انتقال حرارت پیشرفته (هدایت)

(M Necati Ozisik)

فهرست مطالب

سرفصل کلی درس:

معادله دیفرانسیل هدایت و معادلات بقا- مسائل همگن و غیرهمگن- روش های حل مسائل هدایت- روش جدایی متغیرها در مختصات قائم- حل مسائل هدایت همگن یک بعدی و چند بعدی- حل مسائل هدایت همگن و دائم چند بعدی با تولید حرارت حجمی- تجزیه مسائل غیرهمگن به مسائل ساده تر- روش جدایی متغیرها در مختصات استوانه ای- حل مسائل همگن با متغیرهای (rوt) و (rوØوt) و (rوzوØوt)- مسائل چند بعدی حالت دائم با تولید حرارت حجمی و بدون حرارت حجمی- تقسیم مسائل غیرهمگن به مسائل ساده تر- روش جدایی متغیرها در مختصات کروی- توابع legendre-lagendre Associated- مسائل همگن با متغیرهای (rوt) و (rوθوt) و (rوθوØوt)- مسائل چند بعدی حالت دائم و غیرهمگن- نقسیم مسائل غیرهمگن به مسائل ساده تر- استفاده از قضیه ahamel در حل مسائل با شرایط مرزی و یا تولید حرارت حجمی که تابعی از زمان است- تعریف Luplucetrans و خواص مربوط به آن- استفاده از L.T در حل مسائل هدایت با متغیر زمانی- روشش تقریبی در حل مسائل هدایت که شامل روش انتگرالی و روش Variational است- متد Ritz و Galerkin در شناسایی توابع چند جمله ای- روش حل عددی مسائل هدایت بطری finite diff- نمایش معادله هدایت دائم بطریق finite diff- روش های حل معادلات جبری بطور همزمان- خطاهای موجود در حل مسائل عددی- نمایش معادله هدایت غیردائم بطریق finite diff- حل مسائل هدایت با finite diff برای شرایط مرزی انحنادار اجسام.

مراجع:

1- Heat conduction , M.Necati , ozisik.

2- Fundamental of Heat transfer , Bejan , Incoreera

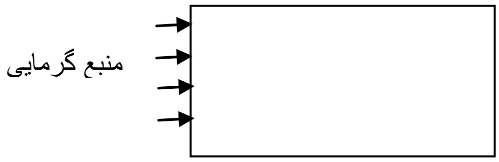
3- Heat conduction , Arpachi

4- Heat conduction, kaks

فصل اول

مبانی انتقال حرارت

Heat: انرژی که از ذرات قسمت گرمتر ماده به ذرات مشابه در بخش سردتر ماده منتقل می شود.



قانون Joseeh Fourier:

Heat fluk: $q(r,t)-k\nabla T(r,t)$

K=thermal conductivity

شار بر واحد سطح و زمان (w/m^2)

واحد k: w/m.c یا w/m.k

Heatconduction :

$$q(r,t) = -k\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} - k\frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} - k\frac{\partial T}{\partial z}\hat{k} \Rightarrow \begin{cases} q_x = -k\dfrac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} \\ q_y = -k\dfrac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} \\ q_z = -k\dfrac{\partial T}{\partial z}\hat{k} \end{cases}$$

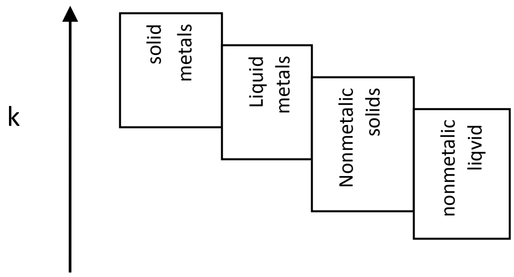
∇T: برداری که بر سطح دما ثابت (همدما) عمود است.

ضریب k: هم تابع دما و هم تابع فشار

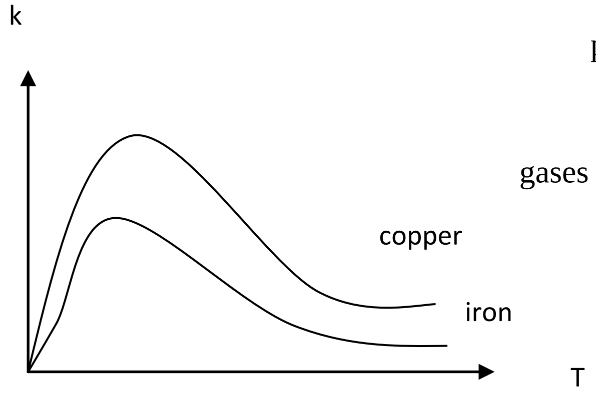
با توجه به اینکه محاسبه مقدار k یک امر عملی است پژوهش های زیادی در جهت تخمین آن صورت گرفته شده است (همچون روش های معکوس).

Pure metals

$50 \leq k \leq 4.5 w/m.^{0}c$ inorganic liqvid $0.007 \leq k \leq 0.17 w/m.^{0}c$



در فلزات با افزایش دما، ضریب k کاهش می یابد این روش کاهش در دماهای بالاتر بیشتر است.[۱]در دماهای پایین ابتدا افزایش k و سپس کاهش سریع اتفاق می افتد.

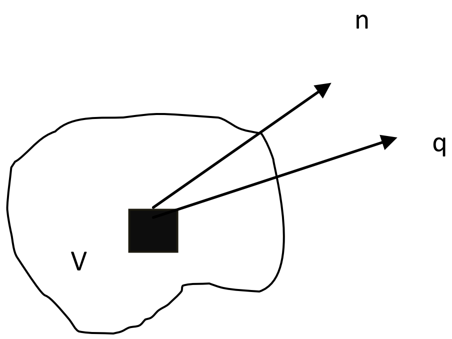


با افزایش دما k کاهش دارد → pure metals

با افزایش دما k زیاد می شود → gases & uqpors

The differential equation of heat conduction

-solid, stationary , homogeneovs, isotropic



نرخ ذخیره انرژی در حجم کنترل = نرخ انرژی تولیدی + نرخ گرمای وارد شده از طریق مرزها

V نرخ گرمای ورودی به: $-\int_A \hat{q}.\vec{n}dA = -\int_V \nabla.qdv$

g = منبع انرژی

V نرخ انرژی تولیدی در$= -\int_V qdv.$

V نرخ ذخیره انرژی در : $-\int_V \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}dv$

$$\int_V \left[-\nabla q + g - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}\right] dv = 0 \rightarrow -\nabla.q + g = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

قانون فوریه

$$q = -k\nabla^2 T \rightarrow k\nabla^2 T + g = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 T + \frac{g}{k} = \frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad \propto = \frac{k}{p c_p}$$

α: ضریب پخش گرمایی (thermal. Diffusivity)

$$\Rightarrow \nabla^2 T + \frac{g}{k} = \frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}$$

K: توانمندی ماده در رسانش گرمایی

ρc_p: توانایی ماده در ذخیره گرمایی

$\propto = \frac{k}{\rho c_p}$: توانایی محیط در پخش گرما

در صورت نبودن منبع گرمایی

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}$$

در صورت steady بودن

$$\nabla^2 T = 0$$

شکل معادله حرارت در دستگاههای مختلف:

کارتزین:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{g}{k}=\frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}$$

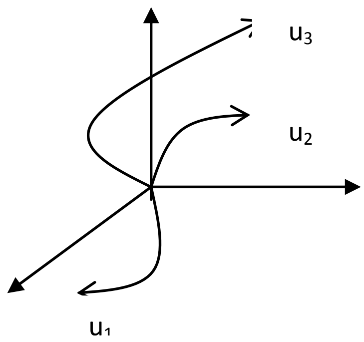
استوانه ای:

$$\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \emptyset^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{g}{k}=\frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}$$

کروی:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \emptyset^2}+\frac{g}{k}=\frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}$$

یک دستگاه جدید بصورت زیر در نظر می گیریم:



$$ds^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

$$x=X(u_1,u_2,u_3)$$

$$y=Y(u_1,u_2,u_3)$$

$$z=Z(u_1,u_2,u_3)$$

$$dx=\frac{\partial X}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial X}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial X}{\partial u_3}du_3=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial X}{\partial u_i}du_i$$

$$dy=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial Y}{\partial u_i}du_i$$

$$dz=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial Z}{\partial u_i}du_i$$

$$ds^2=a_1^2(du_1)^2+a_2^2(du_2)^2+a_3^2(du_3)^2$$

$$a_1^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u_1}\right)^2$$

$$a_2^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u_2}\right)^2$$

$$a_3^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u_3}\right)^2$$

$$a_i \ = scale\ factors$$

$$\nabla T = \frac{1}{a_1}\frac{\partial T}{\partial u_1}\hat{u}_1 + \frac{1}{a_2}\frac{\partial T}{\partial u_2}\hat{u}_2 + \frac{1}{a_3}\frac{\partial T}{\partial u_3}\hat{u}_3$$

$$\nabla . q = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{a}{a_1}q_1\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{a}{a_2}q_2\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{a}{a_3}q_3\right)\right]$$

