فصل هفتم

تبدیل Z

مقدمه

در فصل قبلی، تبدیل لاپلاس را بعنوان تعمیمی منطقی از تبدیل فوریه پیوسته زمانی بررسی کردیم. این تعمیم باعث شد که تبدیل لاپلاس در دامنه وسیع‌تری از سیگنال‌ها، قابل کاربرد باشد (نسبت به تبدیل فوریه). چون بسیاری از سیگنال‌هائی که تبدیل فوریه ندارند تبدیل لاپلاس دارند. در این فصل تبدیل z که معادل گسسته زمانی تبدیل لاپلاس و تعمیمی از تبدیل فوریه گسسته زمانی است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانگونه که خواهیم دید بسیاری خواص تبدیل z مشابه خواص تبدیل لاپلاس خواهد بود. اما همانگونه که خواهیم دید علاوه بر تشابهات فراوان میان تبدیل لاپلاس و تبدیل z، تفاوت‌های عمده‌ای نیز بین این دو وجود دارد. که ناشی از ماهیت کاملاً متفاوت این دو نوع تبدیل می‌باشد. البته پیش‌بینی این تفاوت‌ها با توجه به اینکه تبدیل z یک عملگر گسسته زمان و تبدیل لاپلاس یک عملگر پیوسته زمان است کاملاً امکان پذیر می‌باشد.

۷-۱ تعریف تبدیل z

همانگونه که در فصل چهارم دیدیم، برای سیستم LTI گسسته زمانی با پاسخ ضربه $h[n]$، پاسخ سیستم به ورودی نمایی مختلط $x[n]=z^n$ چنین است.

$$y[n]=H(z)z^n \tag{۷-۱}$$

که در آن

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]z^{-n} \tag{۷-۲}$$

اگر $z=e^{j\Omega}$ باشد (یا $|z|=1$) و اگر Ω نیز حقیقی باشد، مجموع (۷-۲) متناظر با تبدیل فوریه گسسته زمانی $h[n]$ خواهد بود. اما در حالت کلی اگر $|z|$ معین نباشد، مجموع (۷-۲)، تبدیل z دنباله $h[n]$ است. پس تبدیل z دنباله $x[n]$ بدینصورت تعریف می‌شود.

$$X(z)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n} \tag{۷-۳}$$

واین تناظر بطور مختصر با علامت زیر نمایش داده می‌شود.

$$x[n]\overset{z}{\leftrightarrow}X(z) \tag{۷-۴}$$

همانگونه که تبدیل لاپلاس نقش مهمی در تحلیل سیستم‌های پیوسته زمان دارد تبدیل z نیز ابزاری کارآمد در تجزیه و تحلیل سسیستم‌های گسسته زمان بشمار می‌رود. در رابطه (۷-۳) چون z یک عدد مختلط است می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت.

$$z=re^{j\Omega} \tag{۷-۵}$$

با قرار دادن (۷-۵) در (۷-۳) داریم.

$$X\left(re^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\left(re^{j\Omega}\right)^{-n}$$

یا بطور معادل

$$X\left(re^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{x[n]r^{-n}\right\}e^{-j\Omega n} \tag{۷-۶}$$

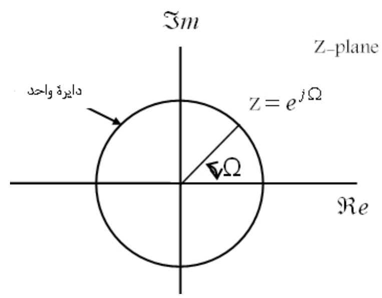
پس $X\left(re^{j\Omega}\right)$ تبدیل فوریه گسسته زمان $x[n]r^{-n}$ است. یعنی

$$X\left(re^{j\Omega}\right)=F\left\{x[n]r^{-n}\right\} \tag{۷-۷}$$

جمله r^{-n} بسته به مقدار r ممکن است نسبت به n افزایشی یا میرا باشد. اگر r بزرگتر از واحد باشد، افزایشی و اگر کوچکتر از واحد باشد میرا است. از طرف دیگر می‌توان گفت تبدیل z بازاء $|z|=1$ همان تبدیل فوریه خواهد بود، یعنی

$$X(|z|=1)=F\{x[n]\} \tag{۷-۸}$$

همانطور که قبلاً گفتیم، تبدیل لاپلاس وقتی که مقدار حقیقی "s" صفر باشد به تبدیل فوریه تبدیل می‌شود. بعبارت دیگر تبدیل لاپلاس روی محور موهومی مساوی تبدیل فوریه است. بطریق مشابه می‌توان گفت تبدیل z وقتی که $|z|=1$ است به تبدیل فوریه گسسته زمانی تبدیل می‌شود. بنابراین تبدیل z روی دایرهٔ واحد (ر.ک.ش.۷-۱)با تبدیل فوریه گسسته زمانی برابر است. پس همانگونه که تبدیل لاپلاس تعمیمی از تبدیل فوریه پیوسته زمان است می‌توان تبدیل z را تعمیمی از تبدیل فوریه گسسته زمان در نظر گرفت. بنابراین بسیاری از دنباله‌هائی که تبدیل فوریه ندارند دارای تبدیل z خواهند بود.



شکل (۷-۱): نمایش متغیر مختلط z در صفحه مختلط

دایرهٔ واحد در مورد تبدیل z نقش مهمی مشابه نقش محور $j\omega$ در مورد تبدیل لاپلاس ایفا می‌کند. با توجه به معادلهٔ (۷-۷) می‌توان گفت که شرط وجود (همگرایی) تبدیل z همگرایی تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ است. برای هر سیگنال مشخص ممکن است این همگرایی بازاء مقادیر مشخصی از r میسر شود. همانند تبدیل لاپلاس، دامنهٔ مقادیری از **z** که تبدیل **z** همگرا می شود محدود به ناحیه همگرایی[1] (ROC) است. اگر (ROC) شامل دایرهٔ واحد شود می‌توان گفت تبدیل فوریه هم همگرا خواهد بود (وجود دارد) برای واضح شدن مطلب به مثال ۷-۱ توجه کنید.

مثال(۷-۱): فرض کنید $x[n]=a^nu[n]$ باشد در آنصورت تبدیل z دنباله $x[n]$ برابر است با

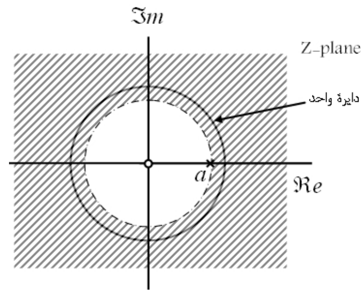
[1] Region of convergence

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(az^{-1}\right)^n \qquad (۷-۹)$$

برای همگرایی $X(z)$ لازم است که طرف دوم تساوی همگرا شود. پس ناحیهٔ همگرایی شامل مقادیری از z است که بازاء آنها $\left|az^{-1}\right|<1$ شود، یا $|z|>|a|$ بنابراین

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(az^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a| \qquad (۷-۱۰)$$

بنابراین اگر a محدود باشد، $X(z)$ همگرا خواهد شد. اگر $|a|<1$ باشد چون ناحیهٔ همگرایی شامل دایرهٔ واحد می‌شود، پس تبدیل فوریه وجود خواهد داشت. اما اگر $|a|>1$ باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت. نمودار صفر-قطب و ROC مثال (۷-۱) در شکل (۷-۲) ترسیم شده است.



شکل (۷-۲): ROC مربوط به $x[n]=a^n u[n]$

با توجه به شکل اگر $|a|<1$ باشد تبدیل فوریه سیگنال وجود خواهد داشت. مشخص کردن ROC علاوه بر عبارت جبری $X(z)$ بسیار مهم می‌باشد و در حقیقت شرط یکتا بودن تبدیل z نیز همین است در این مورد مثال (۷-۲) را ببینید.

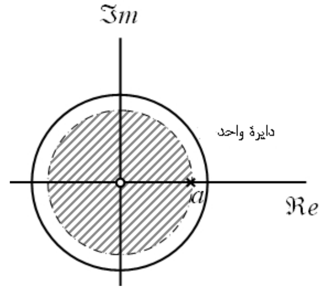
(۷-۲): اکنون فرض کنید

$$x[n]=-a^n u[-n-1]$$

بنابراین

$$\begin{aligned} X(z)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}-a^n z^{-n} u[-n-1] \\ &=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(az^{-1}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^{-n} \\ &=1-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a^{-1}z\right)^n=1-\frac{1}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \end{aligned} \qquad (۷-۱۱)$$

اگر $\left|a^{-1}z\right|<1$ باشد ($|z|\le|a|$) تبدیل **z** وجود دارد(ر.ک.ش.۷-۳). در اینجا اگر $|a|>1$ باشد تبدیل فوریه همگرا خواهد شد واگر $|a|<1$ باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت. با توجه به این دو مثال می‌توان قضاوت کرد که $X(z)$ همواره کسری خواهد بود اگر $x[n]$ ترکیب خطی از نمائی‌های حقیقی یا مختلط باشد.



شکل (۷-۳): ROC مربوط به $x[n]=-a^n u[-n-1]$

با توجه به شکل اگر $|a|>1$ باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت.

مثال (۷-۳): اکنون دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{۱۳-۷}$$

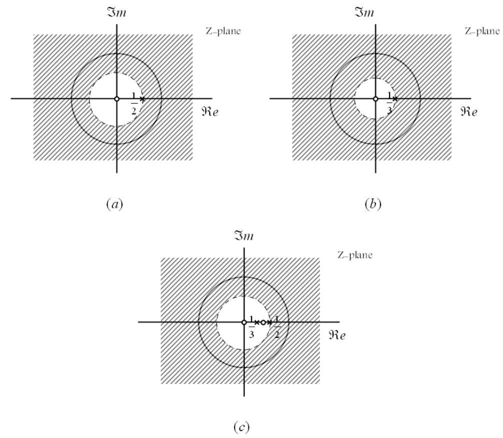
تبدیل z چنین است.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}u[n]+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}u[n] \tag{۱۴-۷}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=\frac{z\left(2z-\frac{5}{6}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \tag{۱۵-۷}$$

برای همگرا بودن $X(z)$ لازم است که هر دو مجموع (۷-۱۵) همگرا باشند. پس باید $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$ و هم $\left|z^{-1}\frac{1}{3}\right|<1$. یا بطورمعادل باید $|z|>\frac{1}{2}$ و $|z|>\frac{1}{3}$ شود، که بدین ترتیب ROC فصل مشترک این دو می‌شود، یعنی $|z|>\frac{1}{2}$ (ر.ک.ش.۷-۴).



