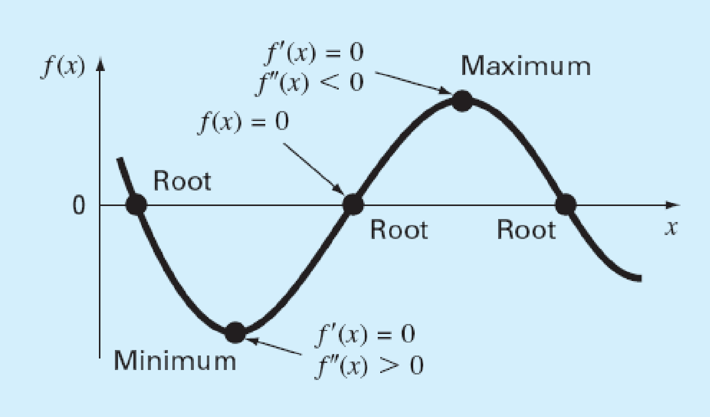


PART TWO

قسمت دوم

Roots and Optimization

ریشه یابی و بهینه سازی

روشهای ریشه یابی

- روشهای دربرگیرنده ریشه Bracketing Methods

این روشها با دو حدس اولیه در دو طرف ریشه آغاز می شوند و معمولا کند هستند ولی همیشه جواب می دهند.

- روشهای باز Open Methods

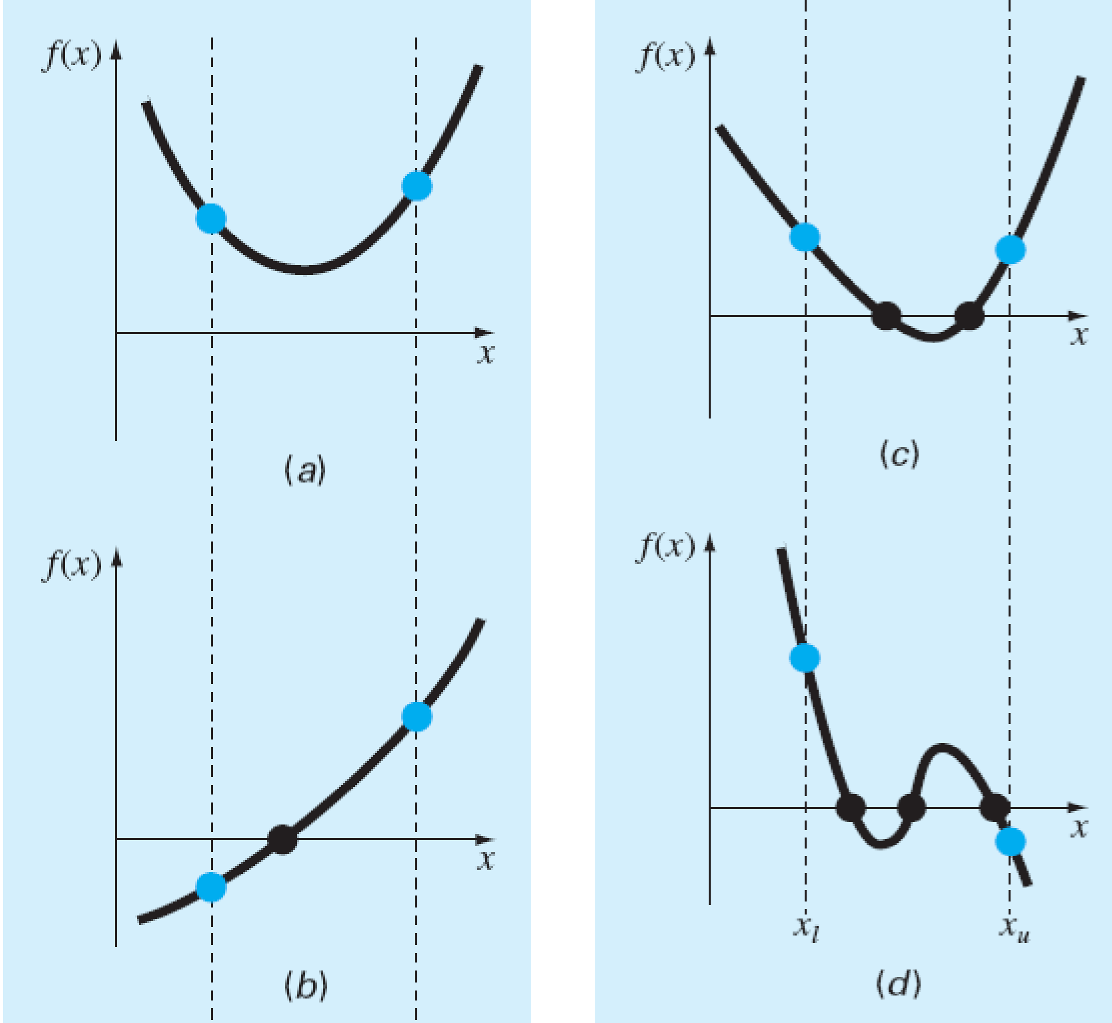
این روشها با یک یا چند حدس اولیه آغاز می شوند که لزوما ریشه را در بر نمی گیرند. این روشها سریع هستند اما ممکن است برای برخی مسائل به جواب نرسند.

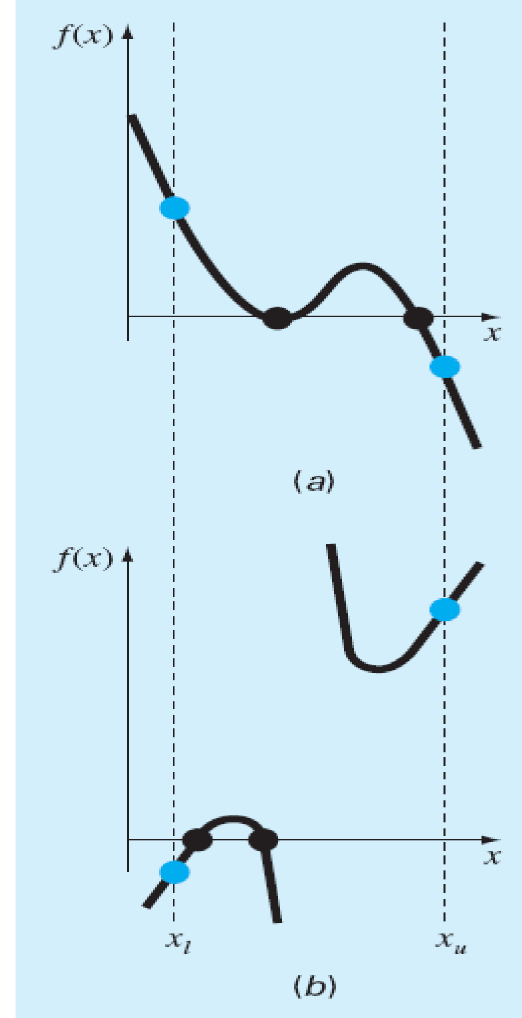
5

بخش پنجم

Roots: Bracketing Methods

ریشه یابی : روشهای دربرگیرنده ریشه





- درصورتیکه علامت تابع در حدود بالا و پائین هم علامت باشد، در بازه مورد نظر تابع یا ریشه ای ندارد و یا به تعداد زوج ریشه خواهد داشت.
- درصورتیکه علامت تابع در حدود بالا و پائین قرینه باشد تابع تعداد فرد ریشه خواهد داشت.

5.3.1 Incremental Search روش جستجوی تدریجی

- در این روش بازه مورد نظر به تعدادی ناحیه کوچکتر تقسیم می شود. درصورتیکه علامت تابع در حدود هریک از این زیر بازه ها قرینه باشد، تابع در آن زیربازه دارای حداقل یک ریشه خواهد بود.

$f(x_l)\,f(x_u) < 0$ ➡ there is at least one real root between x_l and x_u.

- درصورتیکه تعداد زیر بازه ها افزایش یابد زمان محاسبات اضافه می شود و در مقابل احتمال یافتن ریشه های بیشتر نیز افزایش می یابد.

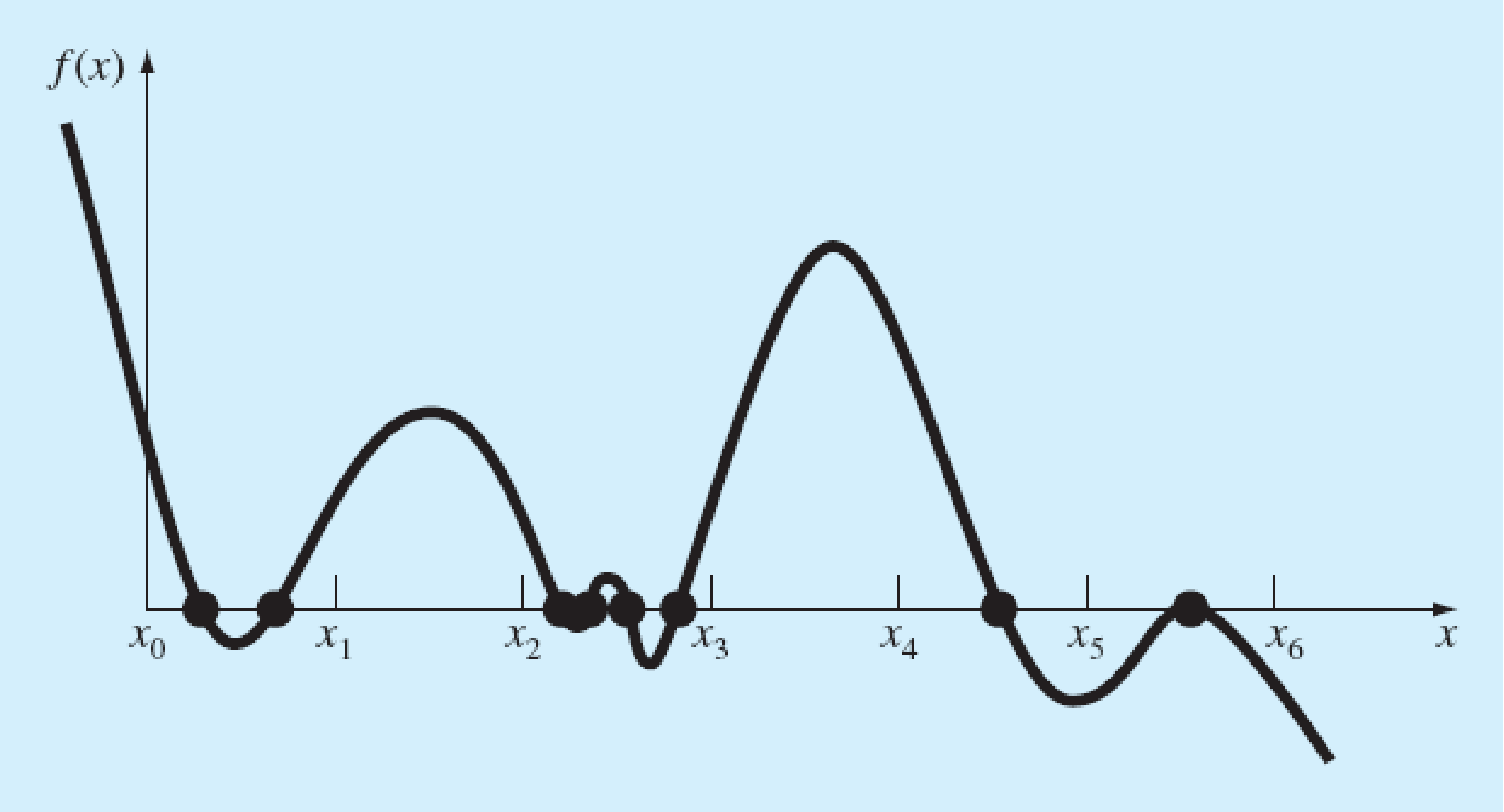
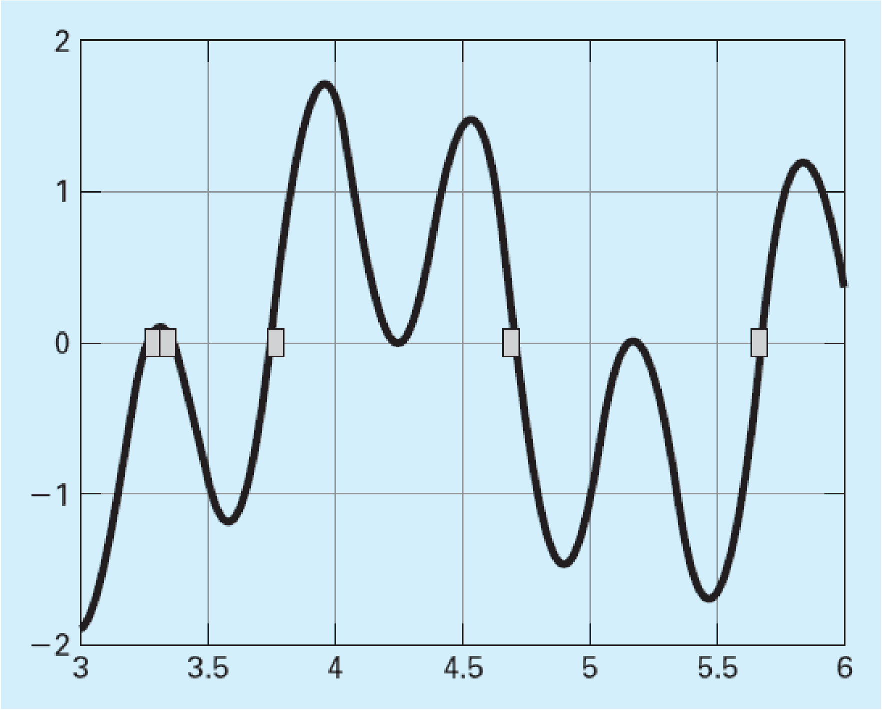
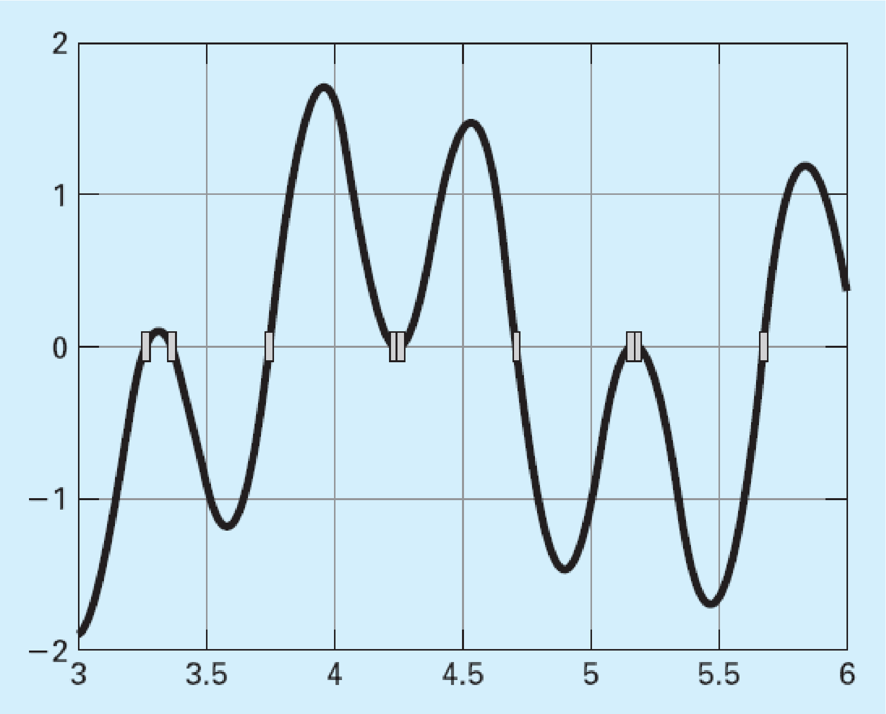


