دکتر عزیزی

1

~~محاسبات عددی~~

refrence : Nakamora – Numerial method

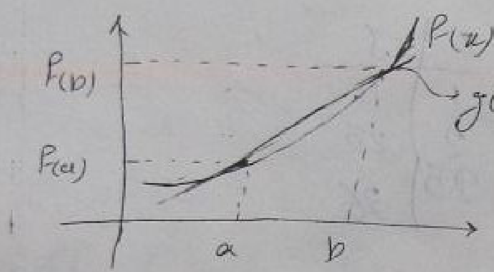
فصل ۱ منابع خطا
خودتان مطالعه کنید

Poly nominal interpolation

فصل ۲ : میان یابی

روش میان یابی خطی :

1) Lineer interpolation

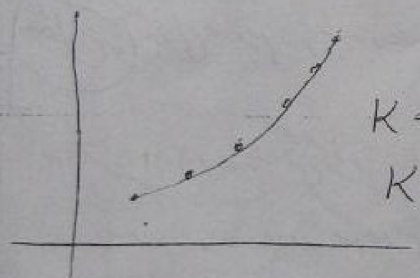


$$g(x) = \frac{b+x}{b-a} f(b) + \frac{x-a}{b-a} f(a)$$

(a, f_a)

(b, f_b)

روش لاگرانژ :



$K+1$

K

$$\begin{cases} x_0 & x_1 & \cdots & x_K \\ f_0 & f_1 & \cdots & f_K \end{cases}$$

معادله اصلی $g(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 + \cdots + a_K x^K$

با حل دستگاه می توانیم مقدار $a_0, a_1, \ldots a_K$ را بدست آوریم

$$\begin{cases} f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_K x_0^K \\ f_1 = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_K x_1^K \\ \vdots \\ f_K = a_0 + a_1 x_K + \cdots + a_K x_K^K \end{cases}$$

$T_0 \to A$	$F_0 \to G$
$T_1 \to B$	$F_1 \to H$
$T_2 \to C$	$F_2 \to I$
$T_3 \to D$	$F_3 \to J$
$T_4 \to E$	$F_4 \to K$
$T_5 \to F$	$F_5 \to L$
جواب	$f(1) \to U$

$$\ell_0(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$$

$\vdots$

$$\ell_i(x) = (x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$$

$(x-x_1)$ حذف

$\vdots$

$\ell_k(x)$

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_k)}$$

$\vdots$

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_k)}{(x_i-x_0)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_k)}$$

$\vdots$

$\ell_k(x)$

$$\ell_i(x_i) = 1$$

x	y
1	11
2	25
2.5	36

1.3

$$\ell_i(x_j)_{j \neq i} = 0$$

در معادله اصلی قرار دهیم:

$$g(x) = \ell_0(x) f_0 + \ell_1(x) f_1 + \cdots + \ell_k(x) f_{(k)}$$

مثال ۱: مثال: چگالی سدیم در سه دمای مختلف اندازه‌گیری شده است مطلوبست پیدا کردن چگالی در دمای ۲۵۱ درجه سانتیگراد

i	T_i	ρ_i
0	$94^\circ C$	929 kg/m^3
1	205	902
2	371	860

251° ? = T

چون سه تا موقعیت داریم چندجمله‌ای درجه ۲ داریم

$$\rho_T = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$$

چون طولانی می‌باشد استفاده نمی‌کنیم و از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$g(x) = \ell_0(x) f_0 + \cdots + \ell_k(x) f_k$$

$$\rho_T = \ell_0(T) \underbrace{f_0}_{929} + \ell_1(T) \underbrace{f_1}_{902} + \ell_2(T) \underbrace{f_2}_{860}$$

$$\boxed{\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_k)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_k)}} \Rightarrow \ell_0(T) = \frac{(T-205)(T-371)}{(94-205)(94-371)} =$$

T_1 T_2 T_0 T_1 T_0 T_2

1'

۲   ۲۰۰ = آخرها

$$V_1 = \frac{(T-T_0)(T-T_2)}{(T_1-T_0)(T_1-T_2)}$$

205   94   205   371

$$V_1(T) = \frac{(T-94)(T-371)}{(205-94)(205-371)}$$

T_1 T_0 T_1

$$V_2(T) = \frac{(T-94)(T-205)}{(371-94)(371-205)}$$

f_2 f_0 f_2 f_1

$$V_2 = \frac{\text{در صورت غیر جمله‌ی مربوطه‌ها! حاصل‌ضرب‌ها}}{\text{در مخرج حاصل منهای غیر خودی‌ها! و خود معلوم}}$$

بعد در فرمول جایگذاری می‌کنیم

$$f_{(251)} = 890.5 \ \mathrm{kg/m^3}$$

مبنای روش پیشرو — Forward

Backward

روش Forward:

مشتق درجه صفر

$\Delta^0 f_i = f_i$ ← دیفرانس

درجه ۱: $\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i$

درجه ۲: $\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$

درجه ۳: $\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i$

درجه k: $\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$

درجه چهار: $\Delta^4 f_i = \Delta^3 f_{i+1} - \Delta f_i^3$

i	f_i	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	
0	f_0	$(f_1 - f_0)$	$(f_2 - 2f_1 + f_0)$	$(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)$	1
1	f_1	$(f_2 - f_1)$	$(f_3 - 2f_2 + f_1)$	$(f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1)$	2
2	f_2	$(f_3 - f_2)$	$(f_4 - 2f_3 + f_2)$	$(f_5 - 3f_4 + 3f_3 - f_2)$	3
3	f_3	$(f_4 - f_3)$	$(f_5 - 2f_4 + f_3)$		
4	f_4	$(f_5 - f_4)$			
5	f_5				

$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
2 − 1 $\boxed{a}$	$\boxed{b} - \boxed{a}$
3 − 2 $\boxed{b}$	

مثال ۲:

فاصله‌ی بین x ها باید یکسان باشد

i	x_i	f_i	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	−1 A	3 G	1 M	−7 Q	25 T	−56 V
1	0 B	4 H	−6 N	18 R	−31 U	
2	1 C	−2 J	12 O	−13 S		
3	2 D	10	−1 P			
4	3 E	9 K				

درجه ۲   درجه ۳   درجه ۴

۲

① $g(x) = g(x_0 + sh) = \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{n} \Delta^n f_0$

$$\binom{s}{n} = \frac{s!}{(s-n)!\,n!}$$

فاصله بین اعداد

$x = x_0 + sh$ → X

$s = \dfrac{x - x_0}{h}$ → W → Y

$\binom{s}{0} = 1$

$\binom{s}{1} = s$

⋮

Z ← $g(x) = \binom{s}{0}\Delta^0 f_0 + \binom{s}{1}\Delta^1 f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0$

$$\boxed{g(x) = f_0 + s\,\Delta^1 f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\,\Delta^2 f_0} + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\,\Delta^3 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}\,\Delta^4 f$$

$\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + \frac{s^2 - s}{2}$

مثال:

از نقاط ۰، ۱، ۲، ۳ تا ۵ به روش ۰/۰۰۰۰۵ بیرون یک تابع درجه ۲ مینیمال بسازید.