و

$$a = a_1 a_2 a_3$$

با جایگذاری در معادله اصلی:

$$\frac{1}{\mathrm{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(k\frac{a}{a_1^2}\frac{\partial T}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(k\frac{a}{a_2^2}\frac{\partial T}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(k\frac{a}{a_3^2}\frac{\partial T}{\partial u_3}\right)\right] + g = Pc_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$dL_1 = a_1 du_1 \qquad dL_2 = a_2 du_2 \qquad dL_3 = a_3 du_3$$

حجم المان:

$$dV = dL_1 . dL_2 . dL_3 = a_1 a_2 a_3 du_1 du_2 du_3$$

$$u_1 constant \rightarrow = dA_1 = dL_2 . dL_3 = a_2 a_3 du_2 du_3$$

$$u_2 constant \rightarrow = dA_2 = dL_1 . dL_3 = a_1 a_3 du_1 du_3$$

$$u_3 constant \rightarrow= dA_3 = dL_1 . dL_2 = a_1 a_2 du_1 du_2$$

مثال: برای مختصات استوانه ای، Scale factor و مولفه های شار را بدست آورید؟

$$\begin{cases} x = rcos\theta \rightarrow u_1 = r \\ y = rsin\theta \rightarrow u_2 = \theta \\ \quad z = z \rightarrow u_3 = z \end{cases}$$

$$(a_1)^2 = (a_r)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = cos^2\theta + sin^2\theta + 0 = 1 \rightarrow a_1 = 1$$

$$(a_2)^2 = (a_\theta)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = r^2 sin^2\theta + r^2 cos^2\theta + 0 = r^2 \rightarrow a_2 = r$$

$$(a_3)^2 = (a_z)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 0 + 0 + 1 = 1 \rightarrow a_3 = 1$$

$$a = a_1 a_2 a_3 = r$$

$$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r} \qquad q_\theta = -k\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$r = constant \rightarrow dA = rd\emptyset dz$$

$$\theta = constant \rightarrow dA = drddz$$

$$z = constant \rightarrow dA = rdrd\theta$$

$$dV = rdrd\theta dz$$

مثال: برای مختصات کروی، Scale factor و مولفه های شار را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x = rsin\emptyset cos\theta \rightarrow u_1 = u_r = r \\ y = rsin\emptyset sin\theta \rightarrow u_2 = u_\theta = \theta \\ \quad z = rcos\emptyset \rightarrow u_3 = u_\emptyset = \emptyset \end{cases}$$

$$(a_1)^2 = (a_r)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = (sin\emptyset cos\theta)^2 + (sin\emptyset cos\theta)^2 + cos^2\emptyset = 1$$

$$\rightarrow a_r = 1$$

$$(a_2)^2 = (a_\theta)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = r^2sin^2\emptyset sin^2\theta + r^2sin^2\emptyset cos^2\theta + 0$$

$$= r^2sin^2\emptyset \rightarrow a_\theta = rsin\emptyset$$

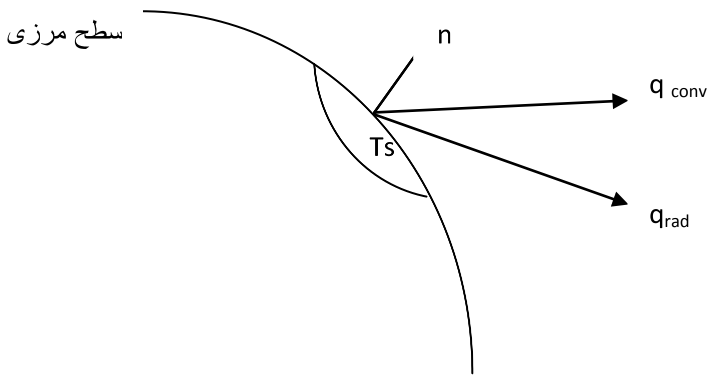
$$(a_3)^2 = (a_\emptyset)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \emptyset}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \emptyset}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \emptyset}\right)^2 = r^2cos^2\emptyset cos^2\theta + r^2cos^2\emptyset sin^2\emptyset + r^2sin^2\emptyset$$

$$\rightarrow a_3 = a_\emptyset = r$$

$$a = a_\emptyset a_\theta a_r = r^2sin\emptyset$$

$$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r} \qquad q_\theta = -k\frac{1}{rsin\emptyset}\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad q_z = -k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \emptyset}$$

Boundary Canditions:



$$q_{conv} = h(T_s - T_\infty) \quad w/m^2$$

h ضریب جابجایی گرمایی $(w/m^2.k^۴)$

h تابع پارامترهای زیر است:

- رژیم جریان سیال روی مرز

- سطح هندسی و نوع سیال

- دمای متوسط سیال

$$q_{rad} = \epsilon\sigma\left({T_s}^4 - T_1^4\right) \quad w/m^2$$

$\epsilon = emissovoty\ \ of\ \ surface$ ضریب صدور

$$\sigma = stefan - Boltzman\ \approx 5.66 \times 10^{-8} \quad \left(\frac{w}{m^2.k^4}\right)$$

$$q_n = \vec{q}.\vec{n} = -k\frac{\partial T}{\partial n}$$

$$\vec{n} = L_x\ \ i + L_y\ \ j + L_z\ \ k$$

اگر بقای انرژی را برای یک حجم کنترل بسیار نازک حول مرز بنویسیم:

$$q_n = q_{conv} + q_{rad}$$

$$\Rightarrow -k\frac{\partial T}{n} = h(T_s - T_\infty) + \epsilon\sigma(T_s^4 - T_\infty^4)$$

۱.شرط مرزی نوع اول: (Dirichlet B.C.) شرط مرزی دیریلکه

$$T\Big|_{an\ boundary} = f(r,t) \qquad T\Big|_B = 0$$

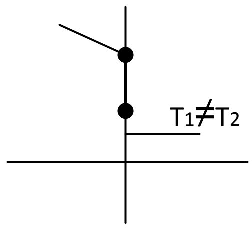
۲.شرط مرزی نوع دوم (نیومن) (Neuman B.C):

$$k\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{an\ bondary} = f(r,t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{on\ B} = 0$$

۳.شرط مرزی نوع سوم (رابین) (Robine B.C) ترکیب نوع دوم و نوع اول

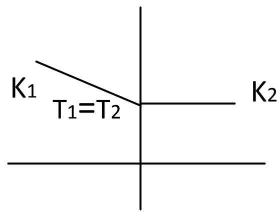
$$\left(k\frac{\partial T}{\partial n} + hT\right)_B = hT_\infty$$

۴.شرط مرزی نوع چهارم (Interface B.C)



رسانش گرما از حجم ۱ $= h_c(T_1 - T_2)_i = -k_2 \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_i$

$h \to \infty$ در حالت ایده آل $-k\frac{\partial T_1}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}$



Homogeneos problem:

هم معادله و هم شرط مرزی همگن

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$k_i = \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = 0 \qquad i = 1:3$$

اولیه $T = F(r)$

Non homogeneous problem:

شرط مرزی یا خود معادله غیرهمگن است.

$$\nabla^2 T + \frac{g}{k} = \frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial n_i} + h_i T = f_i(r, t) \qquad i = 1:3$$

اولیه $T = F(r)$

Heat conductain equation for maring solid:

Conveetive flux: $\begin{cases} \rho C_p T_{ax} = q_{conv,x} \\ \rho C_p T_{ay} = q_{conv,y} \\ \rho C_p T_{az} = q_{conv,z} \end{cases}$

$$q_x = q_{cond,x} + q_{conv,x} = -k\frac{\partial T}{\partial x} + PC_pT_{u_x}$$

$$q_y = q_{cond,y} + q_{conv,y} = -k\frac{\partial T}{\partial y} + PC_pT_{u_y}$$

$$q_z = q_{cond,z} + q_{conv,z} = -k\frac{\partial T}{\partial z} + PC_pT_{u_z}$$

با جایگذاری q_x و q_y و q_z در معادله ($\nabla. q + g = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$):

$$\mathrm{k}\nabla^2\mathrm{T} + g = \rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x\frac{\partial T}{\partial x} + u_y\frac{\partial T}{\partial y} + u_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

در حرکت $\nabla^2\mathrm{T} + \frac{g}{k} = \frac{1}{\propto}\frac{DT}{Dt}$

$\nabla^2\mathrm{T} + \frac{g}{k} = \frac{1}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}$ Not moving

محیط ایزوتروپیک: (isotropic):

K در همه ی جهات یکسان است.

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

محیط ارتروپیک (orthotropic):

مقدار k در همه ی جهات مختلف است.

$$q_x = -k_x\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -k_y\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -k_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) + g = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

محیط غیر ازوتروپیک: (aniso tropic):

$$q_x = -\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$q_y = -\left(k_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$q_z = -\left(k_{31}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{32}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

تانسور مرتبه دوم

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathrm{k}_{11} & \mathrm{k}_{12} & \mathrm{k}_{13} \\ \mathrm{k}_{21} & \mathrm{k}_{22} & \mathrm{k}_{23} \\ \mathrm{k}_{31} & \mathrm{k}_{32} & \mathrm{k}_{33} \end{bmatrix}$$

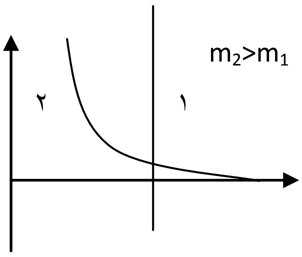
یک حالت عمومی که شمارش گرما از طریق کریستال ها صورت می گیرد.