شکل (۷-۴): a) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ b) ناحیۀ همگرایی و نمودار صفر و قطب $x_2[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ c) ناحیۀ همگرایی و نمودار صفر و قطب $x_3[n]=x_1[n]+x_2[n]$

از مثال زیر می‌توان به خاصیت خطی بودن تبدیل z پی برد، چون اگر داشته باشیم.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \qquad ,|z|>\frac{1}{2} \tag{۱۶-۷}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \qquad ,|z|>\frac{1}{3} \tag{۱۷-۷}$$

در آنصورت

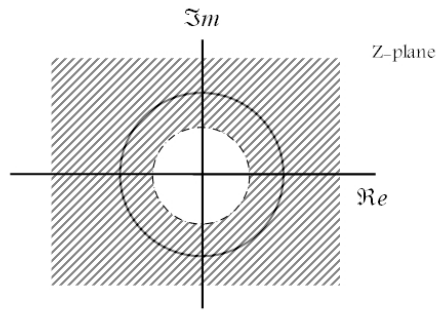
$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \qquad ,|z|>\frac{1}{2} \tag{۱۸-۷}$$

نکته جالبی دیگری که از این سه مثال به آن پی می‌بریم این است که بـرای دنبالـه‌هـائی کـه در n<0 مساوی صفر هستند، $X(z)$ فقط شامل توان‌های منفی z است. پس برای اینگونه دنبالـه‌هـا مناسـب‌تـر است که $X(z)$ را بر حسب چند جمله‌ای از توان z^{-1} بیان نمود (نه بر حسب z). بدین ترتیب بررسـی محل قطب‌ها و ناحیه همگرائی ساده‌تر خواهد بود.

۲-۷ ناحیۀهمگرایی تبدیل z

در این قسمت مشابه فصل قبل خواصی برای ناحیـه همگرایـی ذکـر مـی‌شـود کـه در شـناخت ناحیـه همگرایی فقط با دانستن نمودار صفر وقطب کمک می‌کنند و همانند ناحیه همگرایی در تبدیل لاپـلاس بسیاری از خواص سیستم‌ها و دنباله‌ها را می‌توان از شکل نواحی همگرایی آنها استخراج کرد.

خاصیت ۱: ناحیه همگرایی $X(z)$ شامل یک حلقه در صفحه z است که مرکز آن مبدأ مختصات می‌باشد (به شکل (۷-۵) دقت کنید). همانطور که گفتیم ROC شامل مقادیری از $z = re^{j\Omega}$ است که بازاء آن تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ همگرا می‌باشد. بنابراین ناحیه همگرایی فقط به $|z| = r$ بستگی دارد و به Ω بستگی ندارد. در نتیجه برای یک مقدار مشخص z_0 در ROC، تمام مقادیر z که دارای دامنه‌ای برابر z_0 هستند در ROC قرار می‌گیرند.



شکل (۷-۵): ناحیه همگرایی در حالت کلی شامل یک حلقه در صفحه**z** است.

خاصیت ۲: ROC شامل هیچ قطبی نمی‌شود.

همانند تبدیل لاپلاس این خاصیت نتیجه این واقعیت است که $X(z)$ در قطب بینهایت است و در قطب همگرا نمی‌شود.

خاصیت ۳: اگر $x[n]$ دارای دورهٔ محدود باشد، ROC شامل تمام صفحهٔ z بجز احتمالاً $z = 0$ یا $z = \infty$ می‌شود. چون یک دنباله با دوره محدود دارای تعداد محدودی غیر صفر است. به عنوان مثال از $n = N_1$ تا $n = N_2$ که N_1 و N_2 محدودند. بنابراین تبدیل z فقط شامل چند نقطه خواهد بود (رابطه ۷-۱۹).

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \tag{۱۹-۷}$$

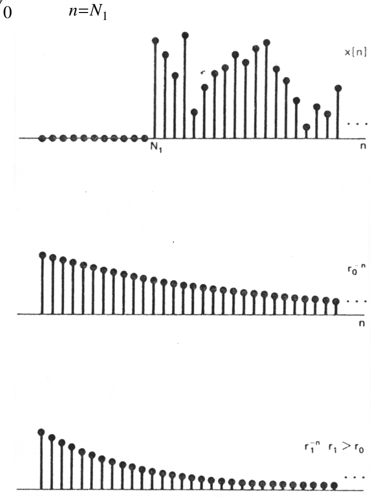
اگر z مساوی صفر یا بینهایت نباشد هر جمله در مجموع فوق محدود و در نتیجه $X(z)$ همگرا خواهد شد. اگر N_1 منفی و N_2 مثبت باشد بگونه‌ای که $x[n]$ دارای مقادیر غیر صفر در هر دو طرف محور ($n < 0, n > 0$) باشد، نتیجتاً مجموع (۷-۱۹) شامل توان‌های مثبت و منفی از z خواهد بود. با میل کردن $|z|$ بسمت صفر جمله‌هایی که شامل توان‌های منفی z هستند نامحدود می‌شوند و با میل کردن $|z|$ بسمت بینهایت جمله‌هایی که شامل توان‌های مثبت z هستند نامحدود می‌شوند. بنابراین ROC نمی‌تواند شامل صفر یا بینهایت شود. اگر N_1 صفر یا مثبت شود در اینصورت فقط توان‌های منفی z در معادله (۷-۱۹) ظاهر می‌شوند ودر نتیجه ROC شامل $z = \infty$ خواهد بود. بالعکس اگر $N_2 = 0$ یا منفی باشد، فقط جمله‌های با توان مثبت z در معادلهٔ (۷-۱۹) ظاهر می‌شوند و در نتیجه ROC شامل $z = 0$ می‌شود.

خاصیت۴: اگر $x[n]$ یک دنباله راست‌رو و اگر $|z| = r_0$ در ROC واقع باشد، در آنصورت همه مقادیر z که در نامعادله $|z| < r_0$ صدق می‌کنند، در ROC قرار خواهند گرفت. توضیح این خاصیت دقیقاً مشابه توضیح خاصیت ۴ در فصل قبل است. یک دنباله راست رو، بازا مقادیر n که کوچکتر از یک مقدار مشخص n_0 باشند مساوی صفراست. اگر دایرهٔ $|z| = r_0$ در ROC قرار گیرد، $x[n]r_0^{-n}$ بطور مطلق جمع‌پذیر خواهد بود (تبدیل فوریه $x[n]r_0^{-n}$ موجود است). از آنجائیکه دنباله $x[n]$، راست‌رو است حاصلضرب عبارت $x[n]$ در هر دنباله نمایی r_0^{-n} که با افزایش n با سرعتی بیش از r_0^{-n} کاهش یابد نیز بطور مطلق جمع‌پذیر خواهد بود (به شکل (۷-۶) توجه کنید). به عبارت ریاضی اگر فرض کنیم $|z| = r_1$

$$|X(z)| \le \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]||z^{-n}| = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \frac{r_1^{-n}}{r_0^{-n}} r_0^{-n}$$

چون $r_1 > r_0$ است پس تابع $(\frac{r_1}{r_0})^{-n}$ یک تابع نمائی کاهنده است و بیشترین مقدارش را در فاصله وجود $x[n]$ در $n = N_1$ اتخاذ می کند. پس

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| (\frac{r_1}{r_0})^{-n} r_0^{-n} \le (\frac{r_1}{r_0})^{-N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \le \infty$$



شکل (۷-۶): اگر حاصلضرب $x[n]r_0^{-n}$ همگرا باشد حتماً حاصلضرب $x[n]r_1^{-n}$ $(r_1 > r_0)$ همگراست.

برای یک دنباله راست رو،معادله (۷-۳) بصورت زیر در خواهد آمد.

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad (۷-۲۰)$$

که N_1 محدود ولی ممکن است مثبت یا منفی باشد. اگر N_1 منفی باشد مجموع رابطه (۷-۲۰) شامل عبارت‌هایی با توان مثبت z می‌باشد که با میل کردن $|Z|$ بسمت بینهایت بطور نامحدود بزرگ می‌شود. بنابراین برای یک دنباله راست‌رو در حالت عمومی ROC شامل بینهایت نخواهد شد.

خاصیت۵: اگر $x[n]$ یک دنباله چپ‌رو و اگر دایرهٔ $|z| = r_0$ در ROC قرار داشته باشد،در اینصورت همه مقادیر z که در نامعادله $0 < |z| < r_0$ صدق کنند در ROC قرارخواهند گرفت.

از اثبات این خاصیت که مشابه خاصیت قبلی ثابت می‌شود صرفنظر می‌گردد.

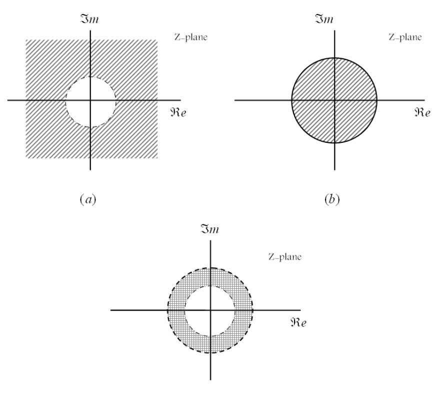
برای یک دنباله چپ‌رو معادله (۷-۳) که بیانگر تبدیل z است بصورت معادله (۷-۲۱)در می‌آید.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n] z^{-n} \qquad (۷-۲۱)$$

که در آن N_2 ممکن است مثبت و یا منفی باشد. اگر N_2 مثبت باشد معادله (۷-۲۱) شامل توان‌های منفی z نیز خواهد بود که با میل کردن $|Z|$ بسمت صفر، بطور نامحدود بزرگ خواهند شد. نتیجتاً در حالت کلی برای دنباله‌های چپ‌رو، ROC شامل z=0 نخواهد بود. البته در حالت خاص برای دنباله‌های" ضدعلی"($x[n] = 0$ برای $n \geq 0$) که برای آنها N_2 در معادله (۷-۲۱) کوچکتر یا مساوی صفر است، ROC شامل z=0 خواهد بود.

خاصیت۶: اگر $x[n]$ دو طرفه و اگر دایره $|z| = r_0$ در ROC قرار داشته باشد،در اینصورت ROC شامل یک حلقه در صفحه z است که شامل دایرهٔ $|z| = r_0$ خواهد بود.

مشابه خاصیت ۶ تبدیل لاپلاس (فصل قبل) می‌توان یک دنباله دوطرفه را، بصورت مجموع دو دنباله راست‌رو و چپ‌رو تفکیک کرد. ROC برای قسمت راست‌رو ناحیه‌ای است که از داخل بوسیله یک دایره محدود می‌شود و از خارج تا بینهایت ادامه پیدا می‌کند. ولی ROC برای قسمت چپ‌رو ناحیه‌ای است که از خارج بوسیله یک دایره محدود شده و تا صفر ادامه پیدا می‌کند. بنابراین فصل مشترک این دو ناحیه همگرایی یک حلقه خواهد بود (به شکل ۷-۷توجه کنید).



شکل (۷-۷): ناحیه همگرایی یک دنباله با دوره محدود از فصل مشترک نواحی همگرایی دو دنباله راست‌رو و چپ‌رو بدست می‌آید.

البته گاهی ممکن است یک یا دو ناحیه همگرایی فصل مشترک نداشته باشند که در آنصورت تبـدیل z وجود نخواهد داشت. اکنون خواص گفته شده را به کمک چندین مثال توضیح می‌دهیم.

