فصل ۵

نظریه نمونه‌برداری

مقدمه

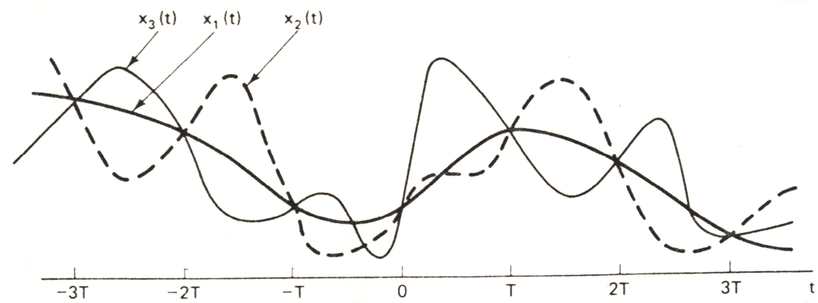
درحالتهای خاص اطلاعات یک سیگنال پیوسته زمانی (باند محدود) را می‌توان بطورکامل بوسیله اطلاعات موجود در نمونه‌هایی با فاصله زمانی مشخص از سیگنال برداشت کرد. این نتیجه از نظریه نمونه‌برداری بدست آمده است. این نمونه‌ها باید دارای یک حداکثر فاصله زمانی از هم باشند و اگر فاصله نمونه ها از هم بیشتر شود دیگر نمی‌توان سیگنال را از روی نمونه‌ها بازسازی کرد. این حقیقت که می‌توان یک سیگنال پیوسته را بطور کامل بوسیله نمونه‌های مجزا نمایش داد، باعث شده است تا ارتباط عمیقی میان سیگنال‌های پیوسته و گسسته زمانی بوجود آید. در بسیاری از حالات پردازش سیگنال گسسته زمانی بسیارساده‌تر و قابل انعطاف‌تراست. چون این نوع پردازش‌ها را می‌توان بوسیله الگوریتم‌های خاصی با استفاده ازکامپیوتربا سرعت های بسیار بالا انجام داد. هم اکنون پردازش سیگنال‌های صوتی و تصویری توسط همین روش صورت می گیرد. در این فصل ضمن بررسی انواع روشهای نمونه‌برداری از سیگنال‌های پیوسته زمانی بخشی را به طریقه تبدیل نمونه‌های پیوسته زمان به دنباله گسسته زمان اختصاص خواهیم داد و نهایتاً پردازش گسسته زمان بر روی سیگنال‌های پیوسته زمان را مورد بحث قرار خواهیم داد.

۵-۱ نمایش سیگنال پیوسته زمانی بوسیله نمونه‌های آن (نظریه نمونه‌برداری)

درحالت کلی نباید انتظار داشت که نمونه‌برداری از سیگنال‌های مختلف در فواصل زمانی مشخص تمام اطلاعات موجود در سیگنال‌های مورد نظر را به ما بدهد. بعنوان مثال سه سیگنال $x_1(t)$، $x_2(t)$ و $x_3(t)$ را در نظر بگیرید. تمام نمونه‌های این سیگنال‌ها در لحظات kT با هم برابرند یعنی

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$

بنابراین در حالت کلی بی‌نهایت شکل موج وجود دارند که می‌توانند یکدسته نمونه‌های مشخص را بوجود آورند. اما اگرسیگنال باند محدود باشد ونمونه‌ها به اندازه کافی به هم نزدیک برداشته شوند یکدسته نمونه مشخص فقط یک سیگنال را برای ما بوجود خواهد آورد که این امر بصورت ریاضی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. بطور حسی واضح است که اگر سرعت نمونه‌برداری از سیگنال، از سرعت تغیرات سیگنال خیلی بیشتر باشد، نمونه‌های حاصل بخوبی بیانگر نحوه تغییرات سیگنال خواهند بود. در این صورت به این نوع نمونه‌برداری، نمونه‌برداری موفقیت آمیز گفته می شود. اکنون لازم است رابطه میان سرعت نمونه‌برداری و سرعت تغییرات سیگنال را جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز مورد بررسی قرار دهیم. این رابطه در مورد انواع روش‌های نمونه‌برداری یکسان است و ما جهت سادگی آن را در مورد نمونه‌برداری ایده‌آل یا نمونه‌برداری به کمک قطار ضربه بدست می‌آوریم.

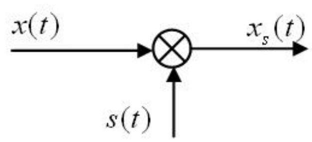


شکل (۵-۱): سه سیگنال پیوسته زمانی که دارای مقادیر یکسانی درلحظات kT هستند.

مزیت نمونه‌برداری ایده‌آل درسادگی محاسبات ریاضی می‌باشد. ولی همانطورکه می‌دانیم ساخت قطارضربه که از $-\infty$ شروع شده وتا ∞ ادامه پیداکند غیرممکن است،حتی ساخت تقریبی آن نیز بدلیل وجود دوره نامحدود غیرممکن می‌باشد.

۵-۲ نمونه‌برداری باقطار ضربه ازسیگنال‌های باند محدود (حالت ایده‌آل)

در بعضی موارد قطار ضربه[1] به نام تابع نمونه‌بردار نیز معروف می‌باشد و دلیل آن هم قبلاً گفته شد. اکنون نشان خواهیم دادکه جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز باید دوره تناوب نمونه‌برداری (T_s) با بالاترین مؤلفه فرکانسی سیگنال باند محدود رابطه خاصی داشته باشد. در اینجا تذکر این نکته فوق‌العاده ضروری است که نمونه‌برداری فقط در مورد سیگنال‌های باند محدود می‌تواند موفقیت‌آمیز باشد و از سیگنال‌هایی که از لحاظ فرکانسی دارای باند نامحدود هستند نمی‌توان بطور موفقیت‌آمیز نمونه‌برداری کرد. سیستم نمونه‌برداری به کمک قطار ضربه بصورت زیر می‌باشد.



شکل (۵-۲): سیستم نمونه‌برداری به کمک قطار ضربه از یک سیگنال باند محدود

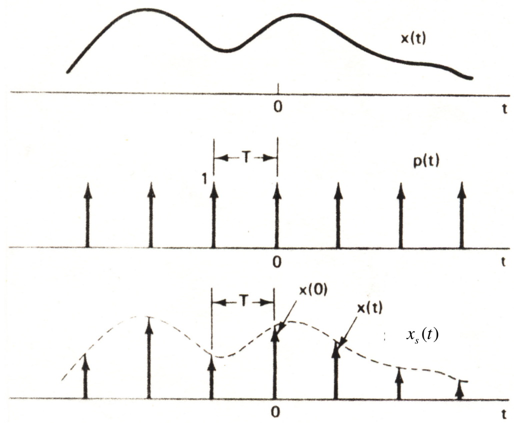
که در آن $s(t)$ یک قطار ضربه با دوره تناوب T_s می‌باشد.

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) \qquad (۵\text{-}۱)$$

همان‌گونه که بعداً توضیح خواهیم داد سیستم شکل (۵-۲) در حقیقت مبین نوعی مدولاتور با حاملی بصورت قطار ضربه می‌باشد. یک نمونه از شکل سیگنال $x(t)$ و نمونه‌های آن در شکل (۵-۳) نمایش داده شده‌اند.

---

[1] Impulse Train



شکل (۵-۳): مدولاسیون دامنه با قطار ضربه

در این‌صورت داریم.

$$x_s(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) \tag{۵-۲}$$

و یا

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s) \tag{۵-۳}$$

و با توجه به خاصیت مدولاسیون که در فصل سوم مـورد بحـث قـرار گرفـت مـی‌تـوان ارتبـاط طیفـی سیگنال‌ها را بصورت رابطه (۵-۴) نوشت.

$$X_S(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\omega)\times S(\omega)] \tag{۵-۴}$$

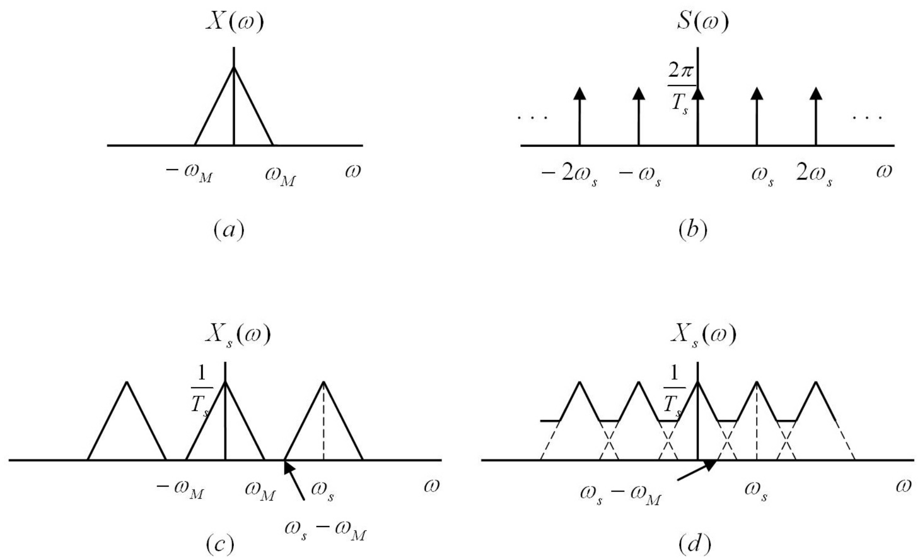
قبلاً داشتیم که تبدیل فوریه قطار ضربه خود نیز در حوزه فرکانس یک قطار ضربه به صورت زیر است.

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s) \tag{۵-۵}$$

که در آن $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$ می‌باشد. با قرار دادن (۵-۵) در (۵-۴) به (۵-۶) خواهیم رسید.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{K=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_s) \tag{۵-۶}$$

این رابطه به ما می‌گوید که $X_s(\omega)$ یک تابع تناوبی است که شامل مجموع انتقال‌هایی بـه انـدازه ω_s از $X(\omega)$ با دامنه $\dfrac{1}{T_s}$ در حوزه فرکانس می باشد. این مطلب در شکل (c-۴-۵) و (d-۴-۵) به ازاء دو مقدار متفاوت از ω_s نمایش داده شده است.

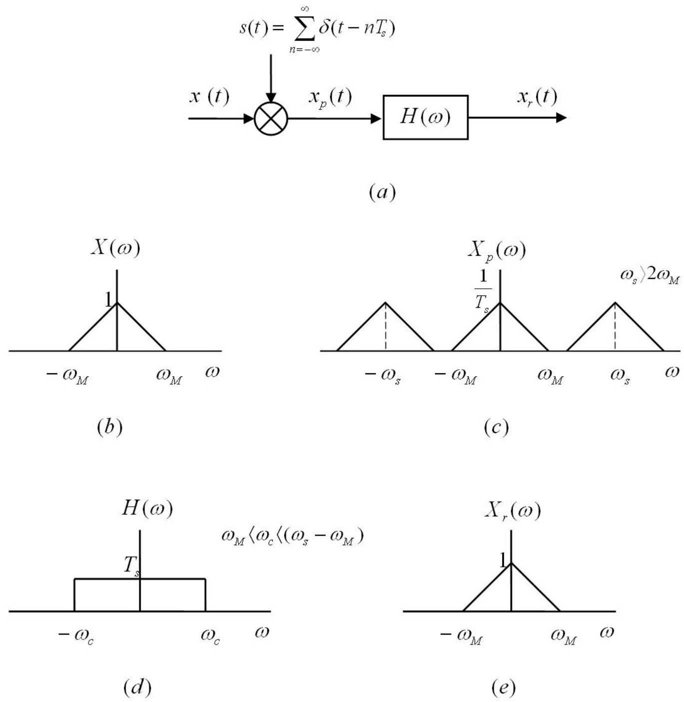


شکل (۵-۴): تأثیر نمونه‌برداری بر طیف سیگنال‌ها a) طیف سیگنال اصلی b) طیف سیگنال نمونه‌بردار c) طیف سیگنال نمونه‌برداری شده با $\omega_s > 2\omega_M$ d) همان طیف با $\omega_s < 2\omega_M$

از شکل (۵-۴-c) پیدا است که اگر $\omega_M < \omega_s - \omega_M$ یا $\omega_s > 2\omega_M$ در این‌صورت هیچ‌گونه تداخلی بین طیف‌های فرکانسی انتقال داده شده بوجود نخواهد آمد، و مانند این است که $X(\omega)$ در هر فاصله با دوره تناوب ω_s در حوزه فرکانس تکرار شود.

نتیجتاً اگر $\omega_s > 2\omega_M$ باشد، می‌توان $x(t)$ را بطور کامل از $x_s(t)$ بوسیله عبور نمونه های $x_s(t)$ از یک فیلتر پایین‌گذر با بهره T_s بازسازی نمود. البته باید فرکانس قطع فیلتر بزرگتر از ω_M و کوچکتر از $\omega_s - \omega_M$ باشد (به شکل (۵-۵) توجه کنید).

اما اگر $\omega_s < 2\omega_M$ باشد در این‌صورت تداخل ایجاد می‌شود. [شکل (۵-۴-d)] و امکان بازسازی $x(t)$ از روی نمونه‌ها وجود ندارد. این بدین مفهوم است که نمونه‌ها به اندازه کافی به هم نزدیک نیستند.
نحوه بازسازی $x(t)$ از روی $x_s(t)$ در شکل (۵-۵) نمایش داده شده است.



شکل (۵-۵) : بازسازی دقیق سیگنال از روی نمونه‌های آن بوسیله فیلتر پایین‌گذر

بنابراین اکنون ارتباط مطلوب میان سرعت نمونه‌برداری و بالاترین مؤلفه فرکانسی موجود در طیف سیگنال باند محدود جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\omega_s \geq 2\omega_M \qquad (۵-۷)$$

و یا

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2\,\omega_M \qquad (۵-۸)$$

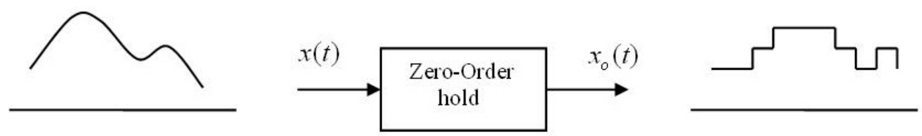
رابطه (۵-۷) به نرخ نایکوئیست [1] جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز از سیگنال‌های باند محدود معروف است. ازهمین جا نیز می‌توان پی به این حقیقت برد که در مورد سیگنال‌هایی که در حوزه فرکانس دارای باند نامحدود هستند هرگز نمی‌توان نامساوی (۵-۷) یا شرط نایکوئیست را ارضاء نمود، چون در مورد این‌گونه سیگنال‌ها ω_M بسمت بی‌نهایت میل می‌نماید.

