# جزوه محاسبات عددی

دکتر دمیرچی

Subject
Date

فصل دوم حل عددی معادلات $f(x)=0$

تعریف: هرگاه داشته باشیم $f(\alpha)=0$ آنگاه α را ریشه معادله $f(x)=0$ گویند و α صفر تابع است.

* ریشه تکراری مرتبه m: اگر $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$ ، $m\in \mathbb{N}$ ، $g(\alpha)\neq 0$

α را ریشه تکراری مرتبه m نامیم: $\text{if } m=1 \Rightarrow$ ریشه ساده

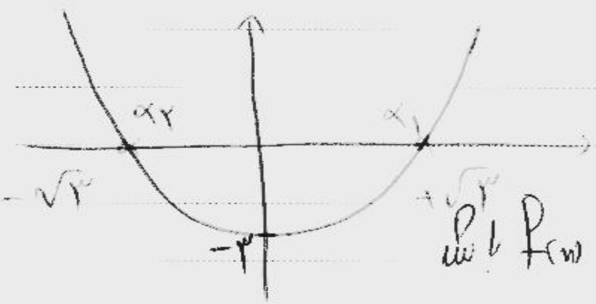
نکته: معمولاً برای تعیین ریشه‌های یک معادله با دقت مورد نظر لازم است تعیین کنیم که آن ریشه در فاصله کوچکی که حاوی آن ریشه باشد قرار دارد و در چه وضعیتی برای یافتن مورد نظر قرار داد

الف) فاصله‌ای معلوم باشد که شامل ریشه باشد *

ب) بیش از یک ریشه در فاصله مورد نظر نباشد * (کمک به حل عددی معادله)

روش‌های عددی حل معادله $f(x)=0$

الف) رسم منحنی




$f(x)=x^2-3$

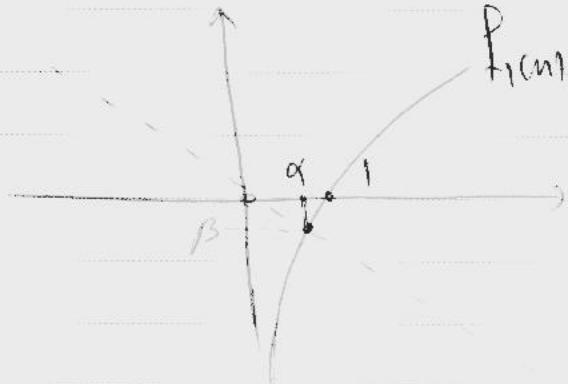
نکته: $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ باشد و α ریشه $f(x)$ باشد

$$\begin{cases} f(\alpha)=f_1(\alpha)-f_2(\alpha)=0 \\ \Rightarrow f_1(\alpha)=f_2(\alpha)=\beta \quad * \end{cases}$$

Subject
Date

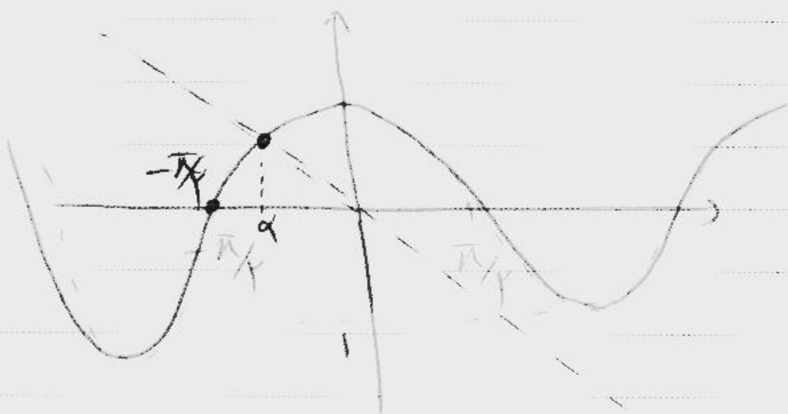
نقطه $|^{\alpha}_{\beta}$ روی منحنی $y_1=f_1(x)$ و $y_2=f_2(x)$ قرار دارد. بنابراین $|^{\alpha}_{\beta}$ روی محل تلاقی $f_1(x)$ , $f_2(x)$ قرار دارد.

مثال) $f(x)=x+\ln x=\ln x-(-x)=f_1(x)-f_2(x)$



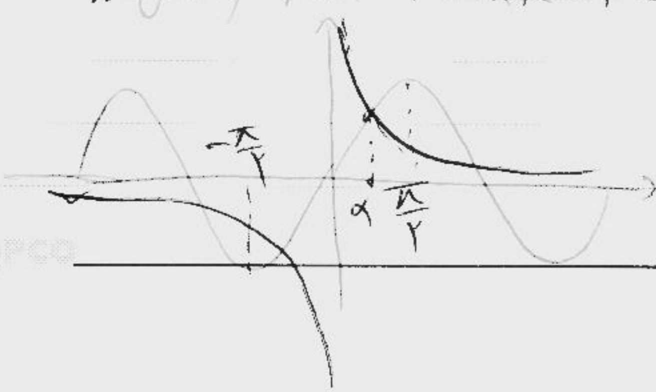

$\Longrightarrow \alpha(0,1)$

مثال) $f(x)=x+\cos x=\cos x-(-x)$




$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$

مثال) $f(x)=x\sin x-1 \Longrightarrow g(x)=\frac{f(x)}{x}=\sin x-\frac{1}{x}$




$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\alpha\cong k\pi$ با تقریب خوب.

۲ـ جدول سیر متغیر تابع:

* قضیه: اگر تابع $f(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)$ منفی است $a<\alpha<b$ موجود است که $f(\alpha)=0$

مثال) مطلوب است محل و تعداد تقریبی ریشه‌های $3xe^{x}=1$ را بیابید.

