جزوه محاسبات عددی

دکتر دمیرچی

* انتگرال گیری عددی: هرگاه بخواهیم $\int_a^b f(x)dx$ را محاسبه کنیم در صورتیکه تابع انتگرال f مجهول باشد یا f به صورت جدولی داده شده باشد. از روش انتگرال عددی استفاده خواهیم کرد.

انتگرال بالا حاصل مساحت زیر منحنی $f(x)$ در بازه $x=a$ تا $x=b$ است. با افراز زیر بازه ها به مساحت های کوچک و جمع این انتگرال های کوچک، مقدار $\int_a^b f(x)dx$ بدست خواهد آمد.

فرض کنید $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم

$$[x_i, x_{i+1}] \quad , \quad i=0,1,\dots,n-1$$

$$x_{i+1}-x_i=h \qquad \boxed{h=\frac{b-a}{n}}$$

روش ذوزنقه ای: برای محاسبه انتگرال عددی که در هر دو نقطه $[x_i, x_{i+1}]$ از تقریب زیر استفاده می شود.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}) \quad *$$

* که رابطه بالا بیان گر مساحت ذوزنقه ای به قاعده های f_i ، f_{i+1} و ارتفاع h می باشد.

* با استفاده از قاعده ذوزنقه ای مقدار $\int_a^b f(x)dx$ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}\left[f_0+2f_1+2f_2+\dots+2f_{n-1}+f_n\right]$$

مقدار انتگرال با استفاده از روش ذوزنقه ای

محاسبه عددی

تمرین) تقریبی از $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ را با $T(\pi/8)$ بدست آورید؟

$h=\frac{\pi}{8}$ $\quad a=0 \quad b=\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \simeq T\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{16}\left[f(0)+2f\left(\frac{\pi}{8}\right)+2f\left(\frac{\pi}{4}\right)+2f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \simeq 0/98712$$

* خطای روش ذوزنقه‌ای: خطای انتگرال گیری روش ذوزنقه به صورت زیر خواهد بود

$$E_T(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\beta)$$

فرض: همواره M_2 کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد

$$|f''(x)| \le M_2$$

بنابراین داریم:

$$|E_T(h)| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

* در رابطه بالا این نامساوی استفاده می‌شود. هرگاه بخواهیم $|E_T(h)| \le \epsilon$ کافی است h را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \le \epsilon \quad *$$

مثال) اگر $y(x) = 1 - \int_0^x y(t) e^t\,dt$ مقادیر تابع $y(x)$ در نقاط $x_0=0$، $x_1=0/5$ و $x_2=1$ با روش ذوزنقه با طول گام $h=0/5$ محاسبه کرده، سپس تقریبی از $y(x_2)$ را بیابید.

Subject:
Year. Month. Date.

حل تکالیف پیشنهادی

$y(x_0)=y(0)=1-\int_0^0 y(t)e^t\,dt=1$

$y(x_1)=y(/۵)=1-\int_0^{/۵} y(t)e^t\,dt$

$\int_0^{/۵} y(t)e^t\,dt \simeq T(/۵)=\frac{/۵}{۲}\left(1+y(/۵)e^{/۵}\right)$

$\Rightarrow y(x_1)=y(/۵)=1-\frac{/۵}{۲}\left(1+y(/۵)e^{/۵}\right) \Rightarrow y(/۵)\left(1+\frac{/۵}{۲}e^{/۵}\right)=1$

$\Rightarrow y(/۵)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{۴}e^{/۵}}=/۷$

$y(x_2)=y(1)=1-\int_0^1 y(t)e^t\,dt=1-\frac{/۵}{۲}\left[y(0)e^0+۲y(/۵)e^{/۵}+y(1)e^1\right]$

$\Rightarrow \underbrace{\left(1+\frac{/۵}{۲}e^1\right)}_{۱/۴۱} y(1)=1-\frac{/۵}{۲}\left(1+1/۴e^{/۵}\right) \Rightarrow y(1)=\frac{/۱۸}{۱/۴۱}=/۱۲۷$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
۰	$\underline{\underline{1}}$		
/۵	/۷	$\underline{\underline{/۳}}$	$\underline{\underline{-/۲۸}}$
		$-/۵۸$	
۱	/۱۲		

