جزوه محاسبات عددی

دکتر دمیرچی

هنگامی یک جدول داریم و آمارهایی تهیه شده برای سرشماری در این جدول موجود دارد که مثلاً برای هر ۱۰ سال یک سرشماری انجام گرفته و جدول سرشماری تا سال ۱۹۹۰ موجود دارد تخمین جمعیت کشور در سال ۱۹۷۵ (چون هر ۱۰ سال به ۱۵ سال سرشماری انجام شده در سال ۱۹۷۵ عدد درستی نداریم بنابراین باید فقط تخمین بزنیم) را تخمین اعداد جدول است درونیابی می گویند

* هنگامی مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط x_n و ... و x_2 و x_1 و x_0 به صورت f_n و ... و f_2 و f_1 و f_0 به صورت جدول زیر بیان شده باشد آنگاه درونیابی عبارت از تخمین مقادیر تابع $f(x)$ بین نقاط x_n و ... و x_1 و x_0 خواهد بود.

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_i)=f_i$	f_0	f_1	f_2	...	f_n

* و جدول فوق به صورت مقادیر گسسته می باشند *

* حال درونیابی را این طور بیان می کنیم و درونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \in (x_i, x_{i+1})$ و $i=0,1,\dots,n-1$ و $x \neq x_i$ باشد ← $x=x_i$ یعنی مقادیر معلوم در جدول به ازای $x=x_i$ آن f_i نیز مشخص شده است. که این نیز درونیابی و تخمین می شود. یا مقادیر دقیق تابع $f(x)$ به ازای x_i خواهد شد *

* یک روش برای تخمین $f(x)$ به $x \in (x_0, x_n)$ می باشد این است یک چندجمله ای به عنوان چندجمله ای وقتی $n \to \infty$ می رود برابر $f(x)$ شود یعنی $\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x)$ مقدار $P_n(x)$ همان مقدار $f(x)$ بگیرد

Subject: * درون‌یابی چندجمله‌ای لاگرانژ
Year. Month. Date.

x_i باشد یعنی برای $i = 0, 1, \dots, n$ داشته باشیم :

$P(x_i) = f_i$ *

و بعد به‌جای $f(x)$ در فاصله $[x_0, x_n]$ از $P(x)$ استفاده کنید

تعریف : مقایسه چندجمله‌ای‌ها که درجه آنها حداکثر n باشد و شرط * صدق کند

مزیت این روش این است که : ۱- محاسبه مشتق و انتگرال چندجمله‌ای ۲- محاسبه $P_n(x)$ به‌جای یک تابع خاص ساده‌تر است ۳- همواره یک چندجمله‌ای منحصربه‌فرد موجود است *

* چندجمله‌ای لاگرانژ : (یکی از روش‌های محاسبه چندجمله‌ای $P(x)$ حداکثر درجه n) :

گذرمی‌شود که $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ n+1 چندجمله‌ای حداکثر درجه n باشند

$$P_n = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1(x) + \dots + L_n(x) f_n(x) \qquad (2)$$

* که $L_j(x)$ را این‌گونه تعریف کنیم :

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$L_j(x_i) \begin{cases} 0 & j \neq i \quad ; \; j = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \\ 1 & j = i \end{cases}$$

* دقت شود در صورت کسر x_j وجود نخواهد داشت

روش حل مسائل : اگر سؤالی جدول مربوط به x_i و f_i را داد و چندجمله‌ای $P(x)$ را از ما خواست

ابتدا باید چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را به‌دست آورده و سپس از فرمول (۲) P_n را حساب کنیم

تمرین) مطلوب است چند جمله‌ای های لاگرانژ مربوط به جدول زیر سپس یافتن چندجمله‌ای درونیاب.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۳	۴	-۱	-۱۲

