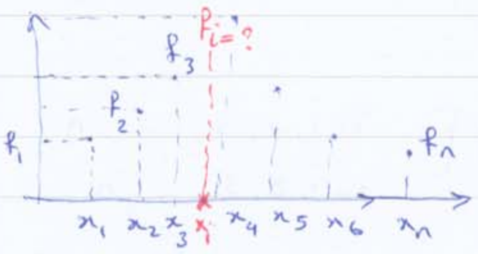
جلسه اول — Subject: محاسبات عددی پیشرفته — Date: ۹۲/۷/۱۱

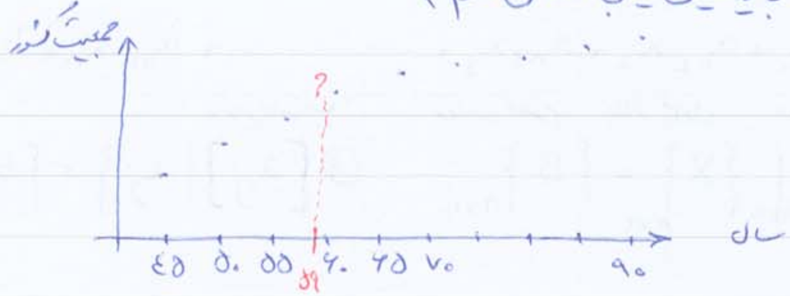
1) Simultaneous linear Algebraic Equations (همزمان) معادلات جبری خطی همزمان (فصل اول)

معادلات خطی به هر ازای هر مقدار درجه تمام متغیرها یکی است.

2) Nonlinear Algebraic Equation — معادله جبری غیرخطی (فصل دوم)

3) Interpolation — درون یابی یا میان یابی (فصل سوم)

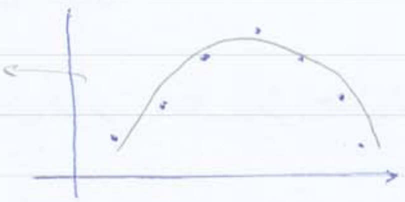




C.M.M. Coordinate Measuring Machine

4) Curve Fitting (Regression) — (فصل چهارم)

برازنده بودن = برازش = شایستگی



$$f(x) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$$

معادله درجه ۶، ۵ اکسترمم دارد.

5) Numerical Integration

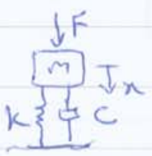
معادلات دیفرانسیل معمولی

6) Numerical solution of O.D.E(s) (ordinary Differential Equations)

معادلات دیفرانسیل جزئی

7) Numerical Solution of P.D.E(s) (Partial Differential Equations)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{جزئی}$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

تکالیف، کوئیز (ها) %20

امتحان میان ترم و پایان ترم %80 — %30 ، %50

جزوه بسته حدود %۳۰

جزوه باز حدود %۷۰

فصل اول: Simultaneous linear Algebraic Equations

(1)

n مجهول

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad (2)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

ماتریس ضرایب — بردار مجهول — بردار معلوم

$$(3)\ [A]_{n\times n}\{X\}_{n\times 1} = \{B\}_{n\times 1}$$

ماتریس ضرایب

$$(4)\ [a_{ij}]\{x_j\} = \{b_i\} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

روشهای حل: ۱- روش های مستقیم
۲- روش های تکراری

روش های مستقیم: ۱- قانون کرامر ، ۲- روش حذفی گاوس ، ۳- روش حذفی گاوس - جوردن

روش های تکراری: ۱- روش جاکوبی ، ۲- روش گاوس - سیدل

۱) قانون کرامر: Cramer's Rule

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & \cancel{a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22}}^{\,0} \\ \cancel{-a_{21}a_{11} + a_{11}a_{22}}_{\,0} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \quad , \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

دترمینان ضرایب

$$x_j = \frac{\det[A_j]}{\det[A]} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$[A_j]$ ماتریس ضرایب است که ستون jام آن با $\{b_i\}$ جایگزین شده است.

نکته ۱: شرط لازم برای اینکه این روش کرامر جواب داشته باشد این است که دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد.

اگر $\det[A] = 0 \Rightarrow [A]$ ماتریس منفرد (Singular)

۹۲/۷/۱۱

جلسه دوم

نکته ۲:

اگر دترمینان ضرایب نزدیک به صفر باشد دستگاه ill-conditioned است. $\Leftarrow \det[A] \cong 0$ اگر

مثال:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \qquad [A] = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[A] = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\det[A_1]}{\det[A]} \\ [A_1] = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[A_1] = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \frac{20}{5} = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{\det[A_2]}{\det[A]} \\ [A_2] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[A_2] = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{5} = 1$$

مثال:

الف)

$$\begin{cases} 2x_1 + 2.1x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} 2x_1 + 1.9x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

۴/

Subject: Date:

الف) $[A]=\begin{bmatrix}2 & 2.1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det[A] = 2-2.1=-0.1$

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix}5 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2.1\\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \dfrac{-5}{-0.1} = +50 \quad 55$ $\qquad x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix}2.1 & 5\\ 1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2.1\\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \dfrac{10.5-5}{-0.1} = \dfrac{5.5}{-0.1} = -55 \quad -50$

ب) $\det[A] = 2-1.9=0.1$

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix}5 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1.9\\ 1 & 1\end{vmatrix}} = +5 = -45$ $\qquad x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix}1.9 & 5\\ 1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1.9\\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \dfrac{14}{0.1} = 50$

راه حل

الف) $[A_1]=\begin{bmatrix}5 & 2.1\\ 5 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det[A_1] = -5.5 \rightarrow x_1 = \dfrac{\det[A_1]}{\det[A]} = \dfrac{-5.5}{-0.1} = 55$

$[A_2]=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \det[A_2] = 5 \rightarrow x_2 = \dfrac{\det[A_2]}{\det[A]} = \dfrac{5}{-0.1} = -50$

ب) $[A_1]=\begin{bmatrix}5 & 1.9\\ 5 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det[A_1] = 5-9.5=-4.5 \rightarrow x_1 = \dfrac{\det[A_1]}{\det[A]} = \dfrac{-4.5}{0.1} = -45$

$[A_2]=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \det[A_2] = 5 \rightarrow x_2 = \dfrac{\det[A_2]}{\det[A]} = \dfrac{5}{0.1} = 50$

Gauss's Elimination Method

روش حذفی گوس:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

۱- طرفین اولین معادله را بر a_{11} تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

طرفین اولین معادله را در $-a_{i1}$ $(i=2,3,\dots,n)$ ضرب کرده و با طرفین معادله iام جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \vdots \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

طرفین معادله دوم را بر a'_{22} تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \vdots \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

طرفین معادله دوم را در $-a'_{i2}$ $(i=3,4,\dots,n)$ ضرب کرده و با طرفین معادله iام جمع می‌کنیم.

$[A] =$ 

این عمل را ادامه می‌دهیم تا ماتریس ضرایب به ماتریس بالا مثلثی تغییر کند.

$$\begin{cases} x_1 + U_{12}x_2 + U_{13}x_3 + \cdots + U_{1n}x_n = c_1 \\ x_2 + U_{23}x_3 + \cdots + U_{2n}x_n = c_2 \\ x_3 + U_{34}x_4 + \cdots + U_{3n}x_n = c_3 \\ \ddots \\ x_{n-1} U_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \\ x_n = c_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_n = c_n \quad , \quad x_{n-1} = c_{n-1} - U_{n-1,n}x_n \quad \cdots$$

$$x_1 = c_1 - U_{12}x_2 - U_{13}x_3 - U_{14}x_4 - \cdots - U_{1n}x_n$$

Subject: Date:

نکته: ماتریس افزوده

Agmented Matrix

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & U_{12} & U_{13} & & \cdots & U_{1n} & C_1 \\ 0 & 1 & U_{23} & & \cdots & U_{2n} & C_2 \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} & \cdots & U_{3n} & C_3 \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & C_n \end{array}\right]$$

مثال: روش حذفی گوس

چون ضریب a_{11} در معادله اول صفر می‌شود معادلات را جابجا می‌کنیم

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & -8 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1/4}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & -0.75 & 0.25 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & -8 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & -0.75 & 0.25 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -8.75 & 4.25 & 1.25 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2/2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & -0.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8.75 & 4.25 & 1.25 \end{array}\right] \xrightarrow{8.75R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & -0.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 21.75 & 27.5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3/21.75}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.25 & -0.75 & 0.25 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1.264 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0.25x_2 - 0.75x_3 = 0.25 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_3 = 1.264 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3 = 1.264 \longrightarrow x_2 = 3 - 2(1.264) = 0.472$$

$$x_1 = 0.25 + 0.75(0.472) + 0.75(1.264) = 1.080$$

Gauss - Jordan Elimination Method — روش گوس جوردن -

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & b_1^* \\ & 1 & & & & b_2^* \\ & & 1 & & & b_3^* \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & b_n^* \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = b_1^* \\ x_2 = b_2^* \\ x_3 = b_3^* \\ \vdots \\ x_n = b_n^* \end{array}$$

تمرین: مثال قبل را یکبار از روش گوس جوردن و یکبار از روش کرامر حل کنید.

۹۲/۷/۱۸ جلسه سوم:

روش تکراری Iterative Methods

۱- روش ژاکوبی Jacobi's Methods

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \longrightarrow x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \longrightarrow x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \longrightarrow x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3}{a_{33}} - \dfrac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k)} \end{cases}$$

$$\{x\}^{(k+1)} \approx \{x\}^{(k)}$$

مثال :

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|5| > |-2| + |1| \ , \quad |4| > |1| + |-2| \ , \quad |4| > |2| + |1|$$

جابجا کنیم همگرایی صورت نمی‌گیرد.

$$\begin{cases} x_1 = 0.8 + 0.4x_2 - 0.2x_3 \\ x_2 = 0.75 - 0.25x_1 + 0.5x_3 \\ x_3 = 4.25 - 0.25x_1 - 0.5x_2 \end{cases} \Longrightarrow$$

k	0	1	2
x_1	0	0.8	0.25
x_2	0	0.75	2.675
x_3	0	4.25	3.675

تمرین : این مثال را آنقدر ادامه دهید تا به انتها برسید.

روش گاوس سیدل — Gauss-Seidel Method

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_3 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{23}}{a_{33}}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k+1)} \end{aligned}$$

تمرین : مثال قبل را با روش گوس سیدل حل کنید.

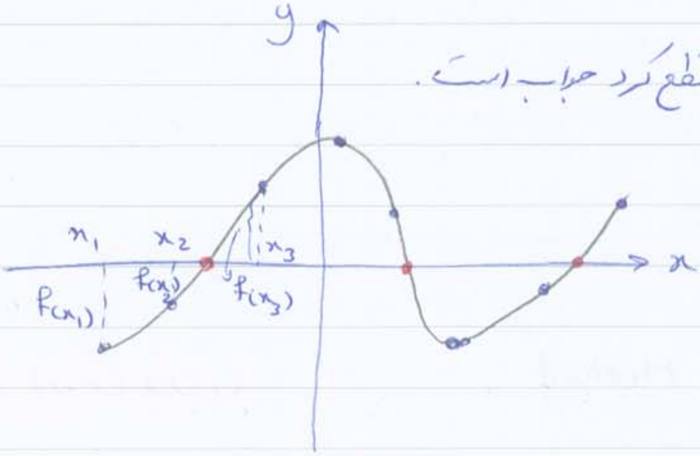
Nonlinear Algebraic Equations — فصل دوم، معادلات جبری غیرخطی:

Graphical Method — ۲-۱: روش ترسیمی

$f(x) = 0$

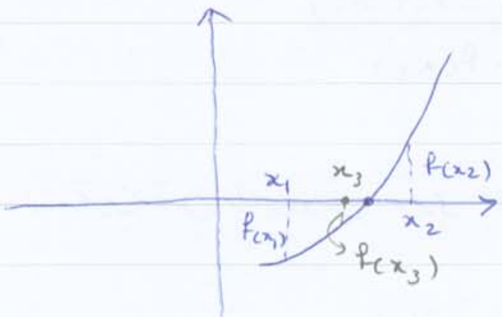
هرجا نمودار محور x ها را قطع کرد جواب است.

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
$\vdots$	$\vdots$



Interval _ Halving Method — ۲-۲: روش تنصیف (دو قسمت کردن، نصف کردن)
Bisection Method

$f(x) = 0$



$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

بین x_1 و x_2 را انتخاب کرده مقدار f آن را به دست می‌آوریم

این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم که به ریشه برابر صفر برسیم.