اگر درجه بالاتر خواسته بود باید اعداد بیشتری را برای حل مسئله در نظر گرفتیم

i	x_i	f_i	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۰	0.1	۰/۹۹۷۵۰	-۰/۰۱۹۸۷	-۰/۰۱۹۲۹	۰/۰۰۱۱۸
۱	۰/۳	۰/۹۷۷۶۳	-۰/۰۳۹۱۶	-۰/۰۱۸۱۱	۰/۰۰۱۷۰
۲	۰/۵	۰/۹۳۸۴۷	-۰/۰۵۷۲	-۰/۰۱۶۴۱	
۳	۰/۷	۰/۸۸۱۲۰	-۰/۰۷۳۶۸		
۴	۰/۹	۰/۸۰۷۵۲			
۵	۱/۱	۰/۷۱۹۶۲			

فاصله بین اعداد ۰/۲ = h

درجه ۳

درجه ۴

$g(x) = g(x_0 + sh) = \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{n} \Delta^n f_0$

← چون معادله درجه ۲ می‌باشد

$g(x) = \sum_{i=0}^{2} \binom{s}{n} \Delta^n f_0 = f_0 + s\,\Delta^1 f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\,\Delta^2 f_0$

$g(x) = ۰/۹۹۷۵۰ + s(-۰/۰۱۹۸۷) + \frac{s(s-1)}{2}(-۰/۰۱۹۲۹)$

بخواهیم بر حسب x بنویسیم. g را در راستای جمع کنیم $s = \dfrac{x - 0.1}{0.2}$ فاصله بین دو عدد

XMI NI2 با برنامه $g(0.42) = 0.92620$ ~~0.94660~~

$g(0.35) =$ ~~0.95327~~

$g(0.36) = 0.96790$ / درجه ۳: $g(0.36) = 0.96785$ / درجه ۴: $g(0.36) = 0.96786$

۲۰

$g(0.37) =$ ~~0.94694~~

فیوژن
۷۰

درس Backward:

$\nabla^0 f_i = f_i$

$\nabla^1 f_i = f_i - f_{i-1}$

$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$

$\nabla^3 f_i = \nabla^2 f_i - \nabla^2 f_{i-1}$

$\vdots$

$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$

درجه ۳

i	x_i	f_i	$\nabla^1 f_i$	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$
۰	x_0 A	f_0 G				
۱	x_1 B	f_1 H	$(f_1 - f_0)$ M			
۲ (درجه ۲)	x_2 C	f_2 I	$(f_2 - f_1)$ N	$(f_2 - 2f_1 + f_0)$ Q ①		
۳ (درجه ۳)	x_3 D	f_3 J	$(f_3 - f_2)$ O	$(f_3 - 2f_2 + f_1)$ R ②	② - ① $\boxed{1}$ T	
۴ (درجه ۴)	x_4 E	f_4 K	$(f_4 - f_3)$ P II	II - I ③ S	③ - ② $\boxed{2}$ U	$\boxed{2} - \boxed{1}$ V

مثال ۹

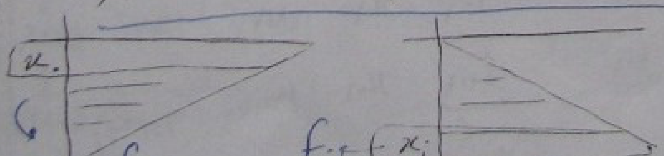
i	x_0	f_i	$\nabla^1 f_i$	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$
۰	۰.۱ A	۱	—	—	—	
۱	۰,۴	-۴	-۵	—	—	
۲	۰,۷	۳	۷	۱۲	—	
۳	۱	۰	-۳	-۱۰	-۲۲	
۴	۱,۳	-۸	-۸	-۵	۱۷	

$g(۰٫۴۵) = -۳٫۰۷۲۵۳$ درجه ۳ / درجه ۴ $g(۰٫۴۵) = -۲٫۷۳۱۳۴$

$$\boxed{g(x) = g(x_i + sh) = \sum_{i=0}^{n} \binom{s+n-1}{n} \nabla^n f_i}$$

رسول اصلی

در Forward از اولین عدد و در Backward از آخرین عدد استفاده می‌کنیم.



$g(x) = f_0 + \dots$ $\quad f_i + x_i$ $\quad g(x) = f_i + \dots$

$$\boxed{s = \frac{x - x_i}{h}}$$

$$\binom{s+n-1}{n} = \frac{(s+n-1)!}{(s-1)!\,n!}$$

ادامه مثال قبل

$n=3$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{3} \binom{s+n-1}{n} \nabla^n f_3 = g(x)$$

$$= \underbrace{\binom{s+0-1}{0}}_{1} \underbrace{\nabla^0 f_3}_{f_0} + \underbrace{\binom{s+1-1}{1}}_{s} \nabla^1 f_3 + \binom{s+2-1}{2} \nabla^2 f_3 + \binom{s+3-1}{3} \nabla^3 f_3$$

$$= f_3 + s\nabla^1 f_3 + \frac{s(s+1)}{2} \nabla^2 f_3 + \frac{(s+2)(s+1)s}{3!} \nabla^3 f_3$$

$$* \binom{s+1}{2} = \frac{(s+1)s}{2!} \quad , \quad \binom{s+2}{3} = \frac{(s+2)(s+1)s}{3!}$$