$f(x)=3xe^{x}-1$

$f(0)=-1<0$

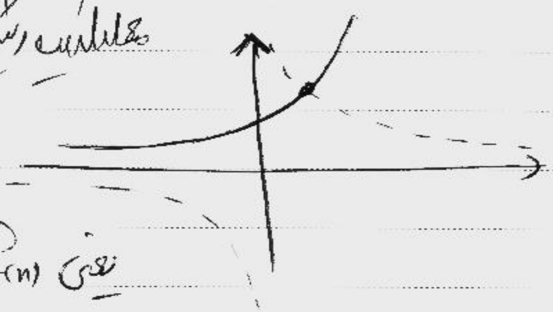
$f(1)=3e-1>0 \Longrightarrow f(0)f(1)<0 \Longrightarrow \alpha\in(0,1)$ *

$f(-1)=-3e^{-1}-1<0$

$f'(x)=3e^{x}+3xe^{x}=3e^{x}(1+x) \xRightarrow{x>0} f'(x)>0$ اکیداً صعودی

پس $\alpha\in(0,1)$ تنها یک ریشه دارد.

$x<0 \Longrightarrow f(x)<0 \Longrightarrow$



یعنی $f(x)$ منفی می‌شود. ریشه ندارد.

تمرین) مطلوب است محل و تعداد ریشه‌های $f(x)=e^{x}-3x^{2}$ نشان دهید تنها یک ریشه دارد در $(3,4)$

$f(3)=e^{3}-27<0$

$f(4)=e^{4}-48>0 \Longrightarrow \alpha\in(3,4)$

Subject:
Year. Month. Date.

$f'(x) = e^{x} - 4x$ $\begin{cases} x<0 & f'(x)>0 \quad \text{اکیداً} \\ x>0 & f(x) \neq 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ تابع فقط یک ریشه در (۳،٤) دارد

* اگر $x_0$ تقریب اولیه باشد

$\alpha \simeq x_0$
$x_1$
$x_2$
$\vdots$
$x_n$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$$

$$|e_n| = |x_n - \alpha| < 10^{-2} \ (\epsilon)$$

روش تنصیف یا روش دوبخشی : الگوریتم این روش به صورت زیر است

۱- قرار می‌دهیم $x_1 = \frac{a+b}{2}$

۲- اگر $f(a)f(x_1) < 0$ آنگاه ریشه در فاصله $(a, x_1)$ است و قرار می‌دهیم $b = x$ و مجدداً مرحله

۱ را در فاصله جدید $[a,b]$ تکرار کنید

۳- اگر $f(a)f(x_1) > 0$ آنگاه ریشه در فاصله $(x_1, b)$ است قرار می‌دهیم $a = x$ و مجدداً

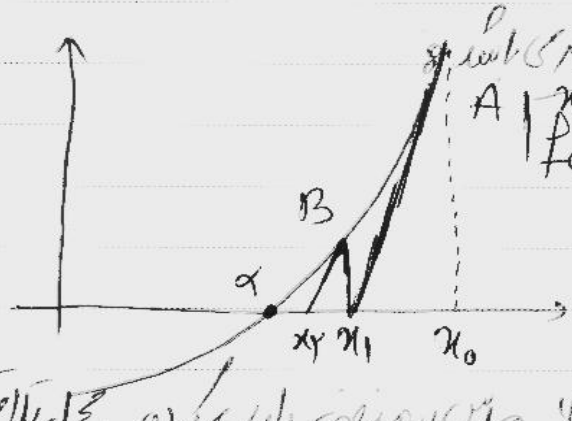
مرحله ۱ را در فاصله جدید $[a,b]$ تکرار کنید

۴ - اگر $f(a)f(x_1) = 0$ آنگاه $x_1$ ریشه است و عملیات خاتمه پیدا می‌کند *

* این روش همگرای همیشه است یعنی همواره با تقریب مورد نظر به جواب خواهیم رسید.

* روش نیوتن برای حل معادله $f(x) = 0$ می‌باشد *

فرض کنید $y = f(x)$ به صورت زیر باشد




همانطور که در شکل می‌بینید α ریشه مورد نظر

است. همچنین $x_0$ تقریبی از ریشه باشد.

از نقطه $A(x_0, f(x_0))$ واقع بر منحنی $y = f(x)$ مماس بر منحنی را رسم کرده. محل تلاقی این مماس را با محور طول‌ها $x_1$ می‌نامیم. سپس از نقطه $B(x_1, f(x_1))$ واقع بر منحنی مماس را رسم می‌کنیم و محل تلاقی این مماس جدید را با محور طول‌ها $x_2$ نامیم. این عمل را تا جایی که $x_n$ ها به اندازه کافی به ریشه α نزدیک شوند ادامه خواهیم داد.

بنابراین معادله کلی برای بدست آوردن $x_n$ خواهیم داشت:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (۲)$$

* این رابطه به اختصار روش تکراری نیوتن نامیده می‌شود. *

Subject:
Year. Month. Date.

نکته: روش نیوتن تضمین همگرایی ندارد اما به محض قرار گرفتن در مسیر همگرایی می‌توان نشان داد $x_n$ها سریع به جواب مورد نظر میل می‌کنند.