مثال:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 = 1 &\rightarrow 1 - 5 - 2 + 10 = 4 > 0 \\ x_2 = 3 &\rightarrow 27 - 5\times 9 - 2\times 3 + 10 = -14 < 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \rightarrow f(x_3) = -6 < 0$$

$$\rightarrow x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \rightarrow f(x_4) = -0.875 < 0$$

$$x_5 = \frac{x_1 + x_4}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25 \longrightarrow f(x_5) = 1.640625 > 0$$

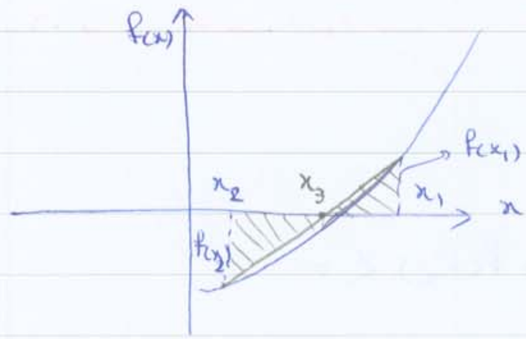
$$x_6 = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{1.5 + 1.25}{2} = 1.375 \longrightarrow f(x_6) = 0.396 > 0$$

$$x_7 = \frac{x_4 + x_6}{2} = \frac{1.5 + 1.375}{2} = 1.4375 \longrightarrow f(x_7) = -0.243 < 0$$

$$x_8 = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{1.375 + 1.4375}{2} = 1.40475 \longrightarrow f(x_8) = 0.095 > 0$$

$$x = \sqrt{2} = 1.41421356237$$

False-position Method ۳-۲ : روش موقعیت غلط (روش وتری)



$$f(x) = 0$$

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_3} = -\frac{f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

مثال : تمرین قبل را از روش وتری حل کنید.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$$

$$x_1 = 1 \longrightarrow f(x_1) = 4 > 0 \quad , \quad x_2 = 3 \longrightarrow f(x_2) = -14 < 0$$

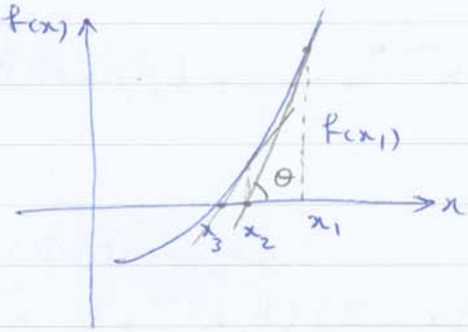
$$x_3 = \frac{(3)(4) - (1)(-14)}{(4) - (-14)} = 1.4444 \longrightarrow f(x_3) = -0.306817$$

$$x_1 = 1 \longrightarrow f(x_1) = 4 > 0 , \quad x_2 = 1.4444 \longrightarrow f(x_2) = -0.306817$$

$$x_3 = \frac{(1.4444)(4) - (1)(-0.306817)}{(4) - (-0.0306817)} = \boxed{1.412710 1} \longrightarrow f(x_3) = 0.0140331$$

Newton – Raphson Method ۴-۲: روش نیوتن - رافسون

$f(x)=0$



$$\tan\theta = f'(x_1)$$

$$\tan\theta = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2}$$

$$\Rightarrow f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2}$$

$$\rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

مثال:

$$f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 2x - 10 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + 2 \quad , \quad x_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) = -8.5 \\ f'(x_1) = 8 \end{cases} \rightarrow x_2 = 3 - \frac{-8.5}{8}$$

$$\boxed{x_2 = 4.0625}$$

$$x_1 = 4.0625 \rightarrow \begin{cases} f(x_1) = 7.4084 \\ f'(x_1) = 23.0742 \end{cases} \rightarrow x_2 = 4.062 - \frac{(7.4084)}{23.0742}$$

$$x_2 = 4.00146$$

به همین ترتیب ادامه می دهیم

تمرین: مثال قبل را تا آخر ادامه دهید.

۹۲/۷/۱۸ جلسه چهارم

۲-۵: روش لین بیرستو برای حل معادلات غیرخطی چند جمله ای Lin-Bairstow-(Polynomials)

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

$f(x)$ از درجه n | عامل درجه ۲

خارج قسمت از درجه $n-2$

$R=0$

این روش را با دوتا دوتا خارج کردن ریشه ها ادامه می دهیم تا کلیه ریشه ها را بدست آورده و معادله چند جمله ای را حل کنیم.

Subject: Date:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0 \qquad (۱)$$

(۲) عامل درجه ۲:

$$x^2 - yx - Z$$

$$f(x) = (x^2 - yx - Z)(b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + b_{n-2} x^{n-4} + \cdots + b_2 x^0) + R \qquad (۳)$$

$$R = b_1 (x - y) + b_0 \qquad (۴)$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 = (x^2 - yx - Z)(b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + b_{n-2} x^{n-4} + b_{n-3} x^{n-5} + \cdots + b_2) + b_1 (x - y) + b_0 \qquad (۵)$$

$$= b_n x^n + (b_{n-1} - y b_n) x^{n-1} + (b_{n-2} - y b_{n-1} - Z b_n) x^{n-2} + (b_{n-3} - y b_{n-2} - Z b_{n-1}) x^{n-3} + \cdots + \cdots (b_1 - y b_2 - Z b_3) x^1 + (b_0 - y b_1 - Z b_2) \qquad (۶)$$

حال ضرایب x با درجه‌های مختلف از رابطه (۱) را با ضرایب x با درجه‌های مختلف از رابطه (۶) با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} a_n = b_n, \quad a_{n-1} = b_{n-1} - y b_n, \quad a_{n-2} = b_{n-2} - y b_{n-1} - Z b_n \\ a_{n-3} = b_{n-3} - y b_{n-2} - Z b_{n-1}, \quad \cdots \\ a_1 = b_1 - y b_2 - Z b_3, \quad a_0 = b_0 - y b_1 - Z b_2 \end{cases} \qquad (۷)$$

از روابط (۷) به جواب‌های زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} a_n = b_n \\ b_{n-1} = a_{n-1} + y b_n \\ b_{n-2} = a_{n-2} + y b_{n-1} + Z b_n \\ \vdots \\ b_1 = a_1 + y b_2 + Z b_3 \\ b_0 = a_0 + y b_1 + Z b_2 \end{cases} \qquad (۸)$$

مرحله الف - مقادیری برای y و Z فرض می‌کنیم و از روابط ⑧ تمام ضرایب b (بغیر از b_1 و b_0) را بدست می‌آوریم. (چون می‌خواهیم b_1 و b_0 را بصورت دستی صفر قرار دهیم تا R صفر شود)

مرحله ب - از دو معادله آخر روابط ⑧، b_1 و b_0 را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + y b_2 + Z b_3 = 0 \longrightarrow \\ a_0 + Z b_2 = 0 \longrightarrow Z = -\dfrac{a_0}{b_2} \quad (9) \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{1}{(b_2)^2}\left(b_3 a_0 - b_2 a_1\right) \quad (10)$$

مثال: روش Lin-Birstow برای یک چندجمله‌ای مرتبه سه را بدست آورید.

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

مرحله الف) مقادیری برای y و Z فرض می‌کنیم.

$$y = y_e \;,\quad Z = Z_e$$

و از معادلات ⑧ خواهیم داشت:

$$b_3 = a_3$$
$$b_2 = a_2 + y_e a_3$$

مرحله ب) از روابط ⑨ و ⑩ خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{(10)} y = \frac{1}{(a_2 + y_e a_3)^2}\left[a_3 a_0 - (a_2 + y_e a_3) a_1\right] \quad (11)$$

$$\xrightarrow{(9)} Z = -\frac{a_0}{a_2 + y_e a_3} \quad (12)$$

سپس مقادیر y و Z را در معادله درجه ۲ $(x^2 - yx - Z)$ قرارداد. عبارت چندجمله‌ای را بر آن تقسیم می‌کنیم تا خارج قسمت یک چندجمله‌ای درجه یک شود. سپس مقسوم علیه و خارج قسمت را برابر صفر قرار داده مقادیر ریشه‌های x را بدست می‌آوریم.

نکته: مقدار $a_2 + y_e a_3 \neq 0$ و $y_e \neq -\dfrac{a_2}{a_3}$

۲- اگر $y_e = 0$ باشد آنگاه:

$\xrightarrow{(11)} y = \frac{1}{(a_2)^2}\left[a_3 a_0 - a_2 a_1\right]$ (13)

$\xrightarrow{(12)} Z = -\frac{a_0}{a_2}$ (14)

مثال: معادله زیر را به روش Lin_Birstow حل کنید.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$a_3 = 1, \quad a_2 = -6, \quad a_1 = 11, \quad a_0 = -6 \quad \to y_e \neq -\frac{a_2}{a_3} \neq -\frac{-6}{1} \neq +6$

$y_e = 0 \xrightarrow{(13)} y = \frac{1}{(-6)^2}\left[(1)(-6) - (-6)(11)\right] = 1.67$

$\xrightarrow{(14)} Z = -\frac{(-6)}{-6} = -1$

$y_e = 1.67 \xrightarrow{(11)} y = \frac{1}{\underbrace{[(-6)+(1.67)(1)]}_{b_2}}\left[(1)(-6) - \underbrace{[(-6)+(1.67)(1)]}_{b_2} 11\right] = 2.22$

$y_e = 2.22, \quad b_2 = a_2 + y_e a_3 \Rightarrow b_2 = (-6) + (2.22)(1) = -3.78$

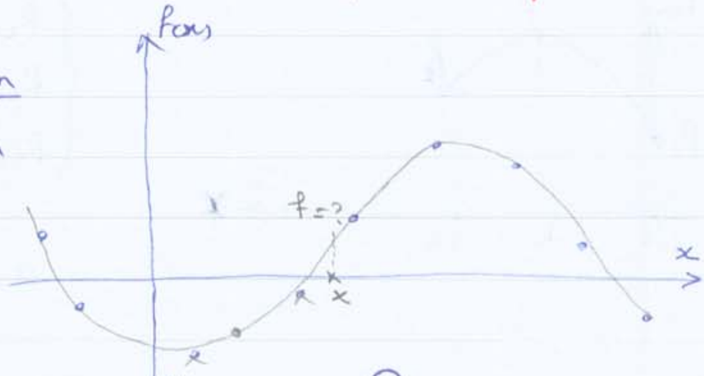
$y = \frac{1}{(-3.78)^2}\left[(1)(-6) - (-3.78)(11)\right] = 2.49$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا $y = y_e$ شود و از آن مقدار Z را از رابطه (12) بدست می‌آوریم. و در معادله $x^2 - yx - Z$ قرار می‌دهیم و چند جمله‌ای را بر معادله درجه ۲ تقسیم کرده و ریشه‌ها را بدست می‌آوریم.

تمرین: مثال قبل را ادامه دهید تا به جواب برسید.

فصل سوم: درون یابی (Interpolation)

x_i	x_0	x_1	x_2	$\dots\ \underset{\vee}{x}\ \dots$	x_n
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	$\overset{\wedge}{f=?}$	f_n



$$f(x) = \underset{?}{\underset{\downarrow}{a_0}} + \underset{?}{\underset{\downarrow}{a_1}} x + \underset{?}{\underset{\downarrow}{a_2}} x^2 + \underset{?}{\underset{\downarrow}{a_3}} x^3 + \dots + \underset{?}{\underset{\downarrow}{a_n}} x^n \qquad ①$$

$$\begin{cases} f(0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots + a_n x_0^n \\ f(1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \dots + a_n x_1^n \\ f(2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \dots + a_n x_2^n \\ \vdots \\ f(n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \dots + a_n x_n^n \end{cases} \qquad ②$$

مجهولات a_1، a_2، a_3 و ... تا a_n بدست آمده در $f(x)$ در رابطه ① می‌گذاریم.

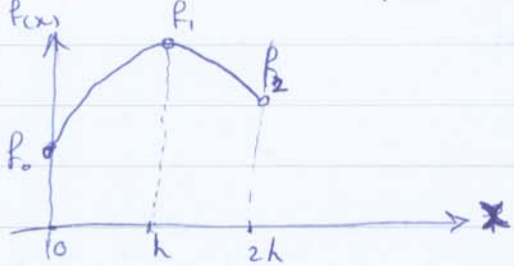
درون یابی با در دست داشتن ۳ نقطه متساوی الفاصله

x_i	$x_1 \overset{h}{\frown}$	$x_2 \overset{h}{\frown}$	x_3
f_i	$\underbrace{f(x_1)}_{f_0}$	$\underbrace{f(x_2)}_{f_1}$	$\underbrace{f(x_3)}_{f_2}$

$$f(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 \qquad ③$$

Forward Interpolation

درون یابی پیشرو



$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(1) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \\ f(2) = a_0 + a_1(2h) + a_2(2h)^2 \end{cases}$$

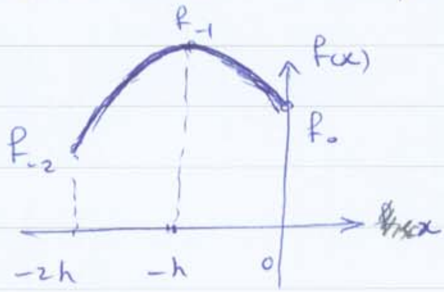
$$a_0 = f_0 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)$$

$$a_2 = \frac{1}{2h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

$$\Rightarrow f(x) = f_0 + \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)x + \frac{1}{2h^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)x^2 \qquad (4)$$

Backward Interpolation

درون یابی پس رو

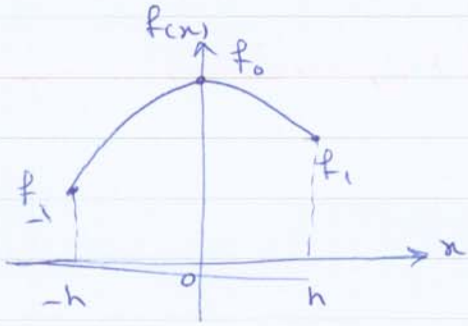


$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(-1) = a_0 + a_1(-h) + a(-h)^2 \\ f(-2) = a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = f_0 + \frac{1}{2h}(f_{-2} - 4f_{-1} + 3f_0)x + \frac{1}{2h^2}(f_{-2} - 2f_{-1} + f_0)x^2 \qquad (5)$$