$$g(x) = g(x_3 + sh) = g(1+s\times 0/3) = 0 + s(-3) + \frac{s(s+1)}{2}(-10) + \frac{(s+2)(s+1)s}{6}(-32)$$

$$s = \frac{x-x_i}{h} \quad \boxed{s = \frac{x-1}{0/3}}$$

$$\binom{s+1}{2} = \frac{(s+1)\times s\times \cancel{(s-1)!}}{\cancel{(s-1)!}\, 2!} = \frac{s(s+1)}{2}$$

$$\binom{s+2}{3} = \frac{(s+2)(s+1)s}{3!\;6} \qquad \binom{s+3}{4} = \frac{(s+3)(s+2)(s+1)s}{4!\;24}$$

$$\boxed{g(x) = f_{\text{آخر}} + s\nabla f_{\text{آخر}} + \frac{(s+1)s}{2}\nabla^2 f_{\text{آخر}}} + \frac{(s+2)(s+1)s}{6}\nabla^3 f_{\text{آخر}} + \frac{(s+3)(s+2)(s+1)s}{24}\nabla^4 f_{\text{آخر}}$$

درجه ۲

درجه ۳

درجه ۴

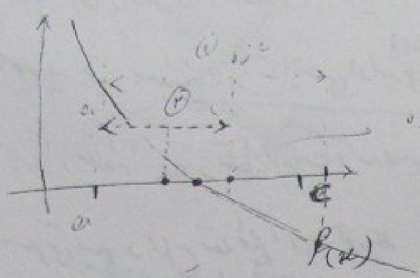
فرمول کلی نیوتن بک وارد

۳۰

فصل سوم

معادلات غیر خطی (Solution of nonlinear Equations)!

۱- روش Bisection method : (روش نصف کردن)



نقطه وسط بازه را پیدا می‌کنیم و مقدار تابع را در نقطه وسط محاسبه می‌کنیم.

دوباره نقطه وسط را به عنوان c در نظر می‌گیریم و نقطه وسط آن را دوباره پیدا می‌کنیم و در دو حالت ① و ② قرار می‌دهیم تا مشخص شود ریشه‌ها مثبت می‌باشند یا منفی.

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$f(b)$ → $f(b)f(a) < 0$ ①

$f(b)$ → $f(b)f(c) > 0$ ②

مثال: ریشه $f(x) = e^x - 2$ را بدست آورید؟

در محاسبه ریشه: [illegible] ریشه را باید بین مقدار $f(a)$، $f(b)$، $f(c)$ در نظر گرفت که باید یکی از آن‌ها منفی یکی دیگر مثبت باشد مثل شماره ترتیب

$e^x - 2 = 0$, $\Rightarrow \boxed{x_0 = 0/6953}$ مقدار دقیق

$\varepsilon = 0/1$ بازه را مشخص می‌دهیم $[0, 2]$

i	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
۰	۰	۱	۲	-۱	۰/۷۱۸۲	۵/۳۸۹
۱	۰	۰/۵	۱	-۱	-۰/۳۵۱	۰/۷۱۸
۲	۰/۵	۰/۷۵	۱	-۰/۳۵۱	۰/۱۱۷	۰/۷۱۸
۳	۰/۵	۰/۶۲۵	۰/۷۵	-۰/۳۵۱	-۰/۱۳۱	۰/۱۱۷
۴	۰/۶۲۵	۰/۶۸۷۵	۰/۷۵	-۰/۱۳۱	-۰/۰۱۲	۰/۱۱۷
۵	۰/۶۸۷۵	۰/۷۱۸۷	۰/۷۵	-۰/۰۱۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱
۶	۰/۶۸۷۵	۰/۷۰۳۱	۰/۷۱۸۷	-۰/۰۱۱	۰/۰۲	۰/۰۲
۷	۰/۶۸۷۵	۰/۶۹۵۳	۰/۷۰۳۱	-۰/۰۱۱	۰/۰۰۴	

$\Rightarrow A = A \;;\; C = B$

مراحل

ریشه تقریبی

عمل تا زمانی ادامه می‌دهیم که ... نزدیک شویم

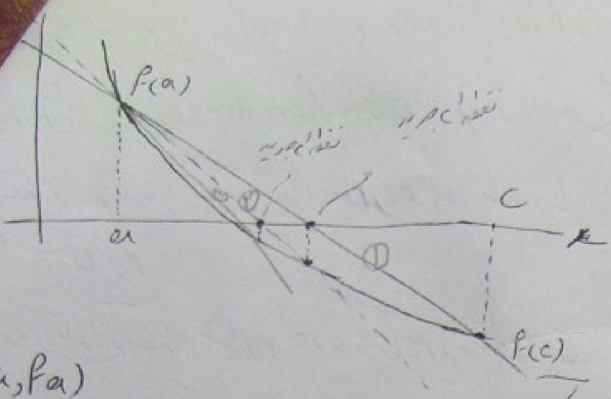
در ماشین حساب [ماشین حساب کاسیو]

ابتدا فرمول در برنامه "X NESF" اصلاح شود. بعد به تعداد مراحل کلید ... زده شود. تا مقادیر A، C و B که به ترتیب مقادیر $f(a)$، $f(b)$، $f(c)$ نمایش داده شود.

از مرحله دوم به بعد بجای گذاشتن مقدار عدد مقادیر A و C را در حدود A، B، C به تناسب علامت f ها استفاده شود.

روش نابجایی: False position and modified False position — ۲- روش

ابتدا از نقطه a و c می‌کشیم و نقطه‌ای که از تقاطع خط با محور x ایجاد می‌شود، نقطه b جدید می‌باشد و برای نقاط جدید نیز نقطه c را تا منحنی ادامه می‌دهیم (همان خط جدید)



نیز از نقطه a و نقطه به دست آمده بر روی منحنی x وصل می‌کنیم و محل تقاطع آن با محور x نقطه جدید می‌باشد و همینطور ادامه می‌دهیم.