مقاومت گرمایی خارجی $\frac{1}{\mathrm{h.A}}$

ظرفیت گرمایی ماده = PC_pV

$$m = \frac{hA}{PC_pV}$$

$$m = \frac{1}{\text{ظرفیت گرمای ویژه} \times \text{مقاومت گرمایی}}$$



عدد بی بعد $B_\mathrm{i} = \frac{\text{مقاومت گرمای داخلی}}{\text{مقاومت گرمای خارجی}} = \frac{L/_{KA}}{1/_{hA}} = \frac{hL}{k}$

طول مشخصه جامد

$$L = \frac{V}{A}$$

$B_{\mathrm{i}} < 0.1 \rightarrow$ فرض $lumped$ برای مسئله صحیح است

مثال: کره ای داخل استخر می اندازیم چه مدت طول می کشد به ۹۹٪ دمای محیط برسد؟

$$h = 600\ \frac{w}{m^2.c} \quad C_p = 0.4\ \frac{kj}{kg.c^0} \qquad \rho = 8400\ \frac{kg}{m^3} \qquad D = \frac{3}{4} mm$$

$$L = \frac{V}{A} = \frac{{}^{4}\!/_{3}\,\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{3}{r} = \frac{D}{6} = \frac{10^{-3}}{8} m$$

$$B_i = \frac{hL}{k} = 2.5 \times 10^{-3} \rightarrow B_i < 0.1$$

پس فرض درستی است.

$$\frac{T_{(t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{1}{100} = e^{-mt} \rightarrow mt = 4.6$$

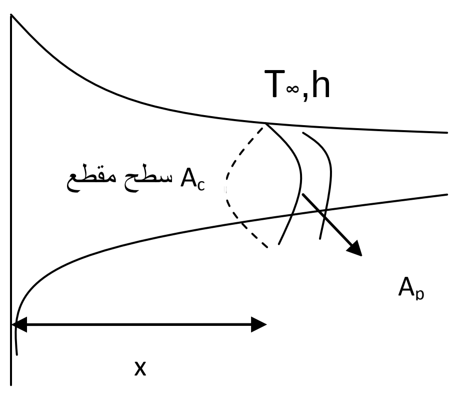
از طرفی

$$m = \frac{hA}{\rho C_p V} = \frac{h}{\rho C_p L} = 1.428 \quad s^{-1}$$

$$\Rightarrow t = 3.22\ s$$

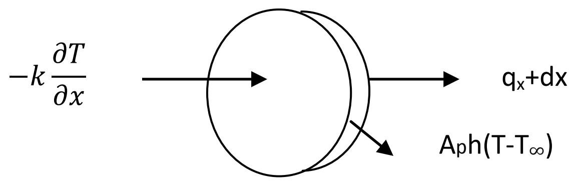
Partial lumping:

در راستای x انتقال حرارت داریم:



معادله بقای انرژی برای این سیستم کوچک:

نرخ افزایش انرژی درونی= نرخ تبادل از canvection + نرخ کامل تبادل از conduction



$$-\frac{\partial}{\partial x}(A_c q)\Delta x + hA_p(T_\infty - T) = \rho C_p A_c \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$V = A_c\Delta x \qquad A_p = p\Delta x \qquad q = -k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \theta = T - T_\infty$$

$$\frac{1}{A_c}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_c\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - \frac{hp}{kA_c}\theta = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad \theta(x,t)$$

توجه: اگر جریان پایدار باشد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial \theta(x)}{\partial x}\right) - \frac{hp(x)}{k}\theta(x) = 0$$

اگر پره مستطیلی باشد:

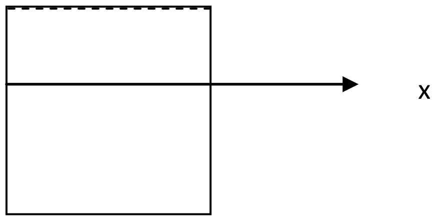
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{hp}{kA}\theta = 0 \qquad \theta(x,t)$$

فصل دوم

تفکیک متغیرها در دستگاه مختصات دکارتی

Separation of variables

(مختصات کارتزین)



معادله انتقال حرارت یک بعدی همگن:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = F(x) \qquad t = 0 \qquad Initial\ con$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 & x = 0 \\ k\dfrac{\partial T}{\partial x} + hT = 0 & x = L \end{cases} \qquad boundary\ Condition$$

$$T(x,t) = X(x)\Gamma(t) \qquad (separition\ of\ \ varibles)$$

با جایگذاری:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\mu(t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \mu(t)}{\partial t}X(x) \Rightarrow \frac{\ddot{X}}{x} = \frac{\ddot{\mu}}{\mu}\frac{1}{\alpha} = -\beta^2 \Rightarrow \ddot{X} + \beta^2 X = 0$$

$$T = -\alpha\beta^2\mu \Rightarrow \mu(t) = Ce^{-\alpha\beta^2 t}$$ معادله دیفرانسل مرتبه اول

$$\ddot{X} + \beta^2 X = 0 \to t^2 + \beta^2 = 0 \to t = \pm\beta i \Rightarrow X = Asin\beta x + Bcos\beta x$$

از شرط مرزی مقادیر A و B محاسبه می شود:

$$x = 0 \to \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \Rightarrow A\beta cos\beta x - B\beta sin\beta x = 0\Big|_{x=0} \to A = 0$$

$$x = L \rightarrow k\frac{\partial X}{\partial x} + hX = 0 \Rightarrow hBcos\beta L = 0 \Rightarrow \beta_n = \pm\frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

به β_n، eigenvolue می گویند.

در نهایت X(x)=0

جواب عمومی T

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_n\,(cos\beta_n x)e^{-\alpha\beta^2 t}$$

- فقط باید مجهول C_n را محاسبه کرد.

$$at \quad t = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} C_n\,(cos\beta_n x)F(x)$$

از تابع متعامد استفاده می کنیم:

$$\int_0^L cos\beta_n x cos\beta_m x dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ N & m = n \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{N}\int F(x)cos\,(\beta_n x)dx$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 & x = 0 \\ k\dfrac{\partial T}{\partial x} + hT = 0 & x = L \end{cases}$$

در نهایت داریم:

$$N = \int_0^L [X(\beta_m, x)]^2\,dx$$

$$C_n = \frac{1}{N(\beta_n)}\int_0^L X(\beta_n, x)\,F(x)dx$$

در جدول ۲-۲ کتاب مقادیر توابع ویژه و β_n ها برای شرایط مرزی مختلف برای مسئله هدایت یک بعدی همگن($\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$)موجود است. با این توصیف حل معادله همگن یک بعدی همگن هدایت، ساده می شود. با کمک روش هایی می توان بعضی از معادلات ناهمگن را ابتدا همگن کرد و سپس از طریق روابط اشاره شده مسئله را حل نمود.

Separation of variables: (Rectangular)

Conduction همگن و یک بعدی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ x=0 \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x}=0 \end{cases}$$

$$B.C \begin{cases} x=L \Rightarrow k\dfrac{\partial T}{\partial t}+hT=0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x,t)=X(x)\Gamma(t) \Rightarrow \dfrac{1}{X}\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\alpha\Gamma}\dfrac{\partial \Gamma}{\partial t}=-\beta^2 \\ \dfrac{\partial \Gamma}{\partial t}+\beta^2\alpha\Gamma=0 \Rightarrow \Gamma(t)=e^{-\alpha\beta^2 t} \\ X=Asin\beta x+Bcos\beta x \Rightarrow \begin{cases} B.C1: \quad \beta m = \text{مقادیر ویژه} \\ B.C2 = \quad X(\beta m,x)\text{توابع ویژه} \end{cases} \end{cases}$$

$$I.C: t=0 \ \Rightarrow T=F(x)$$

$$T(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\alpha\beta^2 t} X(\beta_m,x)$$

$$t=0 \Rightarrow F(x)=\sum_{m=1}^{\infty} C_m \quad X(\beta_m,x) \Rightarrow C_m=\frac{1}{N(\beta_m)}\int_0^L F(x)X(\beta_m,x)dx$$

$$N(B)=\int_0^L [X(\beta_m,x)]^2 dx$$

$$T(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t}\frac{1}{N(\beta_m)}X(\beta_m,x)\int_0^L X(\beta_m,x')F(x')dx'$$

معادله انتقال حرارت سه بعدی:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$B.C: k_i\frac{\partial T}{\partial n_i}+h_i T=0$$

$$T=F(x,y,z)$$

$$T(x,y,z)=\psi(x,y,z)\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=-\lambda^2 \qquad \Gamma(t)=e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\beta^2 \quad , \quad \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=-\Upsilon^2 \quad , \quad \frac{1}{X}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-\eta^2$$

$$\beta^2+\Upsilon^2+\eta^2=\lambda^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\beta^2 X=0 \ \Rightarrow X(\beta m,x)\\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2}+\Upsilon^2 Y=0 \ \Rightarrow \ Y(\gamma m,x)\\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+\eta^2 Z=0 \ \Rightarrow \ Z(\eta m,x)\end{cases}$$

$$\frac{\beta_m(H_1+H_2)}{\beta_m^2-H_1H_2}=\mathrm{tg}\,\beta L \qquad \Rightarrow \ \mathrm{tg}^{-1}\ \frac{\beta_m(H_1+H_2)}{\beta_m^2-H_1H_2}=\beta L$$