مثال) مطلوب است تقریبی از ریشه معادله $x=e^{-x^2}$ به روش نیوتن تا ۲ تکرار یعنی $x_1$ و $x_2$ بدست آورید.

$$f(x)=x-e^{-x^2} \qquad f'(x)=1+2xe^{-x^2} \qquad f(0)f(1)<0$$

$$\alpha \in (0,1)$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-e^{-x_n^2}}{1+2x_ne^{-x_n^2}}$$

$\frac{0+1}{2}=0/5$

$x_0=0/5$

$x_1=$

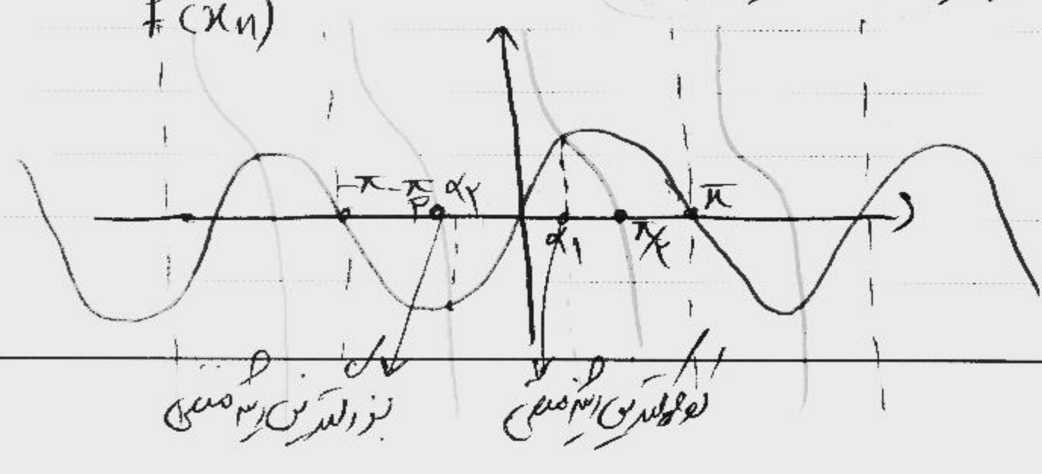
$x_2$ ⋮

مثال) $\sin x=\cot x$ با شرط $|f(x_n)|<10^{-2}$

$$f(x)=\sin x-\cot x \longrightarrow f'(x)=\cos x+(1+\cot^2 x)$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

* محاسبه بزرگترین ریشه منفی و کوچکترین ریشه مثبت




ریشه منفی

بزرگترین ریشه منفی

کوچکترین ریشه مثبت

* $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ کوچکترین ریشه مثبت است $\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ بزرگترین ریشه منفی

مثال) با کمک روش نیوتن یک رابطه فرمول تقریبی برای $\frac{1}{a}$ که در آن $a\neq 0$ باشد

$$x=\frac{1}{a} \Rightarrow f(x)=x-\frac{1}{a} \qquad f(x)=\frac{1}{x}-a$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2} \qquad x_{n+1}=x_n-\frac{\frac{1}{x}-a}{\frac{-1}{x^2}}=2x_n-ax_n^2$$

$$\Rightarrow x_{n+1}=x_n(2-ax_n) \qquad \frac{1}{a} \text{ تقریبی از } \; x_0,\ x_1,\ x_2$$

فرمول کلی $\longrightarrow x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$

مثال) ثابت کنید اگر $\alpha$ ریشه ساده معادله $f(x)=0$ باشد آنگاه مرتبه همگرایی روش نیوتن برای این ریشه دوم است و شرط همگرایی چیست؟

$$\alpha \text{ ریشه ساده} \Rightarrow f(\alpha)=0,\quad f'(\alpha)\neq 0$$

$$f(x)=g(x)(x-\alpha)$$

روش نیوتن حالت خاصی از روش نقطه ثابت است.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=g(x_n)$$

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow g'(x)=1-\frac{(f'^2(x)-f''(x)f(x))}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$g'(\alpha)=0 \xrightarrow[\text{زیرا } f(\alpha)=0]{\alpha \text{ ریشه ساده}} g'(\alpha)=0 \Rightarrow P\geq 2$$

Subject:
Year.　　Month.　　Date

$$g''(\alpha) = \frac{f'(\alpha) f(\alpha) (f'(\alpha))^{2}}{(f'(\alpha))^4} = \frac{f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} \begin{cases} f'(\alpha) f''(\alpha) \neq 0 \longrightarrow P = 2 \\ f''(\alpha) = 0 \longrightarrow P \geq 3 \end{cases}$$

شرط همگرایی　$|g'(x)| < 1 \Rightarrow |f(x) f''(x)| < f'(x)^2$ *

۱* تمرین) ثابت کنید اگر $\alpha$ ریشه با مرتبه m معادله $f(x)=0$ باشد آنگاه سرعت همگرایی روش نیوتن برابر یک است؟

$f(x) = (x - 1.1)^4 \sin x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad m = 4 \qquad \alpha = 1.1$$

$x_0 = 1$

$x_1 = ۱٫۰۲۵۴۰۷۸$　　　$x_{30} = ۱٫۰۹۹۹۸۲۴۸$

$x_2 = ۱٫۰۴۴۲۴۹۳$　　　$x_{41} = ۱٫۰۹۹۹۸۴۸۸$

* $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$

* سرعت همگرایی　$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \frac{m-1}{m}$ *

نکته: در روش تکرار نیوتن ریشه‌ی K ام یک عدد مثبت C از فرمول زیر به دست خواهد آمد

$$x_{n+1} = \frac{1}{K}\left[(K-1)x_n + \frac{C}{x_n^{K-1}}\right] *$$

روش نقطه ثابت یا تکرار ساده و. در این روش معادله $f(x)=0$ را به صورت $x=g(x)$ می‌نویسیم که $\alpha$

ریشه هر کدام باشد یعنی $\alpha=g(\alpha)$ و $f(\alpha)=0$ معادل یکدیگر هستند یعنی:

$$x = x + f(x) = g(x)$$

$$x = x - f(x) = g(x)$$

* معمولاً از روی یک معادله $f(x)=0$ به صورت‌های مختلفی می‌توان شکل $x=g(x)$ رسید.