---

[1] Nyquist Rate

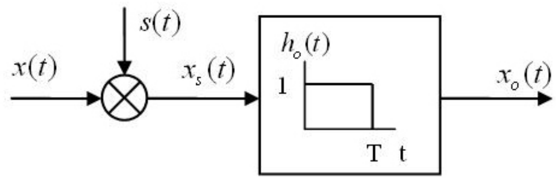
۵-۳ نمونه‌برداری به کمک مدار نگه‌دارنده مرتبه صفر[1]

طبق نظریه نمونه‌برداری می‌توان یک سیگنال باند محدود را بطورکامل توسط نمونه‌ها بازسازی نمود. اگرچه این نتیجه حاصلی از نمونه‌برداری ایده‌آل می‌باشد، اما در موارد عملی نیز دقیقا صادق است. یکی از سیستم هائی که در عمل جهت نمونه‌برداری مورداستفاده قرارمی‌گیرد سیستمی است که در آن مقدار نمونه‌های برداشته شده درهر لحظه تا زمان نمونه بعدی نگه داشته می‌شوند. نمونه‌ای از سیگنال و نمونه‌های آن در شکل (۵-۶) نمایش داده می‌شود.

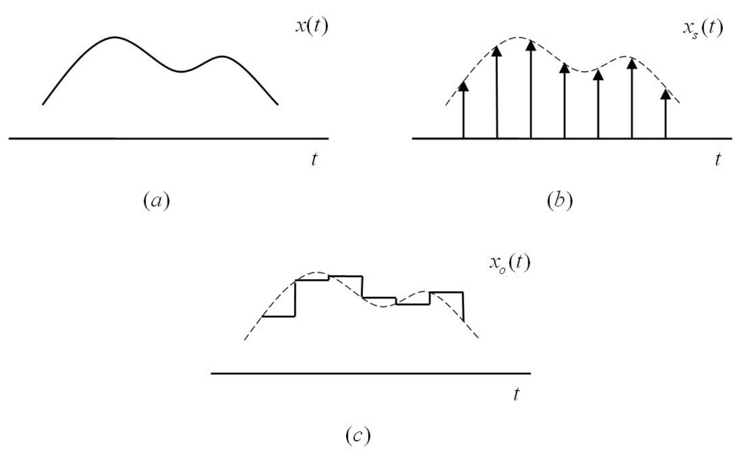


شکل (۵-۶): نمونه‌برداری به کمک مدار Z.O.H

در این نوع نمونه‌برداری بازسازی $x(t)$ از $x_0(t)$ بوسیله یک مدار LPF که در باند عبور دارای بهره متغیر است امکان‌پذیر است. برای روشن‌تر شدن موضوع ابتدا توجه کنید که $x_0(t)$ یا خروجی مدار ZOH را می‌توان بوسیله سیستم زیر نیز تولیدکرد.

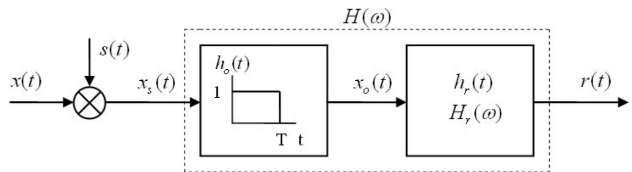


شکل (۵-۷): سیستم معادل جهت نمونه‌برداری Z.O.H سیگنالهای هر قسمت در شکل ۵-۸ نمایش داده شده اند.



شکل (۵-۸) : توصیف دقیق ZOH بصورت نمونه‌برداری با قطار ضربه به همراه کانولوشن با پالس مربعی.

[1] Zero Order Hold(Z.O.H)



شکل (۵-۹): اتصال سری مدار ZOH به همراه مدار بازساز

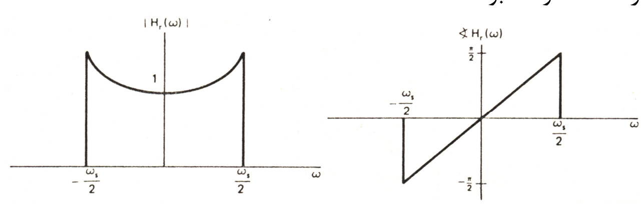
مراحل تولید نمونه‌های سیگنال به روش ZOH بدین صورت است که ابتدا به روش نمونه‌برداری ایده‌آل $x_s(t)$ را بوجود می‌آوریم و بعد سیگنال $x_s(t)$ را از یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_0(t)$ عبور می‌دهیم. خروجی همان $x_0(t)$ خواهد بود. اما برای بازسازی سیگنال $x(t)$ از روی $x_s(t)$ قبلاً گفتیم که باید $x_s(t)$ را از یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل عبور داد. بنابراین با توجه به شکل (۵-۹) باید $H_r(\omega)$ بگونه‌ای باشد که حاصلضرب $H_0(\omega)H_r(\omega)$ معادل یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل گردد. به عبارت دیگر چون

$$H_0(\omega) = e^{-\frac{j\omega T}{2}}\left(2\frac{Sin(\omega T/2)}{\omega}\right) \qquad (۵-۹)$$

لازم است که

$$H_r(\omega) = \frac{e^{\frac{j\omega T}{2}} H(\omega)}{\left[\dfrac{2Sin(\omega T/2)}{\omega}\right]} \qquad (۵-۱۰)$$

در این‌صورت اگر $H(\omega)$ مشخصه یک فیلتر LPF باشد، خروجی سیستم، $H_r(\omega)$ همان $x(t)$ منتها با تغییر اندکی در دامنه خواهد بود.



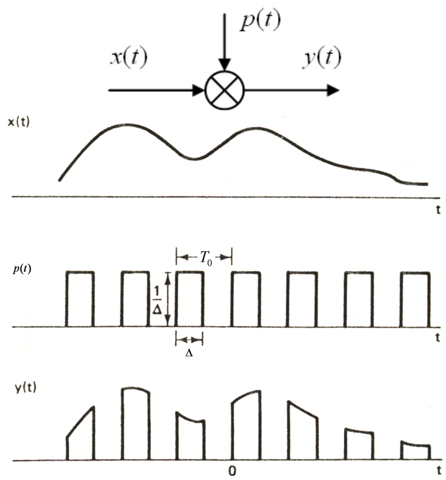
شکل (۵-۱۰): دامنه و فاز مربوط به فیلتر بازسازی برای ZOH

۵-۴ نمونه‌برداری بوسیله پالس

روش دیگری که بطور عملی جهت نمونه‌برداری از سیگنالهای پیوسته مورد استفاده قرارمی‌گیرد نمونه‌برداری به کمک قطار پالس [1](بجای قطار ضربه) می‌باشد.

در این‌صورت مدار نمونه‌برداری و نمایش سیگنالها بصورت زیر است.

[1] Pulse Train



شکل (۵-۱۱): نمونه‌برداری به کمک قطار پالس ، هنگامی که $\Delta \to 0$، $p(t)$ بسمت قطار ضربه میل می‌کند.

تبدیل فوریه $p(t)$ به این صورت است.

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) \tag{۵-۱۱}$$

که در آن a_k ضرایب سری فوریه $p(t)$ می‌باشند و $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$.

ضرایب a_k به صورت زیر بدست می آیند.

(۵-۱۲)

$$a_k = \int_0^{\Delta} \frac{1}{\Delta T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt = -\frac{1}{j\dfrac{2k\Delta\pi}{T_0}T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\Bigg|_0^{\Delta} = -\frac{1}{j2k\Delta\pi}[e^{-j\frac{\pi}{T_0}k\Delta}][e^{-j\frac{\pi}{T_0}k\Delta} - e^{j\frac{\pi}{T_0}k\Delta}] = e^{-j\frac{\pi}{T_0}k\Delta} \frac{1}{k\Delta\pi} Sin(\frac{\pi}{T_0}k\Delta)\,,\quad k \neq 0$$

و برای k=0 خواهیم داشت.

$$a_k = \frac{1}{T_0} \tag{۵-۱۳}$$

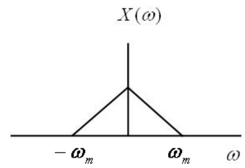
بنابراین داریم.

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{k\Delta} e^{-j\frac{\pi}{T_0}k\Delta} Sin(\frac{\pi}{T_0}k\Delta)\delta(\omega - \frac{2k\pi}{T_0}) \tag{۵-۱۴}$$

و در نتیجه

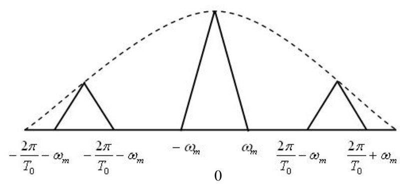
$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k\Delta\pi} e^{-j\frac{\pi}{T_0}k\Delta} Sin(\frac{\pi}{T_0}k\Delta) X(\omega - \frac{2k\pi}{T_0}) \tag{۵-۱۵}$$

اگر فرض کنیم $x(t)$ دارای طیفی بصورت شکل۵-۱۲ باشد.



شکل (۵-۱۲): طیف سیگنال $x(t)$

در آن‌صورت طیف $Y(\omega)$ بصورت شکل۵-۱۳ خواهد شد.



شکل (۵-۱۳): طیف سیگنال نمونه‌برداری شده

با توجه به طیف $Y(\omega)$ باز هم می‌بینیم شرط نایکوئیست جهت نمونـه‌بـرداری موفقیـت‌آمیـز در مـورد نمونه‌برداری با قطار پالس نیز صادق است. بنابراین اگر

$$\frac{2\pi}{T_0} \geq 2\omega_m \tag{۵-۱۶}$$

در آن‌صورت به کمک یک فیلتر پایین‌گذر می‌توان دوباره سیگنال اصلی را بازسازی کرد.

۵-۵ درون یابی[1] یا بازسازی سیگنال از روی نمونه‌های برداشته شده

درون یابی روشی است که برای بازسازی سیگنال چه بطور دقیق و چه بطـور تقریبـی از روی نمونـه‌هـا بکار برده می‌شود. یکی ازساده‌ترین روش‌های درون یابی استفاده ازمدار ZOH می‌باشد. یکـی دیگـر از روشهای بازسازی روش بازسازی خطی [2]می‌باشد که در آن قله‌های هر نمونه بوسیله یک خط راست بـه نمونه بعدی متصل می‌شود.

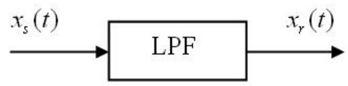
شکل (۵-۱۴): بازسازی خطی بین نقاط نمونه خط چین سیگنال اصلی

قبلاً گفتیم که اگر سیگنال باند محدود و فاصله نمونه‌ها به اندازه کافی کم باشد، درآن‌صورت می‌توان بـا عبور نمونه‌ها از یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل بطور کامل سیگنال را بازسازی کـرد. نحـوه عمـل بازسـازی سیگنال از روی نمونه‌ها که توسط فیلتر پایین‌گذر ایـده‌آل صـورت مـی‌پـذیرد را در حـوزه زمـان بهتـر می‌توان توضیح داد. سیستم شکل(۵-۱۵)را در نظر بگیرید. خروجی مـدار LPF از رابطـه زیـر بدسـت می‌آید.

---

[1] Interpolation
[2] Linear Interpolation

$$x_r(t) = x_s(t) * h(t)$$



شکل (۵-۱۵): مداربازسازی ایده‌آل

اما می‌دانیم که

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s)$$

بنابراین

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)h(t - nT_s) \qquad (۵-۱۸)$$

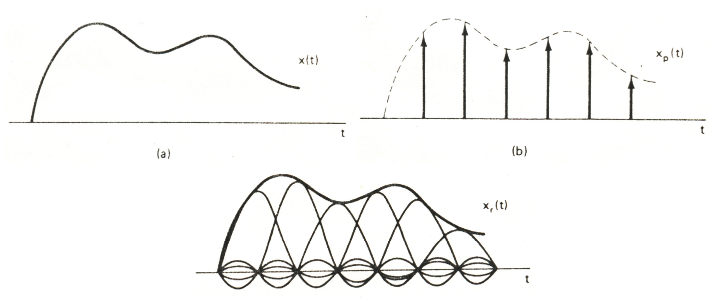
معادله فوق یک فرمول بازسازی است. اما برای فیلتر LPF با فرکانس قطع ω_c و بهره T_s پاسخ ضربه بصورت زیر است.

$$h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} Sinc(\frac{\omega_c t}{\pi}) \qquad (۵-۱۹)$$

با جایگذاری رابطه (۵-۱۹) در (۵-۱۸) رابطه (۵-۲۰) بدست می‌آید.

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)T_s \frac{\omega_c}{\pi} Sinc[\frac{\omega_c(t - nT_s)}{\pi}] \qquad (۵-۲۰)$$

عمل بازسازی سیگنال با فرمول فوق وقتی که $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ است در شکل (۵-۱۶) نمایش داده شده است.



شکل (۵-۱۶): بازسازی ایده‌آل سیگنال باند محدود به کمک توابع *Sinc*

رابطه (۵-۲۰) حاوی نکات جالبی می‌باشد. یکی از آنها این است که هر سیگنال باند محدود $x(t)$ را می‌توان بصورت مجموعه‌ای از بی‌نهایت توابع *Sinc* (فرمول (۵-۲۰)) نمایش داد مشروط بر آنکه $\omega_s \geq 2\omega_c$ باشد که در آن ω_c بیشترین مولفه فرکانسی موجود در سیگنال می‌باشد.

مثال (۵-۱): ثابت کنید.

$$Cos(\omega_c t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sinc[\frac{t - nT_s}{T_s}] \qquad (۵-۲۱)$$

که در آن $T_s = \dfrac{\pi}{\omega_c}$.

حل: با توجه به رابطه (۵-۲۰) جهت نمونه‌برداری از سیگنال باند محدود $Cos\omega_c t$ کـافی اسـت فاصـله نمونه‌ها کمتر یا مساوی $\dfrac{\pi}{\omega_c}$ باشد. در این‌صورت رابطه (۵-۲۰) صادق است و با توجه به رابطه زیر

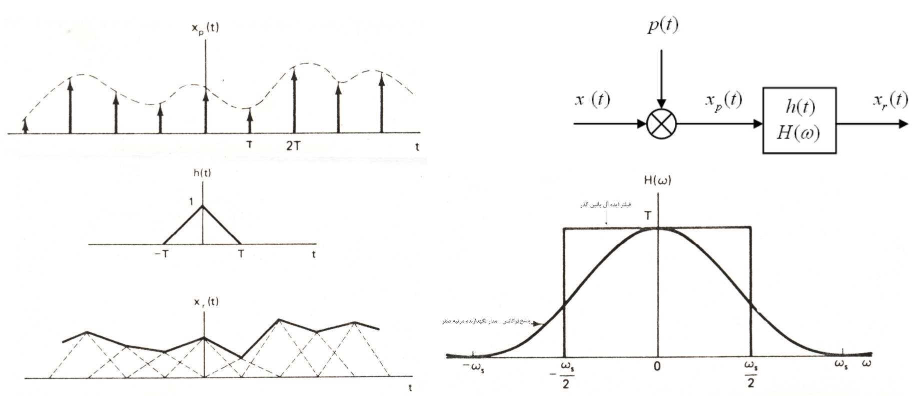
$$Cos(\omega_c nT_s) = Cos(n\pi) = (-1)^n \qquad (۵\text{-}۲۲)$$

رابطه (۵-۲۱) خود به خود ثابت است.