FIGURE 5.3
Cases where roots could be missed because the incremental length of the search procedure is too large. Note that the last root on the right is multiple and would be missed regardless of the increment length.

بررسی تاثیر تعداد زیر بازه در ریشه یابی

$$f(x) = \sin(10x) + \cos(3x)$$



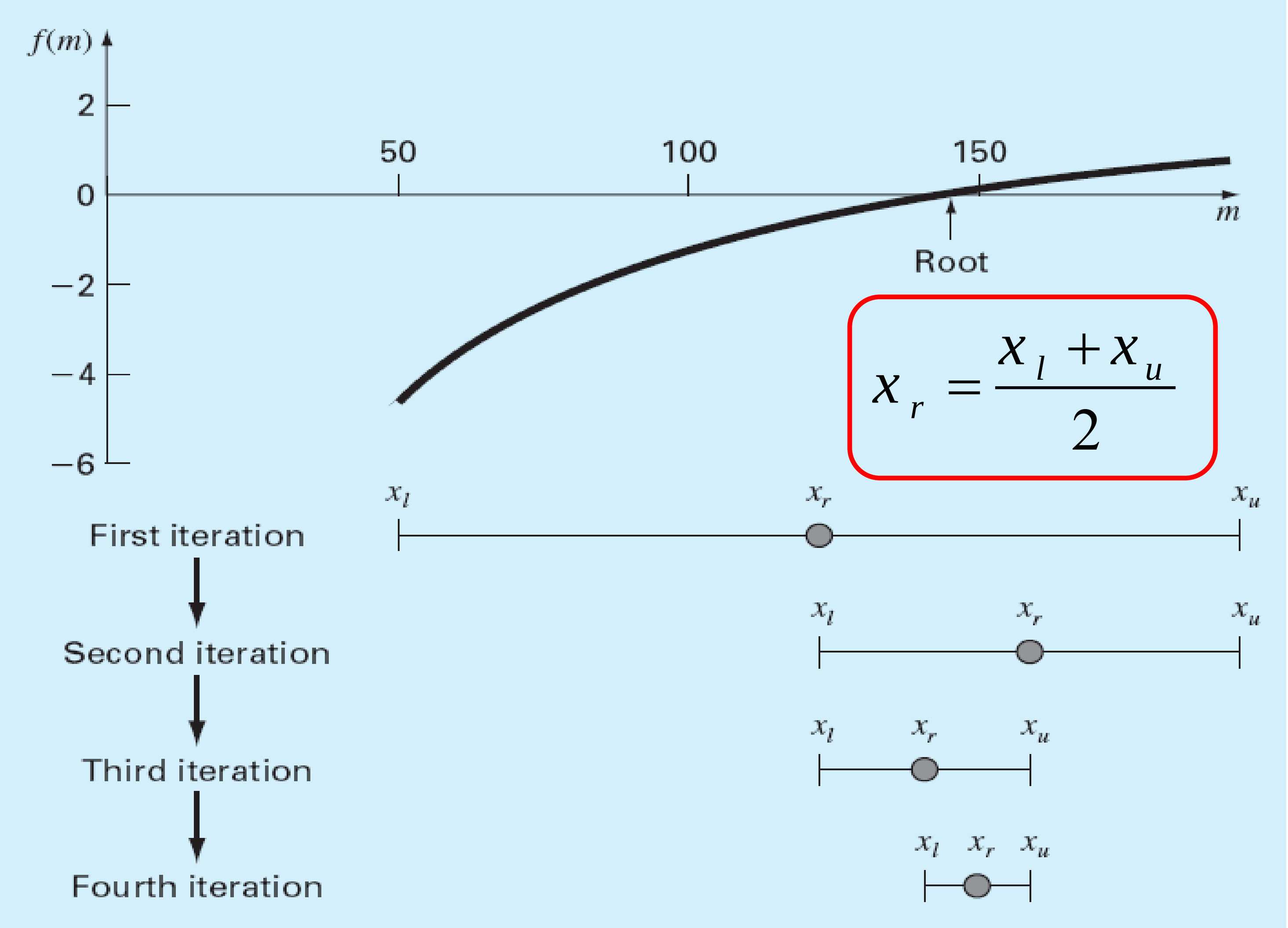


۵۰ زیر بازه

۱۰۰ زیر بازه

روش نصف کردن

- این روش نوعی جستجوی تدریجی است که در آن بازه همیشه به دو قسمت تقسیم می گردد.

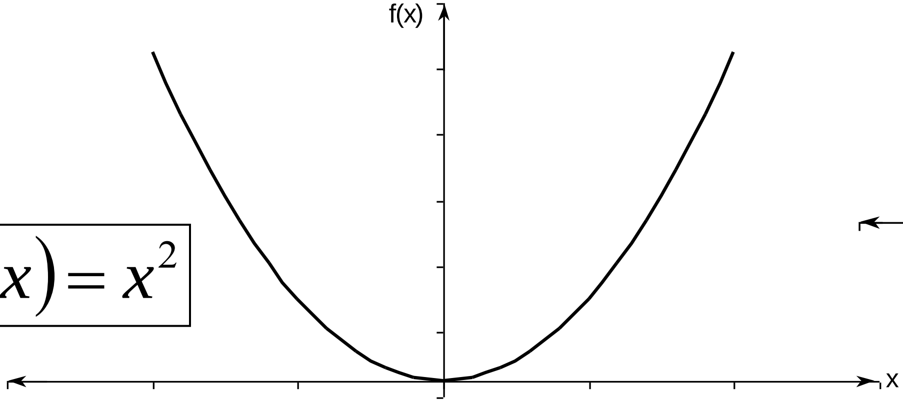


$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

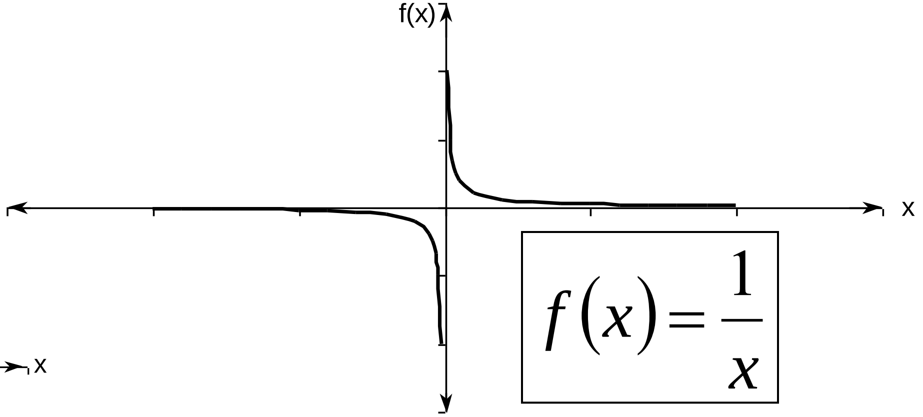
مزایا و معایب روش نصف کردن

- مزایا:
  - همیشه همگرا خواهد بود.
  - در هر مرحله بازه مورد بررسی نصف خواهد شد.

- معایب:
  - همگرایی کند خصوصا زمانی که یکی از حدود نزدیک ریشه باشد.
  - درصورتیکه تابع بر محور x مماس باشد این روش جواب نخواهد داد.
  - زمانی که تابع دارای مجانب است این روش جواب نمی دهد.

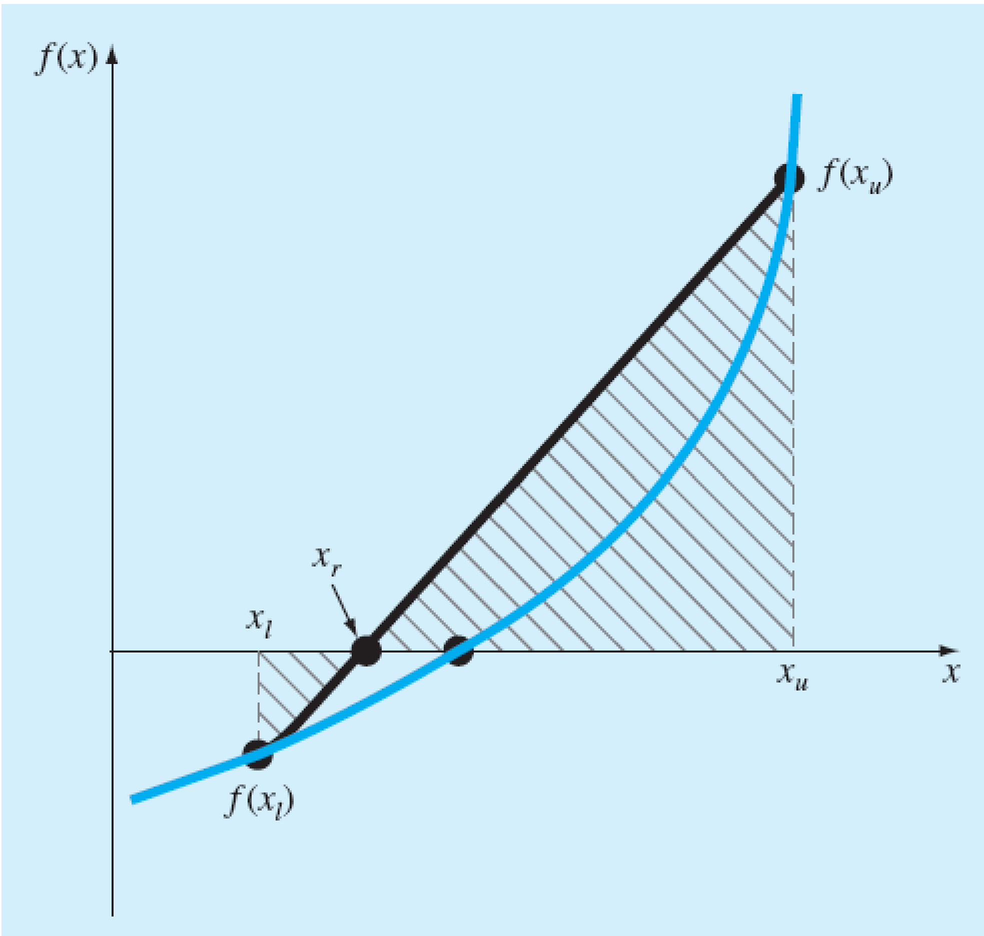


$$f(x)=x^2$$



$$f(x)=\frac{1}{x}$$

5.5 FALSE POSITION



- در این روش از معادله زیر برای محاسبه موقعیت جدید استفاده می شود.