Centered Interpolation

درون یابی مرکزی



$$f_{-1} = a_0 + a_1(-h) + a_2(-h)^2$$

$$f_0 = a_0$$

$$f_1 = a_0 + a_1(h) + a_2(h)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = f_0 + \frac{1}{2h}(-f_{-1} + f_1)x + \frac{1}{2h}(f_{-1} - 2f_0 + f_1)x^2 \qquad (6)$$

مثال: با استفاده از اطلاعات زیر مطلوب است تعیین $f(5)$.

x_i	2	4	5	6
$f(x_i)$	8	2	?	10
(4) $x_{i\,(tr.)}$	0	2	3	4
(5) $x_{i\,(tr.)}$	-4	-2	-1	0
(5) $x_{i\,(tr.)}$	-2	0	1	2

(4) از $\rightarrow f(x) = 8 + \frac{1}{4}(-24+8-10)x + \frac{1}{8}(8-4+10)x^2$

$$f(x) = 8 - 6.5x + 1.75x^2 \rightarrow f(3) = 8 - 6.5(3) + 1.75(3)^2 \rightarrow \boxed{f(3) = 4.25}$$

(5) از $\rightarrow f(x) = 10 + \frac{1}{4}(8-8+30)x + \frac{1}{8}(8-4+10)x^2$

$$f(x) = 10 + 7.5x + 1.75x^2 \rightarrow f(-1) = 10 - 7.5 + 1.75 \rightarrow \boxed{f(-1) = 4.25}$$

(6) از $\rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{4}(-8+10)x + \frac{1}{8}(8-4+10)x^2$

$$f(x) = 2 + 0.5x + 1.75x^2 \rightarrow f(1) = 2 + 0.5 + 1.75 \rightarrow \boxed{f(1) = 4.25}$$

معادله (4) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$f(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{3x}{2h} + \frac{x^2}{2h^2}\right)}_{N_0(x)} f_0 + \underbrace{\left(\frac{2x}{h} - \frac{x^2}{h^2}\right)}_{N_1(x)} f_1 + \underbrace{\left(-\frac{x}{2h} + \frac{x^2}{2h^2}\right)}_{N_2(x)} f_2 \qquad (7)$$

$$f(x) = N_0(x) f_0 + N_1(x) f_1 + N_2(x) f_2$$

$$N_0(x) = 1 - \frac{3x}{2h} + \frac{x^2}{2h^2} \quad (8/a), \qquad N_1(x) = \frac{2x}{h} - \frac{x^2}{h^2} \quad (8/b)$$

$$N_2(x) = -\frac{x}{2h} + \frac{x^2}{2h^2} \quad (8/c)$$

توابع روابط (8) توابع شکل هستند.

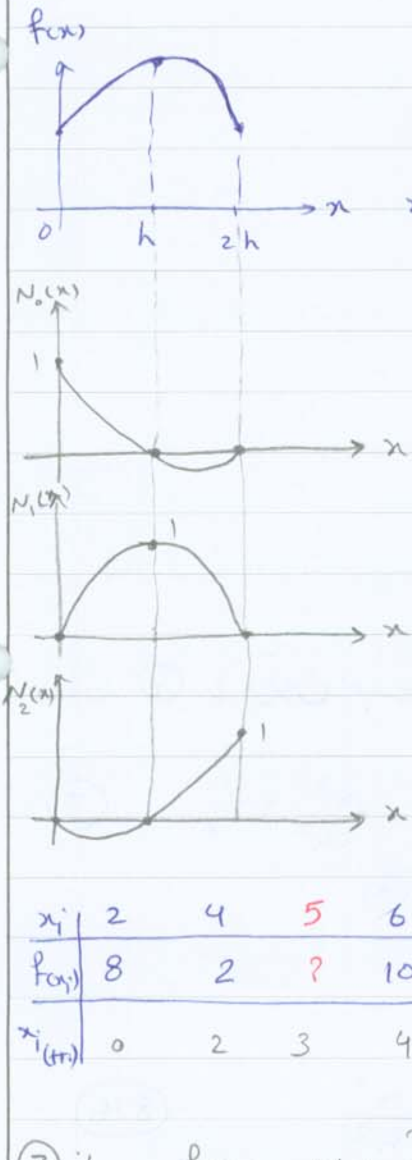
Subject: Date:

خواص (ویژگیهای) توابع شکل :

۱) درجه توابع شکل با درجه تابع درون یاب یکسان است. اگر تابع درون یاب درجه ۳ باشد درجه توابع شکل ۳ می‌شود.

۲) مجموع توابع شکل برابر است با یک. $N_0(x)+N_1(x)+N_2(x)=0$

۳) هر تابع شکل در نقطه خودش یک و در نقاط دیگر برابر صفر است.



بطور مثال: $x=0 \left| \begin{array}{l} N_0=1 \\ N_1=0 \\ N_2=0 \end{array} \right.$, $x=h \left| \begin{array}{l} N_0=0 \\ N_1=1 \\ N_2=0 \end{array} \right.$, $x=2h \left| \begin{array}{l} N_0=0 \\ N_1=0 \\ N_2=1 \end{array} \right.$

مثال: مثال قبل را از حالت پیشرو با توابع شکل بدست بیاورید.

x_i	2	4	5	6
$f(x_i)$	8	2	?	10
$x_{i(\text{تبدیل})}$	0	2	3	4

$$N_0(3)=1-\frac{9}{4}+\frac{9}{8}=\frac{8-18+9}{8}=-\frac{1}{8}$$

$$N_1(3)=\frac{6}{2}-\frac{9}{4}=\frac{12-9}{4}=\frac{3}{4}$$

$$N_2(3)=-\frac{3}{4}+\frac{9}{8}=\frac{-6+9}{8}=\frac{3}{8}$$

⑦ از $\rightarrow f(x)=N_0(x)\overset{8}{f_0}+N_1(x)\overset{2}{f_1}+N_2(x)\overset{10}{f_2}$

$$f(3)=\overset{-1/8}{N_0(3)}(8)+\overset{3/4}{N_1(3)}(2)+\overset{3/8}{N_2(3)}(10)=4.25$$

تمرین: مثال قبل را از حالت پسرو و با توابع شکل بدست آورید.

۹۲/۸/۱۶

جلسه ششم

Difference operators & Difference tables

اپراتورهای تفاضلی و جدولهای تفاضلی

با فرض فواصل مساوی

x_i	x_0	x_1	x_2	---	x_n
f_i	x_0	f_1	f_2	---	f_n

اپراتور تفاضلی پیشرو مرتبه یک ، اپراتور تفاضلی پیشرو مرتبه ۲

Δ: First Forward Difference operator , Second Forward Difference Operator

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0 \qquad , \qquad \Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f_0)$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1 \qquad \Delta^2 f_0 = \Delta(f_1 - f_0)$$

$$\Delta f_2 = f_3 - f_2 \qquad \Delta^2 f_1 = \Delta(f_2 - f_1)$$

$$\boxed{\Delta f_i = f_{i+1} - f_i} \quad ① \qquad \boxed{\Delta^2 f_i = \Delta(f_{i+1} - f_i)} \quad ②$$

بطور کلی: $\boxed{\Delta^n f_i = \Delta^{n-1}(f_{i+1} - f_i)}$ ③

$$\Delta^2 f_i = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \underbrace{\Delta f_{i+1}} - \underbrace{\Delta f_i} \longrightarrow \Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+2} + f_i \quad ④$$

$$(f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i)$$

$$\Delta^3 f_i = \Delta^2(f_{i+1} - f_i) = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i = (f_{i+3} - 2f_{i+2} + f_{i+1}) - (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \Rightarrow \Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i \quad ⑤$$

$$\Delta^4 f_i = \Delta^3(f_{i+1} - f_i) = \Delta^3 f_{i+1} - \Delta^3 f_i = (f_{i+4} - 3f_{i+3} + 3f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i) \Rightarrow \Delta^4 f_i = f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i \quad ⑥$$

فرمول کلی

$$\boxed{\Delta^n f_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} f_{i-k+n}} \qquad (7)$$

بطور مثال برای رابطه ۶ چک می‌کنیم

$n=4$

$$\Delta^4 f_i = \underbrace{(-1)^0 \frac{4!}{0!(4-0)!} f_{i-0+4}}_{k=0} + \underbrace{(-1)^1 \frac{4!}{1!(4-1)!} f_{i-1+4}}_{k=1} + \underbrace{(-1)^2 \frac{4!}{2!(4-2)!} f_{i-2+4}}_{k=2}$$

$$+ \underbrace{(-1)^3 \frac{4!}{3!(4-3)!} f_{i-3+4}}_{k=3} + \underbrace{(-1)^4 \frac{4!}{4!(4-4)!} f_{i-4+4}}_{k=4}$$

جدول تفاضلی پیشرو

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0	$\Delta f_0 = f_1 - f_0$	$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$	$\Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$
x_1	f_1	$\Delta f_1 = f_2 - f_1$	$\Delta^2 f_1 = f_3 - 2f_1 + f_1$	$\Delta^3 f_1 = f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1$
x_2	f_2	$\Delta f_2 = f_3 - f_2$	$\Delta^2 f_2 = f_4 - 2f_3 + f_2$	
x_3	f_3	$\Delta f_3 = f_4 - f_3$		
x_4	f_4			
⋮	⋮			

$$\Rightarrow \Delta^4 f_i = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0$$

مثال: تابع $f(x) = x^2 + x + 1$ را در نظر گرفته و با گام $h=1$ جدول تفاضلی پیشرو را تشکیل دهید.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	
x	x^2+x+1	$2x+2$	2	0	0
$x+1$	x^2+3x+3	$2x+4$	2	0	
$x+2$	x^2+5x+7	$2x+6$	2		
$x+3$	$x^2+7x+13$	$2x+8$			
$x+4$	$x^2+9x+21$				

∇: First Backward Difference Operator — اپراتور تفاضلی پسرو مرتبه اول :

$$\nabla F_i = f_i - f_{i-1} \quad (8)$$

$$\nabla^n f_i = \cancel{f_i}\nabla^{n-1}(f_i - f_{i-1}) \quad (9)$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(f_i - f_{i-1}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2})$$

$$\boxed{\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}} \quad (10)$$

$$\nabla^3 f_i = \nabla^2(f_i - f_{i-1}) = \nabla^2 f_i - \nabla^2 f_{i-1} = (f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) - (f_{i-1} - 2f_{i-2} + f_{i-3})$$

$$\boxed{\nabla^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}} \quad (11)$$

$$\nabla^n f_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} f_{i-k} \quad (12)$$

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
x_0	f_0	$\nabla f_1 = f_1 - f_0$	$\nabla^2 f_2 = f_2 - 2f_1 + f_0$	
x_1	f_1	$\nabla f_2 = f_2 - f_1$		$\nabla^3 f_3 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$
x_2	f_2	$\nabla f_3 = f_3 - f_2$	$\nabla^2 f_3 = f_3 - 2f_2 + f_1$	
x_3	f_3	$\nabla_4 = f_4 - f_3$	$\nabla^2 f_4 = f_4 - 2f_3 + f_2$	$\nabla^3 f_4 = f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1$
x_4	f_4	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

$$\Rightarrow \nabla^4 f_4 = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0$$

shift Operator E

اپراتور انتقال:

$E\, f(x) = f(x+h)$ (13)

$E\, f_i = f_{i+1}$

$E^2 f(x) = ?$

$f(x+2h) = E\, \underbrace{f(x+h)}_{E f(x)} = E^2 f(x)$

$f(x+2h) = E^2 f(x)$

بطور کلی: $f(x+\alpha h) = E^{\alpha} f(x)$ (14)

رابطه بین E و Δ

میدانستیم $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

از تعریف E $\rightarrow f_{i+1} = E f_i$

$\Rightarrow \Delta f_i = E f_i - f_i$

$\Delta f_i = (E-1) f_i$

$\Delta = E - 1$ یا $E = 1 + \Delta$ (15)

رابطه بین E و ∇

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$

$f_i = E f_{i-1}$

از قبل، $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$

از تعریف E $f_i = E f_{i-1} \Rightarrow f_{i-1} = \frac{1}{E} f_i$

$\nabla f_i = f_i - \frac{1}{E} f_i \rightarrow \nabla f_i = (1 - \frac{1}{E}) f_i$

$\rightarrow \nabla = 1 - \frac{1}{E} \Rightarrow E = (1-\nabla)^{-1}$ (16)

 Subject: Date:

Direct Method of evaluating Interpolation. روش مستقیم درون‌یابی

ثابت کردیم: $f(x+\alpha h) = E^{\alpha} f(x)$

$$f(x_i+\alpha h) = E^{\alpha} f(x_i)$$

(15) از رابطه $\xrightarrow{E=1+\Delta}$ $f(x_i+\alpha h) = (1+\Delta)^{\alpha} f(x_i)$

از بسط دوجمله‌ای (نیوتن-خیام)

$$f(x_i+\alpha h) = \left(1+\alpha\Delta+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\Delta^n\right)f(x_i)$$