توجه شود که رابطه‌ای به شکل (۵-۲۱) به کمک روش‌های معمولی بسادگی قابل اثبات نمی‌باشد ولـی همانطور که دیدیم به کمک نظریه نمونه‌برداری به سادگی به اثبات می‌رسد.

بازسازی به روش فوق را معمولاً بازسازی باند محدود می‌نامند چـون اگـر $x(t)$ بانـد محـدود باشـد بـه کمک روش فوق می‌توان دقیقاً $x(t)$ را بازسازی نمود. اما چون ساخت فیلتـر پـایین‌گـذر ایـده‌آل غیـر ممکن است، معمولاً به روش‌های ساده‌تری از فیلتر کردن (یا به عبارت معادل بازسـازی کـردن) دسـت می‌یازند که یکی از آنها استفاده ازمدار ZOH با پاسخ ضـربه $h_0(t)$ اسـت کـه پاسـخ فرکانسـی آن در شکل(۵-۱۰) رسم شده است. بنابراین $h_0(t)$ یک تقریب برای فیلتر LPF ایده‌آل است. همانطور که از شکل(۵-۱۰) پیدا است تقریب فوق چندان تقریب خوبی نیست ولی در بسیاری از موارد همـین تقریـب نیز کافی است.

اما همانگونه که گفتیم روش دیگری که اغلب مورد استفاده قرار مـی‌گیـرد بازسـازی خطـی اسـت کـه درآن سیگنال بازسازی شده پیوسته ولی مشتقاتش پیوسته نیسـتند. در بعضـی مـوارد سیسـتم بازسـاز خطی به سیستم نگهدارنده مرتبه اول[1] معروف است. روش فـوق در شـکل (۵-۱۷) نمـایش داده شـده است.



شکل (۵-۱۷): بازسازی خطی (نگهدار مرتبه اول) بصورت نمونه‌برداری قطار ضربه که با پاسخ ضربه مثلثی کانوال شده است.

[1] First Order Hold (FOH)

به سادگی می‌توان تابع تبدیل $H(\omega)$ را بدست آورد.

$$H(\omega)=\left(\frac{Sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 \tag{۲۳-۵}$$

که درشکل (۵-۱۷) دامنه $H(\omega)$ را بر روی دامنه فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل منطبق کرده‌ایم و می‌بینیم که شباهت) آن به فیلتر LPF بیشتر از شباهت $H_0(\omega)$ به فیلتر LPF می‌باشد.

۵-۶ اثر تداخل[1]

در قسمت‌های گذشته فرض ما بر این بود که فرکانس نمونه‌برداری به اندازه کافی بزرگ است، یعنی $\omega_s > 2\omega_m$ است، در نتیجه پدیده تداخل رخ نمی‌دهد. هنگامی که $\omega_s < 2\omega_m$ باشد در آن صورت نمی‌توان $x(t)$ را از روی سیگنال $x_s(t)$ ساخت، چون در حوزه فرکانس پدیده تداخل به وجود می‌آید. اما به هرحال سیگنال $x_r(t)$ در نقاط نمونه‌برداری مساوی $x(t)$ است. به عبارت دیگر بدون توجه به مقدار ω_s داریم.

$$x_r(nT)=x(nT) \quad n=0,\pm1,\pm2,... \tag{۲۴-۵}$$

بعنوان مثال فرض کنید $x(t)=Cos(\omega_0 t)$ است. $X(\omega)$ درشکل (۵-۱۸) رسم شده است. در این شکل ضربه در فرکانس‌های مثبت و منفی جهت تشخیص به دو صورت رسم شده است. $X_s(\omega)$ و طیف سیگنال نمونه‌برداری شده را در نظر می‌گیریم و توجه خود را به تغییرات ω_0 و فرکانس نمونه‌برداری ω_s معطوف می‌کنیم. در شکل (۵-۱۸) $X_s(\omega)$ را برای مقادیر مختلف ω_0 رسم کرده‌ایم (فرض کرده‌ایم که ω_s ثابت است). شکل پاسخ فیلتر ایده آل نیز به صورت خط چین نشان داده شده است. دیده می شود که درحالتی که $\omega_0 < \omega_s/2$ است هیچ‌گونه تداخلی به وجود نمی‌آید (شکل‌های ۵-۱۸، b و c). ولی به ازاء $\omega_0 > \omega_s/2$ پدیده تداخل در شکل‌های (d و e) پیدا است. برای هر یک از چهار حالت خروجی فیلتر LPF یا $x_r(t)$ چنین است.

$$\omega_0=\frac{\omega_s}{6} \quad \text{و} \quad x_r(t)=\cos\omega_0 t=x(t) \qquad \text{(b}$$

$$\omega_0=\frac{2\omega_s}{6} \quad \text{و} \quad x_r(t)=\cos\omega_0 t=x(t) \qquad \text{(c} \tag{۲۵-۵}$$

$$\omega_0=\frac{4\omega_s}{6} \quad \text{و} \quad x_r(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t\neq x(t) \qquad \text{(d}$$

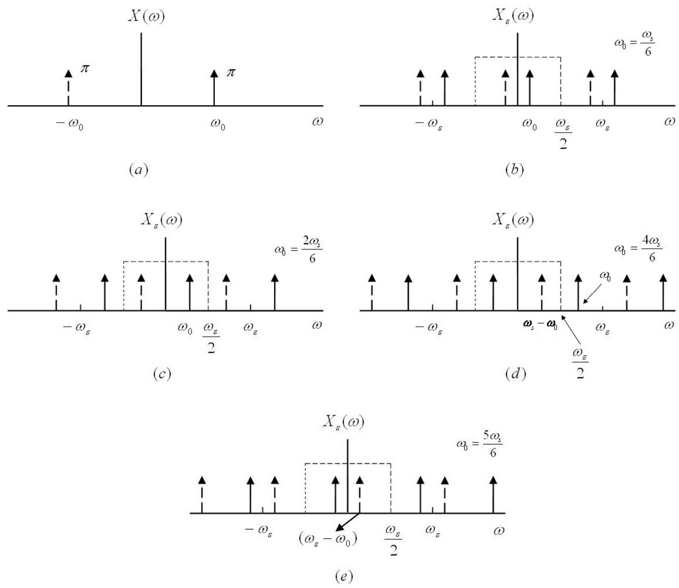
$$\omega_0=\frac{5\omega_s}{6} \quad \text{و} \quad x_r(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t\neq x(t) \qquad \text{(e}$$

هنگام به وجود آمدن پدیده تداخل فرکانس واقعی ω_0 جای خود را به فرکانس عاریتی (مجازی)[2] $\omega_s-\omega_0$ می‌دهد.

---

[1] Aliasing
[2] Virtual Frequency

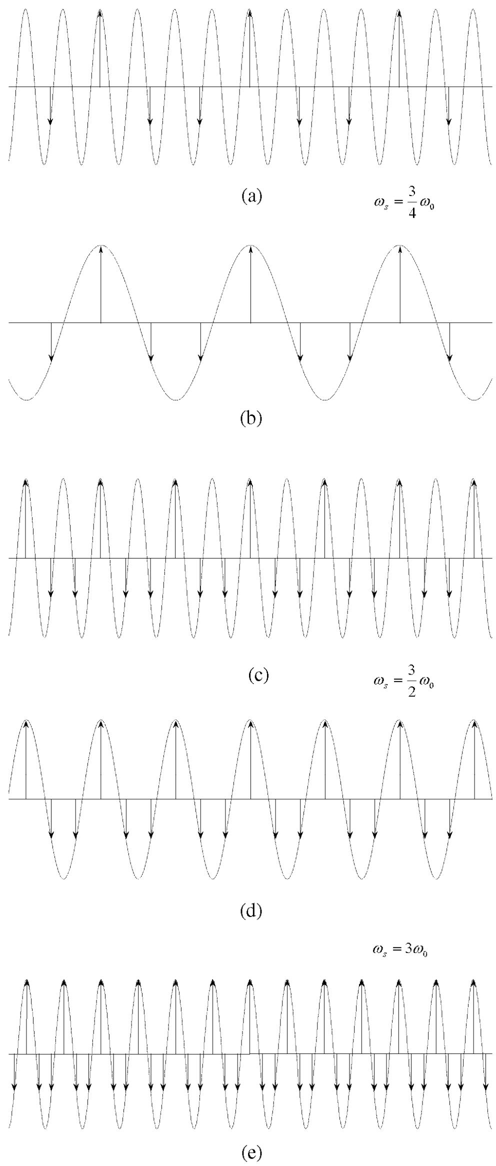
برای $\frac{\omega_s}{2} < \omega_0 < \omega_s$ با افزایش ω_0 نسبت به ω_s فرکانس خروجی $\omega_s - \omega_0$ کاهش می‌یابد. هنگامی که $\omega_s = \omega_0$ شود. در آنصورت سیگنال بازسازی شده یک مقدار dc یا ثابت خواهد بود. این حالت مبین این واقعیت است که هنگامی که نمونه‌برداری یکبار درهر سیکل انجام شود تمام نمونه‌های برداشته شده دارای دامنه یکسان خواهند بود و به نظر می‌رسد که هیچ تغییراتی ندارد یا $\omega_0 = 0$ است. درشکل (۵-۱۸) سیگنال اصلی نمونه برداشته شده و سیگنال بازسازی شده ترسیم شده‌اند.



شکل (۵-۱۸): نمایش تأثیر فرکانس‌های بیشتر و کمتر از فرکانس نمونه‌برداری درحوزه فرکانس. a) طیف سیگنال سینوسی اولیه b,c) طیف سیگنال نمونه‌برداری شده با $\omega_s > 2\omega_m$ e,d) طیف سیگنال نمونه‌برداری شده با $\omega_s < 2\omega_m$

در شکل (۵-۱۹) سیگنال $x(t)$ بصورت خطوط پررنگ رسم شده اند. همچنین نمونه‌های برداشته شده و سیگنال بازسازی شده از روی نمونه‌ها باخط‌چین رسم شده‌اند. ازاین شکل‌ها به خوبی می‌توان چگونگی بازسازی یا درون یابی را مشاهده کرد. اثرتداخل که باعث انعکاس فرکانس‌های بالاتر به فرکانس‌های پایین‌تراست را نیز می‌توان در شکل های (c,d) مشاهده کرد. چون در این حالت فرکانس نمونه‌برداری ω_s ازدو برابر فرکانس ω_0 کمتر است ($\omega_s = \frac{6}{5}\omega_0$) و بنابراین سیگنال بازسازی شده دارای فرکانس زیر است.

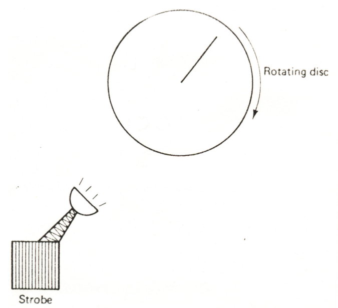
$$\omega_s - \omega_0 = \frac{6}{5}\omega_0 - \omega_0 = \frac{1}{5}\omega_0 \qquad (۵-۲۶)$$



شکل (۵-۱۹): تأثیرتداخل روی سیگنال سینوسی.برای مقادیر مختلف فرکانس نمونه برداری a)سیگنال سینوسی اولیه با فرکانس ω_0 و نمونه های گرفته شده با فرکانس $\omega_s = \frac{3\omega_0}{4}$ b) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با فرکاس نمونه برداری $\omega_s = \frac{3\omega_0}{4}$ c) سیگنال سینوسی اولیه با فرکانس ω_0 و نمونه های گرفته شده با فرکانس $\omega_s = \frac{3\omega_0}{2}$ d) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با فرکاس نمونه برداری $\omega_s = \frac{3\omega_0}{2}$ e) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با فرکاس نمونه برداری $\omega_s = 3\omega_0$

در b) و d) پدیده تداخل رخ می‌دهد در حالی که در e) تداخل رخ نمی‌دهد.

در واقع نمونه‌برداری آهسته باعث شده است که فرکانس‌های بالاتر به فرکـانس‌هـای پـایین مـنعکس شوند. این واقعیت را با آزمایش ساده شکل (۵-۲۰) می‌توان تحقیق کرد.



شکل (۵-۲۰): چراغ چشمک‌زن و دیسک چرخان

دیسک با سرعت مشخص درحال گردش است. خطوط شعاعی منفردی که روی آن ترسیم شده است را در نظر بگیرید. چراغی را که با سرعت‌های مختلف و بطور متناوب روشن و خاموش می‌شود[1] را بعنوان سیستم نمونه‌بردار فرض کنید. هنگامی که فرکانس فلاش خیلی بیشتر از سرعت چرخش دیسک باشد سرعت چرخش صفحه بطور صحیح از چرخش خط شعاعی دیده می‌شود. هنگامی که سرعت فلاش کمتر وکمتر شود تا جایی که کمتر از دو برابر سرعت چرخش صفحه شود، به نظر می‌رسد سرعت چرخش صفحه کمتر از مقدار قبلی است (البته با جهت عکس). اگر سرعت فلاش یکبار در هر دور صفحه باشد بنظر می‌رسد که صفحه ثابت است و چرخشی ندارد.

۵-۷ نمونه‌برداری در حوزه فرکانس

نظریه نمونه‌برداری که در قسمت‌های قبلی این فصل برای حوزه زمان در مورد سیگنال‌های باند محدود مطرح شد، در حوزه فرکانس بصورت دوگان حوزه زمان قابل تعریف است. بعبارت دیگر یک نوع دوگانی بین حوزه زمان و فرکانس در نظریه نمونه‌برداری مشاهده می‌گردد. قبلاً دیدیم که جهت نمونـه‌بـرداری موفقیت‌آمیز لازم است سـیگنال در حـوزه فرکـانس دارای بانـد محـدود باشـد. بنـابراین انتظـار داریـم نمونه‌برداری در حوزه فرکانس فقط برای سیگنال‌هایی که در حوزه زمـان دارای دوره محـدود هسـتند، موفقیت‌آمیز باشد. حقیقت امر نیز همین است و نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز در حـوزه فرکـانس مسـتلزم دوره محدود بودن سیگنال در حوزه زمان می‌باشد.

در این قسمت روش نمونه‌برداری فرکانسی از یک سیگنال زمان محدود که در حوزه فرکـانس نامحـدود است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. توجه داشته باشید که بر اساس نظریه نمونه‌برداری نمی‌توان از ایـن سیگنال‌ها در حوزه زمان نمونه‌برداری کرد چون پهنای باند آنها بی‌نهایت است برای بررسـی مفصـل‌تـر این موضوع سیستم نمونه بردار در حوزه فرکانس را بصورت شکل (۵-۲۱) در نظر بگیریـد. توجـه شـود

[1] Flasher

که سیستم ضرب‌کننده در حقیقت یک ضرب‌کننده در حوزه فرکانس می‌باشد که معادل حوزه زمانی آن کانولوشن می‌باشد.

