فصل ششم

تبدیل لاپلاس

مقدمه

در فصول قبلی توانائی فوق العاده تبدیل فوریه در تجزیه و تحلیل سیستم‌های خطی را مشاهده کـردیم. این توانایی ازآنجا ناشی می‌شود که بسیاری از سیگنال‌ها را مـی‌تـوان بصـورت ترکیـب خطـی از توابـع نمایی موهومی نوشت و چون توابع ویژه سیستم‌ها نیز بصورت نمایی موهومی بودند، بسادگی توانسـتیم پاسخ به هر ورودی را بدست آوریم. اما برخی سیگنالها را نمی تـوان بـر حسـب توابـع نمـائی موهـومی نوشت. در این فصل با معرفی تبدیل لاپلاس، که حالت کلی تر تبدیل فوریه اسـت، مـی خـواهیم بسـط جدید سیگنال دلخواه را بر حسب توابع ویژه سیستم های LTI (توابع نمائی مختلط) ارائه کنیم.

۶-۱ تبدیل لاپلاس

برای یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$، دیدیم که پاسخ $y(t)$ سیستم، بـه ورودی نمـایی مخـتلط e^{st}، چنین می‌شد.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau = H(s) e^{st} \qquad (۶-۱)$$

که در آن

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau \qquad (۶-۲)$$

اگر $s = j\omega$ موهومی محض بود، انتگرال معادله (۶-۲) همان تبـدیل فوریـه $h(t)$ بـود. امـا در حالـت عمومی که 's' عدد مختلط است انتگرال (۶-۲) را تبدیل لاپلاس $h(t)$ مـی‌نامنـد، کـه ماننـد تبـدیل فوریه نقش مهمی در تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌های LTI دارد.

در حالت کلی تبدیل لاپلاس سیگنال دلخواه $x(t)$ چنین تعریف می‌شود.

$$X(s) \underset{\equiv}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \qquad (۶-۳)$$

که $s = \sigma + j\omega$ درحالت کلی یک عدد مختلط است. انتگرال (۶-۳) همانگونه کـه مشـاهده مـی‌شـود تابعی از 's' است. گاهی اپراتور 'ℓ' را در مورد تبدیل لاپلاس بکار می‌برند و چنین نمایش می‌دهند.

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s)$$

هنگامی که $s = j\omega$ باشد معادله (۶-۳) به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (۶-۴)$$

این همان تبدیل فوریه $x(t)$ است که بصورت $X(\omega)$ قـبلا نشـان داده شـد. بنـابراین تبـدیل لاپـلاس $x(t)$ وقتی که $s = j\omega$ باشد مساوی تبدیل فوریه $x(t)$ خواهد بود.

$$X(s)\Big|_{s = j\omega} = \Im\{x(t)\} = X(\omega) \qquad (۶-۵)$$

ارتباط جالب دیگری میان تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه وجود دارد کـه اگـر معادلـه (۶-۳) را بصـورت معادله (۶-۶) بنویسیم، می‌توان این ارتباط را پیدا کرد.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)} dt \qquad (۶-۶)$$

یا

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt \qquad (۶-۷)$$

بنابراین می‌توان $X(s)$ را تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ دانست. این حقیقت حاوی نتایج ارزنده ای است. از جمله اینکه تبدیل لاپلاس حالت عمومی تر تبدیل فوریه است. بدین مفهوم که می توان سیگنالهائی را یافت که تبدیل فوریه ندارند اما تبدیل لاپلاس دارند. برای درک بهتر به مثال زیرتوجه کنید.

مثال (۶-۱): سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه این سیگنال وقتی $a > 0$ است بسادگی قابل محاسبه است.

$$X(\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega + a} \qquad a > 0 \qquad (۶-۸)$$

و از معادله (۶-۳) داریم.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}u(t)dt \qquad (۶-۹)$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt \qquad (۶-۱۰)$$

با قرار دادن $s = \sigma + j\omega$ داریم.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}dt \qquad (۶-۱۱)$$

با مقایسه معادله (۶-۸) با معادله (۶-۱۱) پی می‌بریم که معادله (۶-۹) تبدیل فوریه $e^{-(\sigma+a)t}u(t)$ می‌باشد. بنابراین داریم.

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega} \qquad (\sigma + a) > 0 \qquad (۶-۱۲)$$

یا بطور معادل

$$X(s) = \frac{1}{s + a} \qquad \Re e\{s\} > -a \qquad (۶-۱۳)$$

به عنوان مثال برای $a = 0$ ، $x(t)$ تابع پله واحد خواهد بود که تبدیل لاپلاس آن $X(s) = \frac{1}{s}$ است، البته با شرط $\Re e\{s\} > 0$.

باید توجه کرد که تبدیل لاپلاس ممکن است برای بعضی از مقادیر σ همگرا باشد و برای برخی دیگر واگرا. درمثال (۶-۱) تبدیل لاپلاس برای $\Re e\{s\} = \sigma > -a$ همگرا است، و اگر a مثبت باشد در اینصورت $X(s)$ بازاء برخی مقادیر منفی نیز همگرا است. بنابراین تبدیل لاپلاس در $\sigma = 0$ نیز همگرا خواهد شد. در اینصورت تبدیل لاپلاس به تبدیل فوریه تبدیل می‌شود.

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \qquad (۶-۱۴)$$

اما اگر a منفی یا صفر باشد در این صورت اگر چه تبدیل لاپلاس وجود دارد ولی تبدیل فوریه وجود ندارد. چون ناحیه همگرائی شامل $\sigma = 0$ نخواهد شد.

مثال (۶-۲): درمقایسه با مثال قبلی اکنون فرض کنید.

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \tag{۶-۱۵}$$

بنابراین

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}u(-t)dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt \tag{۶-۱۶}$$

و یا

$$X(s) = \frac{1}{s+a}\left(1 - e^{-(s+a)t}\Big|_{t\to -\infty}\right) \tag{۶-۱۷}$$

در این مثال برای همگرا شدن تبدیل لاپلاس باید $\Re e\{s+a\} < 0$ شود، یا

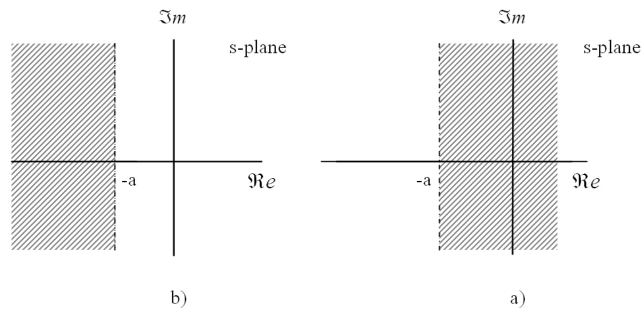
$$\Re e\{s\} < -a \tag{۶-۱۸}$$

بنابراین

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+a} \qquad \Re e\{s\} < -a \tag{۶-۱۹}$$

عبارت جبری تبدیل لاپلاس در هر دو مثال (۶-۱) و (۶-۲) یکی است. اما مقادیری که s می‌تواند اختیار کند تا آن دوعبارت صادق باشند متفاوت است. در مثال اول محدوده تغییرات s توسط $\Re e\{s\} > -a$ تعیین می‌شود و در مثال دوم محدوده تغییرات s توسط $\Re e\{s\} < -a$ تعیین می‌شود.

بنابراین برای یکتا بودن تبدیل لاپلاس سیگنال‌ها، باید علاوه بر عبارت جبری تبدیل لاپلاس، محدوده همگرا بودن را نیز مشخص کرد. به این محدوده ناحیه همگرایی[1] می‌گویند و باعلامت مختصر ROC نمایش داده می‌شود. بنابراین ROC شامل مقادیری از $s = \sigma + j\omega$ است که برای آنها تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ همگرا است. بدین ترتیب تبدیل های لاپلاس (۶-۱۳) و (۶-۱۹) هریک نمایانگر یک سیگنال کاملاً مشخص و مجزا می‌باشند، چون اگر چه عبارت‌های جبری یکی می‌باشند ولی ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس‌ها متفاوت است. روش مناسب نمایش ROC در شکل (۶-۱) نمایش داده شده است.



شکل (۶-۱): a) ROC مربوط به مثال (۶-۱) b) ROC مربوط به مثال (۶-۲)

[1] Region of Convergence

متغیر 's' یک عدد مختلط است و در شکل (۶-۱)، صفحه مختلط یا صفحه s [1] نمایش داده شده است. در صفحه مختلط، $\Re e\{s\}$ روی محور افقی و $\Im m\{s\}$ روی محور عمودی اختیار می‌شود. گاهی به این دو محور ،محور σ و محور $j\omega$ نیزگفته می‌شود. ناحیه هاشور خورده در شکل (**a**-۱-۶) نمایانگر مجموعه نقاطی در صفحه s است که در آنها عبارت (۶-۱۳) همگرا است. پس در واقع نمایانگر ناحیه همگرایی مثال (۶-۱) است و ناحیه هاشور خورده در شکل (**b**-۱-۶) ناحیه همگرایی مثال (۶-۲) را نمایش می‌دهد.

مثال (۶-۳):فرض کنید.

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \tag{۲۰-۶}$$

عبارت جبری تبدیل لاپلاس چنین است.

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)]e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}e^{-st}u(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}e^{-st}u(t)dt \end{aligned} \tag{۲۱-۶}$$

اگر در عبارت اول $s > -1$ و در عبارت دوم $s > -2$ در نظر گرفته شود به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \tag{۲۲-۶}$$

برای تعیین ROC چون $x(t)$ مجموع دو تابع نمایی حقیقی است و چون همانطور که نشان خواهیم داد اپراتور تبدیل لاپلاس خطی است، بنابراین $X(s)$ مجموع تبدیل لاپلاس هریک از توابع نمایی است. عبارت اول، تبدیل لاپلاس $e^{-t}u(t)$ و عبارت دوم تبدیل لاپلاس $e^{-2t}u(t)$ است. از مثال (۶-۱) می‌توان ROC را برای هر یک از این توابع بدست آورد.

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \qquad \Re e\{s\} > -1 \tag{۲۳-۶}$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \qquad \Re e\{s\} > -2 \tag{۲۴-۶}$$

بنابراین مجموع مقادیری از $\Re e\{s\}$ که بازاء آنها تبدیل لاپلاس نمایی همگراست عبارت است از فصل مشترک نواحی همگرایی فوق الذکر و یا

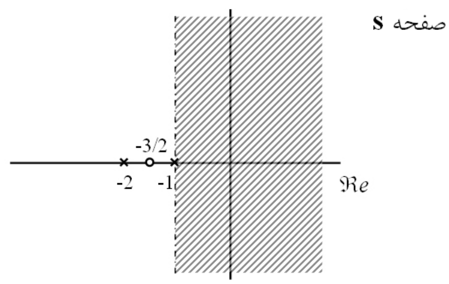
$$x(t) \xrightarrow{\ell} \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \qquad \Re e\{s\} > -1 \tag{۲۵-۶}$$

هنگامی که بتوان $X(s)$ را بصورت $x(t) = \frac{N(s)}{D(s)}$ نوشت، به آن کسری[2] گفته می‌شود. $X(s)$ همواره کسری است اگر $x(t)$ ترکیب خطی از توابع نمایی حقیقی باشد. در قسمت‌های بعدی خواهیم دید سیستم‌های LTI که بوسیله معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت مشخص می‌شوند نیز دارای تابع

---

[1] S-Plane
[2] Ratinal

تبدیل $H(s)$ بصورت کسری هستند. ریشه‌های $N(s)$ را صفرها[1] و ریشـه‌هـای $D(s)$ را قطـب‌هـای[2] تبدیل می‌نامند و معمولاً در رسم ROC این نقاط نیزمشخص می‌شوند. مثلاً بـرای مثـال (۶-۳) رسـم ROC بصورت شکل (۶-۲) است.



شکل (۶-۲): نمودار صفر و قطب و ROC برای مثال (۶-۳)

علامت 'x' جهت نمایش قطب و علامت 'o' جهت نمایش صفر بکار گرفته شده‌اند.

مثال (۶-۴): فرض کنید.

$$x(t)=\delta(t)-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t) \qquad (۶-۲۷)$$

تبدیل لاپلاس $\delta(t)$ مساوی واحد است و تبدیل لاپلاس سایر سیگنال‌ها بسادگی بدست می‌آید. بنابراین

$$X(s)=1-\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-2} \qquad \Re e\{s\}>2 \qquad (۶-۲۸)$$

ناحیه همگرایی از فصل مشترک تک تک نواحی همگرایی بدست می‌آید. توجه شود که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس تابع ضربه، تمام صفحه s می‌باشد.

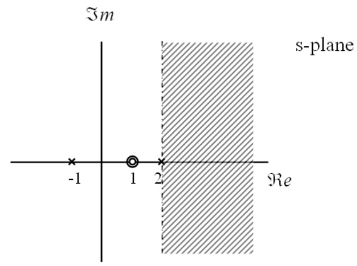
رابطه(۶-۲۸)را می‌توان بدین‌صورت نیز نوشت.

$$X(s)=\frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \qquad \Re e\{s\}>2 \qquad (۶-۲۹)$$

رسم صفر و قطب و ROC برای $X(s)$ بصورت شکل (۶-۳) می‌باشد.

همانطور که گفتیم تبدیل لاپلاس بازاء $s=j\omega$ همان تبدیل فوریه است. هنگـامی کـه ROC شـامل محور $j\omega$ نشود ($\Re e\{s\}=0$ جزو ناحیه همگرایی نباشد) در اینصورت تبدیل فوریه سـیگنال وجـود ندارد. نکته دیگری که به آن باید اشاره کرد در مورد صفرها و قطب‌های مرتبه بالاتر است. همانگونه کـه از شکل (۶-۳) پیداست دو صفر در یک نقطه واقع می‌شود که به آنها صفر مرتبه دوم می‌گویند.

[1] Zeroes
[2] Poles



شکل (۶-۳): نمودار صفر – قطب و ناحیه همگرائی رابطه (۶-۲۹)

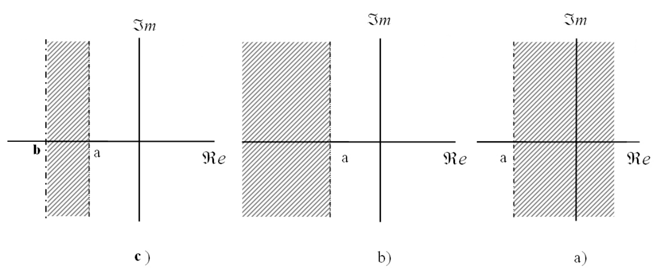
در این مثال دو قطب در $s=-1$ و $s=2$ داریم ولـی ROC در سـمت راسـت بزرگتـرین قطـب قـرار گرفته است. برای تبدیل لاپلاس‌های کسری ارتباط نزدیکی میان محل قطب‌هـا و ROC وجـود دارد و بطوری که بعداً خواهیم دید می‌توان فقط با مشاهده مکان قطب‌ها ROC را مشخص کرد.

۶-۲ خواص ناحیه همگرایی برای تبدیلات لاپلاس

در قسمت قبل دیدیم که تعریف کامل تبدیل لاپلاس، نه تنها شامل عبارت جبری است بلکه احتیاج بـه مشخص کردن ناحیه همگرایی نیز دارد. ناحیه همگرائی دارای خواصی است که با شناخت ایـن خـواص می‌توان ناحیه همگرایی را فقط با دانستن عبارت جبـری $X(s)$ و دانسـتن اطلاعـات انـدکی در مـورد شکل $x(t)$ در حوزه زمان بدست آورد. هم اکنون این خواص را مورد بررسی قرار می دهیم.

خاصیت ۱: *ناحیه همگرایی $X(s)$ شامل قطعات موازی با محور $j\omega$ در صفحه s است.*

از آنجا به صحت این خاصیت پی بـرده مـی‌شـود کـه ناحیـه همگرایـی $X(s)$ شـامل آن مقـادیری از $s=\sigma+j\omega$ است که بازاء آنها تبدیل فوریه $x(t)=e^{-\sigma t}$ همگرا شود. پس ناحیـه همگرایـی فقـط بـه مقدار حقیقـی s بسـتگی دارد و مسـتقل از مقـدار موهـومی آن اسـت. بنـابراین ROC فقـط توسـط خطوطی به موازات محور $j\omega$ محدود می‌شود. بنابراین ROC در حالت کلی به یکی از سه صورت زیـر است.



شکل ۶-۴ **a**)ناحیه همگرائی راسترو **b**) ناحیه همگرائی چپرو **c**) ناحیه همگرائی محدود

خاصیت ۲ : *ناحیه همگرایی شامل قطب‌ها نمی‌شود.*

این مطلب در سه مثال مطرح شده بوضوح دیده می‌شود و در حالت کلی نیاز به توضیح اضافی ندارد.