(17) مهم

Newton's forward difference Interpolating Formula

$(a+b)^{100}$

(16) از رابطه $\xrightarrow{E=(1-\nabla)^{-1}}$ $f(x_i+\alpha h) = (1-\nabla)^{-\alpha} f(x_i)$

$$f(x_i+\alpha h) = \left(1+\alpha\nabla+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}\nabla^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\nabla^n\right)f(x_i)$$

(18) مهم

Newton's Backward difference Interpolating Formula

$f(\underbrace{x_i+\alpha h}_{x}) \rightarrow x = x_i+\alpha h \rightarrow \alpha = \dfrac{x-x_i}{h}$ (19)

مثال:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x_i)$	-2	-1	6	25	62	123	214	341

$f(5.65) = ?$

x_i	$f(x_i)$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	
0	-2	1	6	6	0
1	-1	7	12	6	0
2	6	19	18	6	0
3	25	37	24	6	0
4	62	61	30	6	
5	123	91	36		
6	214	127			
7	341				

جدول تفاضلی پسرو

پیشرو ← رابطه 17

پسرو ← رابطه 18

رابطه 17 $\rightarrow \circledast \; f(x_i+\alpha h) = \left(1+\alpha\Delta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3\right) f(x_i)$

$$\alpha = \frac{x-x_i}{h} \rightarrow \alpha = \frac{5.65-0}{1} = 5.65 \qquad x_i = 0$$

$$\circledast \rightarrow f(5.65) = f(x_i) + \alpha\Delta f(x_i) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f(x_i) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\Delta^3 f(x_i)$$

$$\rightarrow f(5.65) = (-2) + (5.65)(1) + \frac{(5.65)(5.65-1)}{2}(6) + \frac{(5.65)(5.65-1)(5.65-2)}{6}(6)$$

$\Rightarrow f(5.65) = 178.3621 \qquad x_i = 0,\ f(x_i) = -2,\ \Delta f_i = 1,\ \Delta^2 f_i = 6,\ \Delta^3 f_i = 6$

$$x_i = 2 \rightarrow \alpha = \frac{5.65-2}{1} = 3.65$$

$$f(5.65) = (6) + (3.65)(19) + \frac{(3.65)(3.65-1)}{2}(18) + \frac{(3.65)(3.65-1)(3.65-2)}{6}(6)$$

$$\rightarrow f(5.65) = 178.3621$$

برای توابع پیشرو فرمول شماره 18 استفاده می‌شود که در هر حالت جواب یکی است.

در حالت پسرو برای نقطه‌ی اول $\nabla^2 f_i$, $\nabla^3 f_i$ صفر می‌شود.

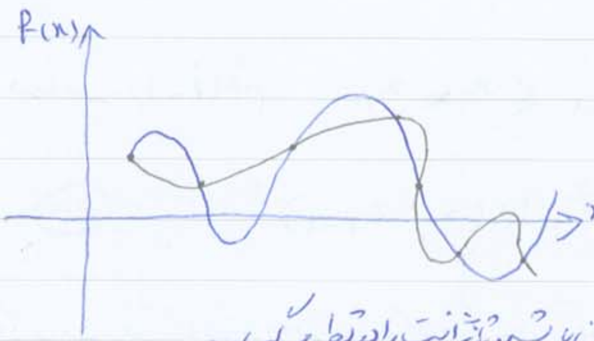
تمرین: مسئله قبل با یک پیشرو دگواره و دوتا پسرو دگواره حل شود.

Spline هزارجاری

نوعی منحنی خاص.

با ۷ نقطه ← منحنی درجه ۶ ← ۷ معادله ۷ ضریب ← مشتق مرتبه ۵ ← ۵ ریشه دارد

۵ اکسترمم دارد.



منحنی های کوچک بدون شکستگی

spline درجه یک (خط) ← دچار شکستگی می شود.

spline درجه دو (منحنی) ← ولی مورد استفاده قرار نمی گیرد.

spline درجه سه ← cubic spline

← دچار شکستگی نمی شوند و شیب دو منحنی در نقاط مورد نظر یکسان باشد. تانژانت را در نظر می گیریم.

Cubic Spline ← spline درجه سه.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.6	0.2	0.6	3	0.6	0.2	0.6

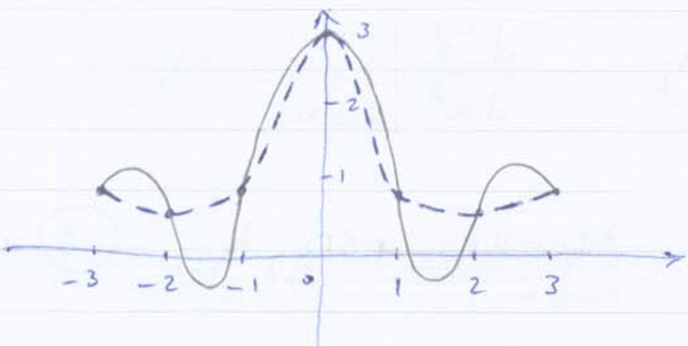
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$$

از قسمت اولیه ۷ معادله و ۷ مجهول به فرم معادله زیر می بینیم که باید به دست آورید.

(چون توان های فرد ندارد)

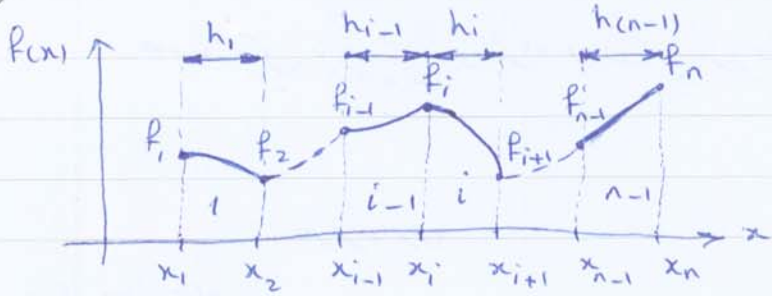
$$f(x) = \frac{1}{150}\left(450 - 481x^2 + 130x^4 - 9x^6\right)$$

تابع زوج است نسبت به y متقارن است.



۶ منحنی کاملاً مستقل که در یک نقطه شکن به هم می رسند.

Subject: Date:



Spline درجه ۳ .

فرم کلاسیک

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

در ناحیه (i-1) ام : $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$

$$f(x) = A + B(x - x_{i-1}) + C(x - x_{i-1})^2 + D(x - x_{i-1})^3 \qquad (20)$$

اگر ضرب و تقسیم انجام دهیم به فرم کلاسیک در می‌آید.

$$f(x) = A_{i-1} + B_{i-1}(x - x_{i-1}) + C_{i-1}(x - x_{i-1})^2 + D_{i-1}(x - x_{i-1})^3$$ (۴ معادله و ۴ ضریب مجهول داریم)

$$\rightarrow f_{i-1} = A_{i-1} \qquad (21) \ *$$

$$f_i = A_{i-1} + B_{i-1}\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{h_{i-1}} + C_{i-1}\overbrace{(x_i - x_{i-1})^2}^{h_{i-1}^2} + D_{i-1}\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{h_{i-1}^3} \qquad (22) \ *$$

(20) از $\rightarrow \quad \dfrac{df}{dx} = B_{i-1} + 2C_{i-1}(x - x_{i-1}) + 3D_{i-1}(x - x_{i-1})^2 \qquad (23)$

$$\dfrac{d^2f}{dx^2} = 2C_{i-1} + 6D_{i-1}(x - x_{i-1}) \qquad (24)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = M \quad , \quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i} = M_i \quad , \quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_{i-1}} = M_{i-1}$$

$$M_{i-1} = 2C_{i-1} \qquad (25) \ * \quad , \quad M_i = 2C_{i-1} + 6D_{i-1}h_{i-1} \qquad (26) \ *$$

از معادله های * یک مجهول بدست می‌آید.

$$A_{i-1} = f_{i-1} \qquad 27/a$$

$$B_{i-1} = \frac{1}{h_{i-1}}(f_i - f_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{6}(M_i + 2M_{i-1}) \qquad 27/b$$

$$C_{i-1} = \frac{1}{2}M_{i-1} \qquad 27/c$$

$$D_{i-1} = \frac{1}{6h_{i-1}}(M_i - M_{i-1}) \qquad 27/d$$

M ها را نداریم و باید بدست آوریم ← اگر M ها را داشته باشیم ضرایب مجهول بدست می‌آید. در معادله 20 می‌گذاریم ← spline بدست می‌آید.

همین مراحل را برای ناحیه کناری انجام می‌دهیم.

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه } i \text{ ام}} \quad f(x) = A_i + B_i(x-x_i) + C_i(x-x_i)^2 + D_i(x-x_i)^3 \qquad (28)$$

$x_i \le x \le x_{i+1}$

همان روابط 27 را در نظر می‌گیریم و جایگزین می‌کنیم.

$i-1 \to i$

$i \to i+1$

$$A_i = f_i \qquad 29/a$$

$$B_i = \frac{1}{h_i}(f_{i+1} - f_i) - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} + 2M_i) \qquad 29/b$$

$$C_i = \frac{1}{2}M_i \qquad 29/c$$

$$D_i = \frac{1}{6h_i}(M_{i+1} - M_i) \qquad 29/d$$

از معادله 28 مشتق می‌گیریم.

$$\frac{df}{dx} = B_i + 2C_i(x-x_i) + 3D_i(x-x_i)^2 \qquad (30)$$

Subject: Date:

clips

(23) $\Big|_{x=x_i}$ = (30) $\Big|_{x=x_i}$ مشتقات باید باهم برابر باشند تا دو منحنی در نقطه اتصال دچار شکستگی نشود.

$$B_{i-1} + 2C_{i-1}h_{i-1} + 3D_{i-1}h_{i-1}^2 = B_i$$

$B_{i-1} \downarrow 27/b$, $C_{i-1} \downarrow 27/c$, $D_{i-1} \downarrow 27/d$, $B_i \downarrow 29/b$

(31)

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)M_i + h_iM_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1}}f_{i-1} - 6\left(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}\right)f_i + \frac{6}{h_i}f_{i+1}$$

در این رابطه از $i=1$ نمی توانیم استفاده کنیم، $i=2$ را به بعد قرار می دهیم و برای $n+1$ قابل استفاده نیست.

$i=2,\dots,n-1 \rightarrow$ $n-2$ معادله پیدا می کنیم

$i=2 \leftarrow M_1, M_2$ و M_3 ظاهر می شود.

$i=n-1 \leftarrow M_n, M_{n-1}$ و M_{n-2} ظاهر می شود.

پس کلاً n مجهول داریم $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$

(*) دو معادله کم داریم برای بدست آوردن جواب پس قرار می دهیم.

راه الف)

$M_1=0$ (32)

$M_n=0$ (33)

n معادله $\leftarrow$ n مجهول $\leftarrow$ حل می کنیم $\leftarrow$ M بدست می آید $\leftarrow$ در روابط 27 می گذاریم $\leftarrow$ معادله $\leftarrow$ spline

راه ب)

$M_1=M_2$ (34)

$M_n=M_{n-1}$ (35)

راه ج) با چهار نقطه اول یک چندجمله ای درجه ۳ می سازیم.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

چهار نقطه را قرار می دهیم و ۴ ضریب بدست می آید.

از این معادله

$$\frac{df}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

$$M = \frac{d^2 f}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3 x \quad , \quad M_1 = 2a_2 + 6a_3 x_1 \qquad (36)$$

از این معادله فقط برای نقطه شروع استفاده می‌کنیم تا M_1 بدست آید. نباید با spline اشتباه شود.

با چهار نقطه آخر یک چند جمله‌ای رابطه 37 را می‌سازیم.

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

از راه ج استفاده کنیم بهتر است.

$$M_n = 2b_2 + 6b_3 x_n \qquad (37)$$

۹۲/۸/۳۰

جلسه هشتم

مثال:

تمام h ها یک است

$h=1$

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.6	0.2	0.6	3	0.6	0.2	0.6

معادله 31 را بکار می‌بریم

$$h_{i-1} M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) M_i + h_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1}} f_{i-1} - 6\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right) f_i + \frac{6}{h_i} f_{i+1}$$

از رابطه (31):

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = 6f_{i-1} - 12f_i + 6f_{i+1}$$

$$i=2 \longrightarrow M_1 + 4M_2 + M_3 = 6f_1 - 12f_2 + 6f_3$$
$$i=3 \longrightarrow M_2 + 4M_3 + M_4 = 6f_2 - 12f_3 + 6f_4$$
$$i=4 \longrightarrow M_3 + 4M_4 + M_5 = 6f_3 - 12f_4 + 6f_5$$
$$i=5 \longrightarrow M_4 + 4M_5 + M_6 = 6f_4 - 12f_5 + 6f_6$$
$$i=6 \longrightarrow M_5 + 4M_6 + M_7 = 6f_5 - 12f_6 + 6f_7$$

۵ مجهول ← جواب بالا را از فصل اول بدست می‌آوریم.

Subject: Date:

راه حل الف)

$$\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_7 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} M_2 &= -0.1846 \\ M_3 &= 5.5385 \\ M_4 &= -9.902 \\ M_5 &= 5.5386 \\ M_6 &= -0.1846 \end{aligned}$$

چون تابع زوج است M ها متقارن بدست آمده‌اند.