$x=/۲ \quad h=/۵$

$x=x_0+sh \Rightarrow s=\frac{/۲-۰}{/۵}=/۴$

$P(x)=f_0+s\Delta f_0+\frac{s(s-1)}{۲}\Delta^2 f_0$

$\Rightarrow x-x_0=sh \Rightarrow s=\frac{x-۰}{/۵}=۲x$

$P(x)=1+۲x(/۳)+(-/۲۸)\left[\frac{۲x(۲x-1)}{۲}\right]=1+/۶x+(-/۲۸)(۲x^2-x)$

$P(/۲)\simeq f(/۲)=y(/۲)=1+/۶(/۲)-/۲۸\left(۲(/۲)^2-(/۲)\right)$

Subject:

Year. Month. Date.

سوال) بازه [۰و۱] را به چند قسمت تقسیم کنیم تا انتگرال $\int_0^1 \sin x\,dx$ به روش ذوزنقه‌ای دارای خطای حداکثر کمتر از 10^{-4} باشد؟

$$|E_T(h)| \leq \epsilon = 10^{-4} \Rightarrow \frac{b-a}{12} M_2 h^2 < 10^{-4}$$

$$f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x \to f''(x) = -\sin x \quad \max|f''(x)| \leq 1 = M_2$$

$$\Rightarrow \frac{1-0}{12} h^2 \times 1 < 10^{-4} \Rightarrow h < \sqrt{12 \times 10^{-4}} = 2\sqrt{3} \times 10^{-2} = 0.035$$

بنابراین $h = 0.035$ تعیین کنیم باید حال تعداد تقسیمات را بدست آوریم

$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} > \frac{b-a}{\frac{35}{1000}} = \frac{1000}{35} = 28.57$$

$$\Rightarrow n > 28.57 \Rightarrow n = 29, 30, 31, \ldots$$

* به این تقسیمات بازه را می‌توان تقسیم کرد *

ب) قاعده سیمپسون: در قاعده ذوزنقه‌ای برای تقریب انتگرال $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ یک چندجمله‌ای درجه یک را جانشین تابع $f(x)$ می‌کنیم. این عمل را برای روش سیمپسون با این قاعده انجام می‌دهیم. یک چندجمله‌ای درجه دوم را به جای $f(x)$ در فاصله $[x_i, x_{i+2}]$ جانشین می‌کنیم. که آن تقریب را خواهیم داشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$

Subject:
Year. Month. Date.

← حال اگر بخواهیم تقریبی برای $\int_a^b f(x)dx$ به روش سیمپسون ارائه دهیم خواهیم داشت:

فرض کنید $S(h)$ نشان دهنده تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش سیمپسون باشد خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq S(h) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

$\left(h = \frac{b-a}{n}\right)$ *

نکته: روش سیمپسون برای چندجمله‌ای‌های تا درجه سوم دقیق است

* خطای روش سیمپسون: منظور $ES(h)$ خطای روش انتگرال‌گیری سیمپسون با طول زیر فاصله h باشد خواهیم داشت.

$$ES(h) \simeq -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

$\eta \in [a,b]$

نکته: خطای $ES(h)$ متناسب با h^4 بوده و روش سیمپسون تا چندجمله‌ای‌های درجه ۳ دقیق است.

* چون η مشخص نیست نمی‌توانیم به جای آن از کران بالای $f^{(4)}(\eta)$ استفاده کنیم به طوری که:

$|f^{(4)}(x)| \leq M \quad , \quad x \in [a,b]$

$$\Longrightarrow \quad |ES(h)| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M$$

حال مسأله می‌خواهیم $S(h)$ را طوری به دست آوریم که $|ES(h)| \leq \epsilon$ شود. کافی است

Subject:
Year. Month. Date. No.

h را چنان تعیین کنیم که: $\frac{(b-a)}{180} h^4 M \le \epsilon$

انتگرال های ناسره: در ۲ روش قبل که دیدیم انتگرال های ما می باشد $f(x)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده بود اما انتگرال های مثل $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ در بازه $[0,1]$ منطقی تعریف نمی شوند بنابراین برای بدست آوردن تقریبی از این انتگرال ها باید از روش های دیگر ارائه شده استفاده کرد.