پس تقریبی از $\alpha$ چون $x_0$ انتخاب کرده (معمولاً ـ یا اول بازه) دنباله $\{x_n\}$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$x=g(x) \qquad x_0 \qquad x_1=g(x_0) \; \dots \; x_n=g(x_{n-1})$$

$$\dots \quad \boxed{x_{n+1}=g(x_n)}$$

شکل این دنباله $\{x_n\}$ به انتخاب $g(x)$ و $x_0$ بستگی دارد *

مثال) مطلوب است ریشه $3xe^{x}=1$ به روش نقطه ثابت را پیدا کنیم خواهیم.

$$f(x)=3xe^{x}-1 \qquad f(0)f(1)<0 \implies \alpha\in(0,1)$$

$$x=\frac{1}{3e^{x}} \implies x=\frac{1}{3}e^{-x}=g(x) \qquad g:[0,1]\longrightarrow[0,1]$$

$$0\le x\le 1 \longrightarrow -1\le -x\le 0 \longrightarrow \frac{1}{e}\le e^{-x}\le e^{0}=1$$

$$0<\frac{1}{3e}\le g(x)\le\frac{1}{3}<1 \implies g(x)=\frac{1}{3}e^{-x} \qquad g'(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}$$

$$\implies \max|g'(x)|=\max\frac{1}{3}e^{-x}=\frac{1}{3}$$

Subject
Date

$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2} e^{-x_n}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \forall x_0 \in [0,1] \quad x_0 = /5$

$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{3} e^{-/5} \qquad x_2 = g(x_1) = g(\frac{1}{3} e^{-/5})$

نکته: در مسائل گاهی به جای اینکه بیان شود تقریب ریشه را طوری بدست آورید که $|f(x_n)| < \epsilon$ باشد می‌گوییم

ریشه را با تقریب $\epsilon$ بدست آورید.

مثال) در معادله نشان دهید $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، $\alpha_2 = 2/618$ ، $\alpha_1 = /3820$ ریشه‌های معادله‌اند

می‌توان از روش نقطه ثابت نشان داد.

$x = \frac{1}{3}(x^2 + 1) = g(x)$

$x_0 = 1 \to x_1 = /667 = g(1), \quad x_2 = g(x_1) = /481, \quad x_3 = g(x_2) = /411$

$, x_4 = g(x_3) = /390$ همگرا به ریشه کوچکتر

$x_0 = 2 \to x_1 = g(x_0) = g(2) = 1/667, \quad x_2 = g(x_1) = 1/26, \quad x_3 = /863, \quad x_4 = /58$

$x^2 = 3x - 1 \qquad x = 3 - \frac{1}{x} = g(x) \Rightarrow x_{n+1} = g(x_n) = 3 - \frac{1}{x_n}$

$x_0 = 1 \qquad x_1 = g(x_0) = 2 \qquad x_2 = g(x_1) = 2/5$ همگرا به ریشه بزرگتر *

مثال) مطلوبست ریشه $xe^{x^2} = 1$ به روش نقطه ثابت تا ۳ رقم اعشار $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$ یا $|f(x)| < 10^{-3}$

فرض: $f(x) = xe^{x^2} - 1$ $\qquad$ $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-3}$ را بدست آورید

به شرطی که بازه معلوم باشد

$f(0) = -1 < 0$
$f(1) = e - 1 > 0 \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \qquad \alpha \in (0, 1)$

$\Rightarrow f(0)=0 \qquad \forall x<0 \to f(x)<0$

$f'(x)=e^{x^2}+2x^2e^{x^2} \xrightarrow{x>0} f'(x)>0 \Rightarrow$ * بنابراین به ازای x>0 ریشه منحصر به فرد دارد

رسم منحنی : $xe^{x^2}=1$ یا $x=\frac{1}{e^{x^2}}=e^{-x^2}$


حل با شرایط g(x) را برای استفاده میکرد : شرط اول $x=e^{-x^2}=g(x)$ : $g[0,1]\to[0,1]$

شرط دوم $g(x)=e^{-x^2} \to g'(x)=-2xe^{-x^2}$

$0\le x\le 1 \to 0\le x^2\le 1 \to -1\le -x^2\le 0 \xrightarrow{e^x \text{ صعودی}} \frac{1}{e}=e^{-1}\le e^{-x^2}\le e^{0}=1$

$\boxed{0\le \frac{1}{e}\le g(x)\le 1}$ شرط اول برقرار است

بررسی شرط دوم : $g(x)=e^{-x^2} \to g'(x)=-2xe^{-x^2}$

$g''(x)=-2\left[e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}\right]=0 \to (1-2x^2)e^{-x^2}=0 \xrightarrow{e^{-x^2}\neq 0} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

نقاط اکسترمم g'(x)

$g'(\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{\frac{2}{e}}$

$g'(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{\frac{2}{e}}$ $\Rightarrow \max|g'(x)|\le |g'(\frac{1}{\sqrt{2}})|\le\sqrt{\frac{2}{e}}<1$