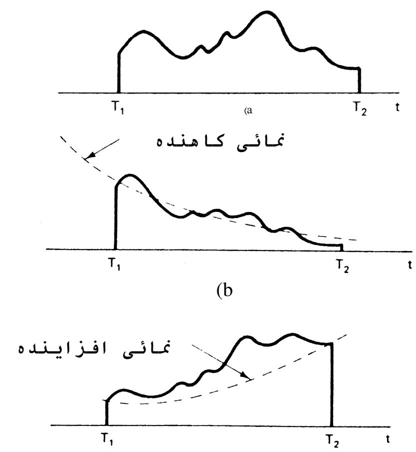
خاصیت ۳ : *اگر $x(t)$ در حوزه زمان محدود (دوره محدود[1] باشد و اگر حداقل یک مقدار از s موجود باشد بقسمی که بازاء آن s، تبدیل لاپلاس همگرا باشد در آنصورت ناحیه همگرایی شامل تمام صفحه s خواهد بود.* خاصیت سوم بدین صورت ثابت می‌شود.

یک سیگنال زمان محدود دارای این خاصیت است که در خارج یک ناحیه صفر و در داخل آن غیر صفر است (به شکل (۶-۵) توجه کنید).

فرض کنید که $x(t)e^{-\sigma t}$ بطور مطلق بازاء مقادیری از σ مثلاً σ_0 انتگرال‌پذیر باشد.

بنابراین

$$\int_{T_1}^{T_2} \left|x(t)\right| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \qquad (۶-۳۰)$$



شکل (۶-۵): a)سیگنال با دوره محدود b) سیگنال دوره N در یک نمایی کاهنده ضرب شده است. c) سیگنال دوره محدود N در یک نمایی افزاینده ضرب شده است

در این حالت $\Re e\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی قرار دارد. برای اینکه $\Re e\{s\} = \sigma_1$ هم در ناحیه همگرایی باشد باید

$$\int_{T_1}^{T_2} \left|x(t)\right| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{T_0} \left|x(t)\right| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt < \infty \qquad (۶-۳۱)$$

اکنون فرض کنید $\sigma_0 < \sigma_1$ باشد، بگونه‌ای که $e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}$ بیانگر یک تابع نمایی کاهنده باشد. بنابراین در فاصله‌ای که $x(t)$ وجود دارد، ماکزیمم مقدار تابع نمایی مساوی $e^{-(\sigma_1-\sigma_0)T_1}$ است و می‌توانیم بنویسیم.

$$\int_{T_1}^{T_2} \left|x(t)\right| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{T_2} \left|x(t)\right| e^{-\sigma_0 t} dt \qquad (۶-۳۴)$$

با توجه به اینکه انتگرال سمت راست محدود است متوجه می‌شویم که صفحه s بازاء $\sigma_0 < \Re e\{s\}$ نیز جزو ناحیه همگرایی است. با روشی مشابه اگر $\sigma_0 > \sigma_1$ باشد آنگاه

---

[1] Finite Duration

$$\int_{T_1}^{T_2}|x(t)|e^{-\sigma_1 t}dt < e^{-(\sigma_1-\sigma_0)T_2}\int_{T_1}^{T_2}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt \qquad (۳۵\text{-}۶)$$

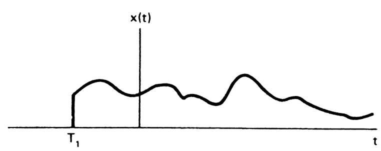
و دوباره پی می‌بریم که $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ به ازاء $\Re e\{s\} < \sigma_0$ بطور مطلق انتگرالپذیر است. بنابراین ناحیه همگرایی شامل همه صفحه s خواهد بود . این نتایج در شکل (۶-۵)bوc نمایش داده شده است.

در شکل (b-۶-۵) حاصل‌ضرب سیگنال شکل (a-۶-۵) را در نمایی کاهنده مشاهده می‌کنیم و در شکل (c-۶-۵) ، حاصل‌ضرب همان سیگنال را در نمایی افزاینده می‌بینیم. چون ناحیه وجود $x(t)$ محدود است رشد تابع نمایی دراین فاصله هرگز نامحدود نخواهد بود و بنابراین انتگرال‌پذیری $x(t)$ با ضرب کردن در تابع نمایی (چه کاهنده و چه افزاینده) خدشه‌دار نخواهد شد (البته اگر خود $x(t)$ انتگرال‌پذیر باشد).

توجه به این نکته حائز اهمیت است که اطمینان از محدود بودن رشد توابع نمایی از آنجا ناشی می‌شود که فاصله وجود $x(t)$ محدود است و اگر چنین نباشد در خاصیت بعدی به آن اشاره می‌شود.

خاصیت ۴: *اگر $x(t)$ راست رو[1] (سیگنالی را راست‌رو می‌گویند که از سمت چپ محدود باشد یعنی بازاء مقادیر $t < T_1$ مساوی صفر باشد) باشد و اگر خط $\Re e\{s\} = \sigma_0$ درناحیه همگرایی باشد در آنصورت تمام مقادیر s که بازاء آنها $\Re e\{s\} < \sigma_0$ می‌شود، نیز در ناحیه همگرایی قرار می‌گیرند.*

در شکل (۶-۶) یک سیگنال راست‌رو مشاهده می‌شود. البته ممکن است برای چنین سیگنالی نتوان ناحیه همگرایی تعریف کرد. یعنی ممکن است هیچ مقدار **s** ای را نتوان یافت که بازاء آن تبدیل لاپلاس همگرا شود.



شکل (۶-۶): سیگنال راست‌رو

یک مثال از این نوع تابع $x(t) = e^{t^2}u(t)$ است. اما موقتاً فرض کنید که تبدیل لاپلاس بازاء مقدار مشخصی از σ همگرا باشد که ما با σ_0 آنرا نمایش می‌دهیم، بنابراین

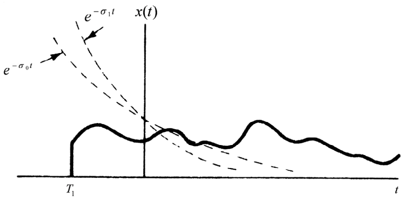
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,e^{-\sigma_0 t}dt < \infty \qquad (۳۶\text{-}۶)$$

یا بطور معادل چون $x(t)$ راسترو است.

$$\int_{T_1}^{+\infty}|x(t)|\,e^{-\sigma_0 t}dt < \infty \qquad (۳۷\text{-}۶)$$

بنابراین اگر $\sigma_1 > \sigma_0$ باشد بازهم می‌توان گفت که $|x(t)|e^{-\sigma_1 t}$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر است، چون با افزایش t (یا $t \to \infty$)، $e^{-\sigma_1 t}$ با سرعت بیشتری نسبت به $e^{-\sigma_0 t}$ کاهش می‌یابد که در شکل (۶-۷) نمایش داده شده است.

[1] Rigth-sided



شکل (۶-۷): اگر $x(t)$ راست‌رو و $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر باشند ، در آنصورت $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ با شرط $\sigma_1 > \sigma_0$ انتگرال‌پذیر است.

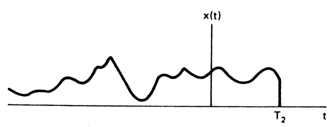
همچنین می‌توان نوشت.

$$\int_{T_1}^{\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma_0 t - (\sigma_1 - \sigma_0) t} dt \le e^{-(\sigma_1 - \sigma_0) T_1} \int_{T_1}^{\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma_0 t} dt \qquad (۳۸\text{-}۶)$$

چون T_1 محدود است، از معادله (۶-۳۷) متوجه می‌شویم که سمت راست نامعادله (۶-۳۸) محدود است و بنابراین $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ بطورمطلق انتگرال‌پذیر است. توجه کنید که چون $x(t)$ راست‌رو است و چون $\sigma_1 > \sigma_0$ است سرعت سقوط $e^{-\sigma_1 t}$ بیشتر از $e^{-\sigma_0 t}$ است و بنابراین $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ نمی‌تواند بدون محدودیت درناحیه t های منفی رشد کند چون $x(t)$ بازاء $t < T_1$ مساوی صفر است.

خاصیت ۵: *اگر $x(t)$ سیگنال چپ‌رو[1] باشد و اگرخط $\Re e\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی باشد، تمام مقادیر s که بازاء آنها $\Re e\{s\} < \sigma_0$ است نیز در ناحیه همگرایی قرار می‌گیرند.*

یک سیگنال چپ‌رو سیگنالی است که بازاء زمان‌های بزرگتر از یک مقدار محدود T_2، صفر باشد (به شکل (۶-۸) توجه کنید.). اثبات این خاصیت مثل اثبات خاصیت ۴ است.



شکل (۶-۸):سیگنال چپ‌رو

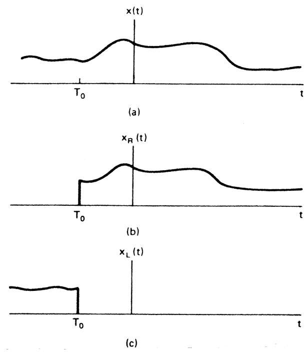
خاصیت ۶: *اگر $x(t)$ دو جهته[2] باشد و اگر خط $\Re e\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی باشد، ناحیه شامل یک قطعه موازی محور $j\omega$ در صفحه s است بگونه‌ای که شامل $\Re e\{s\} = \sigma_0$ می‌شود.*

یک سیگنال دوجهته سیگنالی است که از هر دو طرف در حوزه زمان امتداد داشته باشد (به شکل (۶-۹) توجه کنید). برای تعیین ناحیه همگرایی چنین سیگنالی می‌توان با انتخاب یک لحظه دلخواه از زمان مانند T_0 سیگنال را به مجموع دو سیگنال چپ‌رو $x_L(t)$ و راست‌رو $x_R(t)$ تجزیه کرد، همانگونه که درشکل (۶-۹) نشان داده شده است.

تبدیل لاپلاس $x(t)$ بازاء مقادیری از s همگراست که در آن ناحیه هر دو سیگنال $x_R(t)$ و $x_L(t)$ همگرا باشند.

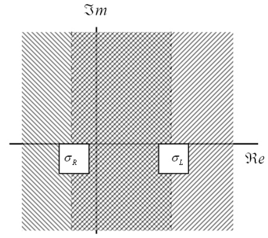
---

[1] Left-sided
[2] Two-sided



شکل (۶-۹): سیگنال دو جهته که به دو سیگنال چپ‌رو و راست‌رو تجزیه شده است.

از خاصیت ۴ می‌دانیم کـه ناحیـه همگرایـی $\ell\{x_R(t)\}$ شـامل نقـاطی از صـفحه s اسـت کـه در آنهـا $\Re e\{s\} > \sigma_R$ می باشد (بازاء مقدار معینی از σ_R). یعنی شامل سمت راست یک مقدار معین مثل σ_R است. و ازخاصیت ۵ هم می‌دانیم که ناحیه همگرایی $\ell\{x_L(t)\}$ شامل نقاطی از صـفحه s اسـت کـه در آنها $\Re e\{s\} < \sigma_L$ است (σ_L عدد معینی است). بنابراین اگر بـدانیم تبـدیل لاپـلاس بـازاء یـک خـط مشـــخص مثـــل $\Re e\{s\} = \sigma_0$ همگراســـت. پـــس حتمـــاً ایـــن دوناحیـــه (یعنـــی $\Re e\{s\} < \sigma_L$ و $\Re e\{s\} > \sigma_R$)دارای حداقل یک خط مشترک یایک قطعه مشترک می‌باشند[ر.ک.به شکل(۶-۱۰)]



شکل (۶-۱۰): نواحی همگرائی مربوط به $x_R(t)$ و $x_L(t)$ که طبق فرض در یک ناحیه مشترک هستند. ناحیه مشترک نواحی همگرائی در واقع ناحیه همگرائی مربوط به $x(t) = x_R(t) + x_L(t)$ می باشد.

اما ممکن است که $\sigma_R > \sigma_L$ شود. دراینصورت ناحیه مشترک وجود نخواهد داشـت و تبـدیل لاپـلاس بازاء هیچ مقداری از s همگرا نخواهد شد.

مثال (۶-۵): فرض کنید.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 < t < T \\ \\ 0 & t < 0 \,, \, T < t \end{cases} \tag{۳۹-۶}$$

تبدیل لاپلاس آن بصورت زیراست.

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a}[1 - e^{-(s+a)T}] \tag{۴۰-۶}$$

چون در این مثال $x(t)$ دارای طول محدود است، از خاصیت (۳) متوجه می‌شویم که ناحیـه همگرایـی شامل تمام صفحه s است.

$x(t)$ دارای تعداد نامتناهی صفر است که بازاء آنها $1-e^{-(s+a)T}=0$ می‌شود.
بنابراین

$$e^{-(s+a)T}=1=e^{-j2k\pi} \tag{۴۱-۶}$$

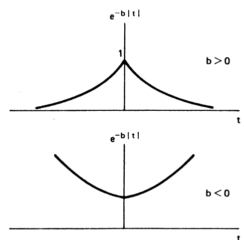
$$(s+a)T=j2\pi k \tag{۴۲-۶}$$

$$s=-a+j\frac{2\pi k}{T} \quad \text{و} \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{۴۳-۶}$$

تمرین۶-۱: محل این صفرها را درصفحه s مشخص کنید.

مثال (۶-۶): فرض کنید سیگنال ۶-۴۴ را داشته باشیم

$$x(t)=e^{-b|t|} \tag{۴۴-۶}$$



شکل (۶-۱۱): سیگنال $x(t)=e^{-b|t|}$ بازاء b>0 و b<0

در شکل (۶-۱۱) این سیگنال بازاء b<0 و b>0 رسم شده است.

چون سیگنال دو طرفه یا دو جهته است باید آنرا به دو سیگنال راست‌رو و چپ‌رو تجزیه کرد. یعنی

$$x(t)=e^{-bt}u(t)+e^{bt}u(-t) \tag{۴۵-۶}$$

اما قبلا داشتیم که

$$e^{-bt}u(t)\xleftrightarrow{\ell}\frac{1}{s+b} \quad \text{و} \quad \Re e\{s\}>-b \tag{۴۶-۶}$$

$$e^{bt}u(-t)\xleftrightarrow{\ell}\frac{-1}{s-b} \quad \text{و} \quad \Re e\{s\}<b \tag{۶-۴۷}$$

اگر چه تبدیل لاپلاس هر دو قسمت سیگنال موجود است (یعنی ناحیه همگرایی دارند)، ولی اگر b<0 باشد، این دو ناحیه همگرایی نقاط مشترک ندارند. بنابراین $x(t)$ تبدیل لاپلاس نخواهد داشت. اما اگر b>0 باشد، تبدیل لاپلاس چنین است.

$$X(s)=\frac{-2b}{(s-b)^2} \qquad -b<\Re e\{s\}<b \tag{۴۸-۶}$$

تمرین: رابطه فوق را ثابت کنید.

توجه کنید که هر سیگنال خواه تبدیل لاپلاس داشته باشد یا نداشته باشد در یکی از چهار طبقه سیگنال‌هایی که معرفی کردیم قرار خواهد گرفت (سیگنال زمان محدود، راست‌رو، چپ‌رو، دو طرفه). بنابراین هر سیگنالی که تبدیل لاپلاس دارد باید ناحیه همگرایی‌اش در یکی از چهار ناحیه زیر قرار بگیرد.

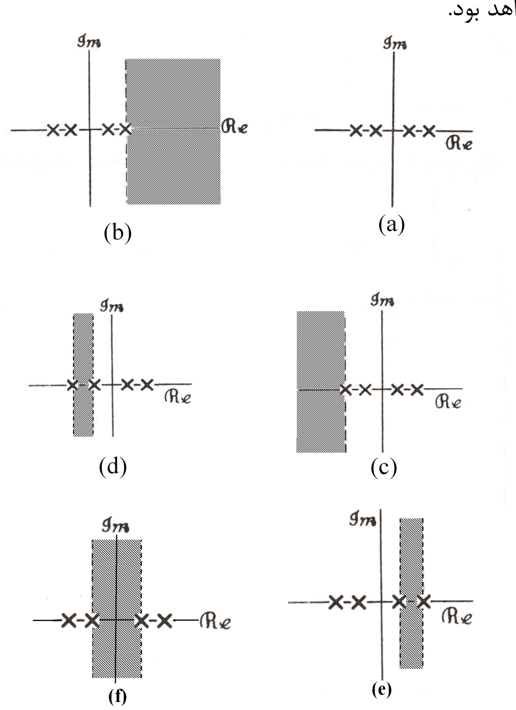
تمام صفحه s	(برای سیگنال‌های زمان محدود)
سمت چپ صفحه s	(برای سیگنال‌های چپ‌رو)
سمت راست صفحه s	(برای سیگنال‌های راست‌رو)
محدود به دو خط موازی محور $j\omega$ در صفحه s	(برای سیگنال‌های دو طرفه)

درتمامی حالات ناحیه همگرایی از یک قطب شروع می‌شود و به یک قطب دیگر یا بینهایت ختم می‌شود ولی هرگز شامل قطب‌ها نمی‌شود. بنابراین برای سیگنال راست‌روئی که شامل چند قطب است، ناحیه همگرایی از بزرگترین قطب (آخرین قطب در سمت راست) شروع شده و به ($+\infty$) ختم می‌شود. و برای سیگنال چپ‌روئی که شامل چند قطب است ناحیه همگرایی از کوچکترین قطب (آخرین قطب در سمت چپ) شروع شده و به بینهایت منفی ($-\infty$) ختم می‌شود.