مثال (۷-۴): دنباله دوره محدود زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n]=\begin{cases} a^n & 0\le n\le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad a>0 \tag{۷-۲۲}$$

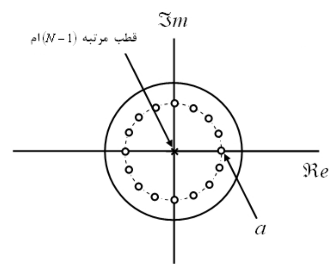
بنابر این

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(az^{-1}\right)^n \tag{۷-۲۳}$$

وبااستفاده از خاصیت تصاعد هندسی

$$X(z)=\frac{1-\left(az^{-1}\right)^N}{1-az^{-1}}=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a} \tag{۷-۲۴}$$

چون $x[n]$ دارای طول محدود است. از خاصیت ۳ پی می‌بریم که ROC شامل همـه صـفحه z اسـت بجز احتمالاً مبدا و یا ∞. در حقیقت چون $x[n]$ برای $n<0$ مساوی صـفر اسـت ROC تـا بینهایـت امتداد پیدا می‌کند. اما چون $x[n]$ برای بعضی از مقادیر مثبـت n غیـر صـفر اسـت ROC نمـی‌توانـد شامل مبدا باشد. این مطلب از (۷-۲۳) هم کاملاً پیداست. اگر نمودار صـفروقطب را بـرای $X(z)$ رسـم کنیم می‌بینیم که $X(z)$ دارای یک قطب مرتبه $(N-1)$ام در z=0 است و همچنین N ریشه صـورت نیز در نقـاط $\left(z_k=ae^{j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)},k=0,1,.....N-1\right)$ قـرار دارنـد. صـفر بـه ازا $k=0$، قطـب در $z=a$ را خنثی می‌کند. در نتیجه تنها یک قطب در مبدا خواهیم داشت. پس ناحیه همگرایی همه صفحه z بجز z=0 است.



شکل (۷-۸):نمودار قطب-صفر برای $X(z)$ مربوط به مثال (۷-۴)

مثال (۷-۵): (دنباله دو طرفه) فرض کنید.

$$x[n]=b^{|n|},b>0 \tag{۷-۲۴}$$

این دنباله در شکل (۷-۹) رسم شده است.

اگر بخواهیم تبدیل z این دنباله دو طرفه را بدست آوریم باید ابتدا آنرا به دو دنبالـه چـپ‌رو و راسـت‌رو تقسیم کنیم، بنابراین داریم.

$$x[n]=b^{n}u[n]+b^{-n}u[-n-1] \tag{۲۵-۷}$$

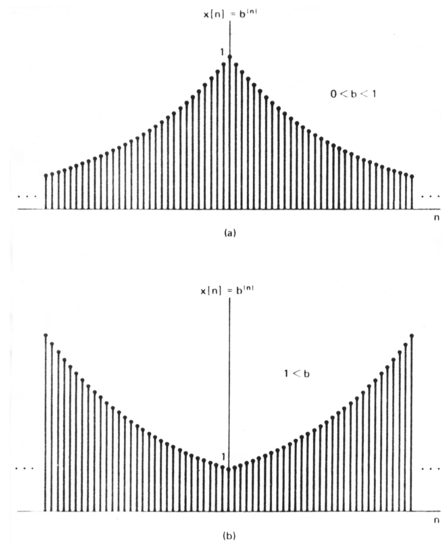
قبلاًاز مثال (۷-۱) تبدیل z دنباله راست‌رو را بدست آوردیم.

$$b^{n}u[n]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-bz^{-1}}=X_1(z)\qquad |z|>b \tag{۲۶-۷}$$

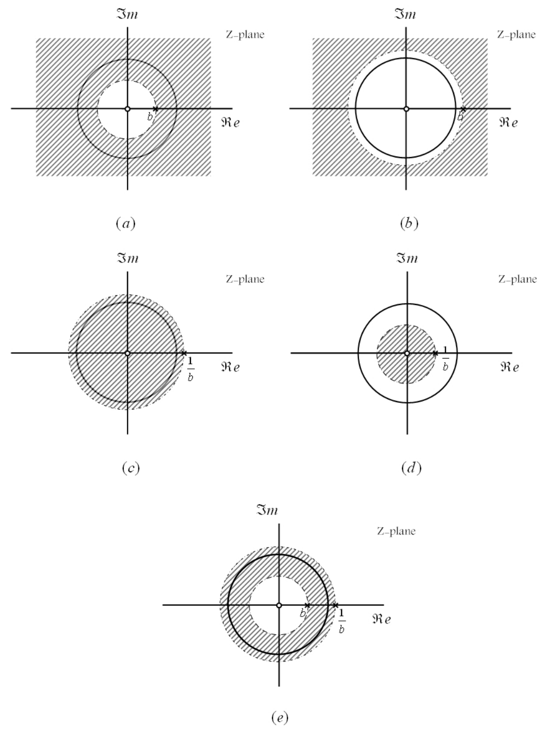
و از مثال (۷-۲) تبدیل z دنباله چپ‌رو را بدست آوردیم.

$$b^{-n}u[-n-1]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}=X_2(z)\qquad |z|<\frac{1}{b} \tag{۲۷-۷}$$

در شکل (۷-۱۰) نمودار صـفر و قطـب و همچنـین ROC را بـرای معـادلات (۷-۲۶) و (۷-۲۷) رسـم کرده‌ایم.



شکل(۷-۹): دنباله $x[n]=b^{|n|}$ (a بازاء $0<b<1$ (b بازاء $1<b$



شکل (۷-۱۰): نمودار صفر و قطب و همچنین ROC برای a) $X_1(z)$ وقتی $0<b<1$ b) $X_1(z)$ وقتی $b>1$ c) $X_2(z)$ وقتی $0<b<1$ d) $X_2(z)$ وقتی $b>1$ e) فصل مشترک دو ناحیه وقتی $0<b<1$ است.

اگر $b>1$ باشد هیچ ناحیه مشترک همگرایی وجود نخواهد داشت و بنابراین دنباله رابطه (۷-۲۴) دارای تبدیل z نخواهد بود. ولی اگر $b<1$ باشد، ROCهای معادلات (۷-۲۶) و (۷-۲۷) ناحیه مشترک خواهند داشت و بنابراین تبدیل z برای دنباله مورد نظر چنین خواهد شد.

$$X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} \qquad b<|z|<\frac{1}{b}$$
$$=\frac{b^2-1}{b}\frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})} \tag{۲۸-۷}$$

نمودار صفر وقطب و ناحیه همگرائی در شکل (۷-۱۰) نمایش داده شده‌اند.

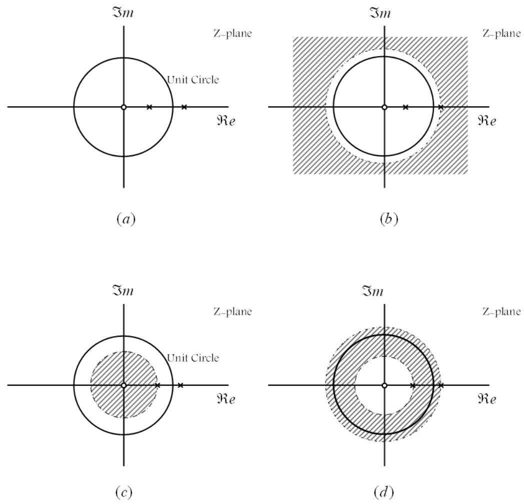
در فصل تبدیل لاپلاس گفتیم که برای تبدیل لاپلاس کسری، ناحیه همگرائی همیشه بوسیله قطب‌ها یا بینهایت محدود می‌شود. در مثال‌های قبلی نظیر چنین پیشامدی را نیز مشاهده کردیم. در مورد تبدیل z نیز می‌توان گفت که ناحیه همگرائی هرگز شامل قطب نخواهد بود و همچنین ناحیه همگرائی بوسیله قطب‌ها یا بینهایت محدود خواهد شد. بنابراین برای یک نمودار صفر و قطب خاص (یا یک عبارت کسری تبدیل z) تنها چند ناحیه همگرایی محدود می‌توان بدست آورد که اگر اطلاع دیگری از

نحوه رفتار دنباله در زمان داشته باشیم می‌توان بسادگی از میان آن چند ناحیه، یکـی را بعنـوان ناحیـه همگرایی اصلی انتخاب کرد. برای روشن برای مطلب به مثال (۷-۶) توجه کنید.

مثال(۷-۶): فرض کنید تبدیل **z** یک دنباله به صورت زیر داده شده باشد.

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{5}{4}z^{-1}\right)} \qquad (۷-۲۹)$$

کلیه نمودارهای صفر و قطب ممکن مربوط به این رابطه در شکل (۷-۱۱-a) رسم شده است.



شکل (۷-۱۱):نواحی همگرایی ممکن برای یک عبارت a) $X(z)$ نمودار قطب-صفر مربوط به $X(z)$ در مثال (۷-۶) b) ناحیه همگرایی $X(z)$ اگر $x[n]$ یک دنباله راست رو باشد c) ناحیه همگرایی $X(z)$ اگر $x[n]$ یک دنباله چپ رو باشد d) ناحیه همگرایی $X(z)$ اگر $x[n]$ یک دنباله دو طرفه باشد.

در این مثال سه ناحیه همگرایی محتمل را می‌توان بدست آورد که همـه آنهـا مربـوط بـه یـک عبـارت $X(z)$ می‌توانند باشند. (به شکل (۷-۱۱- $b \to d$) توجه کنید) هر کدام از این سه ناحیـه مربـوط بـه یک دنباله در حوزه زمان هستند. ناحیه شکل (۷-۱۱-b) مربوط به دنباله زیر است.

$$x[n]=\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{5}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]u[n] \qquad (۷-۳۰)$$

این دنباله علی است ولی تبدیل فوریه ندارد چون ROC شامل دایره واحد نمی‌شود ناحیـه شـکل (۷-۱۱-**c**) مربوط به دنباله زیر است.

$$x[n]=\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{5}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]u[-n-1] \qquad (۷-۳۱)$$

این دنباله ضد علی است وهمچنین تبدیل فوریه ندارد. ناحیه شکل (۷-۱۱-d)مربوط به دنباله زیر است

$$x[n] = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{5}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] \tag{۳۲-۷}$$

این دنباله ضد علی است ولی دارای تبدیل فوریه است چون ROC شامل دایره واحد می‌باشد.

۷-۳ تبدل معکوس z

جهت استخراج رابطه معکوس z ابتدا طرفین رابطه تبدیل z را در z^{k-1} (**k** عدد صحیح دلخواه) ضرب کرده و از حاصل طرفین تساوی حول دایره **c** بشعاع r در درون ناحیه همگرائی و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال می‌گیریم.

$$\oint_c X(z) z^{k-1} dz = \oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{k-n-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \oint_c z^{k-n-1} dz \tag{۳۳-۷}$$

اما باید توجه به قضیه انتگرال کوشی می‌دانیم که حاصل انتگرال طرف راست برابر است با

$$\oint_c z^{k-n-1} dz = 2\pi j \times \{\text{مجموع مانده‌ها در قطب‌ها}\} \tag{۳۴-۷}$$

بسادگی می‌بینیم که حاصل این انتگرال به ازا جمیع مقادیر n مساوی صفر است (چون مانده‌هایش مساوی صفر می‌شوند) بجز وقتی که $n = k$ می‌شود که در آن صورت

$$\oint_c z^{-1} dz = 2\pi j \quad \{\text{مانده در قطب } z=0\} \tag{۳۵-۷}$$

و اما

$$\{\text{مانده در } z=0\} = \lim_{z\to 0} z(z^{-1}) = 1 \tag{۳۶-۷}$$

بنابراین باجایگزاری (۷-۳۵) و (۷-۳۶) در (۷-۳۳) داریم.

$$\oint_c X(z) z^{k-1} dz = x[k] 2\pi j \tag{۳۷-۷}$$

و یا

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz \tag{۳۸-۷}$$

که این رابطه مبین تبدیل z معکوس است.