قاعده نقطه میانی: در این روش ها فاصله $[a,b]$ را به زیربازه های مساوی تقسیم می کنیم و مساحت زیر منحنی f در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ مساحت مستطیل به عرض h و طول $f(x_i+\frac{h}{2})$ خواهد شد

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq h f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad *$$

* انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را با $M(h)$ نشان می دهیم $M(h)$ تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش نقطه میانی است و

هر زیر فاصله به طول h است آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq M(h) = h\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+\dots+f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+\dots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right]$$

Subject:
Year. Month. Date.

خطای قاعده‌ی میانی: این خطا را با $E_M(h)$ نشان داده و داریم:

$$E_M(h) \simeq \frac{(b-a)}{24} h^2 f''(\eta) \quad *$$

که $\eta\in[a,b]$ و اگر $|f''(x)| \leq M$ آنگاه برای $x\in[a,b]$ خواهیم داشت:

$$|E_M(h)| \leq \frac{(b-a)}{24} h^2 M \quad *$$

حال h را طوری به دست آورید که $S(h)$ تقریب $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ با دقت خطای 10^{-5} تعیین کند.

$$\epsilon = 10^{-5} \qquad \frac{b-a}{180} h^4 M \leq \epsilon \qquad |x| \leq \pi/2$$

$$|f^{(4)}(x)| \leq M \Rightarrow f^{(4)}(x) = 4\sin x + x\cos x$$

$$|f^{(4)}(x)| \leq 4\underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} + \underbrace{|x|}_{\leq \pi/2}\underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} \leq 4 + \frac{\pi}{2} \leq 6$$

$$\Rightarrow \frac{\pi/2 - 0}{180} h^4 \times 6 \leq 10^{-5} \Rightarrow h \leq 0.1 \times \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \simeq 0.1176$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\pi/2}{h} \longrightarrow h \leq 0.1176 \longrightarrow \frac{1}{h} \geq \frac{1}{0.1176} \longrightarrow \frac{\pi}{2h} \geq \frac{1}{0.1176}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\pi}{2\times 0.1176} = 13.3571$$

مهم:

* چون در روش سیمپسون بایستی n زوج باشد لذا باید n را در این جا $n=14$ در نظر گرفت

که بنابراین n خواهیم داشت: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{28} \simeq 0.1122$ که از 0.1176 کمتر است

PaPCO

Subject:
Year. Month. Date.

نکته ۹ خطای قاعده نقطه میانی نصف خطای قاعده ذوزنقه‌ای است.

نکته ۹ قاعده نقطه‌های میانی از حیث خطا از ذوزنقه‌ای بهتر است.

مثال) تقریبی از $\int_0^1 x\sin x\,dx$ را به روش نقطه‌های میانی تعیین کنید که خطای آن از $\frac{1}{2}\times 10^{-2}$ کمتر باشد.

$$|E_M(h)| \leq \frac{(b-a)}{24} h^2 M \quad , \quad |f''(x)| \leq M$$

$$f(x) = x\sin x \qquad f'(x) = \sin x + x\cos x$$

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x \qquad M \leq 2|\cos x| + |x||\sin x| \leq 3$$

$$|2\cos x - x\sin x| \leq |2\cos x| + |x\sin x|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{24} h^2 \times 3 \leq \frac{1}{2}\times 10^{-2} \Rightarrow h^2 \leq 4\times 10^{-2} \Rightarrow h \leq 0.2$$

$$n = \frac{b-a}{h} \geq \frac{1}{0.2} = 5 \Rightarrow n > 5 \Rightarrow n = 6 , \ h = \frac{1}{6}$$

$$M\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\left[f\left(0+\frac{1}{12}\right) + f\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right) + f\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{12}\right) + \cdots + f\left(\underset{\substack{\downarrow \\ n-1}}{\frac{5}{6}} + \frac{1}{12}\right)\right]$$