مثال (۶-۷): عبارت جبری زیر را با نمودار صفر- قطب شکل (**a**-۱۲-۶) در نظر بگیرید.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)(s-2)} \tag{۴۹-۶}$$

همانطور که در شکل (۶-۱۲) نمایش داده شده است پنج (تعداد قطب ها +۱) ناحیه همگرایی برای عبارت فوق ممکن است. اگر سیگنال مربوط به نمودار صفر- قطب فوق، راست‌رو باشد شکل (b-۱۲-۶) ناحیه همگرایی آن خواهد بود.

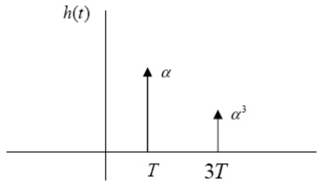


شکل (۶-۱۲): نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی ممکنه برای مثال (۶-۷)

اما اگر سیگنال مذکور چپ‌رو باشد شکل (۶-۱۲-c) نمایش ناحیه همگرایی خواهد بود. همچنین اگر سیگنال $x(t)$ دو طرفه باشد یکی از شکل های (۶-۱۲-e,f,d) نمایش ناحیه همگرایی آن است. در حالتی که ناحیه همگرائی شکل (۶-۱۲-**f**) باشد تبدیل فوریه وجود دارد چون ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ می شود. برای بقیه حالتها تبدیل فوریه وجود ندارد.

مثال (۶-۸): تبدیل لاپلاس سیگنال زیر را بدست آورید.

$$h(t) = \alpha\delta(t-T) + \alpha^3\delta(t-3T) \qquad (۶-۵۰)$$



شکل (۶-۱۳): سیگنال $h(t)$ مربوط به مثال (۶-۸)

تبدیل لاپلاس عبارت اول برابر است با

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\delta(t-T)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-sT}\delta(t-T)dt = \alpha e^{-sT} \qquad (۶-۵۱)$$

تبدیل لاپلاس عبارت دوم نیز به همین صورت بدست می آید و در نهایت داریم.

$$H(s) = \alpha e^{-sT} + \alpha^3 e^{-3sT} \qquad (۶-۵۲)$$

و یا

$$H(s) = \alpha e^{-sT}[1 + (\alpha e^{-sT})^2] \qquad (۶-۵۳)$$

اگر مکان صفرها و قطب‌های این تابع را پیدا کنیم محل صفرها از مساوی صفر قرار دادن هر یک از عوامل تشکیل دهنده $H(s)$ بدست می‌آیند.

$$e^{-sT} = 0 \quad \text{یا} \quad \alpha^2 e^{-2sT} = -1 \qquad (۶-۵۴)$$

تساوی اول غیر ممکن است و فقط تساوی دوم امکان پذیر است.

$$\alpha^2 e^{-2sT} = -1 \qquad (۶-۵۵)$$

بنابراین

$$e^{-2sT} = \frac{-1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}e^{-jk\pi} \qquad k \text{ عدد فرد است} \qquad (۶-۵۶)$$

با لگاریتم گرفتن از دو طرف داریم.

$$-2sT = \ln\frac{1}{\alpha^2} - jk\pi \qquad (۶-۵۷)$$

و با قرار دادن $s = \sigma + j\omega$ داریم.

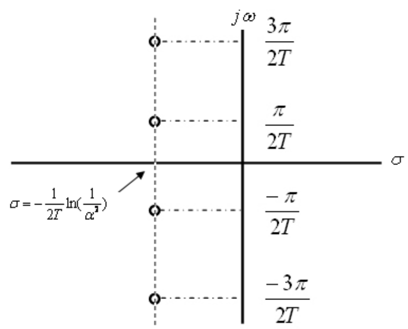
$$-2T\sigma = \ln\frac{1}{\alpha^2} \qquad (۶-۵۸)$$

$$\sigma = -\frac{1}{2T}\ln(\frac{1}{\alpha^2}) \qquad (۶-۵۹)$$

$$-2T\omega = -k\pi \tag{۶۰-۶}$$

$$\omega = \frac{k\pi}{2T} \qquad k = \pm 1, \pm 3, \ldots \tag{۶۱-۶}$$

توجه شود که تابع قطب ندارد پس رسم نمودار صفر- قطب آن چنین است



شکل (۶-۱۴) نمودار صفر و قطب مثال (۶-۸)

۶-۳ معکوس تبدیل لاپلاس

قبلاً بدست آوردیم که تبدیل لاپلاس تابعی از s بوده و رابطه آن با تبدیل فوریه سیگنال بصورت زیرمی‌باشد.

$$X(\sigma + j\omega) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \tag{۶۲-۶}$$

توجه کنید که انتگرال روی یک خط دلخواه در ROC در امتداد محور موهومی در نظر گرفته می‌شود. همچنین می‌توان تبدیل فوریه معکوس را حساب کرد.

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{۶-۶۳}$$

و اگر طرفین را در $e^{\sigma t}$ ضرب کنیم داریم.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega \tag{۶۴-۶}$$

درنهایت اگر متغیر انتگرال‌گیری را از ω به s تبدیل کنیم و در نظر داشته باشیم که σ ثابت است بگونه‌ای که $ds = jd\omega$، در اینصورت تبدیل لاپلاس معکوس بدین‌صورت بدست می‌آید.

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds \tag{۶۵-۶}$$

انتگرال باید روی خط $\Re e\{s\} = \sigma$ گرفته شود بگونه‌ای که این خط در ROC قرار داشته باشد.

معمولاً محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس از فرمول (۶-۶۵) مشکل است و از روش‌های دیگر برای اینکار استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها تبدیل $X(s)$ به مجموعی بصورت زیر است (اگر امکان داشته باشد).

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s + a_i} \qquad (۶-۶۶)$$

در اینصورت تبدیل معکوس با داشتن ناحیه همگرایی $X(s)$ بسادگی بدست می‌آید. این روش در اصطلاح به **بسط کسور جزئی**[1] معروف است. برای واضح شدن مطلب به مثال (۶-۹) توجه کنید.

مثال (۶-۹): مطلوبست تبدیل لاپلاس معکوس

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \Re e\{s\} > -1 \qquad (۶-۶۷)$$

برای بدست آوردن تبدیل معکوس $X(s)$ از روش بسط به کسور جزیی ابتدا $X(s)$ را مساوی مجموع دو کسر قرار می‌دهیم.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \qquad (۶-۶۸)$$

برای محاسبه A و B، طرفین رابطه (۶-۶۸) را بترتیب در $(s+1)$ و سپس در $(s+2)$ ضرب کرده و در حاصل بترتیب $s=-1$ و سپس $s=-2$ قرار می‌دهیم. یعنی

$$X(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = A + B\frac{s+1}{s+2}\Big|_{s=-1} = A \qquad (۶-۶۹)$$

بنابراین

$$A = 1 \qquad (۶-۷۰)$$

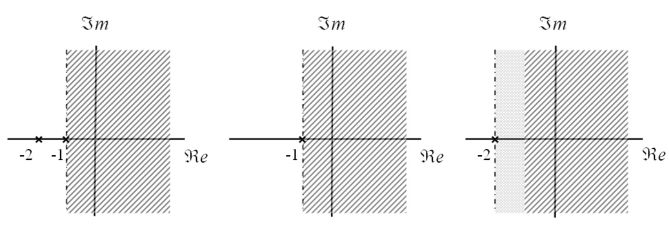
به همین ترتیب داریم.

$$B = -1 \qquad (۶-۷۱)$$

بنابراین

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \qquad (۶-۷۲)$$

اکنون باتوجه به داشتن ناحیه همگرایی متوجه می‌شویم که $x(t)$ یک سیگنال راست‌رو است. ناحیه همگرایی درشکل (a-۶-۱۶) ترسیم شده است.



(a) (b) (c)

شکل (۶-۱۶): ساختار ROC برای عبارت‌های اولیه دربسط کسرهای جزئی a) نمودارصفر-قطب و ROC برای $x(t)$ b) قطب در $s=-1$ و ROC مربوط به سیگنال راست رو متناظر با آن c) قطب در $s=-2$ و ROC مربوط به سیگنال راست رو متناظر با آن

[1] Partial fraction expansion

اما برای هر یک از کسرهای معادله (۶-۷۲) تبدیل فوریه چنین است.

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \text{و} \quad \Re e\{s\} > -1 \tag{۶-۷۳}$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \text{و} \quad \Re e\{s\} > -2 \tag{۶-۷۴}$$

بنابراین

$$(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{و} \quad \Re e\{s\} > -1 \tag{۶-۷۵}$$

اکنون فرض کنید $X(s)$ ای داریم با همان عبارت جبری مثال (۶-۹)، ولی ناحیه همگرایی‌اش بصورت $\Re e\{s\} < -2$ است. در اینصورت داریم (توجه کنید که سیگنال دراین حالت چپ‌رو است).

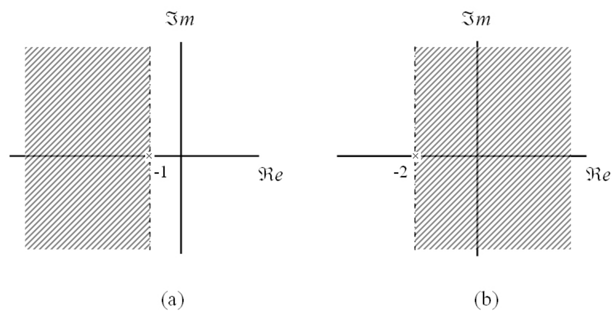
$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \qquad \Re e\{s\} < -1 \tag{۶-۷۶}$$

$$-e^{-2t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \qquad \Re e\{s\} < -2 \tag{۶-۷۷}$$

در نتیجه

$$(-e^{-t} + e^{-2t})u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \Re e\{s\} < -2 \tag{۶-۷۸}$$

در نهایت فرض کنید همان $X(s)$ قبلی دارای ناحیه همگرایی $-2 < \Re e\{s\} < -1$ باشد. دراین حالت سیگنال باید دو جهته یا دو طرفه باشد و ناحیه همگرایی را بدو قسمت تقسیم می‌کنیم.



شکل (۶-۱۵): ناحیه همگرایی در (a) سیگنال چپ‌رو و (b) راست‌رو

شکل (a-۱۵-۶) نمایانگر یک سیگنال چپ‌رو است. پس

$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \qquad \Re e\{s\} < -1 \tag{۶-۷۹}$$

و شکل (b-۱۵-۶) نمایانگر یک سیگنال راست‌رو است. پس

$$+e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \qquad \Re e\{s\} > -2 \tag{۶-۸۰}$$

بنابراین داریم

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad -2 < \Re e\{s\} < -1 \qquad (۶-۸۱)$$

۶-۴ خواص تبدیل لاپلاس

در این قسمت خواص تبدیل لاپلاس که از خیلی جهات مشابه خواص تبدیل فوریه هستند مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. در تعیین تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرائی سیگنال جدید باید دو نکته را به دقت بررسی کرد. نکته اول اینکه عبارت جبری تبدیل لاپلاس بر اثر تغییر ایجاد شده در حوزه زمان به چه صورت است؟. آیا صفر یا قطبی اضافه یا کم می شود؟. آیا محل صفرها و قطب ها تغییر می کند؟. و نکته دوم اینکه آیا این تغییر در تعداد صفرها یا قطب ها آیا ناحیه همگرائی را نیز تحت تاثیر قرار می دهد؟. آیا رفتار ناحیه همگرائی به طور کلی تغییر می کند یا فقط جابجا می شود؟. به عبارت دیگر آیا سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی مثلا تبدیل راست رو به چپ رو یا بالعکس می شود؟. در نظر گرفتن نکات فوق الذکر باعث می شود به سادگی تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرائی جدید را بدست آوریم.

۶-۴-۱ خطی بودن تبدیل لاپلاس

فرض کنید

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\ell} X_1(s) \qquad \text{با ناحیه همگرایی } R_1 \qquad (۶-۸۲)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\ell} X_2(s) \qquad \text{با ناحیه همگرایی } R_2 \qquad (۶-۸۳)$$

در اینصورت تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرائی مجموع این دو سیگنال به صورت زیر است.

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\ell} aX_1(s) + bX_2(s) \qquad \text{با ناحیه همگرایی حداقل } R_1 \cap R_2 \qquad (۶-۸۴)$$

ناحیه همگرایی حداقل فصل مشترک R_1 و R_2 است، و اگر این مجموعه تهی باشد تبدیل لاپلاس وجود نخواهد داشت. ممکن است ناحیه همگرایی بزرگتر از فصل مشترک باشد، مثلاً در معادله (۶-۸۴) اگر $x_1(t) = x_2(t)$ و $a = -b$ باشد در آنصورت $X(s) = 0$ می‌شود و ناحیه همگرایی کل صفحه s است.

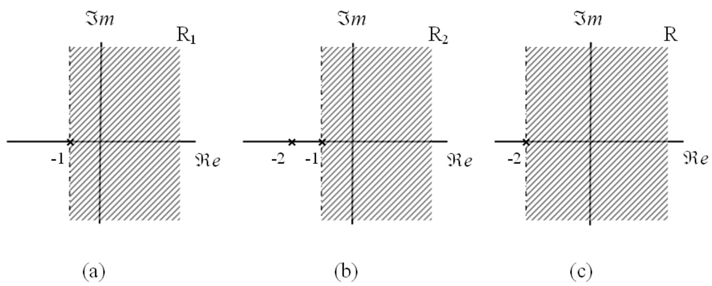
مثال (۶-۱۰):

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+1)} \qquad R_1 : \Re e\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad R_2 : \Re e\{s\} > -1$$

نمودار صفر- قطب این دو در شکل (۶-۱۷-a,b) ترسیم شده است. اکنون فرض کنید:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \qquad (۶-۸۵)$$



شکل (۶-۱۷): a) ROC مربوط به $X_1(s)$ b) ROC مربوط به $X_2(s)$ c) ROC مربوط به $X_1(s)-X_2(s)$

بنابراین در ترکیب خطی $X_1(s)$ و $X_2(s)$ قطب $s=-1$ بوسیله صفر در "1-" خنثی می‌شود. بنابراین نمودار صفر - قطب بصورت شکل (c- ۱۷-۶) در می‌آید . لذا ناحیه همگرایی $X(s)$، $\Re e\{s\}>-2$ خواهد شد. بهر حال چون ناحیه همگرایی بوسیله قطب‌ها محدود می‌شوند با خنثی شدن یک قطب در این مثال ناحیه همگرایی بزرگتر از فصل مشترک دو ناحیه همگرایی R_1 و R_2 شده است.

در حالت کلی تر اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$ را به صورت زیر داشته باشیم.

$$x_k(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X_k(s), \qquad R_k \tag{۶-۸۶}$$

در آنصورت تبدیل لاپلاس هرترکیب خطی از $x(t)$ ها به صورت زیر است.

$$x(t)=\sum_k a_k x_k(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}\sum_k a_k X_k(s), \qquad R=\bigcap_k R_k \text{ حداقل} \tag{۶-۸۷}$$

۶-۴-۲ انتقال در حوزه زمان

اگر

$$x(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X(s) \qquad \text{ROC=R} \tag{۶-۸۸}$$

در آن صورت

$$x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad \text{ROC=R} \tag{۶-۸۹}$$

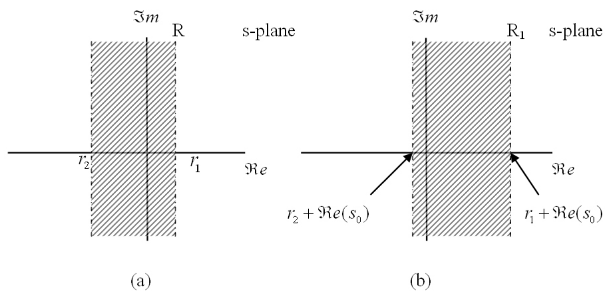
ناحیه همگرائی در حالت انتقال در حوزه زمان تغییر نخواهد کرد. چون جمله e^{-st_0} تنها قادر است قطب یا صفر در ∞ یا $-\infty$ ایجاد کند که در تعیین ناحیه همگرائی و نمودار صفر و قطب به هیچ وجه تاثیری ندارد.