از روابط 27

$$i=2 \begin{cases} A_1 = f_1 \\ B_1 = (f_2 - f_1) - \frac{1}{6}(M_2 + 2M_1) \\ C_1 = \frac{1}{2} M_1 \\ D_1 = \frac{1}{6}(M_2 - M_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0.6 \\ B_1 = 0.2 - 0.6) - \frac{1}{6}(-0.1846 + 0) \\ \quad = -0.3692 \\ C_1 = 0 \\ D_1 = \frac{1}{6}(-0.1846 - 0) = -0.0308 \end{cases}$$

معادله 20 $\xrightarrow{i=2} f(x) = 0.6 - 0.3692(x+3) + 0 - 0.0308(x+3)^3 \quad -3 \leq x \leq -2$

یک spline بدست آمده برای 5 ناحیه دیگر بدست می‌آوریم

$$f_i = A_{i-1} + B_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + C_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + D_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$

از $i=3$ تا $i=7$ را در رابطه 20 قرار می‌دهیم و بقیه ۶ تا spline را پیدا می‌کنیم. $i=1$ مقادیر صفر می‌شود.

تمرین: الف) مثال قبل را ادامه دهید.

ب) از روش ب حل می‌کنیم. $\begin{cases} M_1 = M_2 \\ M_7 = M_6 \end{cases}$ از رابطه 34 و 35

ج) از راه حل (ج) حل می‌کنیم. از رابطه 36 و 37

f_1, f_2, f_3, f_4 را در راه حل ج قرار داده‌ایم ← برای h های مساوی

$$M_1 = \frac{1}{h^2}(2f_1 - 5f_2 + 4f_3 - f_4) \qquad (38)$$

$$M_n = \frac{1}{h^2}(-f_{n-3} + 4f_{n-2} - 5f_{n-1} + 2f_n) \qquad (39)$$

حالت خاص روابط 36 و 37 که فواصل نقاط با هم برابر است با h.

Subject: Date:

د) تمام منحنی های اول، الف و ب و ج حل می‌کنیم ← ۴ منحنی (اولی نقطه یکی است) ← هر منحنی ۶ تا spline دارد که توسط توسط نرم افزار Excel و ... رسم شده است.

چندجمله‌ای درون یاب برای فواصل نابرابر:

چندجمله‌ای

Interpolating polynomials for uneven Intervals

n+1 نقطه ← چندجمله‌ای درجه n ← (n+1 معادله ، n+1 مجهول)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

از چندجمله‌ای لاگرانژ استفاده می‌کنیم ← مشکل قله‌های منحنی رفع می‌شود.

$$f(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + \cdots + L_n(x) f(x_n) \quad (40)$$

تابع لاگرانژ ← تابع دلخواه برحسب x

تابع از تمام نقاط می‌گذرد پس تمام نقاط در آن صدق می‌کند.

$$f(x_0) = \underbrace{L_0(x_0)}_{1} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_0)}_{0} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_0)}_{0} f(x_2) + \cdots + \underbrace{L_n(x_0)}_{0} f(x_n)$$

$$f(x_1) = \underbrace{L_0(x_1)}_{0} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_1)}_{1} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_1)}_{0} f(x_2) + \cdots + \underbrace{L_n(x_1)}_{0} f(x_n)$$

$$f(x_2) = \underbrace{L_0(x_2)}_{0} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_2)}_{0} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_2)}_{1} f(x_2) + \cdots + \underbrace{L_n(x_2)}_{0} f(x_n)$$

$$\vdots$$

* هرجا اندیس ها برابر بود مقدار آن برابر یک است و هرجا یکی نبود مقدار آن صفر است.

$$f(x_n) = \underbrace{L_0(x_n)}_{0} f(x_0) + \underbrace{L_1(x_n)}_{0} f(x_1) + \underbrace{L_2(x_n)}_{0} f(x_2) + \cdots + \underbrace{L_n(x_n)}_{1} f(x_n)$$

Subject: Date:

از تعریف تابع لاگرانژ داریم

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad (41)$$

توابع لاگرانژ را چطور بنویسیم تا این خاصیت را داشته باشد.

مثال:

x	0	3	7	8
$f(x)$	2	4	19	28

$f(5) = ?$

۴ نقطه ← چند جمله‌ای درجه ۳ ← از لاگرانژ زودتر می‌رسیم.

از رابطه (40)

$$f(x) = L_0(x)\underbrace{f(x_0)}_{2} + L_1(x)\underbrace{f(x_1)}_{4} + L_2(x)\underbrace{f(x_2)}_{19} + L_3(x)\underbrace{f(x_3)}_{28}$$

x تبدیل به x_0 ← ۱ و x تبدیل به x_1، x_2 و x_3 صفر شه.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad , \quad L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

تابع درجه ۳ است.

$$f(5) = L_0(5)(2) + L_1(5)(4) + L_2(5)(19) + L_3(5)(28)$$

$L_0(5) = ? \rightarrow$

$L_1(5) = ?$

$L_2(5) = ?$

$L_3(5) = ?$

$$L_0(5) = \frac{(5-3)(5-7)(5-8)}{(0-3)(0-7)(0-8)} = \frac{(\cancel{2})(-2)(-3)}{(-3)(-7)(\cancel{-8})_{+2}} = \frac{-1}{14}$$

$$L_1(5) = \frac{(5-0)(5-7)(5-8)}{(3-0)(3-7)(3-8)} = \frac{(\cancel{5})(\cancel{-2})(\cancel{-3})}{(\cancel{3})(\cancel{-4})_{2}(\cancel{-5})} = \frac{1}{2}$$

$$L_2(5) = \frac{(5-0)(5-3)(5-8)}{(7-0)(7-3)(7-8)} = \frac{(5)(\cancel{2})(-3)}{(7)(\cancel{4})_{2}(-1)} = \frac{15}{14}$$

$$L_3(5) = \frac{(5-0)(5-3)(5-7)}{(8-0)(8-3)(8-7)} = \frac{(\cancel{5})(2)(-2)}{(\cancel{8})_{2}(\cancel{5})(1)} = -\frac{1}{2}$$

مجموع Lها باید برابر یک شود

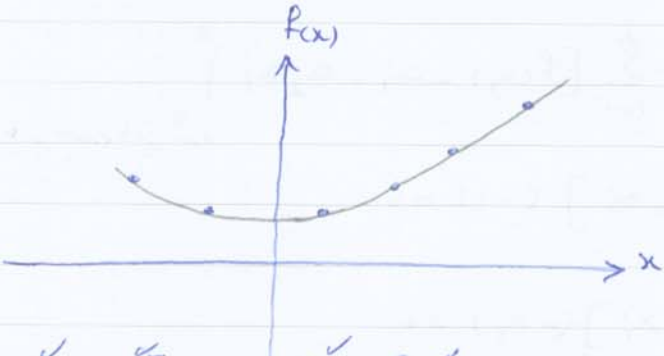
از (40)

$$f(5) = -\frac{1}{\cancel{14}_7}(\cancel{2}) + \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{4}^{2}) + 19\left(\frac{15}{14}\right) - \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{28}^{14}) = 8.2143$$

توابع لاگرانژ همان توابع شکل هستند با همان خصوصیات

تمرین: مثال شکل را به عنوان تمرین ادامه می‌دهیم.

فصل چهارم: Curve Fitting (Regression)



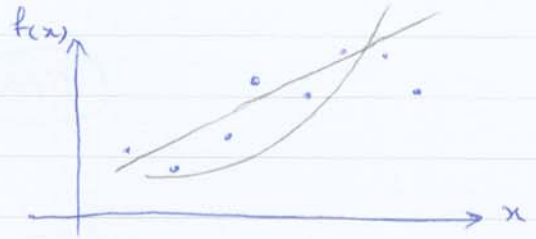
از همه نقاط نمی‌گذرد اما کمترین خطا است

ممکن است از هیچ یک از نقاط نگذرد.

با توجه به رفتار نقاط ← خط، معادله درجه دو، منحنی sin و cos و لگاریتمی می‌گذاریم و بعد انتگرال می‌گیریم.

اگر خط بگذاریم بهترین خط را می‌گذاریم. بی‌نهایت خط می‌توانیم بگذاریم ولی بهترین را انتخاب می‌کنیم.

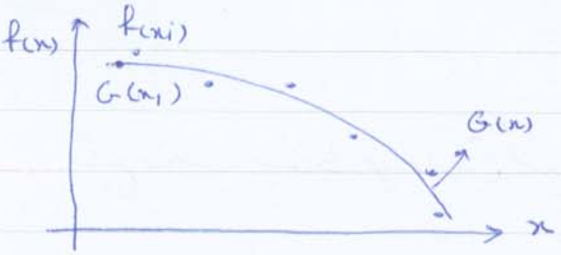
جلسه نهم — ۹۲/۹/۲۱



x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$		$f(x_n)$

$$G(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + a_3 g_3(x) + \cdots + a_m g_m(x) \quad (1)$$

معادله خط

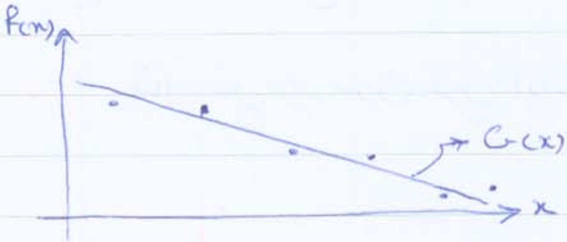


$$D = \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i) - G(x_i) \right] \quad (2)$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial D}{\partial a_2} = 0 \\ \dfrac{\partial D}{\partial a_3} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial D}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{cases}$$

Subject: Date:

Linear Regression



$$G(x) = a_1 + a_2 x \qquad (4)$$

$$g_1(x) = 1 , \quad g_2(x) = x$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i) - G(x_i) \right]^2 \quad , \quad D = \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i) - a_1 - a_2 x_i \right]^2$$

باید مینیمم شود

$$\frac{\partial D}{\partial a_1} = 0 \Longrightarrow 2 \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i) - a_i - a_2 x_i \right](-1) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_2} = 0 \longrightarrow 2 \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i) - a_1 - a_2 x_i \right](-x_i) = 0$$

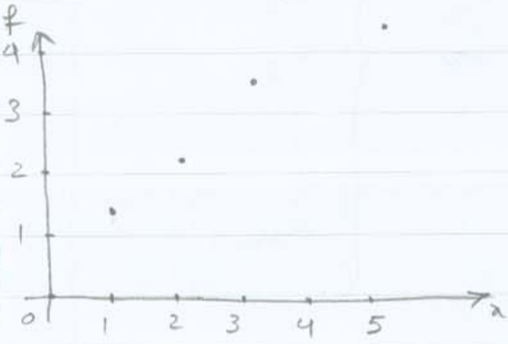
$$\longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i) - a_1 - a_2 x_i \right] = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i) - a_1 - a_2 x_i \right](x_i) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} f_i = N a_1 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} f_i x_i = a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\sum f_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum f_i x_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} & (5/a) \\[2ex] a_2 = \dfrac{N \sum f_i x_i - \sum x_i \sum f_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} & (5/b) \end{cases}$$

مقادیر a_1 و a_2 را در فرمول 4 می‌گذاریم تا $G(x)$ بدست آید.

مثال. تابع مناسب به نقاط زیر برازش کنید.

x_i	0	1	2	3	5
f_i	0	1.4	2.2	3.5	4.4



x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	
0	0	0	0	
1	1.4	1.4	1	
2	2.2	4.4	4	
3	3.5	10.5	9	
5	4.4	22	25	
$\Sigma =$	11	11.5	38.3	39

5/a از $\longrightarrow \quad a_1 = \dfrac{(11.5)(39)-(11)(38.3)}{5(39)-(11)^2} = 0.368$

5/b از $\longrightarrow \quad a_2 = \dfrac{5(38.3)-(11)(11.5)}{5(39)-(11)^2} = 0.878$

$\Rightarrow \boxed{G(x) = 0.368 + 0.878x}$

Linearization

برای توابعی که خطی نیستند باید آنها را معادل سازی کنیم

$$G(x) = a_1 x^{a_2} \qquad (6)$$

a_2 از 10/b ، a_1 از (11)

از طرفین Ln می‌گیریم

$$\ln(G) = \ln a_1 + a_2 \ln x \qquad (7)$$

اگر

$$\left.\begin{aligned} \bar{G} &= \ln G \\ \bar{a}_1 &= \ln a_1 \\ \bar{x} &= \ln x \end{aligned}\right\} (8) \Rightarrow \bar{G} = \bar{a}_1 + a_2 \bar{x} \qquad (9)$$

(*) $\bar{a}_1 = \ln a_1 \longrightarrow a_1 = e^{\bar{a}_1}$ (11)

$$\bar{f} = \ln f$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_1 = \dfrac{\sum \bar{f}_i \sum \bar{x}_i^2 - \sum \bar{x}_i \sum \bar{f}_i \bar{x}_i}{N \sum \bar{x}_i^2 - (\sum \bar{x}_i)^2} & 10/a \\[2ex] \bar{a}_2 = \dfrac{N \sum \bar{f}_i \bar{x}_i - \sum \bar{x}_i \sum \bar{f}_i}{N \sum \bar{x}_i^2 - (\sum \bar{x}_i)^2} & 10/b \end{cases}$$

Nonlinear Regression

$$G(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \qquad (12)$$

$g_1(x) = 1, \; g_2(x) = x, \; g_3(x) = x^2 \leftarrow$ از (1)

[روش حداقل مربعات — Least Square Method]

$$D = \sum_{i=1}^{N} [f_i - G_i]^2$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} [f_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2]^2$$

باید Min. شود.