خط از نقطه a و c می‌گذرد

(a, f_a)

(c, f_c)

$$y = f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) = 0$$

ریشه

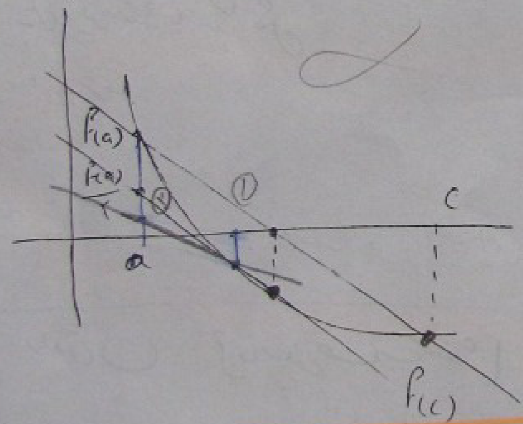
$$b = x_0 = a + \frac{c-a}{f(c) - f(a)}(-f(a)) \Rightarrow \boxed{b = \frac{a f(c) - c f(a)}{f(c) - f(a)}}$$

نقطه وسط جدید

این روش با روش Bisection فرق می‌کند و فقط روش به دست آوردن B فرق می‌کند.

③ روش false position modified f.p:

این روش مثل روش قبلی می‌باشد و فقط تفاوت آن در f(a) جدید می‌باشد که مقدار کمتر از مقدار f(a) قبلی می‌باشد. در محاسبه a و c را به دست آوریم هر کدام که مثبت بود را با $\frac{1}{2} f(a)$ جمع می‌کنیم.



مثال ۹: ریشه معادله $f(x) = tg\,x - x - 0.5$ را با روش modified f.p به دست آورید ۱ < x < ۱٫۴ ...

i	a (A)	b (B)	c (C)	f(a) (F)	f(b) (G)	f(c) (H)
۰	۱٫۰	۲٫٤٧٧١×۱۰^-۱	۱٫٤	-٤٫٩٩٦×۱۰^-۱	-٤٫٩٤٨١×۱۰^-۱	۳٫۸۹٧۹×۱۰ ×۰٫۵
۱	۲٫٤٧٧١×۱۰^-۱	٤٫۸۱۰۲×۱۰^-۱	۱٫٤	-٤٫٩٤٨١×۱۰^-۱	-٤٫۵٩۱۱×۱۰^-۱	۱٫۹٤۸۹×۱۰ ×۰٫۵
۲	٤٫۸۱۰۲×۱۰^-۱		۱٫٤	-٤٫۵٩۱۱×۱۰^-۱		

$$b = \frac{a f(c) - c f(a)}{f(c) - f(a)}$$

$\boxed{b = 0.97512}$

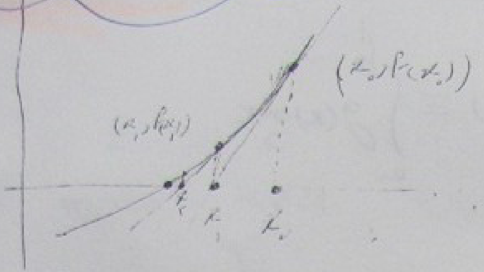
ریشه به دست آمده

٤

(۲)

نیوتن - رافسون

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه x



برنامه ۴ "X NEWTON"

روش: (۴)

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $(x_n, f(x_n))$

برای به دست آوردن نقطه بعدی ⇐

$$f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0$$

$$\Rightarrow x - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

مقدار جدید — مقدار قبلی

مقدار x ای که مماس محور x ها را قطع می کند.

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n+h) - f(x_n)}{h}$$

$h = ۰٫۱$

و بعد برای به دست آوردن ریشه آنقدر x را محاسبه می کنیم تا مقدار $x_{p+1} \cong x_p$ شود سپس x_{p+1} با تقریب مورد نظر ریشه معادله می باشد.

مثال: ریشه ۳ f را به دست آورید $f(x) = x^3 - 155$

تقریب اولیه $x_0 = 5$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 155}{3x_n^2} \qquad f'(x) = 3x^2$$

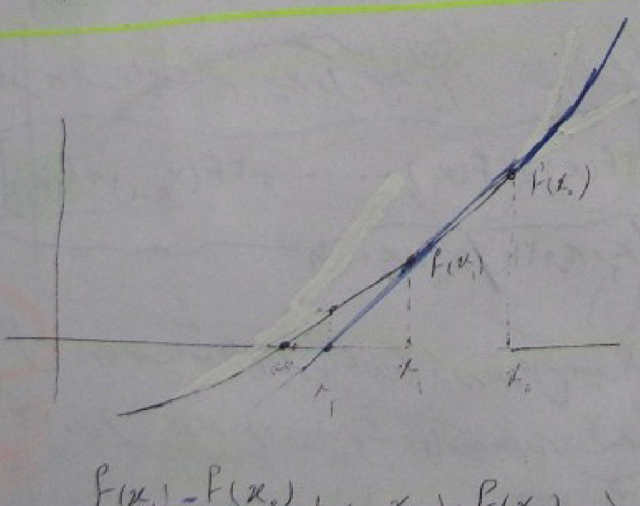
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

n	x_n
۰	۵
۱	۵٫۴
۲	۵٫۳۷۱۸۳۳۵
۳	۵٫۳۷۱۶۸۵۳
۴	۵٫۳۷۱۶۸۵۳

تقریب ⇐ $\boxed{x = ۵٫۳۷۱۶۸۶}$

(۵)

روش secant method: (وتری)



از دو نقطه $f(x_0)$ و $f(x_1)$ یک خط عبور می دهیم و محل تقاطع آن با محور x ها x جدیدی می شود و سپس آن را امتداد می دهیم تا منحنی را قطع کند سپس از نقطه قبلی و نقطه جدید یک خط جدید رسم می کنیم و ... هر بار نقطه های جدیدی به دست می آید.