۶-۴-۳ انتقال در حوزه s

$$x(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X(s) \qquad \text{ROC=R} \tag{۶-۹۰}$$

$$e^{s_0t}x(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X(s-s_0) \quad \text{و} \quad ROC=R+\Re e\{s_0\} \tag{۶-۹۱}$$

این بدین معنی است که ناحیه همگرایی مربوط به $X(s-s_0)$ همان ناحیه همگرایی $X(s)$ است که باندازه $\Re e\{s_0\}$ انتقال پیدا کرده است. بنابراین برای هر مقدار s در R، مقدار $s+\Re e\{s_0\}$ در R_1 (ناحیه همگرایی $e^{s_0t}x(t)$) قرار می گیرد. همانگونه که در شکل (۶-۱۸) نمایش داده شده است.



شکل (۶-۱۸): اثر انتقال در حوزه s برروی ROC ‏a) ROC مربوط به $x(t)$ ‏b) ROC مربوط به $X(s-s_0)$

توجه شود که در این خاصیت محل صفرها و قطب ها همگی به اندازه s_0 جابجا می شوند. اما بـا نگـاهی به سیگنال حوزه زمان می فهمیم که شکل کلی سیگنال ثابت مانده است. به عبارت دیگر اگـر سـیگنال راست رو باشد، راست رو باقی می ماند. و اگر چپ رو باشد، چپ رو باقی می ماند. بنابراین شکل ناحیـه همگرائی دچار تغییرات اساسی نمی شود و فقط دچار انتقال می گردد.

۶-۴-۴ مقیاس بندی درحوزه زمان

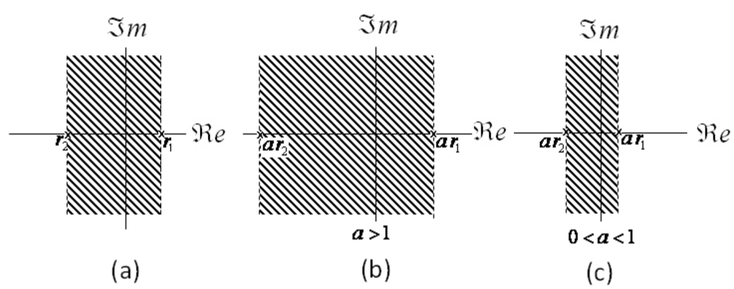
اگر

$$x(t) \overset{\ell}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad ROC = R \tag{۶-۹۲}$$

آنگاه

$$x(at) \overset{\ell}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{s}{a}) \qquad ROC = R_1 = aR \tag{۶-۹۳}$$

یعنی برای هر مقدار s در R، $\frac{s}{a}$ باید در R_1 قرار داشته باشد. به شکل (۶-۱۹) توجه کنید.



شکل (۶-۱۹): اثر مقیاس‌بندی زمانی ROC ‏a) ROC مربوط به $x(t)$ ‏b) ROC مربوط به $\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$ برای $a>0$

c) ROC مربوط به $\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$ برای $0<a<1$

اگر a مثبت باشد در آنصورت شکل سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی نمی شود. به عبارت دیگر اگر سیگنال $x(t)$ راست رو یا چپ رو باشد در آن صورت سیگنال $x(at)$ نیز به ترتیب راست رو یا چپ رو می شود. اما اگر a منفی باشد در آن صورت شکل سیگنال در حـوزه زمـان دچـار تغییـرات اساسی می شود. به عبارت دیگر اگر سیگنال $x(t)$ راست رو باشد سیگنال $x(at)$ چپ رو مـی شـود و

بالعکس. بنابراین در تعیین ناحیه همگرائی جدید باید دقت شود که علاوه بر اینکه مکان صفر ها و قطب ها تغییر می کند، ناحیه همگرائی نیز در حالت $a<0$ دچار تغییر شکل اساسی می شود. مثلا اگر سیگنال $x(t)$ دارای نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرائی به صورت شکل (۶-۱۲-b) باشد، نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی سیگنال $x(at)$ وقتی $a=-1$ است به صورت شکل (۶-۱۲ -c) می باشد. توجه شود که برای این مثال خاص، کلیه قطب های در $s=s_p$ به قطب های در $s=-s_p$ تبدیل می شوند. به علاوه سیگنال راست رو به سیگنال چپ رو تبدیل می شود. در نتیجه ناحیه همگرائی از حالت راست رو به حالت چپ رو تبدیل می شود.

۶-۴-۵ خاصیت کانولوشن

اگر

$$x_1(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X_1(s) \qquad ROC=R_1 \tag{۶-۹۴}$$

$$x_2(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X_2(s) \qquad ROC=R_2 \tag{۶-۹۵}$$

بنابراین

$$x_1(t)*x_2(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X_1(s)X_2(s) \qquad R_1\cap R_2 \text{ با ناحیه همگرایی حداقل} \tag{۶-۹۶}$$

ناحیه همگرایی $X_1(s)X_2(s)$ شامل حداقل فصل مشترک دو ناحیه همگرایی $X_1(s)$ و $X_2(s)$ می‌باشد و ممکن است بزرگتر شود اگر تعدادی از قطب‌ها بوسیله صفرها خنثی شوند. به عنوان مثال اگر

$$X_1(s)=\frac{s+1}{s+2} \qquad \Re e\{s\}>-2 \tag{۶-۹۷}$$

و

$$X_2(s)=\frac{s+2}{s+1} \qquad \Re e\{s\}>-1 \tag{۶-۹۸}$$

در آن صورت $X_1(s)X_2(s)=1$ و ناحیه همگرایی آن تمام صفحه s است (چون هیچ قطبی ندارد).

۶-۴-۶ مشتق گیری در حوزه زمان

اگر

$$x(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X(s) \qquad ROC=R \tag{۶-۹۹}$$

بنابراین

$$\frac{dx(t)}{dt}\overset{\ell}{\longleftrightarrow}sX(s) \qquad ROC=R \text{ حداقل} \tag{۶-۱۰۰}$$

بنا براین اگر $X(s)$ قطبی در $s=0$ داشته باشد حذف می شود. در نتیجه اگر این قطب یکی از مرزهای ناحیه همگرائی را تشکیل داده باشد ناحیه همگرائی مشتق بزرگتر خواهد شد. به عنوان مثال تبدیل لاپلاس تابع پله $x(t)=u(t)$ برابر $X(s)=\frac{1}{s}$ می شود. که ناحیه همگرائی آن $\Re e\{s\}>0$ است. اما تبدیل لاپلاس مشتق $\frac{dx(t)}{dt}=\delta(t)$ برابر واحد است. که ناحیه همگرائی آن کلیه صفحه **s** است. به عنوان

مثالی دیگر توجه کنید که تبدیل لاپلاس تابع $x(t)=u(-t)$ برابر $X(s)=-\frac{1}{s}$ مـی شـود. کـه ناحیـه همگرائی آن $\Re e\{s\}<0$ است. اما تبدیل لاپلاس مشتق $\frac{dx(t)}{dt}=-\delta(t)$ برابر منفی واحد است. که ناحیـه همگرائی آن باز هم کلیه صفحه **s** است.

بنابراین این امکان وجود دارد که طی عملیات مشتق سیگنال یک طرفه چپ رو یا راست رو تبـدیل بـه سیگنال دوره محدود شود و در نتیجه ناحیه همگرائی از چپ رو یا راست رو به تمـام صـفحه **s** تبـدیل می شود.

همچنین در اینجا باید دقت نمود که اگر ناحیه همگرائی سیگنال $x(t)$ به قطب در صفر محدود شـود و اگر بعد یا قبل از صفر قطبی وجود داشته باشد در آن صـورت بـا حـذف شـدن قطـب در صـفر ناحیـه همگرائی امتداد یافته و به قطب بعدی منتهی می شود. در این صورت شکل ناحیــه همگرائــی و معـادل آن شکل سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی نمی شود و فقط ناحیه همگرائی توسعه می یابد.

نکته آخری که در اینجا باید متذکر شد این است که اگر سیگنال $x(t)$ دارای قطبی در $s=0$ نباشد یـا این قطب یکی از حدود ناحیه همگرائی نباشد، در آن صورت عملیات مشتق فقط احتمالا قطب در صفر را حذف می کند یا صفری در صفر اضافه می کند و در ناحیه همگرائی هیچ تغییری بوجود نمی آید.

تمرین: رابطه ۶-۱۰۰ را ثابت کنید.

۶-۵-۷) مشتقگیری در حوزه s

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-st}\,dt \qquad (۶\text{-}۱۰۱)$$

نتیجتاً داریم.

$$\frac{dX(s)}{ds}=\int_{-\infty}^{\infty}(-t)\,x(t)\,e^{-st}\,dt \qquad (۶\text{-}۱۰۲)$$

$$-tx(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}\frac{dX(s)}{ds} \qquad ROC=R \qquad (۶\text{-}۱۰۳)$$

دیده می شود که عملیات مشتق در حوزه فرکانس هیچ گونه تغییری در شکل کلی سیگنال حوزه زمان ایجاد نمی کند. بنابراین شکل کلی ناحیه همگرائی ثابت می ماند. اما از لحاظ نمودار صـفر و قطـب نیـز عملیات مشتق در حوزه لاپلاس هیچ قطبی یا صفری را اضافه نمی کند و فقط مرتبه قطـب را افـزایش می دهد. بنابراین ناحیه همگرائی ثابت می ماند.

مثال (۶-۱۱): فرض کنید $x(t)=te^{-at}u(t)$. از آنجائیکه

$$e^{-at}u(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s+a} \qquad \Re e\{s\}>-a \qquad (۶\text{-}۱۰۴)$$

بنابراین

$$te^{-at}u(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{1}{(s+a)^2} \qquad \Re e\{s\}>-a \qquad (۶\text{-}۱۰۵)$$

با تعمیم کاربرد رابطه (۶-۱۰۳) داریم.

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}\frac{1}{(s+a)^n}\qquad \Re e\{s\}>-a \tag{۶-۱۰۶}$$

کاربرد رابطه (۶-۱۰۶) بیشتر زمانی است که بخواهیم تبدیل لاپلاس معکوس را حساب کنیم.

تمرین: رابطه (۶-۱۰۶) را ثابت کنید.

۶-۴-۸ انتگرالگیری در حوزه زمان

اگر

$$x(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}X(s)\qquad ROC=R \tag{۶-۱۰۷}$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{\ell}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s}X(s)\qquad ROC=R\bigcap\{\Re e\{s\}>0\}\ \text{حداقل} \tag{۶-۱۰۸}$$

این خاصیت مستقیماً با انتگرالگیری از دو طرف رابطه تبدیل لاپلاس معکوس بدست می‌آید ولی می‌توان آنرا بطریق زیر نیز بدست آورد.

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=u(t)*x(t) \tag{۶-۱۰۹}$$

بنابراین با توجه به خاصیت کانولوشن وچون $\Re e\{s\}>0$ و $u(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}1/s$ می‌باشد داریم.

$$u(t)*x(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s}X(s) \tag{۶-۱۱۰}$$

و ناحیه همگرایی آن شامل فصل مشترک ناحیه همگرایی $X(s)$ و تبدیل لاپلاس $u(t)$ است.

۶-۴-۹ تئوری مقادیر اولیه و نهایی

در حالت‌های خاصی که $x(t<0)=0$ و همچنین حالت‌هایی که در آنها $x(t)$ شامل هیچگونه توابع ضربه و مشتقات آن در صفر نباشد می‌توان بسادگی از تبدیل لاپلاس مقادیر اولیه یا ($x(0^+)$ مقدار $x(t)$ هنگامی که t از طرف مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند) ویاهمچنین مقدار $x(t)$ هنگامی که $t\to\infty$ را بدست آورد. مقادیر اولیه و نهائی از روابط زیر بدست می آیند.

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s) \tag{۶-۱۱۱}$$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s) \tag{۶-۱۱۲}$$

تمرین: فرمول‌های فوق را ثابت کنید.

۶-۴-۱۰ تبدیل لاپلاس سیستم معکوس

اگر

$$h(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}H(s)\qquad ROC=R_h \tag{۶-۱۱۳}$$

در آنصورت عبارت جبری تبدیل لاپلاس سیستم معکوس ($h_i(t)$) که در رابطه $h(t)*h_i(t)=\delta(t)$ صدق می کند از رابطه زیر بدست می آید.

$$h_i(t)\overset{\ell}{\longleftrightarrow}H_i(s)=\frac{1}{H(s)} \tag{۶-۱۱۴}$$

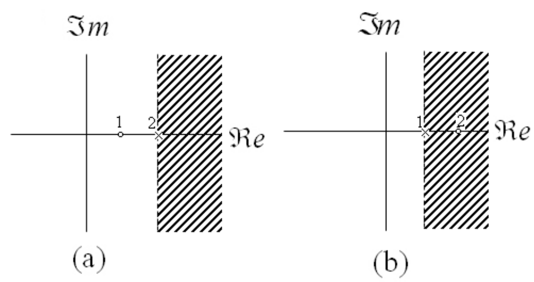
بنابراین صفر های سیستم اصلی به قطب در سیستم معکوس، و قطب های سیستم اصلی به صفر در سیستم معکوس تبدیل می شوند. مسئله اصلی ناحیه همگرائی است. می توان ثابت کرد که در حالت کلی ناحیه همگرائی سیستم معکوس در این مورد یکتا نیست. آنچه مهم است این است که ناحیه همگرائی سیستم معکوس باید ناحیه مشترکی با ناحیه همگرائی سیستم اصلی داشته باشد، تا امکان ضرب کردن تبدیل لاپلاس سیستم اصلی و سیستم معکوس وجود داشته باشد.

این حقیقت بسیار جالب است چون نتیجه ساده آن این است که تعداد جفت سیگنالهائی که کانولوشن کردن آنها منجر به تابع ضربه می شود بیش از واحد می تواند باشد.

برای توضیح نحوه پیدا کردن ناحیه همگرائی سیستم معکوس به مثالهای زیر توجه کنید.

(مثال ۶-۱۲): فرض کنید سیستمی با تابع انتقال و ناحیه همگرائی زیر داده شده باشد.

$$H(s)=\frac{s-1}{s-2}=1+\frac{1}{s-2}\ ;\ \ \mathrm{Re}(s)>2$$



شکل (۶-۲۰) نمودار صفر وقطب و ناحیه همگرائی (**a**) سیستم اصلی (**b**) سیستم معکوس

پاسخ ضربه این سیستم به صورت زیر بدست می آید.

$$h(t)=\delta(t)+e^{2t}u(t)$$

تابع انتقال سیستم معکوس نیز به صورت زیر بدست می آید.

$$H_i(s)=\frac{s-2}{s-1}=1-\frac{1}{s-1}\ ;\ \ \mathrm{Re}(s)>1$$

که از آن داریم.

$$h_i(t)=\delta(t)-e^{t}u(t)$$

بنابراین

$$h_i(t)*h(t)=[\delta(t)-e^{t}u(t)]*[\delta(t)+e^{2t}u(t)]$$
$$=\delta(t)-e^{t}u(t)+e^{2t}u(t)-e^{t}u(t)*2^{2t}u(t)=\delta(t)$$

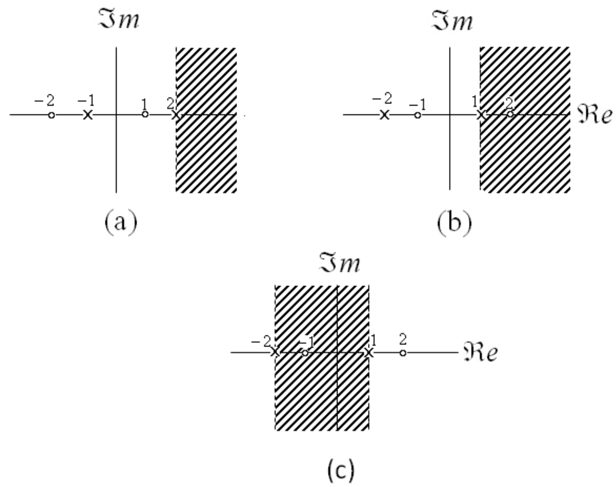
اما اگر ناحیه همگرائی تابع انتقال سیستم معکوس را به صورت $\mathrm{Re}(s)<1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

$$h_i(t)=\delta(t)+e^{t}u(-t)$$

در اینصورت حاصل کانولوشن $h_i(t) * h(t)$ وجود نخواهد داشت. چون ناحیه همگرائی مشترک بین $h(t)$ و $h_i(t)$ وجود ندارد.