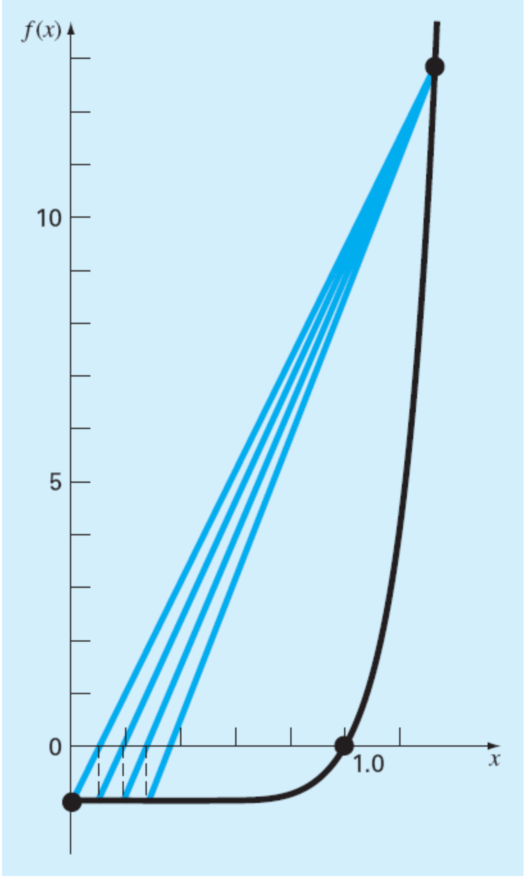
$$\boxed{x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}}$$

- سپس با توجه به علامت تابع در x_r ، مقدار جدید (x_r) جایگزین یکی از حدود اولیه می شود که با x_r هم علامت است و روند فوق ادامه می یابد.

اگرچه در اغلب موارد روش موقعیت اشتباه بهتر از روش نصف کردن است، در بعضی مسائل روش نصف کردن برتری دارد.

$$f(x) = x^{10} - 1$$

between $x = 0$ and 1.3.



نتایج روش نصف کردن

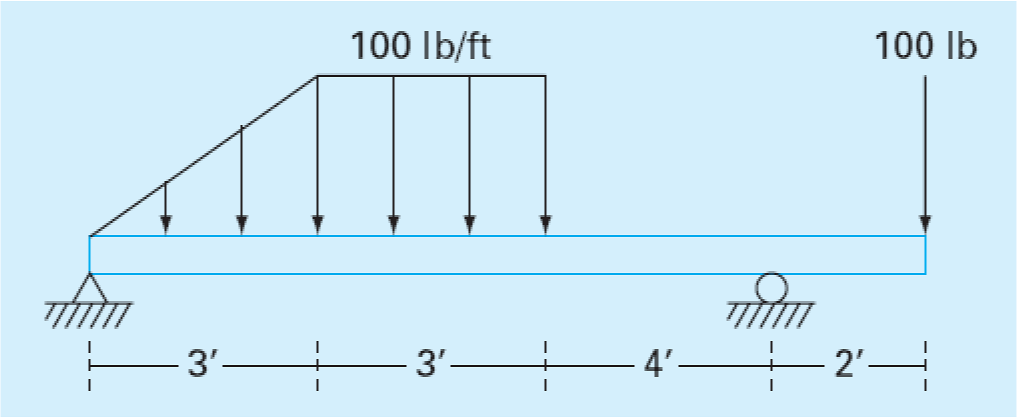
Iteration	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	0	1.3	0.65	100.0	35
2	0.65	1.3	0.975	33.3	2.5
3	0.975	1.3	1.1375	14.3	13.8
4	0.975	1.1375	1.05625	7.7	5.6
5	0.975	1.05625	1.015625	4.0	1.6

نتایج روش موقعیت اشتباه

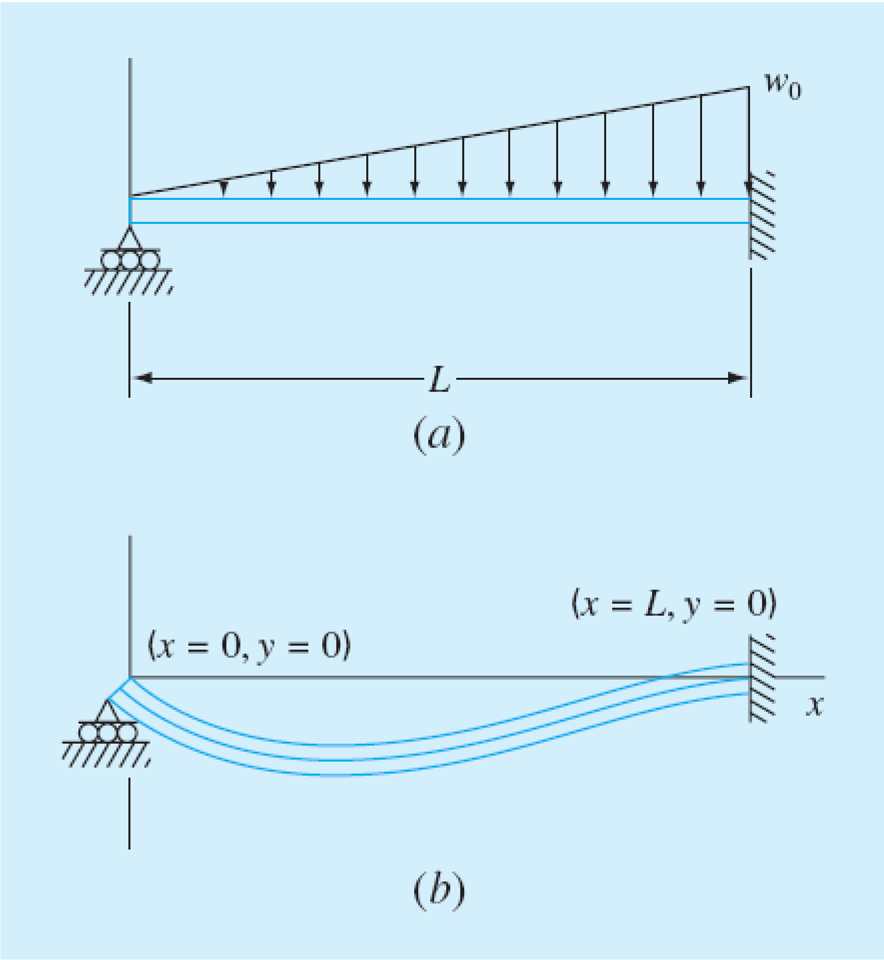
Iteration	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	0	1.3	0.09430		90.6
2	0.09430	1.3	0.18176	48.1	81.8
3	0.18176	1.3	0.26287	30.9	73.7
4	0.26287	1.3	0.33811	22.3	66.2
5	0.33811	1.3	0.40788	17.1	59.2

تمرین ۱:

- در تیر نشان داده شده موقعیت نقطه ای را که دارای گشتاور خمشی صفر است با استفاده از روش نصف کردن بدست آورید.



تمرین ۲:



- تابع خیز تیر نشان داده شده مطابق زیر است:

$$y = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x)$$

از روش نصف کردن برای محاسبه خیز ماکزیمم (شیب صفر) استفاده کرده و مقدار خیز ماکزیمم را محاسبه کنید.

$L = 600$ cm, $E = 50{,}000$ kN/cm^2,

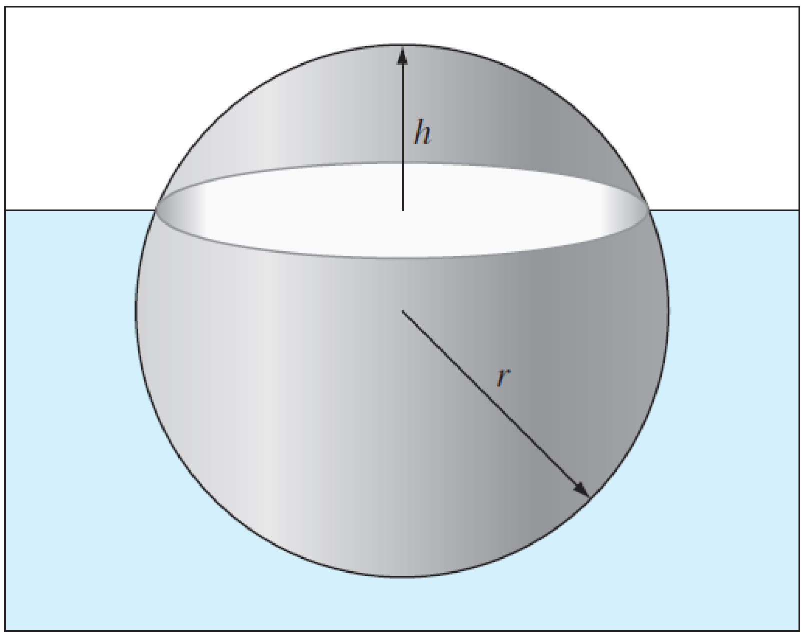
$I = 30{,}000$ cm^4, and $w_0 = 2.5$ kN/cm.

تمرین ۳:

- بر اساس اصل ارشمیدس، نیروی وارد از طرف سیال به جسم غوطه ور برابر وزن سیال جابجا شده در اثر جسم غوطه ور است.

برای کره نشان داده شده ارتفاع h را در شرایط زیر با استفاده از روش موقعیت خطا بدست آورید. حجم فضای بیرون از سیال از رابطه نشان داده شده بدست می آید.

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$



$r = 1$ m, ρ_s = density of sphere = 200 kg/m^3, and ρ_w = 1,000 kg/m^3.

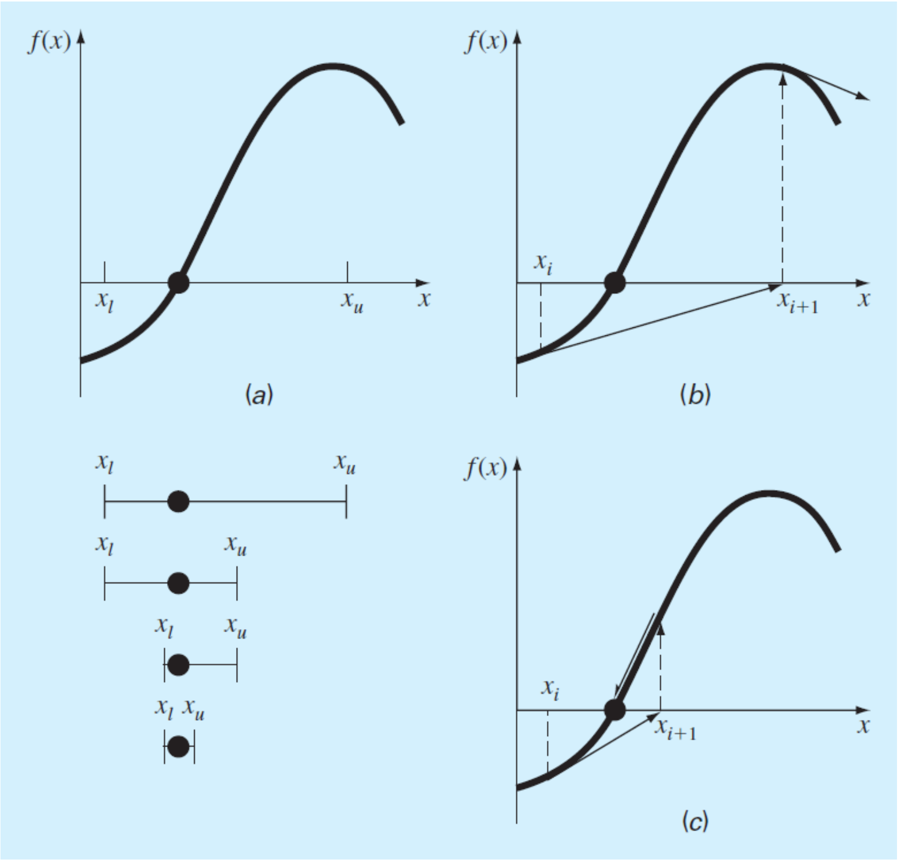
6

بخش ششم

Roots: Open Methods

ریشه یابی: روشهای باز

تفاوت روش های دربرگیرنده ریشه و روشهای باز



در روشهای دربرگیرنده ریشه (بطور مثال روش نصف کردن)، حدود اولیه، ریشه را محاصره کرده اند. درحالیکه در روشهای باز (مانند روش نیوتن-رافسون) یک فرمول برای محاسبه نقطه جدید استفاده می شود. لذا ممکن است روش سریعا همگرا یا واگرا گردد.

در این روش تابع مورد بررسی از فرم $f(x) = 0$ به فرم $x = g(x)$ بازنویسی می شود. لذا این رابطه وسیله ای برای محاسبه مقادیر جدید ایجاد می کند و داریم:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

با استفاده مکرر از این رابطه برای برخی مسائل ممکن است این روش به یک مقدار همگرا گردد. در برخی مسائل نیز ممکن است که روش واگرا شود.