مثال) تقریبی از $\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $h = 0.01$ به روش نقطه‌های میانی بدست آورید. $n=1$

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.01) = 0.01\left[\frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.015}} + \frac{1}{\sqrt{0.025}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\underset{\substack{\downarrow \\ n-1}}{0.085}}}\right]$$

$$= 0.5496587$$

Subject:
Year. Month. Date.

توجه کنید که مقدار دقیق و واقعی این انتگرال است :

$$\int_{\cdot}^{\cdot 1.9}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_{\cdot}^{\cdot 1.9}=\cdot 16$$

* بنابراین حاصل مقدار واقعی با $m\,(0.1)$ تقریباً برابر ۱.۶ می باشد. بنابراین هرچنین انتگرال های برای قسمتی که نزدیک نقطه تکین تابع است. h را باید کوچک و برای بقیه فاصله h را بزرگتر در نظر بگیرید.

قاعده رامبرگ : برای یافتن تقریب بیشتر از $\int_a^b f(x)dx$ از این قاعده استفاده می‌شود. اگر I را تقریبی از $\int_a^b f(x)dx$ بدانیم بنابراین به روش رامبرگ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} I=\int_a^b f(x)\,dx=T(h)+a_2h^2+a_4h^4+\dots & (1)\\ h\to h/2 \quad I=T(h/2)+a_2(h/2)^2+a_4(h/2)^4+\dots & (2)\end{cases}$$

* با ضرب رابطه (۲) در چهار و تفاضل از رابطه (۱) خواهیم داشت :

$$3I=4T(h/2)-T(h)-\frac{3}{4}h^4a_4+\dots$$

$$\Rightarrow I=\frac{4T(h/2)-T(h)}{}+a_4h^4+a_6h^6+\dots$$

این برای $h\to h/2$ می باشد *

h	$a(h^2)$	$a(h^4)$	$a(h^6)$	$a(h^8)$
$h=b-a$	$R_1=T(h)$			
$\frac{h}{2}=\frac{b-a}{2}$	$R_2=T(h/2)$	$\Rightarrow S_1=\frac{4R_2-R_1}{3}$	$\Rightarrow V_1=\frac{4^2S_2-S_1}{4^2-1}$	$\rightarrow \frac{4^3V_2-V_1}{4^3-1}$ *
$\frac{h}{4}=\frac{b-a}{4}$	$R_3=T(h/4)$	$\Rightarrow S_2=\frac{4R_3-R_2}{3}$	$\Rightarrow V_2=\frac{4^2S_3-S_2}{4^2-1}$	
$\frac{h}{8}=\frac{b-a}{8}$	$R_4=T(h/8)$	$\Rightarrow S_3=\frac{4R_4-R_3}{3}$		

Subject:
Year. Month. Date. ۱۷

تمرین ۸: مطلوب است تخمین $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ که خطای آن متناسب با h^6 باشد را بدست آورید.
که عبارت خطای آن متناسب با h^6 باشد متوجه خواهیم شد منظور قاعده رامبرگ می باشد.

$f(x)=e^{-x^2} \quad a=0,\ b=1 \quad h=b-a=1$

$T(h)$ که همان روش ذوزنقه‌ای می باشد خواهیم داشت:

$T(h)=T(1)=\frac{1}{2}[f_0+f_1]=\frac{1}{2}[e^{-0}+e^{-1}]=\frac{1}{2}[e^{0}+e^{-1}]=۰/۶۸۳۹۴$

$T(h/2)=T(1/2)=\frac{1}{4}[f_0+2f_1+f_2]=\frac{1}{4}[e^{0}+2e^{-\frac{1}{4}}+e^{-1}]=۰/۷۳۱۳۷۱$