مثال (۶-۱۳): مطلوبست ضابطه سیستم معکوس مربوط به سیستمی که ضابطه و ناحیه همگرائی تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه آن به صورت زیر است.

$$H(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)} = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{4}{3}}{s-2}; \quad \mathrm{Re}(s) > 2$$



شکل (۶-۲۱) نمودار صفر وقطب و ناحیه همگرائی (**a**) سیستم اصلی (**b**) ضابطه اول سیستم معکوس (**c**) ضابطه دوم سیستم معکوس

ضابطه پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر است.

$$h(t) = \delta(t) + \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$$

ضابطه و دو ناحیه همگرائی ممکن سیستم معکوس به صورت زیر است.

$$H_i(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{(s-1)(s+2)} = 1 - \frac{\frac{2}{3}}{s-1} - \frac{\frac{4}{3}}{s+2} \;; \begin{cases} \Re e\{s\} > 1 \\ -2 < \Re e\{s\} < 1 \end{cases}$$

با توجه به شکل برای سیستم معکوس دو ناحیه همگرائی ممکن تعریف می شود. این دو ناحیه همگرائی در شکل های(۶-۲۱**c,b**) رسم شده اند. بنابراین دو رابطه برای سیستم معکوس بدست می آید.

$$h_i(t) = \delta(t) - \frac{2}{3}e^{t}u(t) - \frac{4}{3}e^{-2t}u(t)$$

$$h_i(t) = \delta(t) + \frac{2}{3}e^{t}u(-t) - \frac{4}{3}e^{-2t}u(t)$$

ضابطه اول علی و ضابطه دوم پایدار است. اما هر دو معکوس سیستم اصلی هستند و حاصل کانولوشن آنها با سیستم اصلی برابر تابع ضربه است.

$$[\delta(t)-\frac{2}{3}e^{t}u(t)-\frac{4}{3}e^{-2t}u(t)]*[\delta(t)+\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+\frac{4}{3}e^{2t}u(t)]=\delta(t)$$

$$[\delta(t)+\frac{2}{3}e^{t}u(-t)-\frac{4}{3}e^{-2t}u(t)]*[\delta(t)+\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+\frac{4}{3}e^{2t}u(t)]=\delta(t)$$

۶-۵ بررسی خواص سیستم‌های خطی مشخص شده بامعادلات دیفرانسیل خطی باضرایب ثابت

همانطور که قبلا دیدیم از تبدیل فوریه برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های خطی، که با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت توصیف می شوند، استفاده کردیم و اکنون به روشی مشابه می‌خواهیم از تبدیل لاپلاس استفاده کنیم. به عنوان مثال فرض کنید که رابطه ورودی- خروجی یک سیستم با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر مشخص می‌شود.

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t) \tag{۶-۱۱۵}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف داریم.

$$sY(s)+3Y(s)=X(s) \tag{۶-۱۱۶}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=H(s)=\frac{1}{s+3} \tag{۶-۱۱۷}$$

به $H(s)$ تابع تبدیل سیستم می‌گویند که تبدیل معکوس آن همان پاسخ ضربه سیستم خواهد بود. بدین ترتیب عبارت جبری $H(s)$ پیدا شد ولی باید ROC نیز تعیین شود. درحقیقت معادله دیفرانسیل به تنهایی بیانگر یک سیستم LTI نخواهد بود و درحالت کلی برای یک معادله دیفرانسیل، بسته به اینکه بدانیم سیستم علّی است یا غیرعلّی، می‌توان چند ناحیه همگرایی یا بطور معادل چند پاسخ ضربه تعیین کرد. اما اگر بدانیم سیستم علّی است می‌توان ناحیه همگرایی‌اش را در سمت راست آخرین قطب (یا بزرگترین قطب) بگونه‌ای که شامل هیچ قطبی نشود رسم کرد. دراین مثال ناحیه همگرایی در سمت راست قطب $s=-3$ فرض می‌شود.

اما اگر سیستم فوق غیر علّی بود ناحیه همگرایی در سمت چپ $s=-3$ قرار می‌گرفت. در حالت اول پاسخ ضربه(علّی) بصورت زیر خواهد بود.

$$h(t)=e^{-3t}u(t) \tag{۶-۱۱۸}$$

و در حالت دوم پاسخ ضربه(غیرعلّی) برابر است با

$$h(t)=-e^{-3t}u(-t) \tag{۶-۱۱۹}$$

در حالت کلی برای یک معادله دیفرانسیل بصورت زیر

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{۶-۱۲۰}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله فوق داریم.

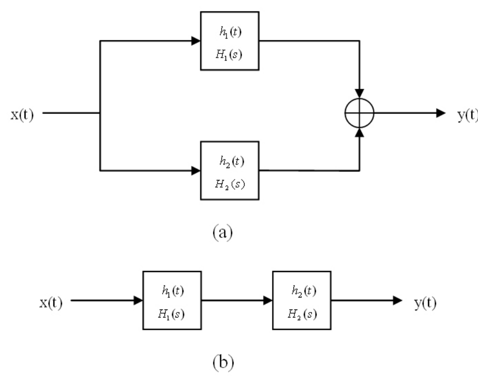
$$(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k) Y(s) = (\sum_{k=0}^{M} b_k s^k) X(s) \quad (۶-۱۲۱)$$

بنابراین

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \quad (۶-۱۲۲)$$

۶-۶ اتصال سیستم‌ها

با کمک تبدیل لاپلاس می‌توان تابع تبدیل ترکیبات مختلف سیستم‌ها را تعیین کرد. چند ترکیب ساده به عنوان مثال در زیر ارائه شده‌اند.



شکل (۶-۲۲): a) اتصال موازی دو سیستم LTI   b)اتصال سری دو سیستم LTI

برای شکل (۶-۲۲-a) داریم.

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (۶-۱۲۳)$$

بنابراین رابطه تبدیل لاپلاس کلی سیستم بصورت زیر خواهد بود.

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (۶-۱۲۴)$$

و برای شکل (۶-۲۲-b) داریم.

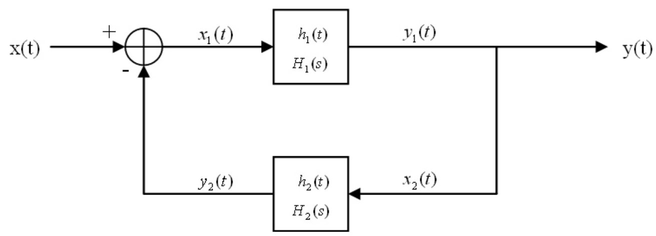
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (۶-۱۲۵)$$

$$H(s) = H_1(s) H_2(s) \quad (۶-۱۲۶)$$

تمرین: تابع تبدیل ترکیب سیستم هائی بـه صـورت شـکل (۶-۲۳) را تعیـین کنیـد. ایـن نحـو اتصـال سیستم ها به اتصال پس خور[1] معروف است.

---

[1] Feedback



شکل (۶-۲۳): اتصال فیدبک دو سیستم LTI

تمرین: ثابت کنید شرط کافی برای پایداری یک سیستم آن است که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه آن شامل محور $j\omega$ باشد.

۶-۷ تبدیل لاپلاس یکطرفه

در قسمت‌های قبلی این فصل به تفصیل در مورد تبدیل لاپلاس دو طرفه صحبت کردیم. اما در این قسمت راجع به نوع دیگر تبدیل لاپلاس که در تحلیل سیستم‌های علّی با شرایط اولیه (سیستم هائی که در حالت استراحت اولیه نیستند) کاربرد دارد صحبت خواهیم کرد.

تبدیل لاپلاس یکطرفه $\chi(s)$ سیگنال $x(t)$ چنین تعریف می‌شود.

$$\chi(s) \triangleq \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt \qquad (۶\text{-}۱۲۷)$$

با این تعریف اگر دو سیگنال بازاء $t<0$ متفاوت و بازاء $t>0$ یکسان باشند، تبدیل لاپلاس یکطرفه یکسانی خواهند داشت ولی تبدیل لاپلاس دو طرفه‌شان یکسان نیست. بنابراین تبدیل لاپلاس یکطرفه را می‌توان همان تبدیل لاپلاس دو طرفه برای سیگنال‌هایی تصورکرد که بازاء $t<0$ و $t=0^-$ مساوی صفرهستند. بنابراین ناحیه همگرایی معادله (۶-۱۲۷) در سمت راست بزرگترین قطب از لحاظ مقدار حقیقی قرار دارد. در نتیجه نیازی به ذکر ناحیه همگرائی نیست.

مثال (۶-۱۴): سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \qquad (۶\text{-}۱۲۸)$$

هردو تبدیل لاپلاس یکطرفه و دوطرفه در این مورد یکی می‌شوند و داریم.

$$\chi(s) = X(s) = \frac{1}{(s+a)^n} \qquad \Re e\{s\} > -a \qquad (۶\text{-}۱۲۹)$$

مثال (۶-۱۴): اکنون فرض کنید.

$$x(t) = e^{-a(t-t_0)} u(t-t_0) \qquad (۶\text{-}۱۳۰)$$

تبدیل لاپلاس دو طرفه برای این مثال را قبلا از خاصیت انتقال زمانی بدست آوردیم.

$$X(s) = \frac{e^{-st_0}}{s+a} \qquad \Re e\{s\} > -a \qquad (۶\text{-}۱۳۱)$$

حالا تبدیل لاپلاس یکطرفه بدست می‌آوریم.

$$\chi(s)=\int_{0^+}^{+\infty} e^{-a(t-t_0)}u(t-t_0)e^{-st}dt \qquad (۱۳۲-۶)$$

$$\chi(s)=\begin{cases}\int_{0^+}^{+\infty} e^{at_0}e^{-t(s+a)}dt & ; \ t_0\le 0\\ \int_{t_0}^{+\infty} e^{at_0}e^{-t(s+a)}dt & ; \ t_0>0\end{cases} \qquad (۱۳۳-۶)$$

بنابراین

$$\chi(s)=\begin{cases}e^{at_0}\dfrac{1}{s+a} & ; \ t_0\le 0\\ e^{st_0}\dfrac{1}{s+a} & ; \ t_0>0\end{cases} \qquad \Re e\{s\}>-a \qquad (۱۳۴-۶)$$

در این مثال دیده می شود که تبدیل لاپلاس دو طرفه و یک طرفه برای حالت $t_0>0$ برابرند. اما اگـر $t_0\le 0$ دو پاسخ مختلف برای تبدیل لاپلاس یکطرفه و دو طرفه بدست می آید.

با استناد به مطالبی که تاکنون گفته شد، پی می‌بریم که تبدیل لاپلاس یکطرفه $\chi(s)$ در واقع تبدیل لاپلاس دو طرفه مربوط بـه سـیگنال $x(t)u(t)$ اسـت، نـه سـیگنال $x(t)$. بسـیاری از خـواص تبـدیل یکطرفه و دوطرفه یکسان هستند و در حقیقت دو قضیه مقدار اولیه و مقـدار نهـایی بیشـتر مربـوط بـه تبدیل لاپلاس یکطرفه هستند. چون برای صادق بودن آن دو قضیه گفتـیم کـه لازم اسـت $x(t)$ بـرای $t<0$ مساوی صفر باشد و هیچگونه تابع ضربه یا مشتقاتش را در صفر نداشته باشد. یکـی از مهمتـرین تفاوت‌های خواص تبدیل لاپلاس یکطرفه و دوطرفه درخاصیت مشتق‌گیـری اسـت. فـرض کنیـد $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس یکطرفه $\chi(s)$ است بنابراین با انتگرالگیری جزء به جزء از $\dfrac{dx(t)}{dt}$ داریم.

$$\int_{0^+}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = x(t)e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} + s\int_{0^+}^{\infty}x(t)e^{-st}dt \qquad (۱۳۵-۶)$$

بنابراین

$$\frac{d\ x(t)}{dt}\xleftrightarrow{\wp} s\chi(s)-x(0^+)$$

بطور مشابه داریم.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\xleftrightarrow{\wp} s^2\chi(s)-sx(0^+)-x'(0^+) \qquad (۱۳۶-۶)$$

که $x'(0^+)$ مشتق در $t=0^+$ است.

یکی از کاربردهای اساسی تبدیل لاپلاس یکطرفه در حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابـت بـا شرایط اولیه غیر صفر (غیر استراحت اولیه) می‌باشد. به عنوان مثال سیستم علّی که بوسیله معادله زیـر مشخص می‌شود را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-6y(t)=x(t) \qquad (۱۳۷-۶)$$

با شرایط اولیه

$$y(0^+)=1 \quad \text{و} \quad \frac{dy(0^+)}{dt}=-2$$

اگر ورودی این سیستم $x(t)=u(t)$ باشد، با گرفتن تبدیل لاپلاس یکطرفه از دو طرف معادله (۶-۱۳۷) داریم.

$$s^2Y(s)-s+2+sY(s)-1-6Y(s)=\frac{1}{s} \tag{۶-۱۳۸}$$

$$Y(s)=\frac{1+s^2-s}{s(s+3)(s-2)} \tag{۶-۱۳۹}$$

که در آن $Y(s)$ تبدیل لاپلاس یکطرفه $y(t)$ است. با بسط رابطه (۶-۱۳۹) داریم.

$$Y(s)=\frac{\frac{-1}{6}}{s}+\frac{\frac{13}{15}}{s+3}+\frac{\frac{3}{10}}{s-2} \tag{۶-۱۴۰}$$

که نتیجتاً داریم.

$$y(t)=[\frac{-1}{6}+\frac{13}{15}e^{-3t}+\frac{3}{10}e^{2t}]u(t) \tag{۶-۱۴۱}$$

مثال(۶-۱۵): ثابت کنید اگر تابع انتقال سیستمی دارای قطب‌های بیشتری نسبت به صفرها باشد وعلاوه برآن سیستم علّی باشد پاسخ پله در $t=0$ پیوسته است.

حل: کافی است نشان دهیم پاسخ پله در $t=0^+$ برابر صفر است. فرض کنید تابع انتقال سیستم به صورت زیر باشد.

$$H(s)=\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \qquad n>m \tag{۶-۱۴۲}$$

پاسخ ورودی پله چنین است.

$$Y(s)=\frac{1}{s}\frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} \tag{۶-۱۴۳}$$

بدلیل علّیت سیستم می‌توان از تئوری مقدار اولیه استفاده کرد. از تئوری مقدار اولیه داریم.

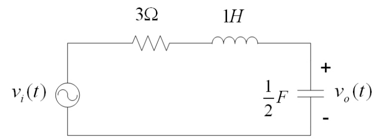
$$\lim_{s\to\infty} sY(s)=y(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} \tag{۶-۱۴۴}$$

چون درجه مخرج از صورت بزرگتر است حد بسمت صفر میل می‌کند، پس

$$y(0^+)=0$$

تمرین: در مدار شکل (۶-۲۴) $v_o(t)$ را به کمک تبدیل لاپلاس یکطرفه بدست آورید.

$$v_o(0^+)=1 \quad \text{و} \quad \left.\frac{dv_o(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=2$$



شکل (۶-۲۴): یک مدار RLC خطی

مثالهای حل شده

مثال (۶-۱۶): تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $x(t) = \delta(t - t_0)$

ب) $x(t) = u(-t)$

حل: الف)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st_0} \delta(t - t_0) dt$$

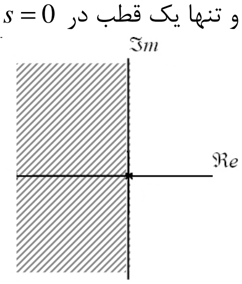
بنابراین

$$X(s) = e^{-st_0}$$

این تبدیل هیچ صفر و یا قطب محدودی ندارد ولی می‌توان گفت که به ازاء $t_0 > 0$، $-\infty$ قطب و $+\infty$ صفر این تبدیل بحساب می‌آیند و به ازاء $t_0 < 0$ ، $-\infty$ صفر و $+\infty$ قطب این تبدیل می‌باشند. پس ناحیه همگرایی تمام صفحه s خواهد شد.

ب) $$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \qquad \Re e[s] < 0$$

فقط به ازاء $\Re e[s] < 0$ انتگرال فوق همگرا و مساوی $-\frac{1}{s}$ خواهد بود بنابراین ناحیه همگرایی سمت چپ محور $j\omega$ را در بر خواهد گرفت و تنها یک قطب در $s = 0$ وجود دارد.



شکل (۶-۲۵) ناحیه همگرائی مربوط به قسمت ب مثال ۶-۱۶

مثال (۶-۱۷): تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT)$$

حل:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT)] e^{-st} dt$$

با تغییر ترتیب انتگرال و مجموع داریم.

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) e^{-st} dt$$

با توجه به حل مثال (۶-۱۶) قسمت الف داریم.