مثال:

- ریشه معادله زیر مطلوبست:

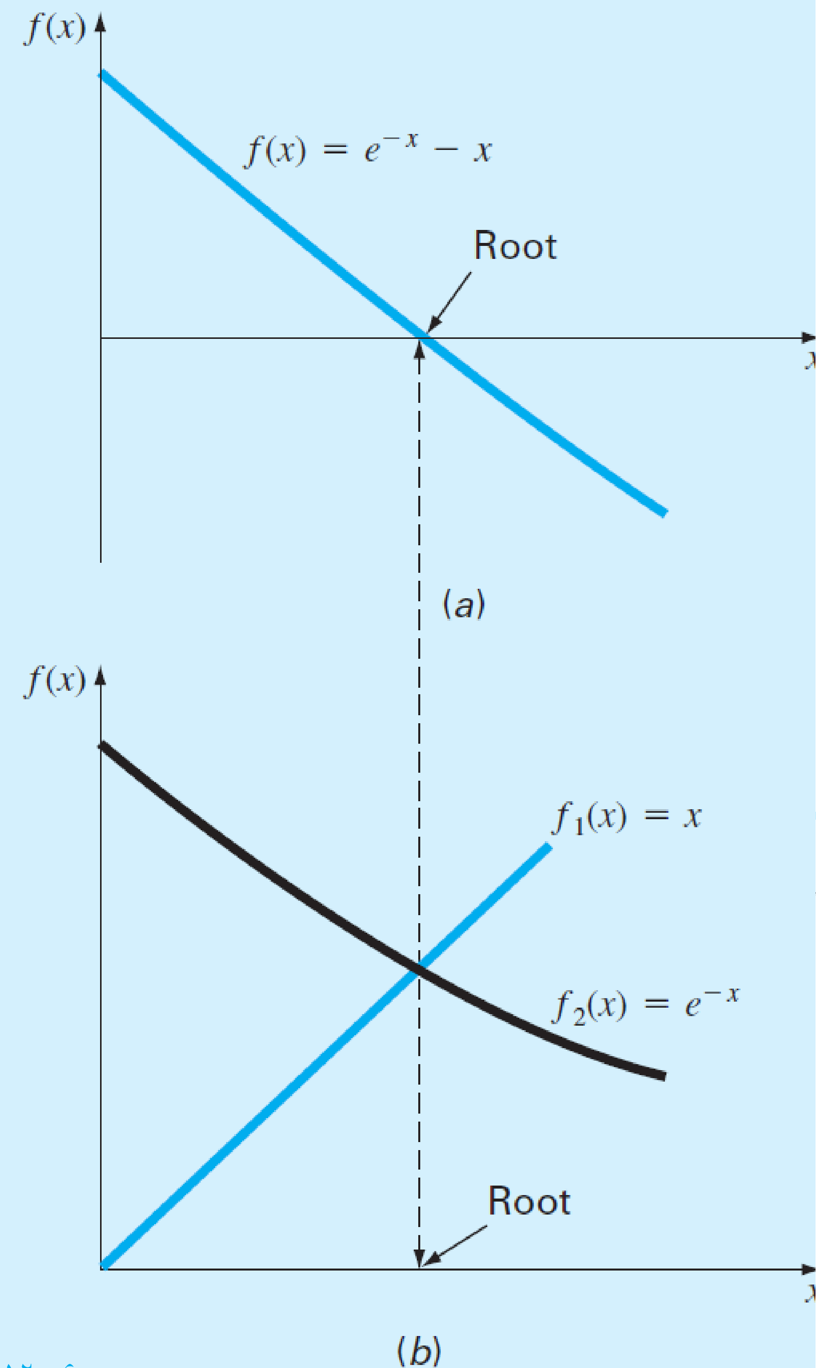
$$f(x) = e^{-x} - x.$$

- تابع فوق به دو قسمت تقسیم می شود:

$$y_1 = x \qquad y_2 = g(x)$$

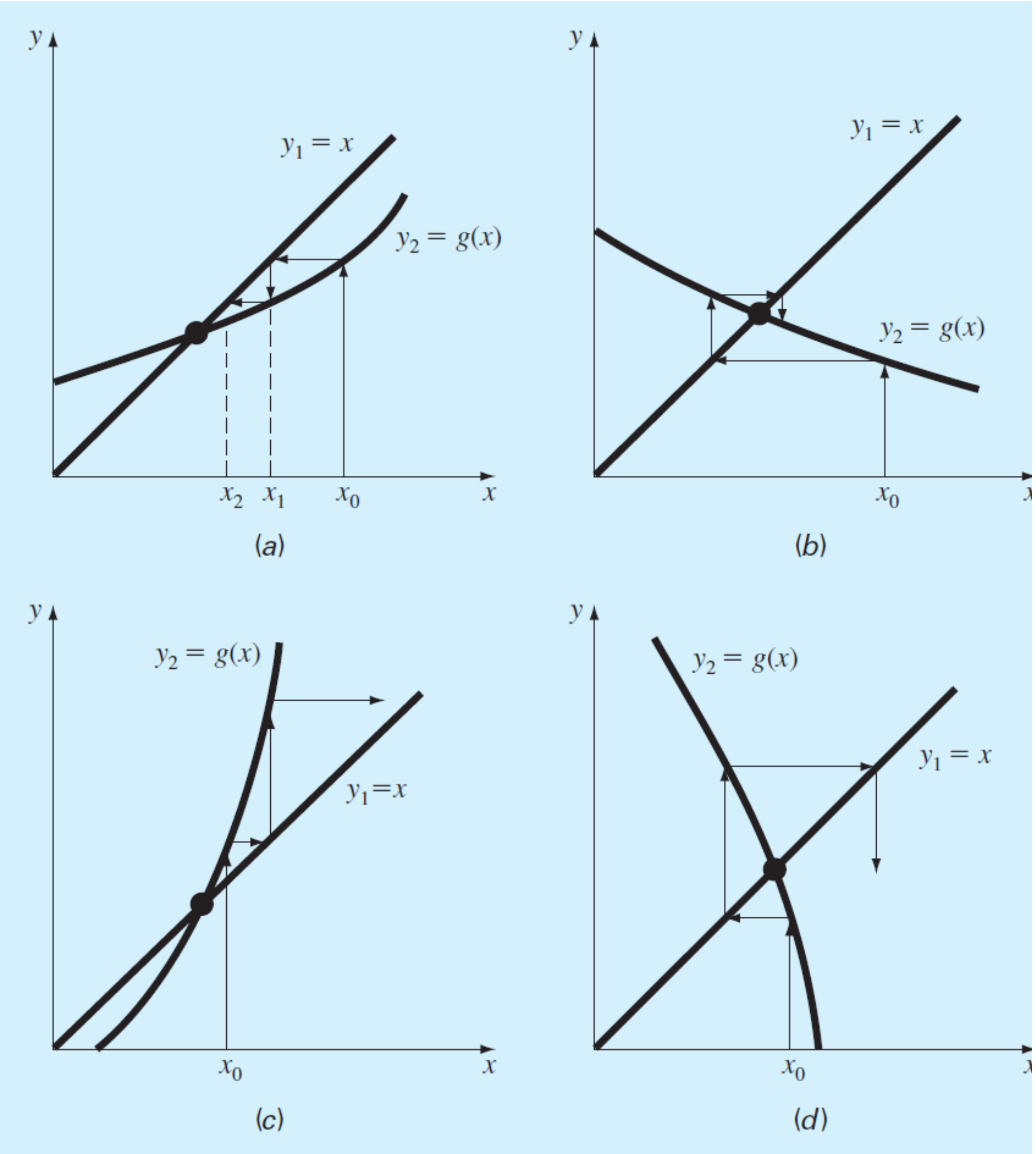
- با شروع از نقطه x.=۰ و تکرار:

$$x_1 = g(x_0) \Rightarrow x_2 = g(x_1)$$



i	x_i	$\lvert\varepsilon_a\rvert$, %	$\lvert\varepsilon_t\rvert$, %	$\lvert\varepsilon_t\rvert_i/\lvert\varepsilon_t\rvert_{i-1}$
0	0.0000		100.000	
1	1.0000	100.000	76.322	0.763
2	0.3679	171.828	35.135	0.460
3	0.6922	46.854	22.050	0.628
4	0.5005	38.309	11.755	0.533
5	0.6062	17.447	6.894	0.586
6	0.5454	11.157	3.835	0.556
7	0.5796	5.903	2.199	0.573
8	0.5601	3.481	1.239	0.564
9	0.5711	1.931	0.705	0.569
10	0.5649	1.109	0.399	0.566

همگرایی و واگرایی در روش تکرار متوالی



a) همگرایی یکنواخت

b) همگرایی نوسانی

c) واگرایی یکنواخت

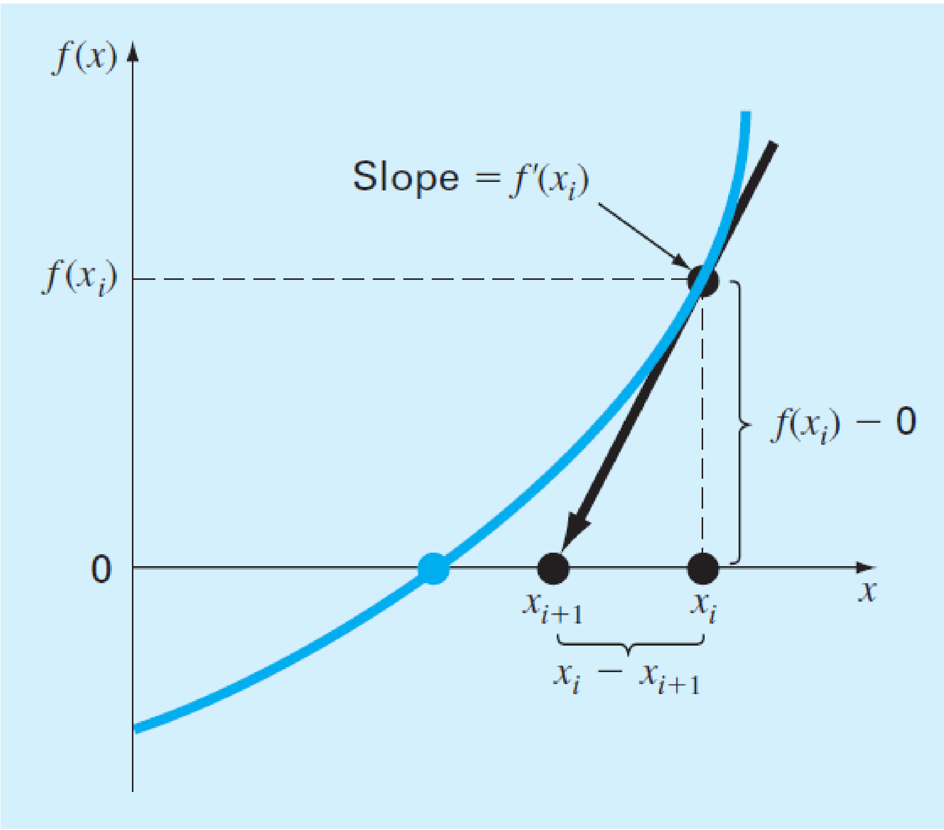
d) واگرایی نوسانی

شرط همگرایی روش:

$$|g'(x)| < 1$$

6.2 NEWTON-RAPHSON — روش نیوتن-رافسون

- در روش نیوتن-رافسون از تعریف مشتق تابع برای محاسبه ریشه استفاده می شود.



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

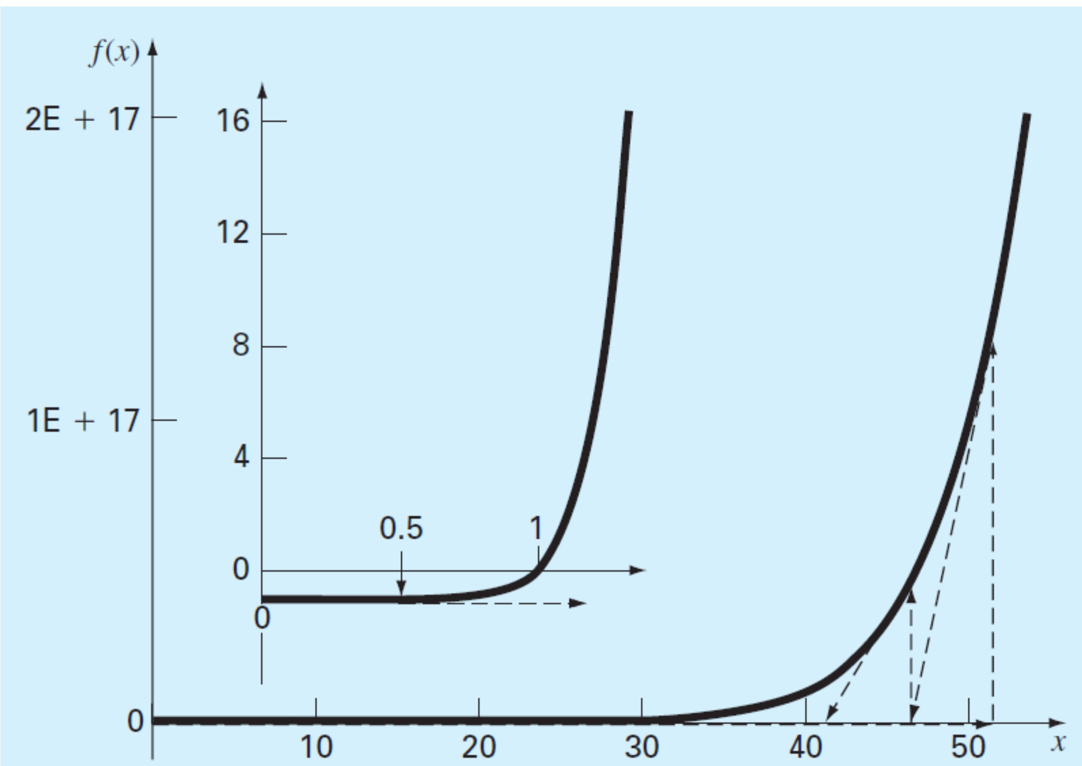
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

مثال: یک تابع با همگرایی کند

- برای ریشه یابی تابع نشان داده شده، روش نیوتن-رافسون بسیار کند همگرا می شود. (پس از ۴۰ مرحله)