توجه کنید که انتگرال روی دایره ای بشعاع r در درون ناحیه همگرائی، بمرکز مبدا مختصات و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باید گرفته شود. بدست آوردن تبدیل معکوس از روی رابطه فوق اغلب مشکل است، اما چند راه ساده‌تر برای بدست آوردن تبدیل معکوس z وجود دارد که به وسیله چند مثال آنها را روشن می‌کنیم.

الف) بسط به کسور جزئی

مثال(۷-۷): مطلوبست $x[n]$ اگر،

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\qquad |z|>\frac{1}{3} \tag{۷-۳۹}$$

دو قطب یکی در $z=\frac{1}{4}$ و دیگری در $z=\frac{1}{3}$ وجود دارد ولی چون ROC شامل ناحیه خارجی بزرگترین قطب است باید $x[n]$ یک دنباله راست‌رو باشد. برای بدست آوردن $x[n]$ یک روش این است که $X(z)$ را به کسرهای جزئی تبدیل کنیم، اما بهتر است کسرهای جزئی را بر حسب z^{-1} بدست آورد. بنابراین داریم

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \tag{۷-۴۰}$$

به این ترتیب دیده می‌شود که $x[n]$ شامل دو عبارت است که هر عبارت متناظر با یکی از کسرهای جزئی معادله (۷-۴۰) می‌باشد. برای بدست آوردن تبدیل معکوس z مربوط به هر عبارت باید ابتدا ROC را برای هر عبارت بطور جداگانه بدست آورد. اما چون می‌دانیم ناحیه همگرایی $X(z)$ خارج از بزرگترین قطب قرار دارد، می‌توانیم بگوئیم که ناحیه همگرایی هر یک از کسرهای جزئی باید در خارج از قطب‌ها ی مربوط به خودشان باشد. بنابراین

$$x[n]=x_1[n]+x_2[n] \tag{۷-۴۱}$$

که در آن

$$x_1[n]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\qquad |z|>\frac{1}{4} \tag{۷-۴۲}$$

$$x_2[n]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\qquad |z|>\frac{1}{3} \tag{۷-۴۳}$$

بنابراین

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \tag{۷-۴۴}$$

$$x_2[n]=2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{۷-۴۵}$$

بنابراین از مجموع دو رابطه (۷-۴۴) و (۷-۴۵) به رابطه (۷-۴۶) می‌رسیم.

$$x[n]=\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n] \tag{۷-۴۶}$$

مثال (۷-۸): (بسط به کسور جزئی) اکنـون عبـارت $X(z)$ کـه در مثـال (۷-۷)مطـرح شـد را در نظـر بگیرید. اما ناحیه همگرایی را بصورت $\left(\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}\right)$ فرض کنید برای بدست آوردن $x[n]$ بایـد $X(z)$ را مشابه مثال قبلی به دو کسر جزئی تبدیل کنیم. اما ناحیه همگرایی ایـن دو عبـارت متفـاوت خواهـد بود. در این مثال ناحیه همگرایی هر یک از کسور جزئی چنین می‌شود.

$$x_1[n]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\quad |z|>\frac{1}{4} \tag{۴۷-۷}$$

$$x_2[n]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\quad |z|<\frac{1}{3} \tag{۴۸-۷}$$

و بنابراین داریم

$$x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \tag{۴۹-۷}$$

ب) استفاده از روش سری توانی

یکی دیگر از روش‌های مفید برای محاسبه تبدیل معکوس z تجزیه $X(z)$ به سری توانی می‌باشد برای توضیح روش فوق به مثال زیر توجه کنید

مثال (۷-۹): مطلوبست $x[n]$ اگر،

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\quad |z|>|a| \tag{۵۰-۷}$$

این عبارت را بصورت سری توانی بکمک تقسیمات متوالی تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{ll}
1 & \overline{)\,1-az^{-1}} \\
 & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\ldots \\
\underline{1-az^{-1}} & \\
az^{-1} & \\
\underline{az^{-1}-a^2z^{-2}} & \\
\qquad a^2z^{-2} &
\end{array}$$

بنابراین داریم.

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\ldots \tag{۵۱-۷}$$

با مقایسه رابطه (۷-۵۱) با رابطه (۷-۳) و مساوی قرار دادن ضرائب می‌بینیم که

$$x[n]=0 \qquad n<0$$
$$x[0]=1$$
$$x[1]=a$$
$$x[2]=a^2$$

و در حالت کلی

$$x[n]=a^n u[n] \tag{۵۲-۷}$$

بسط سری توانی $\frac{1}{1-az^{-1}}$ که در رابطه (۷-۵۱) داده شده است بـرای $\left|az^{-1}\right|<1$ صـدق مـی‌کنـد بـا $|z|>|a|$. اگر ناحیه همگرایی بصورت $|z|<|a|$ باشد $\left(\left|az^{-1}\right|>1\right)$ باید $X(z)$ را باید بر حسب توان‌هـای مثبت z بسط داد. در اینصورت داریم.

$$\begin{array}{l|l} -az^{-1}+1 & 1 \\ \hline -a^{-1}z-a^{-2}z^2+\ldots & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ \underline{1-a^{-1}z} \\ a^{-1}z \\ \underline{a^{-1}z-a^{-2}z^2} \\ \qquad a^{-2}z^2 \end{array}$$

یا

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=-a^{-1}z-a^{-2}z^2-\ldots \tag{۵۳-۷}$$

در این حالت با مقایسه مجدد رابطه (۷-۵۳) با رابطه (۷-۳) و مساوی قرار دادن ضرائب داریم

$$x[n]=0 \qquad n\geq 0$$
$$x[-1]=-a^{-1}$$
$$x[-2]=-a^{-2}$$

و در حالت کلی

$$x[n]=-a^n u[-n-1] \tag{۵۴-۷}$$

قدرت روش بسط سری توانی برای عبارات غیر کسری بیشتر نمود پیدا می‌کند چون اینگونه عبـارات را نمی‌توان با تبدیل به کسرهای جزئی ساده کرد. برای توضیح بیشتر به مثال زیر توجه کنید

مثال (۷-۱۰): (بسط به سری توانی)

$$X(z)=\log\left(1+az^{-1}\right) \qquad ,|z|>|a| \tag{۵۵-۷}$$

با $\left|az^{-1}\right|<1$ می‌توان رابطه (۷-۵۵) را بکمک سری تیلور بـه سـری تـوانی بسـط داد (البتـه بـه شـرط $\left|az^{-1}\right|<1$).

$$\log(1+w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}w^n}{n} \qquad |w|<1 \tag{۵۶-۷}$$

بنابراین داریم.

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n z^{-n}}{n} \qquad (۵۷-۷)$$

که بکمک آن می‌توان $x[n]$ را بصورت زیر بدست آورد.

$$x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n} & n\geq 1\\ 0 & n\leq 0\end{cases} \qquad (۵۸-۷)$$

یا بطور معادل

$$x[n]=\frac{-(-a)^n}{n}u[n-1] \qquad (۵۹-۷)$$

۴-۷ خواص تبدیل z

مانند تبدیل لاپلاس، تبدیل z دارای خواص مهمی است که آنرا در تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI گسسته زمانی موفق نموده است. به تعدادی از این خواص فهرست‌وار و مختصراً اشاره خواهد شد.

۷-۴-۱ خطی بودن

اگر $X_1(Z)$ و $X_2(Z)$ بترتیب تبدیل‌های دنباله‌های $x_1[n]$, $x_2[n]$ باشند بعبارت دیگر اگر

$$x_1[n]\overset{z}{\leftrightarrow}X_1(Z) \qquad ROC=R_1 \qquad (۶۰-۷)$$

و

$$x_2[n]\overset{z}{\leftrightarrow}X_2(Z) \qquad ROC=R_2 \qquad (۶۱-۷)$$

در آنصورت تبدیل ترکیب خطی این دو دنباله برابر است با

$$ax_1[n]+bx_2[n]\overset{Z}{\leftrightarrow}aX_1(z)+bX_2(z) \qquad ROC \text{ شامل } R_1\cap R_2 \text{ است} \qquad (۶۲-۷)$$

ناحیه همگرایی ترکیب خطی، حداقل شامل ناحیه مشترک R_1 و R_2 است برای دنباله‌هایی باتبدیل zهای کسری، اگر قطب‌های $aX_1(z)+bX_2(z)$ همان قطب‌های $X_1(z)$ و $X_2(z)$ باشند (یعنی صفر و قطب‌ها همدیگر را خنثی نکنند)، ناحیه همگرایی دقیقاًهمان ناحیه مشترک $R_2\cap R_1$ خواهد بود. اما اگر در ترکیب خطی احتمال دارد تعدادی از صفرها بعضی از قطب‌ها را خنثی کنند، در آنصورت ناحیه همگرایی ممکن است بزرگتر شود. مثال ساده آن هنگامی است که $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دارای دوره نامحدود باشند، اما ترکیب حطی آنها دارای دوره محدود است. در این حالت ناحیه همگرایی ترکیب خطی، تمام صفحه z خواهد بود مگر احتمالاً صفر یا بینهایت. بعنوان مثال دنباله‌های $a^n u[n-1]$ و $a^n u[n]$ هر دو دارای ناحیه همگرایی $|a|<|z|$ هستند. اما ناحیه همگرائی دنباله زیر

$$a^n u[n]-a^n u[n-1]=\delta[n] \qquad (۶۳-۷)$$

شامل تمام صفحه z است.

۷-۴-۲ انتقال در حوزه زمان

اگر

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) \qquad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$x[n-n_0] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-n_0} X(z) \qquad ROC = R_x \qquad (۶۴-۷)$$

با این تفاوت که مبدا یا بینهایت را باید احتمالاً حذف و یا اضافه کرد. بخاطر ضرب در z^{-n_0} اگر $n_0 > 0$ باشد یک قطب در $z = 0$ بوجود می‌آید و اگر قطبی در بینهایت از قبل موجود باشد اکنون حذف می‌شود. بنابراین اگر R_x شامل مبدا باشد در اینصورت ناحیه همگرایی $x[n-n_0]$ شامل مبدا نخواهد بود. ولی اگر $n_0 < 0$ باشد یک صفر در $z = 0$ و یک قطب در بینهایت بوجود می‌آید که صفر در $z = 0$ می‌تواند یک قطب در $z = 0$ (اگر وجود داشته باشد)را حذف کند بنابراین اگر $X(z)$ شامل قطبی در مبدا باشد اکنون حذف می‌شود.

۷-۴-۳ انتقال در حوزه فرکانس

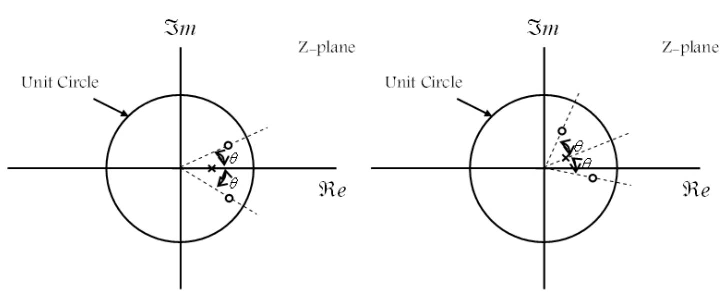
اگر

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) \qquad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X\left(e^{-j\Omega_0} z\right) \qquad ROC = R_x \qquad (۶۵-۷)$$

سمت چپ رابطه (۷-۶۵) نمایانگر مدولاسیون دنباله با حامل نمایی مختلط است و سمت راست بیانگر چرخش در صفحه Z است. یعنی نمودار صفر و قطب در صفحه Z به اندازه زاویه Ω_0 می‌چرخد (به شکل (۷-۱۲) توجه کنید).