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-skT}$$

اما رابطه فوق مبین یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ae^{-sT} می‌باشد و تنها بشرطی این مجموعه همگرا می‌گردد که

$$\left| ae^{-sT} \right| < 1$$

با نوشتن s بصورت $\sigma + j\omega$ ، چون $e^{-\sigma T}$ همواره نامنفی است می‌توان آن را از زیر علامت قدر مطلق بیرون کشید در این صورت داریم.

$$e^{-\sigma T} < \frac{1}{|a|} \Rightarrow -\sigma T < Ln \frac{1}{|a|}$$

در نهایت ناحیه همگرایی بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\Re e[s] > \frac{-1}{T} Ln(\frac{1}{|a|})$$

در این صورت داریم.

$$X(s) = \frac{1}{1 - ae^{-sT}}$$

واضح است که این تبدیل صفر (محدود) ندارد ولی قطب‌های آن ریشه‌های مخرج هستند.

$$1 - ae^{-sT} = 0 \Rightarrow ae^{-sT} = 1$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت.

$$e^{-sT} = \frac{1}{a}$$

ابتدا فرض می‌کنیم $a > 0$ باشد در این صورت حل معادله فوق بصورت زیر است.

$$e^{-(\sigma + j\omega)T} = \frac{1}{a} \Rightarrow e^{-\sigma T} = \frac{1}{a} \;\; ; \;\; e^{-j\omega T} = e^{-j2k\pi}$$

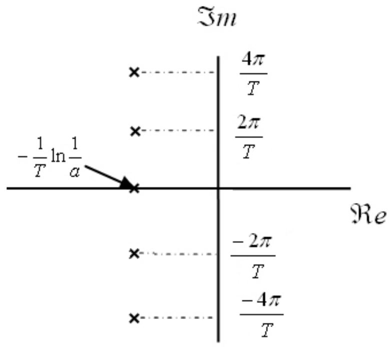
بنابراین

$$\sigma = \frac{-1}{T} Ln(\frac{1}{a})$$

و

$$\omega = \frac{2k\pi}{T}$$

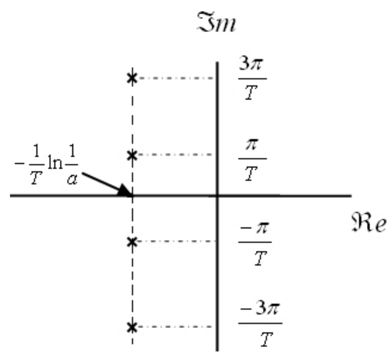
نمودار صفر وقطب در شکل ۶-۲۶ رسم شده است.



شکل (۶-۲۶) نمودار صفر و قطب برای حالت $a > 0$ در مثال ۶-۱۷

بطریقه مشابه اگر $a < 0$ باشد محل قطب‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\sigma = \frac{-1}{T} Ln(\frac{1}{a})$$
$$\omega = (2k+1)\frac{\pi}{T}$$



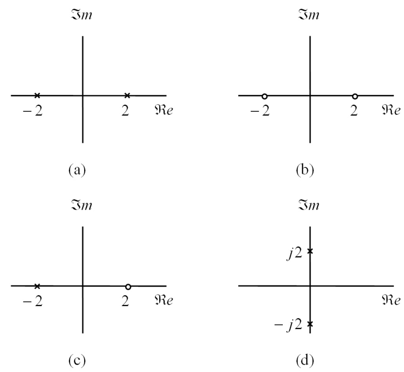
شکل (۶-۲۷) نمودار صفر و قطب برای حالت $a < 0$ در مثال ۶-۱۷

مثال (۶-۱۸): برای هر یک از عبارت‌های زیر در مورد یک سیگنال مفروض $x(t)$ و برای هر یک از چهار نمودار صفر و قطب رسم شده در شکل ۶-۲۸ تعیین کنید که ناحیه همگرایی چگونه خواهد بود.

الف) تبدیل فوریه $x(t)e^{-t}$ وجود دارد.

ب) $t > 10, x(t) = 0$.

ج) $t < 0, x(t) = 0$.



شکل (۶-۲۸) مربوط به مثال ۶-۱۸

حل: توجه شود که شکل (**b**) حتما مربوط به یک سیگنال دوره محـدود اسـت چـون تنهـا سـیگنالهای دوره محدود هستند که دارای هیچ قطبی نیستند. بنابراین ناحیه همگرائی چنین سیگنالی تمام صـفحه **s** است.

الف) چون تبدیل فوریه $x(t)e^{-t}$ وجود دارد پس انتگرال زیر همگرا است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(1+j\omega)t}dt$$

بنابراین $\sigma = 1$ جزو ناحیه همگرایی است و چون ناحیه همگرایی نمی‌تواند شامل قطب شود و از طرفی توسط قطب‌ها محدود می‌شود می‌توان نواحی همگرایی را برای هر یـک از چهـار نمـودار صـفر و قطـب بصورت شکل (۶-۲۹) رسم کرد.

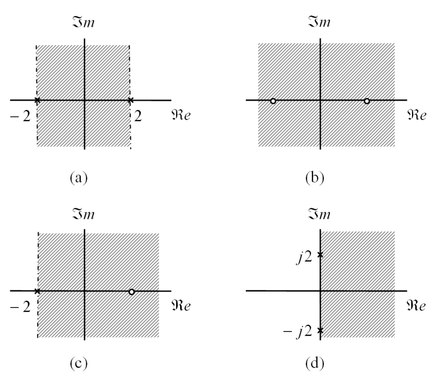
پس نواحی همگرایی بصورت زیر خواهد بود.

برای شکل (a) $\quad -2 < \Re e[s] < 2$

برای شکل (b) $\quad -\infty < \Re e[s] < \infty$

برای شکل (c) $\quad \Re e[s] > -2$

برای شکل (d) $\quad \Re e[s] > 0$



شکل (۶-۲۹) نواحی همگرایی را برای هر یک از چهار نمودار صفر و قطب برای حالت الف

ب) چون سیگنال چپ‌رو است پس نواحی همگرایی بصورت زیر خواهند بود (جهت اختصار از رسم شکل صرفنظر می‌شود).

برای شکل (a) $\Re e[s] < -2$

برای شکل (c) $\Re e[s] < -2$

برای شکل (d) $\Re e[s] < 0$

ج) چون سیگنال راست‌رو است پس نواحی همگرایی توسط روابط زیر داده می‌شوند

برای شکل (a) $\Re e[s] > 2$

برای شکل (c) $\Re e[s] > -2$

برای شکل (d) $\Re e[s] > 0$

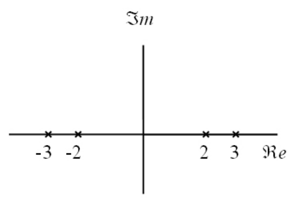
مثال (۶-۱۹): تمام روابط زمانی ممکنه $x(t)$ که دارای عبارت جبری تبدیل لاپلاس بصورت زیر هستند را بیابید.

$$X(s) = \frac{4s^3 - 26s}{(s^2-9)(s^2-4)}$$

حل: از بسط $X(s)$ به کسور جزیی داریم.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-3}$$

می‌بینیم $X(s)$ مجموع چهار کسر جزیی است و نمودار صفر و قطب آن بصورت شکل (۶-۳۰) است.



شکل (۶-۳۰) نمودارصفر و قطب مربوط به مثال ۶-۱۹

پنج حالت مختلف برای ناحیه همگرایی وجود دارد، پس پنج رابطه زمانی مختلف برای $x(t)$ امکان دارد.

الف: اگر ناحیه همگرایی بصورت $\Re e[s] < -3$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع چهار سیگنال چپ‌رو بدست آید، پس

$$x(t) = -(e^{-2t} + e^{-3t} + e^{2t} + e^{3t})u(-t)$$

ب: اگر ناحیه همگرایی بصورت $-3 < \Re e[s] < -2$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع سه سیگنال چپ‌رو(مربوط به قطبهای ۲و۳و۲-) و یک سیگنال راست‌رو(مربوط به قطب ۳-) بدست آید. پس

$$x(t) = e^{-3t}u(t) - (e^{-2t} + e^{2t} + e^{3t})u(-t)$$

ج: اگر ناحیه همگرایی بصورت $-2 < \Re e[s] < 2$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع دو سیگنال چپ‌رو(مربوط به قطبهای ۲و۳) و دو سیگنال راست‌رو (مربوط به قطبهای ۳-و۲-)بدست آید، پس

$$x(t)=(e^{-3t}+e^{-2t})u(t)-(e^{3t}+e^{2t})u(-t)$$

د: اگر ناحیه همگرایی بصورت $2<\Re e[s]<3$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع یک سیگنال چپ‌رو (مربوط به قطب ۳)و سه سیگنال راست‌رو (مربوط به قطبهای ۲و۳-و۲-)بدست آید، پس

$$x(t)=(e^{-3t}+e^{-2t}+e^{2t})u(t)-e^{3t}u(t)$$

هـ: اگر ناحیه همگرایی بصورت $\Re e[s]>3$ باشد در آنصورت رابطه زمانی $x(t)$ از مجموع چهار سیگنال راست‌رو بدست می‌آید، پس

$$x(t)=(e^{-3t}+e^{-2t}+e^{2t}+e^{3t})u(t)$$

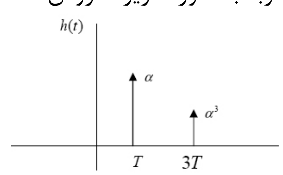
مثال (۶-۲۰): تبدیل لاپلاس $X(s)$ یک سیگنال $x(t)$ دارای چهار قطب و تعداد نامعلومی صفر می‌باشد. اگر فقط بدانیم $x(t)$ دارای یک ضربه در $t=0$ است تعیین کنید چه اطلاعاتی در مورد تعداد صفرها و محل آنها می‌توانیم داشته باشیم.

حل: چون $x(t)$ دارای ضربه در $t=0$ است پس باید $X(s)$ بصورت زیر باشد.

$$X(s)=1+\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{D(s)+N(s)}{D(s)}$$

که در آن $N(s)$ و $D(s)$ یک چند جمله ای برحسب s هستند. چون چهار قطب برای $X(s)$ وجود دارد می‌توان گفت که درجه صورت نیز حداقل چهار است، پس حداقل چهار صفر نیز برای تبدیل لاپلاس $X(s)$ وجود خواهد داشت. در مورد محل صفرها با اطلاعات داده شده در صورت مسئله فعلا نمی توان قضاوتی داشت.

مثال (۶-۲۱): یک سیستم با پاسخ ضربه به صورت زیر مفروض است.



شکل (۶-۳۱) پاسخ ضربه سیستم مربوط به مثال ۶-۲۱

مطلوب است $H(s)$ و تعیین صفرها، قطب‌ها و ناحیه همگرایی آن.

حل: داریم.

$$h(t)=\alpha\delta(t-T)+\alpha^3\delta(t-3T)$$

بنابراین بسادگی می‌توان تبدیل لاپلاس را بدست آورد.

$$H(s)=\alpha e^{-sT}+\alpha^3 e^{-3sT}$$

این تبدیل قطب ندارد. بنابراین ناحیه همگرایی آن تمام صفحه s خواهد بود. اما دارای صفر است که محل صفرها از مساوی صفر قرار دادن $H(s)$ بدست می‌آید.

$$\alpha e^{-sT}=-\alpha^3 e^{-3sT}$$

چون $s=\sigma+j\omega$ بنابراین خواهیم داشت.

$$\alpha e^{-\sigma T} e^{-j\omega T} = \alpha^3 e^{-3\sigma T} e^{-j(3\omega T+(2k+1)\pi)}$$

که در آن k عدد صحیح است. پس محل صفرها از حل دو معادله زیر برای σ و ω بدست می‌آید

$$\alpha^2 e^{-2\sigma T} = 1$$

$$2\omega T = (2k+1)\pi$$

بنابراین

$$s = \frac{-1}{2T}\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) + j\frac{(2k+1)\pi}{2T}$$

به ازاء هر k که عدد صحیح باشد یک صفر را مشخص می‌نماید.

مثال (۶-۲۲): نشان دهید که اگر $x(t)$ یک تابع زوج باشد بگونه‌ای که $x(t) = x(-t)$، در آنصورت $X(s) = X(-s)$.

حل: چون تابع زوج است داریم

$$x(t) = x(-t)$$

و با تبدیل لاپلاس گرفتن از دو طرف رابطه فوق رابطه زیر را خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\, e^{-st}dt$$

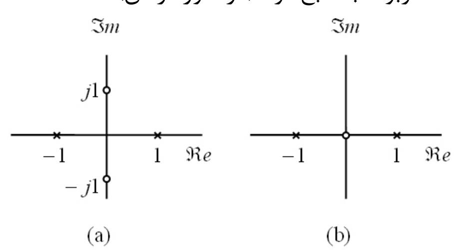
و یا

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-st}dt$$

و با تغییر متغیر $-t = u$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{su}du = X(-s)$$

مثال (۶-۲۳): دو نمودار صفر و قطب در شکل زیر رسم شده‌اند. تعیین کنید کدامیک از آنها احتمالا مربوط به تابع زوج و کدامیک مربوط به تابع فرد (در حوزه زمان) است.



شکل (۶-۳۲) نمودارهای صفر و قطب مربوط به مثال ۶-۲۳

حل: در مورد تابع زوج چون $X(s) = X(-s)$ است و چون در مورد شکل (a)، $X(s) = X(-s)$ است بنابراین شکل (a) می‌تواند بیانگر یک تابع زوج باشد. لازم به ذکر است که در مورد سیگنال فرد داریم.

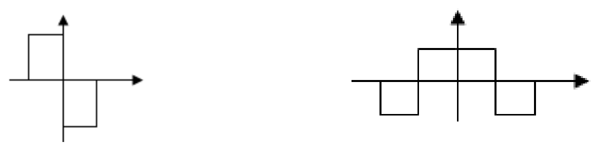
$$x(t) = -x(-t) \Rightarrow X(s) = -X(-s)$$

بنابراین در مورد سیگنال فرد نیز تقارن نسبت به هر دو محور حقیقی و موهومی در مورد محل صفرها و قطب ها نیز وجود دارد. پس با مشاهده تقارن نسبت به هر دو محور فقط می توان در مورد احتمال زوج یا فرد بودن قضاوت نمود و به تنهائی و با قطعیت نمی توان در مورد یکی از آنها قضاوت کرد.

در مورد شکل (b) همان قضاوت قبلی را داریم. اما یک نتیجه دیگر در این مورد نیز می توان گرفت.چون یک صفر در $s=0$ داریم معنایش این است که سطح زیر منحنی سیگنال در حوزه زمان صفر است. چون

$$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt=0$$

اما این نتیجه نیز به تنهائی نمی تواند برای قضاوت در مورد زوج یا فرد بودن کافی باشد. چون سطح زیر منحنی هردو نوع سیگنال می تواند صفر شود. به عنوان مثال دو سیگنال نشان داده شده در شکل (۶-۳۳) هردو دارای یک صفر در مبدا هستند در حالی که یکی زوج و دیگری فرد است.



شکل ۶-۳۳ دو سیگنال زوج و فرد که هر دو دارای یک صفر در مبدا (صفحه **s**) هستند.

مثال (۶-۲۴): ثابت کنید.

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$$

حل: اگر فرض کنیم $x(t)=0$ برای $t<0$ یا $x(t)=x(t)u(t)$ باشد. با بسط $x(t)$ به سری تیلور در حول $t=0^+$ داریم.

$$x(t)=[x(0^+)+x'(0^+)t+x''(0^+)\frac{t^2}{2}+...+x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!}+...]u(t)$$

که تبدیل آن بصورت زیر است.

$$X(s)=[\frac{x(0^+)}{s}+\frac{x'(0^+)}{s^2}+\frac{x''(0^+)}{s^3}+...+\frac{x^{(n)}(0^+)}{s^n}+...]$$

بنابراین

$$\lim_{s\to\infty} sX(s)=x(0^+)$$

مثال (۶-۲۵): با توجه به مثال (۶-۲۴) مقدار $x(0^+)$ را برای تبدیل‌های زیر بیابید.

الف) $X(s)=\dfrac{1}{s+2}$

ب) $X(s)=\dfrac{2s+1}{(s+2)(s+3)}$

حل: الف) با توجه به قضیه مقدار اولیه داریم.

$$\lim_{s\to\infty} sX(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+2}=1$$

ب)

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(2s+1)}{(s+2)(s+3)} = 2$$

مثال (۶-۲۶): یک سیگنال حقیقی مفروض مانند $x(t)$ را در نظر گرفته و ثابت کنید که رابطه زیـر در مورد تبدیل لاپلاس آن صادق است.

$$X(s) = X^*(s^*)$$

حل: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس داریم.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

بنابراین

$$X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-s^*t}dt$$

و چون $x(t) = x^*(t)$

$$X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-s^*t}dt$$

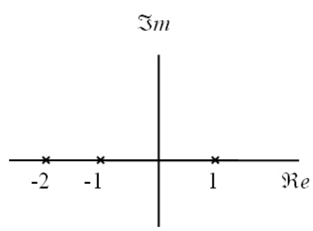
و نهایتا

$$X^*(s^*) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(s^*)^*t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = X(s)$$

مثال (۶-۲۷): با توجه به مثال (۶-۲۹) ثابت کنید که صفرها و قطب‌های تبدیل یـک سـیگنال حقیقـی باید نسبت به محور σ قرینه باشند.