شرط دوم $|g'(x)|\le 1$ برقرار است

Subject:
Year. Month. Date. ۲

$$x_{n+1}=g(x_n)=e^{-(x_n)^2}$$

$$x_0=0.5 \Rightarrow x_1=g(x_0)=e^{-(0.5)^2}=0.7789$$

$$x_2=g(x_1)=e^{-(0.7789)^2}=0.5452$$

مثال) مطلوب است ریشه معادله $x+\ln x=0$ به روش نقطه ثابت طوری که $|f(x_n)|<10^{-3}$ باشد را بدست آورید؟

$$f(x)=x+\ln x=0=\ln x+(-x) \qquad 0<\alpha<1$$

$$f(1)=1+\ln 1>0$$

تعیین علامت بازه

$$\Rightarrow f(1)f(\tfrac{1}{e})<0 \Rightarrow \alpha\in(1/e,1)$$

$$f(\tfrac{1}{e})=\tfrac{1}{e}+\ln(\tfrac{1}{e})=1/e-1<0$$

بررسی شرط اول $\quad * \; x=e^{-x}=g(x) \qquad g:[\tfrac{1}{e},1]\to[\tfrac{1}{e},1]$

$$\tfrac{1}{e}\le x\le 1 \to -1\le -x\le -\tfrac{1}{e} \Rightarrow 0.37=\tfrac{1}{e}=e^{-1}\le e^{-x}\le e^{-1/e}=0.69$$

$$\Rightarrow 0.37\simeq\tfrac{1}{e}\le g(x)\le 0.69\le 1$$ * بنابراین شرط اول برقرار است

بررسی شرط دوم: $\quad g(x)=e^{-x} \quad g'(x)=-e^{-x} \quad \max|g'(x)|=\max e^{-x}$

بنا به رابطه *

$$\Rightarrow \simeq 0.69\le 1 \Rightarrow \max|g'(x)|\le 1$$ شرط دوم نیز برقرار است

بنابراین $g(x)$ انتخابی شرایط نقطه ثابت را دارا می باشد و می توان از آن استفاده کرد.

PAPCO

$\frac{1}{e} \le x_n \le 1$ , $x_{n+1} = g(x_n) = e^{-x_n}$ $n = 0, 1, \dots$

$\forall x_0 \in [1/e, 1]$ $x_0 = 1$ , $x_1 = \frac{1}{e}, \dots, x_{13} = 0.5669$

$\Rightarrow |f(x_{13})| = 6.7 \times 10^{-4} < 10^{-3}$ $\alpha = x_{13} = 0.5669$ *

ریشه بدست آمده در روش نقطه ثابت

تمرین) مطلوب است ریشه معادله $3xe^{x} = 1$ به روش نقطه ثابت تا ۳ رقم اعشار بدست آورید.

$f(x) = 3xe^{x} - 1$ $f(0) = -1 < 0$ $f(1) = 3e - 1 > 0$

$f(1)f(0) < 0 \Rightarrow \alpha \in (0, 1) \Rightarrow f(\alpha) = 0$ ✓

$x = \frac{1}{3}e^{-x} = g(x)$ حال باید شرط‌های نقطه ثابت را برای $g(x)$ بررسی کرد *

① شرط $g: [0, 1] \to [0, 1]$ $0 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le -x \le 0$

$\Rightarrow e^{-1} \le e^{-x} \le e^{0} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}e^{-1} \le \frac{1}{3}e^{-x} \le \frac{1}{3} \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{3}e^{-1} \le \frac{1}{3}e^{-x} \le \frac{1}{3} \le 1 \Rightarrow \boxed{0 \le g(x) \le 1}$ ✓

شرط دوم: $g'(x) = 3x^2 e^{x} \longrightarrow g''(x) = 6xe^{x} + 3x^2 e^{x} = 0$

$\Rightarrow g''(x) = e^{x}(6x + 3x^2) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ نقاط بحرانی برای $g'(x)$

بنابراین $\Rightarrow \max g'(x) = 0 \Rightarrow \max|g'(x)| \le 1$ ✓

Subject:
Year.      Month.      Date.

$x_0 = ۰٫۵ \longrightarrow x_1 = g(x_0) = ۳ \times \frac{۱}{۲} \times e^{۰٫۵} \simeq ۲٫۴۷۳۰$

$x_۲ = g(x_1) = ۳(۲٫۴۷۳۰)e^{۲٫۴۷۳۰} = ۸۷٫۹۷۴۳$

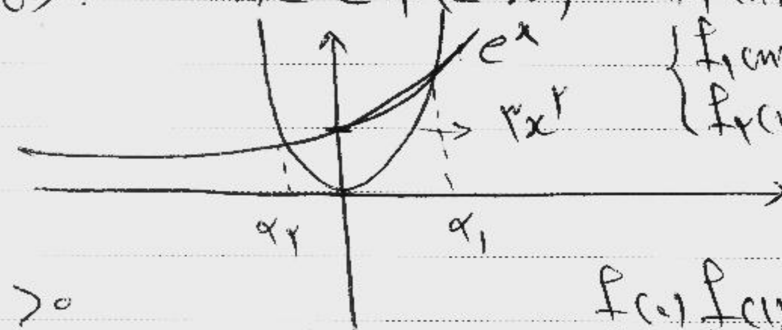
$\alpha = x_۲ = ۸۷٫۹۷۴$   (3D) ۳ رقم اعشار درست *

تمرین: بزرگترین ریشه منفی و کوچکترین ریشه مثبت $۳x^۲ - e^x = ۰$ را به روش نقطه ثابت تا ۳ رقم اعشار بیابید؟

برای درک بیشتر نمودار را رسم کنید: $f(x) = e^x + (-۳x^۲) = f_1(x) - f_۲(x)$

$\begin{cases} f_1(x) = e^x \\ f_۲(x) = ۳x^۲ \end{cases}$

یا $e^x = ۳x^۲$




$f(۰) = ۱ - ۰ = ۱ > ۰$

$f(۱) = e - ۳ < ۰$ ,  $f(-۱) = \frac{۱}{e} - ۳ < ۰$

$\Rightarrow$ $f(۰)f(۱) < ۰$ (۱)
$f(۰)f(-۱) < ۰$ (۲)