Ex.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$x=0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x}=0$$

$x = L \qquad \frac{\partial T}{\partial x} + H_2 T = 0$

$t = 0 \qquad T = T_0$

Table2.2:

$$\frac{1}{N(\beta_m)} = 2\frac{\beta_m^2 + H_2^2}{L(\beta_m^2 + H_2^2) + H_2}$$

توابع ویژه:

$$X(\beta_m, x) = cos\beta_m x \qquad \beta_m tg\beta_m L = H_2$$

$$C_m = \frac{1}{N(\beta_m)}\int F(x)X(\beta_m, x)dx$$

$$T(x,t) = 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta_m^2 t}\frac{\beta_m^2 + H_2^2}{L(\beta_m^2 + H_2^2) + H_2}\cos\beta_m x\int_{x'=0}^{L} T.cos\beta_m x' dx'$$

$$T(x,t) = 2T_0\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta_m^2 t}\frac{\beta_m^2 + H_2^2}{L(\beta_m^2 + H_2^2) + H_2}\frac{\sin\beta_m L}{\beta_m}cos\beta_m x$$

Ex:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$t = 0 \qquad T = F(x)$

Table2.2:

$X(\beta_m, x)cos\beta_m x$

$$\frac{1}{N\beta_0} = \frac{1}{L}, \frac{1}{N\beta_m} = \frac{1}{L} \qquad m = 1,2,\ldots \qquad \beta_m = \frac{m}{L}$$

$$T(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{B=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta_m^2 t}\,(\cos\beta_m x)\int_0^L F(x')cos\beta_m x'dx' + \frac{1}{L}\int_0^L F'(x)dx$$

با توجه به داده های جدول برای B=0 می نویسیم تا سری از یک شروع شود:

$$f(x) = T_0 \Rightarrow T(x,t) = T_0 + \frac{2T_0}{L}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta_m^2 t}\cos\beta_m x\,\frac{\sin\beta_m L}{\beta_m}$$

مسائل همگن 1D و نیمه بینهایت $0 \le x < \infty$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$x = 0 \qquad -k_1\,\frac{\partial T}{\partial x} + h_1 T = 0$$

$$t = 0 \qquad T = F(x)$$

تغییر متغیرها $T(x.t) = X(x)\Gamma(t)$

$$\Gamma(t) = e^{-\alpha\beta t}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \beta^2 X = 0$$

$$X = X(\beta, x)$$

Table2.3:

$$\frac{1}{N\beta_m} = \frac{2}{L}\,\frac{1}{\beta_m^2 + H_1^2} \qquad H_1 = \frac{h_1}{k_1}$$

$$T(x,t) = \int_{\beta=0}^{\infty} C(\beta)e^{-\alpha\beta^2 t} \times (\beta, x)d\beta$$

به جای سری از انتگرال استفاده می کنیم.

شرط اولیه را وارد کرده تا ضریب $C(\beta)$ محاسبه شود:

$$t = 0 \Rightarrow F(x) = \int_{\beta=0}^{\infty} C(\beta) \times (\beta, x) d\beta \Rightarrow C(\beta) = \frac{1}{N(\beta)} \int X(\beta, x') F(x') dx'$$

شکل عمومی دما:

$$T(x,t) = \int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t} X(\beta, x) \frac{1}{N(\beta)} \int X(\beta, x') F(x') dx'$$

Ex:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$x = 0 \qquad X = 0$

$t = 0 \qquad T = F(X)$

Table2.3:

$$X(\beta, x) = sin\beta x \quad , \quad \frac{1}{N(\beta)} = \frac{2}{\mathrm{x}}$$

با جایگذاری در T(x,t):

$$T(x,t) = \frac{2}{x} \int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t} \sin\beta x \int_{\beta=0}^{\infty} sin\beta x' F(x') dx' d\beta$$

داریم:

$$2\sin\beta x \sin\beta x' = \cos\beta(x - x') - \cos\beta(x + x') \qquad (1)$$

از طرفی از ریاضی داریم:

$$\int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t} \cos\alpha x d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4t}} \quad \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

معادله در (۱) جایگذاری می کنیم:

$$\int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t}\cos\beta(\mathrm{x}-\mathrm{x}')\mathrm{d}\beta = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} \quad \exp\left(-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}')^2}{4\alpha t}\right)$$

$$\int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t}\cos\beta(\mathrm{x}+\mathrm{x}')\mathrm{d}\beta = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} \quad \exp\left(-\frac{(\mathrm{x}+\mathrm{x}')^2}{4\alpha t}\right)$$

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4x\alpha t}} \int_{\beta=0}^{\infty} F(x') \quad \left[\exp\left(-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}')^2}{4\alpha t} - \exp\left(-\frac{(\mathrm{x}+\mathrm{x}')^2}{4\alpha t}\right)\right)\right] dx'$$

اگر در مسئله قبل فرض:

$$F(\mathrm{x}') = T_0 \rightarrow T(x,t)$$

$$= \frac{T_0}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{\mathrm{x}'=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}')^2}{4\alpha t}\right) dx' - \int_{\mathrm{x}'=0}^{\infty} \quad \exp\left(-\frac{(\mathrm{x}+\mathrm{x}')^2}{4\alpha t}\right) dx'$$

برای انتگرال اول:

تغییر متغیر:

$$-\eta = \frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}'}{\sqrt{4\alpha t}} \quad , \mathrm{dx}' = \sqrt{4\alpha t}\mathrm{d}\eta$$

برای انتگرال دوم:

$$\eta = \frac{\mathrm{x}+\mathrm{x}'}{\sqrt{4\alpha t}} \quad , \mathrm{dx}' = \sqrt{4\alpha t}\mathrm{d}\eta$$

$$T(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-\mathrm{x}}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\frac{-\mathrm{x}}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2} d\eta$$

از طرفی:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2} d\eta = er\,f\left(\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

$$\frac{T(x,t)}{T_0} erf(\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{4\alpha t}})$$

مسائل همگن، 1D، محیط بی نهایت ∞>x>∞-:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$t = 0 \qquad T = F(x)$$

تغییر متغیرها

$$T(x.t) = X(x)\Gamma(t)\ ,\Gamma(t) = e^{-\alpha\beta t}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \beta^2 X = 0$$

$$X(x) = a(\beta)cos\beta x + b(\beta)sin\beta x$$

β همچون قسمت قبل مقادیر پیوسته اختیار می شود.

$$T(x,t) = \int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t}[\alpha(\beta)\cos\beta x + b(\beta)\sin\beta x]d\beta$$

بسط فوریه

$$t = 0 \Rightarrow F(x) = \int_{\beta=0}^{\infty}[\alpha(\beta)\cos\beta x + b(\beta)\sin\beta x]d\beta$$

$$a(\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x')\cos\beta x' dx'$$

$$a(\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x')sin\beta x' dx'$$

با جایگذاری:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{x'=-\infty}^{\infty}[F(x')[\cos\beta x\cos\beta x' + sin\beta x sin\beta x']]dx' d\beta$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\beta=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x')\cos\beta(x-x')] dx' d\beta$$

$$a(\beta)cos\beta x + b(\beta)sin\beta x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x')\cos\beta(x-x')] dx'$$

$$T(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x')\cos\beta(x-x')] dx' d\beta$$

این رابطه را هم می توان ساده تر کرد:

داریم:

$$\int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2 t} \, cos\beta \int_{-\infty}^{\infty} [F(x')\cos\beta(x-x')] d\beta \quad = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}} exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right]$$

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\alpha\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \quad exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right] dx'$$

Ex:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$t=0 \qquad T = F(x) = \begin{cases} T_0 & \quad -L < x < L \\ 0 & \end{cases}$$

$$T(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{4\alpha\pi t}} \int_{-L}^{L} \quad exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right] dx'$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-}^{L} \quad exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right] dx'$$

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\alpha\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4\alpha\pi t}}} e^{-\eta^2}\, d\eta = \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

با تغییر متغیر $\eta = \frac{(x-x')^2}{\sqrt{4\pi\alpha t}}$, $dx' = \sqrt{4\pi\alpha t} d\eta$

$$T(x,t) = \frac{T_0}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{L+x\sqrt{4\alpha t}} e^{-\eta^2}\, d\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{L-x\sqrt{4\alpha t}} e^{-\eta^2}\, d\eta\right]$$

$$T(x,t) = \frac{T_0}{2}\left[erf\left(\frac{L+x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) + erf\left(\frac{L-x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)\right]$$

مسائل همگن چند بعدی

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$t = 0 \qquad T = F(x,y)$$

$$T(x,y,t) = \Gamma(t) X(x) Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \beta^2 X = 0$$

$$x = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

$$x = a \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + H_2 X = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + y^2 \gamma = 0$$

$$y = 0 \qquad \gamma = 0$$

$$y = b \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} + H_4 Y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{dt} + \alpha \gamma^2 \Gamma = 0$$