$n=3$ می باشد. پس $n+1$ یعنی ۴ جمله لاگرانژ داریم:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$$

$$=\frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{-6}=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x^2-2x)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}=\frac{x^3-3x^2-2x^2+6x}{6}$$

$$=\frac{x^3-6x^2+6x}{6}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{x(x-1)(x-3)}{(2)(1)(-1)}=\frac{(x^2-x)(x-3)}{-2}$$

$$=\frac{x^3-3x^2-x^2+3x}{-2}=\frac{x^3-4x^2+3x}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x)(x-1)(x-2)}{3\times2\times1}=\frac{(x^2-x)(x-2)}{6}$$

$$=\frac{x^3-2x^2-x^2+2x}{6}=\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$$

Subject:

Year. Month. Date.

$$P_3(x)=L_0(x)f_0+L_1(x)f_1+L_2(x)f_2+L_3(x)f_3$$

$$P_3(x)=\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{-6}\times 3\right)+\left(\frac{x^3-6x^2+6x}{6}\times 4\right)+\left(\frac{x^3-4x^2+3x}{-2}\times -1\right)$$

$$+\left(\frac{x^3-3x^2+2x}{6}\times 12\right)=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{-2}+\frac{2x^3-12x^2+12x}{3}+\frac{x^3-4x^2+3x}{2}$$

$$+2x^3-3x^2+2x=\frac{-3x^3+18x^2-33x+18+4x^3-24x^2+24x+3x^3-12x^2+9x+12x^3-18x^2+12x}{6}$$

$$=\frac{16x^3-36x^2+3x+18}{6}=P_n(x)$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)\simeq 2.0833$$

تمرین) ثابت کنید $L_0(x)+L_1(x)+\dots+L_n(x)=1$

فرض کنید $x=x_0$ باشد. می‌دانیم $L_i(x_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$ پس خواهیم داشت:

$$L_0(x_0)+L_1(x_0)+L_2(x_0)+\dots+L_n(x_0)=1$$

$$\cancel{1}+L_1(x_0)+L_2(x_0)+\dots+L_n(x_0)=\cancel{1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{L_1(x_0)+L_2(x_0)+\dots+L_n(x_0)}_{0}=0$$

$$\Rightarrow 0=0$$

P&PCO

نکته: در ۲ تمرین قبل وقتی ما معادله $P_n(x)$ را بدست آوردیم برای اینکه ببینیم درست حساب کردیم یا نه؟

باید همواره داشته باشیم: $P_n(x_i) = f_i$

در ۲ تمرین قبل داریم: $P_n(x) = \frac{14x^3 - 33x^2 + 3x + 18}{6}$

$$\Rightarrow P_n(0) = \frac{18}{6} = 3 = f(0) \Longleftrightarrow f(0) = 3$$

نکته: اگر در تمرین قبل به جای نقطه تقریبی از $f(1.5)$ را بخواهیم چون 1.5 بین نقاط جدول هست

می باشد و برابر هیچکدام نیست. پس $P(1.5)$ را به عنوان تقریب $f(1.5)$ حساب می کنیم.

$$f(1.5) \simeq P(1.5) = -.75$$

نکته: دقت کنید در ۲ تمرین قبل وقتی نقطه‌ای جدید به جدول اضافه کنیم و بعد روش آن را بدست

آوریم به ترتیب محور x ها باشد یعنی اگر در تمرین قبلی جای نقطه $(3, -1)$ به جای نقطه $(-2, 2)$

را به جدول اضافه کنیم آنگاه ۲− اولین x_i یعنی x_0 خواهد بود:

x_i	-2	0	1	2
f_i	2	3	4	-1

$\boxed{x_0 = -2}$ ✓

* چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

تفاضلات تقسیم شده اول بین x_i و x_{i+1} را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad *$$

و تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین x_i ، x_{i+1} و x_{i+2} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}} \quad *$$

* فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن :

$$P(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

نکته: مبنا جدول تفاضل را می‌نویسیم نیازی به داده‌ها کمتر است * ـــ

* تفاضلات متناهی ، درونیابی نیوتن هنگامیکه نقاط درونیابی متساوی الفاصله باشند *

ما از روش لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن چه x ها متساوی الفاصله باشند چه نباشند به چندجمله‌ای درونیابی می‌رسیم. اما می‌خواهیم روشی ارائه دهیم که اگر x ها متساوی الفاصله بودند یعنی اگر ۲٫۵ وجود داشت ۱٫۵ ـ نیز موجود باشد، بتوانیم با سرعت بیشتری نسبت به دو روش قبل به چندجمله‌ای درونیاب برسیم .