شکل (۷-۱۲): تاثیر بر نمودار قطب-صفر مدولاسیون حوزه زمانی با دنباله نمایی مختلط $e^{j\Omega_0 n}$

مثلاً اگر $X(z)$ کسری باشد و در صورت یا مخرج کسر دارای فاکتوری بصورت $1 - az^{-1}$ باشد، عبارت $X\left(e^{-j\Omega_0} z\right)$ دارای فاکتوری بصورت $1 - ae^{j\Omega_0} z^{-1}$خواهد شد. بنابراین قطب یا صفردر $z = a$ در $X(z)$ اکنون تبدیل به قطب یا صفر در $z = ae^{j\Omega_0}$ در $X\left(e^{-j\Omega_0} z\right)$ خواهد شد. بنابراین ضرب دنباله در نمایی مختلط یا عمل مدولاسیون بیانگر انتقال در فرکانس (در تبدیل فوریه) دنباله خواهد بود. اگر $x[n]$ حقیقی باشد $e^{j\Omega_0 n} x[n]$ چنین نخواهد بود مگر اینکه Ω_0 مضرب صحیحی از π باشد. نتیجتاً

اگر قطب‌ها و صفرهای $X(z)$ بصورت جفت مزدوج مختلط باشند (در حالتی که $x[n]$ حقیقی است) ممکن است بعد از انتقال این تقارن از بین برود. در حالت کلی‌تر داریم.

$$z_0^{\,n} x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad ROC = z_0 R_x \tag{۷-۶۶}$$

اگر $|z_0| = 1$ باشد یا $z_0 = e^{j\Omega_0 n}$ معادله (۷-۶۶) به معادله (۷-۶۵) تبدیل می‌شود.
اما اگر $z_0 = re^{j\Omega_0 n}$ باشد، مکان صفرها و قطب‌ها در صفحه z ضمن آنکه باندازه زاویه Ω_0 می‌چرخند در مقدار r نیز ضرب می‌شوند، یا بعبارت دیگر در امتداد شعاع ثابتی حرکت می‌کنند. بنابراین ROC نیز بزرگتریا کوچکتر می‌شود. یعنی اگر z_x در ناحیه همگرایی تبدیل $x[n]$ باشد، $z_0 z_x$ در ناحیه همگرایی تبدیل $z_0^{\,n} x[n]$ خواهد بود. اگر $|z_0| > 1$ باشد $|z_0 z_x|$ بزرگتر و اگر $|z_0| < 1$ باشد $|z_0 z_x|$ کوچکترخواهد شد.

۷-۴-۴ معکوس کردن در حوزه زمان

اگر

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) \qquad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$x[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad ROC = 1/R_x \tag{۷-۶۷}$$

معنی رابطه فوق این است که اگر z_0 در ناحیه همگرایی $x[n]$ باشد، $\frac{1}{z_0}$ در ناحیه همگرایی $x[-n]$ است.

تمرین: رابطه (۷-۶۷) را ثابت کنید.

۷-۴-۵ خاصیت کانولوشن

اگر

$$x_i[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X_i(z) \qquad ROC = R_i \quad , i = 1,2$$

در آنصورت

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X_1(z) X_2(z) \qquad ROC = R_1 \cap R_2 \tag{۷-۶۸}$$

مشابه خاصیت کانولوشن در تبدیل لاپلاس ناحیه همگرایی $X_1(z)X_2(z)$ حداقل شامل ناحیه مشترک بین R_2, R_1 است، البته ممکن است بزرگتر هم بشود بشرطی که بعضی از قطب‌ها توسط تعدادی از صفرها خنثی شوند.

۷-۵-۶ مشتق‌گیری در حوزه Z

اگر

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) \qquad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$nx[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad ROC = R_x \tag{۶۹-۷}$$

این خاصیت به روشی مشابه با تبدیل لاپلاس بدست می‌آید کاربرد خاصیت فوق را در مثال زیر شرح می‌دهیم.

مثال(۷-۱۱): می‌خواهیم تبدیل معکوس $X(z)$ را بیابیم اگر $X(z)$ بصورت زیر باشد.

$$X(z) = \ln\left(1 + az^{-1}\right) \qquad |z| > |a| \tag{۷۰-۷}$$

در آنصورت با توجه به خاصیت (۷-۴-۶) می‌توان نوشت.

$$nx[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \qquad |z| > |a| \tag{۷۱-۷}$$

با مشتق‌گیری از $X(z)$ آنرا تبدیل به عبارت کسری نمودیم. اکنون تبدیل معکوس z بسادگی بدست می‌آید. می‌دانیم که

$$a(-a)^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{a}{1 + az^{-1}} \qquad |z| > |a| \tag{۷۲-۷}$$

با کمک خاصیت (۷-۴-۲) داریم.

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \qquad |z| > |a| \tag{۷۳-۷}$$

در نهایت به نتیجه زیر خواهیم رسید.

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \tag{۷۴-۷}$$

مثال (۷-۱۲): تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)^2} \qquad |z| > |a| \tag{۷۵-۷}$$

از مثال (۷-۱) داریم.

$$a^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a| \tag{۷۶-۷}$$

بنابراین

$$na^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)^2} \tag{۷۷-۷}$$

۷-۴-۷ تئوری مقدار اولیه

اگر $x[n] = 0$ بازاء $n < 0$، در آنصورت خواهیم داشت.

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) \tag{۷۸-۷}$$

این خاصیت با حد گرفتن از دو طرف رابطه تبدیل z بدست می‌آید. البته باید مد نظر داشت که $x[n]$ بازاء $n < 0$ مساوی صفر است.

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] \tag{۷-۷۹}$$

چون وقتی $n=0$ است $z^{-n}=1$ می‌شود و برای $n>0$ تمام جملات در حد وقتی $z\to\infty$ صفر می‌شوند. اولین نتیجه‌ای که از تئوری مقدار اولیه می‌توان گرفت این است که برای یک دنباله علی اگر $x[0]$ محدود باشد، حد $\lim_{z\to\infty} X(z)$ نیز باید محدود باشد. نتیجتاً اگر $X(z)$ بصورت کسری بیان شود درجه صورت نمی‌تواند بزرگتر از درجه مخرج شود، یا بعبارت دیگر تعداد صفرها نمی‌تواند بیشتر از تعداد قطب‌ها شود.

۷-۵ تحلیل سیستم‌های LTI بکمک تبدیل z

تبدیل z نقش مهمی را در تحلیل سیستم‌های LTI گسسته زمانی ایفا می‌کند. از خاصیت کانولوشن می‌توان رابطه ورودی و خروجی یک سیستم را چنین بیان کرد.

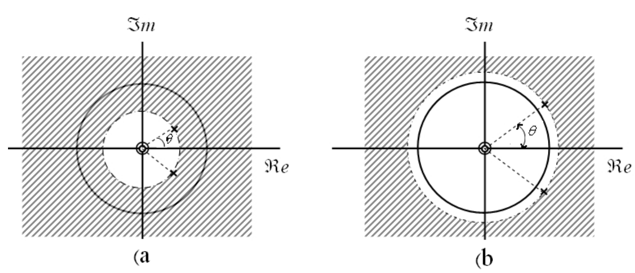
$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{۷-۸۰}$$

که در آن $X(z)$ ، $Y(z)$ و $H(z)$ بترتیب تبدیل zهای ورودی، خروجی و پاسخ ضربهٔ سیستم هستند. به $H(z)$ تابع سیستم یا ترابر تابع (تابع انتقال) می‌گویند. اگر $|z|=1$ باشد تبدیل z به تبدیل فوریه گسسته تبدیل می‌شود. خواص سیستم مثل پایداری و علیت را بسادگی می‌توان از نمودارصفر-قطب و ناحیه همگرائی تابع سیستم تعیین کرد. اگر سیستم علی باشد از خاصیت‌های ۲ و ۴ می‌توان گفت که ناحیه همگرائی در خارج آخرین قطب قرار دارد. اگر سیستم پایدار باشد باید پاسخ ضربه بطور مطلق جمع‌پذیر باشد که در این حالت تبدیل فوریه وجود خواهد داشت، لذا باید ناحیه همگرائی شامل دایره $|z|=1$ شود. اگر سیستم هم علی و هم پایدار باشد باید تمام قطب‌ها درون دایرهٔواحد قرار داشته باشند.

مثال (۷-۱۳): تابع سیستم یک سیستم مرتبه دوم با قطب‌های مختلط بصورت زیر است.

$$H(z) = \frac{1}{1-(2r\cos\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{۷-۸۱}$$

قطب‌ها در $z_2 = re^{-j\theta}, z_1 = re^{j\theta}$ قرار دارند. اگر سیستم علی باشد ROC باید در خارج آخرین قطب قرار داشته باشد $(|z|>|r|)$. نمودار قطب-صفر و ROC در شکل (۷-۱۳) به نمایش گذاشته شده‌اند.



شکل (۷-۱۳): نمودار قطب-صفر برای سیستم‌های مرتبه ۲ با قطب‌های مختلط a) $r<1$ b) $r>1$

در شکل (۷-۱۳-a) می‌بینیم که $|r|<1$ و در اینصورت قطب‌ها درون دایره واحد قرار می‌گیرند. در اینصورت سیستم پایدار است و در شکل (۷-۱۳-b) می‌بینیم $|r|>1$ است و قطب‌ها در خارج دایره واحد قرار می‌گیرند. پس سیستم در این حالت ناپایدار است.

۷-۵-۱ نمایش سیستم با معادلات تفاضلی با ضرائب ثابت

با کمک تبدیل z می‌توان از روی معادلات تفاضلی با ضرائب ثابت بسادگی تابع سیستم را بدست آورد. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید

مثال(۷-۱۴): فرض کنید سیستم LTI که ورودی آن $x[n]$ و خروجی آن $y[n]$ است بوسیله معادله تفاضلی زیر نمایش داده شده باشد.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{1}{3}x[n-1] \tag{۸۲-۷}$$

با تبدیل z گرفتن از دو طرف رابطه (۷-۸۲) داریم.

$$\begin{aligned} &Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}X(z)z^{-1} \\ &Y(z)=X(z)\left[\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right] \end{aligned} \tag{۸۳-۷}$$

و از رابطه (۷-۸۰) داریم.

$$H(Z)=\frac{Y(Z)}{X(Z)}=\frac{1+\frac{1}{3}Z^{-1}}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}} \tag{۸۴-۷}$$

رابطه (۷-۸۴) فقط عبارت جبری $H(z)$ است ولی ناحیه همگرائی را مشخص نمی‌کند. دو پاسخ ضربه متفاوت را می‌توان به معادله تفاضلی (۷-۸۲) مربوط کرد، یکی راست‌رو و دیگری چپ‌رو. بنابراین دو انتخاب متفاوت برای ناحیه همگرائی امکان‌پذیر است.

الف: $|z|>\frac{1}{2}$، که مربوط به $h[n]$ راست‌رو است.

ب: $|z|<\frac{1}{2}$ که مربوط به $h[n]$ چپ‌رو است.

برای حالت کلی معادله تفاضلی از مرتبه Nام نیز به همین ترتیب پیش می‌رویم. بعنوان مثال اگر معادله تفاضلی زیر نمایش دهنده یک سیستم LTI باشد.