$\Gamma(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\alpha\gamma^2 t} = \mathrm{e}^{-\alpha(\beta^2+\gamma^2)t}$ چون $\gamma^2 = \beta^2 + \gamma^2$

$$T(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\,\mathrm{e}^{-\alpha(\beta_m^2+\gamma_n^2)t}\mathrm{X}(\beta_m,x)Y(\gamma_n\ ,\mathrm{y})$$

$$F(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\,\mathrm{X}(\beta_m,x)Y(\Gamma_n\ +\mathrm{y})\qquad 0<x<a\,,\qquad 0<y<b$$

با استفاده از تعامد:

$$C_{mn}=\frac{1}{N(\beta_m)N(\gamma_m)}\int_{x'=0}^{a}\int_{y'=0}^{b}\mathrm{X}(\beta_m,x')Y(\beta_n\ +y')\mathrm{F}(x',y')dx'\mathrm{d}y'$$

$$N(\beta_n)=\int_0^a \mathrm{X}^2(\beta_m,x)dx\qquad,\qquad N(\gamma_n)=\int_0^b \mathrm{Y}^2(\gamma_m,y)dy$$

$$T(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha(\beta_m^2+\gamma_n^2)t}\frac{1}{N(\beta_m)N(\gamma_m)}\mathrm{X}(\beta_m,x)Y(\gamma_n\ ,\mathrm{y})$$

$$\int_0^a\int_0^b \mathrm{X}(\beta_m,x')Y(\beta_n\ ,y')\mathrm{F}(x',y')dx'\mathrm{d}y'$$

Product solution:

معادله همگن: شرط استفاده تابع شرط اولیه

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}\qquad 0<x<a\quad,\qquad 0<y<b$$

شرایط مرزی:

$$t=0\qquad T=F(x,y)$$

$$F(x,y)=\mathrm{F}_1(\mathrm{x})\mathrm{F}_2(\mathrm{y})$$

$$-k_1\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+h_1 T=0 \quad at\ x=0$$

$$-k_2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+h_2 T=0 \quad at\ x=a$$

$$-k_3\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+h_3 T=0 \quad at\ y=0$$

$$-k_4\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+h_4 T=0 \quad at\ y=b$$

$$F(x,y)=\mathrm{F_1(x)F_2(y)}$$

$$T(x,y,t)=\mathrm{T_1(x,t)T_2(y,t)}$$

و T_2 در معادله ی اصلی جایگذاری می کنیم و در نهایت برای هر جهت (x,y) یک معادله مستقل به صورت زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial t} \qquad 0\le x\le a$$

$$-k_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+h_1 T_1=0 \qquad x=0$$

$$k_2\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_2 T_1=0 \qquad x=a$$

$$T_1=\mathrm{F_1(x)} \quad \mathrm{at} \quad \mathrm{t=0}$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial t} \qquad 0\le y\le a$$

$$-k_3\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}+h_3 T_2=0 \qquad y=0$$

$$k_4\frac{\partial T_2}{\partial y}+h_4 T_2=0 \qquad y=a$$

$$T_2=\mathrm{F_2(x)} \quad \mathrm{at} \quad \mathrm{t=0}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad at \quad t=0\ \Rightarrow T=0$$

$$x=0\ \Rightarrow T=0$$

$$y=0\ \Rightarrow T=0$$

$$\frac{T_1(x,t)}{T_0} = erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

$$T_2(y,t) = rrf\left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

$$T(x,y,t) = T_0 erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) erf\left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

مسئله دیواره دو انتها بسته (جدول ۲.۲)

$$t = 0 \ \Rightarrow T = T_0$$

$$T_1(x,t) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \quad \mathrm{e}^{-\alpha\beta_m^2 t} \frac{\mathrm{H}}{\alpha(\beta_m^2 + H^2) + H} \frac{\cos\beta_m x}{\cos\beta_m a}$$

$$T_2(y,t) = 2T_0\sum_{n=1}^{\infty} \quad \mathrm{e}^{-\alpha\gamma_n^2 t} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{b}(\gamma_n^2 + H^2) + H} \frac{\cos\gamma_n \ x}{\cos\gamma_n \ a}$$

$$T(x,y,t) = \mathrm{T_1(x,t)T_2(y,t)}$$

فرض همگن بودن

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\rightarrow \ T(x,y) = \mathrm{X(x)Y(y)}$$

$$XY + YX = 0 \ \ \rightarrow \ \ \frac{X}{X} - \frac{Y}{Y} = -\beta^2$$

$$X + \beta^2 X = 0 \ \ \rightarrow \ \ \begin{cases} \dfrac{dX}{dx} = 0 \\ \dfrac{dX}{dx} + HX = 0 \end{cases} \qquad X = Asin\beta x + Bcos\beta x$$

جدول ۲.۲ اعمال شرایط مرزی:

$$X(\beta_m, x) = cos\beta_m x \qquad \frac{1}{N(\beta_m)} = 2\frac{\beta_m^2 + H^2}{\alpha(\beta_m^2 + H^2) + H}$$

$$Y + \beta^2 Y = 0 \ \ \rightarrow Y(y) = A'\sinh(\beta y) + B'\cosh(\beta y) \ \ \rightarrow \ \ Y(\beta_m, y) = cosh\beta_m\,(b - y)$$

$$T(x,y) = 2\sum C_m \frac{\beta_m^2 + H^2}{\alpha(\beta_m^2 + H^2) + H} \cos\beta_m x cosh\beta_m (b - y)$$

$$y = 0 \rightarrow f(x) \sum C_m \cosh(\beta_m b) cosh\beta_m x$$

$$\int \quad \cos(\beta_m x) cos\beta_m x dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 0 & n = m \end{cases}$$

$$C_m = \frac{1}{N(\beta_m) cosh(\beta_m b)} \int_0^a cos\,\beta_m x' \mathrm{f}(x') dx'$$

$$T(x,y) = 2 \sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \quad \frac{\beta_m^2 + H}{\alpha(\beta_m^2 + H^2) + H} \frac{cosh\beta_m (b-y)}{\cosh\beta_m b} \cos\beta_m x \int_0^a cos\,\beta_m x' \mathrm{f}(x') dx'$$

مثال:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\rightarrow \; T(x,y) = \mathrm{X(x)Y(y)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\ddot{X}}{X} - \frac{\ddot{Y}}{Y} = -\beta^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{X} + \beta^2 X = 0 \\ \ddot{Y} + \beta^2 Y = 0 \end{cases}$$

جدول (۳-۲):

$$X(\beta, x) = sin\beta x$$

$$\frac{1}{N(\beta)} = \frac{2}{\pi}$$

حل معادله y:

$$Y(\beta, y) = sinh\beta(b-y)$$

$$T(x,y) = \int_{\beta=0}^{\infty} \quad A(\beta) sinh\beta(b-y) sin\beta x d\beta$$

$$f = \int_{\beta=0}^{\infty} \quad A(\beta) \sinh(\beta b)\, sin\beta x d\beta = 0$$

$$A(\beta)\sinh(\beta b)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin(\beta x')\,f(x')dx'$$

$$\Rightarrow T(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_{\beta=0}^{\infty}\frac{sinh\beta(b-y)}{sin\beta b}sin\beta xd\beta\int_{0}^{\infty}\sin(\beta x')\,f(x')dx'$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}=0\quad 0\le y<b\quad,\quad 0<x<\infty$$

$$\begin{cases}\mathrm{x}=0\ \rightarrow \mathrm{T}=\mathrm{f(y)}\\ \mathrm{y}=0\ \rightarrow\ \mathrm{T}=0\end{cases}$$

$$\rightarrow\quad \frac{\ddot{X}}{X}-\frac{\ddot{Y}}{Y}=-\beta^2\quad\rightarrow \ddot{Y}+\beta^2Y=0$$

$$table\ 2.2\quad\rightarrow\quad\begin{cases}Y(\beta_n,y)=sin\beta_ny\\ N(\beta_n)=\dfrac{b}{2}\end{cases}\quad\rightarrow\quad\beta_n=\frac{\pi n}{b}$$

$$\ddot{X}+\beta^2X=0\quad\rightarrow\quad X=e^{-\beta x}$$

برای محاسبه ضریب شرط مرزی را وارد می کنیم

$$at\quad x=0\quad\rightarrow\quad f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\,sin\beta_ny$$

$$\rightarrow\quad C_n\frac{1}{N(\beta_n)}\int_{a}^{b}sin\beta_ny'\,f(y')dy'$$

$$\frac{T(x,y)}{\mathrm{T_0}}=\frac{4}{\pi}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{-\beta_nx}\mathrm{sin}\beta_ny$$

$$\nabla^2\mathrm{T(r,t)}+\frac{1}{\mathrm{k}}\mathrm{g(r)}=\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{dT(r,t)}}{\mathrm{dt}}$$

$$k_{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dx_i}}+h_{\mathrm{i}}\mathrm{T}=f_{\mathrm{i}}(\mathrm{r})\quad \text{on}\quad \text{Bounday Si}$$

$$T=f(r)\quad t=0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{k}g(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}$$

$$T(x,y) = X(x) + X'(x,t)$$

$$x = 0 \qquad -k\frac{dT}{dx} + hT = g(x)$$

ترم منبع وارد می شود.