در اینجا داریم.

$$\overline{X}(\omega) = X(\omega)P(\omega) \qquad (۲۷\text{-}۵)$$

در حوزه زمان داریم.

(۲۸-۵)

$$\overline{x}(t) = x(t) * p(t)$$

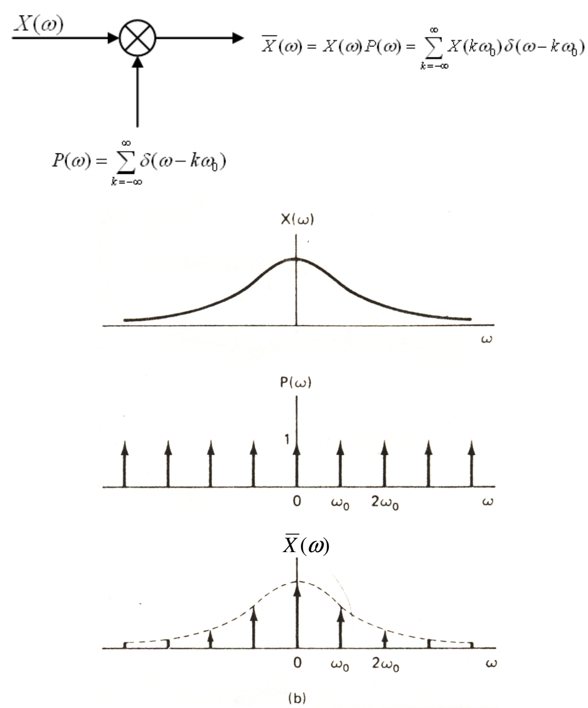
که در آن

$$p(t) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\frac{2\pi}{\omega_0}k) \qquad (۳۰\text{-}۵)$$

بنابراین

$$\overline{x}(t) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(t-\frac{2\pi k}{\omega_0}) \qquad (۳۱\text{-}۵)$$

معادله (۵-۳۱) دوگان معادله (۵-۸) است.



شکل (۵-۲۱): نمونه‌برداری به کمک قطار ضربه در حوزه فرکانس a) سیستم اصلی b) طیف های مربوط به $X(\omega)$ و $P(\omega)$ و $\overline{X}(\omega)$

اگر $x(t)$ زمان محدود باشد یعنی

$$x(t) = 0 \quad , |t| > T_m \tag{۳۲-۵}$$

در این‌صورت همان‌گونه که در شکل (۵-۲۲)نمایش داده شده است با انتخاب

$$\frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_m \tag{۳۳-۵}$$

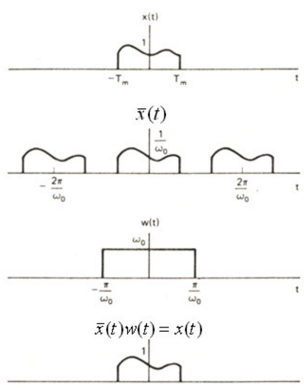
$\bar{x}(t)$ که در معامله (۵-۳۱) داده شده است شامل $x(t)$ و انتقال یافته‌های آن به اندازه $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشدکه در حوزه زمان هیچ‌گونه تداخلی با هم ندارند. در این حالت سیگنال اصلی $x(t)$ و بالطبع تبدیل فوریه آن $X(\omega)$ را می‌توان با انجام عمل پنجره پایین‌گذر زمانی[1] از سیگنال $\bar{x}(t)$ جدا کرد یعنی

$$x(t) = \bar{x}(t)w(t) \tag{۳۴-۵}$$

که درآن

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0 & |t| \le \dfrac{\pi}{\omega_0} \\ 0 & |t| > \dfrac{\pi}{\omega_0} \end{cases} \tag{۳۵-۵}$$

سیگنال‌های مراحل فوق در شکل (۵-۲۲) نمایش داده شده‌اند.



شکل(۵-۲۲): شکل موج حوزه زمانی، مربوط به نمونه‌برداری حوزه فرکانس

اگر نامساوی (۵-۳۳) صادق نباشد در آن‌صورت نمی‌توان $x(t)$ را از $\bar{x}(t)$ جداکرد چون $x(t)$ با انتقال یافته‌هایش تداخل پیدا می‌کند این نوع تداخل دوگان تداخل حوزه فرکانس است که قبلاً شرح داده شد.

[1] low-time windowing

در مقایسه با آنچه در مورد بازسازی گفتیم می‌توان گفت عملکرد پنجره پایین‌گذر زمانی روی سـیگنال $\bar{x}(t)$ کار بازسازی روی نمونه‌های $X(\omega)$ را در حوزه فرکانس انجام می‌دهد از معامله (۵-۳۴) داریم.

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\bar{X}(\omega)*W(\omega)\right] \tag{۵-۳۶}$$

که در آن

$$\bar{X}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(k\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0) \tag{۵-۳۷}$$

و $W(\omega)$ تبدیل فوریه $w(t)$ است. یعنی

$$W(\omega)=2\pi\, Sinc(\frac{\omega}{\omega_0}) \tag{۵-۳۸}$$

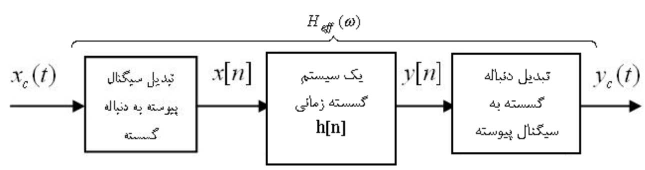
با ترکیب معادلات (۵-۳۶) و (۵-۳۷) داریم.

$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(k\omega_0)Sinc(\frac{\omega-k\omega_0}{\omega_0}) \tag{۵-۳۹}$$

که این معادله نیز دوگان (۵-۲۰) است.

۵-۸ پردازش گسسته زمانی بر روی سیگنال‌های پیوسته زمانی[۱]

در بسیاری از کاربردها بدلیل سادگی پردازش در حوزه گسسته زمانی بهتر است ابتدا سـیگنال پیوسـته زمانی را به یک سیگنال معادل گسسته زمانی تبدیل نمود و بعد تمـام عملیـات وپـردازش‌هـای لازم را روی سیگنال گسسته زمانی انجام داد. این کار توسط نمونه‌بـرداری امکـان‌پـذیر اسـت. ایـن عملیـات را می‌توان در سه بلوک زیر خلاصه کرد.



شکل (۵-۲۳): پردازش گسسته زمانی برروی سیگنال‌های پیوسته زمانی

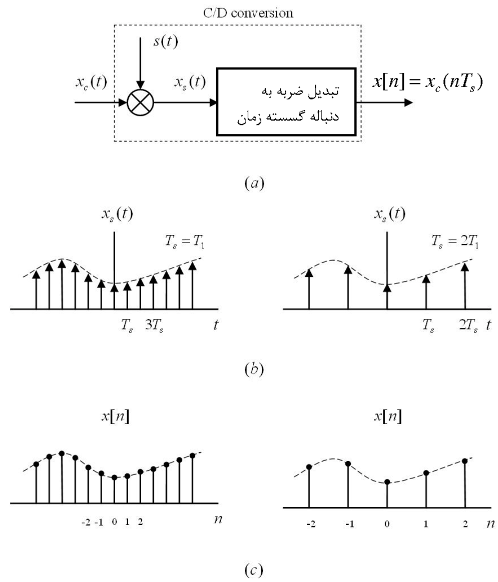
بلوک سوم جهت بازگشت به حوزه پیوسته زمانی لازم است. اساس کار در بلوک اول(C/D) ایـن اسـت که باید رابطه (۵-۴۰) میان نمونه‌های $x[n]$ و سیگنال $x_c(t)$ برقرار باشد.

$$x[n]=x_c(nT_s) \tag{۵-۴۰}$$

جهـت درک بهتـر مطلـب شایسـته اسـت رابطـه میـان $x_c(t)$ و نمونـه‌هـایش را بوسـیله یـک فراینـد نمونه‌برداری و بدنبال آن یک مدار مبدل ضربه به دنباله نمایش داد. این رابطـه بوسـیله شـکل (۵-۲۴) نمایش داده شده است.

---

1 Discrete Time Processing of Continuoses-Time Signal



شکل (۵-۲۴): نمونه‌برداری با قطار ضربه در اتصال با سیستم مبدل ضربه به دنباله زمانی گسسته a) نمایش کلی سیستم b) $x_s(t)$ برای دوسرعت نمونه‌برداری پوش خط‌چین $x_c(t)$ را نمایش می‌دهد. c) خروجی بصورت دنباله برای دوسرعت مختلف نمونه‌برداری.

در حوزه فرکانس می‌توان نوشت.

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_c(\omega-k\omega_s) \qquad (۵\text{-}۴۱)$$

و یا در حوزه زمان داریم.

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT_s)\delta(t-nT_s) \qquad (۵\text{-}۴۲)$$

که از روی این رابطه (۵-۴۲) می‌توان نوشت.

$$X_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT_s)e^{-jn\omega T_s} \qquad (۵\text{-}۴۳)$$

از طرفی دیگر خروجی $x[n]$ را در نظر گرفته و تبدیل فوریه‌اش را می‌نویسیم.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \qquad (۵\text{-}۴۴)$$

اکنون اگر بخواهیم $x[n]=x_c(nT)$ شود داریم.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT_s)e^{-j\Omega n} \qquad (۵\text{-}۴۵)$$

با مقایسه روابط (۵-۴۵) و (۵-۴۳) داریم.

$$X(\Omega)=X_s(\frac{\Omega}{T_s})$$

و از طرف دیگر داریم.

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}X_c(\omega) \quad ,|\omega|\le\omega_m \tag{۴۶-۵}$$

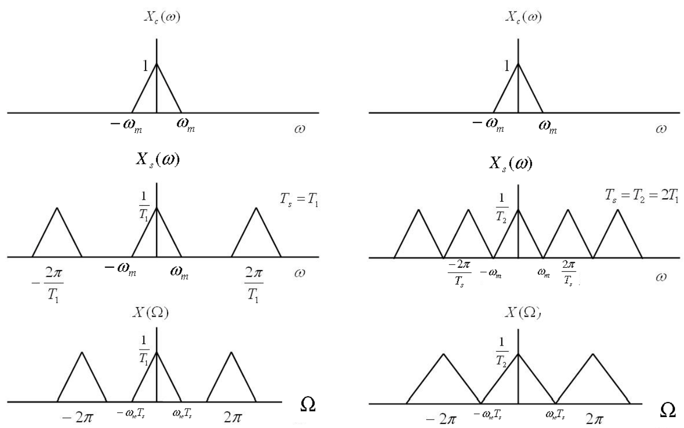
که درآن ω_m بالاترین مؤلفه فرکانسی موجود در X_c است. بنابراین داریم.

$$X(\Omega)=\frac{1}{T_s}X_c(\frac{\Omega}{T_s}) \quad ,|\Omega|<\omega_m T_s \tag{۴۷-۵}$$

و یا

$$X(\Omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_c(\frac{\Omega}{T_s}-\frac{2k\pi}{T_s}) \tag{۴۸-۵}$$

ارتباط میان $X_c(\omega)$ ، $X_s(\omega)$ ، $X(\Omega)$ در شکل (۵-۲۵) رسم شده است.



شکل (۵-۲۵): ارتباط بین $X_c(\omega)$ ، $X_s(\omega)$ و $X(\Omega)$ برای دو سرعت مختلف نمونه‌برداری

توجه به این نکته حائز اهمیت است که LTI بودن کل سیستم (۵-۲۷) بستگی به دو عامل زیر دارد.

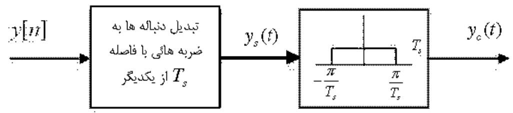
۱-LTI بودن سیستم گسسته زمان که جهت پردازش سیگنال پیوسته زمان بکار می‌رود.

۲-باند محدود بودن سیگنال ورودی وبالا بودن نرخ نمونه‌برداری به اندازه‌ای که از تداخل جلوگیری کند.

توجه شودکه در شکل (۵-۲۵) T_1 و T_2 (نرخ‌های نمونه‌برداری) بگونه‌ای هستندکه شرط نایکوئیست را ارضاء می‌نمایند یعنی $\frac{2\pi}{T_1}\ge 2\omega_m$ و $\frac{2\pi}{T_2}\ge 2\omega_m$. در غیر این‌صورت تداخل حاصله مانع از موفقیت عمل نمونه‌برداری می‌شد.

با توجه به شکل (۵-۲۴) می‌بینیم که انتخاب T_s تأثیری در فاصله نمونه‌ها در حوزه گسسته زمانی ندارد و این در واقع نمایانگر یک نرمالیزاسیون برحسب T_s (تقسیم محور زمان بر T_s) در انتقال از حوزه پیوسته به گسسته زمانی میباشد. این نرمالیزاسیون بر حسب T_s در حوزه زمان معادل ضرب حوزه فرکانس در ضریب نرمالیزاسیون T_s می‌باشد، یعنی $\Omega=T_s\omega$.

اکنون مناسب است که بلوک D/C که کارش تبدیل نمونه‌ها به یک سیگنال پیوسته زمانی است را بررسی کنیم. در این بلوک ابتدا باید دنباله‌ها را با توجه به دانستن نرخ نمونه‌برداری T_s به ضربه‌هایی با فاصله T_s از یکدیگر تبدیل نمود و سپس با قراردادن یک LPF می‌توان $y_c(t)$ را بازسازی کرد. (به شکل (۵-۲۶) توجه کنید.)



شکل (۵-۲۶): بلوک D/C

در اینجا داریم.

$$y_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\delta(t-nT_s) \qquad (۵\text{-}۴۹)$$

وبعداز LPF داریم.

$$Y_c(\omega)=Y_s(\omega)H_r(\omega) \qquad (۵\text{-}۵۰)$$

$$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]h_r(t-nT_s) \qquad (۵\text{-}۵۱)$$

که در آن

$$h_r(t)=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi t}{T_s}\right)}{\dfrac{\pi t}{T_s}} \qquad (۵\text{-}۵۲)$$

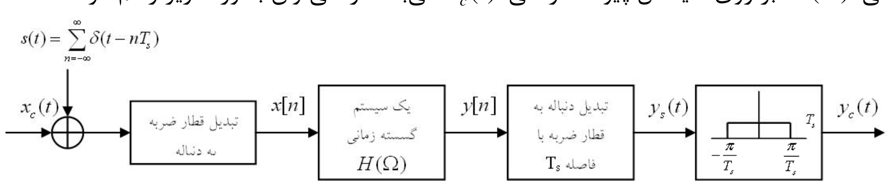
بنابراین می‌توان نوشت.

$$y_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\frac{\sin[\pi(t-nT_s)/T_s]}{\pi(t-nT_s)/T_s} \qquad (۵\text{-}۵۳)$$

چون $h_r(0)=1$ و $h_r(mT_s)=0$ بازاء $m\neq 0$ پس

$$y_c(mT_s)=y[m] \qquad (۵\text{-}۵۴)$$

البته بشرطی که $Y_c(\omega)=0$ بازاء $|\omega|\geq\frac{\pi}{T_s}$ باشد. اکنون سیستم کلی که بیانگر یک پردازش گسسته زمانی $H(\Omega)$ بر روی سیگنال پیوسته زمانی $x_c(t)$ می‌باشد را می‌توان بصورت زیر رسم کرد.