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k] \tag{۸۵-۷}$$

بنابراین:

$$\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}Y(z)=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}X(z) \tag{۸۶-۷}$$

یا

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \qquad (۸۷-۷)$$

در نهایت می‌توان تابع انتقال را بصورت کسری نوشت.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \qquad (۸۸-۷)$$

می‌بینیم که تابع انتقال یک سیستم که بوسیله معادله تفاضلی خطی با ضرائب ثابت بیان می‌شود همواره کسری است. اما می‌بینیم معادله تفاضلی به تنهایی برای تعیین پاسخ ضربه سیستم کافی نیست و باید یک خاصیت دیگر سیستم مثل علی بودن یا پایدار بودن سیستم نیز بعنوان راهنمایی داده شده باشد. بعنوان مثال اگر بدانیم سیستم علی است، ناحیه همگرائی باید خارج آخرین قطب در نظر گرفته شود و اگر بدانیم سیستم پایدار است ناحیه همگرائی باید شامل دایره $|z|=1$ نیز بشود.

مثال (۷-۱۵): یک سیستم علی با معادله تفاضلی بصورت زیر داده شده است.

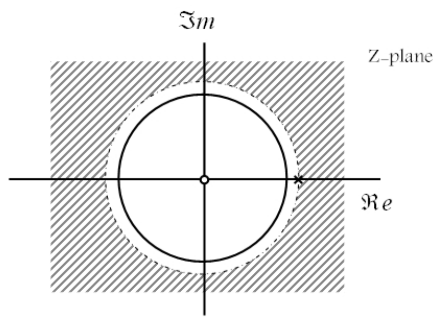
$$y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]=x[n] \qquad (۸۹-۷)$$

مطلوبست تابع انتقال و ناحیه همگرایی آن.

حل: مشابه مثال (۷-۱۴) می‌توان نوشت.

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{1}{1-\frac{5}{4}z^{-1}} \qquad (۹۰-۷)$$

ناحیه همگرایی بصورت $|z|>\frac{5}{4}$ بیان می‌گردد.



شکل (۷-۱۴): ناحیه همگرائی برای مثال (۷-۱۵)

می‌بینیم چنین سیستمی نمی‌تواند پایدار باشد مگر اینکه از اول فرض کنیم که سیستم غیرعلی است.

۷-۶ تبدیل سیستم‌های پیوسته زمان به گسسته زمان

در بعضی از کاربردها بسیار مناسب است که یک سیستم پیوسته زمان بصورت یک سیستم گسسته زمان معادل تبدیل شود. بعنوان مثال در فصل پنجم مبحثی تحت عنوان پردازش گسسته زمان بر روی سیگنال‌های پیوسته زمان مورد بررسی قرار گرفت که مبنای آن استفاده از سیستم‌های گسسته زمان در پردازش سیگنال‌ها پیوسته زمان بود. این نوع پردازش به دلیل امکان استفاده از کامپیوتر در تحلیل نتایج، بسیار مهم و کاربردی می‌باشد. به همین خاطر روش‌های مختلفی جهت تبدیل سیستم‌های پیوسته زمان به گسسته زمان وجود دارد که در اینجا به دو روش مهم اشاره خواهیم کرد.

در روش اول که بنام تبدیل ضربه[2] معروف است سیستم پیوسته زمان بگونه‌ای به سیستم گسسته زمان تبدیل می‌شود که نمونه‌های پاسخ ضربه پیوسته زمان در لحظات متساوی‌الفاصله با پاسخ ضربه گسسته زمان برابر است. بنابراین چون پاسخ ضربه گسسته زمان از نمونه برداری از پاسخ ضربه پیوسته حاصل می‌شود این روش فقط برای سیستم‌هائی که از لحاظ فرکانسی باند محدود هستند کاربرد دارد.

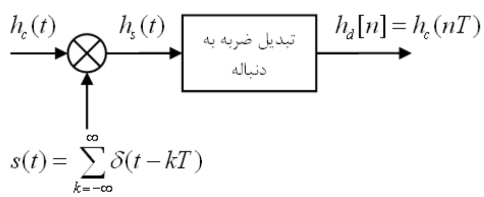
در روش دوم که بنام تبدیل دوجهته[3] معروف است از نوعی نگاشت استفاده می‌شود که مستقیماً تابع انتقال سیستم در حوزه لاپلاسی را به حوزه تبدیل Z تبدیل می‌نماید.

۷-۶-۱ تبدیل ضربه

یک سیستم مفروض پیوسته زمان با پاسخ ضربه $h_c(t)$ را در نظر بگیرید. سیستم معادل گسسته زمانی که شامل نمونه‌های $h_c(t)$ در لحظات متساوی‌الفاصله می‌باشد بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$h_d[n] = h_c(nT) \qquad (۷-۹۱)$$

که در آن T یک عدد مثبت است و باید بطور صحیح انتخاب گردد. رابطه (۷-۹۱) را بصورت سیستم زیر نیز می‌توان نمایش داد.



شکل (۷-۱۵): سیستم معادل رابطه (۷-۹۱)

با توجه به آنچه در فصل پنجم بیان گردید می‌توان نوشت.

$$H_S(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_C\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}\right) \qquad (۷-۹۲)$$

و

[2] Impulse Invariance
[3] Bilinear Transformation

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right)=H_s\left(j\frac{\Omega}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_C\left(j\left(\frac{\Omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right) \qquad (۹۳\text{-}۷)$$

بنابراین سیستم گسسسته زمانی $H_d\left(e^{j\Omega}\right)$ که توسط این روش بدست می‌آید بوسیله رابطه (۷-۹۳) بـه تابع انتقال سیستم $H_c(j\omega)$ مربوط می‌شود. به همین خاطر لازم است **T** به گونه‌ای انتخاب شـود کـه از تداخل طیف‌های انتقال یافته $H_c(j\omega)$ جلوگیری شود. در اینصورت $H_d\left(e^{j\Omega}\right)$ در یک دوره تناوب هـم شکل $H_c(j\omega)$ می‌شود. در حوزه زمان نیز داریم.

$$h_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_c(nT)\delta(t-nT) \qquad (۹۴\text{-}۷)$$

بنابراین با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس $\delta(t-nT)$ مساوی e^{-snT} است داریم.

$$H_s(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_c(nT)e^{-snT} \qquad (۹۵\text{-}۷)$$

اما از طرف دیگر داریم.

$$H_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d[n]z^{-n} \qquad (۹۶\text{-}۷)$$

و چون

$$h_c(nT)=h_d[n] \qquad (۹۷\text{-}۷)$$

می‌توان نوشت.

$$H_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_c(nT)z^{-n} \qquad (۹۸\text{-}۷)$$

با مقایسه دو رابطه (۷-۹۵) و (۷-۹۸) داریم.

$$H_d(z)\big|_{z=e^{sT}}=H_s(s) \qquad (۹۹\text{-}۷)$$

بنابراین با جایگذاری s بجای $j\omega$ در رابطه (۷-۹۲) داریم.

$$H_s(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_C\left(s-j\frac{2\pi k}{T}\right) \qquad (۱۰۰\text{-}۷)$$

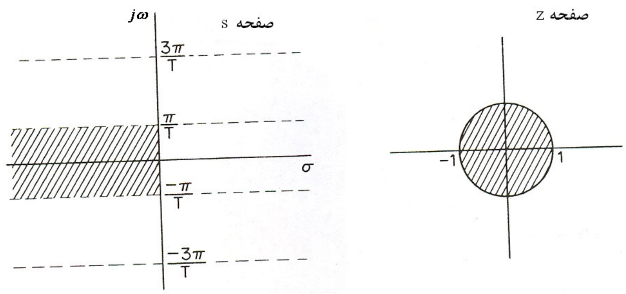
ویا بطور معادل

$$H_d(z)\big|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_C\left(s-j\frac{2\pi k}{T}\right) \qquad (۱۰۱\text{-}۷)$$

بنابراین روش تبدیل ضربه در حقیقت تبدیل $H_s(s)$ به $H_d(z)$ توسط نگاشت $z=e^{sT}$ از صـفحه s به صفحه z می‌باشد.

این نگاشت در شکل (۷-۱۶) نمایش داده شده است. نوارهاشور خـورده در شـکل (a-۱۶-۷) بـه تمـام صفحه z نگاشته می‌شود.

با توجه به رابطه $z=e^{sT}$ سمت چپ محور $j\omega$ به داخل دایره نگاشته می‌شود و سـمت راسـت محـور $j\omega$ به خارج دایره واحد نگاشته می‌شود. واضح است که محور $j\omega$ روی دایره واحد نگاشته می‌شود.



شکل (۷-۱۶): نگاشت از صفحه s به صفحه z توسط تبدیل $z = e^{sT}$

اگر $H_c(s)$ بصورت کسری باشد رابطه $H_d(z)$ بصورت ساده‌تری بدست می‌آید. بعنوان مثال اگر فقط قطب‌های مرتبه اول را برای $H_c(s)$ در نظر بگیریم، یعنی اگر

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \tag{۱۰۲-۷}$$

در آنصورت

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t) \tag{۱۰۳-۷}$$

ویا

$$\begin{aligned} h_d[n] = h_c(nT) &= \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} u[nT] \\ &= \sum_{k=1}^{N} A_k \left(e^{s_k T}\right)^n u[nT] \end{aligned} \tag{۱۰۴-۷}$$

و در نهایت

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \tag{۱۰۵-۷}$$

مثال (۷-۱۶): بکمک روش تبدیل ضربه سیستم گسسته زمانی معادل سیستم زیر را بیابید.

$$H_c(s) = \frac{4}{s+2} \qquad \Re e[s] > -2 \tag{۱۰۶-۷}$$

حل: با توجه به ناحیه همگرایی می‌توان نوشت.

$$h_c(t) = 4e^{-2t} u(t) \tag{۱۰۷-۷}$$

بنابراین معادل گسسته زمانی سیستم فوق برابر است با

$$h_d[n] = h_c(nT) = 4e^{-2nT} u[n] \tag{۱۰۸-۷}$$

وتبدیل Z آن برابر است با

$$H_d(z) = \frac{4}{1 - e^{-2T} z^{-1}} \qquad \Re e[z] > e^{-2T} \tag{۱۰۹-۷}$$

۷-۶-۲ تبدیل دو جهته

اساس این تبدیل نگاشت از صفحه s به صفحه z توسط رابطه زیر می‌باشد.

$$z=\frac{1+\left(\frac{T}{2}\right)s}{1-\left(\frac{T}{2}\right)s} \quad (۱۱۰-۷)$$

بنابراین ارتباط سیستم گسسته زمان معادل با سیستم پیوسته زمان متناظر به صورت زیر است.

$$H_d(z)=H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (۱۱۱-۷)$$

با قرار دادن $s=\sigma+j\omega$ در رابطه (۷-۱۱۰) داریم.

$$z=\frac{\left[1+\frac{T}{2}\sigma\right]+j\omega\frac{T}{2}}{\left[1-\frac{T}{2}\sigma\right]-j\omega\frac{T}{2}} \quad (۱۱۲-۷)$$

بنابراین هنگامی‌که $\sigma<0$ است $|z|$ کوچکتر از واحد است و نتیجتاً سمت چپ محور $j\omega$ در صفحه s بداخل دایره واحد نگاشته می‌شود و به همین ترتیب می‌توان نشان داد که سمت راست محور $j\omega$ در صفحه s به خارج دایره واحد نگاشته می‌شود. اما اگر $z=e^{j\Omega}$ باشد.