حل: چون $X(s) = X^*(s^*)$ بنابراین اگر $s_p(s_z)$ یـک قطـب (صـفر) تبـدیل باشـد، لازم اسـت حتمـا $s_p^*(s_z^*)$ نیز یک قطب (صفر) تبدیل باشـد، بنـابراین قطـب‌هـا (صـفرها) همـواره بصـورت زوج مخـتلط s_p, s_p^* (s_z, s_z^*) وجود دارند.

مثال (۶-۲۸): نمودار صفر و قطب زیر را در نظر بگیرید و تمام نواحی همگرایی ممکنه را برای آن رسـم کنید و تعیین کنید کدامیک از این نواحی می‌توانند مبین یک سیستم پایدار، سیستم علّی و یا سیستم پایدار علّی باشند.



شکل (۶-۳۴) نمودار صفر و قطب مربوط به مثال ۶-۲۸

حل: نواحی همگرایی ممکنه بصورت زیر هستند.

الف)

$$\Re e[s] < -2$$

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علّی و ناپایدار می باشد. غیر علّـی بخـاطر چـپ‌رو بـودن سیگنال، و ناپایدار بخاطر عدم وجود محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی.

ب)

$$-2 < \Re e[s] < -1$$

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علّی و ناپایدار است. دلیل غیر علّی بودن بخاطر دو طرفه بودن سیگنال است و دلیل ناپایداری مانند حالت (الف) است.

ج)

$$-1 < \Re e[s] < 1$$

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علّی ولی پایدار است. دلیل غیر علّی بـودنماننـد حالـت (الف) است و دلیل پایداری وجود محور $j\omega$ درناحیه همگرایی می‌باشد.

د)

$$\Re e[s] > 1$$

این ناحیه همگرایی مبین یک سیستم ناپایدار است چون شامل محور $j\omega$ نیست و می‌تواند مربوط بـه یک سیستم علّی باشد (البته نه لزوما) چون مبین یک سیگنال راست‌رو می‌باشد.

لازم به ذکر است که تمام سیستم‌هـای علّـی دارای پاسـخ ضـربه راسـت‌رو و محـدود بـه ناحیـه $t > 0$ هستند. در حالیکه لزوما همه سیگنال‌های راست‌رو نمی‌توانند مبـین پاسـخ ضـربه سیسـتم‌هـای علّـی باشند.

مثال (۶-۲۹): سیستمی با پاسخ ضربه زیر مفروض است.

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = e^{2t}$ را بیابید.

حل: ابتدا تبدیل لاپلاس $h(t)$ را می‌یابیم.

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

در اینجا لازم به ذکر است که تبدیل لاپلاس $x(t)$ وجود ندارد. بنابراین نمی‌توان پاسخ را از حاصلضرب تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه و ورودی بدست آورد. اما با توجه به تعریـف کانولوشـن در مـتن درس ثابـت شد که پاسخ سیستم LTI به ورودی به صورت $e^{s_0 t}$ برابر است با

$$y(t) = H(s_0)e^{s_0 t}$$

بنابراین در اینجا بسادگی می‌توان پاسخ را بدست آورد.

$$y(t) = H(2)e^{2t} = \frac{1}{1+2}e^{2t} = \frac{1}{3}e^{2t}$$

مثال (۶-۳۰): یک سیستم LTI علّی با پاسخ ضربه زیر مفروض است.

$$h(t) = e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

مطلوبست معکوس سیستم فوق اگر فرض کنیم معکوس آن علّی باشد.

حل: طبق تعریف سیستم معکوس داریم.

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

بنابراین با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین داریم.

$$H(s)H_i(s) = 1$$

و یا

$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)}$$

بنابراین چون

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + 1 = \frac{s+2}{s+1}$$

برای سیستم معکوس داریم.

$$H_i(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

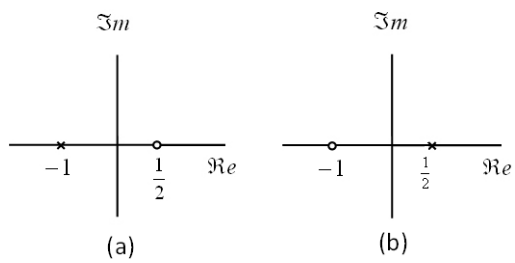
و یا

$$H_i(s) = \frac{s+2}{s+2} - \frac{1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

و در حوزه زمان

$$h_i(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

مثال (۶-۳۱): نمودار صفر و قطب یک سیستم LTI علّی و پایدار در زیر رسم شده است.



شکل (۶-۳۵) نمودار صفر و قطب (**a**)یک سیستم LTI علّی و پایدار (**b**) معکوس سیستم

مطلوبست رسم نمودار صفر و قطب برای سیستم معکوس و تعیین ناحیه همگرایی اگر فرض کنیم سیستم معکوس پایدار باشد.

حل: چون ارتباط تبدیل لاپلاس سیستم و معکوس آن به صورت زیر است.

$$H(s) = \frac{1}{H_i(s)}$$

بنابراین صفرهای سیستم اصلی منطبق بر قطب سیستم معکوس و قطب‌های سیستم اصلی منطبق بر صفر سیستم معکوس خواهند بود؛ بنابراین نمودار صفر و قطب سیستم معکوس بصورت شکل(۶-۳۵**b**) است.

و ناحیه همگرایی سیستم معکوس بدلیل پایداری باید شامل محور $j\omega$ شود.

$$\Re e[s] < \frac{1}{2}$$

مثال (۶-۳۲): طبق تعریف سیستمی کمینه فاز[1] است که خود و معکوس آن علّی و پایدار باشند. ثابت کنید که تمام قطب‌ها و صفرهای سیستم کمینه فاز باید در سمت چپ محور $j\omega$ قرار گرفته باشند.

حل: اولا جهت اینکه سیستم اصلی علّی و پایدار باشد لازم است تمام قطب‌های آن در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند. اما با توجه به آنچه در مثال قبلی توضیح داده شد محل صفرها و قطب‌های سیستم اصلی در سیستم معکوس جابجا می‌شوند. بنابراین جهت اطمینان از علّی و پایدار بودن سیستم معکوس لازم است محل صفرهای سیستم اصلی نیز در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند.

مثال (۶-۳۳): تعیین کنید کدامیک از عبارات زیر صحیح و کدامیک غلط هستند.

الف) تمام قطب‌های یک سیستم پایدار در سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند.

ب) اگر تعداد قطب‌های تابع تبدیل بیش از صفرهای آن باشند و همچنین اگر سیستم علّی باشد در آنصورت پاسخ پله در $t=0$ پیوسته است.

حل: الف) غلط است چون شرط پایداری وجود محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی می‌باشد. بنابراین یک سیستم پایدار می‌تواند قطب‌هایی در سمت راست محور $j\omega$ داشته باشد ولی هنوز هم ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ باشد (پاسخ ضربه سیستم چپ‌رو باشد). در حقیقت برای سیستم پایدار و علّی لازم است که تمام قطب‌ها در سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرند.

ب) صحیح است. چون با توجه به اینکه تعداد قطب‌ها بیش از تعداد صفرها است، پس در $H(s)$ درجه مخرج از درجه صورت بزرگتر است.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

بنابراین مطمئن هستیم که نمی‌توان $H(s)$ را بصورت مجموع یک عدد ثابت و یک کسر که درجه صورت از درجه مخرج کوچکتر است نوشت و به همین دلیل پاسخ ضربه نمی‌تواند شامل ضربه باشد و چون سیستم علّی است پس

$$h(t) = 0 \quad \text{بازاء} \quad t < 0$$

اما پاسخ پله برابر است با انتگرال پاسخ ضربه از $-\infty$ تا لحظه t، بنابراین در حوزه لاپلاس می‌توان تبدیل پاسخ پله را برحسب تبدیل پاسخ ضربه بصورت زیر نوشت.

---

[1] Minimum phase

$$S(s)=\frac{H(s)}{s}$$

بنابراین طبق قضیه مقدار اولیه داریم.

$$s(t=0^+)=\lim_{s\to\infty} sS(s)$$

و یا

$$S(0^+)=\lim_{s\to\infty} H(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{N(s)}{D(s)}$$

و با توجه به اینکه درجه صورت از مخرج کمتر است داریم.

$$s(t=0^+)=0$$

بنابراین پاسخ پله در $t=0^-$ و $t=0^+$ برابر است.

مثال (۶-۳۴): یک سیستم LTI که توسط معادله دیفرانسیل زیر مشخص می‌شود را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)$$

الف) تابع تبدیل سیستم را بیابید.

ب) پاسخ ضربه سیستم را برای هر یک از حالات زیر بدست آورید.

i) سیستم علّی است.

ii) سیستم پایدار است.

iii) سیستم غیر علّی و ناپایدار است.

حل: الف) با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف رابطه داریم.

$$s^2Y(s)-sY(s)-2Y(s)=X(s)$$

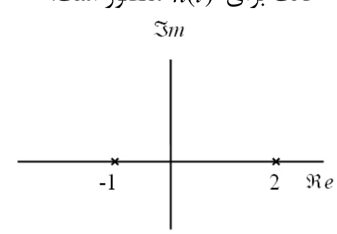
بنابراین

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2-s-2}$$

و یا

$$H(s)=\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}$$

ب) با رسم نمودار صفر و قطب سه حالت برای $h(t)$ متصور است.



شکل (۶-۳۶) نمودار صفر و قطب سیستم مورد بحث در مثال۶-۳۴

i) سیستم علّی و ناپایدار دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$\Re e[s] > 2$$

که پاسخ ضربه آن برابر است با مجموع دو پاسخ ضربه راست‌رو

$$h(t) = (-\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t})u(t)$$

ii) سیستم پایدار و غیر علّی که دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$-1 < \Re e[s] < 2$$

پاسخ ضربه این سیستم از مجموع دو پاسخ ضربه علّی و غیر علّی بدست می‌آید.

$$h(t) = (-\frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t))$$

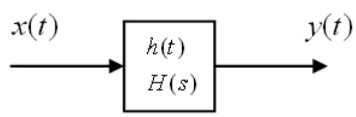
iii) سیستم ناپایدار و غیر علّی که دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$\Re e[s] > -1$$

پاسخ ضربه این سیستم از مجموع دو پاسخ ضربه غیر علّی بدست می‌آید.

$$h(t) = (\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t})u(-t)$$

مثال (۳۵-۶): یک سیستم LTI را با اطلاعات زیر در نظر بگیرید.



شکل (۶-۳۷) مربوط به مثال ۶-۳۵

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}$$
$$x(t) = 0 \quad , t > 0$$
$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

مطلوبست.

الف) $H(s)$ و تعیین ناحیه همگرایی.

ب) $h(t)$.

حل: الف) تبدیل لاپلاس $y(t)$ بصورت زیر است.

$$Y(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}$$

و یا

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s-2)}$$

بنابراین

$$H(s)=\frac{\frac{s}{(s+1)(s-2)}}{\frac{(s+2)}{(s-2)}}=\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

این تابع انتقال دارای دو قطب در $s=-1$ و $s=-2$ است. امـا چـون $y(t)$ محـدود اسـت لازم اسـت سیستم پایدار باشد. ناحیه همگرائی تبدیل لاپلاس $y(t)$ بصورت $-1<\Re e[s]<2$ است. با این ترتیب با توجه به چپ رو بودن $x(t)$ و اینکه $X(s)$ فقط یک قطب دارد پس ناحیه همگرائـی تبـدیل لاپـلاس $x(t)$ به صورت $\Re e[s]<2$ خواهد شد. بنابراین ناحیه همگرایـی سیسـتم بایـد بصـورت $-1<\Re e[s]$ شود تا هم شامل محور $j\omega$ باشد و هم فصل مشترک آن با ناحیه همگرائی $X(s)$ برابر ناحیه همگرائی $Y(s)$ شود. بنابراین ناحیه همگرایی تابع انتقال $H(s)$ بصورت زیر است.

$$\Re e[s]>-1$$

ب) بسادگی با بسط $H(s)$ به کسور جزیی داریم.

$$H(s)=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1}$$

و یا

$$h(t)=(2e^{-2t}-e^{-t})u(t)$$

مثال (۶-۳۶): یک سیستم علّی با پاسخ ضربه $h(t)$ دارای خواص زیر است.

i) هنگـامی کـه ورودی سیسـتم بصـورت $x(t)=e^{2t}$ اسـت، خروجـی آن بصـورت $y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}$ می‌باشد.

ii) پاسخ ضربه آن در معادله دیفرانسیل زیر صادق است.

$$\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=e^{-4t}u(t)+bu(t)$$

که در آن b یک عدد نامعلوم است. مطلوبست تابع تبدیل سیستم.

حل: ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم و نتیجه زیر را بدست می‌آوریم

$$sH(s)+2H(s)=\frac{1}{s+4}+\frac{b}{s}$$

نتیجتا

$$H(s)=\frac{1}{(s+2)(s+4)}+\frac{b}{s(s+2)}$$

و اما اکنون باید مجهول b را بدست آورد. با توجه به تعریف سیستم خطی چون پاسخ سیسـتم خطـی به ورودی e^{s_0t} برابر $H(s_0)e^{s_0t}$ می‌باشد می‌توان نوشت.

$$H(2)=\frac{1}{6}$$

بنابراین

$$H(2)=\frac{1}{4\times 6}+\frac{b}{2\times 4}=\frac{1}{6}$$

بنابراین

$$b=1$$

در نتیجه

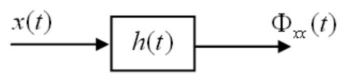
$$H(s)=\frac{2s+4}{s(s+2)(s+4)}=\frac{2}{s(s+4)}$$

مثال (۶-۳۷): تابع همبستگی $\Phi_{xx}(\tau)$ مربوط به سیگنال $x(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x(t-\tau)dt$$

سیستمی را بیابید که اگر ورودی آن $x(t)$ باشد خروجی آن $\Phi_{xx}(\tau)$ باشد.

حل:



شکل (۶-۳۸) سیستمی با ورودی $x(t)$ و خروجی $\Phi_{xx}(\tau)$

جهت یافتن چنین سیستمی ساده‌تر است که ارتباط سیگنال‌های مذکور را در حوزه لاپلاس بیابیم. برای این کار از طرفین رابطه فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty}\Phi_{xx}(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)x(t-\tau)e^{-s\tau}dtd\tau$$

طرف اول مساوی تبدیل لاپلاس $\Phi_{xx}(\tau)$ است که آنرا با $\Psi_{xx}(s)$ نشان می‌دهیم و با تغییر ترتیب انتگرالگیری در طرف دوم به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\Psi_{xx}(s)=\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)[\int_{\tau=-\infty}^{\infty}x(t-\tau)e^{-s\tau}d\tau]dt$$

عبارت داخل کروشه مساوی $X(-s)e^{-st}$ می‌باشد، بنابراین

$$\Psi_{xx}(s)=\int_{t=-\infty}^{\infty}x(t)X(-s)e^{-st}dt$$

و یا

$$\Psi_{xx}(s)=X(s)X(-s)$$

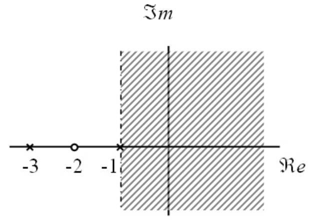
بنابراین سیستم مطلوب باید دارای تابع انتقالی بصورت $X(-s)$ باشد.

$$H(s)=X(-s)$$

و در حوزه زمان

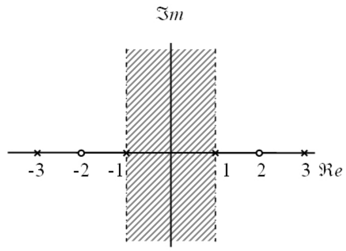
$$h(t)=x(-t)$$

مثال (۶-۳۸): اگر $x(t)$ دارای نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی بصورت شکل (۶-۳۹) باشد، نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی مربوط به $\Phi_{xx}(\tau)$ را رسم کنید.