شکل (۵-۲۷): سیستم کلی که نمایشگر یک پردازش گسسته زمانی $H(\Omega)$ بر روی سیگنال پیوسته زمانی $x_c(t)$ می‌باشد.

حال سوال اینست که یک پردازشگر گسسته زمانی $H(\Omega)$ در سیستم شکل (۵-۲۷) معادل چه سیستمی در حوزه پیوسته زمانی است؟ جواب این سوال با در نظر گرفتن $Y_c(\omega)$ و $X_c(\omega)$ در شکل (۵-۲۷) داده می‌شود. در شکل (۵-۲۷) داریم.

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \tag{۵-۵۵}$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\Omega)X_c\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \tag{۵-۵۶}$$

از معادلات (۵-۵۰) الی (۵-۵۴) می‌توان استنباط کرد که

$$Y_s(\omega) = Y(\Omega)\Big|_{\Omega = \omega T_s} \tag{۵-۵۷}$$

$$Y_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega T_s)X_s\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \tag{۵-۵۸}$$

و بعد از LPF کردن داریم.

$$Y_c(\omega) = T_s X_c(\omega)H(\omega T_s) \quad ,|\omega| < \frac{\pi}{T_s} \tag{۵-۵۹}$$

بنابراین تابع انتقال معادل به صورت زیر بدست می آید.

$$H_{eff}(\omega) = T_s H(\omega T_s) \quad ,|\omega| < \frac{\pi}{T_s} \tag{۵-۶۰}$$

بنابراین برای انجام عملیات مشتق گیری رابطه متناظر در حوزه گسسته زمان باید بدین‌صورت باشد.

$$H(\Omega) = \frac{1}{T_s}\, j\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) \quad ,|\Omega| < \pi \tag{۵-۶۱}$$

این تابع تبدیل با دوره تناوب 2π متناوب است و اگر آن را در سیستم شکل (۵-۲۷) در محل $H(\Omega)$ استفاده کنیم عمل کلی سیستم معادل یک مشتق‌گیر پیوسته با تابع تبدیل زیر است.

$$H_{eff}(\omega) = \begin{cases} j\omega & |\omega| < \dfrac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \dfrac{\pi}{T_s} \end{cases} \tag{۵-۶۲}$$

پاسخ فرکانسی $H_{eff}(\omega)$ و $H(\Omega)$ در شکل (۵-۲۸) رسم شده‌اند. محاسبه پاسخ ضربه به صورت تمرین به عهده دانشجویان گذاشته می شود.

بنابراین اگر یک سیستم گسسته زمانی با پاسخ فرکانسی به صورت (۵-۶۱) در شکل (۵-۲۷) در محل $h[n]$ استفاده شود خروجی $y_c(t)$ بازاء هر ورودی باند محدود (که بالاترین مؤلفه فرکانسی‌اش از $\frac{\pi}{2}$ کوچکتر باشد) مشتق ورودی خواهد بود.

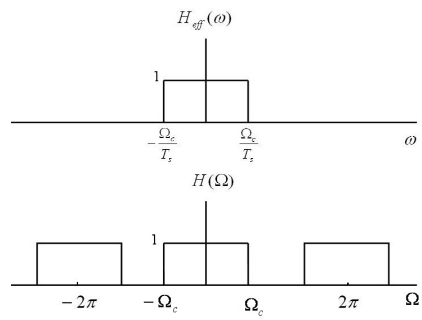
مثال (۵-۲): تابع انتقال یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل در حـوزه پیوسـته زمـانی بصـورت رابطـه (۵-۶۳) است.

$$H_{eff}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\dfrac{\Omega_c}{T_s}=\omega_c\\ 0 & |\omega|>\dfrac{\Omega_c}{T_s}=\omega_c\end{cases} \qquad (۵\text{-}۶۳)$$

اگر بخواهیم بجای این سیستم از یک سیستم معادل گسسته زمـانی در شـکل (۵-۲۷) اسـتفاده کنـیم باید سیستمی را بصورت زیر بکار بریم.

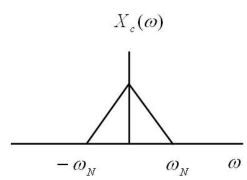
$$H(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|<\Omega_c\\ 0 & \Omega_c<|\Omega|<\pi\end{cases} \qquad (۵\text{-}۶۴)$$

که با دوره تناوب 2π تکرار می‌شود.



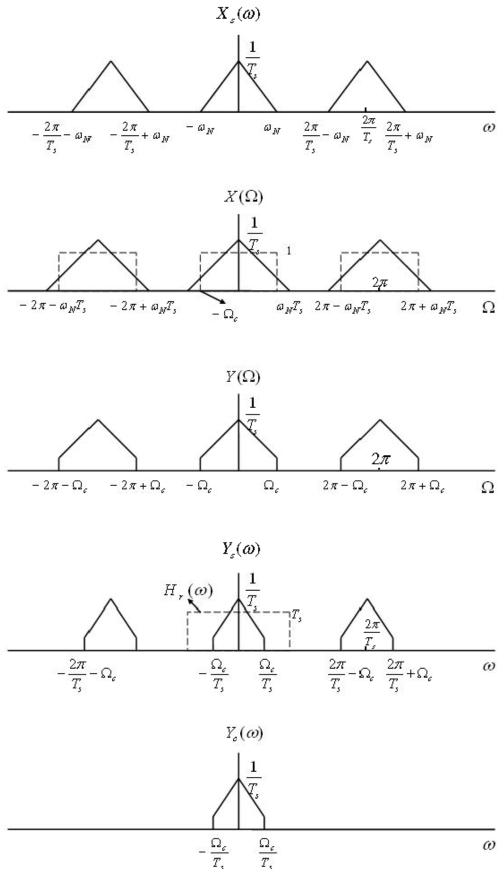
شکل (۵-۲۸): نمایش $H(\Omega)$ و $H_{eff}(\omega)$

اکنون فرض کنید سیگنال $x_c(t)$ دارای طیف زیر باشد.



شکل (۵-۲۹): نمایش طیف $X_c(\omega)$

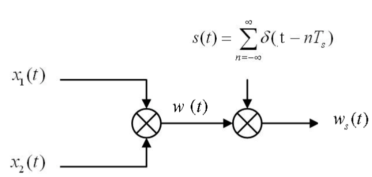
بنابراین به ترتیـب بـرای $X_s(\omega)$، $X(\Omega)$، $Y(\Omega)$ و $Y_s(\omega)$ و در نهایـت $Y_c(\omega)$ طیـف‌هـای زیـر را داریم.



شکل (۵-۳۰): نمایش $X_s(\omega)$ ، $X(\Omega)$ ، $Y(\Omega)$، $Y_s(\omega)$ و $Y_c(\omega)$

پس فرکانس قطع فیلتر در حوزه پیوسته زمانی را می‌توان توسط دوره تناوب نمونه‌برداری T_s تعیین نمود، بدون اینکه Ω_c یا فرکانس قطع فیلتر گسسته زمانی را تغییر داد. این یک روش متداول درساختن فیلترهای پایین‌گذرپیوسته زمانی با فرکانس‌های قطع مختلف، از فیلترهای پایین‌گذر گسسته زمانی با یک فرکانس قطع می‌باشد.

مثال (۵-۳):درسیستم نشان داده شده درشکل ۵-۳۱ بیشترین فاصله نمونه‌ها (T_s) جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیزچقدرباید باشد؟



شکل۵-۳۱ سیستم مربوط به ۵-۳

توجه کنید که پهنای باند $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب ω_1 و ω_2 می‌باشند.

حل: لازم است ابتدا پهنای باند $w(t)$ را بیابیم. با توجه به اینکه $w(t)$ حاصلضـرب دو سـیگنال $x_1(t)$، $x_2(t)$ است، داریم.

$$W(\omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$$

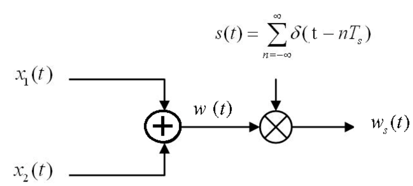
بنابراین طیف $W(\omega)$ دارای پهنای باند $\omega_1+\omega_2$ می‌باشد. بنابراین طبق نظریه نمونه‌برداری شـرط زیـر را جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز خواهیم داشت.

$$\frac{2\pi}{T_s}\geq 2(\omega_1+\omega_2)$$

و یا

$$T_s\leq\frac{\pi}{\omega_1+\omega_2}$$

مثال (۵-۴): در سیستم شکل زیر بیشترین فاصله نمونه‌ها (T_s) جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز چقـدر باید باشد.



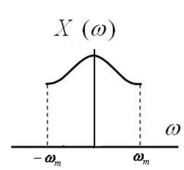
شکل۵-۳۲ سیستم مربوط به مثال ۵-۴

توجه کنید که پهنای باند $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بترتیب ω_1 و ω_2 باشد.

حل: با توجه به شکل پهنای باند $W(\omega)$ مساوی ماکزیمم ω_1 و ω_2 می‌باشد بنابراین

$$T_s\leq\frac{\pi}{Max\{\omega_1,\omega_2\}}$$

مثال (۵-۵): در سیستم شکل ۵-۵ سیگنال نمونه بردار یک قطار ضربه است که علامـت هـر دو نمونـه مجاور مخالف یکدیگر است. اگر طیف سیگنال بصورت شکل۵-۳۳ نمایش داده شده باشد. تبدیل فوریه $x_s(t)$ و $y(t)$ را برای حالتی که $\Delta<\frac{\pi}{2\omega_M}$ باشد بدست آورید.



شکل۵-۳۳ شکل طیف سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال ۵-۵

$$x_s(t)=x(t)s(t)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * S(\omega)$$

می‌توان سیگنال نمونه‌بردار را بصورت زیر نوشت.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\Delta) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\Delta + \Delta)$$

بنابراین بسادگی می‌توان تبدیل فوریه $s(t)$ را بدین‌صورت نوشت.

$$S(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) - \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) e^{-j\omega\Delta}$$

که درآن $\omega_s = \frac{2\pi}{2\Delta}$ می‌باشد.

$$S(\omega) = \frac{\pi}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}) \left[1 - e^{-jk\omega_s\Delta}\right]$$

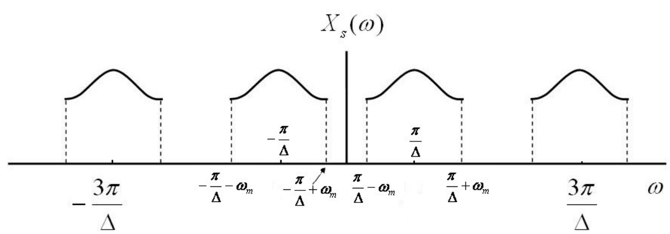
در این‌صورت داریم.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\Delta} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - \frac{k\pi}{\Delta})(1 - e^{-jk\frac{\pi}{\Delta}\Delta}) \right\} = \frac{1}{2\Delta} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - \frac{k\pi}{\Delta})(1 - e^{-jk\pi}) \right\}$$

و یا

$$X_s(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\frac{\pi}{\Delta}) & k, odd \\ 0 & k, even \end{cases}$$

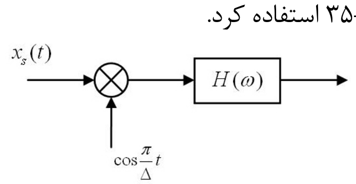
بنابراین طیف $X_s(\omega)$ بصورت زیر می‌باشد.



شکل۵-۳۴ شکل طیف $X_s(\omega)$ مربوط به مثال ۵-۵

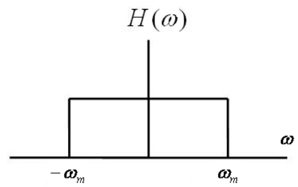
مثال (۵-۶): جهت بازسازی سیگنال اصلی در مثال (۵-۵) از روی نمونه‌های آن از چه سیستمی می‌توان استفاده کرد.

حل: می‌توان از سیستم شکل۵-۳۵ استفاده کرد.



شکل۵-۳۵ شکل سیستم مربوط به مثال ۵-۵

که در آن $H(\omega)$ یک فیلتر پایین‌گذر بصورت شکل۵-۳۶ است.



شکل۵-۳۶ شکل طیف $H(\omega)$ مربوط به مثال ۵-۶

مثال (۵-۷): ماکزیمم مقدار Δ جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز از سیگنال $x(t)$ چقدر می‌تواند باشد؟

حل :با توجه به شکل ۵-۲۳ و طبق نظریه نمونه‌برداری باید

$$\frac{\pi}{\Delta}-\omega_m \geq -\frac{\pi}{\Delta}+\omega_m \Rightarrow \frac{2\pi}{\Delta} \geq 2\omega_m$$

و یا

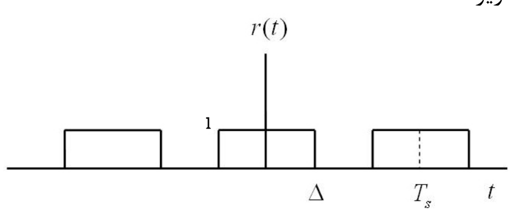
$$\Delta \leq \frac{\pi}{\omega_m}$$

مثال (۵-۸): در سیستم نمونه بردار شکل۵-۵ ازیک موج متناوب مربعی مطابق شکل۵-۲۶ جهت نمونه‌برداری از سیگنال باند محدود $x(t)$ استفاده شده است. دوره تناوب سیگنال نمونه‌بردار T_s می‌باشد. اگرپهنای باند سیگنال ω_m باشد و بافرض $\Delta=\frac{T_s}{3}$ مطلوب است ماکزیمم مقدار T_s جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز.

حل: سیگنال نمونه بردار را به صورت زیر داریم.

$$s(t)=r(t)$$

که در آن $r(t)$ بصورت زیر است.



شکل۵-۳۷ سیگنال نمونه بردار مربوط به مثال ۵-۸

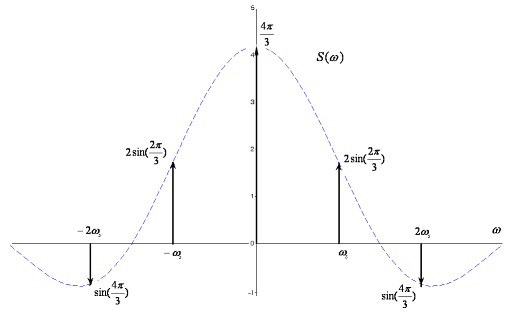
اما قبلاً ضرایب سری فوریه $r(t)$ را بدست آورده بودیم.

$$a_k=\frac{\sin k\omega_s\Delta}{k\pi} \quad \text{و} \quad \omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

پس

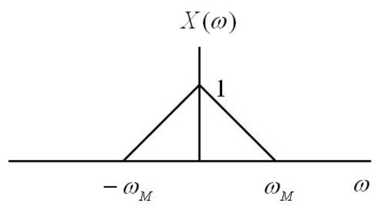
$$S(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin k\omega_s\Delta}{k\pi}\delta(\omega-k\omega_s)$$

بنابراین طیف $S(\omega)$ بصورت شکل۵-۳۸ خواهد بود.