بخش ناهمگن تابع زمان نباشد:

مسئله مستقل از زمان T_{0j} (r)

مسئله گذرا (وابسته به زمان) همگن T_h (r,t)

$$x = b \qquad k\frac{dT}{dx} + hT = 0 \qquad , \quad t = 0 \;\; T - f(x)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{k}g(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -k\dfrac{dX}{dx} + hX_1 = g(x_1) \\ k\dfrac{dX_1}{dx} + hX_1 = 0 \end{cases}$$

شرط مرزی همگن:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{dX'}{dt}$$

$$X(x) + X'(x,0) = f(x) \quad \rightarrow \quad X'(x,0) = f(x) - X(x)$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad X' = f(x) - X(x)$$

Product solution:

همگن بودن معادله – : شرط استفاده از روش

تابع شرط اولیه – $F(x\,,y) = F_1(x)\,F_2(y)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t} \qquad 0 < x < a \qquad 0 < y < b$$

شرایط مرزی:

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} + h_1\,T = 0 \qquad at \qquad x = 0$$

$$k_2 \frac{\partial T}{\partial x} + h_2\,T = 0 \qquad at \qquad x = a$$

$$-k_3 \frac{\partial T}{\partial y} + h_3\,T = 0 \qquad at \qquad y = 0$$

$$k_4 \frac{\partial T}{\partial y} + h_4\,T = 0 \qquad at \qquad y = b$$

شرط اولیه:

$$t = 0 \;\rightarrow\; T = F_1(x)\,F_2(y)$$

$$T(x,y,t) = T_1\,(x,t).T_2\,(y,t)$$

T_1 و T_2 را در معادله اصلی جایگذاری می کنیم و در نهایت برای هر جهت (x,y) یک معادله مستقل به صورت زیر بدست می آید :

$$x:\ \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T_1}{\partial t} \qquad 0 \le x \le a \quad t > 0$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1\,T_1 = 0 \qquad x = 0 \qquad t > 0$$

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + h_2\,T_1 = 0 \qquad x = a$$

$$t_1 = F_1(x)$$

$$y:\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t} \qquad 0 \le y \le b$$

$-k_3 \frac{\partial T_2}{\partial y} + h_3 T_2 = 0 \qquad y = 0$

$$k_4 \frac{\partial T_2}{\partial y} + h_4 T_2 = 0 \qquad y = b$$

$@\, t = 0 \rightarrow T_2 = F_2(y)$

مثال : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$

$at \quad t = 0 \rightarrow T = T_0$

روی خط $x = 0 \rightarrow T = 0$

روی خط $y = 0 \rightarrow T = 0$

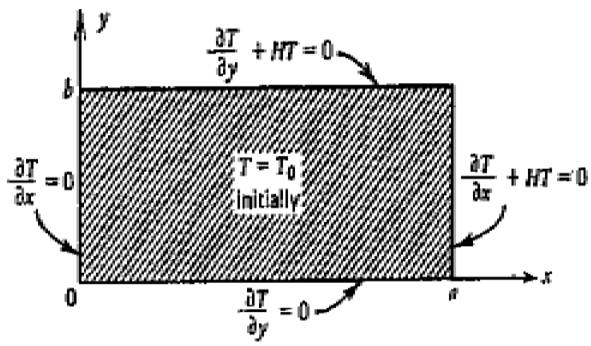
$T(x, y, t) = T_1(x, t) . T_2(y, t)$

در گذشته مسئله یک بعدی حل شده

$$T_1(x, t) = T_0\, erf(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}), T_2(y, t) erf(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}})$$

$$T(x, y, t) = T_0\, erf(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}) erf(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}})$$

مثال :



در مسئله دیواره دو انتها بسته (جدول ۲-۲) بدست می آید .

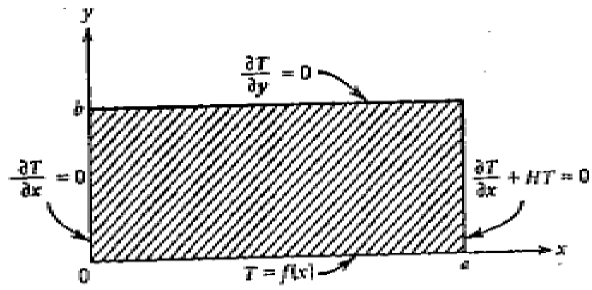
$t = 0 \rightarrow T = T_0$

$$T_1(x,t) = 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha {\beta_m}^2 t} \; \frac{H}{\alpha({\beta_m}^2 + H^{2)} + H} \frac{cos\beta_m x}{cos\beta_m a}$$

$$T_2(y,t) = 2T_0\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\gamma_n^2 t} \; \frac{H}{b({\gamma_n}^2 + H^2) + H} \frac{cos\gamma_n y}{cos\gamma_n b}$$

$$T(x,y,t) = T_1\ (x,t).T_2\ (y,t)$$

مثال:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < a \qquad 0 < y < b$$

$$\rightarrow T(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\rightarrow \ddot{X}\,Y + \ddot{Y}X = \rightarrow \frac{\ddot{X}}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = -\beta^2$$

$$\ddot{X} - \beta^2 x = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dx} = 0 \\ \frac{dX}{dx} + HX = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow x = A\sin\beta x + B\cos\beta x$$

$$\xrightarrow{\text{اعمال شرایط مرزی جدول}2-2} X(\beta_m, x) = \cos\beta_m x$$

$$\ddot{Y} + \beta^2 Y = 0 \text{ و } \frac{1}{N(\beta_m)} = 2\frac{\beta_m^2 + H^2}{\alpha(\beta_n^2 + H^2) + H}$$

$$\ddot{Y} - \beta^2 Y = 0 \rightarrow Y(y) = \acute{A}\sin h(\beta y) + \acute{B}\cos(\beta y)$$

$$\rightarrow Y(\beta_m, y) = \cosh\beta_m(b - y)$$

$$T(x,y) = 2\sum c_m \; \frac{\beta_m^2 + H^2}{\alpha(\beta_n^2 + H^2) + H} \cos\beta_m x \cosh\beta_m(b - y)$$

$y = 0$ شرط مرزی $\rightarrow \; F(x) = \sum c_m \, \cosh\beta_m \, b \cos \beta_m x$

با استفاده از شرط تعامد $\rightarrow$ $\qquad \cos(\beta_m x)\cos(\beta_n x)dx = \begin{cases} 0 & h \neq m \\ 0 & h = m \end{cases}$

$$c_m = \frac{1}{N(\beta_m)\cosh \beta_m b} \int_0^a \cos\beta_m \acute{x} F(\acute{x}) d\acute{x}$$

$$T(x,y) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{{\beta_m}^2 + H}{\alpha({\beta_m}^2 + H^2) + H} \frac{\cos \beta_m (b-y)}{\cosh \beta_m b} \cos \beta_m x \int_0^a \cos\beta_m \acute{x} F(\acute{x}) d\acute{x}$$

مثال :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad T(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\rightarrow \frac{\ddot{X}}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = -\beta^2 \rightarrow \begin{cases} \ddot{X} + \beta^2 x = 0 \\ \ddot{Y} - \beta^2 X = 0 \end{cases}$$

$(table\ 2-3) \rightarrow X(\beta, x) = \sin \beta x$

$$\frac{1}{N(\beta)} = \frac{2}{\pi}$$

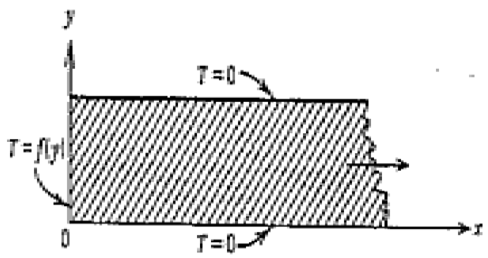
حل معادله Y : $Y(\beta, y) = \sin h\beta(b-y)$

$$T(x,y) = \int_{\beta=0}^{\infty} A(\beta) \; \sinh\beta(b-y) \sin \beta_x d\beta$$

$$y = 0 \rightarrow F(x) = \int_{\beta=0}^{\infty} A(\beta) \; \sinh(\beta b) \sin \beta_x d\beta$$

$$\rightarrow A(\beta) \sinh(\beta b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\beta \acute{x}) F(\acute{x}) d\acute{x}$$

$$T(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_{\beta=0}^{\infty} \frac{\sinh\beta(b-y)}{\sin\beta b} \; \sin \beta x d\beta \int_{\acute{x}=0}^{\infty} \sin(\beta \acute{x}) F(\acute{x}) d\acute{x}$$



$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2}=0 \qquad 0 \leq y < b \quad 0 < x < \infty$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow T=F(y) \\ y=0 \rightarrow T=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\ddot{X}}{\mathrm{X}}=-\frac{\ddot{Y}}{Y}=\beta^2 \rightarrow \begin{cases} \ddot{Y}+\beta^2 \mathrm{Y}=0 \rightarrow table\ 2-2 \\ \ddot{Y}-\beta^2 \mathrm{X}=0 \quad \rightarrow \mathrm{X(x)}=\mathrm{e}^{-\beta_{\mathrm{n}} \mathrm{x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(\beta_{\mathrm{n}}, \mathrm{y})=sin\beta_n\, y \\ \mathrm{N}(\beta_{\mathrm{n}})=\frac{b}{2} \\ \beta_{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{n}\pi}{\mathrm{b}} \end{cases} \qquad \rightarrow T(x, y)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{c}_{\mathrm{n}}\, e^{-\beta_n x} \sin \beta_n\, y$$