شکل (۶-۳۹) ناحیه همگرائی و نمودار صفر و قطب تبدیل $x(t)$

حل: چون ۱- و ۳- قطب‌های $X(s)$ هستند، ۱ و ۳ قطب‌های $X(-s)$ می‌باشند؛ و چون ۲- صفر $X(s)$ است، ۲ صفر $X(-s)$ می‌باشد. بنابراین نمودار صفر و قطب مربوط به حاصلضرب $X(s)X(-s)$ بصورت زیر است.

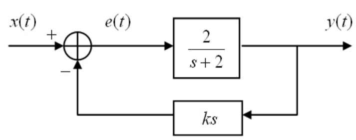


شکل (۶-۴۰) ناحیه همگرائی و نمودار صفر و قطب تبدیل $\Phi_{xx}(\tau)$

با توجه اینکه $x(t)$ راست‌رو است $x(-t)$ چپ‌رو است و ناحیه همگرایی آن $\Re e[s]<1$ می‌باشد. بنابراین ناحیه همگرایی حاصلضرب $X(-s)X(s)$ فصل مشترک دو ناحیه همگرایی مربوط به $x(t)$ و $x(-t)$ می‌باشد و یا

$$-1<\Re e[s]<1$$

مثال (۶-۳۹): سیستم علّی زیر را در نظر بگیرید



شکل (۶-۴۱) سیستم علی مربوط به مثال ۶-۳۹

تعیین کنید این سیستم به ازاء چه مقادیری از k پایدار است.

حل: ابتدا لازم است تابع انتقال کل سیستم را بدست آورد.

$$E(s)=X(s)-ksY(s)$$

و

$$Y(s)=E(s)\frac{2}{s+2}$$

نتیجتا

$$Y(s)(s+2)=2X(s)-2ksY(s)$$

و یا

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2}{s+2+2ks}=\frac{2}{(1+2k)s+2}$$

$$H(s)=\frac{\frac{2}{1+2k}}{s+\frac{2}{1+2k}}$$

چون سیستم علّی است شرط لازم و کافی جهت پایداری این است که تمـام قطـب‌هـا در سـمت چـپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند. بنابراین لازم است که

$$\frac{2}{1+2k}>0$$

و یا

$$1+2k<2$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2}>k$$

مثال ۶-۴۰: مطلوبست $X(s)$ اگر $x(t)=\frac{-1}{t}u(t)$.

حل: می دانیم

$$-tx(t)\leftrightarrow\frac{dX(s)}{ds}$$

بنابراین با توجه به صورت مسئله داریم.

$$-tx(t)=u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}=\frac{dX(s)}{ds}\Rightarrow X(s)=Ln(s)\;\;;\,\mathrm{Re}(s)>0$$

مثال (۶-۴۱): مطلوبست $x(t)$ اگر $X(s)=\frac{e^{s}}{s+1}$ با ناحیه همگرایی $\Re e\{s\}>-1$.

حل: از قبل می‌دانیم که

$$e^{-t}u(t)\xleftrightarrow{\wp}\frac{1}{s+1}\qquad\Re e\{s\}>-1$$

بنابراین با انتقال در حوزه زمان داریم.

$$e^{-(t-1)}u(t-1)\xleftrightarrow{\wp}\frac{e^{s}}{s+1}\qquad\Re e\{s\}>-1$$

همانطور که دیدیم، همواره تلفیق خواص مختلف راهگشای محاسبات جالـب در مـورد تبـدیل لاپـلاس خواهد بود.

مسائل فصل ششم

۱-۶ تبدیل لاپلاس هر یک از سیگنال‌های زیر را یافته و ناحیه همگرایی‌اش را معلوم کنید.

الف) $t^2 e^{-at} u(t)$ و $a < 0$

ب) $\cos(\omega_0 t + \varphi) u(t)$

ج) $\sin(\omega_0 t + \varphi) u(t)$

د) $t^2 e^{-a|t|}$ و $a > 0$

هـ) $tu(t)$

و) $u(t)$

ز) $\delta(at + b)$ و a و b اعداد ثابت.

ح) $\sum_{i=0}^{\infty} k_i e^{-s_i t} u(t)$ و $s_i > 0$

ط) $\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta'(t)$

ی) $\frac{k}{k + t^2}$ و k عدد ثابت مثبت.

ک) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(t + kT)$ و a_k عدد ثابت.

ل) $[1 - e^{-t} + 3 + e^{-2t}] u(t)$

م) $t\cos(t)u(t)$

ن) $t\sin(t)u(t)$

س) $t^2\cos(2t)u(t)$

ع) $t^2 u(t-2)$

ف) $te^{-at} u(t+1)$

۲-۶ پاسخ ضربه یک سیستم LTI بصورت زیر است.

$$h(t) = te^{-t} u(t)$$

پاسخ این سیستم را به ورودی‌های زیر بیابید.

الف) $x(t) = u(t)$

ب) $x(t) = e^{2t}$

ج) $x(t) = \cos(2t)$

د) $x(t) = 1$

۳-۶ ورودی یک سیستم مفروض به صورت زیر است.

$$x(t) = e^{2t}$$

اگر خروجی آن به صورت زیر باشد.

$$y(t) = \frac{2}{3} e^{2t} + e^{-2t}$$

تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.

۴-۶ ورودی یک سیستم مفروض به صورت زیر است.

$$x(t) = e^{-t}\cos 2t$$

اگر خروجی آن به صورت زیر باشد.

$$y(t) = e^{-t}\sin 2t$$

تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.

۵-۶ ورودی یک سیستم مفروض بصورت زیر است.

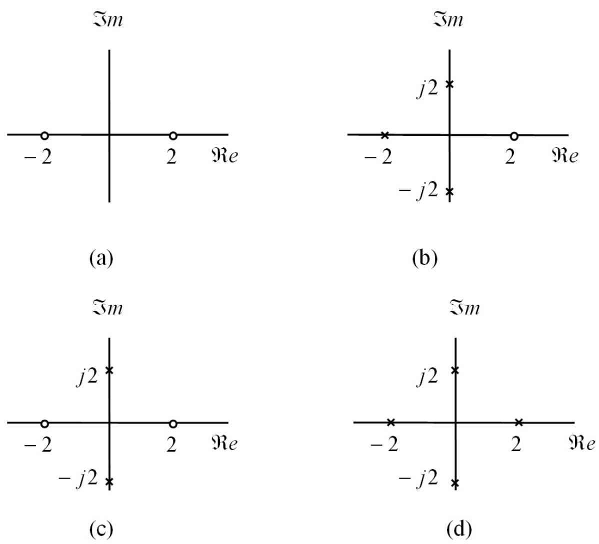
$$x(t) = e^{t}u(t)$$

اگر خروجی آن بصورت زیر باشد.

$$y(t) = 2e^{t}u(t)$$

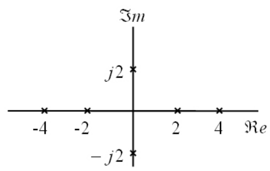
تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.

۶-۶ تعیین کنید کدامیک از نمودارهای صفر و قطب زیر می‌توانند احتمالامبین یک سیگنال زوج، فـرد و یا نه زوج و نه فرد باشد.



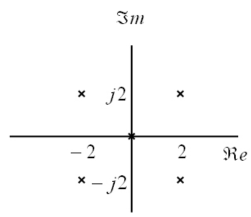
شکل (۶-۴۲) مربوط به مسئله ۶-۶

۷-۶ نمودار صفر و قطب زیر مربوط به یک سیگنال چپ‌رو می‌باشد؛ تعیین کنید که آیـا تبـدیل فوریـه این سیگنال وجود دارد یا خیر.



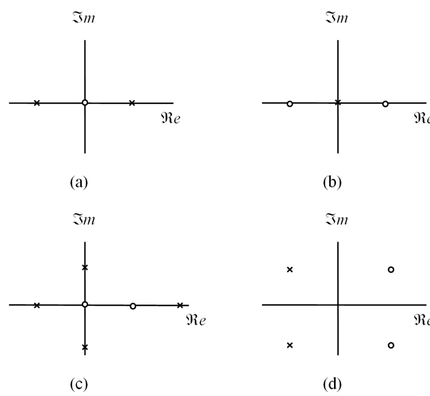
شکل (۶-۴۳) مربوط به مسئله ۶-۷

۶-۸ نمودار صفر و قطب زیر مربوط به یک سیستم علّی می‌باشد؛ تعیین کنید که آیا این سیستم پایدار است یا خیر.



شکل (۶-۴۴) مربوط به مسئله ۶-۸

۶-۹ کدامیک از نمودارهای صفر و قطب زیر می‌تواند مربوط به یک سیستم علّی پایدار باشد.



شکل (۶-۴۵) مربوط به مسئله ۶-۹

۶-۱۰ تبدیل لاپلاس معکوس را بیابید.

الف) $\Re e[s] < -2$ و $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

ب) $\Re e[s] > -1$ و $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

ج) $\Re e[s] > 1$ و $X(s) = \dfrac{s^2}{(s+1)(s-1)}$

د) $\Re e[s]<-1$ و $X(s)=\dfrac{s^2+s-1}{(s+1)^2}$

هـ) $\Re e[s]>1$ و $X(s)=\dfrac{e^{-2s}}{(s-1)^2}$

و) $\Re e[s]<-1$ و $X(s)=\dfrac{s}{s^2+2s+1}$

ز) $\Re e[s]>-1$ و $X(s)=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

ح) $\Re e[s]<-1$ و $X(s)=e^s\dfrac{1}{s+1}+e^{-s}\dfrac{1}{s-1}$

ط) $\Re e[s]<-1$ و $X(s)=e^s\dfrac{1}{s+1}+e^{-s}\dfrac{1}{s-1}$

ی) $\Re e[s]<-3$ و $X(s)=\dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

ک) $\Re e[s]<a$ و $X(s)=\dfrac{s+a}{s-a}$ و $a>0$

ل) $\Re e[s]>-a$ و $X(s)=\dfrac{s-a}{s+a}$ و $a>0$

م) تمام صفحه $ROC=s$ و $X(s)=\sum_{i=0}^{N}k_ie^{-a_is}$ و a_i,k_i عدد ثابت

ن) $\Re e[s]>1$ و $X(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s-1}e^{2s}$

س) $\Re e[s]<0$ و $X(s)=1+\dfrac{s^2-1}{s^2+1}$

ع) $\Re e[s]<-1$ و $X(s)=1+\dfrac{s^2+1}{s^2-1}$

ف) $\Re e[s]<0$ و $X(s)=\dfrac{s^2}{s^2+4}$

ص) $\Re e[s]<-2$ و $X(s)=\dfrac{s}{s^2-4}+1$

ق) $\Re e[s]<-1$ و $X(s)=\dfrac{s^2-1}{(s+1+j)(s+1-j)}$

ر) $\Re e[s]>1$ و $X(s)=\dfrac{2s-1}{(s^2+1)(s^2-1)s}$

۶-۱۱ $H(s)$ مبین تابع انتقال یک سیستم علّی و پایدار است. ورودی این سیستم شامل سه عبارت است. یکی از آنها یک ضربه و دیگری یک نمایی مختلط است. اما از جمله سوم ورودی اطلاعی در دست نداریم. خروجی این سیستم به ورودی فوق الذکر برابر است با

$$y(t) = -6e^{-t}u(t) + \frac{4}{34}e^{4t}\cos(3t) - \frac{18}{34}e^{4t}\sin(3t) + \delta(t)$$

مطلوبست تعیین $H(s)$.

۶-۱۲ سیگنال $y(t) = e^{-2t}u(t)$ خروجی یک سیستم LTI علّی با تابع انتقالی بصورت زیر می‌باشد.

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

الف) تمام ورودی‌های ممکن را بیابید.

ب) کدامیک از این ورودی‌ها بطور مطلق انتگرالپذیر است؛ یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt \langle \infty$$

۶-۱۳ سیستمی پایدار با تابع انتقال زیر مفروض است.

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 - 3s + 2}$$

خروجی این سیستم را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = e^{-|t|} \qquad -\infty \langle t \langle \infty$$

۶-۱۴ خروجی سیستم مذکور در مساله ۶-۱۳ را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = e^{-|t|}\cos t \qquad -\infty \langle t \langle \infty$$

۶-۱۵ خروجی یک سیستم علّی با تابع انتقال

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

به ورودی مفروض $x(t)$ بصورت زیر است.

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

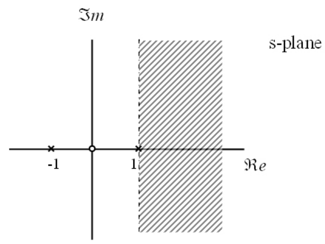
اگر ورودی این سیستم $\frac{d^3x(t)}{dt^3} + \frac{dx(t)}{dt}$ باشد مطلوبست خروجی سیستم.

۶-۱۶ یک سیستم LTI علّی که توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

اگر ورودی سیستم بصورت $\delta'(t) + \delta(t) + u(t)$ باشد مطلوبست خروجی سیستم.

۶-۱۷ نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی شکل (۶-۴۶) مربوط به یک سیستم با تابع تبدیل کسری می‌باشد. پاسخ ضربه را بیابید. اگر پاسخ سیستم به ورودی e^{2t} برابر e^{2t} باشد.



شکل (۶-۴۶) مربوط به مسئله ۶-۱۷

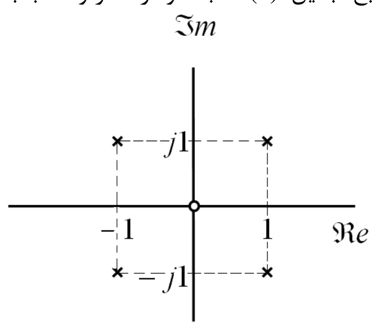
۶-۱۸ پاسخ ضربه یک سیستم LTI علّی بصورت زیر است.

$$h(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

مطلوبست خروجی سیستم اگر ورودی آن بصورت زیر باشد.

$$x(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

۶-۱۹ یک سیستم LTI دارای تابع تبدیل $H(s)$ با نمودار صفر و قطب بصورت زیر است.



شکل (۶-۴۷) مربوط به مسئله ۶-۱۹

تمام حالت‌های ممکنه $h(t)$ را یافته و خواص سیستم را در هر یک از حالات بیان کنید.

۶-۲۰ اگر $\chi(s)$ مبین تبدیل لاپلاس یکطرفه $x(t)$ باشد تبدیل لاپلاس یکطرفه هر یک از سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $x(t-t_0)$

ب) $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

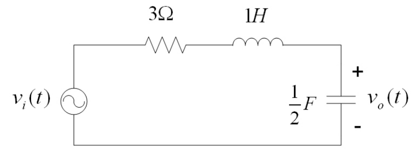
ج) $x(t+t_0)$

د) $\dfrac{dx(t)}{dt}$

هـ) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

ز) $\dfrac{d^3x(t)}{dt^3}$

۶-۲۱ معادله دیفرانسیل مربوط کننده $v_o(t)$ به $v_i(t)$ در مدار زیر را بیابید و با فرض $v_i(t)=e^{-3t}u(t)$ خروجی را برای $t>0$ بیابید.

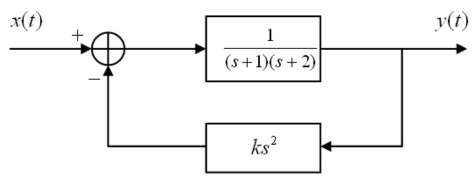


شکل (۶-۴۸) مربوط به مسئله ۶-۲۱

۶-۲۲ تابع انتقال فیلتر باترورث را پیدا کنید. اگر بدانیم این فیلتر علّی و پایدار است و

$$|H(j\omega)|^2=\frac{1}{1+(j\omega/j\omega_c)^{2N}}$$

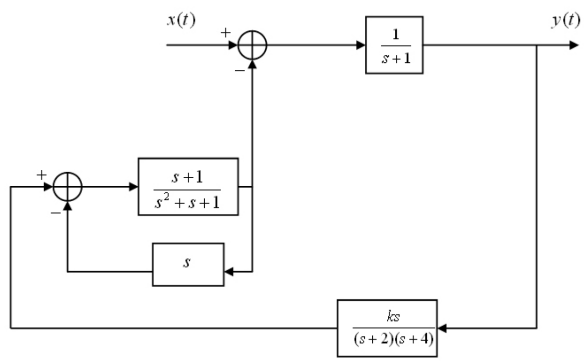
۶-۲۳ سیستم علّی زیر را در نظر بگیرید.



شکل (۶-۴۹) مربوط به مسئله ۶-۲۳

تعیین کنید این سیستم به ازاء چه مقادیری از k احتمالا پایدار می‌شود.

۶-۲۴ سیستم علّی زیر را از لحاظ پایداری به ازاء مقادیر مختلف k مورد بررسی قرار دهید.



شکل (۶-۵۰) مربوط به مسئله ۶-۲۴