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + f(x_0) = 0$$

دو مقدار قبلی: x_{n-2} ، x_{n-1}

$$\Rightarrow x_2 = \frac{f(x_0)(x_0 - x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} + x_0$$

$$\boxed{x_n = \frac{f(x_{n-2})(x_{n-2} - x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} + x_{n-1}}$$

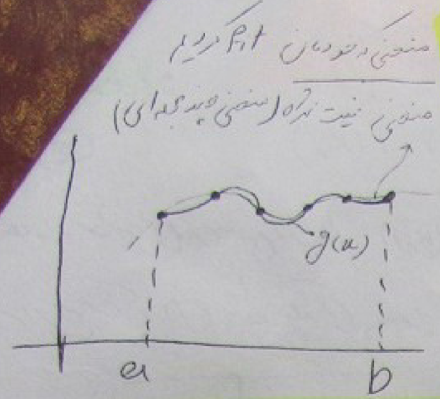
$n = 2, 3, \ldots$

$x_{p+1} \cong x_p$

(۵)

فصل چهارم

انتگرال‌گیری عددی (Numerical integration):

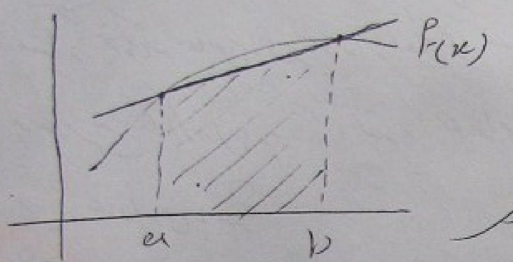


$$I = \int_a^b f(x) \cong \int_a^b g(x)dx$$

---

(1)

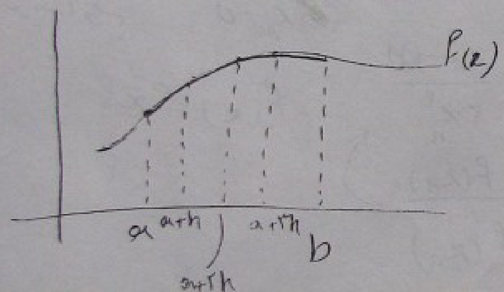
روش ذوزنقه‌ای: (Trapezoidal Rule)



در این روش یک منحنی خطی را fit می‌کنیم.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}\left[f(b)+f(a)\right]$$

این روش دارای خطای زیادی می‌باشد برای اینکه با دقت بالاتری بخواهیم حل کنیم باید بین a و b نقاط بیشتری را انتخاب کنیم و فاصله‌ها باید مساوی انتخاب شود.



$$I = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a+h)+f(a)\right]}_{\text{ذوزنقه اول}} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a+2h)+f(a+h)\right]}_{\text{ذوزنقه دوم}} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a+3h)+f(a+2h)\right]}_{\text{ذوزنقه سوم}} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(b)+f(a+3h)\right]}_{\text{ذوزنقه چهارم}}$$

$n=4$

خلاصه $\Rightarrow I = \frac{h}{2}\left[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+2f(a+3h)+f(b)\right]$

اگر n قطعه داشته باشیم یک فرمول کلی داریم:

(2) مساحت انتگرال زیر منحنی داریم

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right] = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$x_1 = x_0+h$ / $x_2 = x_0+2h$ / $x_n = x_0+nh$

$$h = \frac{x_n-x_0}{n} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

مثال: مساحت انتگرال زیر را با روش ذوزنقه حل کنید؟ یک بار برای n=2 (با ۲ بار تقسیم‌بندی) و یک بار برای n=4

تعداد f(x)ها $= n+1$

$$I = \int_0^2 \pi\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^2 dx$$

$$n=2 \Rightarrow h = \frac{2-0}{2} = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[f(x_0)+2f(0+1)+f(2)\right] = 12.762720$$

$$n=4 \Rightarrow h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right] = f(0)+2f(0.5)+2f(1)+2f(1.5)+2f(2) =$$

$$\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+f(x_4)\right]$$

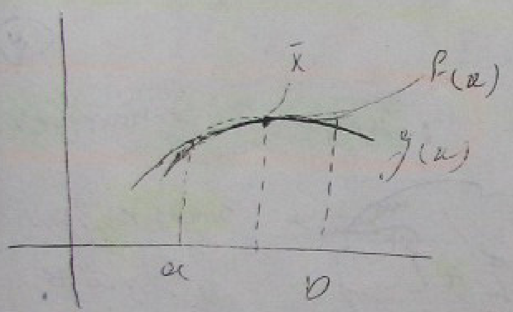
$$=\frac{1}{4}\left[f(0)+2f(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{0+\frac{1}{2}\,h})+2f(\underbrace{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}}_{1})+2f(\underbrace{1+\tfrac{1}{2}}_{\frac{3}{2}})+f(2)\right]=11.9895$$

N	I	E
۲	۱۲٫۷۲۲۷	-۱٫۰۳٤۱
٤	۱۱٫۹۸۹۵	-۰٫۲۶۰۹
۸	۱۱٫۷۹٤۰	-۰٫۰۶۵٤
⋮		
۱۲۸	۱۱٫۷۲۸۸	-۰٫۰۰۰۲

(۲)

روش سیمپسون $\frac{1}{3}$: (Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule)

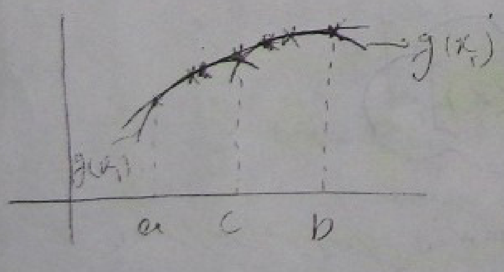
در ساده‌ترین حالت تابع درجه ۲ می‌باشد.



$$I=\int_a^b f(x)=\frac{h}{3}\left[f(a)+4f(\bar{x})+f(b)\right]$$

$$h=\frac{b-a}{2}\ ,\quad \bar{x}=\frac{b+a}{2}$$

اگر تعداد نقاط زیاد شود باید هر سه نقطه مجاور را یک منحنی درجه ۲ رسم کنیم.



$$I=\int_a^b f(x)\cong\int_a^c g_1(x)+\int_c^b g_2(x)$$

تعداد نقاط همیشه باید فرد باشد و تعداد تقسیمات زوج باشد (فواصل)

$$I=\frac{h}{3}\Big[f(a)+4\underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}f(a+ih)}_{\text{فواصل فرد}}+2\underbrace{\sum_{i=2}^{N-2}f(a+ih)}_{\text{فواصل زوج}}+f(b)\Big]\qquad h=\frac{b-a}{N}$$

* مثال: [illegible] روش سیمپسون را برای $N=2$ [illegible] حل کنید:

$N=2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}\left[f(0) + 4f(\overset{(0+1)}{x_1}) + f(2)\right] = 11.7809$