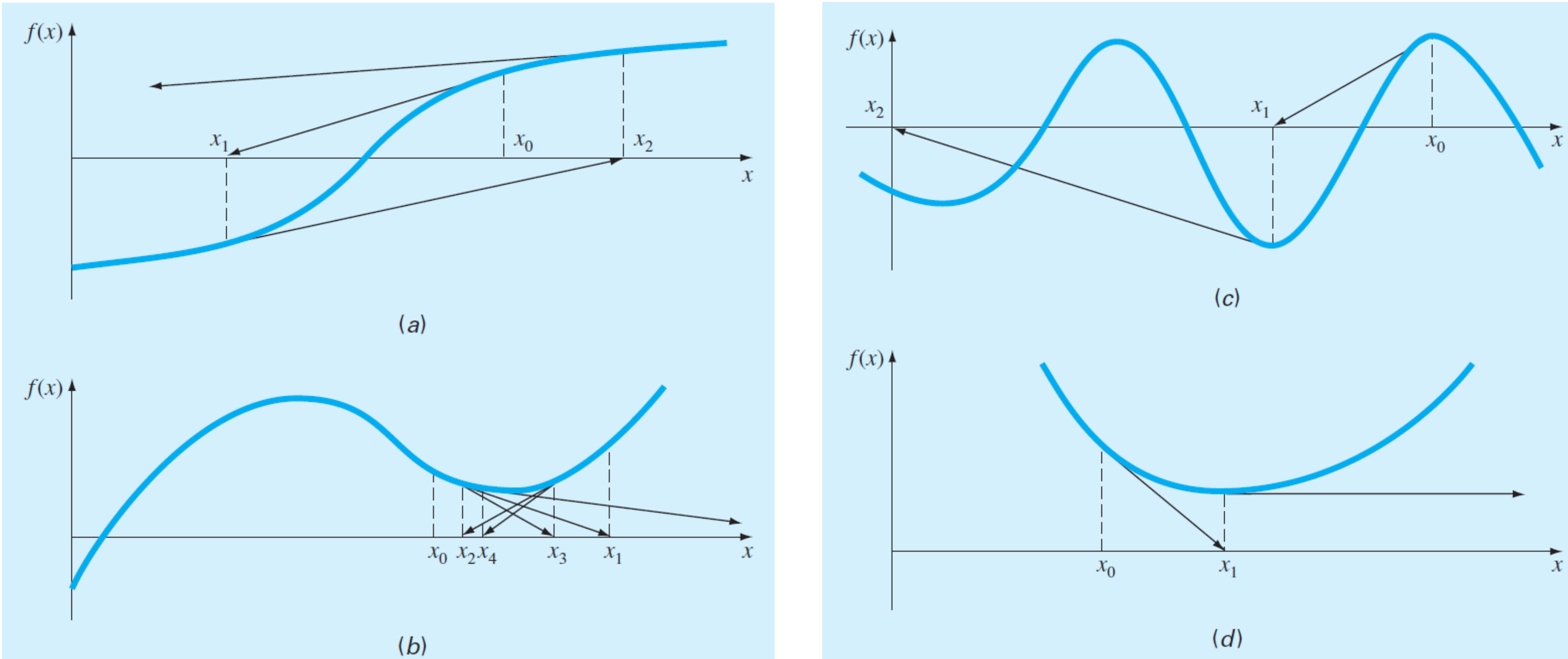
$$f(x) = x^{10} - 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{10} - 1}{10x_i^9}$$



i	x_i	$\lvert\varepsilon_a\rvert$, %
0	0.5	
1	51.65	99.032
2	46.485	11.111
3	41.8365	11.111
4	37.65285	11.111
•		
•		
•		
40	1.002316	2.130
41	1.000024	0.229
42	1	0.002

شرایطی که روش نیوتن-رافسون دارای همگرایی ضعیفی است.



a) نقاط نزدیک به ریشه دارای شیب نزدیک به صفر هستند.

b) تمایل روش نیوتن-رافسون به نوسان حول کمینه یا بیشینه موضعی

c) انتخاب نقطه اولیه نزدیک یک ریشه منجر به پرش به چندین ریشه دورتر می شود.

d) شیب صفر باعث ایجاد ابهام در رابطه نیوتن رافسون می شود. همچنین شیب نزدیک به صفر باعث دور شدن شدید نقطه بعدی از نقطه حاضر می شود.

لذا یک قاعده کلی برای همگرایی این روش وجود ندارد و همگرایی به نوع تابع و حدس اولیه بستگی دارد. انتخاب یک حدس اولیه مناسب با توجه به شرایط فیزیکی مسئله امکان پذیر است.

6.3 SECANT METHODS روش سکانت

- یکی از مشکلات روش نیوتن-رافسون لزوم محاسبه تابع مشتق است. برای حل این معضل می توان از تعریف (عقبگرد) مشتق استفاده نمود.

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

- رابطه فوق، رابطه سکانت نامیده می شود. دقت نمائید که در این روش به دو حدس اولیه نیاز است ولی لزومی ندارد این دو نقطه در دو طرف ریشه بوده و آن را احاطه نمایند.
- با توجه به تعریف مشتق تقریبی، دو نقطه اولیه می بایست به هم نزدیک باشند.

Modified Secant Method روش سکانت بهبودیافته

- در روش سکانت به دو نقطه اولیه نیاز است. اما با تغییر تعریف مشتق می توان از یک نقطه اولیه بصورت زیر استفاده نمود.

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i} \quad \Longrightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i\, f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

- انتخاب بهینه دلتا قاعده مشخصی ندارد.
- انتخاب دلتا کوچک می تواند باعث افزایش خطای گردکردن بدلیل تفاضل موجود در مخرج کسر گردد. زیرا تعداد مراحل افزایش می یابد. در مقابل مقادیر بزرگ دلتا می تواند باعث ناکارآمدی روش و حتی واگرایی روش شود.

مثال:

- با استفاده از تابع سرعت پرشگر با بانجی، جرم شخص را با شرایط زیر محاسبه نمائید. از m=۵۰kg به عنوان نقطه شروع و برای طول گام، مقدار ۱۰^-۶^ برابر جرم را استفاده نمائید.

g=۹.۸۱ (m/s^۲^), C_d=۰.۲۵ (kg/m), v(۴s)=۳۶ (m/s)

- معادله حاکم بر مسئله:

$$v = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

- حل: رابطه سکانت بهبودیافته:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

$$x_0 = 50 \qquad f(x_0) = -4.57938708$$

$$x_0 + \delta x_0 = 50.00005 \qquad f(x_0 + \delta x_0) = -4.579381118$$

$$x_1 = 50 - \frac{10^{-6}(50)(-4.57938708)}{-4.579381118 - (-4.57938708)}$$

$$= 88.39931 (|\varepsilon_t| = 38.1\%;\ |\varepsilon_a| = 43.4\%)$$

Second iteration:

$$x_1 = 88.39931 \qquad f(x_1) = -1.69220771$$

$$x_1 + \delta x_1 = 88.39940 \qquad f(x_1 + \delta x_1) = -1.692203516$$

$$x_2 = 88.39931 - \frac{10^{-6}(88.39931)(-1.69220771)}{-1.692203516 - (-1.69220771)}$$

$$= 124.08970(|\varepsilon_t| = 13.1\%; |\varepsilon_a| = 28.76\%)$$

The calculation can be continued to yield

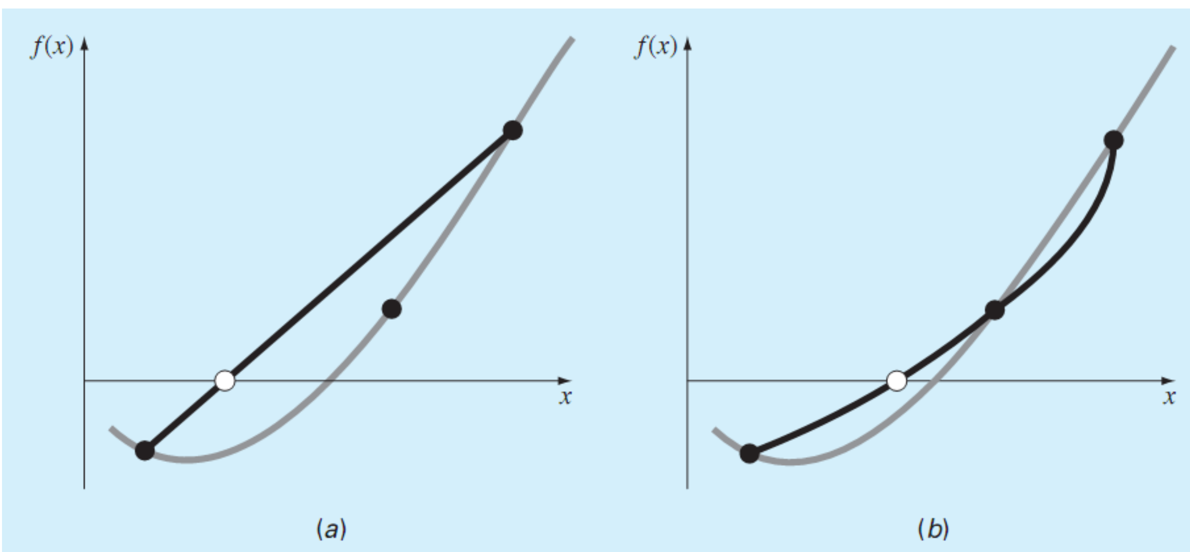
i	x_i	$\lvert\varepsilon_t\rvert$, %	$\lvert\varepsilon_a\rvert$, %
0	50.0000	64.971	
1	88.3993	38.069	43.438
2	124.0897	13.064	28.762
3	140.5417	1.538	11.706
4	142.7072	0.021	1.517
5	142.7376	4.1×10^{-6}	0.021
6	142.7376	3.4×10^{-12}	4.1×10^{-6}

6.4 BRENT'S METHOD روش برنت

- این روش ترکیبی هوشمندانه از یک روش ریشه یابی باز و یک روش دربرگیرنده ریشه است. لذا اطمینان روش دربرگیرنده و سرعت روش باز را دارا می باشد.
- روش نصف کردن به عنوان روش دربرگیرنده و یکی از روشهای سکانت یا میان یابی مرتبه دو معکوس به عنوان روش ریشه یابی باز استفاده می شود. روش سکانت به دو نقطه و روش میان یابی مرتبه دو معکوس به سه نقطه نیاز دارد اما دارای دقت بالاتری است. مقایسه این دو روش در شکل زیر نشان داده شده است.

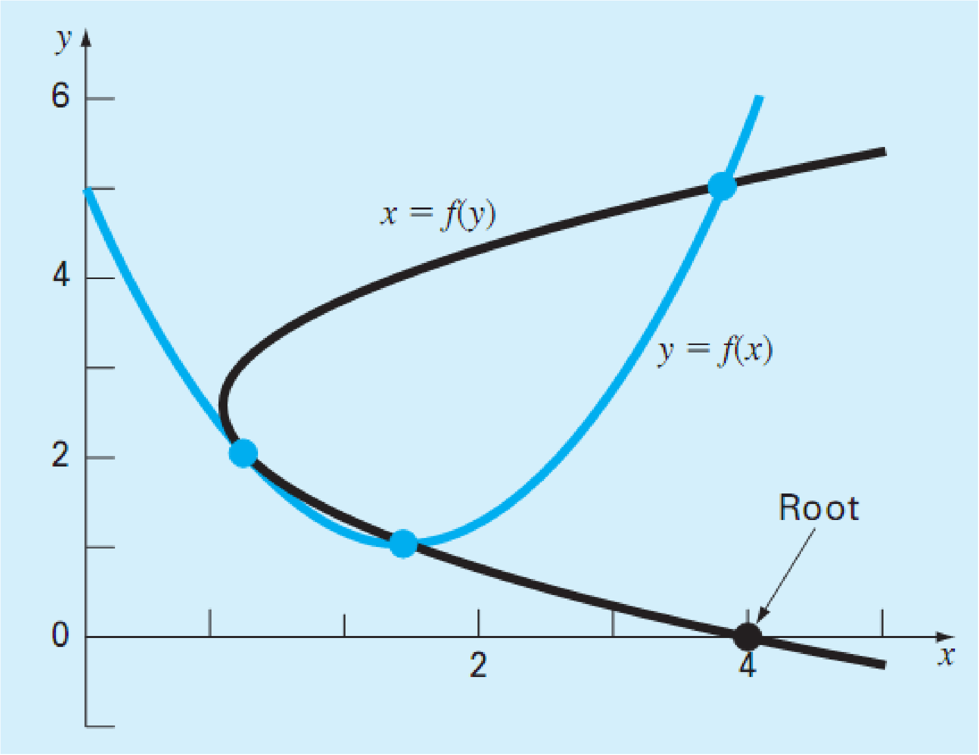
روش سکانت:

روش میان یابی مرتبه دوم معکوس:



دلیل استفاده از میان یابی مرتبه دو **معکوس**:

- همانگونه که در شکل زیر ملاحظه می شود، در صورتیکه تابع میان یابی گذرنده از سه نقطه موجود، به صورت y=f(x) و بر حسب x نوشته شود لزوماً با محور x تلاقی نخواهد داشت (یعنی ممکن است ریشه حقیقی نداشته باشد). در حالیکه اگر به صورت x=f(y) بیان شود قطعا محور x را قطع خواهد نمود.