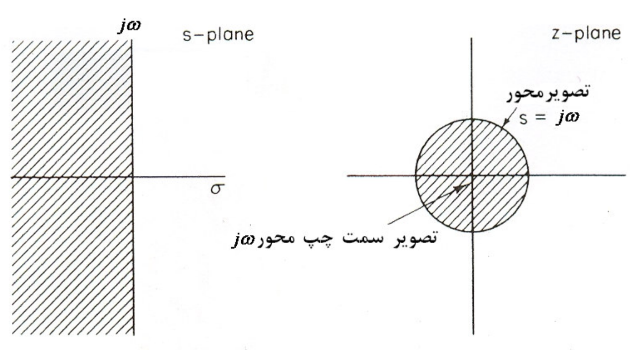
$$s=\frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\Omega}}{1+e^{-j\Omega}}=j\frac{2}{T}tg(\frac{\Omega}{2}) \quad (۱۱۳-۷)$$

بنابراین دایره واحد روی محور $j\omega$ نگاشته می‌شود. بنابراین توسط تبدیل دوجهته رابط زیر بین فرکانس‌ها پیوسته و گسسته زمانی وجود دارد.

$$\omega=\frac{2}{T}tg(\frac{\Omega}{2}) \quad (۱۱۴-۷)$$

$$\Omega=2tg^{-1}(\frac{\omega T}{2}) \quad (۱۱۵-۷)$$

خواص نگاشت مذکور در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل (۷-۱۷):نگاشت از صفحه s به صفحه z توسط رابطه (۷-۱۱۰)

با توجه به اینکه تمام محور $j\omega$ از ∞ - تا ∞ روی یک دایره از π - تا π نگاشته می‌شود می‌توان مطمئن شد که این تبدیل هر گونه تداخلی را از بین می‌برد.
نکته مهمی که باید بدان اشاره کرد این است که با استفاده از تبدیل دوجهته یک سیستم پیوسته زمانی پایدار همواره به یک سیستم پایدار گسسته زمانی تبدیل می‌شود.
مثال(۷-۱۷): سیستم زیر را توسط تبدیل دو جهته به سیستم گسسته زمانی معادل تبدیل کنید.

$$H_c(s)=\frac{4}{s+2} \qquad \Re e[s]>-2$$

حل: با قراردادن $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ در رابطه فوق داریم.

$$\begin{aligned}H_d(z)&=\frac{4}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+2}\\&=\frac{4T\left(1+z^{-1}\right)}{2\left(1-z^{-1}\right)+2T\left(1+z^{-1}\right)}\end{aligned}$$

و یا

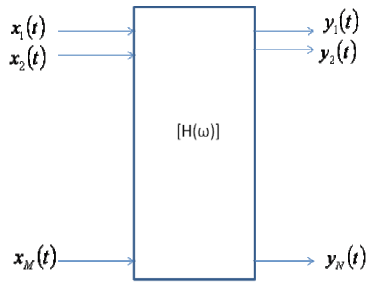
$$\begin{aligned}H_d(z)&=\frac{2T\left(1+z^{-1}\right)}{(1+T)-(1-T)z^{-1}}\\&=\frac{\frac{2T}{1+T}\left(1+z^{-1}\right)}{1-\frac{1-T}{1+T}z^{-1}}\end{aligned}$$

نهایتاً ناحیه همگرائی بصورت $|z|>\frac{1-T}{1+T}$ بدست می‌آید.

۷-۷ سیستم های چند ورودی و چند خروجی[۴] (کاربرد الکترومغناطیسی)

سیستم های چند ورودی و چند خروجی مدل مناسبی برای بسیاری از سیستم های کاربردی که در مسائل روزمره با آنها مواجه می شویم هستند. تابع انتقال این سیستم ها بصورت یک ماتریس است. در حالت کلی تعداد ورودیها و خروجیها لازم نیست برابر باشند. یک نمونه سیستم با $\mathbf{M}$ ورودی و $\mathbf{N}$ خروجی در شکل زیر نشان داده شده است.

[4] Multi Input- Multi Output



شکل۷-۱۸ نمایشی از یک سیستم چند ورودی چند خروجی

رابطه ارتباط دهنده بردارهای ورودی و خروجی این سیستم در حوزه زمان به صورت زیر است.

$$[y\ (t)]=[h\ (t)]*[x(t)] \tag{۱۱۶-۷}$$

که در آن

$$[x\ (t)]=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_M(t) \end{bmatrix} \tag{۱۱۷-۷}$$

$$[y\ (t)]=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_N(t) \end{bmatrix} \tag{۱۱۸-۷}$$

$$[h\ (t)]=\begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \ldots\ldots\ldots & h_{1(M-1)}(t) & h_{1M}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \ldots\ldots\ldots & h_{2(M-1)}(t) & h_{2M}(t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ h_{(N-1)1}(t) & h_{(N-1)2}(t) & \ldots\ldots & h_{(N-1)(M-1)}(t) & h_{(N-1)M}(t) \\ h_{N1}(t) & h_{N2}(t) & \ldots\ldots\ldots & h_{N(M-1)}(t) & h_{NM}(t) \end{bmatrix} \tag{۱۱۹-۷}$$

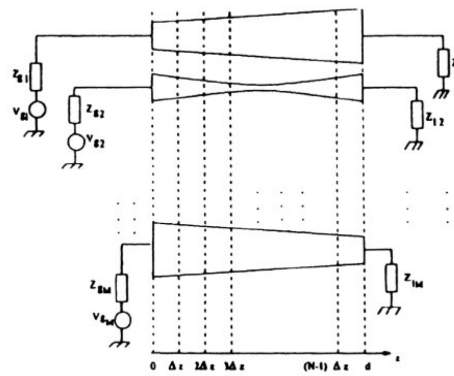
باید توجه داشت که عملیات کانولوشن ماتریسی همانند ضرب ماتریسی تعریف می شود بـا ایـن تفـاوت که به جای ضرب درآیه ها باید آنان را با هم کانوال نمـود. مـثلا بـرای یـک سیســتم بـا دو ورودی و دو خروجی داریم.

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(t)*x_1(t)+h_{12}(t)*x_2(t) \\ h_{21}(t)*x_1(t)+h_{22}(t)*x_2(t) \end{bmatrix} \quad (۱۲۰-۷)$$

این رابطه در حوزه فرکانس به صورت ضرب ساده ماتریسی تبدیل می شود.

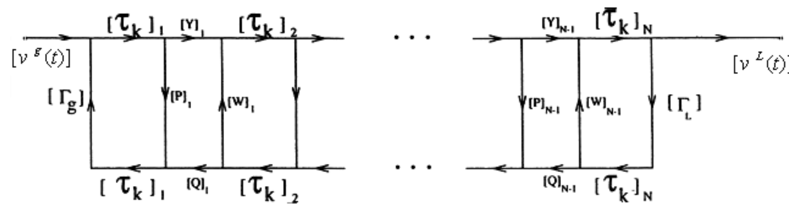
$$[Y\ (\omega)] = [H\ (\omega)][X(\omega)] \quad (۱۲۱-۷)$$

یک کاربرد الکترومغناطیسی از این سیستم ها خطوط انتقال تزویج شده غیر یکنواخت مـی باشـد. یـک نمونه این خطوط در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل(۷-۱۹) یک سیستم خطوط انتقال تزویج شده به عنوان مثالی از یک سیستم چند ورودی و چند خروجی

در مقاله ای که توسط نویسنده به چاپ رسیده است[5] این سیسـتم توسـط یـک سیسـتم خطـی چنـد ورودی و چند خروجی به صورت شکل زیر مدل شده است.



شکل(۷-۲۰) مدل معادل سیستم نشان داده شده در شکل ۷-۱۹

کلیه پارامترهای این مدل به المانهای سیستم اصلی از جمله ماتریس های اندوکتانس و ظرفیت سیستم اصلی مربوط می شوند. آنچه که در این جا مهم است نحوه ارتباط پارامترهای این مدل به سیستم اصلی نیست (علاقمندان به تفصیل بیشتر در این مورد به مقاله مراجعه نمایند). بلکه آنچه مهم است ارتباط کلی ورودی و خروجی در حوزه لاپلاس یا حوزه فرکانس است. همانگونه که مشاهده می شود ورودی و خروجی سیستم بردارهستند و تابع انتقال سیستم یک ماتریس است. ارتباط بردارهای ورودی و خروجی توسط رابطه زیر بدست می آید.

[5] "Discrete Time Domain Analysis of Nonuniform Lossless Coupled Transmission Lines" Journal of Circuits, Systems, and Computers Vol. 14, No. 5 (2005) 1–14

$$[V^L(s)]=[H^L(s)][V^g(s)] \tag{۱۲۲-۷}$$

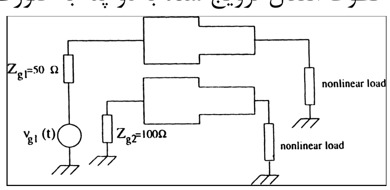
که در آن

$$[V^g(s)]=\Im\{[v^g(t)]=\begin{bmatrix} v_{g1}(t) \\ v_{g2}(t) \\ . \\ . \\ .v_{gM}(t) \end{bmatrix}\} \tag{۱۲۳-۷}$$

$$[V^L(s)]=\Im\{[v^L(t)]=\begin{bmatrix} v_{L1}(t) \\ v_{L2}(t) \\ . \\ . \\ .v_{LM}(t) \end{bmatrix}\} \tag{۱۲۴-۷}$$

$$[H^L(s)]=\begin{bmatrix} H^L_{11}(s) & H^L_{12}(s) & \ldots\ldots\ldots & H^L_{1(M-1)}(s) & H^L_{1M}(s) \\ H^L_{21}(s) & H^L_{22}(s) & \ldots\ldots\ldots & H^L_{2(M-1)}(s) & H^L_{2M}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H^L_{(M-1)1}(s) & H^L_{(M-1)2}(s) & \ldots & H^L_{(M-1)(M-1)}(s) & H^L_{(M-1)M}(s) \\ H^L_{M1}(s) & H^L_{M2}(s) & \ldots\ldots\ldots & H^L_{M(M-1)}(s) & H^L_{MM}(s) \end{bmatrix} \tag{۱۲۵-۷}$$

برای تبدیل این سیستم به یک سیستم گسسته زمان کافی است از تبدیل ضربه استفاده می کنیم. به عنوان مثال برای یک سیستم خطوط انتقال تزویج شده با دو پله به صورت شکل زیر