$T(h/4)=T(1/4)=\frac{1}{8}[f_0+2f_1+2f_2+2f_3+f_4]=۰/۷۴۲۹۸۴$

	$a(h^2)$	$a(h^4)$	$a(h^6)$
h	$T(1)=۰/۶۸۳۹۴$	$S_1=\frac{4T(1/2)-T(1)}{3}=۰/۷۴۷$	$\Rightarrow \frac{4^2S_2-S_1}{4^2-1}=۰/۷۴۶۸۳۳$ ✓
$h/2$	$T(1/2)=۰/۷۳۱۳۷۱$		
$h/4$	$T(1/4)=۰/۷۴۲۹۸۴$	$S_2=۰/۷۴۶۸۵۵$	

تمرین ۹: بازه $[0,1]$ را به چند قسمت تقسیم کنیم تا تخمین $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ به روش ذوزنقه‌ای دارای حداکثر خطای کمتر از 10^{-6} باشد.

$\frac{(b-a)}{12}h^2M \le \epsilon \quad \epsilon=10^{-6} \quad b=1,\ a=0$

$\frac{1}{12}h^2M \le 10^{-6} \quad f(x)=\frac{1}{1+x}$

$$|f''(x)| \leq m \qquad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$0<x<1 \rightarrow 1<x+1<2 \rightarrow 1<(1+x)^3<8 \rightarrow \frac{1}{8}<(1+x^3)^{-1}<1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{(1+x)^3}\right| \leq 1 \Rightarrow |f''(x)| = \left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| \leq 2 \qquad m=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}h^2 \times 2 \leq 10^{-6} \Rightarrow h^2 \leq 6\times 10^{-6} \Rightarrow |h| < \sqrt{6}\times 10^{-3}$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{h} > \sqrt{6}/6 \times 10^{3} \simeq 408{,}24 \qquad \boxed{n=409}$$

تمرین 3 : حداقل تعداد نقاط تقسیم را طوری بیابید که تقریب انتگرال e^{-x^2} دارای خطای کمتر از 6×10^{-6} باشد؟

$$\frac{(b-a)}{12}h^2 m \leq \epsilon \qquad \epsilon = 6\times 10^{-6} \qquad f(x) = e^{-x^2}$$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad f''(x) = -e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

$$0<x<1 \rightarrow 0<x^2<1 \Rightarrow -1<-x^2<0 \Rightarrow e^{-1}<e^{-x^2}<1$$

$$\frac{1}{e} < e^{-x^2} < 1 \Rightarrow |e^{-x^2}|<1$$

$$\Rightarrow |4x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}| \leq |4x^2e^{-x^2}| + |e^{-x^2}| \leq 4+1 \leq 5$$

$$\Rightarrow |f''(x)| \leq 5 \qquad \boxed{m=5}$$

Subject:

Year. Month. Date. ۷.

$$\frac{1}{12}h^2\times 5\leq 6\times 10^{-6}\longrightarrow |h|\leq\sqrt{\frac{6\times 12}{5}}\times 10^{-3}\simeq 3{,}794$$

$$n=\frac{b-a}{h}=\frac{1}{h}\geqslant\frac{1}{3{,}794}=0{,}264\quad\boxed{n_{min}=1}\ \text{یا}\ n=2$$

بنابراین حداقل باید به ۲ قسمت تقسیم کرد.

تمرین) مساحت محاط بر منحنی $y^2+x^2=\cos x$ با فرمول $S=4\int_0^{\alpha}\sqrt{\cos x-x^2}\,dx$ محاسبه می‌شود که α ریشه مثبت $\cos x-x^2=0$ می‌باشد. مقدار تقریبی این انتگرال را با دقت 10^{-3} محاسبه نموده و آن را با کمک فرمول ذوزنقه با طول گام ۲ و $\frac{9}{2}$ محاسبه کنید؟

Subject:
Year. Month. Date.