(۱) $\Rightarrow \alpha_1 \in (۰,۱) \Rightarrow f(\alpha_1) = ۰$

(۲) $\Rightarrow \alpha_۲ \in (-۱,۰) \Rightarrow f(\alpha_۲) = ۰$

* حال باید شرایط نقطه ثابت برای $g(x)$ بررسی شود. فرض کنید $x = \sqrt{\frac{۱}{۳}e^x} = g(x)$

if $g[۰,۱] \longrightarrow [۰,۱]$   $۰ \leq x \leq ۱ \overset{\text{اکیداً صعودی}*}{\Longrightarrow} ۰ \leq e^x \leq e$

$۰ \leq \frac{۱}{۳}e^x \leq \frac{۱}{۳}e \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{\frac{۱}{۳}e^x} \leq \sqrt{۱/۳\, e} \leq ۱$

$\Rightarrow \boxed{۰ \leq g(x) \leq ۱}$ ✓

Subject:
Year. Month. Date.

$1 \le g(x)$

$\max|g'(x)| \le 1 \qquad g'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{e^{x}}{\sqrt{e^{x}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{e^{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{3e^{x}}$

$g''(x) = \frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{e^{x}} = \frac{1}{12}\sqrt{3e^{x}} \neq 0$ امکانپذیر حالت $\Rightarrow |g'(x)| \le 1$ ✓

قبلاً ثابت کردیم $0 \le g(x) \le 1$

$x_0 = .5 \qquad x_1 = g(x_0) = \sqrt{\frac{1}{3}e^{.5}} = .9519$

$x_2 = g(x_1) = \sqrt{\frac{1}{3}e^{.9519}} = 1.4957$ [illegible]

$x_3 = g(x_2) = \sqrt{\frac{1}{3}e^{1.4957}} = 2.5794 \longrightarrow \boxed{\alpha_1 = x_3}$

ب) ریشه دوم را بیابید : $g(x) = x - 2\ln x^2 = 4\ln x$

$g(x)$ را الگوریتم [illegible]

$x_0 = .5 \Rightarrow g(x_0) = x_1 = 4\ln(.5) = -4.1589$ → غلط [illegible]

$x_2 = g(x_1) = -8.2661 \qquad x_3 = g(x_2) = -12.8768 \quad \approx \alpha_2$

ریشه دوم $= -12.8768$

ج) ریشه معادله $2x - \sin x = 1$ را از روش تقریبات متوالی بیابید؟ ✓

$f(x) = 2x - \sin x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow f(0)f(1) < 0$

$f(0) = -1 \qquad f(1) = 1 - \underbrace{\sin 1^{\circ}}_{\le 1} \ge 0 \qquad \Rightarrow \alpha \in (0,1)$

Subject:
Year. Month. Date.

$g(x)$ را این نوع تعریف می‌کنیم: $g(x)=x=\frac{1}{2}(1+\sin x)$

① شرط اول $g:[0,1]\to[0,1]$

$0\le x\le 1 \Rightarrow$ چون $\sin x$ در $(0,\pi/2)$ صعودی است داریم $\Rightarrow \sin 0\le \sin x\le \sin 1$

$\Rightarrow 1\le 1+\sin x\le 1+\sin 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\le\frac{1}{2}(1+\sin x)\le\frac{1}{2}(1+\sin 1)=0.92$

$\Rightarrow 0.5\le g(x)\le 0.92 \Rightarrow \boxed{0\le g(x)\le 1}$ ✓

② شرط دوم $\max|g'(x)|\le 1 \Rightarrow g'(x)=\cos x$

$|\cos x|\le 1 \Rightarrow \max|g'(x)|\le 1$ می‌دانیم ✓

$x_{n+1}=g(x_n)=1/2(1+\sin x_n)$ $\quad x_0=0.5$

$x_1=g(0.5)=\frac{1}{2}(1+\sin 0.5)=0.7397$

$x_2=g(0.7397)=\frac{1}{2}(1+\sin 0.7397)=0.8367$

$x_3=g(0.8367)=\frac{1}{2}(1+\sin 0.8367)=0.8712$

تعیین همگرایی 8 فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ همگرا به $\alpha$ باشد، می‌گوییم سرعت همگرایی دنباله $\{x_n\}$ به $\alpha$

برابر p است هرگاه عدد مثبت $\lambda$ موجود باشد که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p}=\lambda$$

فرض کنید n خیلی بزرگ باشد : $|x_{n+1}-\alpha| \cong \lambda |x_n-\alpha|^p \Rightarrow \lambda=1,\ p=2$ *

قضیه: که $\{x_n\}$ از روش نقطه ثابت $x_{n+1}=g(x_n)$ بدست آمده و به سمت $\alpha$ همگرا باشد.
اگر g دارای مشتق سوم پیوسته باشد، آنگاه: الف) اگر $g'(\alpha)\neq 0$ مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ برابر یک است ب) $g'(\alpha)=0$ مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ حداقل ۲ است ج) $g'(\alpha)=0$ و $g''(\alpha)\neq 0$ مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ دقیقاً ۲ است

$$x_{n+1}=g(x_n)=\overset{\alpha}{g(\alpha)}+(x_n-\alpha)g'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}g''(\alpha)+\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}=\cdots+\frac{1}{2!}g''(\alpha)+\cdots$$

$$g'(\alpha)=g''(\alpha)=0 \longrightarrow p\geq 3$$ حداقل ۳

$$g'(\alpha)=g''(\alpha)=0 \longrightarrow,\ g'''(\alpha)\neq 0 \longrightarrow p=3$$ : دقیقاً ۳

مثال) نشان دهید روش تکراری $x_{n+1}=\frac{2x_n^2-1}{4(x_n-1)}=g(x_n)$ تکراری مرتبه ۲ برای ریشه‌های معادله $2x^2-4x+1=0$ می‌باشد.