شکل (۷-۲۱) یک مثال الکترومغناطیسی از سیستم های چند ورودی چند خروجی

و مقادیر اندوکتانس و ظرفیت هرپله به صورت

$$[L]_1=\begin{bmatrix} 250 & 120 \\ 120 & 347 \end{bmatrix} nH/m,$$

$$[C]_1=\begin{bmatrix} 205 & -75 \\ -75 & 150 \end{bmatrix} pF/m$$

$$[L]_2=\begin{bmatrix} 660 & 73 \\ 73 & 490 \end{bmatrix} nH\ m,$$

$$[C]_1=\begin{bmatrix} 65.8 & -5 \\ -5 & 75.8 \end{bmatrix} pF/m.$$

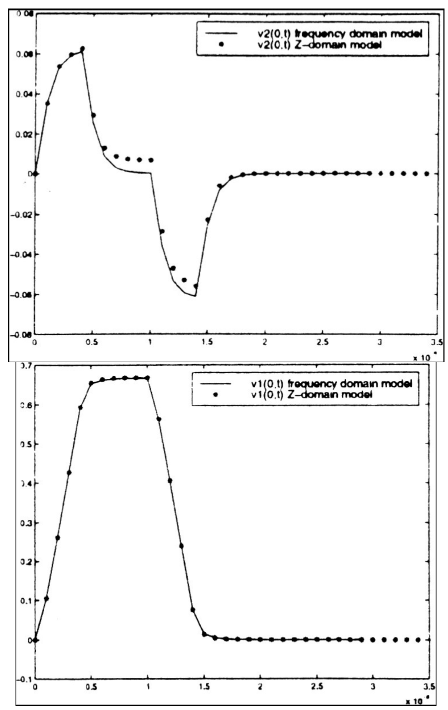
ماتریس تابع انتقال در حوزه گسسته زمان به صورت زیر بدست می آید.

$$H^L(Z)=\frac{\begin{bmatrix}-2.3Z^3+0.353Z^2+0.026Z & -0.114Z^3+0.2Z^2+0.009Z\\ -0.435Z^3+0.45Z^2+0.0122Z & -1.7Z^3+0.22Z^2+0.004Z\end{bmatrix}}{-3.9Z^4+0.99Z^3+0.057Z^2-0.0007Z^2+0.000004}$$

بردار ورودی که در اینجا بردار ولتاژ ورودی است به صورت زیر است.

$$[x\ (t)]=\begin{bmatrix}v_1(t)\\ 0\end{bmatrix}$$

نتیجه محاسبه ولتاژ پایانه ها حاصل از مدل پیوسته و گسسته زمان در شکل های زیر باهم مقایسه شده اند.



شکل ۷-۲۲ مقایسه نتایج حاصل از مدل گسسته زمان با نتایج حاصل از تحلیل پیوسته زمان

دیده می شود که دقت روش گسسته زمان بسیار خوب است و با توجه به سرعت زیاد این روش نسبت به روش پیوسته زمان اهمیت عملی تبدیل سیستم های پیوسته زمان به سیستم های گسسته زمان واضحتر می شود. تبدیل سیستم های پیوسته زمان به سیستم های گسسته زمان علاوه بر الکترومغناطیس در رشته های دیگر علوم نیز کاربرد فراوانی دارد.

۷-۸ مثالهای حل شده

مثال(۷-۱۸): تبدیل z هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید و ناحیه همگرایی را مشخص کنید.

الف) $\delta[n]$

ب) $\delta[n+1]$

ج) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-1]$

د) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]u[n]$

حل:

الف) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=1$

ناحیه همگرایی تمام صفحه z خواهد بود.

ب) $X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n+1]z^{-n}=z$

فقط یک قطب در بینهایت موجود است پس ناحیه همگرایی تمام صفحه z است.

ج)

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}u[-n-1]$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}$$

$$=-\left(\frac{1}{1-2z}-1\right)=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)$$

تنها یک قطب در $z=\frac{1}{2}$ و یک صفر در $z=0$ داریم ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$|z|<\frac{1}{2}$$

د) باتوجه به خطی بودن تبدیل z می‌توان تبدیل z مجموع را به مجموع تبدیل zها تبدیل کرد.

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

ناحیه همگرایی قصل مشترک دو ناحیه همگرایی است یعنی $|z|>\frac{1}{2}$.

مثال(۷-۱۹): تبدیل z دنباله زیر و ناحیه همگرائی آنرا بیابید.

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\{u[n]-u[n-10]\}$$

حل: چون دنباله فوق یک دنباله دوره محدود است داریم.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}$$

باتوجه به اینکه رابطه فوق یک سری هندسی است داریم.

$$X(z)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

اگر توجه کنیم قطب در $z=\frac{1}{2}$ توسط صفر در $z=\frac{1}{2}$ حذف می‌شود، بنابراین $X(z)$ هیچ قطبی نخواهد داشت. بنابراین ناحیه همگرائی تمام صفحه z خواهد بود.

مثال(۷-۲۰): تبدیل معکوس $X(z)$ را بیابید اگر $x[n]$ راست‌رو باشد.

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{z^{-2}-3z^{-1}+2}$$

حل: جهت سادگی فرض می‌کنیم $z^{-1}=x$ باشد. در آنصورت می‌توان $X(z)$ را به کسور جزئی برحسب x تجزیه کرد.

$$\frac{1-2x}{x^2-3x+2}=\frac{a}{(x-2)}+\frac{b}{(x-1)}$$

نتیجتاً

$$a=-3$$
$$b=1$$

بنابراین

$$X(z)=\frac{-3}{z^{-1}-2}+\frac{1}{z^{-1}-1}$$

و یا

$$X(z)=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}}$$

و ناحیه همگرائی باید شامل خارج دایره واحد شود. چون فرض براین است که $x[n]$ راست‌رو است بنابراین ناحیه همگرائی بصورت زیر است.

$$|z|>1$$

بنابراین

$$x[n]=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-(-1)^n\right]u[n]$$

مثال(۷-۲۱): تبدیل معکوس z را بیابید اگر

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

و اگر $x[n]$ راست‌رو باشد.

حل: بسادگی می‌توان $X(z)$ را بصورت زیر نوشت.

$$X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

بنابراین با توجه به اینکه $x[n]$ راست‌رو است.

$$x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

مثال (۷-۲۲): تبدیل معکوس Z را بیابید اگر

$$X(z)=\log(1-2z)\qquad |z|<\frac{1}{2}$$

حل: با توجه به ناحیه همگرائی باید سیگنال چپرو باشد. با استفاده از بسط سری توانی داریم.

$$\log(1-w)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^{m}}{m}\quad |w|<1$$

بنابراین

$$X(z)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2z)^{m}}{m}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{m}}{m}z^{m}$$

بنابراین

$$x[n]=\frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]$$

مثال (۷-۲۳): مطلوبست تبدیل معکوس Z اگر

$$X(z)=\log(1-\frac{1}{2}z^{-1})\qquad , \quad |z|>\frac{1}{2}$$

حل: مشابه مثال (۷-۲۲) با استفاده از بسط سری توانی داریم.

$$X(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}z^{-1})^{n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(\frac{1}{2})^{n}}{n}z^{-n}$$

بنابراین

$$x[n]=\frac{-(\frac{1}{2})^{n}}{n}u[n-1]$$

مثال (۷-۲۴): یک دنباله حقیقی مانند $x[n]$ که دارای تبدیل $X(z)$ است را در نظر بگیرید و نشان دهید که

$$X(z) = X^*(z^*)$$

حل: از تعریف تبدیل z شروع می‌کنیم.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

نتیجتا

$$X^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (z^*)^{-n}$$

بنابراین

$$X^*(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = X(z)$$

مثال (۷-۲۵): دو دنباله $x_1[n]$ و $x_2[n]$ توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$x_2[n] = x_1[-n]$$

مطلوبست رابطه تبدیل z دو دنباله

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] z^{-n}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[-n] z^{-n}$$

بنابراین با تغییر متغیر $m = -n$ در مجموع دوم داریم.

$$X_2(z) = \sum_{m=\infty}^{-\infty} x_1[m] z^{m}$$

بنابراین

$$X_2(z) = X_1(z^{-1})$$

تمرین های حل نشده

۱. دو دنباله $x_1[n]$ و $x_2[n]$ توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$x_2[n] = (j2)^{n-1} x_1[-n]$$

مطلوبست ارتباط تبدیل z دو دنباله.

۲. اگر نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرائی تبدیل سیگنال $x_1[n]$ دارای سه قطب در $z = 0.5$ و $z = \pm j1.5$ و یک صفر در $z = -1$ باشد مطلوبست نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرائی مربوط به تبدیل $x_2[n] = (-3)^n x_1[-n]$.

۳. چگونه می توان از فقط محل صفر و قطب ها ی یک تبدیل به حقیقی بودن سیگنال در حوزه زمان پی برد.

۴. تبدیلZ دنباله های زیر را بگیرید.

$$x[n]=(1/2)^{2n}\cos(2n)u[n]$$
$$x[n]=(1/8)^{2n}(2n)u[n]$$
$$x[n]=(1/4)^{n}\{u[n]-u[n-100]\}$$

۵. تبدیل معکوس Z بگیرید.

$$X(z)=\frac{z-0.5}{(z+0.5)^2} \qquad |z|>0.5$$
$$X(z)=\log[z(z-0.25)] \qquad |z|>0.25$$
$$(z)=\frac{2z-0.5}{(z/2-0.5)^2} \qquad |z|>1$$

۶. تمام سیگنالهای $x_1[n]$ ممکن برای نمودار صفر و قطبی که در سوال دوم مطرح شده است را بنویسید.

۷. تبدیل معکوس $X(z)$ را بیابید اگر $x[n]$ راسترو باشدو

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{z^{-2}-z^{-1}+1}$$

۸. اگر

$$\varphi_{xx}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]x[n+k]$$

مطلوبست تبدیل **z** سیگنال $\varphi_{xx}[n]$.

۹. مطلوبست تبدیل **z** سیگنال های زیر بر حسب تبدیل **z** دنباله $x[n]$.

$$y[n]=\begin{cases}x[n/2] & n, even\\ 0 & n, \quad odd\end{cases}$$
$$y[n]=x[2n]$$

۱۰. یک دنباله راست رو دارای تبدیل**z** زیر است.

$$X(z)=\frac{3z^{-10}+z^{-7}-5z^{-2}+4z^{-1}+1}{z^{-10}-5z^{-7}+z^{-3}}$$

مطلوبست $x[n]$ برای $0>n$.

۱۱. $H(z)$ مبین تابع انتقال یک سیستم علی و پایدارغیر همانی است($H(z)\neq 1$). ورودی این سیستم شامل چهار عبارت است. یکی از آنها یک ضربه و دیگری یک نمایی مختلط به صورت $(r_0e^{j\Omega_0})^n$ (r_0 و Ω_0 اعداد ثابت حقیقی غیر صفر هستند) است. اما از جملا ت سوم و چهارم ورودی اطلاعی در دست نداریم. شکل کلی ورودی به صورت زیر است.

$$x[n]=\delta[n]+(r_0e^{j\Omega_0})^n+f_1[n]+f_2[n]$$

که در آن $f_1[n]$ و $f_2[n]$ توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. خروجی ایـن سیسـتم بـه ورودی فـوق الذکر برابر است با

$$y[n] = -6(\frac{1}{2})^n u[n] + k_1 e^{4n} \cos[3n] - k_2 e^{4n} \sin[3n] + \delta[n] + 7\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

که در آن k_1 و k_2 ضرایب مجهول با دامنه غیـر واحـد ($|k_1| \neq 1, |k_2| \neq 1$) هسـتند کـه بایـد تعیین شوند. مطلوبست تعیین دقیق ورودی، ضرایب مجهول خروجی و $H(z)$.

۱۲. دنباله های $x[n]$ و $y[n]$ با تبدیلات **z** و نواحی همگرائی داده شده مفروضند.

$$X(z); \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$
$$Y(z); \quad R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$$

مطلوبست تبدیل **z** و ناحیه همگرائی سیگنال $r[n] = x[n]y[n]$ برحسب تبدیلات و نواحی همگرائی داده شده برای $x[n]$ و $y[n]$.