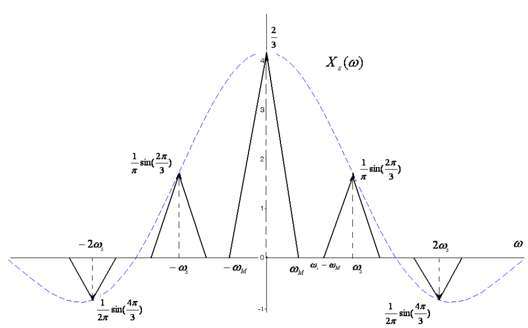
شکل ۵-۳۸ شکل طیف $S(\omega)$ مربوط به مثال ۵-۸

اگر فرض کنیم طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



شکل ۵-۳۹ شکل طیف $x(t)$ مربوط به مثال ۵-۸

در این‌صورت طیف سیگنال نمونه برداری شده $x_s(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



شکل ۵-۴۰ شکل طیف $x(t)$ مربوط به مثال ۵-۸

بنابراین شرط لازم بدست می‌آید.

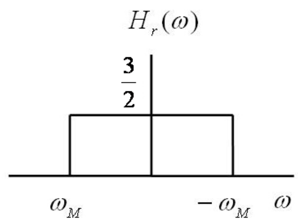
$$\omega_s - \omega_M \geq \omega_M$$

و یا

$$\omega_s \geq 2\omega_M \Rightarrow T_s \leq \frac{\pi}{\omega_M}$$

مثال (۵-۹): برای مثال (۵-۸) سیستمی جهت بازسازی $x(t)$ از روی نمونه‌های برداشته شده طراحی کنید.

حل: چنین سیستمی بسادگی یک فیلتر پایین‌گذر با بهره $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

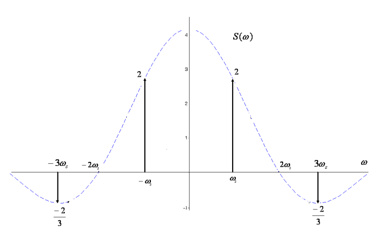


شکل ۵-۴۱ شکل طیف سیستم باز ساز مربوط به مثال ۵-۹

مثال (۵-۱۰): مثال (۵-۸) و (۵-۹) را به ازاء $\Delta = \frac{T_s}{4}$ تکرار کنید و فرض کنید سیگنال نمونه بردار به صورت زیر باشد.

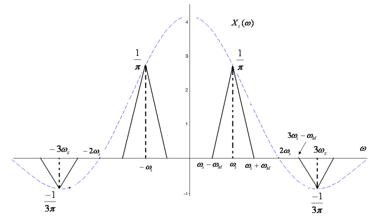
$s(t) = r(t) - 0.5$

حل: در این‌حالت همان‌گونه که مشاهده می‌شود مؤلفه DC و کلیه مولفه های زوج در سیگنال $s(t)$ وجود نخواهد داشت و در نتیجه طیف سیگنال $s(t)$ بصورت شکل۵-۴۲ خواهد بود.



شکل ۵-۴۲ شکل طیف $S(\omega)$ مربوط به مثال ۵-۱۰

طیف سیگنال نمونه برداری شده به صورت شکل۵-۴۳ خواهد بود.



شکل ۵-۴۳ شکل طیف $X_s(\omega)$ مربوط به مثال ۵-۱۰

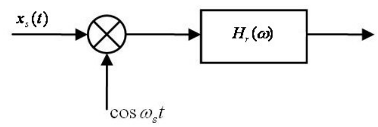
در این‌صورت جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز لازم است که

$$\omega_s + \omega_M \geq 3\omega_s - \omega_M \Rightarrow \omega_s \geq \omega_M$$

و یا

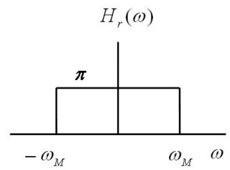
$$T_s \le \frac{2\pi}{\omega_M}$$

و اما جهت بازسازی سیگنال اصلی از روی نمونه‌هایش سیستم شکل۵-۴۴ پیشنهاد می‌شود.



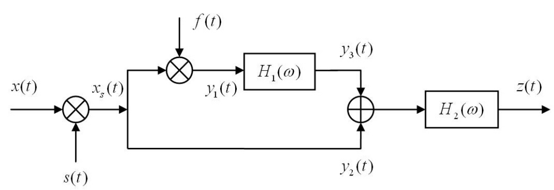
شکل۵-۴۴ سیستم بازسازی مربوط به مثال ۵-۱۰

که درآن



شکل۵-۴۵ تابع انتقال فیلتر سیستم باز ساز

مثال (۵-۱۱): یک سیگنال باند محدود با پهنای باند w را می‌توان بطور یکتا از روی نمونه‌های غیر یکنواخت نیز بازسازی کرد، مشروط بر اینکه تعداد نمونه‌ها $2w$ نمونه در ثانیه ویا بیشتر باشد.در این مساله یک شکل ساده ازانواع نمونه‌برداری غیر یکنواخت مورد بررسی قرار می‌گیرد. به شکل ۵-۴۶ توجه کنید.



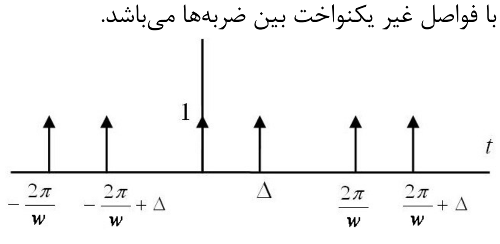
شکل۵-۴۶ سیستم نمونه بردار مورد بحث در مثال ۵-۱۱

برای شکل فوق فرض‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

۱- $x(t)$ یک سیگنال باند محدود است یعنی

$$X(\omega) = 0 \qquad |\omega| > w$$

۲- $s(t)$ یک قطار ضربه با فواصل غیر یکنواخت بین ضربه‌ها می‌باشد.



شکل۵-۴۷ سیگنال نمونه بردار با نمونه های غیر یکنواخت

۳- $f(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{w}$ می‌باشد که در نقاط $t=0$ و $t=\Delta$ مقـدار آن بصورت زیر است.

$$f(0)=a, f(\Delta)=b$$

۴- $H_1(\omega)$ یک سیستم ۹۰ درجه تغییر فاز دهنده می‌باشد.

$$H_1(\omega)=\begin{cases} j & \omega>0 \\ -j & \omega<0 \end{cases}$$

۵- $H_2(\omega)$ یک فیلتر پایین‌گذر است.

$$H_2(\omega)=\begin{cases} K & 0<\omega<w \\ K^* & -w<\omega<0 \\ 0 & |\omega|>\omega \end{cases}$$

که در آن K یک عدد ثابت مختلط است.

مطلوبست

الف) تبدیل فوریه $s(t)$

ب) تبدیل فوریه حاصلضرب $f(t)s(t)$

ج) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_1(t)$ در فاصله $0<\omega<w$

د) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_2(t)$ در فاصله $0<\omega<w$

هـ) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_3(t)$ در فاصله $0<\omega<w$

و) مقادیرپارامترهای حقیقی a و b ومقدار پارامتر مختلط K بصـورت تـابعی از Δ بگونـه‌ای کـه بـه ازاء هرسیگنال باند محدود $x(t)$ و $0<\Delta<\frac{\pi}{w}$ داشته باشیم.

$$z(t)=x(t)$$

حـــل: الـــف) بـــرای بدســـت آوردن تبـــدیل فوریـــه $s(t)$ ابتـــدا آن را بصـــورت زیـــر مـــی‌نویســـیم.

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\frac{2\pi}{w})+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\frac{2\pi}{w}-\Delta)$$

بنابراین $s(t)$ را می‌توان بصورت مجموع دو موج تصور کرد.

$$s(t)=g(t)+g(t-\Delta)$$

که در آن

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\frac{2\pi}{w})$$

تبدیل فوریه $g(t)$ را قبلاً بارها بدست آورده‌ایم.

$$G(\omega)=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{w}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-kw)=w\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-kw)$$

بنابراین تبدیل فوریه $s(t)$ برابر است با

$$S(\omega)=w(1+e^{-j\omega\Delta})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-kw)$$

و یا

$$S(\omega)=w\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+e^{-jkw\Delta})\delta(\omega-kw)$$

ب) تبدیل فوریه $l(t)=f(t)s(t)$ برابر است با

$$L(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)s(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\frac{2\pi}{w})+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\frac{2\pi}{w}-\Delta)]f(t)e^{-j\omega t}dt$$

بدلیل ضرب شدن $f(t)$ در تابع ضربه، فقط مقادیر $f(t)$ درلحظات $t=kT$ و $t=kT+\Delta$ مورد نیاز است (k عددی صحیح و $T=\frac{2\pi}{w}$).

$$L(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)e^{-j\omega kT}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT+\Delta)\delta(t-kT-\Delta)e^{-j\omega(kT+\Delta)}]dt$$

$$L(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)e^{-j\omega kT}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)dt+\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kt+\Delta)e^{-j\omega(kT+\Delta)}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT-\Delta)dt$$

بنابراین

$$L(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)e^{-j\omega kT}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT+\Delta)e^{-j\omega(kT+\Delta)}$$

اما چون $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{w}$ می‌باشد، داریم.

$$f(kT)=f(0)=a \qquad \text{و} \qquad f(kT+\Delta)=f(\Delta)=b$$

بنابراین

$$L(\omega)=a\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega kT}+be^{-j\omega\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega kT}$$

و یا

$$L(\omega)=(a+be^{-j\omega\Delta})\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega kT}$$

اما بسادگی می‌توان ثابت کرد که

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega kT}=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$

ابتدا با نوشتن تبدیل فوریه $m(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ داریم.

$$M(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-j\omega t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega kT}$$

اما قبلاً تبدیل فوریه قطار ضربه را بصورت زیر داشتیم.

$$M(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود و بدین ترتیب با فرض $w=\frac{2\pi}{T}$ داریم.

$$L(\omega)=(a+be^{-j\omega\Delta})w\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-kw)$$

و یا

$$L(\omega)=w\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a+be^{-jkw\Delta})\delta(\omega-kw)$$

ج)

$$y_1(t)=f(t)s(t)x(t)=l(t)x(t)$$

$$Y_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[(a+be^{-j\omega\Delta})w\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-kw)\right]*X(\omega)$$

$$=\frac{w}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a+be^{-jkw\Delta})X(\omega-kw)$$

بنابراین در فاصله

$$0<\omega<w$$

$$Y_1(\omega)=\frac{w}{2\pi}\left[(a+b)X(\omega)+(a+be^{-j\omega\Delta})X(\omega-w)\right]$$

د)

$$y_2(t)=s(t)x(t)$$

بنابراین

$$Y_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}w\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+e^{-jkw\Delta})\delta(\omega-kw)*X(\omega)$$

$$=\frac{w}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+e^{-jkw\Delta})X(\omega-kw)$$

و در فاصله

$$0<\omega<w$$

$$Y_2(\omega)=\frac{w}{2\pi}\left[2X(\omega)+(1+e^{-jw\Delta})X(\omega-w)\right]$$

هـ) طبق قضیه کانولوشن تبدیل فوریه $y_3(t)$ از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$Y_3(\omega)=H_1(\omega)Y_1(\omega)$$

در فاصله $0<\omega<w$

$$H_1(\omega)=j$$

$$Y_3(\omega) = jY_1(\omega)$$
$$= j\frac{w}{2\pi}\left[(a+b)X(\omega) + (a+be^{-jw\Delta})X(\omega - w)\right]$$

و) جهت اینکه خروجی همواره مساوی $x(t)$ باشد باید

$$Z(\omega) = H_2(\omega)\left[Y_2(\omega) + Y_3(\omega)\right] = X(\omega)$$

اکنون باید داشته باشیم (از مساوی قرار دادن دو طرف رابطه به ازاء $0 < \omega < w$)

$$X(\omega) = K\frac{w}{2\pi}\{\left[2 + j(a+b)\right]X(\omega)$$
$$+\left[(1+e^{-jw\Delta}) + j(a+be^{-jw\Delta})\right]X(\omega - w)\}$$

نتیجتاً داریم.

$$K\frac{w}{2\pi}[2 + j(a+b)] = 1$$
$$(1+e^{-jw\Delta}) + j(a+be^{jw\Delta}) = 0$$
$$1 + e^{-jw\Delta} + ja + jbe^{-jw\Delta} = 0$$

نتیجتاً داریم.

$$a = \sin w\Delta + \cot g(w\Delta)(1+\cos w\Delta)$$
$$K = \frac{2\pi/w}{2 + j(a+b)} \quad \text{و} \quad b = \frac{-(1+\cos w\Delta)}{\sin w\Delta}$$

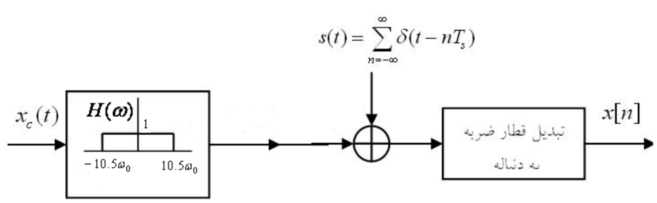
همان‌گونه که می‌بینیم در حالت خاص که $\Delta = \frac{\pi}{w}$ است مقادیر a و b برابر می‌شوند.

مثال (۵-۱۲): شکل زیر یک مدار مبدل سیگنال پیوسته به دنباله گسسته می‌باشد.

سیگنال ورودی متناوب با دوره تناوب 0.1 ثانیه می‌باشد. ضرایب سری فوریه آن عبارتند از

$$a_k = (\frac{1}{2})^{|k|} \qquad -\infty < k < \infty$$

فیلتر پایین‌گذر $H(\omega)$ دارای مشخصه نشان داده شده در شکل می‌باشد. دوره تناوب نمونه‌برداری $T_s = 2\times 10^{-3}$ ثانیه می‌باشد.



شکل ۵-۴۸ سیستم مورد بحث در مثال ۵-۱۲

الف) نشان دهید که $x[n]$ یک دنباله متناوب است و دوره تناوب آن را بیابید.

ب) ضرایب سری فوریه $x[n]$ را بیابید.

حل : الف) بسط $x(t)$ به سری فوریه بصورت زیر است.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ و } T = 0.1s$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{|k|} e^{jk\omega_0 t} \quad \text{و} \quad \omega_0 = 20\pi \frac{rad}{\sec}$$

طیف $X(\omega)$ بصورت زیر است.