ریشه معادله
$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{2+\sqrt{4-2}}{2}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2mm] \alpha_2=\dfrac{2-\sqrt{4-2}}{2}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\qquad \alpha=g(\alpha)$$

$$g(x)=\frac{2x^2-1}{4(x-1)} \longrightarrow g'(\alpha_1)=\frac{2\alpha_1^2-4\alpha_1+1}{4(\alpha_1-1)^2}=0,\ 2\alpha_1^2-4\alpha_1+1=0$$

به همین شکل $g'(\alpha_2)=0 \xrightarrow{\text{چون}} 2\alpha_2^2-4\alpha_2+1=0$

Subject:
Year. Month. Date.

$$g''(\alpha_1) = \frac{1}{2(\alpha_1 - 1)^3} \neq 0 \quad , \quad g''(\alpha_2) \neq 0 \implies P = 2$$ حالت ج مستقل

تمرین و فرض کنید $a>0$ و دنباله $\{x_n\}$ به صورت زیر تعریف شده

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2 + a}$$

در صورتیکه دنباله همگرا به $\sqrt{a}$ باشد ثابت کنید مرتبه همگرایی دقیقاً ۳ است؟

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2 + a} = g(x_n) \xRightarrow{\text{باید ثابت کنیم}} \begin{array}{l} g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0 \\ g'''(\alpha) \neq 0 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{x(x^2+3)}{3x^2+a} \qquad \alpha = \sqrt{a} \;,\; a>0$$

$$g(x) = \frac{x^3+3x}{3x^2+a} \rightarrow g'(x) = \frac{(3x^2+3)(3x^2+a) - (x^3+3x)(6x)}{(3x^2+a)^2}$$

$$g'(x) = \frac{3x^4 + 3x^2a + 3a - 9x^2}{(3x^2+a)^2} \qquad g'(\alpha) = \frac{3a^2+3a^2+3a-9a}{(3a+a)^2} = \frac{6a^2-6a}{(4a)^2}$$

$$\forall a = 1 \implies g'(\alpha) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date.

تمرین: ثابت کنید اگر α ریشه ساده معادله $f(x)=0$ باشد در این صورت همگرایی روش نیوتن برای این ریشه چه درجه است و شرط همگرایی چیست؟

α ریشه ساده است $\Rightarrow f'(\alpha) \neq 0 \;,\; f(\alpha)=0$

می‌توان این گونه نیز نوشت: $f(x) = (x-\alpha)g(x) \;;\; g(\alpha) \neq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

* روش نیوتن حالت خاصی از روش نقطه ثابت است

حال برای مرتبه همگرایی باید شرایط زیر بررسی شود؟

۱) $g'(\alpha) \neq 0 \longrightarrow p=1$ ۲) $g'(\alpha)=0 \longrightarrow p \geq 2$

۳) $g'(\alpha)=0,\; g''(\alpha)\neq 0 \longrightarrow p=2$ ۳) $g'=g''=0 \longrightarrow p \geq 3$

۴) $g'(\alpha)=g''(\alpha)=0,\; g'''(\alpha)\neq 0 \Longrightarrow p=3$ ....

حال باید شرایط بالا را امتحان کنیم

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad g'(x) = \frac{1-(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$f(\alpha)=0 \longrightarrow g'(\alpha)=0$ α ریشه ساده است $\Rightarrow p \geq 2$

$$g''(x) = \frac{(f'(x)f''(x))(f'(x))^2 - 2f'(x)f''(x)f(x)f''(x)}{(f'(x))^4} = \frac{f'(x)f''(x)(f'(x))^2}{(f'(x))^4}$$

$$= \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \begin{cases} \text{if } f''(\alpha)\neq 0 \longrightarrow g''(\alpha)\neq 0 \longrightarrow p=2 \\ \text{if } f''(\alpha)=0 \longrightarrow g''(\alpha)=0 \longrightarrow p\geq 3 \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

شرط همگرایی : $\forall x: \; |g'(x)|<1 \rightarrow |f(x)f''(x)| < (f'(x))^2$

$x=\alpha \rightarrow f(\alpha)f''(\alpha) < (f'(\alpha))^2 \rightarrow (f'(\alpha))^2 > 0$ ✓

$\boxed{\text{تمرین}}$ : ثابت کنید اگر α ریشه m گانه معادله $f(x)=0$ باشد آنگاه مرتبه همگرایی به روش نیوتون برابر یک است؟ $f(\alpha)=0$ ریشه m گانه باشد $\Rightarrow f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \;,\; g(\alpha)\neq 0$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

تمرین) برای یافتن کوچکترین ریشه مثبت معادله $x=\tan x$ به روش نقطه ثابت آیا شرط همگرایی نقطه ثابت برای $g(x)=\tan x$ برقرار است؟ اگر نه با تعریف فرم مناسب تعریفی از آن ریشه را بیابید.