$h = \frac{2-0}{2} = 1$

$N=4 \Rightarrow \frac{1}{6}\left[f(0) + 4f(\overset{x_0+h}{x_1}) + 2f(\overset{x_0+2h}{x_2}) + 4f(\overset{x_0+3h}{x_3}) + f(2)\right] = 11.7318$

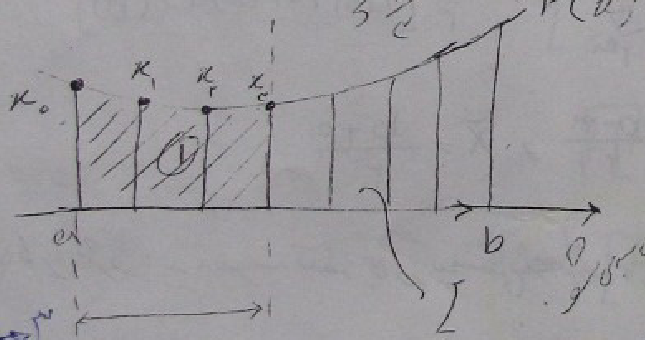
فرد   زوج   فرد

$h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

N	I	E
۲	۱۱٫۷۸۰۹	-۰٫۰۵۲۳
۴	۱۱٫۷۳۱۸	-۰٫۰۰۳۲
۸	۱۱٫۷۲۸۸	-۰٫۰۰۰۲
۱۲	۱۱٫۷۲۸۶	۰٫۰۰۰۰

③

روش Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule :



$I = I' + I$

از روش Simpson $\frac{1}{3}$ محاسبه می‌شود.

از روش Simpson $\frac{3}{8}$ ... محاسبه می‌شود.

N فرد $\Rightarrow$ ۳

N زوج $\Rightarrow 3$

مساحت ① $\Rightarrow I' = \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$

مثال: همین مثال را برای تعداد تقسیم‌بندی $N=5$ حل کنید.

مساحت انتگرال زیر را با روش Simpson $\frac{3}{8}$ محاسبه کنید.

$I = \int_0^2 \pi\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^2 dx$

$N=5$

آزادی [illegible] تعریف [illegible] در گروه ...

NEW

هر فاصله بندی را در (تعداد n بالا) خوب نیست چون ضریب اعداد بزرگ می‌شود
خطای روند آن ایجاد می‌کند.

④

04 روش Newton-Cotes :

$i = 0 \longrightarrow n$

ضریب — ضریب وزنی

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \alpha h \left[\omega_0 f_0 + \omega_1 f_1 + \dots + \omega_n f_n \right]$$

α, ω در جدول اول کتاب آمده.

$h = \frac{b-a}{n}$

	n	α	$\omega_i,\ i = 0,1,2,\dots,n$	
(دو نقطه)	1	$\frac{1}{2}$	1,1	$= \frac{h}{2}[f_0 + f_1]$ خط بین دو نقطه
سیمپسون $\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	1,4,1	$= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$
	3	3/8	1,3,3,1	
	4	2/45	7,32,12,32,7	
	5	5/289	19,75,50,50,75,19	
	⋮	⋮		

$$\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$r = 2(1 + \cos\theta)$

n	I
4	7.99993
6	8.0000
8	8.0000
10	7.99201

$\} I_{exact}$ (n = 6, 8)

⑤

05 یا روش گوس : Gauss Quadrature

5-1 گوس-لژاندر :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_0 f_0 + w_1 f_1$$

0, 1, 2, 3

$1, x, x^2, x^3$

$$\left.\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 1\,dx &= 2 = \omega_0 + \omega_1 \\
\int_{-1}^{1} x\,dx &= 0 = \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 \\
\int_{-1}^{1} x^2\,dx &= \frac{2}{3} = \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 \\
\int_{-1}^{1} x^3\,dx &= 0 = \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \omega_1 = 1$$

$$x_0 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0.577350269$$

برای انتگرال ۱- تا ۱ بین نقطه حل می‌کنیم؟ اما تغییر متغیر می‌دهیم که تابع در محدوده ۱- و ۱ قرار بگیرد.
حسابش را هم [illegible] فقط ذکر کنید. اگر درجه ۲ صفت کنید سیمپسون $\frac{1}{3}$ را [illegible]
نیست [illegible] دو نقطه را بین ۱- و ۱ انتخاب کنیم که بهترین باشد [illegible] داریم.

90.2.8 محاسبات عددی

فاصله بین نقاط یکنواخت نیست : این نقاط طوری انتخاب می‌شوند که تابع خطا کمترین باشد (1

در سیمپسون فاصله نقاط یکسان است.

روش لژاندر از چند جمله‌ای مرتبه n که ریشه‌های آن $x_0, x_1, \dots, x_n$ می‌دهد که ... مرتبه n از هم

n جمله‌ای لژاندر هستند

$R_n(x) = 0 \begin{cases} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{cases}$

گوس-لژاندر سه نقطه‌ای $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ a_0 x_0^4 + a_1 x_1^4 + a_2 x_2^4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$a_0 = a_2 \ ; \ x_0 = -x_2 \ ; \ x_1 = 0$

جواب‌ها : $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \ ; \ x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} \ ; \ x_1 = 0 \ ; \ a_0 = a_2 = \frac{5}{9} \ ; \ a_1 = \frac{8}{9}$

$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{9}(5f(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\tfrac{3}{5}})) =$

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}[3x^2 - 1]$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}[5x^3 - 3x]$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

هر تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت تابع لژاندر نوشت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k)$$

$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx =$

n (n=تعداد نقاط)	ω_k ضریب وزنی	x_k ریشه‌های لژاندر
n = 2	1	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ → گوس-لژاندر دو نقطه‌ای
n = 3	0.888888889	0
n = 4	0.555555556	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ → گوس-لژاندر سه نقطه‌ای

برای دقت بالاتر از n های بالا استفاده کنید :

(9)

فصل پنجم

مشتق‌گیری عددی

Numerical Difrenration

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \simeq f'(x_0) : [\text{forward}]$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \simeq f'(x_0) \ [\text{backward}]$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \simeq f'(x_0) \ [\text{Central}]$$

دقت روش‌ها متفاوت است

بسط تیلور تابع :

$$f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + E(h)$$

$E(h) = \frac{h}{2!} f''_i + \frac{h^2}{3!} f'''_i + \dots$

درجه خطا ۱ است

چون h کوچک است ما بقیه کوچکتر می‌شود بیشترین مقدار را $\frac{h}{2}$ است پس درجه خطا ۱ است.