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{|k|} \delta(\omega - k\omega_0)$$

بنابراین فقط تا ۱۰ ضربه از فیلتر عبور می‌نماید. پس

$$x_c(t) = \sum_{k=-10}^{10} (\frac{1}{2})^{|k|} e^{jk\omega_0 t}$$

و چون

$$x[n] = x_c[nT_s]$$

خواهیم داشت.

$$x[n] = \sum_{k=-10}^{10} (\frac{1}{2})^{|k|} e^{jk\omega_0 nT_s}$$

بنابراین

$$x[n] = \sum_{k=-10}^{10} (\frac{1}{2})^{|k|} e^{jk\, 0.04\, \pi n}$$

رابطه فوق در حقیقت مبین سری فوریه گسسته زمانی $x[n]$ می‌باشد. ازاینجا نتیجه مـی‌گیـریم $x[n]$ متناوب است و دوره تناوب آن از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{N} = 0.04\pi$$

بنابراین دوره تناوب $x[n]$ برابر است با

$$N = 50$$

ب) ضرایب سری فوریه در یک دوره تناوب عبارتند از

$$a_k = (\frac{1}{2})^{|k|} \quad -10 < k < 10$$

توجه شود که ضرائب سری فوریه در خارج فاصله مذکور برابر صفر هستند.

مثال (۵-۱۳): از یک سیگنال باند محدود $x_c(t)$ با سرعتی بیشتر از سرعت نایکوئیسـت نمونـه‌بـرداری شده است. فاصله نمونه‌ها T_s می‌باشد. نمونه‌ها پس از آن به دنباله تبدیل می‌شوند.

مطلوبست ارتباط انرژی سیگنال $x_c(t)$ و دنباله $x[n]$.

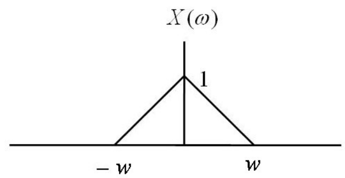
حل: انرژی دنباله $x[n]$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2$$

و انرژی سیگنال $x_c(t)$ بصورت زیر است.

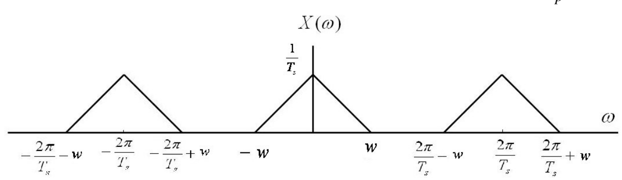
$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x_c(t) \right|^2 dt$$

فرض می‌کنیم طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



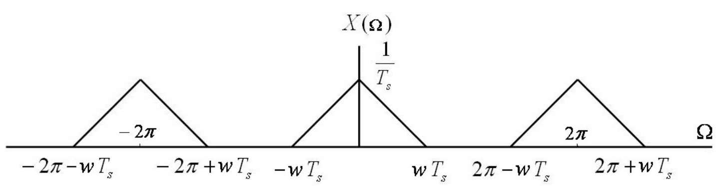
شکل ۵-۴۹ طیف سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال ۵-۱۳

در این‌صورت طیف $x_p(t)$ بصورت زیر است.



شکل ۵-۵۰ طیف سیگنال $x_p(t)$ مربوط به مثال ۵-۱۳

نتیجتاً طیف تبدیل فوریه گسسته زمان $x[n]$ بصورت زیر خواهد بود.



شکل ۵-۵۱ طیف سیگنال گسسته زمان متناظر با $x(t)$

اما طبق رابطه پارسوال در حوزه گسسته زمان داریم.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left| X(\Omega) \right| d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2$$

اما رابطه پارسوال در حوزه پیوسته زمان نیز بصورت زیر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x_c(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| X_c(\omega) \right| d\omega$$

با توجه به شکل‌ها می‌توان در یک دوره متناوب رابطه زیر را نوشت (با تغییر متغیرهای مستقل).

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} X_c(\frac{\Omega}{T_s})$$

بنابراین

$$E_d = \frac{1}{2\pi}\int_{-wT_s}^{wT_s}\left|X(\Omega)\right|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi T_s^2}\int_{-wT_s}^{wT_s}\left|X_c(\frac{\Omega}{T_s})\right|^2 d\Omega$$

و یا تغییر متغیر بصورت $u = \frac{\Omega}{T_s}$

$$E_d = \frac{1}{2\pi T_s}\int_{-w}^{w}\left|X_c(u)\right|^2 du$$

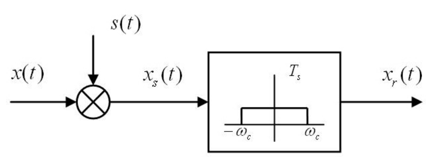
و چون $X_c(\omega)$ باند محدود است.

$$= \frac{1}{2\pi T_s}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_c(\omega)\right|^2 d\omega$$

بنابراین

$$E_d = \frac{1}{T_s}E_c$$

مثال (۵-۱۴): شکل زیر یک سیستم نمونه‌بردار که بوسیله یک فیلتر بازساز دنبال شده است را نشان می‌دهد.



شکل۵-۵۲ سیستم مربوط به مثال ۵-۱۴

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s)$$

با توجه به نظریه نمونه‌برداری می‌دانیم که اگر $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ از دو برابر بالاترین مولفه فرکانسی موجود در $x(t)$ بیشتر باشد، می‌توان بطور یکتا $x(t)$ را از روی نمونه‌هایش بازسازی کرد. در غیر این صورت، تداخل ایجاد می‌شود و سیگنال بازسازی شده $x_r(t)$ مساوی $x(t)$ نخواهد بود. اما در لحظات نمونه‌برداری مقادیر $x(t)$ و $x_r(t)$ مساوی هستند مشروط بر این که $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ باشد. یعنی

$$x_r(kT_s) = x(kT_s) \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

دراین مساله فرض کنید $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ است و رابطه فوق را ثابت کنید.

حل:

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

داریم

$$= x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

نتیجتاً برای $x_r(t)$ داریم.

$$x_r(t) = (\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)h(t-nT_s)$$

اما می‌دانیم (با توجه به شکل پاسخ فرکانسی)

$$h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} Sinc \ \frac{\omega_c t}{\pi}$$

بنابراین

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)T_s \frac{\omega_c}{\pi} Sinc \ [\frac{\omega_c (t-nT_s)}{\pi}]$$

و در نتیجه

$$x_r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) Sinc[\frac{\omega_c}{\pi}T_s(k-n)]T_s\frac{\omega_c}{\pi}$$

از طرفی $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ پس

$$x_r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) Sinc \ (k-n)$$

و با توجه به خواص تابع sinc می‌توان رابطه زیر را نوشت.

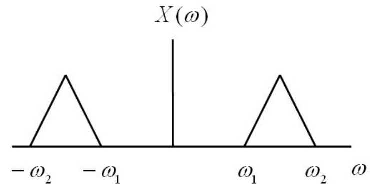
$$Sinc(k-n) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

که در آن k و n اعداد صحیح هستند. پس

$$x_r(kT_s) = x(kT_s)$$

مثال (۵-۱۵): دراین مساله می‌خواهیم یک حالت ساده مربوط به نمونه‌برداری ازسیگنال‌های میان‌گذر[1] را مورد بررسی قرار دهیم. این سیگنال دارای باندی محدود است که انرژی آن در فرکانس‌های میانی متمرکز شده است (مانند شکل ۵-۵۳).

[1]Band-pass

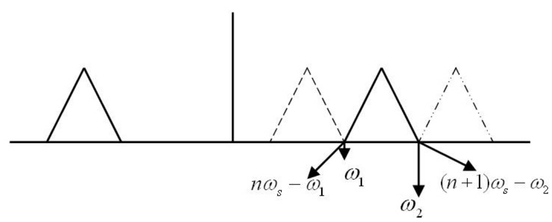


شکل۵-۵۳ سیگنال میانگذر مربوط به مثال ۵-۱۵

طبق نظریه نمونه‌برداری حداقل فرکانس نمونه‌برداری باید $\omega_s = 2\omega_2$ باشد تا بتوان بطور موفقیت‌آمیز وبه کمک یک فیلتر میان‌گذر، سیگنال را بازسازی کرد. اما در این مساله می‌خواهیم ثابت کنیم که می‌توان با سرعت‌های کمتر نیز از سیگنال میان‌گذر بصورت موفقیت‌آمیز نمونه‌برداری کرد.

فرض کنید $\omega_2 - \omega_1 = w$ و $\omega_1 = 4w$ نتیجتاً $\omega_2 = 5w$ می‌گردد. اکنون فرکانس نمونه‌برداری حداقل را جهت امکان بازسازی سیگنال به کمک یک فیلتر میان‌گذر بدست آورید.

حل: چون قرار است سیگنال به کمک فیلتر میان‌گذر بازسازی گردد می‌توان ω_s را بگونه‌ای انتخاب کرد که تمام انتقال‌های سیگنال تا انتقال nام در داخل محدوده $|\omega| < \omega_1$ قرار گیرند و انتقال (n+1)ام در محدوده $|\omega| < \omega_2$ قرار گیرند. در این صورت به کمک یک فیلتر میان‌گذر و بدون هیچ تداخلی می‌توان سیگنال را بازسازی کرد.



شکل ۵-۵۴ نمونه برداری میانگذر

بنابراین لازم است.

$$n\,\omega_s - \omega_1 \le \omega_1$$
$$(n+1)\,\omega_s - \omega_2 \ge \omega_2$$

در حالت کلی حل همزمان دو نامساوی فوق ساده نمی‌باشد، اما با فرضهایی که انجام داده‌ایم ساده است (حالت تساوی را در نظر می‌گیریم).

$$n\,\omega_s = 2\,\omega_1$$
$$(n+1)\,\omega_s = 2\,\omega_2$$

بنابراین

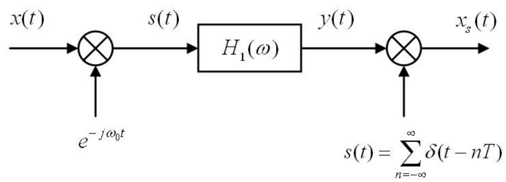
$$\omega_s = 2\,w$$

ولی اگر می‌خواستیم از نظریه نمونه‌برداری استفاده کنیم به پهنای باند حداقل پنج برابر نیاز داشتیم.

$$\omega_s = 2\,\omega_2 = 10\,w$$

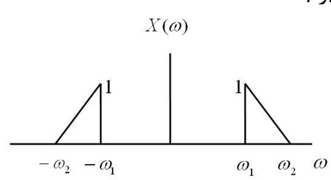
مثال (۵-۱۶): در مثال (۵-۱۵) یک روش جهت نمونه‌برداری از سیگنال‌های میان‌گذر مورد بررسی قرار گرفت.

اکنون می‌خواهیم با روش دیگری در این مثال آشنا شویم. در این روش ابتدا سیگنال میان‌گذر را در یک تابع نمایی مختلط بصورت $e^{-j\omega_0 t}$ ضرب کرده و پس از عبور دادن از فیلتر پایین‌گذر $H_1(\omega)$ از آن نمونه‌برداری می‌کنیم. مراحل گفته شده در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



شکل ۵- ۵۵سیستم نمونه بردار میانگذر

فرض کنید طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



شکل ۵-۵۶ طیف سیگنال میانگذر

اگر $\omega_0=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ و اگر فرکانس قطع فیلتر پایین‌گذر $H_1(\omega)$، $\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)$ باشد، مطلوبست

الف) رسم طیف $y(t)$.

ب) تعیین ماکزیمم دوره تناوب نمونه‌برداری T.

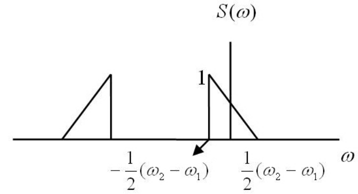
ج) رسم طیف $x(t)$.

د) سیستمی‌جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$.

حل: الف) طبق قضیه مدولاسیون می‌توان طیف $s(t)$ را بدست آورد.

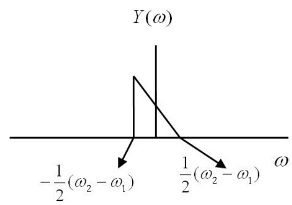
$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*2\pi\delta(\omega+\omega_0)=X(\omega+\omega_0)$$

که شکل آن به این صورت است.



شکل ۵-۵۷ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال به سمت چپ

در نتیجه خروجی فیلتر پایین‌گذر فقط شامل آن قسمت از طیف $S(\omega)$ باشد که حول مبدأ قرار دارد.



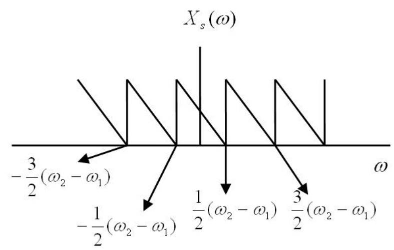
شکل ۵-۵۸ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال و عبور از فیلتر پائین گذر

ب) با توجه به اینکه $y(t)$ یک سیگنال پایین‌گذر است پس طبق نظریه نمونه‌برداری باید

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2(\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)) = \omega_2 - \omega_1$$

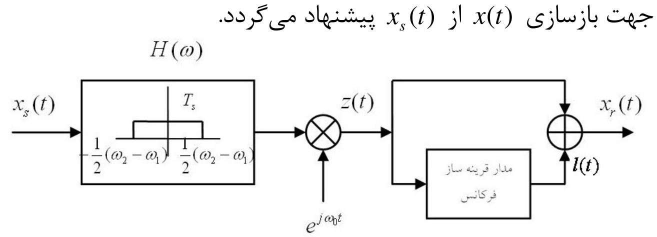
$$T_s \leq \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

ج) با فرض اینکه $T_s = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$ باشد طیف $x_s(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



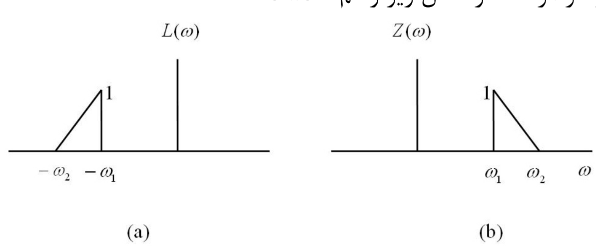
شکل ۵-۵۹ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال و عبور از فیلتر پائین گذر و نمونه برداری

د) سیستم زیر جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$ پیشنهاد می‌گردد.



شکل ۵-۶۰ سیستمی زیر جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$

طیف سیگنال‌ها در هر مرحله در شکل زیر رسم شده‌اند.

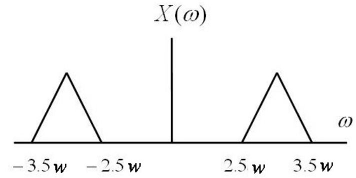


شکل ۵-۶۱ نمایش طیف های a) $L(\omega)$ و b) $Z(\omega)$

نتیجتاً طیف $x_r(t)$ مشابه طیف $x(t)$ خواهد شد.