برای محاسبه ضریب c_{n} شرط مرزی را وارد می کنیم .

$$@\, x=0 \quad \rightarrow \quad F(y)=\sum_{n-1}^{\infty} \mathrm{c}_{\mathrm{n}} \sin \beta_n\, y$$

$$c_n=\frac{1}{\mathrm{N}(\beta_{\mathrm{n}})} \int_0^{\mathrm{b}}(\,sin\beta_n\, \acute{y})\, F(\acute{y}) d\acute{y}$$

$$F(x)=\mathrm{T}_0$$

$$\frac{\mathrm{T(x, y)}}{\mathrm{T}_0}=\frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{n} e^{-\gamma_n x} \sin \beta_n\, y$$

نا همگن :

۱- ترم منبع وارد می شود
۲- بخش ناهمگن تابع زمان نباشد

$$\nabla^2\, \mathrm{T}(r, t)+\frac{1}{k} g(r)=\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathrm{T}(r, t)}{\partial \mathrm{T}}$$

$$k_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{n}_{\mathrm{i}}}+h_i \mathrm{T}=F_i(r) \qquad on\ boundary$$

$$\mathrm{T}=F(r) \qquad t=0$$

۱-مسئله مستقل از زمان $\mathrm{T}_j(r)$

۲-مسئله وابسته به زمان (گذرا) همگن $\mathrm{T}_n(r, t)$

$$\nabla^2\, \mathrm{T}_0(r)+\delta_{0 j}\, \frac{1}{k} g(r)=0$$

$$k_i \frac{\partial \mathrm{T}_0 j}{\partial \mathrm{x_i}} + \mathrm{h_i} \mathrm{T}_{0j} = \delta_{ij} F_{\mathrm{i}}(r) \qquad \delta_{\mathrm{i}} j = \begin{cases} 0 & \mathrm{i} \neq j \\ 1 & \mathrm{i} = j \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{1}{\mathrm{k}} \mathrm{g}(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}}$$

$$T(x,t) = X(x) + \acute{\mathrm{X}}(x,t)$$

$$\mathrm{x} = 0 \qquad -k_1 \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{hT} = 0$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{b} \qquad + k_1 \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{hT} = 0$$

$$\mathrm{T} = 0 \quad \mathrm{T} = F(x)$$

$$X(x) + \acute{X}(x,0) = F(x)$$

$$\acute{X}(x,0) = F(x) - X(x)$$

$$1: \begin{cases} -K \frac{\partial x}{\partial x} + h x_1 = g(x) \\ K \frac{\partial x_1}{\partial x} + h x_1 = 0 \end{cases}$$

$$2: \quad \frac{d^2 \acute{x}}{d^2 x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \acute{x}}{\partial \mathrm{t}} \quad \rightarrow$$ شرط مرزی همگن

$$t = 0 \rightarrow x = F(x) - X(x)$$

شکستن مسائل ناهمگن به مسائل ساده تر :

ناهمگن می تواند یا در معادله ظاهر شود و یا در شرایط مرزی

فرض : ترم منبع و بخش ناهمگن شرایط مرزی تابع زمان نباشد .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k} \mathrm{g} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad - k \frac{\partial T}{\partial k} + \mathrm{hT} = F_1(x) \\ x = 0 \quad k \frac{\partial T}{\partial k} + \mathrm{hT} = 0 \\ t = 0 \quad \mathrm{T} = F(x) \end{cases}$$

$$T(x,t) = T_0(x) + T_h(x,t)$$

شرط مرزی ناهمگن در این معادله وارد می شود.

برای مسئله $steady - state$:

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{1}{k}\mathrm{g} = 0$$

$$x = 0 \to -k\frac{\partial^2 T_0}{\partial x} + \mathrm{h}T_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T_h}{\partial \mathrm{t}}$$

$$x = 0 \to -k\frac{\partial T_h}{\partial x} + \mathrm{h}T_h = 0$$

$$x = L \to k\frac{\partial T_h}{\partial x} + \mathrm{h}T_h = 0$$

$$t = 0 \to T(x,0) = T_0\ (x).T_h(x,0)$$

$$T_h(x,0) = T(x,0) = T_0\ (x) = F(x) - T_0\ (x)$$

$$T_h = F(x) - T_0\ (x)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\begin{cases} x = 0 & \mathrm{T} = T_1 \\ x = L & \mathrm{T} = T_2 \\ t = 0 & t = F(x) \end{cases} \qquad T(x,t) = T_0\ (x) + T_h(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} = 0 \to T_0 = c_1 x + c_{2\to} \begin{cases} x = 0 \to T_0 = T_1 \\ x = L \to T_0 = T_2 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{L} \\ c_{2=T_1} \end{cases}$$

قسمت $steady - state$:

$$\to T_0\ (x) = (\frac{T_2 - T_1}{L})x + T_1$$

$$\frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial T_h}{\partial \mathrm{t}} \begin{cases} x = 0 \to \mathrm{T} = 0 \\ x = L \to \mathrm{T} = 0 \\ t = 0 \to \mathrm{T} = F(x)\left\{(\dfrac{T_2 - T_1}{2})x + T_1\right\} = F(x) \end{cases}$$

$$table\ \ 202 \to x(\beta_{\mathrm{m},}x) = sin\beta_{\mathrm{m}}{}^{\mathrm{x}}$$

$$\frac{1}{N(\beta_{\mathrm{m}})} = \frac{2}{L} \qquad sin\beta_{\mathrm{m}^L} = 0 \rightarrow \beta_{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{m}\pi}{L}$$

$$T_h(x,t) = \sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\propto\beta_{\mathrm{m}^{2}t}} \frac{1}{N(\beta_{\mathrm{m}})} X(\beta_{\mathrm{m},}x) \int_0^L X(\beta_{\mathrm{m},}\acute{x})\, F(x) d\acute{x}$$

$$T(x,t) = T_1 + (\,T_2 - T_2)\frac{x}{L} + \sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\propto\beta_{\mathrm{m}^{2}t}}\, sin\beta_{\mathrm{m}^{\mathrm{x}}} \int_0^L [F(\acute{x}) - T_1(T_2 - T_1)] \frac{\acute{x}}{L}$$

مثال:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k}\mathrm{g}_0 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} \qquad \mathrm{g}_0 = \text{منبع ثابت}$$

$$x = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$x = L \rightarrow \mathrm{T} = 0$$

$$t = 0 \qquad \mathrm{T} = F(x)$$

$steady\ state$ بخش : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k}\mathrm{g}_0 = 0 \;\; T(x) = -\frac{\mathrm{g}_0}{2k}\, x^2 + c_1 x + c_2$

$$x = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \mathrm{x} = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$x = L \rightarrow \mathrm{T} = 0 \qquad x = L \rightarrow\; c_2\,) = \frac{\mathrm{g}_0}{2k} L^2$$

$$\rightarrow T_0\;(x) = \frac{1}{2k}\mathrm{g}_0 L^2 (1 - \frac{x^2}{L^2})$$

$unsteay$ بخش : $\frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T_h}{\partial \mathrm{t}}$

$$x = 0 \rightarrow \frac{\partial T_h}{\partial x} = 0$$

$$x = L \rightarrow\; T_h = 0$$

$$t = 0 \rightarrow T_h = F(x) - \frac{1}{2k}\mathrm{g}_0 L^2 (1 - \frac{x^2}{L^2})$$

$table\ 2 - 2\colon X(\beta_{\mathrm{m},}\mathrm{x}) = cos\beta m^x \qquad cos\beta m^L = 0$

$$\frac{1}{N(\beta_{\mathrm{m}})} = \frac{2}{L} \qquad \beta_{\mathrm{m}} = \frac{(2\mathrm{m}+1)\pi}{2L}$$

$$T_h(x,t) \;=\frac{2}{L}\sum_{\mathrm{m=0}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\propto\beta_{\mathrm{m}^2 t}}\, cos\beta m^{x}\int_0^L F(\acute{x}) cos\beta m^{\acute{x}} d\acute{x}$$

$$\to\; T(x,t)\frac{\mathrm{g}_0 L^2}{2k}(1-\frac{x^2}{L^2})$$
$$+\;\frac{2}{L}\sum_{\mathrm{m=0}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\propto\beta_{\mathrm{m}^2 t}}\;\; cos\beta m^{x}\int_0^L F(\acute{x}) cos\beta m^{\acute{x}} d\acute{x}$$
$$-\frac{2\mathrm{g}_0}{k1}\;\sum_{\mathrm{m=0}}^{\infty}(-1)^{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-\propto\beta_{\mathrm{m}^2 t}}\frac{1}{\beta m^2} cos\beta m^{x}$$

یک تبدیل مفید:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} =\propto \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial T}{\partial x}+\mu T+g \qquad\qquad \propto,\beta,\mu = cos\mathrm{t}$$

$$T(x,t)=w(x,t)e\times p\left[\frac{\beta}{2\propto}x-(\frac{\beta^2}{4\propto}-\pi)t\right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mathrm{t}} =\propto \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mathrm{g}_0 e\times p\left\{-\left[\frac{\beta}{2\propto}x-(\frac{\beta^2}{4\propto}-\pi)t\right]\right\}$$