Subject: Date:

$$\frac{\partial D}{\partial a_1} = 0 \longrightarrow 2\sum_{i=1}^{N}\left[f_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2\right](-1) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_2} = 0 \longrightarrow 2\sum_{i=1}^{N}\left[f_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2\right](-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_3} = 0 \longrightarrow 2\sum_{i=1}^{N}\left[f_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2\right](-x_i^2) = 0$$

$$\begin{cases} \sum f_i = N a_1 + a_2 \sum x_i + a_3 \sum x_i^2 \\ \sum f_i x_i = a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + a_3 \sum x_i^3 \\ \sum f_i x_i^2 = a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + a_3 \sum x_i^4 \end{cases} \qquad (13)$$

مقادیر a_1 ، a_2 ، a_3 بدست آمده را در رابطه (12) گذاشته تا $G(x)$ بدست آید.

تمرین: مختصات نقاط از یک تپه بصورت زیر بدست آمده اند. معادله این تپه را مشخص کنید. (با برازش درجه ۲)

x_i [m]	0	100	200	300	400	500	600	700	800
f_i [m]	4	5	10	17	21	16	11	3	1

Orthogonal polynomials for equal intervals توابع متعامد

$$\sum_{i=1}^{N} P_k(x_i)\, P_L(x_i) = 0 \quad : k \neq L \qquad (14)$$ یادآوری از توابع متعامد

$$G(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x) + \cdots + A_m P_m(x) \qquad (15)$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left[f_i - G_i \right]^2$$

مینیمم باید شود.

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left[f_i - A_0 P_0(x_i) - A_1 P_1(x_i) - A_2 P_2(x_i) - \cdots - A_m P_m(x_i) \right]^2$$

(طبق (14) $k \neq L$)

$$\frac{\partial D}{\partial A_0} = 0 \Rightarrow \sum f(x_i) P_0(x_i) = A_0 \sum P_0^2(x_i) + A_1 \underbrace{\cancel{\sum P_1(x_i) P_0(x_i)}}_{0} + A_2 \cancel{\sum P_2(x_i) P_0(x_i)}^{0}$$

$$+ \cdots + A_m \cancel{\sum P_m(x_i) P_0(x_i)}^{0}$$

$$\frac{\partial D}{\partial A_1} = 0 \Rightarrow \sum f(x_i) P_1(x_i) = A_0 \cancel{\sum P_0(x_i) P_1(x_i)}^{0} + A_1 \sum P_1^2(x_i) + A_2 \cancel{\sum P_2(x_i) P_1(x_i)}^{0}$$

$$+ \cdots + A_m \cancel{\sum P_m(x_i) P_1(x_i)}^{0}$$

$$\frac{\partial D}{\partial A_m} = 0 \Rightarrow \sum f(x_i) P_m(x_i) = A_0 \cancel{\sum P_0(x_i) P_m(x_i)}^{0} + A_1 \cancel{\sum P_1(x_i) P_m(x_i)}^{0} + A_2 \cancel{\sum P_2(x_i) P_m(x_i)}^{0}$$

$$+ \cdots + A_m \sum P_m^2(x_i)$$

(16)

$$A_0 = \frac{\sum f(x_i) P_0(x_i)}{\sum P_0^2(x_i)}, \quad A_1 = \frac{\sum f(x_i) P_1(x_i)}{\sum P_1^2(x_i)}, \quad \ldots \quad A_m = \frac{\sum P(x_i) P_m(x_i)}{\sum P_m^2(x_i)}$$

مقادیر A_1 ، A_2 ، ... ، A_m را بدست آورده در رابطه (15) گذاشته تا $G(x)$ بدست آید.

Subject: جلسه دهم Date: ۹۲,۹,۲۱

Gram Polynomials

توابع گرام:

$$P_m(\alpha)=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\frac{1}{r!\,r!}\,\frac{(m+r)!}{(m-r)!}\,\frac{(N-r-1)!}{(N-1)!}\,\frac{\alpha!}{(\alpha-r)!} \qquad (17)$$

m : مرتبه چند جمله‌ای گرام

بطوریکه: $\alpha=\dfrac{x-x_0}{h}$

$$m=0 \Rightarrow P_0(\alpha)=(-1)^0\frac{1}{0!\,0!}\,\frac{(0+0)!}{(0-0)!}\,\frac{(N-0-1)!}{(N-1)!}\,\frac{\alpha!}{(\alpha-0)!} \Rightarrow P_0(\alpha)=1$$

$$m=1 \Rightarrow P_1(\alpha)=\underbrace{\left[(-1)^0\frac{1}{0!\,0!}\,\frac{(1+0)!}{(1-1)!}\,\frac{(N-0-1)!}{(N-1)!}\,\frac{\alpha!}{(\alpha-0)!}\right]}_{r=0}+\underbrace{\left[(-1)^1\frac{1}{1!\,1!}\,\frac{(1+1)!}{(1-1)!}\,\frac{(N-1-1)!}{(N-1)!}\right.}_{r=1}$$

$$\left.\times\frac{\alpha!}{(\alpha-1)!}\right] \Rightarrow \boxed{P_1(\alpha)=1-\frac{2\alpha}{N-1}}$$

$$m=2 \Rightarrow P_2(\alpha)=\underbrace{\left[(-1)^0\frac{1}{0!\,0!}\,\frac{(2+0)!}{(2-0)!}\,\frac{(N-0-1)!}{(N-1)!}\,\frac{\alpha!}{(\alpha-0)!}\right]}_{r=0}+\underbrace{\left[(-1)^1\frac{1}{1!\,1!}\,\frac{(2+1)!}{(2-1)!}\,\frac{(N-1-1)!}{(N-1)!}\,\frac{\alpha!}{(\alpha-1)!}\right]}_{r=1}$$

$$+\underbrace{\left[(-1)^2\frac{1}{2!\,2!}\,\frac{(2+2)!}{(2-2)!}\,\frac{(N-2-1)!}{(N-1)!}\,\frac{\alpha!}{(\alpha-2)!}\right]}_{r=2} \Rightarrow \boxed{P_2(\alpha)=1-\frac{6\alpha}{N-1}+\frac{6\alpha(\alpha-1)}{(N-1)(N-2)}}$$

بهمین ترتیب P_3 و P_4 و ... و P_m را بدست می‌آوریم.

مثال: با استفاده از توابع گرام یک تابع درجه ۲ به اطلاعات فوق برازش کنید.

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
f_i	1	3	6	10	18	24	35

$$G(x)=A_0P_0(x)+A_1P_1(x)+A_2P_2(x)$$

$$P_0(\alpha)=1\ ,\quad P_1(\alpha)=1-\frac{2\alpha}{7-1}\Rightarrow P_1(\alpha)=1-\frac{\alpha}{3}\ ,\quad P_2(\alpha)=1-\frac{6\alpha}{6}+\frac{6\alpha(\alpha-1)}{(6)(5)}$$

$$\Rightarrow P_2(\alpha)=1-\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{5}\ ,\qquad \alpha=\frac{x-\overset{0}{x_0}}{\underset{0.5}{h}}\Rightarrow \boxed{\alpha=2x}$$

x	f	α	P_0	P_1	P_2	fP_0	P_0^2	fP_1	P_1^2	fP_2	P_2^2
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.5	3	1	1	$\frac{2}{3}$	0	3	1	2	$4/9$	0	0
1	6	2	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	6	1	2	$1/9$	$-18/5$	$9/25$
1.5	10	3	1	0	$-\frac{4}{5}$	10	1	0	0	-8	$16/25$
2	18	4	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	18	1	-6	$1/9$	$-54/5$	$9/25$
2.5	24	5	1	$-\frac{2}{3}$	0	24	1	-16	$4/9$	0	0
3	35	6	1	-1	1	35	1	-35	1	35	1
						$\Sigma=97$	$\Sigma=7$	$\Sigma=-52$	$\Sigma=3.11$	$\Sigma=13.6$	$\Sigma=3.36$

از روابط ۱۶ مقادیر A_0 ، A_1 و A_2 را بدست می‌آوریم و در G می‌گذاریم.

$$A_0=\frac{\sum_{i=1}^{7} f(x_i)\,P_0(x_i)}{\sum_{i=1}^{7} P_0^2(x_i)}=\frac{97}{7}=13.857\ ,\quad A_1=\frac{\sum_{i=1}^{7} f(x_i)\,P_1(x_i)}{\sum_{i=1}^{7} P_1^2(x_i)}=\frac{-52}{3.11}=-16.714$$

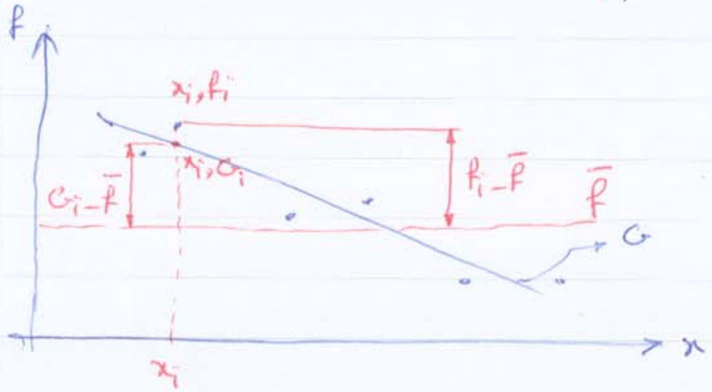
$$A_2=\frac{\sum_{i=1}^{7} f(x_i)\,P_2(x_i)}{\sum_{i=1}^{7} P_2^2(x_i)}=\frac{13.6}{3.36}=4.048$$

$$G=13.857(1)-16.714\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)+4.048\left(1-\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{5}\right)\ ,\quad \alpha=2x$$

$$\Rightarrow \boxed{G=1.191+1.4274\,x+3.2384\,x^2}$$

Goodness of functional approximation

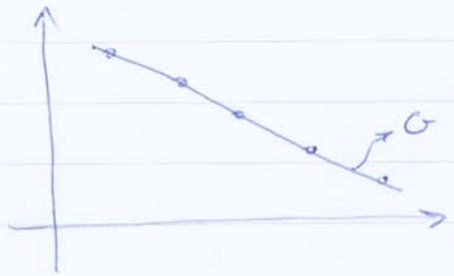
معیار گودنس



$$\bar{f}=\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i}{N}$$

$$\boxed{R^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(G_i-\bar{f})^2}{\sum_{i=1}^{N}(f_i-\bar{f})^2}}\qquad (18)$$

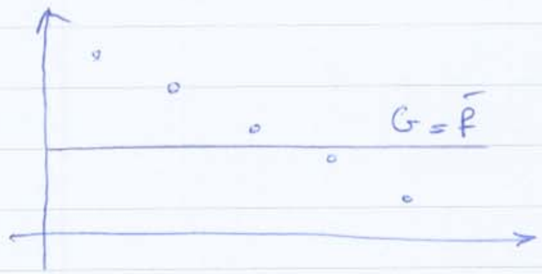
ایده‌آل‌ترین حالت



$R^2 = 1$

(Perfect Correlation)

بدترین حالت



$R^2 = 0$

(No Correlation)

پس مقدار R^2 باید بین دو حالت ایده‌آل و بدترین حالت باشد.

$$0 < R^2 < 1$$

مثال: مثال قبل را با توجه به معیار گودنس حل کنید.

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
f_i	1	3	6	10	18	24	35
G_i	1.191	2.71	5.86	10.62	17	25	34.62

$$\bar{f} = \frac{1+3+6+10+18+24+35}{7} = 13.86$$

$$\sum_{i=1}^{7} (G_i - \bar{f})^2 = (1.191 - 13.86)^2 + (2.71 - 13.86)^2 + (5.86 - 13.86)^2 + \cdots + (34.62 - 13.86)^2 = 924.29$$

$$\sum_{i=1}^{7} (f_i - \bar{f})^2 = (1 - 13.86)^2 + (3 - 13.86)^2 + (6 - 13.86)^2 + \cdots + (35 - 13.86)^2 = 926.86$$

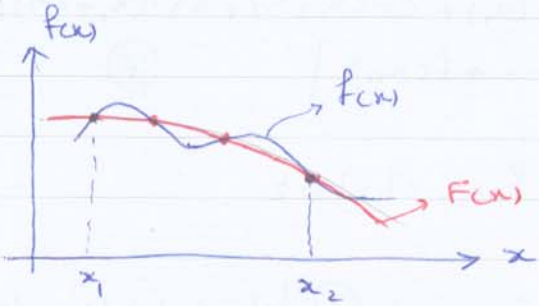
$$\Rightarrow R^2 = \frac{924.29}{926.86} = 0.9972 \Rightarrow 99.72\%$$

تمرین: همین مثال را با تابع درجه دو $G(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ برازش کرده و Goodness آن را تعیین کنید.