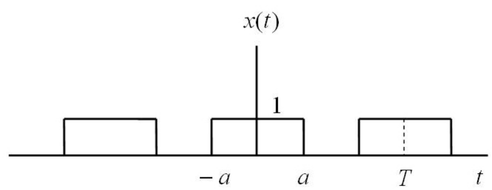
مسائل فصل پنجم

۵-۱ حداقل فرکانس نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز از سیگنال میان‌گذر $x(t)$ را بدست آورید. توجه کنید که بعد از نمونه‌برداری باید بتوان $x(t)$ را با عبور نمونه‌هایش ازیک فیلتر میان‌گذر بازسازی کرد.



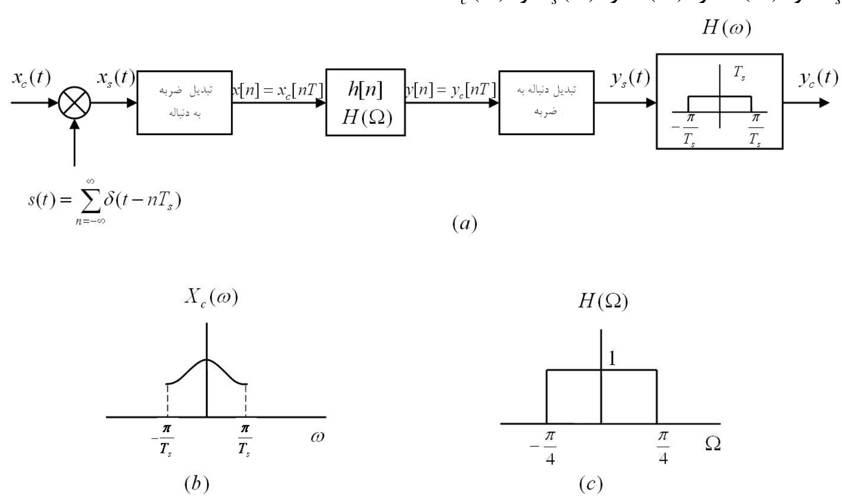
شکل ۵-۶۲ مربوط به مسئله ۵-۱

۵-۲ حداقل فرکانس نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز از سیگنال $x(t)$ چیست اگر $x(t)$ در حوزه زمان بصورت زیر باشد.



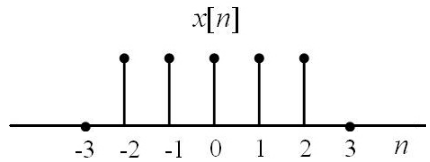
شکل ۵-۶۳ مربوط به مسئله ۵-۲

۵-۳ شکل زیریک سیستم جهت پردازش گسسته زمانی روی سیگنال‌های پیوسته زمانی رانشان می‌دهد. اگر طیف $X_c(\omega)$ و $H(\Omega)$ دریک دوره تناوب بصورت زیرباشد. مطلوب است رسم طیف‌های $X_s(\omega)$ و $X(\Omega)$ و $Y(\Omega)$ و $Y_s(\omega)$ و $Y_c(\omega)$.



شکل ۵-۶۴ مربوط به مسئله ۵-۳

۵-۴ دنباله $x[n]$ بصورت زیر مفروض است.



شکل ۵-۶۵ مربوط به مسئله ۵-۴

الف) تبدیل فوریه این دنباله را بیابید.

ب) از این دنباله در حوزه فرکانس نمونه‌برداری می‌گردد. حداقل فاصله نمونه‌ها جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز چقدر باید باشد.

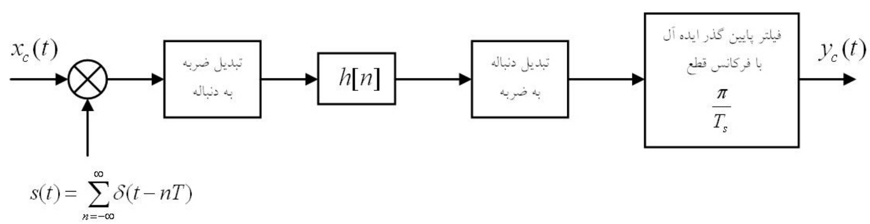
۵-۵ در سیستم شکل زیر $h[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI می‌باشد. این سیستم LTI توسط معادله تفاضلی زیر توصیف می‌شود.

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

اگر ورودی یک سیگنال باند محدود باشد بقسمی که

$$X_c(\omega) = 0 \quad |\omega| > \frac{\pi}{T_s}$$

پاسخ ضربه کلی سیستم که نسبت $\frac{Y_c(\omega)}{X_c(\omega)}$ می‌باشد را بیابید.

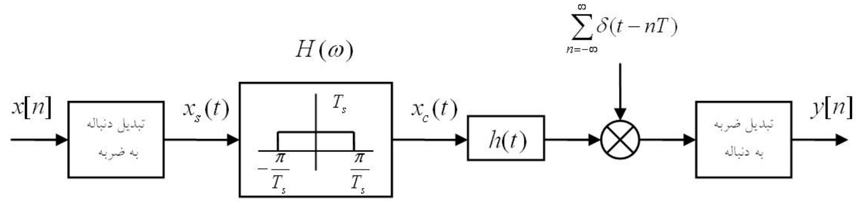


شکل ۵-۶۶ مربوط به مسئله ۵-۵

۵-۶ سیستم شکل زیر نوعی سیستم جهت پردازش پیوسته زمانی روی دنباله‌های گسسته زمانی را نشان می‌دهد. در این سیستم $h(t)$ یک سیستم LTI می‌باشد که توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌گردد.

$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4\frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x(t)$$

مطلوبست پاسخ ضربه گسسته زمانی معادل.



شکل ۵-۶۷ مربوط به مسئله ۵-۶

۵-۷ یک سیگنال پیوسته زمان بصورت زیر را در نظر بگیرید.

$$x_c(t) = s_c(t) - as_c(t - T_D)$$

و فرض کنید تبدیل فوریه $X_c(\omega)$ محدود به $\frac{\pi}{T_s}$ باشد. اگر $x_c(t)$ بوسیله یک قطار ضربه با دوره تناوب T_s نمونه‌برداری شود. بقسمی که

$$x[n] = x_c(nT)$$

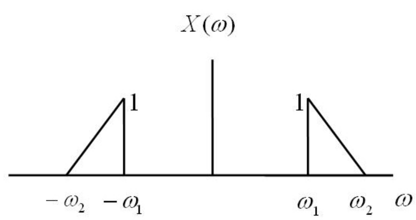
مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$ یک سیستم گسسته زمان LTI بگونه‌ای که

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]h[n-k]$$

که در آن $s[n] = s_c(nT)$ است و $T_D = T_s$ است.

۵-۸ مسئله ۵-۷ را به ازاء $T_D = \frac{T_s}{2}$ حل کنید. آیا پاسخ تفاوتی می‌کند؟

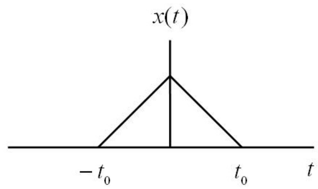
۵-۹ طیف یک سیگنال میان‌گذر مفروض $x(t)$ بصورت زیراست. مطلوب است رسم طیف دنباله $x[n] = x(nT_s)$ که در آن $T_s = \frac{\pi}{\omega_2}$.



شکل ۵-۶۸ مربوط به مسئله ۵-۹

۵-۱۰ مساله ۵-۹ را به ازاء $T_s = \frac{2\pi}{\omega_2}$ و $T_s = \frac{\pi}{2\omega_2}$ حل کرده و تفاوت هر یک را با نتیجه مساله ۵-۹ بیان کنید.

۵-۱۱ سیگنال دوره محدود $x(t)$ بصورت زیر مفروض است



شکل ۵-۶۹ مربوط به مسئله ۵-۱۱

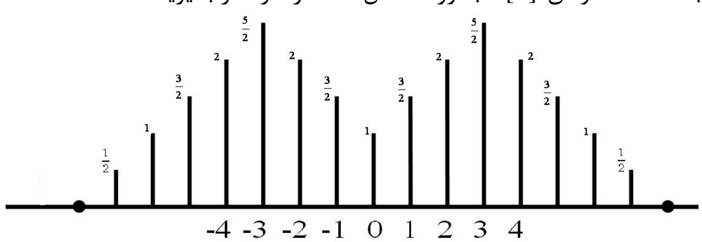
از این سیگنال در حوزه فرکانس نمونه‌برداری بعمل می‌آید و سپس بـه کمـک یـک پنجـره پـایین‌گـذر زمانی Low time window دوباره سیگنال اصلی بازسازی می‌گـردد. مطلـوب اسـت رسـم سیسـتم نمونه‌برداری و نمایش طیف‌هایی که در مراحل مختلـف بوجـود مـی‌آینـد (فـرض کنیـد نمونـه‌بـرداری موفقیت‌آمیز باشد).

۵-۱۲ در مساله ۵-۱۱ حداقل فاصله ضربه‌های فرکانسی جهت نمونه‌برداری موفقیـت‌آمیـز چقـدر بایـد باشد؟

۵-۱۳ از سیگنال $x(t) = Sinct$ در حوزه زمان نمونه‌برداری بعمل می‌آید و نمونه‌ها توسـط یـک مـدار ZOH بازسازی می‌گردد. مطلوب است رسم طیف سیگنال‌های ایجاد شده در هر مرحله.

۵-۱۴ اگر نمونه‌های سیگنال در مساله ۵-۱۳ از یک مدار بازسازی خطی عبور داده شوند. مطلوب است رسم طیف خروجی مدار بازساز خطی.

۵-۱۵یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ بصورت شکل۵-۷۰ را در نظر بگیرید.



شکل ۵-۷۰ مربوط به مسئله ۵-۱۵

از این دنباله با دوره تناوب ۲ نمونه‌برداری بعمل می‌آید بگونه‌ای که

$$x_s[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ 0 & \end{cases}$$

مطلوب است رسم $x_s[n]$ و طیف آن .

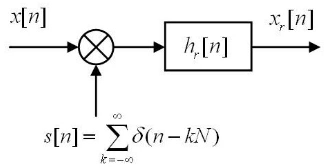
۵-۱۶ یک دنباله گسسته زمان بوسیله سیستم شکل ۵-۷۱ نمونه‌برداری می‌گردد و سپس بوسیله یـک مداربازساز $h_r[n]$ بازسازی می‌شود.

الف) حداقل فرکانس نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز را بدست آورید.

ب) نشان دهید که بدون توجه به فرکانس نمونه‌برداری داریم.

$$x_r[mN] = x[mN]$$

که درآن m اعداد صحیح مثبت و منفی می‌باشد.

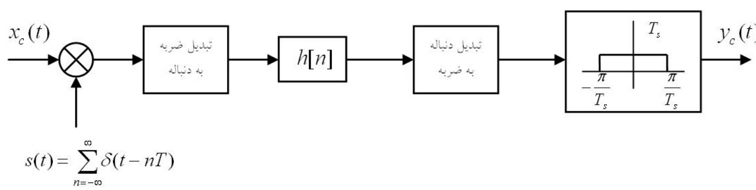


شکل۵-۷۱ سیستم نمونه بردار مربوط به مسئله ۵-۱۶

۵-۱۷ معادل گسسته زمانی یک سیستم پیوسته زمان با پاسخ ضربه بصورت زیر را بیابید (τ و A اعداد ثابت‌اند).

$$h_r(t) = A\tau \sin c(\frac{\omega}{2\pi}\tau)$$

راهنمایی:معادل گسسته زمانی یک سیستم پیوسته سیستمی است که اگر در سیستم شکل زیر قرارداده شود سیستم کلی دارای پاسخ ضربه ای بصورت $h(t)$ گردد.



شکل ۵-۷۲ مربوط به مثال ۵-۱۷

۵-۱۸ حداقل فرکانس نمونه‌برداری از سیگنالی بصورت زیر را بیابید.

$$x(t) = A\,\tau Sinc^{4}(\frac{\omega}{2\pi}\tau)$$

۵-۱۹: فرکانس مجازی ناشی از نمونه‌برداری ناموفق از سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \cos(10^3\pi t)$$

الف) اگر فرکانس نمونه‌برداری $\omega_s = 10\pi$ باشد.

ب) اگر فرکانس نمونه‌برداری $\omega_s = 100\pi$ باشد.

ج) اگر فرکانس نمونه‌برداری $\omega_s = 1000\pi$ باشد.

د) اگر فرکانس نمونه‌برداری $\omega_s = 1999\pi$ باشد.

۵-۲۰ : یک دیسک که روی آن چهار گلبرگ نقاشی شده‌اند را در نظر بگیرید. این دیسک با سرعت ۱۵ دور بر ثانیه می‌چرخد. از یک نوار باریک این دیسک قابل مشاهده می‌باشد.

بدین ترتیب فرکانس نوسان علامت مشاهده شده از نوار باریک ۶۰ هرتز می‌باشد. $\upsilon(t)$ موقعیت علامت مشاهده شده می‌باشد. فرض می‌کنیم $\upsilon(t)$ بصورت زیر باشد.

$$\upsilon(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \omega_0 = 120\,\pi$$

چشم بدلیل محدودیت‌های فیزیکی نمی‌تواند نوسانات ۶۰ هرتز را مشاهده نماید. می‌توان این پدیـده را با مدل کردن چشم بصورت یک فیلتر پایین‌گذر ایـده‌آل در نظـر گرفـت. فرکـانس قطـع ایـن فیلتـر را می‌توان ۲۰ هرتز در نظر گرفت.

عمل نمونه‌برداری از $v(t)$ را می‌توان به کمک یک چراغ چشمک‌زن مدلسازی کرد. بنـابراین اگـر $s(t)$ بیانگر چراغ چشمک زن باشد داریم

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

که درآن $\frac{1}{T_s}$ فرکانس چشمک‌های چراغ بر حسب هرتز است.

سیگنال نمونه‌برداری شده اکنون حاصلضرب $r(t) = v(t)s(t)$ می‌باشد.

مطلوبست

الف) تبدیل فوریه $v(t)$.

ب) تبدیل فوریه $s(t)$. اثر T_s را در آن مشخص کنید.

ج) طبق نظریه نمونه‌برداری، ماکزیمم مقدار T_s را جهت نمونـه‌بـرداری موفقیـت‌آمیـز از $v(t)$ تعیـین کنید. توجه کنید که بعد از نمونه‌برداری باید بتوان $v(t)$ را از روی نمونـه‌هـای آن توسـط یـک فیلتـر پایین‌گذر بازسازی کرد. طیف $r(t)$ را هنگامی که T_s کمی کمتر از مقدار تعیـین شـده در فـوق باشـد رسم کنید.

د) اگر $\omega_s = \omega_0 + 20\pi$ باشد، فرکانس مجازی مشاهده شده چیست.

هـ) قسمت (د) را برای $\omega_s = \omega_0 - 2\pi$ تکرار کنید.