مثال) مطلوب است تقریبی از $f(1,1)$ و $f(2)$ جدول زیر را بدست آورید؟

x_i	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
f_i	۰/۷۶۵۱۹۸	۰/۶۲۰۰۸۶	۰/۴۵۵۴۲	۰/۲۸۱۸۱۹	۰/۱۱۰۳۶۳

چون xها متساوی الفاصله هستند بهتر است از جدول تفاضلات پیشرو و پسرو استفاده کنیم

تقریب $f(1,1)$ چون ۱/۱ به x اول جدول نزدیک است بهتر است از پیشرو استفاده کنیم

و برای $f(2)$ چون به x آخر جدول نزدیک است بهتر است از روش پسرو استفاده کنیم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
۱	۰/۷۶۵۱۹۸				
		-۰/۱۴۵۱۱۲			
۱/۳	۰/۶۲۰۰۸۶		-۰/۰۱۹۵۴۸		
		-۰/۱۶۴۶۶	پیشرو		
				۰/۰۱۰۶۰۷	
۱/۶	۰/۴۵۵۴۲		-۰/۰۰۸۹۴۱		۰/۰۰۰۴۷۹
		-۰/۱۷۳۶۰۱		۰/۰۱۱۰۸۶	
۱/۹	۰/۲۸۱۸۱۹		۰/۰۰۲۱۴۵		
		-۰/۱۷۱۴۵۶	پسرو		
۲/۲	۰/۱۱۰۳۶۳				

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-1}{0.3} = \frac{10}{3}(x-1)$$

$$P_1(x) = 0.765198 + \frac{10}{3}(x-1)(-0.145112) + \frac{s(s-1)}{2!}(-0.019548)$$

نام از روش پیشرو

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}(0.010607) + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}(0.000479)$$

$f(1.2) \simeq P_1(1.2) =$

حال باید برای محاسبه تقریب $f(2)$ از روش پیشرو چندجمله‌ای تفاضلات پیشرو را بدست آورد سپس:

$S = \dfrac{x - x_n}{h} = \dfrac{x - 2.2}{0.3} = \dfrac{10}{3}(x-2.2)$ را تقریب زد $f(2)$ مقدار $x=2$ به ازای

تفاضلات پیشرو

$$P_4(x) = 1.7660 + \frac{10}{3}(x-2.2)(-0.171456) + \frac{S(S-1)}{2!}(0.002145)$$

$$+ \frac{S(S-1)(S-2)}{3!}(0.011086) + \frac{S(S-1)(S-2)(S-3)}{4!}(0.000479)$$

$f(2) \simeq P_4(2)$

با چه تعداد تقسیم الا ازای یک کمتر از $\int e^x \sin x \, dx$ با روش سیمپسون دارای حداکثر خطا

$|f^{(4)}(x)| \leq M \qquad \dfrac{(b-a)}{180} h^4 M \leq \epsilon \qquad \epsilon = 5 \times 10^{-5}$ باشد؟ 5×10^{-5}

$f(x) = e^x \sin x \qquad f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$

$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x$

$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$

$f''''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x = -4e^x \sin x$

Subject:
Year. Month. Date.

$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x \qquad 0 \le x \le \pi/2 \rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le \sin x \le 1 \qquad 1 \le e^x \le 4.88 \simeq 5$

$\Rightarrow |e^x \sin x| \le 5 \Rightarrow |-4e^x \sin x| \le 20 = M$

$\Rightarrow \frac{\pi/2 - 0}{180} h^4 \times 20 \le \frac{1}{2}\times 10^{-4} \Rightarrow h^4 \le \frac{180}{\pi}\times\frac{1}{2}\times 10^{-4} = \frac{90}{\pi}\times 10^{-4}$

$|h| \le \sqrt[4]{\frac{90}{\pi}\times 10^{-1}} \simeq 0.23$

$n = \frac{b-a}{h} \ge \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{0.23} \simeq 6.82 \qquad n = 8$

* چون در روش سیمپسون n باید زوج باشد بنابراین تعداد تقسیمات لازم برای این محاسبه خطا

۰/۰۰۰۰۵ با بازه n = ۸ مناسب است