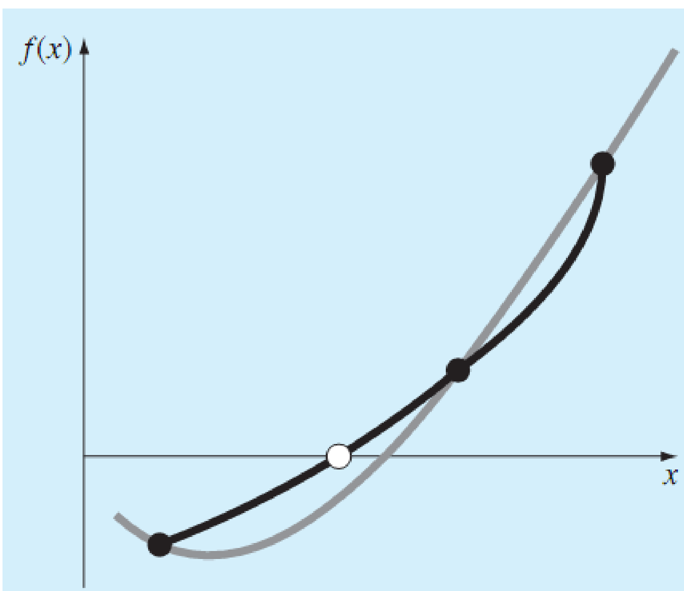


تابع میان یاب مرتبه دو معکوس:

- تابع میان یاب مرتبه دو معکوس به فرم x=f(y) را می توان با استفاده از چندجمله ای لاگرانژ به صورت زیر بدست آورد:

$$g(y) = \frac{(y - y_{i-1})(y - y_i)}{(y_{i-2} - y_{i-1})(y_{i-2} - y_i)} x_{i-2} + \frac{(y - y_{i-2})(y - y_i)}{(y_{i-1} - y_{i-2})(y_{i-1} - y_i)} x_{i-1}$$
$$+ \frac{(y - y_{i-2})(y - y_{i-1})}{(y_i - y_{i-2})(y_i - y_{i-1})} x_i$$

- ریشه مرحله بعدی (x_{i+1}) با قرار دادن مقدار صفر بجای y بدست می آید لذا خواهیم داشت:



$$\frac{\quad}{\cdots - y_i)} x_{i-2} + \frac{y_{i-2} y_i}{(y_{i-1} - y_{i-2})(y_{i-1} - y_i)} x_{i-1}$$

$$\frac{\quad}{\cdots y_{i-1})} x_i$$

الگوریتم روش برنت:

- فرآیند ریشه یابی در ابتدا با روش نصف کردن شروع می گردد که در مراحل اولیه دارای سرعت مناسب می باشد.

- پس از طی چندین مرحله و کوچک شدن بازه، کارایی و سرعت روش نصف کردن کاهش می یابد. لذا ادامه فرآیند ریشه یابی با یکی از روشهای باز اشاره شده دنبال می شود تا نهایتا ریشه با دقت قابل قبول محاسبه گردد.

6.5 MATLAB FUNCTION: `fzero` تابع ریشه یابی متلب

- این دستور برای محاسبه یک ریشه حقیقی معادله استفاده می شود.
- دستور با یک حدس اولیه

```
fzero(function,x0)
```

- دستور با دو حدس اولیه (برای اطمینان از قرار گرفتن ریشه در بازه مورد نظر)

```
fzero(function,[x0 x1])
```

- برای یافتن ریشه های مختلف می توان از حدس اولیه های مختلف استفاده کرد.

```
>> x = fzero(@(x) x^2-9,-4)
x =
    -3
>> x = fzero(@(x) x^2-9,4)
x =
     3
```

- اگر صفر به عنوان مقدار اولیه داده شود، ریشه منفی یافته خواهد شد:

```
>> x = fzero(@(x) x^2-9,0)

x =
    -3
```

- درصورتیکه دو مقدار اولیه داده شود، ریشه ای که در آن بازه قرار دارد یافته می شود:

```
>> x = fzero(@(x) x^2-9,[0 4])

x =
     3
```

- زمانیکه در حدود بازه تابع دارای علامت یکسانی باشد، پیغام خطایی در این رابطه داده می شود:

```
>> x = fzero(@(x) x^2-9,[-4 4])

??? Error using ==> fzero
The function values at the interval endpoints must ...
differ in sign.
```

6.6 POLYNOMIALS ریشه های چندجمله ای

6.6.1 MATLAB Function: `roots`

- این دستور برای محاسبه کلیه ریشه های یک چند جمله ای به فرم زیر بکار می رود.

$$f_n(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^2 + a_nx + a_{n+1}$$

```
x = roots(c)
```

- C بردار حاوی ضرایب چندجمله ای است.
- مثال: برای ریشه یابی معادله زیر داریم:

$$f_5(x) = x^5 - 3.5x^4 + 2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25$$

```
>> a = [1 -3.5 2.75 2.125 -3.875 1.25];
```

```
>> x = roots(a)

x =
  2.0000
 -1.0000
  1.0000 + 0.5000i
  1.0000 - 0.5000i
  0.5000
```

نحوه ریشه یابی با دستور roots

$$a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0$$

- ابتدا چندجمله ای اولیه با تقسیم بر a_1 و بازنویسی به فرم زیر در می آید:

$$x^5 = -\frac{a_2}{a_1}x^4 - \frac{a_3}{a_1}x^3 - \frac{a_4}{a_1}x^2 - \frac{a_5}{a_1}x - \frac{a_6}{a_1}$$

- حال با توجه به ضرایب جملات سمت راست، ماتریس ویژه ای به نام ماتریس همراهی (Companion Matrix) تشکیل می شود:

$$\begin{bmatrix} -a_2/a_1 & -a_3/a_1 & -a_4/a_1 & -a_5/a_1 & -a_6/a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- مقادیر ویژه این ماتریس برابر ریشه های چندجمله ای اولیه می باشند. لذا با استفاده از تابع قوی موجود در متلب برای محاسبه مقادیر ویژه، کلیه ریشه های معادله محاسبه می گردد.

معکوس دستور roots:

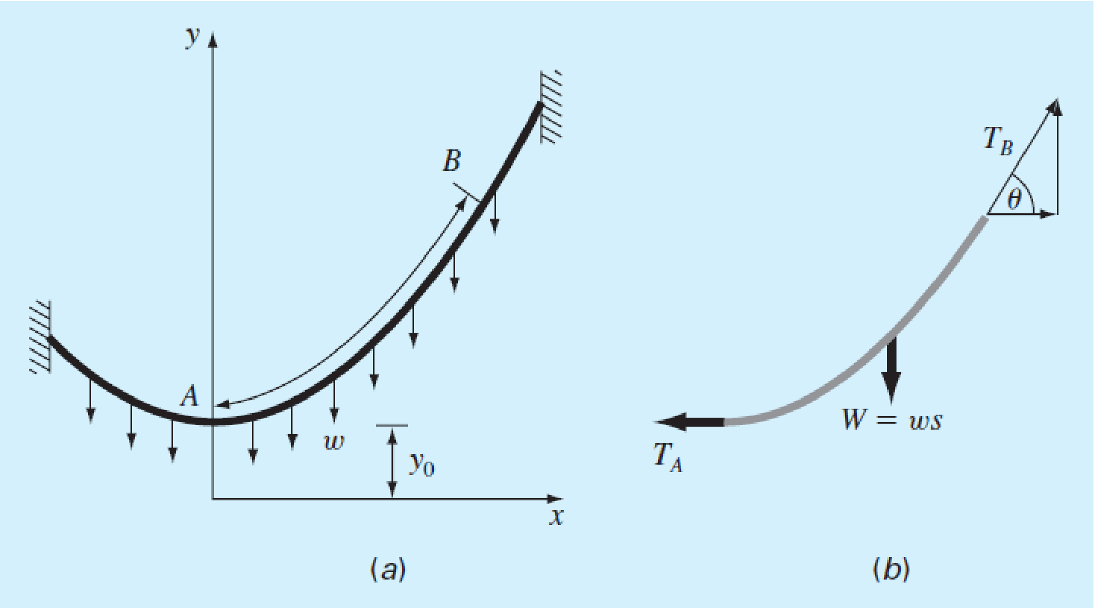
- معکوس تابع roots در متلب، دستور poly می باشد که فرم آن به صورت زیر است:

```
c = poly(r)
```

- r بردار ستونی حاوی ریشه هاست و این دستور، ضرایب چندجمله ای را در بردار c برمی گرداند.

تمرین ۱:

- کابلی مطابق شکل تحت تاثیر وزن خود قرار دارد. معادله دیفرانسیل حاکم بر شکل کابل به فرم زیر می باشد:



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_A}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

- لذا معادله ارتفاع کابل y در هرنقطه عبارتست از:

$$y = \frac{T_A}{w}\cosh\left(\frac{w}{T_A}x\right) + y_0 - \frac{T_A}{w}$$

مقدار T_A را به ازاء پارامترهای داده شده با روش نیوتن-رافسون بدست آورید.

$$y_0 = 5,$$

$$w = 10$$

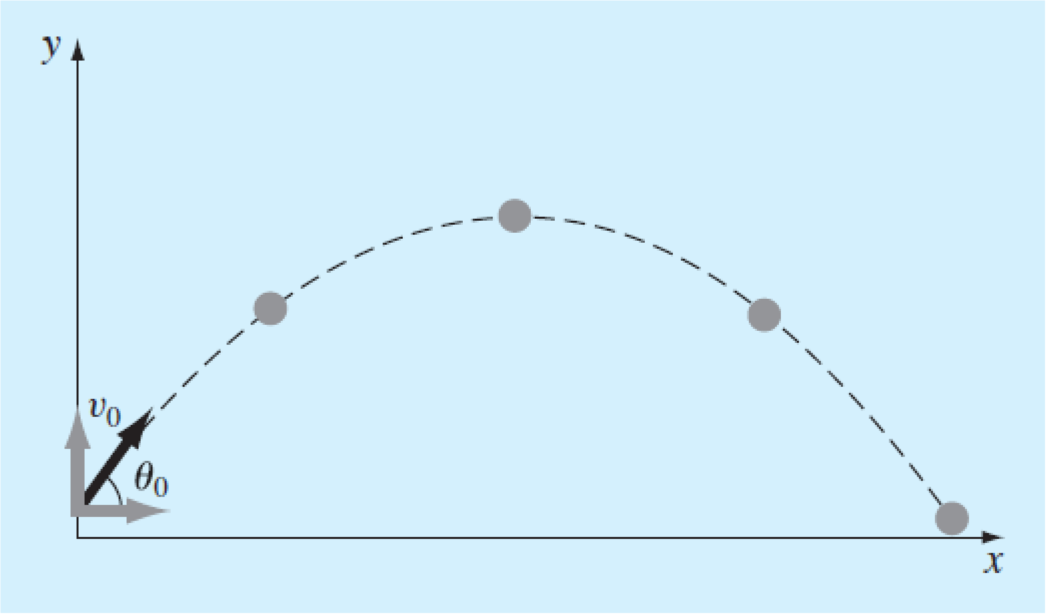
$$y = 15 \text{ at } x = 50.$$

تمرین ۲:

- یک توپ مطابق شکل با سرعت اولیه مشخص پرتاب می شود. موقعیت مکانی این پرتابه به فرم زیر می باشد:

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2 + y_0$$

مقدار زاویه شروع حرکت را به ازاء مقادیر زیر با روش سکانت اصلاح شده محاسبه نمائید. ارتفاع دست پرتاب کننده ۱.۸ متر و گیرنده توپ را پس از طی مسافت ۹۰ متر در ارتفاعی برابر ۱ متر دریافت می کند. $v_0 = 30$ m/s,



تمرین ۳:

تابع تبدیل یک سیستم روباتیک به صورت زیر می باشد.

$$G(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}{s^4 + 15s^3 + 77s^2 + 153s + 90}$$

با استفاده از روش نصف کردن ریشه های صورت و مخرج (صفر و قطب) را محاسبه کرده و نتیجه را به فرم زیر درآورید.

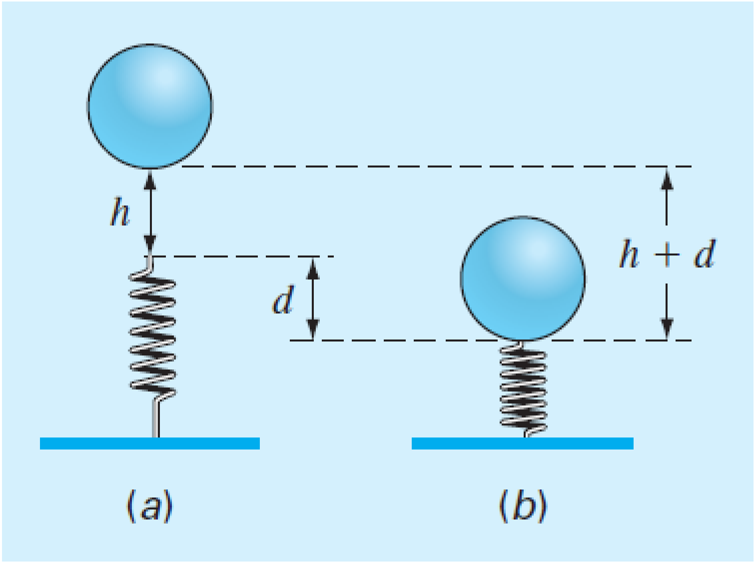
$$G(s) = \frac{(s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)}{(s + b_1)(s + b_2)(s + b_3)(s + b_4)}$$

نتیجه بدست آمده را با نتایج حاصل از تابع roots متلب مقایسه نمائید.

تمرین ۴:

در شکل نشان داده شده جرم از ارتفاع h رها مـی شـود و بـر روی یک فنر غیرخطی می افتد. نیروی مقاوم فنر به صورت زیـر داده شده است:

$$F = -(k_1 d + k_2 d^{3/2})$$



می توان از اصـل بقـای انـرژی بـرای استخراج معادله زیر استفاده نمود.

$$0 = \frac{2k_2 d^{5/2}}{5} + \frac{1}{2}k_1 d^2 - mgd - mgh$$

بـا توجـه بـه پارامترهـای داده شـده مقدار فشـردگی فنـر d را از روش برنت بدست آورید.

$k_1 = 40{,}000\ \mathrm{g/s^2},\ k_2 = 40\ \mathrm{g/(s^2\ m^5)},\ m = 95\ \mathrm{g},\ g = 9.81\ \mathrm{m/s^2},$
and $h = 0.43$ m.

