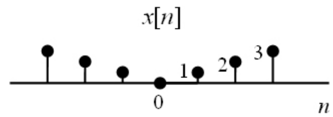
الف)



شکل۴-۵۵ مربوط به مثال ۴-۲

ب) $y[n]=x[n-3]$ که در آن $x[n]$ همان دنباله مذکور در قسمت الف می‌باشد.

ج)



شکل۴-۵۶ مربوط به مثال ۴-۲

۴-۳ تبدیل معکوس پاسخ فرکانسی زیر را بیابید (فرض کنید که سیستم علّی است)

$$H(\Omega)=\frac{e^{j\Omega}+0.32}{e^{j2\Omega}+e^{j\Omega}+0.16}$$

۴-۴ پاسخ معکوس سیستم با معادله تفاضلی

$$y[n]+y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n-1]+\frac{1}{2}x[n-2]$$

را به ورودی زیر بیابید.

$$x[n]=(0.5)^n u[n]$$

۴-۵ پاسخ سیستم $H(\Omega)$ را به ورودی $x[n]$ بیابید اگر

$$H(\Omega)=\frac{e^{j\Omega}-0/5}{(e^{j\Omega}+0/5)(e^{j\Omega}-1)} \qquad و \qquad x[n]=3^{-(n+1)}u[n]$$

۴-۶ فرض کنید $x_c(t)$ یک سیگنال پیوسته زمان دوره تناوب با دوره تناوب یک میلی ثانیه باشد. سری فوریه سیگنال مذکور به صورت زیر می‌باشد.

$$x_c(t)=\sum_{k=-9}^{9}a_k e^{j(\frac{2\pi k t}{10^{-3}})}$$

ضرایب سری فوریه به ازاء $|k|>9$ مساوی صفر هستند. مطلوبست ضرایب سری فوریه گسسته زمان سیگنال $x[n]$ که با نمونه‌برداری از $x_c(t)$ حاصل شده است.

$$x[n]=x_c(\frac{n}{6}\times 10^{-3})$$

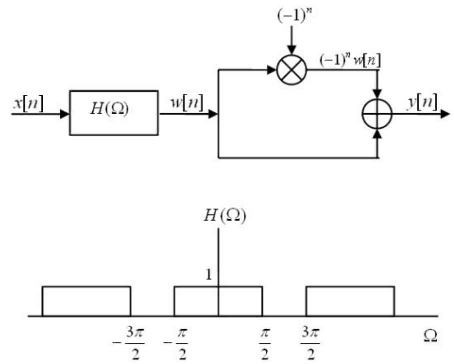
۴-۷ پاسخ سیستم $H(\Omega)=\dfrac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\frac{1}{2}}$ را به ورودی $x[n]=\left(\dfrac{8}{10}\right)^k u[n]-2(2)^2u[-(n+1)]$ بیابید.

۴-۸ تبدیل فوریه دنباله‌های زیر را بیابید.

$$x[n]=a^n Cos(\Omega_0 n)u[n] \qquad |a|<1 \qquad , \qquad x[n]=a^n Sin(\Omega_0 n)u[n] \qquad |a|<1$$

۹-۴ خروجی سیستم زیر را بیابید اگر ورودی به صورت زیر باشد.

$$x[n] = \delta[n] + 1$$



شکل۴-۵۷ مربوط به مثال ۴-۹

۴-۱۰ تبدیل فوریه یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ را $X(\Omega)$ می‌نامیم. مطلوبست تبدیل فوریه دنباله‌های $x_s[n]$، $x_c[n], x_d[n]$ برحسب $X(\Omega)$ اگر

$$x_c[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n, even \\ 0 & n, odd \end{cases}$$

$$x_s[n] = \begin{cases} x[n] & n, even \\ 0 & n.odd \end{cases}$$

$$x_d[n] = x[2n]$$

۴-۱۱ زوج دنباله‌های $x[n]$ و $y[n]$ را در نظر بگیرید. برای هر زوج تعیین کنید آیا سیستمی LTI یافت می‌شود که ورودی آن $x[n]$ و خروجی آن $y[n]$ باشد؟ (پاسخ خود را با دلیل بیان کنید). اگر چنین سیستمی وجود دارد، آیا این سیستم یگانه است؟ و یا چند سیستم (LTI یا غیر LTI) را می‌توان بگونه‌ای یافت که زوج ورودی و خروجی آن‌ها $[x[n], y[n]]$ باشند.