$g(x)=\tan x \qquad f(x)=x-\tan x \qquad f(0)=0$

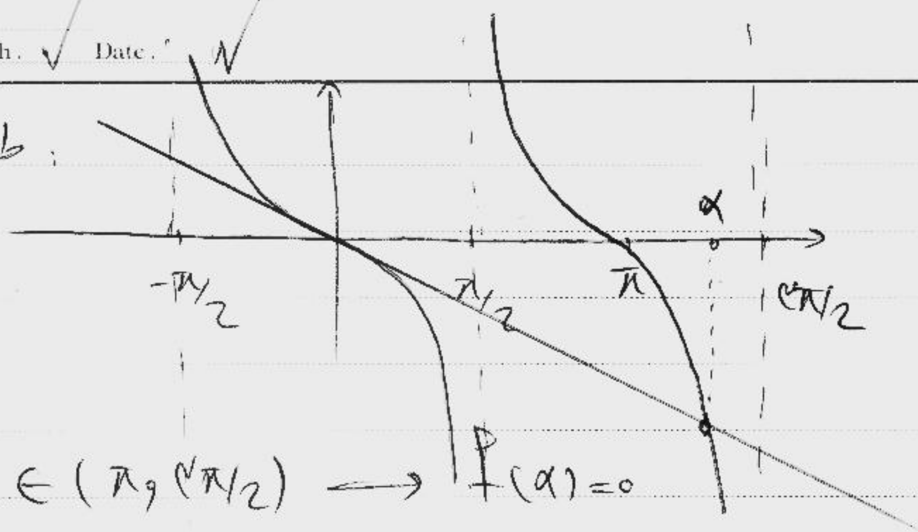
شرط همگرایی $|g'(x)|<1 \Rightarrow \max|g'(x)| = 1+tg^2x > 1$

 $\Rightarrow \max|g'(x)| > 1$ * بنابراین شرط همگرایی برقرار نیست *

* $g(x)$ را باید طوری تعیین کنیم در نظر بگیریم *

Subject :
Year .  Month .  Date .

طبق شکل :




$\forall x : \alpha \in (\pi, 3\pi/2) \longrightarrow f(\alpha)=0$

$f(x) = \tan x - x \qquad x = \tan x \longrightarrow \operatorname{Arctan} x = tg^{-1}(tg\, x)$

$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = x = g(x)$

حال شرایط را بررسی می‌کنیم $g\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Arctg} \pi \leq \operatorname{arctg} x \leq \operatorname{arctg} \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{arctg} x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ✓

$\max |g'(x)| \leq 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

$\Rightarrow \max |g'(x)| \leq 1$ ✓

$x_{n+1} = g(x_n) \qquad |g(x_n)| < 10^{-3}$

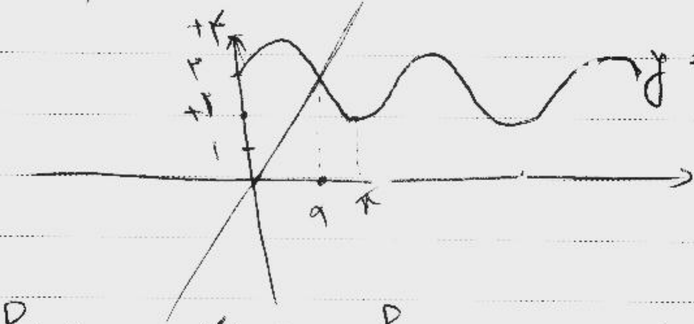
$x_0 = \frac{5\pi}{4}$ ―――― $x_1 = g\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ----

Subject:
Year. Month. Date.

تمرین ۵ معادله $x-\cos x-3=0$ مفروض است. الف) محل و تقریب ریشه را بیابید؟

ب) $x_0=\frac{\pi}{2}$ ، $g(x)$ مناسب با نقطه ثابت تقریبی از جواب برای $\epsilon = 0/1$ را بیابید؟

$f(x) = x-\cos x-3$ $\qquad$ $x = \cos x+3$




$f(0) = -4 < 0 \quad f(\pi) = \pi+1-3 = \pi-2 > 0$

$f(0)f(\pi) < 0 \implies \alpha \in (0,\pi)$

$g(x) = x = \cos x+3 \qquad g[0,\pi] \longrightarrow [0,\pi]$

$0 \leq x \leq \pi \implies \cos 0 \leq \cos x \leq \cos \pi \implies 3+\cos 0 \leq \cos x \leq 3+\cos\pi$

چون $\cos x$ نزولی است این بازه جواب مناسبی برای تحلیل $g(x)$ نمی‌دهد حال بازه را تغییری را انتخاب می‌دهیم $\implies$

$$\begin{cases} f(\pi/2) = \pi/2 - 3 < 0 \\ f(\pi) = \pi-2 > 0 \end{cases} \implies f(\pi/2)f(\pi) < 0$$

$\alpha \in (\pi/2, \pi)$

می‌دانیم $\cos x$ در این بازه نزولی است.

$\pi/2 < x < \pi \implies -\pi \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \implies$

$\implies \cos(-\pi) \leq \cos(-x) \leq \cos(-\pi/2) \implies \boxed{-1 \leq \cos x \leq 0}$

Subject:

Year. Month. Date.

شرط: $\max|g'(x)| \leq 1 \Rightarrow g'(x) = -\sin x \Rightarrow |-\sin x| \leq 1$

$\Rightarrow \max|g'(x)| \leq 1$ ✓

$x_{n+1} = g(x_n) \Rightarrow x_0 = \pi/۲ \qquad x_1 = g(x_0) = \pi/۲ + ۳ = +۱,۳۴۲$

$x_۲ = g(x_1) = -\cancel{۱/۱٤۲} + ۰/۹۹ + ۳ = \cancel{\pi/۲} + ۳,۹۹$

منظور از تقریب $\epsilon$ این است که $|f(x_n)| < \epsilon$ باشد و هر وقت به این شرط رسیدیم کار را دیگر ادامه

نمی‌دهیم. در این مسأله داریم $|f(x_n)| < ۶۵$