7 بخش هفتم

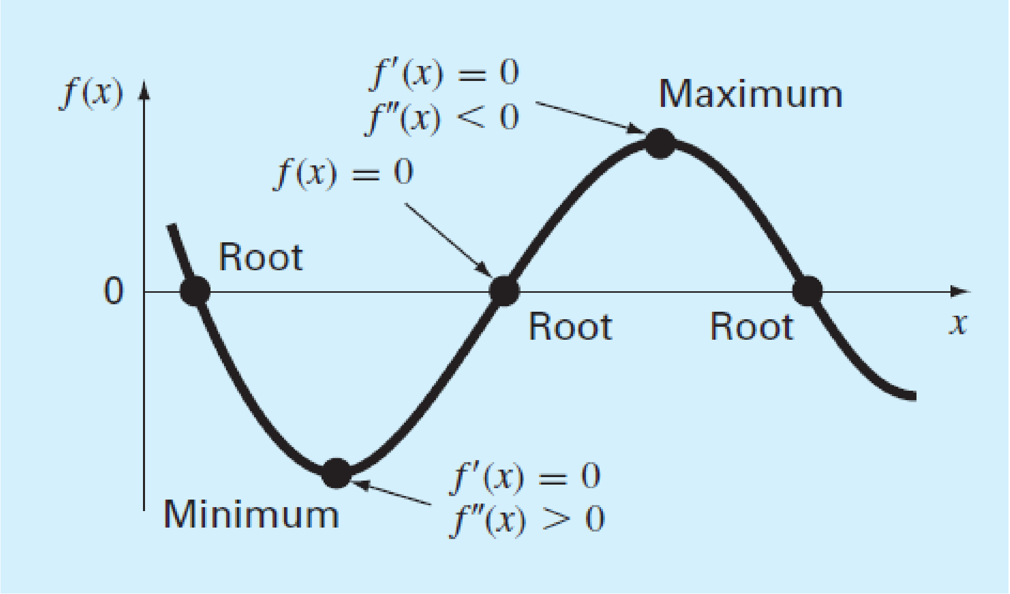
Optimization

بهینه سازی

(یافتن بیشینه و کمینه یک تابع)

در شکل زیر بیشینه و کمینه یک تابع بصورت شماتیک نشان داده شده است.

همانگونه که ملاحظه می شود در نقاط اکسترمم مشتق تابع صفر می باشد و نوع نقطه اکسترمم بستگی به علامت مشتق دوم تابع در آن نقطه دارد.

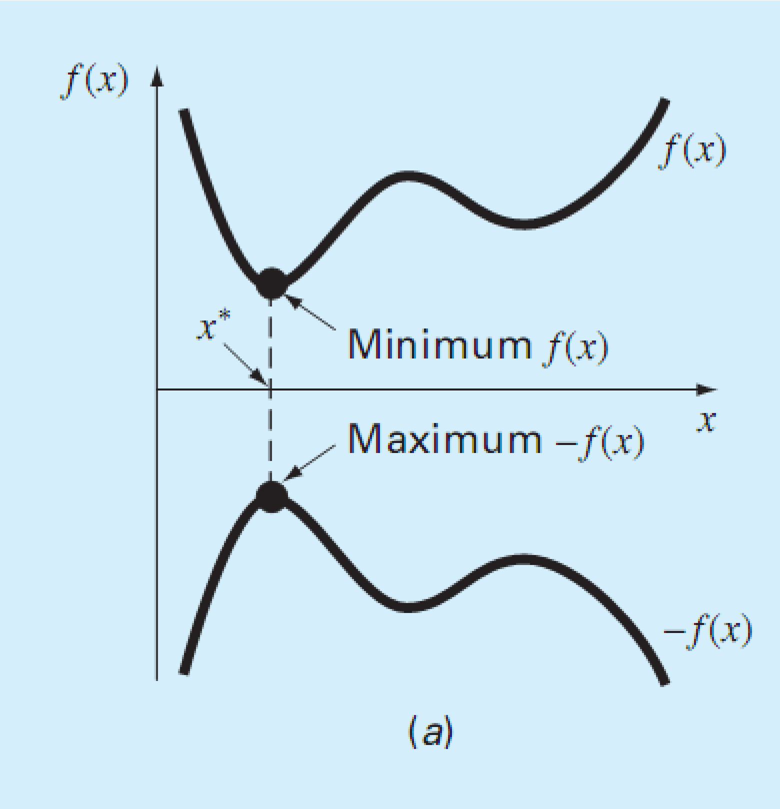


مینیمم $f''(x) > 0$

ماکزیمم $f''(x) < 0$

بنابراین برای یافتن نقاط اکسترمم می توان از تابع مشتق گرفته و ریشه های آن را بدست آورد.

رابطه میان مینیمم f(x) و ماکزیمم –f(x)



- مسائل بیشینه یابی را می توان به صورت کمینه یابی مطرح نمود. در شکل مقابل مشاهده می گردد که نقطه کمینه تابع f(x) بر بیشینه تابع –f(x) منطبق می باشد.

7.2.1 Golden-Section Search روش تقسیمات طلایی در کمینه یابی

نسبت طلایی

- مقدار دقیق نسبت طلایی با تعریف زیر قابل محاسبه است:

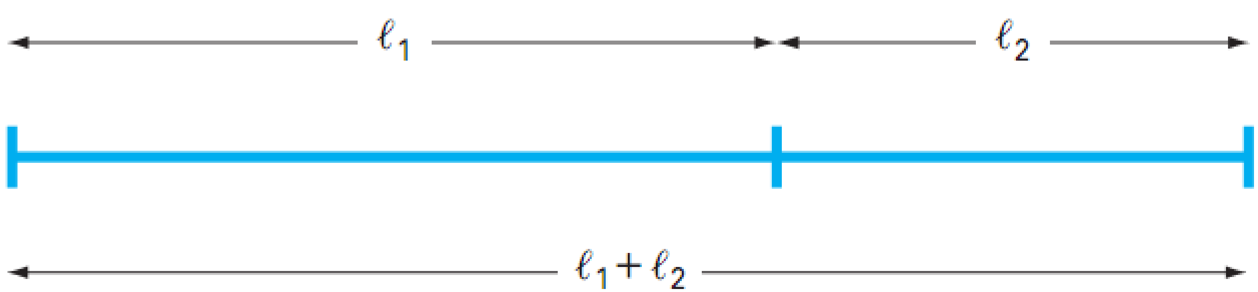
$$\frac{\ell_1+\ell_2}{\ell_1}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$$

- با ضرب طرفین رابطه فوق در نسبت $\phi=\ell_1/\ell_2$ داریم:

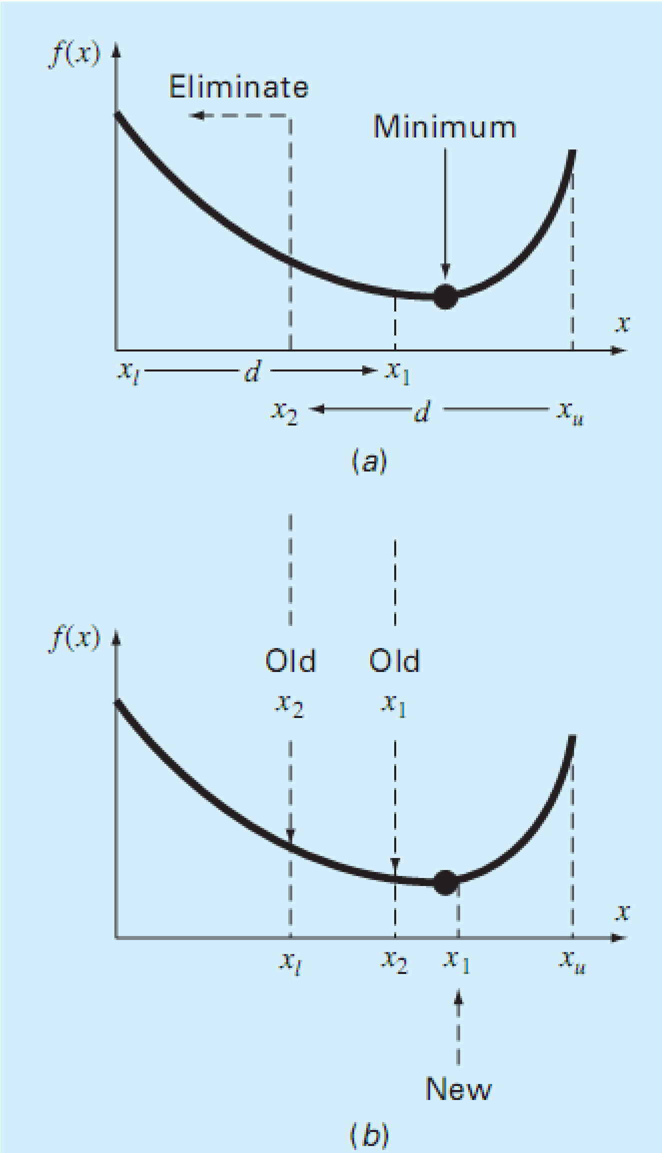
$$\phi^2-\phi-1=0$$

نسبت طلایی

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.61803398874989\ldots$$



روش تقسیمات طلایی



- روش مینیمم یابی تقسیمات طلایی مشابه روش نصف کردن از دو نقطه به عنوان حدود بالا و پائین استفاده می نماید. در روش نصف کردن یک نقطه میانی برای تعیین تغییر علامت تابع کافی است در حالیکه در روش تقسیمات طلایی به دو نقطه میانی نیاز است تا مینیمم تعیین شود. این دو نقطه به صورت زیر تعریف می شوند:

$$d = (\phi - 1)(x_u - x_l)$$

$$x_1 = x_l + d$$

$$x_2 = x_u - d$$

بازه جدید:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \text{ is the minimum} \Rightarrow [x_2, x_{up}] \\ f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(x_2) \text{ is the minimum} \Rightarrow [x_l, x_1] \end{cases}$$

مثال:

- مینیمم تابع زیر را با استفاده از تقسیمات طلایی در بــازه داده شــده بیابید.

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - 2\sin x \qquad x_l = 0 \text{ to } x_u = 4$$

- حل: ابتدا دو نقطه میانی محاسبه می شوند:

$$d = 0.61803(4-0) = 2.4721$$
$$x_1 = 0 + 2.4721 = 2.4721$$
$$x_2 = 4 - 2.4721 = 1.5279$$

$$f(x_2) = \frac{1.5279^2}{10} - 2\sin(1.5279) = -1.7647$$

$$f(x_1) = \frac{2.4721^2}{10} - 2\sin(2.4721) = -0.6300$$

- با توجه به اینکه $f(x_2) < f(x_1)$ بازه جدید بصورت زیر می باشد:

[x_l=۰, x_u=$x_۱$=۲.۴۷۲۱]

- همچنین $x_۲$ مرحله قبل برابر $x_۱$ مرحله جدید می شود:

$$d = 0.61803(2.4721 - 0) = 1.5279$$

$$x_2 = 2.4721 - 1.5279 = 0.9443 \qquad f(0.9943) = -1.5310$$

$$x_1 = 1.5279 \qquad f(1.5279) = -1.7647$$

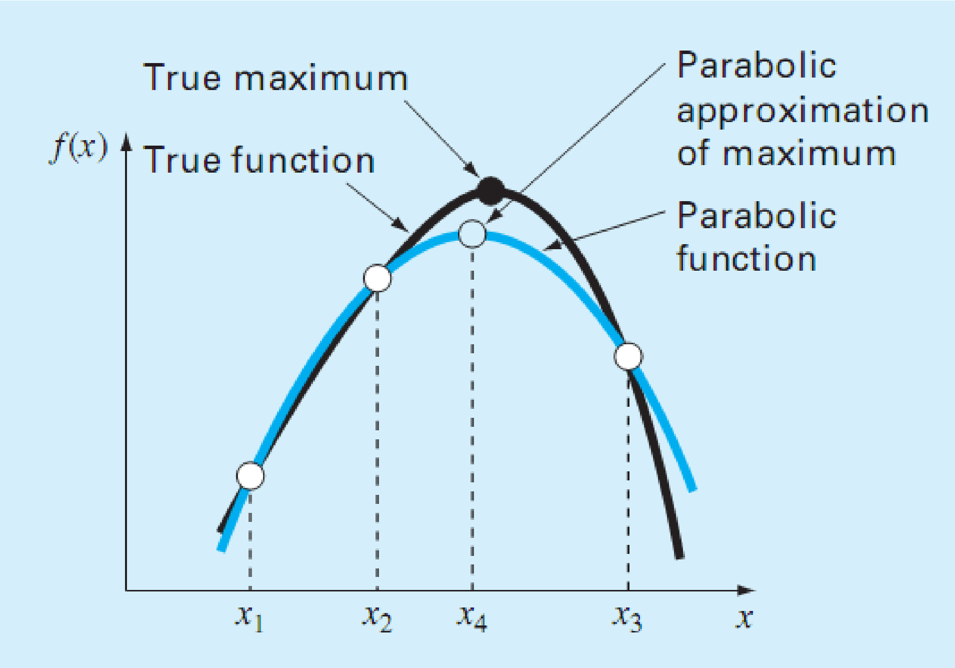
- با توجه به مقادیر تابع در نقاط $x_۱$ و $x_۲$ جدید، نقطه $x_۱$ مینیمم می باشد و بازه جدید بصورت [x_l=$x_۲$=۰.۹۹۴۳, x_u=۲.۴۷۲۱] در می آید. روند فوق تا رسیدن به دقت مورد قبول ادامه می یابد:

i	x_l	$f(x_l)$	x_2	$f(x_2)$	x_1	$f(x_1)$	x_u	$f(x_u)$	d
1	0	0	1.5279	−1.7647	2.4721	−0.6300	4.0000	3.1136	2.4721
2	0	0	0.9443	−1.5310	1.5279	−1.7647	2.4721	−0.6300	1.5279
3	0.9443	−1.5310	1.5279	−1.7647	1.8885	−1.5432	2.4721	−0.6300	0.9443
4	0.9443	−1.5310	1.3050	−1.7595	1.5279	−1.7647	1.8885	−1.5432	0.5836
5	1.3050	−1.7595	1.5279	−1.7647	1.6656	−1.7136	1.8885	−1.5432	0.3607
6	1.3050	−1.7595	1.4427	−1.7755	1.5279	−1.7647	1.6656	−1.7136	0.2229
7	1.3050	−1.7595	1.3901	−1.7742	1.4427	−1.7755	1.5279	−1.7647	0.1378
8	1.3901	−1.7742	1.4427	−1.7755	1.4752	−1.7732	1.5279	−1.7647	0.0851

7.2.2 Parabolic Interpolation یافتن اکسترمم توسط میانیابی مرتبه ۲

- در این روش با سه نقطه شروع که مقدار اکسترمم را در بر می گیرند شروع می شود. از این سه نقطه یک سهمی یکتا عبور می نماید که می توان با استخراج معادله آن نقطه اکسترمم آن را یافت. مقدار اکسترمم این سهمی به صورت زیر می باشد.

$$x_4 = x_2 - \frac{1}{2}\frac{(x_2-x_1)^2[f(x_2)-f(x_3)]-(x_2-x_3)^2[f(x_2)-f(x_1)]}{(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_3)]-(x_2-x_3)[f(x_2)-f(x_1)]}$$



مثال:

- مینیمم تابع زیر را با روش میانیابی مرتبه دو و شروع از نقاط داده شده بیابید.