الف) $x[n] = (\frac{1}{2})^n \quad , \quad y[n] = (\frac{1}{4})^n$

ب) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \quad , \quad y[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$

ج) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \quad , \quad y[n] = 4^n u[-n]$

د) $x[n] = e^{\frac{jn}{8}} \quad , \quad y[n] = 2e^{\frac{jn}{8}}$

و) $x[n] = Cos(\frac{\pi n}{3}) \quad , y[n] = Cos\frac{\pi n}{3} + \sqrt{3}Sin\frac{\pi n}{3}$

۱۲-۴ تبدیل فوریه هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $n(\frac{1}{2})^{|n|}$

ب) $(\frac{1}{2})^{n}\left[u[n+3]-u[n-2]\right]$

ج) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{4})^{n}\delta[n-3k]$

۱۳-۴ , $y[n]$ $x[n]$ دو دنباله حقیقی با تبدیل فوریه $Y(\Omega), X(\Omega)$ باشند، تابع همبستگی بین دو دنباله به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_{xy}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k+n]y[k]$$

به همین ترتیب می‌توان $\phi_{xx}[n],\phi_{yy}[n],\phi_{yx}[n]$ را تعریف نمود. مطلوبست ارتباط تبدیل فوریه $\phi_{xx}[n],\phi_{yy}[n],\phi_{xy}[n],\phi_{yx}[n]$ بر حسب $Y(\Omega), X(\Omega)$.

۱۴-۴ فرض کنید دنباله $x[n]=Sin(\frac{\pi n}{84})-2Cos(\frac{\pi n}{4})$ ورودی به هر یک از سیستم‌های زیر باشد.

الف) $h[n]=\dfrac{Sin(\frac{\pi n}{6})}{\pi n}$

ب) $h[n]=\dfrac{Sin(\frac{\pi n}{6})}{\pi n}+\dfrac{Sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}$

ج) $h[n]=\dfrac{Sin(\frac{\pi n}{6})Sin(\frac{\pi n}{3})}{\pi^{2}n^{2}}$

مطلوبست خروجی هریک از سیستم‌های فوق در حوزه زمان و فرکانس.

۱۵-۴ پاسخ ضربه را برای هر یک از سیستم‌هایی که بوسیله معادلات تفاضلی زیر بیان می‌گردند بدست آورده و سپس سیستم را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید (فرض کنید سیستم علّی است).

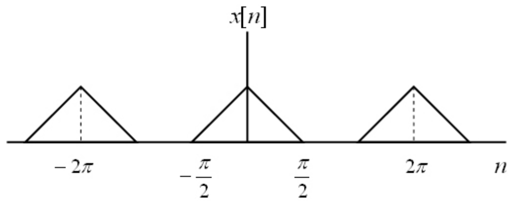
الف) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$

ب) $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$

ج) $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$

۱۶-۴ معکوس سیستم‌های مثال (۴-۱۵) را بدست آورده و به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

۱۷-۴ فرض کنید طیف $x[n]$ به صورت زیر باشد. مطلوبست طیف $z[n]=x[n]p[n]$ اگر



شکل۴-۵۸ مربوط به مثال ۴-۱۷

الف) $p[n] = Cos\,\pi n$

ب) $p[n] = Sin\frac{\pi n}{2}$

ج) $p[n] = Cos\frac{\pi n}{2}$

د) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2k]$

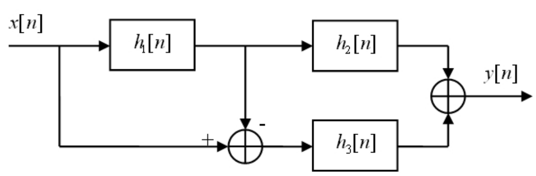
هـ) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4k]$

۴-۱۸ در سیستم زیر $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$ را بیابید.

$$h_1[n] = e^{-|n|}$$

$$H_2(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\Omega| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$H_3(\Omega) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}.\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$



شکل۴-۵۹ مربوط به مثال ۴-۱۸

۴-۱۹ ورودی یک سیستم مجهول خطی به صورت زیر است.