جلسه یازدهم ۹۲/۹/۲۱

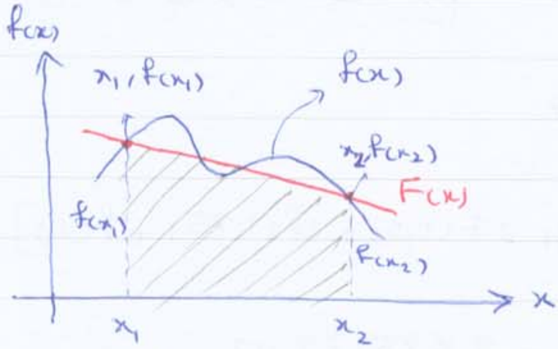
فصل پنجم Numerical Integration

مقدمه



$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

قانون ذوزنقه Trapezoidal Rule



$$I = \int_{x_1} f(x)\,dx \quad (1)$$

$$I \simeq \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx \quad (2)$$

$$F(x) = a_0 + a_1 x \quad (3)$$

$$I \simeq \int_{x_1}^{x_2} (a_0 + a_1 x)\,dx \longrightarrow I \simeq a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$I \simeq a_0 (x_2 - x_1) + \frac{a_1}{2} (x_2^2 - x_1^2) \quad (4)$$

از رابطه ③

$$\begin{cases} f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 \\ f(x_2) = a_0 + a_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{x_2 - x_1} \left[x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) \right] \\ a_1 = \dfrac{1}{x_2 - x_1} \left[-f(x_1) + f(x_2) \right] \end{cases} \quad (5)$$

$$I \simeq \frac{1}{2} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{h} \left[f(x_1) + f(x_2) \right] \quad (6)$$

مقادیر a_0 و a_1 را در رابطه ④ می‌گذاریم که به آن قانون ذوزنقه می‌گوییم. Trapezoidal Rule

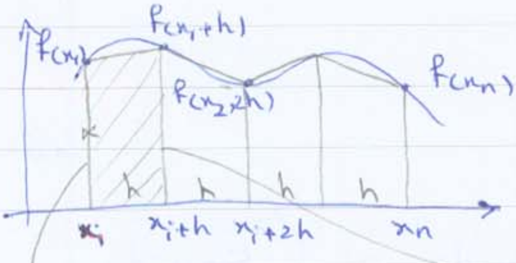
Subject: Date:

مثال:

$$I=\int_1^2 \underbrace{e^{x}}_{f(x)}\,dx \longrightarrow I=e^{x}\Big|_1^2=e^2-e^1=4.670774270$$

⑥ از: $\longrightarrow h=2-1=1 \longrightarrow I\simeq \frac{1}{2}(1)\left[e^1+e^2\right]=5.053668964$

برای کم کردن خطا می‌توان تعداد ذوزنقه‌ها را زیاد کرد و با هم جمع کرد.



$$I\simeq\frac{h}{2}\left[f(x_1)+2f(x_1+h)+2(f(x_1+2h)+\cdots+f(x_n)\right] \quad ⑦$$

$\frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_1+h)\right]$ $\quad$ $\frac{h}{2}\left[f(x_1+h)+f(x_1+2h)\right]\doteq 2$

برای مثال قبل از رابطه ⑦ داریم: $h=0.5$

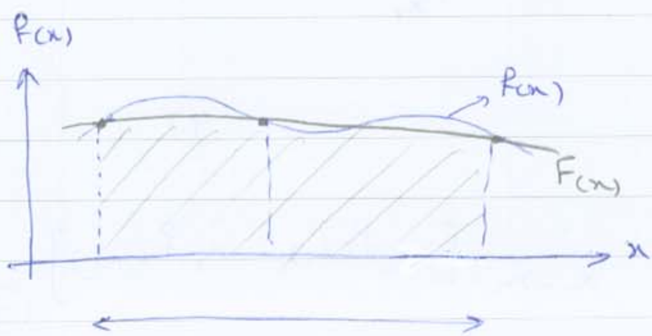
$$I\simeq\frac{0.5}{2}\left[f(1)+2f(1.5)+f(2)\right]$$

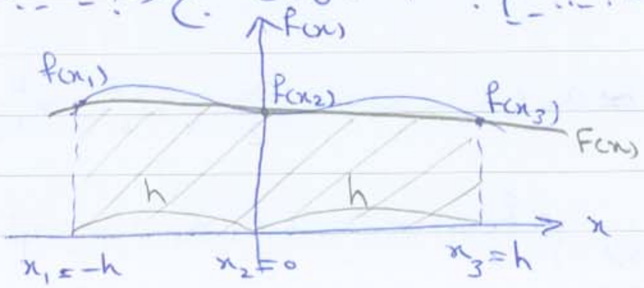
$$I\simeq\frac{0.5}{2}\left[e^1+2e^{1.5}+e^2\right]=4.767679017$$

$$h=0.25 \longrightarrow I\approx\frac{0.25}{2}\left[f(1)+2f(1.25)+2f(1.5)+2f(1.75)+f(2)\right]$$

$$I\approx\frac{0.25}{2}\left[e^1+2e^{1.25}+2e^{1.5}+2e^{1.75}+e^2\right]=4.695075917$$

حال باید ببینیم با سه نقطه می‌توان تابع درجه ۲ ایجاد کرد.





$$I=\int f(x)\,dx\simeq\int F(x)\,dx \quad , \quad F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \quad ⑧$$

قانون سیمسون

(Simpson's Rule)

$$\begin{cases} f(x_1) = a_0 + a_1(-h) + a_2(-h)^2 \\ f(x_2) = a_0 \\ f(x_3) = a_0 + a_1(h) + a_2(h)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{cases}$$

$$I \simeq \int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 \Big|_{-h}^{h}$$

هرعددی بین از h تا $-h$

$$\boxed{I \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\right]} \quad (9)$$

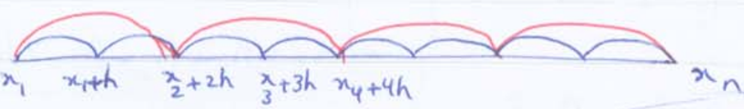
مثال: مسئله قبل را از قانون سیمسون حل کنید.

$$I = \int_1^2 e^x\,dx \xrightarrow{\text{از رابطه (9) داریم}} I \simeq \frac{0.5}{3}\left[f(1) + 4f(1.5) + f(2)\right]$$

$$I \simeq \frac{0.5}{3}\left[e^1 + 4e^{1.5} + e^2\right] = 4.67234903$$

با حل دقیق آن جواب برابر 4.670774270 بدست می‌آید.

می‌توان برای حل دقیق‌تر سه نقطه را باهم گرفت و سپس باهم جمع کرد.



$$I \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 4f(x_1+h) + 2f(x_1+2h) + 4f(x_1+3h) + 2f(x_1+4h) + \cdots + f(x_n)\right] \quad (10)$$

$h = 0.25$

برای مثال قبل از رابطه (10) داریم.

$$I \simeq \frac{0.25}{3}\left[f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)\right]$$

Subject: Date:

$$I \simeq \frac{0.25}{3}\left[e^{1}+4e^{1.25}+2e^{1.5}+4e^{1.75}+e^{2}\right]=4.670874883$$

روش انتگرال گیری نیوتن - کوتز
گاوس

مقدمه :

① ازقانون ذوزنقه : $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f_i+f_{i+1}\right]=\frac{h}{2}f_i+\frac{h}{2}f_{i+1}$

② ازقانون سیمسون : $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_i+4f_{i+1}+f_{i+2}\right]=\frac{h}{3}f_i+\frac{4h}{3}f_{i+1}+\frac{h}{3}f_{i+2}$

$$① \;=\sum_{k=i}^{i+1} A_k f_k \longrightarrow \left(A_i=\frac{h}{2},\; A_{i+1}=\frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow ② \;=\sum_{i=1}^{i+2} A_k f_k \longrightarrow \left(A_i=\frac{h}{3},\; A_{i+1}=\frac{4h}{3},\; A_{i+2}=\frac{h}{3}\right)$$

روش انتگرال گیری نیوتن کوتز : (فرمول چهار نقطه ای)

در این روش نقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ را بطور متساوی الفاصله اختیار می کنیم.

$0 \quad h \quad 2h \quad 3h$

$$I=\underbrace{\int_0^{3h} f(x)\,dx}_{\text{سمت راست}}=\sum_{k=0}^{3} A_k f_k=\underbrace{\overset{?}{A_0}f_0+\overset{?}{A_1}f_1+\overset{?}{A_2}f_2+\overset{?}{A_3}f_3}_{\text{سمت چپ}} \qquad (1)$$

اگر $\underbrace{f(x)=1}_{\text{بافرض}}$

$$\xrightarrow{(1)\ \text{چپ}} \int_0^{3h}(1)\,dx = x\Big|_0^{3h}=3h$$

$$\xrightarrow{(1)\ \text{راست}} A_0\overset{1}{f_0}+A_1\overset{1}{f_1}+A_2\overset{1}{f_2}+A_3\overset{1}{f_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0+A_1+A_2+A_3=3h}$$

اگر $f(x)=x$

$$\xrightarrow{\text{چپ}} \int_0^{3h} x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{3h}=\frac{9h^2}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{راست}} A_0\overset{0}{f_0}+A_1\overset{h}{f_1}+A_2\overset{2h}{f_2}+A_3\overset{3h}{f_3}$$

$=0$ مقدار تابع در نقطه اول

$$\Rightarrow A_1h+A_2(2h)+A_3(3h)=\frac{9h^2}{2}$$

$$\boxed{A_1+2A_2+3A_3=\frac{9h}{2}}$$

$$f(x)=x^2 \longrightarrow \int_0^{3h} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{3h} = 9h^3$$

$$\longrightarrow A_0 \overset{0}{f_0} + A_1 \overset{h^2}{f_1} + A_2 \overset{4h^2}{f_2} + A_3 \overset{9h^2}{f_3}$$

$$\Rightarrow A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 9h$$

$f(x)=x^3 \longrightarrow$ مطابق روش قبل $\longrightarrow A_1 + 8A_2 + 27A_3 = \frac{81}{4}h$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{3h}{8}, & A_2 = \frac{9h}{8} \\ A_1 = \frac{9h}{8}, & A_3 = \frac{3h}{8} \end{cases}$$

فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن کوتز:

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right] \quad (12)$$

مثال: تمرین قبل را از این روش حل کنید.

$h=1/3$, h, h: 1, $4/3$, $5/3$, 2

$$I = \int_1^2 e^x\,dx$$

از رابطه (12) داریم،

$$I \simeq \frac{3(\frac{1}{3})}{8}\left[f_1 + 3f(\tfrac{4}{3}) + 3f(\tfrac{5}{3}) + f(2)\right]$$

$$I \simeq \frac{1}{8}\left[e^1 + 3e^{4/3} + 3e^{5/3} + e^2\right] = 4.456691242$$

روش انتگرال گیری گاوس:

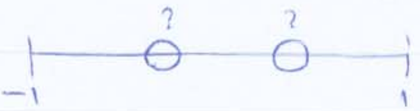
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \quad (13)$$

نکته اول، باید تغییر متغیر دهیم تا به فرم رابطه (13) تبدیل شود.

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\left[(b-a)u + (b+a)\right]} \quad (14) \Rightarrow \boxed{dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)du} \quad (15)$$

$b \to 1$, $a \to -1$

نکته دوم، در این روش نقاط انتگرال گیری نقاط مجهول هستند.