شرایط مرزی و اولیه نیز متناسب با این تبدیل تغییر می کنند .

$$Bi\frac{\mathrm{hL}}{k}$$

$$\tau=\frac{\alpha t}{L^2}=\frac{k(\frac{1}{l})l^2}{\rho c_p l^3/\mathrm{t}}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\;=\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{z}} \qquad\qquad 0<x<1 \qquad \text{for}$$

$$x=0\to\frac{\partial\theta}{\partial x}=0$$

$$X=\frac{x}{L} \qquad\qquad x=1\to\frac{\partial\theta}{\partial x}+\;Bi\theta=0$$

$$\theta=\frac{T(x,t)-T\infty}{T_i-T\infty} \qquad \theta=1$$

فصل سوم

تفکیک متغیرها در دستگاه مختصات استوانه ای

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \emptyset^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

seperation of variables: $T(r,\emptyset,z,t)=\psi(r,\phi,z)\Gamma(t)$

با جایگذاری در معادله اصلی

$$\Rightarrow \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \emptyset^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial t}-\lambda^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{\partial t}+\alpha\Gamma\lambda^2=0 \implies \frac{d\Gamma}{\partial t}+\alpha\lambda^2\Gamma$$

معادله هلمهولتز:(Helmonhzeq)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \emptyset^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}+\lambda^2\psi=0$$

$\psi(r,\phi,z)R(r).\Phi(\phi)Z(z)$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2 R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}+\lambda^2=0$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}-\xi^2$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}-\nu^2$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2 R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}=-\beta^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2=\xi^2+\nu^2+\beta^2$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2}-\xi^2 z=0$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}-\nu^2\Phi=0 \quad \rightarrow \quad (\sin,\cos)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R=0$$ معادله بسل

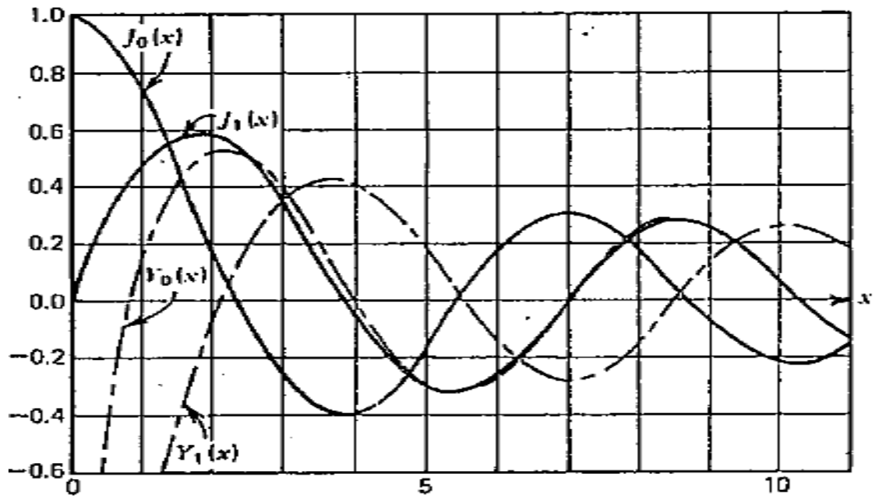
$$\Gamma(t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

برای معادله بسل:

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) = 0$$

توابع ویژه:

$$\begin{pmatrix} \text{تابع بس نوع اول} \\ J(\beta r) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{تابع بس نوع دوم} \\ Y(\beta r) \end{pmatrix}$$



حالت اول:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \xi^2 z = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\xi z\,,\cos\xi z$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \beta^2 R = 0$$

$$J(\beta r) \quad , \quad Y(\beta r)$$

$$\Gamma(t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\lambda^2 = \xi^2 + \beta^2$$

حالت دوم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\nu^2\Phi=0 \quad \rightarrow \quad \sin\nu z\,,\cos\nu z$$

$$\frac{\partial^2 R_\nu}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_\nu}{\partial r}+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R_\nu=0$$

$J_\nu(\beta r) \quad , \quad Y_\nu(\beta r)$

$\lambda^2=\beta^2$ چون 0

حالت سوم:

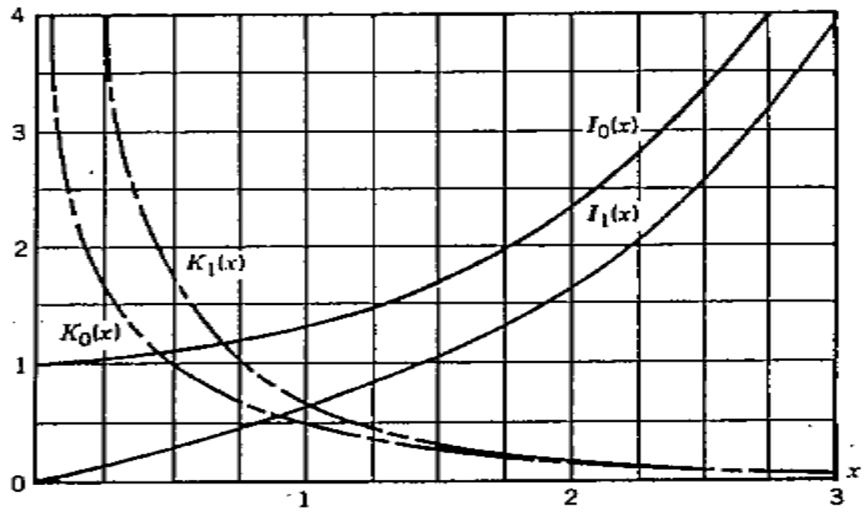
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$$

$Z(\xi,z) \quad \rightarrow \quad \sin\xi z\,,\cos\xi z$

$\Phi(\nu,\phi) \quad \rightarrow \quad \cos\nu\phi\,,\sin\nu\phi$

$$\frac{\partial^2 R_\nu}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_\nu}{\partial r}-\left(\xi^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R_\nu=0$$

$R_\nu(\xi,r) \quad \rightarrow \quad I_\nu(\xi,r) \;\rightarrow K_\nu(\xi,r)$



حالت چهارم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}}+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \Phi^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}+\nu^2\phi=0 \quad \rightarrow \quad \Phi(\nu,\phi)=\ \sin\nu z\,,\cos\nu z$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial R}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\nu^2}{\mathrm{r}^2}\mathrm{R}=0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{R}\begin{cases}\mathrm{r}^{\nu} \quad , \quad \mathrm{r}^{-\nu} & \mathrm{V}\neq 0\\ \mathrm{c}_1+\mathrm{c}_2 & \mathrm{v}=0\end{cases}$$

حل معادله بسل R:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial R}{\partial \mathrm{r}}+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{\mathrm{r}^2}\right)R(r)=0 \qquad 0\leq \mathrm{r}<b$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathrm{r}}+\mathrm{HR_v}=0 \qquad \mathrm{r}=\mathrm{b}$$

$$\mathrm{F(r)}=\sum \mathrm{C_m R_v(\,\beta_m,r)}$$

از جدول ۱:۳

$$\mathrm{R_v(\beta_m,r)=J_v(\beta_m,r)}$$

برای محاسبه ضریب $\mathrm{C_m}$ همچون گذشته از شروط تعامد استفاده می کنیم:

$$\Rightarrow \mathrm{C_m}\frac{1}{\mathrm{N(\beta_m)}}\int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{rR_v(\beta_m,r)F(r)dr}$$

$$\Rightarrow \mathrm{N(\beta_m)}\int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{r}R^2\mathrm{(\beta_m,r)dr}$$

$$F(r)=\sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{N(\beta_m)}}\mathrm{R_v(\beta_m,r)}\int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{r'R_v(\beta_m,r')F(r')dr'}$$

$$\text{if} \qquad 0\leq \mathrm{r}<\infty \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial \mathrm{r}^2}+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial R}{\partial \mathrm{r}}+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{\mathrm{r}^2}\right)R=0$$

به خاطر اینکه شرط مرزی (در r=0 مقدار R محدود است) را ارضا نماید

$$R_v(\beta_m, r) = J_v(\beta_m, r)$$

فقط بسل نوع اول در جواب ظاهر می شود.

$$F(r) = \int_{\beta=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}}\beta J_v(\beta r)d\beta \int_{r'=0}^{\infty} r'^{\frac{1}{2}} J_v(\beta r')dr'$$

$$\text{if} \qquad 0 \le r < \infty \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \beta^2 R = 0$$

$$-\frac{dR}{dr} + HR = 0 \qquad \text{table } 3-2$$

$$F(r) = \int_{\beta=0}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_m)} \beta R_0(\beta, r)d\beta \int_{r'=a}^{\infty} r' R(\beta, r')F(r')dr'$$

$$\text{if} \qquad 0 \le r \le b \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0$$

$$-\frac{dR_v}{dr} + H_1 R_v = 0 \qquad r = a$$

$$-\frac{dR_v}{dr} + H_2 R_v = 0 \qquad r = b$$

$$\Rightarrow F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m R_v(\beta_m, r)$$

$$C_m = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_a^b r R_v(\beta_m, r) F(r)dr \qquad a \le r \le b$$