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

اگر خروجی این سیستم در پاسخ به ورودی فوق برابر مقدار زیر باشد.

$$y[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$$

مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم و پاسخ ضربه آن.

۴-۲۰ سیستم مطرح شده در مثال (۴-۱۹) را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

۴-۲۱ یک سیستم LTI به کمک معادله تفاضلی زیر بیان می‌گردد

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

الف) مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم.

ب) مطلوبست خروجی سیستم به ازاء ورودی‌های زیر.

$$x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n] \quad \text{و} \quad x[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n] \quad \text{و} \quad x[n]=\delta[n]+(\frac{1}{2})^n u[n]$$

۴-۲۲ پاسخ ضربه سیستمی با طیفی به صورت‌های زیررا بیابید، همچنین تعیین کنید کدامیک از سیستم‌های زیر علّی است.

$$H(\Omega)=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad \text{و} \quad H(\Omega)=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \quad \text{و} \quad H(\Omega)=1+2e^{-j3\Omega}$$

۴-۲۳ دامنه و فاز پاسخ فرکانسی $X(\Omega)$ را رسم کنید اگر

$$X(\Omega)=1+2e^{-j\Omega} \qquad X(\Omega)=\frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1+\frac{3}{4}e^{-j\Omega})}$$

$$X(\Omega)=\frac{1+2e^{-j\Omega}}{1+2e^{-j\Omega}} \qquad X(\Omega)=\frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^3}$$

۴-۲۴ سیستمی با پاسخ فرکانسی به صورت زیر را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

$$H(\Omega)=\frac{e^{-j4\Omega}}{(1+\frac{1}{6}e^{-j\Omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\Omega})}$$

۴-۲۵ یک سیستم علّی LTI توسط معادله تفاضلی زیر بیان می‌گردد

$$y[n]-\frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]-n[n-1]$$

مطلوبست پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه سیستم.

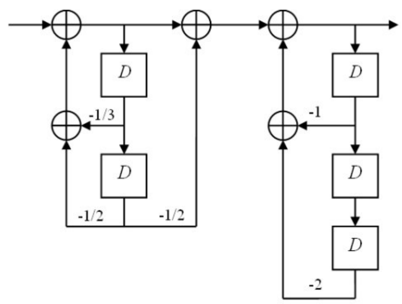
۴-۲۶ یک سیستم علّی LTI با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]-ay[n-1]=bx[n]+x[n-1]$$

مطلوبست محاسبه مقدار b بگونه‌ای که پاسخ فرکانسی سیستم در معادله زیر صدق کند.

$|H(\Omega)|=1$ برای همه Ωها

۴-۲۷ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.



شکل۴-۶۰ مربوط به مثال ۴-۲۷

۴-۲۸ یک سیستم LTI علّی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ مفروض است. این سیستم توسط یک زوج معادله تفاضلی به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} y[n]+\dfrac{1}{4}y[n-1]+w[n]+\dfrac{1}{2}w[n-1]=\dfrac{2}{3}x[n] \\ y[n]-\dfrac{5}{4}y[n-1]+2w[n]-2w[n-1]=-\dfrac{5}{3}x[n] \end{cases}$$

پاسخ ضربه این سیستم را بیابید (در معادله دنباله $w[n]$ یک دنباله واسطه باشد).

۴-۲۹ برنامه‌های کامپیوتری بنویسید که کارهای زیر را انجام دهد.

الف: از روی معادله $x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ و تشکیل N معادله و N مجهول، a_kها را حساب و رسم کنید.

ب: از روی معادله $a_k=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ اولاًبتواند با داشتن $x[n]$ ، a_k را حساب کند و ثانیاً با داشتن a_k، $x[n]$ را محاسبه و رسم کند.

۴-۳۰ سیستمی که دارای پاسخ ضربه به صورت زیر است را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

$h[n]=5\times(0.8)^{-|n|}$

۴-۳۱ سیستمی که دارای پاسخ ضربه به صورت زیر است را به کمک بلوک‌های اساسی بسازید.

$h[n]=e^{-2n}u[n]$