فرمول دونقطه‌ای گاوس،

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \sum_{k=0}^{1} A_k f_k$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq A_0 f_0 + A_1 f_1} \qquad (16)$$

با فرض $f(x)=1$

$$\xrightarrow{(16)\ \text{سمت چپ}} \int_{-1}^{1} (1)\,dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$\xrightarrow{(16)\ \text{سمت راست}} A_0 \overset{1}{f_0} + A_1 \overset{1}{f_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 + A_1 = 2}$$

$$f(x) = x \xrightarrow{\text{چپ}} \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{راست}} A_0 \overset{x_0}{f_0} + A_1 \overset{x_1}{f_1} = A_0 x_0 + A_1 x_1$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0}$$

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{چپ}} \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{راست}} A_0 f_0 + A_1 f_1 = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3}}$$

$$f(x) = x^3 \longrightarrow \text{به همین ترتیب} \longrightarrow \boxed{A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0}$$

$$\left(A_0 = 1,\quad A_1 = 1,\quad x_0 = \frac{-\sqrt{3}}{3},\quad x_1 = \frac{+\sqrt{3}}{3} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{در رابطه } (16)} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{+\sqrt{3}}{3}\right) \qquad (17)$$

مثال: تمرین قبل را از این روش بدست آورید.

$$I = \int_{1=a}^{2=b} e^{x}\,dx = ?$$

از روابط 14 و 15 استفاده می‌کنیم.

$$x = \frac{1}{2}\left[(2-1)u + (2+1)\right] \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u+3) \longrightarrow dx = \frac{1}{2}\,du$$

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}(u+3)} \left[\frac{1}{2}\,du\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}(u+3)}\,du$$ → از رابطه (17) استفاده می‌کنیم

$$I \simeq \frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}+3\right)} + e^{\frac{1}{2}\left(\frac{+\sqrt{3}}{3}+3\right)}\right] = 4.669726508$$

تمرین: الف) با استفاده از ذوزنقه مقدار $h=1$

$$I = \int_1^4 x e^x \, dx$$

1 2 3 4

ب) روش سیمسون

$h = 0.75$

1 1.75 2.5 3.25 4

ج) از روش نیوتن کوتز چهار نقطه ای

د) گاوس دو نقطه ای

هـ) گاوس سه نقطه ای

۹۲/۱۱/۵

جلسه دوازدهم

فصل ششم: حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

ODE : Ordinary Differential Equations

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} y = 0 \quad (1)$$

شرط مرزی $y(0) = 1$

حل دقیق: $y = e^{x/2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} e^{x/2}$

Taylor's series Method

۱-۶) روش سری های تیلور

$$y(x) = \underbrace{y_{(0)}}_{1} + \underset{x}{h}\, \underset{\frac{1}{2}}{y^{(1)}_{(0)}} + \underbrace{\frac{h^2}{2!}}_{\frac{x^2}{2}} \underset{\frac{1}{4}}{y^{(2)}_{(0)}} + \underbrace{\frac{h^3}{3!}}_{\frac{x^3}{6}} \underset{\frac{1}{8}}{y^{(3)}_{(0)}} + \underbrace{\frac{h^4}{4!}}_{\frac{x^4}{24}} \underset{\frac{1}{16}}{y^{(4)}_{(0)}} + \cdots$$

$$x - \cancel{x_0} = h \;, \quad * \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} y \rightarrow y^{(1)}_{(0)} = \frac{1}{2} y_{(0)} = \frac{1}{2}$$

$$* y^{(2)} = \frac{1}{2} y^{(1)} \rightarrow y^{(2)}_{(0)} = \frac{1}{2} y^{(1)}_{(0)} \rightarrow y^{(2)}_{(0)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{2} y^{(2)} \rightarrow y^{(3)}_{(0)} = \frac{1}{2} y_{(0)} \rightarrow y^{(3)}_{(0)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{2} y^{(3)} \rightarrow y^{(4)}_{(0)} = \frac{1}{2} y^{(4)}_{(0)} \rightarrow y^{(4)}_{(0)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow y_{(x)} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4$$

اصلاح شد MEM	حل اویلر	حل حداقل مربعات	مقایسه با حل دقیق	حل سری تیلور	حل دقیق	x
	1	1		1	1	.1
1.05125	1.05	1.050325	<	1.051271094	1.051271096	0.1
	1.1025	1.103884760	<	1.105170833	1.105170918	0.2
		1.16066518	<	1.161833594	1.161834243	0.3
		1.2206837	<	1.221400000	1.221402758	0.4
		1.2839371	<	1.284016927	1.284025417	0.5
		1.3504146	>	1.349837500	1.349858808	0.6
		1.42012218	>	1.419021094	1.419067549	0.7
		1.4935909	>	1.491733330	1.491824698	0.8
		1.5692223	>	1.568146094	1.568312185	0.9
		1.648625	<	1.648437500	1.648721271	1

Least Square Method — ۲-۶) روش حداقل مربعات:

جواب تقریبی: $y_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

شرط مرزی: $1 = a_0$

$$y_{(x)} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 \xrightarrow{①} (a_1 + 2a_2 x) - \frac{1}{2}(1 + a_1 x + a_2 x^2) = E$$

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x$$

یادآوری: $D = \sum_{i=1}^{N} [f_i - G_i]^2$

$$E = (1 - \frac{1}{2}x)a_1 + (2x - \frac{1}{2}x^2)a_2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$D = \int_0^1 E^2\,dx$ باید Min شود $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial a_2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\int_0^1 E\left(\frac{\partial E}{\partial a_1}\right)dx = 0 \\ 2\int_0^1 E\left(\frac{\partial E}{\partial a_2}\right)dx = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left[(1-\tfrac{1}{2}x)a_1 + (2x - \tfrac{1}{2}x^2)a_2 - \tfrac{1}{2} \right](1-\tfrac{1}{2}x)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 \left[(1-\tfrac{1}{2}x)a_1 + (2x - \tfrac{1}{2}x^2)a_2 - \tfrac{1}{2} \right](2x-\tfrac{1}{2}x^2)\,dx = 0$$

$$\begin{cases} \frac{7}{12}a_1 + \frac{9}{16}a_2 = \frac{3}{8} \\ \frac{9}{16}a_1 + \frac{53}{60}a_2 = \frac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.4871 \\ a_2 = 0.1615 \end{cases} \longrightarrow y_{(x)} = 1 + 0.4871x + 0.1615x^2$$

Euler Method (Basic) — ۶-۳) روش اویلر اولیه

در روش اویلر از دو جمله سری تیلور استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad x = x_0 + h$$

از تیلور: $y_{(x)} = y_{(0)} + h\,y^{(1)}_{(0)}$, ($x \to x_0+h$, $(0) \to x_0$) $\longrightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + h\,y^{(1)}_i} \longrightarrow f(x_i, y_i)$

$$i=0 \longrightarrow y_1 = y_0 + h y^{(1)}_0 = 1 + (0.1)\left[\tfrac{1}{2}\overset{1}{y_0}\right] = 1.05$$

$$i=1 \longrightarrow y_2 = y_1 + h y^{(1)}_1 = 1.05 + (0.1)\left[\tfrac{1}{2}\overset{1.05}{y_1}\right] = 1.1025$$

Euler Method (Modified) — ۶-۴) روش اویلر اصلاح شده

سری تیلور با سه جمله:

$$y_{i+1} = y_i + h\,y^{(1)}_i + \frac{h^2}{2}\,y^{(2)}_i \;*$$

برای اصلاح خطای مشتق اول را بر می‌داریم و بجای آن با توجه به مشتق دوم این عبارت را می‌گذاریم

$$*\; y^{(2)}_i \simeq \frac{y^{(1)}_{i+1} - y^{(1)}_i}{h}$$

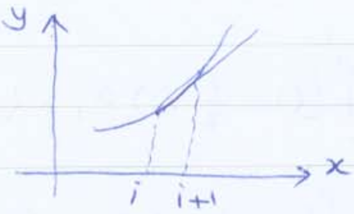
حال در رابطه بالا می‌گذاریم

$$y_{i+1} = y_i + h\,y^{(1)}_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{y^{(1)}_{i+1} - y^{(1)}_i}{h}\right)$$

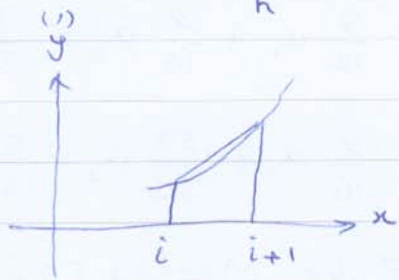
Subject: Date:

$$y_{i+1} = y_i + h y_i^{(1)} + \frac{h}{2} y_{i+1}^{(1)} - \frac{h}{2} y_i^{(1)}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(y_i^{(1)} + y_{i+1}^{(1)}\right)}$$



$$y_i'' \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$



$$y_i^{(2)}$$

$$y_i^{(1)} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^{(1)} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$i = 0 \longrightarrow y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(y_0^{(1)} + y_1^{(1)}\right)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right)$$

$$y_1 = 1 + \left(\frac{0.1}{2}\right)\left[\frac{1}{2} y_0' + \frac{1}{2} y_1\right] = 1.05125$$

$$i = 1 \rightarrow y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)\right]$$

Runge-Kutta Methods — روش های رانگ _ کوتا

Basic Euler Method | Modified Euler Method — رانگ کوتای مرتبه دو

$$y_{i+1} = y_i + k_1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$k_1 = hf(x_i, y_i)$ بطوریکه

بطوریکه: $k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_{i+1}, y_i + k_1)$

۹۲/۱۱/۵ — جلسه سیزدهم

$$y_{i+1} = y_i + a k_1 + b k_2$$

بطوریکه $k_1 = hf(x_i , y_i)$ و $k_2 = hf(x_i + Ah , y_i + Bk_1)$

در حالت خاص که $a = b = \frac{1}{2}$ ، $A = B = 1$ باشد به مدل اویلر اصلاح شده می‌رسیم.

رانگ کوتای مرتبه چهار:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$k_1 = hf(x_i , y_i)$ ، $k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2} , y_i + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2} , y_i + \frac{k_2}{2})$ ، $k_4 = hf(x_i + h , y_i + k_3)$

مثال: مسئله قبل را با روش رانگ کوتای مرتبه ۴ حل کنید.

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0$ $\quad y_{(1)} = ?$

شرط مرزی $y_{(0)} = 1$ $\quad h = 1$, $y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1\left[\frac{1}{2}\overset{1}{\overbrace{y_0}}\right] = 0.5$

$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = (1)\left[\frac{1}{2}(\overset{1}{\overbrace{y_0}} + \frac{\overset{0.5}{\overbrace{k_1}}}{2})\right] = 0.625$

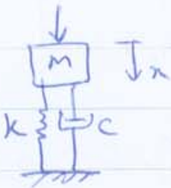
$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = (1)\left[\frac{1}{2}(\overset{1}{\overbrace{y_0}} + \frac{\overset{0.625}{\overbrace{k_2}}}{2})\right] = 0.65625$

$k_4 = hf(x_0 + 1, y_0 + k_3) = (1)\left[\frac{1}{2}(\overset{1}{\overbrace{y_0}} + \overset{0.65625}{\overbrace{k_3}})\right] = 0.828125$

$\rightarrow y_1 = (1) + \frac{1}{6}\left[(0.5) + 2(0.625) + 2(0.65625) + 0.828125\right] = 1.6484375$

اگر معادلات دیفرانسیل ها از مرتبه ۲ یا بیشتر باشند باید چه کنیم.

یادآوری از ارتعاشات:



$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$

$\ddot{x} \to \dfrac{d^2 y}{dt^2}$, $\quad \dot{x} \to \dfrac{dy}{dt}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt} = y \\ x(0) = x_0\end{array}} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

$x_{(0)} = x_0$ Initial displacement

$\dot{x}_{(0)} = \dot{x}_0$ Initial velocity

$$\boxed{\begin{array}{l} m\dfrac{dy}{dt} + cy + kx = F \\ y_{(0)} = \dot{x}_{(0)} = \dot{x}_0 \end{array}}$$

مثال:

$$4\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

$x(0) = 1$

$\dot{x}(0) = 1$

$x(0.1) = ?$

$\dot{x}(0.1) = ?$

الف) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ x(0) = 1 \end{cases}$, ب) $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} + 3y + 16x = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \,,\; y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad \dfrac{dy}{dt} = -4x - \dfrac{3}{4}y$

الف) $x(t) = x(0) + t\,\overset{(1)}{x}(0) + \dfrac{t^2}{2}\overset{(2)}{x}(0) + \dfrac{t^3}{6}\overset{(3)}{x}(0) + \cdots$

ب) $y(t) = y(0) + t\,\overset{(1)}{y}(0) + \dfrac{t^2}{2}\overset{(2)}{y}(0) + \dfrac{t^3}{6}\overset{(3)}{y}(0) + \cdots$

$\overset{(1)}{x} = y \longrightarrow \overset{(1)}{y} = -4x - \dfrac{3}{4}y \longrightarrow \overset{(1)}{y}(0) = -4\overset{1}{x_0} - \dfrac{3}{4}\overset{1}{y_0} = -4 - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{19}{4}$

مشتق نسبت به زمان

$\overset{(2)}{x} = \overset{(1)}{y} \longrightarrow \overset{(2)}{x}_{(0)} = \overset{(1)}{y}_{(0)} = -\dfrac{19}{4}$, $\overset{(2)}{y} = -4\overset{(1)}{x} - \dfrac{3}{4}\overset{(1)}{y} \to \overset{(2)}{y}_{(0)} = -4\overset{1}{\overset{(1)}{x}_{(0)}} - \dfrac{3}{4}\overset{-19/4}{\overset{(1)}{y}_{(0)}}$

$\to \overset{(2)}{y}_{(0)} = -4 + \dfrac{57}{19} = -\dfrac{7}{19}$ $\quad \overset{(3)}{x} = \overset{(2)}{y} \longrightarrow \overset{(3)}{x}_{(0)} = \overset{(2)}{y}_{(0)} = -\dfrac{7}{16}$

$\overset{(3)}{y} = -4\overset{(2)}{x} - \dfrac{3}{4}\overset{(2)}{y} \longrightarrow \overset{(3)}{y}_{(0)} = -4\overset{-19/4}{\overset{(2)}{x}_{(0)}} - \dfrac{3}{4}\overset{-7/16}{\overset{(2)}{y}_{(0)}} = 19 + \dfrac{21}{64} = \dfrac{1237}{64}$

الف) $x_{(t)} = 1 + t(1) + \dfrac{t^2}{2}\left(-\dfrac{19}{4}\right) + \dfrac{t^3}{6}\left(-\dfrac{7}{16}\right) + \cdots$

ب) $\dot{x}_{(t)} = y_{(t)} = 1 + t\left(-\dfrac{19}{4}\right) + \dfrac{t^2}{2}\left(-\dfrac{7}{16}\right) + \dfrac{t^3}{6}\left(\dfrac{1237}{61}\right) + \cdots$

و $t = 0.1$ را در الف و ب قرار می‌دهیم تا مقادیر $x(0.1)$ و $\dot{x}(0.1)$ بدست آیند.