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - 2\sin x \qquad x_1 = 0, x_2 = 1, \text{ and } x_3 = 4$$

- حل: مقادیر تابع در نقاط موجود:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \qquad & f(x_1) &= 0 \\ x_2 &= 1 \qquad & f(x_2) &= -1.5829 \\ x_3 &= 4 \qquad & f(x_3) &= 3.1136 \end{aligned}$$

- نقطه مینیمم تابع مرتبه دو:

$$x_4 = 1 - \frac{1}{2}\frac{(1-0)^2[-1.5829 - 3.1136] - (1-4)^2[-1.5829 - 0]}{(1-0)[-1.5829 - 3.1136] - (1-4)[-1.5829 - 0]} = 1.5055$$

- مقدار مینیمم تابع مرتبه دو:

$$f(1.5055) = -1.7691$$

- حال با راهبردی مشابه روش تقسیمات طلایی می توان یکی از نقاط را حذف نمود. از آنجا که مقدار تابع در x_4 کمتر از نقطه میانی است و در سمت راست نقطه میانی قرار دارد، نقطه x_1 حذف شده و داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & f(x_1) &= -1.5829 \\ x_2 &= 1.5055 & f(x_2) &= -1.7691 \\ x_3 &= 4 & f(x_3) &= 3.1136 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 1.5055 - \frac{1}{2}\frac{(1.5055-1)^2\,[-1.7691-3.1136]-(1.5055-4)^2\,[-1.7691-(-1.5829)]}{(1.5055-1)\,[-1.7691-3.1136]-(1.5055-4)\,[-1.7691-(-1.5829)]} \\ &= 1.4903 \end{aligned}$$

$$f(1.4903) = -1.7714$$

- روند فوق تا رسیدن به دقت مطلوب ادامه می یابد:

i	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$	x_4	$f(x_4)$
1	0.0000	0.0000	1.0000	−1.5829	4.0000	3.1136	1.5055	−1.7691
2	1.0000	−1.5829	1.5055	−1.7691	4.0000	3.1136	1.4903	−1.7714
3	1.0000	−1.5829	1.4903	−1.7714	1.5055	−1.7691	1.4256	−1.7757
4	1.0000	−1.5829	1.4256	−1.7757	1.4903	−1.7714	1.4266	−1.7757
5	1.4256	−1.7757	1.4266	−1.7757	1.4903	−1.7714	1.4275	−1.7757

تابع fminbnd در متلب

- مشابه روش ریشه یابی برنت که در آن از ترکیب روشهای ریشه یابی دربرگیرنده و باز برای تضمین ریشه یابی و راندمان بالا استفاده شد، برنت روش مرکبی برای کمینه یابی یک بعدی بدست آورد که تابع fminbnd در متلب بر اساس آن نوشته شده است.
- این تابع از ترکیب روش کند تقسیمات طلایی و روش میان یابی مرتبه دو برای بهینه سازی استفاده می نماید.
- فرم این دستور به صورت زیر می باشد.

```
[xmin, fval] = fminbnd(function,x1,x2)
```

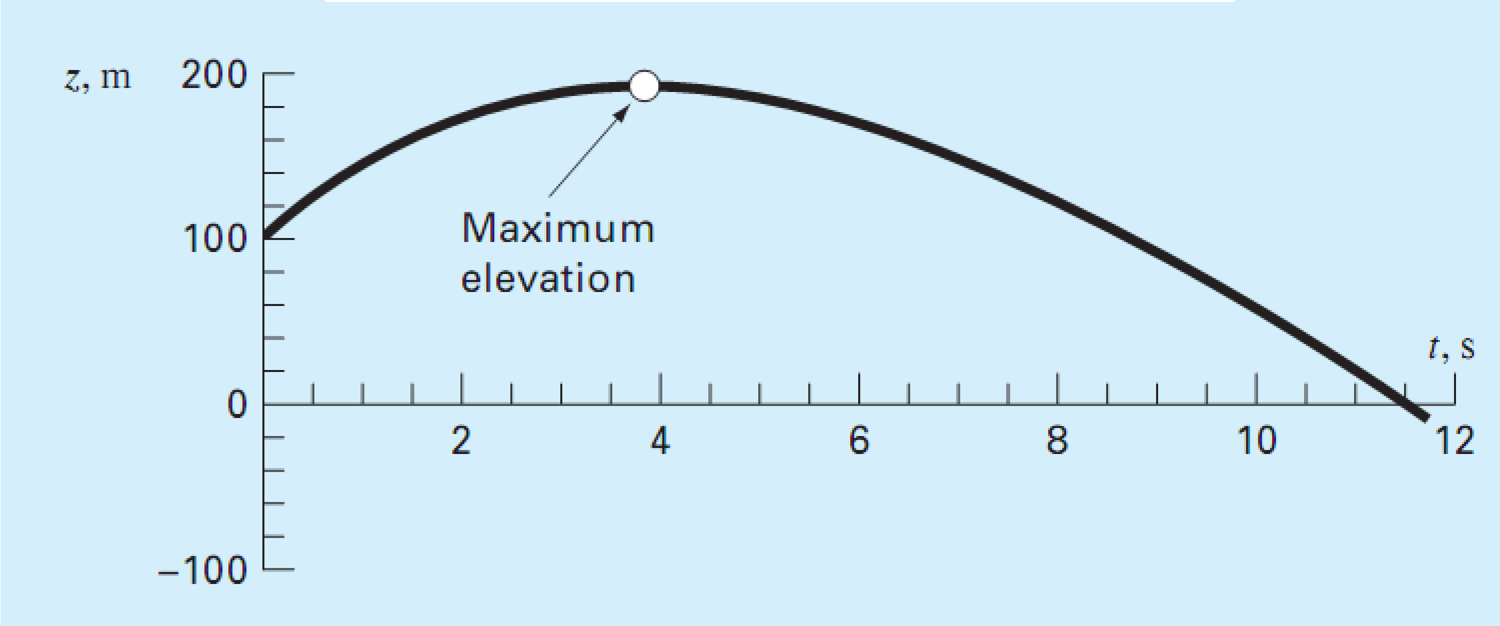
- x_1 و x_2 حدود بازه مینیمم یابی می باشند.

مثال:

- با استفاده از معادله حاکم بر مسیر یک پرتابه، حداکثر ارتفاع پرتابه را تحت شرایط زیر محاسبه نمائید.
- c: ضریب درگ
- m : جرم پرتابه
- v، و z، : سرعت و ارتفاع اولیه

$$z = z_0 + \frac{m}{c}\left(v_0 + \frac{mg}{c}\right)\left(1 - e^{-(c/m)t}\right) - \frac{mg}{c}t$$

```
g=9.81;v0=55;m=80;c=15;z0=100;
```



حل:

```
>> g=9.81;v0=55;m=80;c=15;z0=100;
>> z=@(t) -(z0+m/c*(v0+m*g/c)*(1-exp(-c/m*t))-m*g/c*t);
>> [x,f]=fminbnd(z,0,8)

x =
    3.8317
f =
 -192.8609
```

- با تغییر تنظیمات تابع می توان مراحل مختلف حل را بررسی نمود:

```
>> options = optimset('display','iter');
>> fminbnd(z,0,8,options)

Func-count        x          f(x)         Procedure
    1          3.05573    -189.759        initial
    2          4.94427    -187.19         golden
    3          1.88854    -171.871        golden
    4          3.87544    -192.851        parabolic
    5          3.85836    -192.857        parabolic
    6          3.83332    -192.861        parabolic
    7          3.83162    -192.861        parabolic
    8          3.83166    -192.861        parabolic
    9          3.83169    -192.861        parabolic
```

7.3.1 MATLAB Function: fminsearch

- این تابع برای مینیمم یابی بدون استفاده از مشتق بکار می رود. تابع fminsearch توانایی مینیمم یابی توابع غیریکنواخت را نیز دارا می باشد.

```
[xmin, fval] = fminsearch(function,x0)
```

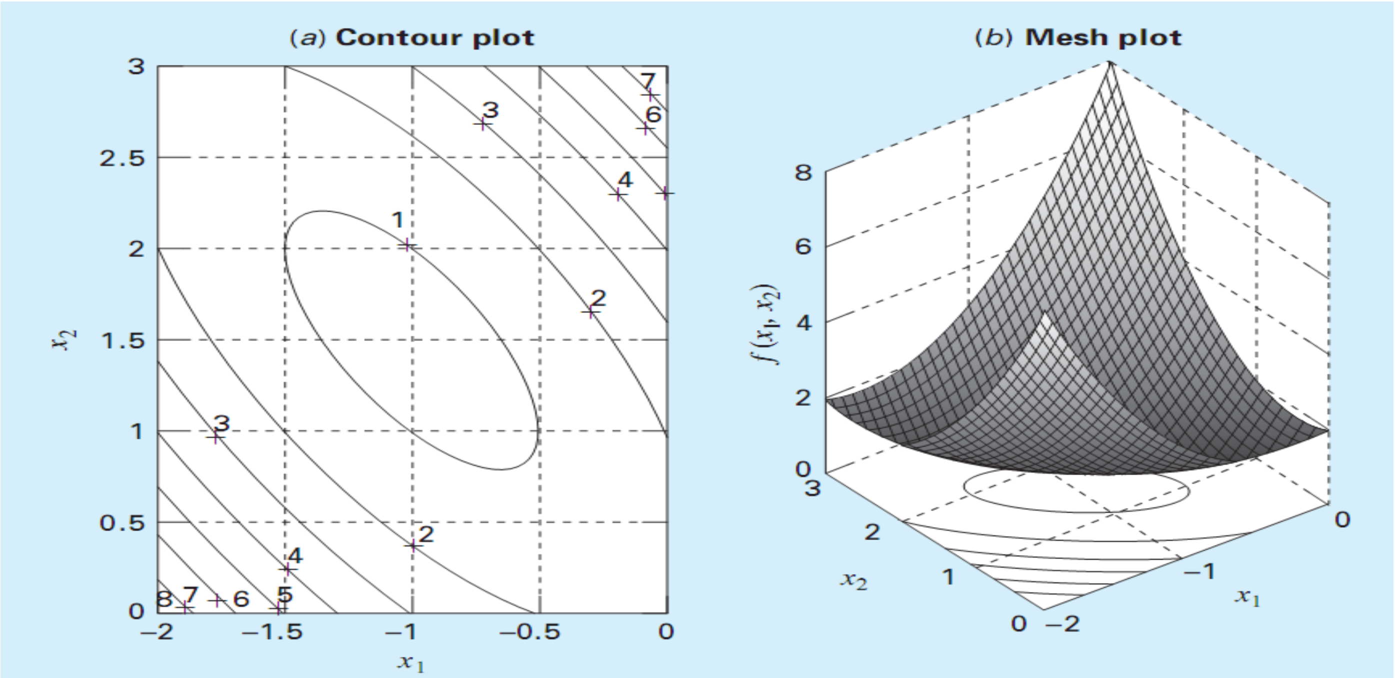
- x. حدس اولیه است که می تواند اسکالر، بردار یا ماتریس باشد.
- xmin نقطه مینیمم و fval مقدار تابع در آن می باشد.

مثال:

- مینیمم تابع زیر را در بازه داده شده با استفاده از دستور fminsearch بیابید.

$$f(x_1, x_2) = 2 + x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$-2 \le x_1 \le 0 \text{ and } 0 \le x_2 \le 3$$




```
>> f=@(x) 2+x(1)-x(2)+2*x(1)^2+2*x(1)*x(2)+x(2)^2;
>> [x,fval]=fminsearch(f,[-0.5,0.5])

x =
   -1.0000    1.5000
fval =
    0.7500
```