(4) (8)

i=

i=2

i=3

$$f_{i-1} = f_i - h f_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' - \frac{h^3}{3!} f_i''' + \dots$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad \underbrace{+ \frac{h}{2!} f_i'' - \frac{h^2}{3!} f_i''' + \dots}_{E(h)} \longrightarrow$$ خطا از درجه ۱

$$f_{i+1} = f_{i-1} + 2h f_{i-1}' + \frac{(2h)^2}{2!} f_{i-1}'' + \frac{(2h)^3}{3!} f_{i-1}''' + \dots$$

$$f_{i-1}' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + E(h) \longrightarrow$$ خطا درجه ۱ (h)

$$-4\left(f_{i+1} = f_i + h f_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \frac{h^3}{3!} f_i''' + \dots \right)$$ ⟵ حرف f_i'' را حذف کنیم بالایی $4x-$ با پایینی جمع

$$f_{i+2} = f_i + 2h f_i' + \frac{(2h)^2}{2!} f_i'' + \frac{(2h)^3}{3!} f_i''' + \dots$$

خطا از درجه ۲ (کمتر از قبل)

$$-4 f_{i+1} + f_{i+2} = -3 f_i - 2h f_i' + \dots \Rightarrow f_i' = \frac{4 f_{i+1} - 3 f_i - f_{i+2}}{2h} + E(h^2)$$

⑨ مشتق عددی را حساب کنید

مرتبه ۱

(داده)

$y = tg\,x \quad , x_0 = 1 \quad , h = 0.1 \longrightarrow$ فاصله بین x_i ها

روش ۱ $\quad f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{tg(1+0.1) - tg\,1}{0.1} = 4.0735$

۲ ″ $\quad f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = \frac{tg\,1 - tg(1-0.1)}{0.1} = 2.9724$

۳ ″ $\quad f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{tg(1+0.1) - tg(1-0.1)}{0.2} = 3.5230$

۴ ″ $\quad f_i' = \frac{4 f_{i+1} - 3 f_i - f_{i+2}}{2h} = \frac{4\,tg(1+0.1) - 3\,tg\,1 - tg(1+0.2)}{0.2} = 3.0733$

مقدار واقعی $\quad y' = 1 + tg^2 x = 1 + tg^2(1) = 3.4309$

مشتق گیری عددی: اپراتورهای دیفرانسیل — مشتق مرتبه ۲

$\Delta : \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ رو به جلو

$\nabla : \nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ رو به عقب

δ سنترال $= \delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}$

$$\Delta^2 : \Delta\Delta f_i = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

مشتق درجه ۲

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

$$\Delta\nabla f_i = \Delta(f_i - f_{i-1}) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

$$\nabla\Delta f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = \delta^2 f_i = \delta(\delta f_i) = \delta(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) = \delta f_{i+\frac{1}{2}} - \delta f_{i-\frac{1}{2}}$$

$$= (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1}) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

$$\frac{d}{dx} \simeq \frac{\Delta}{\Delta x} \simeq \frac{\nabla}{\nabla x} \simeq \frac{\delta}{\delta x} \qquad \left\{ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \left.\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|_i = \frac{\Delta f_i}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \right.$$

مشتق مراتب بالاتر از روش بدون حساب می‌شوند مثل Δ^2 در ...

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \frac{\nabla f_i}{\nabla x_{=h}} = \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{\delta f_i}{\delta x} = \frac{\delta f_i}{h} \qquad \left\{ \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_i} = \frac{\nabla^2 f_i}{(\nabla x)^2} = \frac{\nabla^2 f_i}{h^2} = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} \right.$$

مشتق مرتبه ۲

(۹) خمیدگی تیر: $y'' = \frac{M(x)}{EI}$ — در صورتیکه تیر یکنواخت باشد

$h=0.2$ با توزیع ممان خمشی (ممان) در طول تیر را بدست آورید

$M = y'' EI$

x_i	y_i	y''_i
0	0 (cm)	
0.2	7.78	$-122 \times EI =$
0.4	10.68	$-130.25 \times EI =$
0.6	8.37	$-52.25 \times EI =$
0.8	3.97	$10.75 \times EI =$
1	0	

فرمول اصلی

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

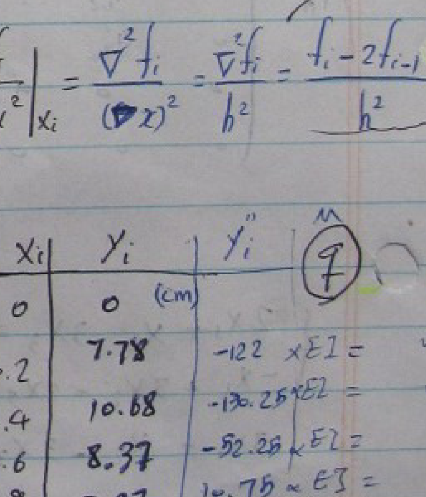
$i=0 \Rightarrow f''(0) = f(0.2) - 2f(0) + f(-0.2)$ نداریم — [illegible] نمی‌توانیم حساب کنیم

از $i=1$ شروع می‌کنیم

$$i=1 \Rightarrow f''(0.2) = \frac{f(0.4) - 2f(0.2) + f(0)}{0.2^2} = -122$$

$$i=2 \Rightarrow f''(0.4) = \frac{f(0.6) - 2f(0.4) + f(0.2)}{2} = -130.25$$

$i=3 \quad f''(0.6) =$ " $= -52.25$ $i=4 \quad f''(0.8) =$ " $= 10.75$



2.22

فصل ششم

Numerical linear Algebra

جبر خطی عددی :

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots a_{1,n}x_n = y_1$$
$$a_{2,1} \sim + a_{2,2} \sim + \dots a_{2,n}x_n = y_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n,1} \sim + a_{n,2} \sim + \dots a_{n,n} \sim = y_n$$

n معادله n مجهول

۱- روش گاوس

۲- " " - جردن

① روش گاوس :