نکته : اگر با روش لاگرانژ چندجمله‌ای درونیاب را برای یک جدول تابعی بدست آوردیم و برابر شد با : $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ و یک نقطه‌ای مثل (a,b) به جدول تابعی اضافه کردیم که این نقطه در چندجمله‌ای بدست آمده $P(x)$ صدق کرد دیگر نیازی نیست چندجمله‌ای درونیاب جدول جدید را

می‌دانیم . یگانه چندجمله‌ای درونیاب جدول حاصل از گسسته کردن (a,b) برابر همان چندجمله‌ای جدول

تابعی مثل یعنی $P(x)$ می‌باشد. *

عملگر تفاضل پیشرو Δ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta^i f_s = \begin{cases} f_s, & i=0 \\ \Delta^{i-1} f_{s+1} - \Delta^{i-1} f_s, & i>0 \end{cases} \quad *$$

مثل جدول تفاضلات تقسیم شده که با دو نقطه x_i متساوی الفاصله باشند می‌توان برای راحتی کار از جدول تفاضلی با پیشرو استفاده کرد

* مثلاً برای $n=3$ جدول پیشرو به شکل مقابل خواهد شد.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

مرتبه اول: $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

مرتبه دوم: $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$

⋮

Subject:
Year. Month. Date.

ب
برحسب تفاضل

فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو

اگر x_i ها نقاط متساوی الفاصله باشند $x = x_0 + sh$ در این صورت چندجمله‌ای درونیاب می‌شود

برابر خواهد بود

$$P(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

یا می‌توان فرمول را این گونه نوشت:

$$P(x) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 f_0 + \dots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0 \quad *$$

* برای بدست آوردن s، ابتدا فاصله x_i ها را بدست آورده یعنی h که برابر است با:

$$\boxed{h = x_{i+1} - x_i}$$

و سپس s را از فرمول $s = \frac{x - x_0}{h}$ بدست آورید. و فرمول چندجمله‌ای

درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو بدست خواهد آمد.

مثال ۱) برای تابع $f(x) = \sin x$ مطلوب است تشکیل جدول پیشرو و سپس تقریبی از $\sin 5^\circ$

تا ۴ رقم اعشار بدست آورید.

حل) دقت شود وقتی می‌گوییم جدول پیشرو را تشکیل کنید تا جایی پیش می‌رویم که $\Delta^n f_0$ به صفر برسد

و آنجا دیگر جدول تشکیل شده است. چون در این جا $x = 5^\circ$ در نظر داریم می‌توانیم $x_0 = 0$ و $x_1 = 10$

را انتخاب کنیم $h = 10$ و آن را ادامه داد

Subject:
Year. Month. Date.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
0°	۰					
		۰/۱۷۳				
10°	۰/۱۷۳۶		-۰/۰۰۵۲			
		۰/۱۶۸۴		-۰/۰۵۲		
20°	۰/۳۴۲		-۰/۰۱۰۴		۰/۰۰۴	
		۰/۱۵۸۰		-۰/۰۰۴۸		۰
30°	۰/۵		-۰/۰۱۵۲		۰/۰۰۴	
		۰/۱۴۲۸		-۰/۰۰۴۴		
40°	۰/۶۴۲۸		-۰/۰۱۹۶			
		۰/۱۲۳۲				
50°	۰/۷۶۶۰					

$$S = \frac{x - x_0}{h} = \frac{5-0}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = f_0 + S\Delta f_0 + \frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)(S-3)}{4!}\Delta^4 f_0$$

$$P_n(5^\circ) = 0 + \frac{1}{2}(0/173) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-0/0052) + \dots \simeq 0{,}0871$$

$$\sin 5^\circ \cong P_n(5^\circ) = 0/0871$$ * تقریب زدن $\sin 5^\circ$ به روش پیشرو

یعنی معمولاً x_0 را نقطه‌ای از جدول انتخاب می‌کنیم که نزدیک‌ترین فاصله را با x داده شده داشته باشد.