مقدار

$$① \; -R_1\left(\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\right) + R_2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} R_2 \; ; \; -R_1\left(\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}\right) + R_3 \to R'_3 , \dots$$

②

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} \left\{ \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & y_1 \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} & y'_2 \\ \vdots & 0 & a''_{3,3} & \dots \; a''_{3,n} & y''_3 \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a'_{n,n} & y'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & 0 & & a'_{n,3} & \end{matrix} \right.$$

$$② \; -R'_2\left(\frac{a'_{3,2}}{a'_{2,2}}\right) + R'_3 \longrightarrow R''_3 \; ; \; \dots , -R'_2\left(\frac{a'_{n,2}}{a'_{2,2}}\right) + R'_n \longrightarrow R''_n$$

Fin:
$$\left\{ \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & & a_{1,n} & y_1 \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & & a'_{2,n} & y'_2 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \dots & a''_{3,n} & y''_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & a^{n-1}_{n,n} & y^{(n-1)}_n \end{matrix} \right.$$

$$X_n = \frac{y^{(n-1)}_n}{a^{n-1}_{n,n}}$$

$$X_{n-1} = \left[y^{n-2}_{n-1} - X_{n-1} a^{n-1}_{n,n} \right] \Big/ a^{n-1}_{n-1,n}$$

[illegible]

⑦

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 - 3X_3 = -1 \\ -X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 12 \\ 3X_1 + X_2 - 3X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}E_1 + E_2 \to E_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}E_2 + E_3 \to E_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{22}{7} \end{bmatrix}$$

$$\frac{11}{\cancel{7}}x_3 = \frac{22}{\cancel{7}} \Rightarrow \boxed{X_3 = 2} \; ; \; \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}(2) = \frac{23}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{21}{7} = 3}$$

$$2X_1 + 1 \times 3 - 3(2) = -1 \Rightarrow \boxed{X_1 = 1}$$

چک خطا : $2(1) + 3 - 3(2) = -1$ ✓

90.2.8

90.2.22

محاسبات عددی

② روش گوس جردن:

$$
\begin{matrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & y_1 \\
0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,n} & y'_2 \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & a^{(n-2)}_{n-1,n-1} & a^{(n-2)}_{n-1,n} & y^{(n-2)}_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a^{(n-1)}_{n,n} & y^{(n-1)}_{n}
\end{matrix}
$$

کل سطر آخر $\times \dfrac{1}{a^{(n-1)}_{n,n}}$ در ضرب آخر

$$
\left\{\begin{matrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & 0 & \bar{y}_1 \\
0 & a'_{2,2} & \cdots & 0 & \bar{y}_2 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \bar{y}_n
\end{matrix}\right. \uparrow \Longrightarrow X_n = \bar{Y}_n
$$

اینبار عمل گوس را از پایین به بالا انجام میدهیم تا تمام درایه‌های روی قطر اصلی ۱ می‌شود و بقیه صفر پس $X_n=\bar{Y}_n$

⑨ مثال قبل را با گوس جردن حل کنید:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{E_1 - E_2 \to E_1 \\ E_1 \div 2 \to E_1}]{E_2 \div 7 \to E_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

سطر سوم ÷ ۱۱

سطر سوم ← سطر دوم منها سطر سوم

سطر اول منها ″ ″ ← E_1

$E_3 \div 11 \longrightarrow E_3$

$-E_3 + E_2 \longrightarrow E_2$

$E_2 \div 7 \longrightarrow E_2$

$3E_3 + E_1 \longrightarrow E_1$

اگر درایه‌ای روی قطر اصلی صفر شد باید با سطرهای دیگر جمع کنیم تا غیر صفر شود.

⑨ با روش گاوس جردن حل کنید

$$
\begin{matrix} 0 & 10 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{matrix}
$$

درایه a_{11} صفر است باید جای سطرها را عوض کنیم

تا جای امکان سعی کنید درایه‌های روی قطر اصلی بزرگترین باشد تا ... کنیم.

مرحله ۱ با سطر ۱ صفر کرد

مرحله ۲ با سطر ۲

مرحله ۳ با سطر ۳

مرحله ۴ با سطر ۲

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{-\frac{1}{2}E_1 + E_2 \to E_2}
\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 10 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\text{عدد روی قطر بزرگترین باشد}]{E_2 \leftrightarrow E_3}
\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-\frac{1}{10}E_2 + E_3 \to E_3}
\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-16}{10} & \frac{33}{10} \end{bmatrix}
\xrightarrow{E_3 \div -16 \to E_3}
\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-33}{16} \end{bmatrix}
$$

ضرب در ۱۰

$-E_3 + E_2 \to E_2$

$E_2 \div 10 \to E_2$

$-E_3 + E_1 \to E_1$

تمام روش گاوس

⑥ ⑩

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & \frac{113}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{33}{-16} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1-4E_2\to E_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{87}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{33}{-16} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{E_1}{2}\to E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{87}{32} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{33}{-16} \end{bmatrix}$$

۲

ثابت

درایه‌ها را صفر کنیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2E_1+E_3\to E_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{-2}{10}E_2+E_3\to E_3]{-\frac{3}{10}E_2+E_1\to E_1}$$

با ماشین حساب: $13\div 320\times -66 = \text{Ans} + (54\div 10) =$

ضرب در ۱۰

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-13}{10} & \frac{54}{10} \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{32}{10} & \frac{-66}{10} \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{-1}{32}E_3+E_2\to E_2]{\frac{\frac{13}{10}}{32}E_3+E_1\to E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{\frac{87}{32}} \\ 0 & 10 & 0 & \boxed{4\frac{1}{16}} \\ 0 & 0 & 32 & -66 \end{bmatrix}$$

۲٫۷۱۸

تقسیم بر ۱۰

تقسیم بر ۳۲

ده تقسیم بر بنویسیم: $\left(\frac{-1}{32}\times -66\right)+2 = 4\frac{1}{16}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{87}{32} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\frac{13}{32}}\ \frac{65}{160} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-66}{32} \end{bmatrix} \text{با ماشین حساب} = \begin{bmatrix} 2.7187 \\ 0.4062 \\ -2.062 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{23}{32} \\ \frac{13}{32} \\ -2\frac{1}{16} \end{bmatrix}$$