در مثال قبل $x = 12^\circ \longrightarrow x_0 = 10^\circ \qquad S = \frac{12-10}{10} = 0/2$

$\sin 42^\circ = ? \qquad S = \frac{x - x_4}{h} = \frac{42-40}{10} = 0/2$

Subject:
Year. Month. Date.

عملگر تفاضل پسرو ∇ : به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla^{i} f_s = \begin{cases} f_s , & i = 0 \\ \nabla^{i-1} f_s - \nabla^{i-1} f_{s-1} , & i > 0 \end{cases}$$

تذکر: دقت شود که جدول تفاضلات پسرو کاملاً شبیه پیشرو درست می‌شود فقط دقت کنید

که برای محاسبه چندجمله‌ای درونیاب به روش پسرو برای تعیین مقدار $f(x)$ برای x نزدیک نقاط انتها

جدول است لازم است که تفاضلات پسرو استفاده شود که بر حسب مقادیر پایین در نقاط انتهای جدول

بیان می‌شود. $P(x) = f_n + s\nabla f_n + \binom{s}{2}\nabla^2 f_n + \cdots + \binom{s}{n}\nabla^n f_n$ *

برای پیشرو $s = \frac{x - x_0}{h}$ برای پسرو $s = \frac{x - x_n}{h}$

* خطای چندجمله‌ای درونیاب $P_n(x)$: فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f باشد و f مشتق

مرتبه $n+1$ داشته باشد $f^{(n+1)}$

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

که c عددی نامشخص است. به دلیل نامشخص بودن c، مقدار M را کران بالای $f^{(n+1)}(x)$

در بازه $[x_0, x_n]$ باشد یعنی: $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ *

آنگاه رابطه زیر کران بالای خطای چندجمله‌ای درونیاب $P(x)$ را ارائه می‌دهد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. ✓ Date. ✓

$$|f(x)-P(x)| \le |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\,\frac{M}{(n+1)!}$$

مثال) اگر $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ باشد مطلوب است چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $x_0=0$ و $x_1=1$, $x_2=2$ مطلوب است $|f(1/2)-P(1/2)|$ و محاسبه کران بالای خطا

x_i	f_i	مرتبه اول	مرتبه دوم
0	$\underline{\underline{0}}$		
		$\underline{\underline{1}}$	
1	1		$\underline{\underline{-1}}$
		-1	
2	0		

$$P(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_2]+\cdots$$

$$P(x)=0+x(1)+x(x-1)(-1)=-x^2+2x$$

$$P(1/2)=-1/4+1=\frac{3}{4} \qquad f(1/2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|f(1/2)-P(1/2)|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}\right|=0/042$$

برای تعیین کران بالای خطا باید مشتق مرتبه سوم تابع $f(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x \qquad f''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x \qquad f'''(x)=-\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$|f'''(x)|=\left|-\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi}{2}x\right|\le\frac{\pi^3}{8} \qquad M=\frac{\pi^3}{8}$$ کران بالای خطا

Subject:

Year. Month. Date.

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-x_0)\cdots(x-x_n)| \frac{M}{(n+1)!}$$

$$\leq |x(x-1)(x-2)| \frac{\pi^3/8}{3!}$$

تمرین: فرض کنید تابع در یک جدول با طول گام h، $h = x_{i+1} - x_i$ و $m \geq |f''(x)|$ است. ثابت کنید خطای درونیابی بین هر دو نقطه مجاور از $mh^2/8$ کمتر است؟

x_i	f_i	$f_i(x_i, x_{i+1})$
x_i	f_i	$\dfrac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$
x_{i+1}	f_{i+1}	

$$\text{خطا} \leq |(x-x_0)(x-x_1)| \frac{m}{2!}$$

اگر x وسط x_0, x_1 انتخاب شود داریم

$$x = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} = h/2$$

$$\Rightarrow (x-x_0) = h/2 \qquad (x - x_1) = h/2$$

$$\Rightarrow \quad \text{خطا} \leq |h/2 \times h/2| \frac{m}{2} \leq \frac{mh^2}{8}$$

PAPCO